BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”



“ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES ESPECTRALES DE ENSAMBLES ALEATORIOS CON CONSTRICCIONES LOCALES Y GLOBALES: EL CASO DILUIDO”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

ALFREDO OROZCO VIVEROS

DIRECTORES DE TESIS

DR. JOSÉ ANTONIO MÉNDEZ BERMÚDEZ

No. de CVU: 1304141

ENERO DE 2026

Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas"

Estudio de las propiedades espectrales de ensambles aleatorios con constricciones locales y globales: El caso diluido

Tesis presentada por

Alfredo Orozco Viveros

para obtener el grado de

Maestría en Ciencias (Física)

Dirigida por
Dr. José Antonio Méndez Bermúdez

Puebla, México
Enero 2026

©2026 - Alfredo Orozco Viveros

Derechos Reservados

Agradecimientos

Llegado este punto, describir el profundo agradecimiento que quiero expresar solo parece hacerlo más pequeño de lo que realmente es. Las palabras solo pueden llevarme tan lejos.

Aun así, este trabajo se lo debo indudablemente a los pilares de mi vida.
A mi familia. Que sin el gran amor de mis padres María y Alfredo, sin el cariño y el confort de mi hermana Daniela, o sin el eterno apoyo de mis abuelos Margarita y Rodolfo, esto jamás hubiera comenzado. A mis amigos. César y Michelle, Alejandro y Edmundo, que con su gran afecto hicieron que los días que me llevaron hasta aquí fueran de mis favoritos. Y a mi novia. Que sin el inagotable ánimo y ternura de Virginia, este trabajo jamás se hubiera concluido.
Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a mis asesores el Dr Antonio y la Dra. Claudia, por su guía, paciencia y comentarios a lo largo del desarrollo de este trabajo. Asimismo, agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo económico brindado durante el estudio de este posgrado.

De verdad, gracias.

Dedicado a mi querida Luci,
atesoro esos mediodías eternos

Estudio de las propiedades espectrales de ensambles aleatorios con constricciones locales y globales: El caso diluido

Resumen

En esta tesis se estudian las propiedades espectrales de ensambles de matrices aleatorias diluidas con constricciones locales, dadas por reglas de suma fija por fila, y constricciones globales de simetría, correspondientes a los casos hermitiano y no hermitiano. Debido a que las correlaciones introducidas por estas constricciones dificultan un tratamiento analítico directo, el análisis se aborda desde un enfoque estadístico con el objetivo de determinar si estos ensambles exhiben propiedades universales. Si bien existen trabajos previos que analizan ensambles con constricciones, estos se han centrado principalmente en matrices completamente llenas, por lo que el efecto conjunto de la dilución y las constricciones sobre la caracterización espectral ha sido poco explorado. Para ello, se propone el uso de cantidades provenientes de la teoría de matrices aleatorias, asociadas tanto a autovalores como a autovectores, como herramientas para estudiar la estructura espectral de estos ensambles. A partir de un estudio numérico detallado de matrices de tamaño $n \times n$, se analiza el efecto del parámetro de dilución p sobre dichas cantidades, mostrando que las propiedades espectrales escalan con un parámetro del tipo $\xi \sim np$, lo que permite identificar distintos regímenes estadísticos independientes del tamaño de las matrices. En conjunto, nuestros resultados indican que estos ensambles con constricciones pueden ser caracterizados de manera consistente mediante el parámetro de escalamiento ξ, proporcionando evidencia de un comportamiento universal.

Study of the spectral properties of random ensembles with local and global constraints: The diluted case

Abstract

In this work we study the spectral properties of ensembles of diluted random matrices with local constraints, given by fixed row-sum rules, in both the Hermitian and non-Hermitian cases. Since the correlations introduced by these constraints restrict a direct analytical treatment, the analysis is implemented within a statistical framework with the aim of determining whether these ensembles exhibit universal properties. Although previous works have investigated constrained random matrix ensembles, they have mainly focused on fully connected matrices, leaving the combined effect of dilution and constraints on the spectral characterization largely unexplored. To address this problem, we use several quantities from random matrix theory associated with both eigenvalues and eigenvectors as tools to examine the spectral structure of these ensembles. Based on a detailed numerical study of matrices of size $n \times n$, we analyze the effect of the dilution parameter p on these spectral quantities, showing that they scale with a parameter of the form $\xi \sim np$. This scaling allows the identification of different statistical regimes that are independent of matrix size. Overall, our results indicate that random matrix ensembles with local constraints can be consistently characterized through a single scaling parameter ξ, providing evidence of universal behavior.

Participación en eventos

- Estudio de las propiedades espectrales de ensambles aleatorios con constricciones locales y globales: El caso diluido, Alfredo Orozco Viveros, José Antonio Méndez Bermúdez, Simposio de estudiantes, IFUAP, México (2025)

Contenido

1 Introducción **1**

2 Antecedentes **5**
2.1 Teoría de Matrices Aleatorias 5
2.2 Ensambles Gaussianos 7
2.2.1 Ensamble Gaussiano Unitario 7
2.2.2 Ensamble Gaussiano Ortogonal 8
2.2.3 Ensamble Gaussiano Simplético 9
2.2.4 Densidad de Probabilidad Conjunta 12
2.3 Ensambles no Hermitianos 13
2.4 Otros Ensambles 15
2.5 Medidas Espectrales 18
2.5.1 Estudio de Autovalores 18
2.5.2 Estudio de Autovectores 19
2.6 Ensamble de Matrices Aleatorias Diluidas 20

3 Ensamble de Matrices Aleatorias Simétricas con Constricciones **26**
3.1 Definición del Modelo 26
3.2 Estudio de Cantidades Espectrales 28
3.2.1 Estudio de Autovectores 28
3.2.2 Estudio de Autovalores 30
3.3 Escalamiento del EMAcC 31
3.4 Estudio del parámetro α 36
3.5 Degeneraciones en el ensamble 41
3.5.1 Norma Espectral 44

4 Ensamble de Matrices Aleatorias no Simétricas con Constricciones **47**
4.1 Definición del Modelo 47
4.2 Estudio de cantidades Espectrales 49
4.2.1 Estudio de Eigenvectores 49
4.2.2 Estudio de Autovalores 50
4.3 Escalamiento del EMANScC 52
4.4 Degeneraciones en el ensamble 58

4.4.1 Norma de Nikiforov 61

5 Conclusiones **64**

Bibliografía **68**

Capítulo 1

Introducción

Los ensambles de matrices aleatorias permiten estudiar el comportamiento típico de sistemas complejos sin necesidad de conocer los detalles específicos de cada sistema [1,2]. A menudo, los sistemas físicos, biológicos o sociales son demasiado complicados para ser modelados de manera exacta, pero al considerarlos como realizaciones aleatorias de un conjunto de reglas (el ensamble), es posible identificar propiedades universales que emergen de su estructura. Diversos sistemas en áreas como sistemas desordenados, redes complejas, mercados financieros, entre otros, han podido ser estudiados al representarlos mediante matrices aleatorias que satisfacen condiciones específicas del sistema bajo estudio [3–5]. Estas condiciones pueden imponer ciertas constricciones a los ensambles, las cuales pueden ser globales o locales [6].

Dentro de las constricciones globales, se incluyen leyes de conservación o simetría que afectan la naturaleza de las matrices del ensamble; un ejemplo básico de esto son las matrices simétricas o hermitianas (como ocurre en los conocidos ensambles gaussianos [1]). Por otro lado, entre las propiedades locales podemos mencionar constricciones que afectan directamente a los elementos de la matriz. Ejemplos clásicos de este tipo son las matrices estocásticas, en las que la suma de los elementos de cada fila es igual a uno [7], matrices de adyacencia de grafos con restricción de grados [8], matrices de PageRank (utilizadas por el algoritmo de búsqueda PageRank de Google) [9], entre otras.

El estudio de estos ensambles aleatorios implica principalmente el analisis de sus propiedades espectrales, ya que estas son fundamentales para comprender el comportamiento estadístico y dinámico de una amplia variedad de sistemas complejos. Por ejemplo, en redes neuronales, sistemas económicos o ecosistemas, las propiedades espectrales de las

matrices que los describen están directamente relacionadas con su estabilidad y su capacidad de adaptación a perturbaciones [3, 4, 10]. En redes de transporte o comunicación, las propiedades espectrales permiten estudiar el flujo de información o el transporte de recursos a través de la red [3]. En redes sociales, el análisis espectral ayuda a identificar comunidades y grupos influyentes, ya que los autovalores pueden revelar la existencia de subestructuras en la red [3, 11]. En el caso del PageRank, el espectro de la matriz de transición proporciona información sobre la velocidad de convergencia al ranking final [9, 12]. Podemos ver, entonces, que estudiar las propiedades espectrales de ensambles aleatorios nos conduce a un mejor entendimiento de una gran cantidad de sistemas complejos y que dependiendo de las propiedades del sistema es el ensamble que se debe utilizar. Bajo este contexto, nuestro objetivo es analizar las propiedades espectrales de ensambles aleatorios con constricciones globales y locales.

Las constricciones que vamos a considerar afectan principalmente la suma de los elementos en las filas o columnas de la matriz. Este tipo de matrices aleatorias se emplean en la representación de sistemas complejos en una variedad de campos, como los hamiltonianos bosónicos para fonones y ondas de espín en ferromagnetos de Heisenberg y XY, antiferromagnetos, vidrios de espín, matrices aleatorias euclidianas, redes de reactancia aleatoria, sistemas financieros y matrices de Google, entre otros [13–20]. Entender sus propiedades espectrales es fundamental para comprender mejor las características de los sistemas complejos que modelan.

En este trabajo estudiamos ensambles de matrices aleatorias diluidas, por lo que una fracción de sus elementos será cero, dando lugar a matrices dispersas. Sobre estas matrices imponemos una constricción local, dada por una regla de suma fija por fila, que introduce correlaciones no triviales entre sus elementos. Adicionalmente, consideramos dos tipos de constricciones globales que corresponden al caso hermitiano, que da lugar a matrices simétricas, y el caso no hermitiano, que conduce a matrices no simétricas. De esta forma, introducimos dos ensambles: el ensamble de matrices aleatorias simétricas con constricción (abreviado $EMAcC$) y su contraparte no simétrica (abreviada $EMANScC$).

En el nuevo marco propuesto, nos enfocaremos en estudiar si, en analogía con las propiedades de universalidad mostradas por otros modelos de matrices aleatorias [21–24], el EMAcC/EMANScC exhibe clases de universalidad en sus propiedades espectrales. Para ello, se analizarán cantidades como la razón de espaciamientos entre autovalores consecutivos complejos, la razón de espaciamientos entre autovalores singulares consecutivos, la

entropía de Shannon de los autovectores y la razón de participación de los autovectores. Asimismo, se explorará la posible existencia de un parámetro de escalamiento que, como combinación de los parámetros del sistema, permita caracterizar propiedades específicas del ensamble.

El uso de un parámetro de escalamiento es de gran importancia en el estudio de ensambles de matrices aleatorias, ya que permite entender que el comportamiento del sistema es equivalente a diferentes escalas. En sí, esto implica que las cantidades medidas pueden analizarse de manera equivalente en sistemas de distintos tamaños, siempre que la combinación de los parámetros correspondientes se mantenga fija. Como consecuencia, es posible acceder a la información relevante del ensamble utilizando matrices de tamaño moderado, lo que reduce considerablemente el costo computacional. Desde esta perspectiva, el escalamiento puede entenderse como una manifestación de una invariancia bajo cambios de escala, que permite predecir el comportamiento del sistema sin explorar de forma independiente cada uno de sus parámetros.

El análisis presentado en esta tesis se llevó a cabo mediante programas computacionales desarrollados en el lenguaje `C`. Dichos programas generan matrices aleatorias pertenecientes a los ensambles con las simetrías de interés, las cuales son posteriormente diagonalizadas de manera numérica mediante subrutinas de la librería de software libre LAPACK (**L**inear **A**lgebra **Pa**ckage). De esta diagonalización se obtienen los autovalores y los autovectores que forman la base para la implementación de las cantidades espectrales previamente mencionadas.

Esta tesis se estructura de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presenta una introducción a la teoría de matrices aleatorias. En particular, se describen los ensambles gaussianos y su extensión no hermitiana [38], así como la aparición de nuevos ensambles al imponer simetrías o constricciones adicionales, como las reglas de suma fija por fila. Dado que el estudio analítico de estos modelos resulta en general complicado, se motiva el uso de un enfoque estadístico, que será desarrollado a lo largo de los capítulos posteriores. De esto, se introducen las cantidades estándar de la teoría de matrices aleatorias en las que se basa dicho análisis. Por último, se reproducen resultados conocidos para los ensambles gaussianos y no hermitianos, los cuales sirven como referencia para el estudio de ensambles más complejos.

En los Capítulos 3 y 4 se estudian los ensambles de matrices aleatorias diluidas con constricciones locales. En el Capítulo 3 se analiza el ensamble de matrices aleatorias

simétricas con constricciones ($EMAcC$), mientras que en el Capítulo 4 se aborda su contraparte no simétrica ($EMANScC$). En ambos casos, el estudio se centra en las propiedades espectrales del ensamble, tanto de autovalores como de autovectores, poniendo especial énfasis en la posible existencia de un parámetro de escalamiento para las cantidades típicamente estudiadas de la teoría de matrices aleatorias (como la entropía de Shannon, la razón de participación y las razones entre autovalores consecutivos). Asimismo, se analizan los efectos introducidos por la constricción local sobre las propiedades espectrales y su influencia en la caracterización de cada ensamble. Finalmente, en el Capítulo 5 exponemos las conclusiones de la tesis.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Teoría de Matrices Aleatorias

La teoría de matrices aleatorias (o RMT por sus siglas en inglés) apareció primero en la matemática estadística en la década de los 1930, pero su notoriedad en la física apareció mucho tiempo después. En concreto, en 1951 Wigner propuso el uso de la RMT para describir ciertas propiedades de estados excitados de núcleos atómicos. Fue el primero en plantear que el comportamiento estadístico local de los niveles de una secuencia simple, entendida como una secuencia en la que todos los niveles comparten las mismas cantidades conservadas, es idéntico al de los autovalores de una matriz aleatoria [1]. Esto lo vemos desde la mecánica cuántica, donde los niveles de energía son descritos por los autovalores de un operador Hermitiano H llamado Hamiltoniano. La estructura de autovalores del Hamiltoniano debe emular el esquema de niveles de energía del sistema y por lo tanto debe de operar en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Para evitar trabajar directamente en este espacio, realizamos aproximaciones truncando la parte del espacio relevante al problema. Así, escogiendo una base en este espacio, podemos representar al Hamiltoniano por una matriz de dimensión finita, cuya ecuación de autovalores brinda información física del sistema.

En el caso de sistemas complejos, suele ocurrir que, debido a la falta de información, el Hamiltoniano es completamente desconocido o demasiado complicado para resolverse de manera analítica. En estas circunstancias, se recurre desde un inicio a una hipótesis estadísticas sobre H. Este acercamiento difiere de una forma fundamental a la aplicación estándar de conceptos estadísticos de la física. En la mecánica estadística, se

considera un ensamble compuesto de sistemas físicos idénticos, dictaminados por el mismo Hamiltoniano pero difiriendo en las condiciones iniciales. En contraste, en el planteamiento propuesto por Wigner se consideran ensambles de sistemas gobernados por diferentes Hamiltonianos, compartiendo únicamente las propiedades de simetría [2]. Este enfoque se centra en las propiedades genéricas de todos los miembros del ensamble. Al representar el operador H como una matriz, los elementos de esta se tratan como variables aleatorias, cuya distribución está restringida únicamente por las propiedades de simetría que definen al ensamble. A partir de un análisis basado en la teoría de grupos, Dyson [25] demostró que un ensamble irreducible de matrices invariantes bajo una simetría debe pertenecer a una de tres clases universales. Con este resultado unificó distintos enfoques previos, la clasificación de Wigner de representaciones de grupos con inversión temporal, la teoría general de álgebras matriciales de Weyl y el estudio de conjuntos de matrices aleatorias. Motivado por el estudio de Weyl sobre grupos clásicos, nombró estos tres ensambles como Ortogonal, Unitario y Simpléctico.

El carácter genérico de estos ensambles se refleja en las propiedades de simetría del Hamiltoniano, como se describe a continuación [26]. Para sistemas invariantes bajo inversión temporal y con simetría rotacional, el Hamiltoniano puede representarse como una matriz real y simétrica,

$$H_{mn} = H_{nm} = H^*_{mn}. \tag{2.1}$$

Los sistemas con espín entero y sin simetría rotacional también pertenecen a este conjunto. En cambio, cuando la inversión temporal se rompe, los Hamiltonianos son hermíticos, lo que significa que

$$H_{mn} = H^\dagger_{nm}. \tag{2.2}$$

Por último, en sistemas invariantes bajo inversión temporal pero con espín semientero y sin simetría rotacional, el Hamiltoniano puede escribirse en términos de cuaterniones, o de manera equivalente, mediante matrices de Pauli.

Es importante hacer notar que los requisitos generales de simetría se imponen directamente sobre la matriz. En ausencia de otras restricciones, los elementos pueden considerarse aleatorios y seguir, por ejemplo, una distribución Gaussiana, con media cero y varianza ν^2. En la siguiente sección definimos este grupo de ensambles para entender cómo es posible extraer propiedades del Hamiltoniano únicamente a partir de las simetrías generales mencionadas.

2.2 Ensambles Gaussianos

2.2.1 Ensamble Gaussiano Unitario

Como primer caso, consideramos un sistema que no es invariante bajo inversión temporal. En general, no conocemos detalles específicos de la matriz Hamiltoniana, salvo que debe ser una matriz hermitiana compleja que puede escribirse en cualquier representación, todas ellas relacionadas mediante transformaciones unitarias de similitud. De esto vemos que la matriz correspondiente al operador Hamiltoniano H no está restringida a solo ser real y que el grupo de transformaciones adecuado es el grupo unitario, que es requerido para preservar la propiedad de hermiticidad de H bajo transformaciones de similitud [27]. Esto implica que

$$[H, UU^{\dagger}] = 0, \tag{2.3}$$

que se cumple si $UU^{\dagger} = \mathbb{I}$. Así, nos dirigimos a la siguiente definición

Definición El Ensamble gaussiano unitario (o *GUE* por sus siglas en inglés) se define en el espacio $\mathbb{T}_{3G}$ de matrices hermitianas simétricas de tamaño $n \times n$ ante las siguientes propiedades:

1. El ensamble GUE es invariante bajo cada automorfismo

$$H \to U^{-1}HU \tag{2.4}$$

   del espacio de matrices $\mathbb{T}_{3G}$, donde U es una matriz unitaria.

2. Los elementos linealmente independientes de H son también estadísticamente independientes.

Para comprender mejor esta definición, notamos que esta primera propiedad puede formularse en términos de la invariancia de la densidad de probabilidad. La probabilidad de que una matriz H del GUE pertenezca al elemento de volumen $dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}^{(R)} \prod_{k<j} dH_{kj}^{(I)}$, donde $H_{kj}^{(I)}$ y $H_{kj}^{(R)}$ son las partes real e imaginaria de las entradas de H, es invariante bajo transformaciones unitarias [1]. Es decir, se cumple que

$$P(H')dH' = P(H)dH \tag{2.5}$$

si $H = U^{-1}HU$. La segunda propiedad también puede entenderse en términos probabilísticos, sabemos que la independencia estadística significa que la probabilidad conjunta

de todas las variables se factoriza como el producto de las probabilidades individuales. En este caso, la función $P(H)$ puede escribirse como un producto de funciones, cada una de las cuales depende únicamente de una sola variable.

2.2.2 Ensamble Gaussiano Ortogonal

Consideremos ahora el caso en que el Hamiltoniano es invariante bajo inversión temporal. En este contexto, el comportamiento depende del momento angular total j del sistema, lo cual se refleja en el operador de inversión temporal Θ. En particular, los valores propios de Θ^2 están determinados por $(-1)^{2j}$ [28]. De este modo, cuando j es entero se obtiene $\Theta^2 = 1$, mientras que para j semientero resulta $\Theta^2 = -1$.

Ambos casos pueden tratarse de manera directa [29]. Para $\Theta^2 = 1$ vemos que es posible elegir una base ortonormal Ψ_i tal que sea invariante ante la acción del operador de inversión temporal, esto es $\Theta\Psi_i = \Psi_i$. A partir de esta elección, y utilizando tanto la antiunitariedad del operador Θ como la condición de invariancia temporal impuesta al Hamiltoniano H, tenemos que

$$H_{jk} = H_{jk}^*, \tag{2.6}$$

lo cual implica que el Hamiltoniano puede representarse como una matriz estrictamente real bajo la elección de una base adecuada. En el caso $\Theta^2 = -1$, un procedimiento análogo puede conducir al mismo resultado de la ecuación 2.6, siempre que el Hamiltoniano sea además invariante bajo rotaciones. En resumen, concluimos que el Hamiltoniano puede representarse como una matriz real siempre que exista invariancia temporal y el sistema tenga espín entero; o bien, si el momento angular es semientero, la condición adicional de invariancia rotacional debe cumplirse.

Bajo estas consideraciones, nos restringimos a Hamiltonianos representados por matrices reales y simétricas. Las transformaciones que preservan estas propiedades forman el grupo ortogonal [27], definido como el conjunto de transformaciones reales unitarias que satisfacen

$$OO^T = \mathbb{I}. \tag{2.7}$$

Con estas consideraciones, nos dirigimos a la siguiente definición

Definición. El Ensamble Gaussiano Ortogonal (o *GOE*, por sus siglas en inglés) se define en el espacio $\mathbb{T}_{1G}$ de matrices reales simétricas de tamaño $n \times n$ mediante las siguientes propiedades:

1. El ensamble GOE es invariante bajo cada automorfismo

$$H \to O^T H O \tag{2.8}$$

del espacio de matrices $\mathbb{T}_{1G}$, donde O es una matriz ortogonal real.

2. Los elementos linealmente independientes de H son estadísticamente independientes.

De manera análoga al caso del GUE, las propiedades de esta definición pueden expresarse en términos de la invariancia de la medida de la densidad de probabilidad $P(H)dH$. En el GOE, la probabilidad de que una matriz H pertenezca al elemento de volumen $dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}$ es invariante bajo transformaciones ortogonales reales [1]. En otras palabras, se cumple la misma condición de invariancia discutida en la ecuación 2.5, ahora con $H' = O^T H O$. La segunda propiedad se entiende de la misma manera, la independencia estadística implica que la densidad de probabilidad conjunta $P(H)$ puede factorizarse como el producto de funciones, cada una de ellas dependiente únicamente de un elemento independiente de la matriz.

2.2.3 Ensamble Gaussiano Simplético

Por último, consideremos el caso en que el sistema posee momento angular semientero y no satisface la condición de invariancia rotacional. En este escenario, como consecuencia de la invariancia ante la inversión temporal tenemos la llamada degeneración de Krammer. Para ver esto [28], asumamos que H y Θ conmutan, y consideremos un eigenket de energía $|n\rangle$ junto con su estado temporalmente revertido $\Theta|n\rangle$. Debido a la condición de conmutación impuesta, ambos pertenecen al mismo nivel de energía E_n. Si estos correspondieran al mismo estado físico, solo deberían diferir por un factor de fase, lo que implica

$$\Theta^2 |n> = +|n> . \tag{2.9}$$

Pero esto contradice que, para momento angular semientero, $\Theta^2 = -1$. Concluimos que aunque $|n>$ y $\Theta|n>$ tengan la misma energía, representan estados distintos, lo que garantiza la existencia de una degeneración en cada nivel. Esta degeneración debe reflejarse en la estructura del Hamiltoniano de alguna manera, pues no hay forma en la que esta bivaluación pueda ser trivialmente eliminada.

Dado que Θ es un operador antiunitario, puede escribirse como el producto $\Theta = UK$, donde U es un operador unitario y K representa el operador de conjugación compleja.

Para momento angular semientero, la condición $\Theta^2 = -1$ implica que U debe ser una matriz unitaria antisimétrica [29,30]. De esto, aunque no es posible diagonalizar U mediante transformaciones unitarias de base, sí puede llevarse a una forma canónica estándar, dada por la matriz

$$Z = \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}, \tag{2.10}$$

que explícitamente corresponde a una estructura interna de bloques 2×2 que forman la matriz de banda

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & -1 & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Después de esta elección de base es posible realizar transformaciones unitarias S tales que

$$SZS^T = Z. \tag{2.12}$$

La ecuación 2.12 define el conjunto de transformaciones simplécticas [31]. El álgebra correspondiente suele expresarse en términos de cuaterniones. Para exhibir este comportamiento introducimos la notación cuaterniónica definida por $\tau_i = i\sigma_i$, donde σ_i son las matrices de spin de Pauli [32]. Con esto podemos introducir las siguientes definiciones.

Un cuaternión se define como

$$q = q_0 I + \sum_{i=1}^{3} q_i \tau_i, \tag{2.13}$$

donde los coeficientes q_j son números complejos.

El conjugado cuaterniónico $\bar{q}$ se obtiene reemplazando $\tau_i \mapsto -\tau_i$, lo cual difiere del conjugado complejo de q, dado por

$$q^* = q_0^* I + \sum_{i=1}^{3} q_i^* \tau_i. \tag{2.14}$$

Un cuaternión se dice real cuando satisface la condición $q = q^*$. Ahora, tenemos que combinando ambos tipos de conjugación se define el conjugado hermitiano como $q^\dagger = \bar{q}^*$.

Para incorporar esta estructura en nuestro desarrollo [33], consideremos ahora una matriz de dimensión $2n \times 2n$, que puede escribirse como una matriz Q de tamaño $n \times n$

con elementos cuaterniónicos q_{ij}, con $i, j = 1, 2, \ldots, n$. En esta representación es posible establecer distintas operaciones matriciales para Q.

En primer lugar, la transposición se define como

$$(Q^T)_{ij} = -\tau_2 \bar{q}_{ji} \tau_2. \tag{2.15}$$

Por otra parte, la conjugación hermitiana se expresa como

$$(Q^\dagger)_{ij} = q^\dagger_{ji}, \tag{2.16}$$

dado que $\tau_i^\dagger = -\tau_i$. Finalmente, la inversión temporal se escribe como

$$(Q^R)_{ij} = \bar{q}_{ji}. \tag{2.17}$$

Comparando (2.16) y (2.17), se sigue que

$$Q^R = Q^\dagger, \tag{2.18}$$

la cual es condición suficiente para que todos los elementos de Q sean cuaterniones reales. De esto, cada vez que (2.18) se cumple, llamamos a Q como una matriz cuaterniónica real.

La propiedad de ser cuaterniónica real se preserva bajo transformaciones simplécticas de la forma (2.12), del mismo modo en que la hermiticidad se preserva bajo transformaciones unitarias. Dado que la combinación de hermiticidad e invariancia bajo inversión temporal es suficiente para garantizar que una matriz sea cuaterniónica real, es natural esperar que esta propiedad sea parte intrínseca del Hamiltoniano en sistemas con momento angular semientero, particularmente cuando se encuentran sujetos a ciertas condiciones, como la acción de un campo externo que rompe la simetría rotacional, que no afecten la invariancia a la reversibilidad temporal. Con estas consideraciones, nos dirigimos a la siguiente definición.

Definición El Ensamble Gaussiano Simplético (o *GSE*, por sus siglas en inglés) se define en el espacio $\mathbb{T}_{2G}$ de matrices cuaterniónicas reales de tamaño $n \times n$ mediante las siguientes propiedades:

1. El ensamble GSE es invariante bajo cada automorfismo

$$H \to S^{-1} H S \tag{2.19}$$

   del espacio de matrices $\mathbb{T}_{2G}$, donde S es una matriz simplética.

2. Los elementos linealmente independientes de H son estadísticamente independientes.

De manera análoga a los ensambles ortogonal y unitario, la definición anterior puede expresarse en términos de la densidad de probabilidad. La probabilidad $P(H)\,dH$ de que una matriz del GSE se encuentre en el elemento de volumen $dH = \prod_{k\leq j} dH_{kj}^{(0)} \prod_{i=1}^{3} \prod_{k<j} dH_{kj}^{(i)}$, resulta invariante bajo transformaciones simpléticas [1], es decir, se cumple nuevamente la ecuación (2.5) con $H' = S^{-1}HS$. Por su parte, la condición de independencia estadística de los elementos implica, como en los casos anteriores, que $P(H)$ se factoriza en un producto de funciones.

2.2.4 Densidad de Probabilidad Conjunta

Si bien las simetrías anteriores permiten caracterizar a cada ensamble, la forma de la función de densidad de probabilidad $P(H)$ aún puede resultar ambigua. Tenemos que no es posible especificar su expresión de manera completamente libre, pues las propiedades elaboradas previamente imponen restricciones. Una manera de resolver esta ambigüedad es asumir que la información contenida en la matriz Hamiltoniana es mínima y junto a la imposición de ciertas restricciones, podemos derivar la forma de $P(H)$ a través del método de multiplicadores de Lagrange, como se nos muestra en [30, 34]. Para esto definimos la información como

$$I = -\int dH\, P(H)\, \ln P(H). \tag{2.20}$$

La información debe estar sujeta a dos condiciones: (i) la densidad de probabilidad debe estar normalizada a uno y (ii) la posibilidad de encontrar elementos matriciales muy grandes en la matriz Hamiltoniana sea despreciable. Para imponer estas restricciones se introducen multiplicadores de Lagrange λ_0 y λ_1, de modo que

$$I(\lambda_0, \lambda_1) = -\int dH \Big[P(H)\, \ln P(H) + \lambda_0 P(H) + \lambda_1 \operatorname{Tr}(HH^\dagger)\, P(H)\Big]. \tag{2.21}$$

Al extremizar esta expresión, tomando la primera variación de (2.21) e igualando a cero, obtenemos

$$\delta I = \int dH\, \delta P(H) \Big[\ln P(H) + 1 + \lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{Tr}(HH^\dagger)\Big] = 0. \tag{2.22}$$

Dado que $\delta P(H)$ es arbitraria y no nula, se obtiene que

$$P(H) = \exp\big[-(1 + \lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{Tr}(HH^\dagger))\big], \tag{2.23}$$

donde λ_0 y λ_1 se determinan a partir de las mismas constricciones (i) y (ii). Haciendo uso de la propiedad de la traza $\operatorname{Tr}(H) = \sum_{i=1}^{n} e_i$, donde e_i son los autovalores de H, y reescalando

en términos de las energías adimensionales $x_i = \sqrt{2\lambda_1}\, e_i$, obtenemos la expresión para la función de densidad de probabilidad conjunta (jpdf, por sus siglas en inglés) de los niveles:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n\beta} \prod_{i>j=1}^{n} |x_j - x_i|^{\beta} \exp\left[-\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right], \tag{2.24}$$

donde $C_{n\beta}$ es una constante de normalización y el parámetro de Dyson $\beta = 1, 2, 4$ distingue entre matrices H reales simétricas (GOE), hermitianas complejas (GUE) o cuaterniónicas reales (GSE), respectivamente.

Tanto como concepto como herramienta de cálculo, la tripleta (o *threefold way*, como es denominada en inglés) de ensambles de Dyson ha sido sumamente exitosa. Gran parte de este éxito se debe a que estos ensambles son exactamente solubles, es decir, se tienen expresiones analíticas para cantidades estadísticas, lo que permite realizar predicciones teóricas sobre sistemas físicos reales. Sin embargo, la tripleta de Dyson se restringe a Hamiltonianos hermitianos, cuyo espectro es real. En muchos problemas de la física actual (como sistemas disipativos [35], localización de muchos cuerpos [36] o redes neuronales [37]) resulta necesario extender el marco hacia Hamiltonianos no hermitianos.

2.3 Ensambles no Hermitianos

Poco después de la formulación de la tripleta gaussiana, Ginibre [38] propuso una extensión matemática que dio lugar a una teoría análoga para ensambles no Hermitianos, cuyo objetivo es describir la distribución de autovalores en casos donde cualquier punto del plano complejo puede pertenecer al espectro.

De manera análoga a la tripleta gaussiana de Dyson, Ginibre definió sus ensambles a partir de dos partes fundamentales. La primera consiste en un espacio algebraico de matrices, denotado por Z, formado por matrices de tamaño $n \times n$ cuyos elementos pueden ser reales, complejos o cuaterniónicos reales; y la segunda, es una medida o distribución de probabilidad sobre dicho espacio, elegida como

$$d\mu(S) \;=\; d\mu_L(S)\, \exp\left[-\frac{1}{a^2}\, \mathrm{Tr}\,(SS^{\dagger})\right], \tag{2.25}$$

donde $d\mu_L$ es la medida lineal sobre el espacio de matrices, $S \in Z$ y a es una constante positiva.

La distribución (2.25) queda determinada de manera única por dos condiciones, que son (i) la invariancia bajo la representación adjunta de Z_U, donde Z_U es el grupo de

matrices unitarias de Z. O más precisamente si $U \in Z_U$ entonces

$$d\mu(S) = d\mu(U^\dagger SU), \tag{2.26}$$

y (ii) la independencia estadística de los elementos matriciales. De acuerdo con la elección del espacio algebraico, se obtienen los tres ensambles de Ginibre

i El Ensamble Unitario de Ginibre (abreviado *GinUE*),

ii El Ensamble Simplético de Ginibre (abreviado *GinSE*),

iii El Ensamble Ortogonal de Ginibre (abreviado *GinOE*).

Es natural preguntarse ahora sobre la distribución de autovalores de cada uno de estos ensambles [39]. Consideremos primero el caso complejo correspondiente al *GinUE*, cuyo espectro se caracteriza por presentar una densidad aproximadamente uniforme de autovalores en el plano complejo. La jpdf de estos autovalores $\{z_i\}_{i=1}^n$ se escribe como [38]

$$P(z_1, \ldots, z_n) = C_n \prod_{i<j}^{n} |z_i - z_j|^2 \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right], \tag{2.27}$$

donde C_n es un factor de normalización. Una de las primeras aplicaciones de este modelo fue señalada por el propio Ginibre al considerar el modelo de gas electrostático propuesto por Wigner [40]: se observa que la distribución de eigenvalores $\{z_i\}$ es idéntica a la distribución de posiciones de las cargas de un gas de Coulomb bidimensional en un potencial de oscilador armónico a una temperatura correspondiente a $\beta = 2$.

Para el caso cuaterniónico, correspondiente al *GinSE*, la densidad de autovalores complejos también es uniforme, pero la densidad de probabilidad de los autovalores reales tiende a cero. Esto corresponde a una depleción de los autovalores a lo largo del eje real. La jpdf de dichos autovalores es [38]

$$P(z_1, \ldots, z_n) = C_n \prod_{i=1}^{n} |z_i - z_i^*| \prod_{i<j\leq n}^{n} |z_i - z_j|^2 |z_i - z_j^*|^2 \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right], \tag{2.28}$$

donde nuevamente C_n es un factor de normalización. El análogo electrostático con un gas de Coulomb para este ensamble es menos directo, aunque ha sido discutido en la literatura [41].

Para el caso del *GinOE*, a diferencia de los dos ensambles anteriores, la densidad de autovalores exhibe una acumulación a lo largo del eje real. Esto se debe a que el espectro complejo de autovalores $\{w_i\}_{i=1}^n$ de una matriz perteneciente a este ensamble contiene

una fracción finita de autovalores reales, mientras que el resto de los autovalores complejos aparecen siempre en la forma de pares conjugados. Para encontrar la distribución de autovalores, este ensamble puede ser abordado dividiendo el espacio entero $\mathbb{T}_1(n)$ generado por todas las matrices reales $n \times n$ en subespacios mutuamente exclusivos $\mathbb{T}_1\left(\frac{n}{k}\right)$ asociados con las matrices $H_k \subset H$ con k autovalores reales. Tenemos que la k-ésima jpdf parcial (con $0 \leq k \leq n$) se escribe como [42]:

$$\begin{aligned} P_{H\in\mathbb{T}(\frac{n}{k})}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k;z_1,\ldots,z_l) &= C_n \prod_{i>j}^{k} |\lambda_i-\lambda_j| \prod_{j=1}^{k} \exp\left[-\frac{\lambda_j^2}{2}\right] \\ &\times \prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{l}(\lambda_j - z_i)(\lambda_j-\bar{z}_i) \prod_{i>j=1}^{l} |z_i-z_j|^2 \, |z_i-\bar{z}_j|^2 \\ &\times \prod_{j=1}^{l}(z_j-\bar{z}_j)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{z_j-\bar{z}_j}{i\sqrt{2}}\right)\,\exp\left[-\frac{z_j^2+\bar{z}_j^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

donde, como en los dos casos anteriores, C_n es una constante de normalización y se ha usado la sustitución $(w_1,...,w_n) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k;z_1,\ldots,z_l)$ para indicar que el espectro está compuesto por k autovalores reales y $2l$ autovalores complejos, tal que $k+2l=N$. Es plausible estudiar estas densidades de probabilidad parciales de manera individual, ya que cada una de ellas contribuye aditivamente a la jpdf de los N autovalores de H. Así, ésta densidad conjunta de probabilidad puede escribirse como

$$P_N(w_1\ldots w_n) = \sum_{k=0}^{n} P_{H\in\mathbb{T}(n/k)}(w_1\ldots w_n). \tag{2.30}$$

El caso en que todos los autovalores son reales, correspondiente a $k=n$, fue estudiado por Ginibre en su trabajo original [38]. Ningún análogo físico con la interpretación del gas Coulombiano bidimensional ha sido reportado.

2.4 Otros Ensambles

Al imponer constricciones o simetrías adicionales surgen nuevos ensambles de matrices que no se ajustan a las descripciones anteriores. Un ejemplo común es el de operadores lineales con reglas de suma fijas en sus filas o columnas, los cuales aparecen de forma natural en diversas áreas de la física.

Es conveniente utilizar el enfoque de la teoría de matrices aleatorias para estos operadores, pues la falta de información debido a la complejidad misma del Hamiltoniano del

sistema nos lleva a su aleatorización. En este marco, el comportamiento estadístico puede modelarse apropiadamente mediante un ensamble de matrices aleatorias, cada una sujeta a una regla fija en sus filas o columnas. Las condiciones que determinan la naturaleza de la matriz pueden dividirse en dos categorías: las constricciones "globales", impuestas por simetrías o leyes de conservación que afectan las propiedades estructurales de la matriz; y las constricciones "locales", que actúan directamente sobre los elementos de la matriz y sus propiedades de distribución [6]. Así, nos interesa comprender no solo la influencia de las constricciones locales en la estadística del espectro, sino también el papel que desempeñan las constricciones globales. En particular, la regla de suma impuesta sobre las filas o columnas de H introduce de manera explícita restricciones en los autovalores y autovectores de la matriz, las cuales modifican su distribución.

Para observar los efectos de esta regla de suma en filas, consideremos un sistema descrito por una matriz aleatoria real simétrica de tamaño $N \times N$ sujeta a la constricción

$$\sum_{k=1}^{n} H_{lk} \;=\; \alpha_l, \tag{2.31}$$

donde α_l es nuestra constante de constricción. A falta de cualquier otro tipo de información, la densidad de probabilidad $\rho(H)$ de los elementos de H puede ser derivada utilizando el mismo principio de minimización de la información presentado en la sección de *Ensambles Gaussianos*. Recordemos que la medida estándar para cuantificar la información contenida en una distribución $\rho(H)$ está dada por la ecuación (2.20). Aplicando nuevamente el principio variacional δI, la forma de $\rho(H)$ se obtiene mediante multiplicadores de Lagrange que incorporan las restricciones del sistema. Siguiendo el enfoque de [6], de este procedimiento se deriva la expresión explícita de la función de densidad de probabilidad del ensamble con constricciones; a continuación presentamos el esquema general.

Para esto consideremos que $\rho(H)$ está normalizada, que se conocen tanto la media $\langle H_{kl} \rangle$ como las correlaciones $\langle H_{ij} H_{kl} \rangle$ de las entradas fuera de la diagonal y que adicionalmente la matriz cumple con la regla de suma dada en la ecuación (2.31). Esto junto con la condición variacional $\delta I = 0$, suscita que $\rho(H)$ tome la forma Gaussiana

$$\rho(H) \;=\; \rho_s(H) \prod_{l=1}^{n} \delta\left(\sum_{k} H_{kl} - \alpha_l \right), \tag{2.32}$$

donde $\rho_s(H)$ describe la distribución de probabilidad asociada a las entradas fuera de la diagonal. Tenemos que la densidad conjunta de los autovalores $P(e_1 \dots e_n)$ depende enter-

amente de la forma de ρ_s, por lo que es posible derivarla de la ecuación (2.32). Para ver esto utilizamos la relación

$$P(E,O) \;=\; \rho(H)\, J(E,O|H), \tag{2.33}$$

donde $J(E,O|H)$ es el jacobiano asociado a la transformación desde el espacio de matrices H al espacio de autovalores E y autovectores O. Como las constricciones impuestas sobre los elementos matriciales se traducen en restricciones sobre los autovalores y autovectores, integramos la ecuación sobre el espacio de autovectores tal que (2.33) adopta la forma

$$P(e_1,\ldots,e_n) = \delta(e_n-\alpha)\Delta_n(E)\int \rho_s(E;O)\delta_o(O)dO, \tag{2.34}$$

donde $\Delta_n(E)$ es el jacobiano resultante asociado a una matriz real simétrica sin constricciones adicionales y $\delta_o(O)$ representa las constricciones impuestas sobre las autovectores. La integral en (2.34) depende directamente de la forma específica de ρ_s y en general no puede evaluarse de manera sencilla. De esto, y como análogo a los ensambles gaussianos descritos anteriormente, elegimos la forma de ρ_s como una distribución gaussiana para las entradas fuera de la diagonal, con media cero y varianza uniforme. Así, se toma

$$\rho_s(H) = \mathcal{N}\exp\left[-\gamma \sum_{k,l;k\neq l} H_{kl}^2\right], \tag{2.35}$$

donde $\mathcal{N}$ es una constante de normalización y γ es un parámetro de la distribución arbitrario.

Una dificultad que presenta esta forma de ρ_s es la dependencia explícita con la medida de correlaciones f entre autovectores. La sustitución de esta ecuación en (2.34) nos da la expresión para la densidad conjunta de autovalores $P(e_1 \ldots e_n)$ del ensamble. Usando la transformación de variables $r_j = \sqrt{\gamma}(e_j-\alpha)$, podemos escribir (2.34) como

$$P(r_1 \ldots r_n) = \int P_c(r;O)\delta_o(O)DO \tag{2.36}$$

donde

$$P_c(r;O) = \mathcal{N}\delta(r_n)\Delta_n(r)\exp\left[-\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1} r_m^2 - \frac{1}{2}\sum_{m,j=1}^{n-1}|r_m-r_j|^2 f_{mj}\right]. \tag{2.37}$$

Podemos observar que esta expresión es independiente de la constante α y del parámetro γ, lo que indica que la elección arbitraria de ninguno de ellos afecta la estadística del ensamble. Para obtener la densidad conjunta de autovalores final sería necesario integrar la ecuación

(2.36); sin embargo, debido a la dependencia de f_{mj}, como se mencionó anteriormente, esta integración resulta en general bastante complicada.

El encontrarnos nuevamente con esta complicación nos sugiere explorar rutas alternativas para abordar el problema, como recurrir a la investigación numérica de este ensamble. Este análisis se apoya en varias de las cantidades estadísticas usuales empleadas en la teoría de matrices aleatorias, las cuales presentamos a continuación.

2.5 Medidas Espectrales

2.5.1 Estudio de Autovalores

Para el estudio estadístico de las propiedades de secuencias de autovalores, varias cantidades basadas en el espaciado entre niveles, es decir, en la distancia $s_i = e_{i+1} - e_i$ entre niveles consecutivos e_{i+1} y e_i, han demostrado ser herramientas fundamentales para caracterizar las correlaciones en el espectro.

La relevancia, en el caso hermitiano, de estas se entiende a partir de las conjeturas universalmente aceptadas de Berry–Tabor [43] y Bohigas–Giannoni–Schmit [44]. La primera establece que los sistemas integrables presentan una estadística de Poisson, correspondiente a un espectro cuyo espaciado entre niveles es independiente. En contraste, la segunda conjetura muestra que los sistemas con un semi-límite clásico caótico exhiben una estadística descrita por la teoría de matrices aleatorias, específicamente por los ensambles Gaussianos, caracterizados por presentar fuertes correlaciones (o una llamada repulsión) entre sus niveles de energía.

Para el caso no Hermitiano, una generalización de las conjeturas de Berry–Tabor y Bohigas–Giannoni–Schmit a sistemas disipativos [45] nos muestra que, de manera análoga al caso hermitiano, los sistemas integrables siguen una estadística de Poisson, mientras que los sistemas caóticos exhiben una estadística descrita por los ensambles no Hermitianos de Ginibre presentados anteriormente.

Una de las herramientas más empleadas para caracterizar las propiedades espectrales de ensambles de matrices aleatorias ha sido la distribución del espaciado entre niveles $P(s)$ [1]. A pesar de su utilidad, esta nos introduce ciertas dificultades, ya que para poder comparar las predicciones de la RMT con secuencias de autovalores es necesario eliminar la dependencia respecto a la densidad espectral local, la cual depende del sistema. Esto

se logra mediante el procedimiento conocido como desdoblamiento del espectro, que consiste en transformar la secuencia de niveles $\{e_j\}$ a una nueva secuencia con espaciamiento promedio unitario [46]. Sin embargo, dicho desdoblamiento del espectro no es trivial ya que requiere una expresión analítica de la densidad de niveles, que en general no se conoce. Para espectros complejos la situación es aún más delicada, pues el desdoblamiento del espectro resulta ser ambiguo.

A modo de eludir este inconveniente se introdujeron razones de espaciados consecutivos [47]. En específico, en este trabajo analizaremos dos de ellas [48]. La primera es la razón entre los autovalores complejos más cercanos, dada por

$$r_{\mathbb{C}}^{i} = \frac{|\lambda_i^{NN} - \lambda_i|}{|\lambda_i^{NNN} - \lambda_i|}, \tag{2.38}$$

donde λ_i^{NN} y λ_i^{NNN} son, respectivamente, los valores propios complejos más cercanos y los segundos más cercanos a λ_i. La segunda es la razón entre valores singulares consecutivos,

$$r_{sv}^{i} = \frac{\min(\sigma_{i+1} - \sigma_i,\, \sigma_i - \sigma_{i-1})}{\max(\sigma_{i+1} - \sigma_i,\, \sigma_i - \sigma_{i-1})}, \tag{2.39}$$

donde los valores singulares σ_i corresponden a la raíz cuadrada de los autovalores del producto AA^T. Es decir, si λ_i son los autovalores de AA^T, entonces $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

2.5.2 Estudio de Autovectores

Para el estudio estadístico autovectores utilizamos primero la Entropía de Shannon S, una cantidad ampliamente utilizada en el estudio de matrices aleatorias así como en Hamiltonianos asociados a sistemas desordenados. La entropía de Shannon puede interpretarse como una medida de la información promedio contenida en un estado debido a que esta permite cuantificar el grado de complejidad de un autovector, proporcionando información sobre el número de componentes principales que lo conforman. Para un autovector ψ^i, cuyas componentes satisfacen la condición de normalización $\sum_{m=1}^{n} \left|\psi_m^i\right|^2 = 1$, la entropía esta dada por [49]

$$S^i = -\sum_{m=1}^{n} |\psi_m^i|^2 \, \ln |\psi_m^i|^2. \tag{2.40}$$

Notemos que el valor mínimo de la entropía $S = 0$ se obtiene cuando en Ψ^i solo existe una componente principal y este se encuentra totalmente localizado; mientras que el valor

máximo de S, $S = \ln n$, se obtendrá para estados con componentes uniformemente distribuidas.

Otra de las cantidades que utilizamos para caracterizar autovectores es la Razón de Participación (o PR, por sus siglas en inglés), la cual, al igual que la entropía de Shannon, cuantifica el grado de localización o extensión de un estado $\psi^{(i)}$ en una base dada. Esta cantidad mide también de manera efectiva el número de componentes principales que contribuyen a un autovector y se define como [50]

$$\mathrm{PR}^i = \left[\sum_{m=1}^{n} \left| \psi_m^i \right|^4 \right]^{-1} . \tag{2.41}$$

Como introducción al estudio estadístico de los ensambles de matrices aleatorias y de sus propiedades espectrales, analizaremos las cantidades definidas arriba para el caso general de un ensamble de matrices aleatorias diluidas sin constricciones, tanto en su versión simétrica como no simétrica. Bajo este marco, las cantidades espectrales presentadas poseen valores promedio bien establecidos, dados por el ensamble de Poisson (PE, por sus siglas en inglés), que corresponde a matrices aleatorias diagonales, y por los ensambles GOE y GinOE en el régimen de matrices aleatorias llenas, para los casos simétrico y no simétrico, respectivamente. Dichos valores de referencia se reportan en la Tabla 2.1, y serán utilizados como valores de referencia en el análisis del ensamble de matrices aleatorias diluidas sin constricciones.

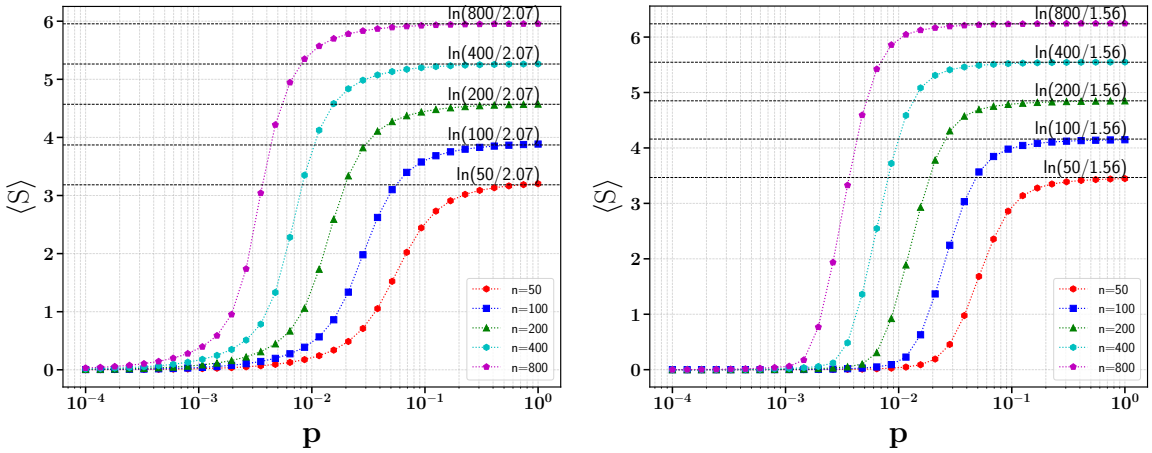
	S	PR	$r_{\mathbb{C}}$	r_{sv}
PE	0 [49]	1 [50]	0.5 [51]	0.386 [48]
GOE	$\ln(n/2.07)$ [24]	$n/3$ [50]	0.569 [51]	–
GinOE	$\ln(n/1.56)$ [51]	$n/2.04$ [52]	0.737 [51]	0.531 [48]

Tabla 2.1: Valores promedio de las cantidades espectrales correspondientes al PE, el GOE y el GinOE.

2.6 Ensamble de Matrices Aleatorias Diluidas

Definición El Ensamble de Matrices Aleatorias Diluidas (EMAD) se define como el conjunto de matrices reales, simétricas o no simétricas, de tamaño $n \times n$, cuyos elementos

son variables aleatorias gaussianas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con media cero y varianza unitaria. En el caso simétrico los elementos de la diagonal tienen varianza doble, como es usual para matrices correspondientes al GOE. La dilución de estas matrices se introduce mediante un parámetro $p \in [0, 1]$, que determina si los elementos fuera de la diagonal son ceros o variables aleatorias gaussianas. En particular, para $p = 0$ todos los elementos fuera de la diagonal son cero, mientras que para $p = 1$ todos los elementos son variables gaussianas. Como resultado principal de la introducción del parámetro de dilución



(a) (b)

Figura 2.1: Promedio de la entropía de Shannon $\langle S \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMAD en el caso (a) simétrico y (b) no simétrico para tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Los puntos representan los valores de la entropía obtenidos numéricamente, mientras que las líneas punteadas indican las predicciones teóricas en el límite completamente lleno, correspondientes al GOE, $\langle S \rangle_{\text{GOE}} = \ln(n/2.07)$, y al GinOE, $\langle S \rangle_{\text{GinOE}} = \ln(n/1.56)$, respectivamente.

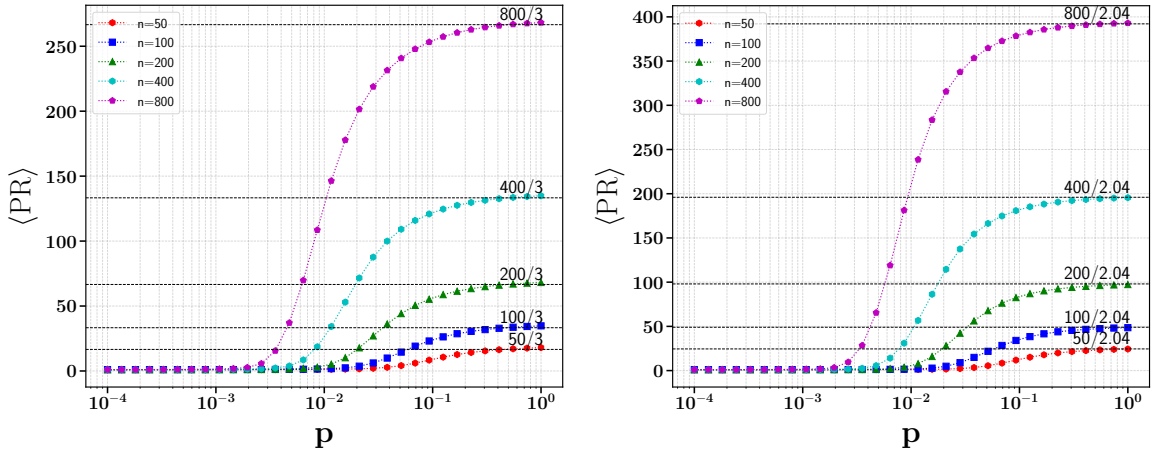
p, se espera observar transiciones entre ensambles que actúan como casos límite, dependiendo de la simetría del sistema. En el caso simétrico, los dos extremos correspondientes a $p = 0$ y $p = 1$ están dados por el PE y el GOE, respectivamente. Para el caso no simétrico, en el límite $p = 0$ se obtiene nuevamente el PE. En cambio, para $p = 1$ la estadística estará dada por el GinOE.

Para el análisis estadístico de las propiedades espectrales en ambos casos, simétrico y no simétrico, se desarrollaron programas computacionales que emplean diagonalización numérica mediante la subrutina `DGEEV` de la biblioteca de código abierto LAPACK (Linear

Algebra Package). Con estos programas calculamos los promedios de las cantidades previamente introducidas analizando cómo la dilución afecta estos promedios y, en consecuencia, la estructura espectral del sistema.

A continuación, cada gráfica presentada a partir de esta Sección fue generada usando 1×10^6 datos, con matrices cuadradas simétricas y no simétricas de tamaño $n = 50$, 100, 200, 400 y 800.

Como resultado asociado al estudio de autovectores, las Figuras 2.1 y 2.2 presentan los valores promedio de la entropía de Shannon, $\langle S \rangle$, y de la Razón de Participación, $\langle PR \rangle$, en función del parámetro de dilución p, obtenidos para el EMAD para ambas simetrías.



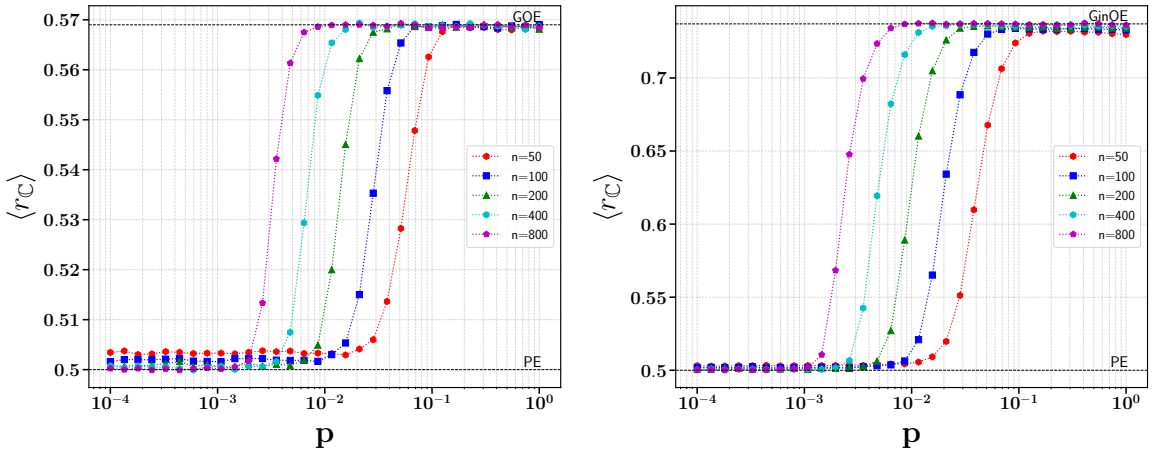
(a) (b)

Figura 2.2: Promedio de la Razón de Participación $\langle PR \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMAD en el caso (a) simétrico y (b) no simétrico para tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Los puntos representan los valores del PR obtenidos numéricamente, mientras que las líneas punteadas indican las predicciones teóricas en el límite completamente lleno, correspondientes al GOE, $\langle PR \rangle_{\text{GOE}} = n/3$, y al GinOE, $\langle PR \rangle_{\text{GinOE}} = n/2.04$, respectivamente.

Para el caso simétrico, las Figuras 2.1a y 2.2a muestran un excelente acuerdo con las predicciones teóricas para ambas cantidades. Vemos que en el régimen fuertemente diluido, es decir, para valores pequeños de p, las curvas correspondientes a todos los tamaños n convergen a los límites establecidos por el PE, que son $\langle S \rangle_{\text{PE}} = 0$ y $\langle PR \rangle_{\text{PE}} = 1$. Aunque las referencias no son visibles en esta región debido a la escala (especialmente en el caso del PR), este comportamiento aparece de forma bastante consistente. Por otra parte, en el

límite de matrices llenas, las curvas para cada tamaño de n tienden hacia los valores esperados del GOE, $\langle S\rangle_{\text{GOE}} = \ln(n/2.07)$ y $\langle PR\rangle_{\text{GOE}} = n/3$, indicados por las líneas punteadas en cada figura. Esto confirma que, en este límite, el ensamble recupera el comportamiento deslocalizado característico del GOE.

De manera similar, para el caso no simétrico, las Figuras 2.1b y 2.2b muestran una fuerte correspondencia con los resultados teóricos. En el régimen diluido, las curvas convergen nuevamente al límite característico del PE, que es el mismo que en el caso simétrico. Para todos los tamaños de n se cumple que $\langle S\rangle \to 0$ y $\langle PR\rangle \to 1$. Por otro lado, en el límite de matrices llenas, las curvas se acercan de manera precisa a las predicciones del GinOE, dadas por $\langle S\rangle_{\text{GinOE}} = \ln(n/1.56)$ y $\langle PR\rangle_{\text{GinOE}} = n/2.04$, indicadas de igual manera por las líneas punteadas en cada figura. Esto confirma que, al disminuir la dilución, el ensamble recupera el comportamiento deslocalizado esperado para el GinOE.



(a) (b)

Figura 2.3: Promedio de la razón compleja $\langle r_{\mathbb{C}}\rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMAD en el caso (a) simétrico y (b) no simétrico para tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Los puntos representan los valores del $r_{\mathbb{C}}$ obtenidos numéricamente, mientras que las líneas punteadas indican las predicciones teóricas en el límite diluido, establecido por el PE, $\langle r_{\mathbb{C}}\rangle_{\text{PE}} = 0.5$; y al régimen de matrices completamente llenas, correspondientes al GOE, $\langle r_{\mathbb{C}}\rangle_{\text{GOE}} = 0.569$, y al GinOE, $\langle r_{\mathbb{C}}\rangle_{\text{GinOE}} = 0.737$, respectivamente.

Para los resultados correspondientes al estudio de autovalores, las Figuras 2.3 y 2.4 muestran los valores promedio de la razón entre vecinos complejos más cercanos, $\langle r_{\mathbb{C}}\rangle$, y de la razón de espaciamiento entre valores singulares, $\langle r_{sv}\rangle$, en función del parámetro de

dilución p.

El comportamiento de la razón $r_{\mathbb{C}}$ en ambos límites concuerda bien con las expectativas teóricas. Para el caso simétrico, la Figura 2.3a muestra que los valores calculados convergen a los de los límites conocidos, el del PE, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{PE}} = 0.5$, y el del GOE, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{GOE}} = 0.569$. De manera similar, en el caso no simétrico, la Figura 2.3b muestra que el valor observado del $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ se aproxima nuevamente al límite de Poisson, que es el mismo que en el caso simétrico, y que para valores grandes de p tiende hacia la predicción teórica del GinOE, dada por $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{GinOE}} = 0.737$.

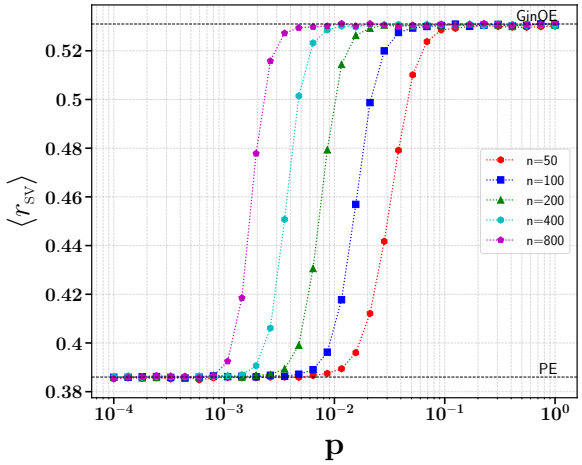


Figura 2.4: Promedio de la razón de valores singulares $\langle r_{sv} \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMAD en el caso no simétrico para tamaños de matriz $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Los puntos representan los valores del r_{sv} obtenidos numéricamente, mientras que las líneas punteadas indican las predicciones teóricas en el límite diluido, establecido por el PE, $\langle r_{sv} \rangle_{\text{PE}} = 0.386$; y al régimen de matrices completamente llenas, correspondiente al GinOE, $\langle r_{sv} \rangle_{\text{GinOE}} = 0.53$.

Por último, tenemos que la razón de espaciamiento de los valores singulares, r_{sv}, exhibe un comportamiento similar. La Figura 2.4 muestra que, para el caso no simétrico, los valores del $\langle r_{sv} \rangle$ también convergen a las predicciones teóricas de los ensambles límite, dados por $\langle r_{sv} \rangle_{\text{PE}} = 0.386$ para el PE y $\langle r_{sv} \rangle_{\text{GinOE}} = 0.53$ para el GinOE. El caso simétrico no se incluye debido a la ausencia de una predicción teórica establecida para esta cantidad; esto se debe a que el r_{sv} es una razón de uso relativamente reciente y se ha confinado principalmente a ensambles con espectros complejos.

Tanto los resultados obtenidos para las razones de espaciamiento como los corre-

spondientes a las cantidades asociadas a los autovectores muestran que el EMAD reproduce de manera consistente el comportamiento esperado en el régimen fuertemente diluido y el de matrices llenas. En específico, las transiciones entre los distintos límites teóricos permiten caracterizar con bastante claridad la estructura espectral de este modelo.

En los capítulos siguientes nos enfocaremos, como se mencionó anteriormente, en un ensamble más complejo formado por matrices aleatorias que incorporan constricciones locales adicionales, es decir, reglas de suma por filas. Aunque existen estudios previos [6, 13, 53] sobre ensambles aleatorios con este tipo de restricciones, la mayoría se ha centrado en matrices completamente llenas. Así, como un extensión natural al análisis realizado en este capítulo, estudiaremos matrices aleatorias diluidas con constricciones, con el objetivo de describir cómo sus propiedades espectrales dependen de los parámetros que definen el ensamble.

Capítulo 3

Ensamble de Matrices Aleatorias Simétricas con Constricciones

3.1 Definición del Modelo

El Ensamble de Matrices Aleatorias con Constricciones (EMAcC) se define como el conjunto de matrices reales y simétricas de tamaño $(n \times n)$, cuyas entradas fuera de la diagonal son variables aleatorias gaussianas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) con media cero y varianza unitaria. La constricción local impuesta en este modelo establece que la suma de los elementos de cada fila sea igual a un valor constante (α_i).

De este modo, si una matriz A de tamaño $n \times n$ pertenece al EMAcC, sus elementos A_{ij} satisfacen:

$$A_{ij} = \begin{cases} \epsilon_{ij}, & \text{si } i \neq j, \\ \alpha_i - \sum_{j \neq i} A_{ij}, & \text{si } i = j, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde ϵ_{ij} son variables aleatorias gaussianas independientes con media cero y varianza unitaria.

La constricción se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} = \alpha_i, \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Esta condición afecta principalmente a los elementos de la diagonal, cuya magnitud depende tanto de los valores de las entradas fuera de la diagonal como del número de éstas

que no son nulas. Como consecuencia, la constricción influye directamente en el espectro de la matriz, produciendo modificaciones significativas en las propiedades espectrales del sistema.

La dilución del EMAcC se introduce mediante un parámetro $p \in [0, 1]$, de modo que los elementos fuera de la diagonal principal pueden ser nulos o aleatorios según el valor de p. En el límite $p = 1$, se obtiene una matriz completamente llena, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son números aleatorios; mientras que para $p = 0$, la matriz es diagonal, con $A_{ii} = \alpha_i$.

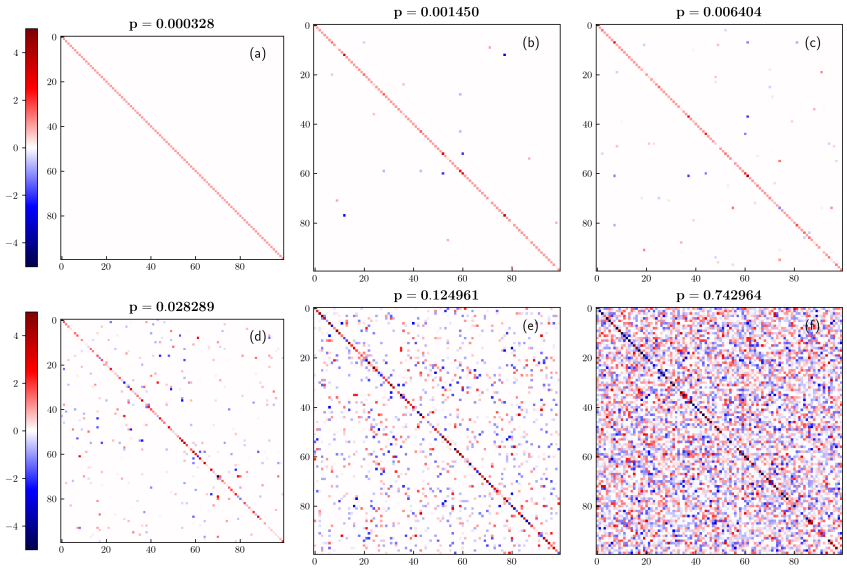


Figura 3.1: Comparación gráfica de seis valores del parámetro de dilución con $p =$ $(a)\,0.000328$, $(b)\,0.001450$, $(c)\,0.006404$, $(d)\,0.028289$, $(e)\,0.124961$ y $(f)\,0.0742964$, en una matriz simétrica de tamaño $n = 100$ y constricción $\alpha = 1$, que ilustra cómo dicho parámetro influye en la estructura de la matriz a medida que este aumenta.

Con el fin de ofrecer una ilustración gráfica de la definición anterior, en la Figura 3.1 se muestra una visualización correspondiente a la distribución de elementos para seis valores distintos del parámetro de dilución con $p =$ (a) 0.000328, (b) 0.001450, (c) 0.006404, (d) 0.028289, (e) 0.124961 y (f) 0.0742964, para una matriz aleatoria de tamaño 100×100 con valor de constricción $\alpha = 1$. En cada iteración, los elementos no nulos se representan mediante un gradiente rojiazul, indicando la distribución de valores positivos y negativos. Observamos que, para valores pequeños de p, la constricción α ejerce una influencia mayor

sobre la estructura general de la matriz, mientras que al aumentar p la contribución aleatoria de los elementos fuera de la diagonal se vuelve dominante.

3.2 Estudio de Cantidades Espectrales

Dado que tanto los autovalores como los autovectores individuales presentan fluctuaciones entre distintas realizaciones, es adecuado analizar su comportamiento promedio sobre un ensamble de matrices que satisfacen la constricción de suma por filas (3.2). Con este propósito, retomamos el enfoque espectral introducido en la última Sección del Capítulo anterior para el estudio de las propiedades estadísticas del EMAcC, donde a través de programas computacionales utilizamos nuevamente la diagonalización numérica (realizada con las subrutinas *DGEEV* y *DSYEV* de *LAPACK*) para calcular las cantidades promedio previamente definidas.

3.2.1 Estudio de Autovectores

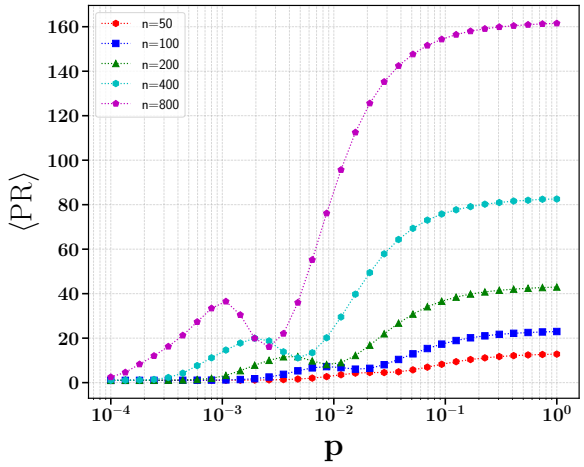


Figura 3.2: Razón de Particiáción promedio, $\langle PR \rangle$, como función del parámetro de dilución p para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simetrico, obtenida para matrices de tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Como resultados principales del estudio de los autovectores, en las Figuras 3.2 y 3.3 se muestran los valores promedio de la entropía de Shannon, $\langle S \rangle$, y de la razón de participación, $\langle PR \rangle$, en función del parámetro de dilución p, obtenidos para el EMAcC con $\alpha = 1$.

En el caso simétrico, ninguna de las dos cantidades muestra una transición monótona entre los casos límite, a diferencia de lo observado en el EMAD. En específico, para valores intermedios de p, las curvas presentan un máximo local que evidencia la influencia de la constricción sobre la estructura de las matrices y su espectro.

Sin embargo, los efectos de la constricción no solo son aparentes en este régimen. En el límite cuando $p \to 1$, las matrices se encuentran prácticamente llenas y la mayoría de sus elementos son aleatorios y distintos de cero; aun así, las cantidades promedio $\langle S \rangle$ y $\langle PR \rangle$ no alcanzan los valores teóricos correspondientes al GOE, $\langle S \rangle_{\text{GOE}}$ y $\langle PR \rangle_{\text{GOE}}$. De hecho, a partir de este análisis numérico se observa que, al incrementar el tamaño de la matriz n, estas cantidades tienden a valores asintóticos distintos de los del GOE, con un comportamiento compatible con $\langle PR \rangle_{\text{EMAcC}} \sim n/5$ y $\langle S \rangle_{\text{EMAcC}} \sim \ln(n/3.18)$. Este resultado sugiere que la constricción introduce correlaciones que modifican el comportamiento estadístico del ensamble incluso en el régimen $p \approx 1$.

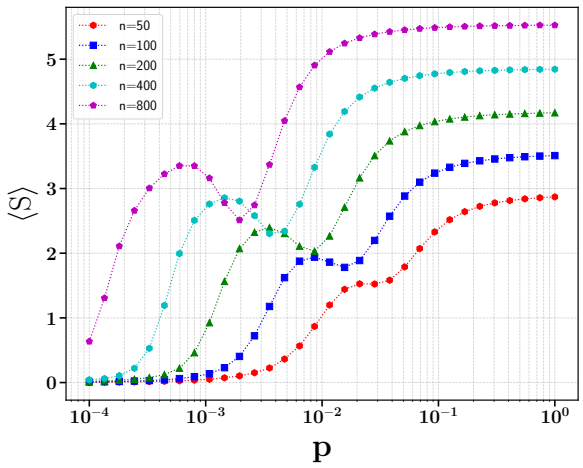


Figura 3.3: Entropía de Shannon promedio, $\langle S \rangle$, como función del parámetro de dilución p para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simetrico, obtenida para matrices de tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Además, la aparición del máximo local introduce una complicación adicional, como se mostrará en la siguiente sección: estas cantidades ya no podrán escalarse mediante un parámetro universal. Por lo tanto, el análisis deberá realizarse a través de un estudio detallado de la variación del parámetro de constricción α.

3.2.2 Estudio de Autovalores

Como resultados principales del estudio de autovalores, en las Figuras 3.4 y 3.5 se muestran los valores promedio de la razón entre autovalores vecinos, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, y la razón de valores singulares, $\langle r_{sv} \rangle$, en función del parámetro de dilución p, obtenidas para el EMAcC con $\alpha = 1$.

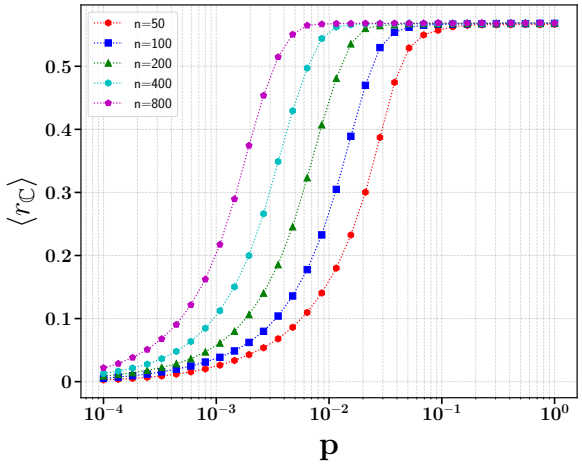


Figura 3.4: Razón promedio, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, como función del parámetro de dilución p para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simétrico, obtenida para matrices de tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

A pesar de que en este caso ambas cantidades exhiben una transición estrictamente monótona creciente, los resultados tampoco son del todo consistentes con nuestras expectativas. Esto se debe a que, si bien el límite $p \to 1$ concuerda razonablemente con los valores teóricos del ensamble GOE, para valores pequeños de p las matrices se encuentran tan diluidas que, en su mayoría, el ensamble está compuesto por matrices diagonales y, por lo tanto, presentan un único autovalor degenerado, $e_i = \alpha$. Esta degeneración introduce indeterminaciones en el cálculo de estas razones entre autovalores consecutivos y, al asignar dichos casos con valor cero, el límite inferior correspondiente al PE no llega a alcanzarse. Como consecuencia, para valores pequeños de p, se obtiene $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle \sim 0$ y $\langle r_{\mathrm{SV}} \rangle \sim 0$.

Para profundizar en este comportamiento, más adelante se realiza un estudio detallado de las degeneraciones presentes en el ensamble. Ahora bien, antes de abordar dicho análisis, se explora la posibilidad de describir estas cantidades mediante un parámetro de escalamiento, con el objetivo de evaluar si, a pesar de estas limitaciones, es posible identificar

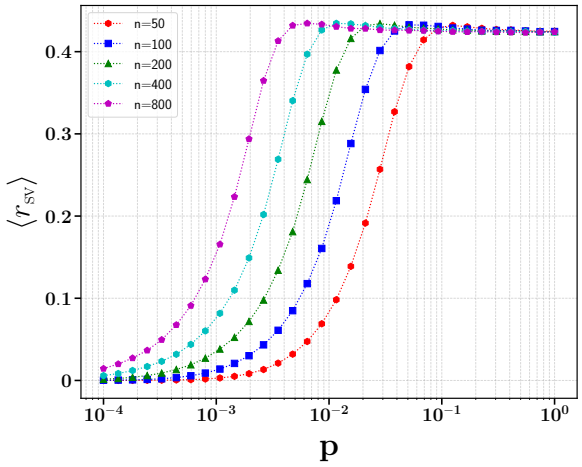


Figura 3.5: Razón de valores singulares promedio $\langle r_{sv} \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simétrico, obtenida para matrices de tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

un comportamiento universal para este ensamble.

3.3 Escalamiento del EMAcC

Como un análogo a la mecánica estadística, modelos como el EMAcC permiten el estudio de transiciones entre diferentes regímenes espectrales. Se asume, ya que no está rigurosamente probado, que dichas transiciones presentan comportamientos universales, caracterizados por funciones o exponentes que describen cómo ciertas cantidades escalan cerca de puntos críticos. En este contexto, se espera que tales propiedades universales dependan únicamente de características globales del sistema, como la simetría o la dimensionalidad del espacio de las matrices [54].

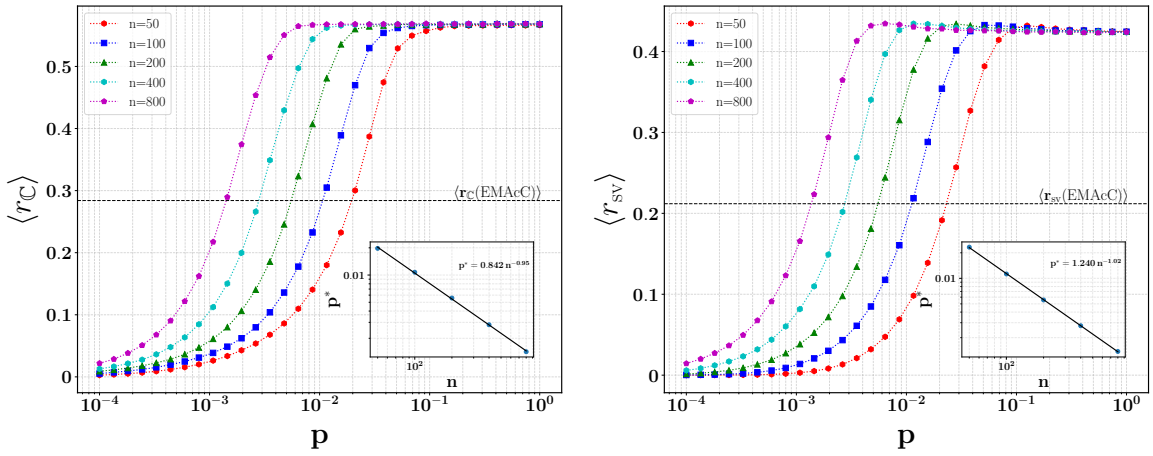
Para el EMAcC este comportamiento puede visualizarse directamente en el estudio de los autovalores. En concreto, a partir de las Figuras 3.4 y 3.5 observamos que el efecto más notable al incrementar el tamaño del sistema n es un desplazamiento de las curvas del $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle r_{sv} \rangle$ a lo largo del eje p. Aún más, el hecho de que dichas curvas, al graficarse en escala semilogarítmica, se desplacen aproximadamente la misma distancia en p al duplicar el tamaño n, sugiere la existencia de un parámetro de escalamiento dependiente de n que permita colapsar los datos en una sola curva universal.

Para la búsqueda de este parámetro universal, primero establecemos una medida que caracterice la posición de las curvas $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle r_{sv} \rangle$ a lo largo del eje p. Para ello escogemos valores de p, etiquetados como p^*, para los cuales ambas cantidades alcancen la mitad de su transición. En las Figuras 3.6a y 3.6b se indican dichos puntos mediante los valores correspondientes a las líneas punteadas, dadas por $\langle r_{\mathbb{C}}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.284$ y $\langle r_{sv}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.2119$, respectivamente.

En el inset de las Figuras 3.6a y 3.6b se muestra la dependencia de p^* con el tamaño del sistema n. El comportamiento lineal de ambos conjuntos de datos, representados en escala log-log, sugiere un comportamiento de tipo ley de potencias,

$$p^* = C\, n^{\delta}, \tag{3.3}$$

donde C es una constante. De este mismo inset observamos que la ecuación (3.3) proporciona un excelente ajuste a los datos numéricos, con un exponente aproximado de $\delta \approx -1$ para ambas razones.



(a) (b)

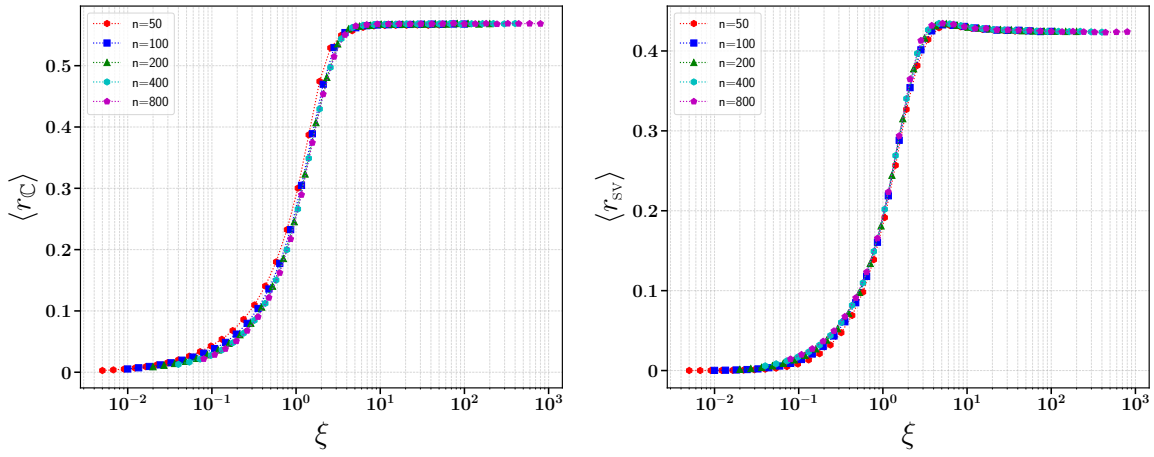
Figura 3.6: (a) Razón $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y (b) razón $\langle r_{sv} \rangle$ como función del parámetro de dilución p con constricción $\alpha = 1$ en el caso simétrico para distintos valores de n. Las líneas punteadas indican (a) $\langle r_{\mathbb{C}}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.284$ y (b) $\langle r_{sv}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.2119$. Los insets proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con (a) $\delta = -0.95$ y (b) $\delta = -1.02$.

Así, si graficamos las curvas $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle r_{sv} \rangle$ como función del parámetro de dilución p dividido por p^*,

$$\frac{p}{p^*} \propto \frac{p}{n^{\delta}} \approx \frac{p}{n^{-1}} = np \equiv \xi, \tag{3.4}$$

vemos que las gráficas para distintos tamaños de matriz n colapsan en una curva universal, véanse las Figuras 3.7a y 3.7b. En la primera de estas figuras podemos observar que se encuentran efectos de tamaño finito para el tamaño de $n = 50$.

Notemos que este escalamiento proporciona una forma clara de identificar los regímenes estadísticos de estas cantidades una vez que el parámetro ξ es conocido. En la Figura 3.7a se observa que, para $\xi > 4$, se cumple $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle = \langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{GOE}} \approx 0.56$, es decir, se alcanza el valor teórico correspondiente al ensamble GOE. Sin embargo, esta caracterización de ξ no puede extenderse de manera análoga al caso del PE, ya que las degeneraciones presentes en el ensamble impiden la existencia de una región en la que se cumpla $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle = \langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{PE}} \approx 0.5$. No obstante, el régimen deslocalizado puede identificarse de forma evidente a partir del comportamiento de $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, el cual se establece para valores $\xi \lesssim 0.47$. En consecuencia, la región de transición puede definirse operativamente como el intervalo comprendido entre este valor de ξ y el valor correspondiente al régimen del GOE ($0.47 \lesssim \xi \lesssim 4$), aun cuando el límite inferior de Poisson no sea alcanzado.



(a) (b)

Figura 3.7: (a) Razón $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simetrico, obtenida para matrices de tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. (b) Razón $\langle r_{sv} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simetrico, obtenida para matrices de tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

De manera similar, para la razón de valores singulares se observa en la Figura 3.7b que no existe una región bien definida de valores de ξ tal que se cumpla $\langle r_{\text{SV}} \rangle = \langle r_{\text{SV}} \rangle_{\text{PE}} \approx$

0.5. Esto indica que, al igual que en el caso de $r_{\mathbb{C}}$, las degeneraciones presentes en el ensamble impiden alcanzar el límite inferior correspondiente al ensamble de Poisson.

No obstante, el régimen de localización puede identificarse claramente para $\xi \lesssim 0.64$, mientras que la región de transición se extiende aproximadamente en el intervalo $0.64 \lesssim \xi \lesssim 2.82$. De esta forma, aun cuando no se obtiene el límite de Poisson, el comportamiento del $\langle r_{\text{sv}} \rangle$ permite delimitar las distintas regiones estadísticas del ensamble.

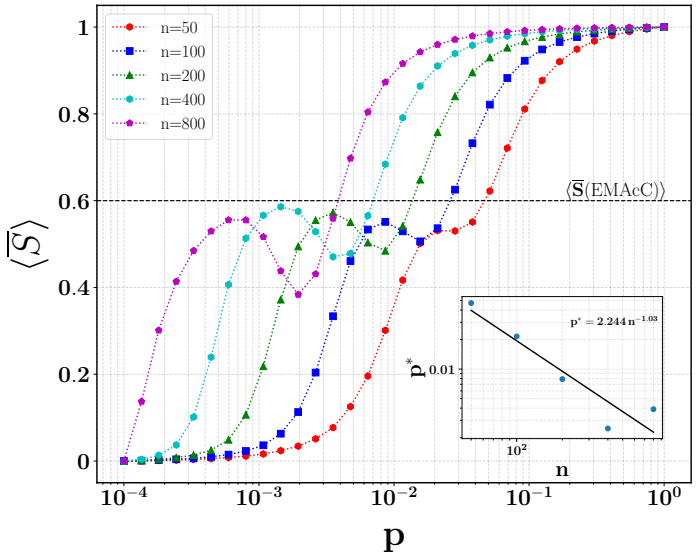


Figura 3.8: Entropía de Shannon promedio $\langle \overline{S} \rangle$ como función del parámetro de dilución p con constricción $\alpha = 1$ en el caso simétrico para distintos valores de n. La línea punteada indica indica $\langle \overline{S}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.6$. El inset proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con $\delta = -1.03$.

Para el caso del escalamiento de las cantidades correspondientes a autovectores, los máximos locales anteriormente mostrados en ambas cantidades indican que no será posible encontar curvas universales. Esto puede verse con más claridad en la entropía de Shannon S; aunque las curvas de la entropía promedio $\langle S \rangle$ se desplazan uniformemente a lo largo del eje p al incrementar el tamaño del sistema n, no se observará una curva universal. Para ilustrar esto, introducimos la conveniente normalización

$$\langle \overline{S} \rangle = \frac{\langle S \rangle - \langle S \rangle_{\text{MIN}}}{\langle S \rangle_{\text{MAX}} - \langle S \rangle_{\text{MIN}}}, \tag{3.5}$$

donde $\langle S \rangle_{\text{MIN}}$ y $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ representan, respectivamente, los valores mínimo y máximo de la entropía. De modo que los valores de $\langle S \rangle$ se encuentren en el intervalo $[0, 1]$ y sea así posible

comparar directamente las curvas para distintos tamaños n. Ahora, si escogemos valores de p^* para los cuales estas curvas alcancen un punto representativo de la transición, y de tal manera que se evite la bi-valuación provocada por el máximo local (y así no entrar en ambigüedades), por ejemplo $\langle \overline{S}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.6$, notamos que el comportamiento lineal mostrado en el inset de la Figura 3.8 también sugiere una dependencia con la forma de la ecuación (3.3).

A pesar de que también se obtiene un buen ajuste de los datos con $\delta \approx -1$, vemos que al aplicar la misma aproximación dada por la ecuación (3.4) y graficar la entropía de Shannon normalizada en función del parámetro ξ, aparece un desfase para valores pequeños de p, en particular en las regiones donde se hallan los máximos locales. Dicho desfase impide la existencia de una curva universal y, en consecuencia, la posibilidad de identificar de manera precisa las regiones de transición de ξ, como se muestra en la Figura 3.9.

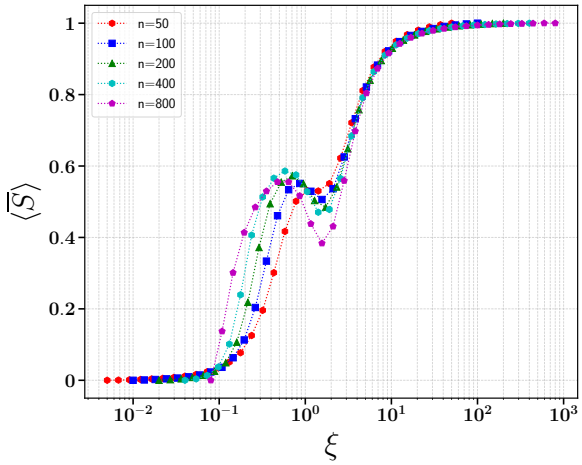


Figura 3.9: Entropía de Shannon $\langle \overline{S} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simetrico, obtenida para matrices de tamaños $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Este mismo desfase puede verse en la razón de participación promedio $\langle PR \rangle$. En ambas cantidades asociadas a los autovectores, la aparición de máximos locales impide caracterizar con claridad las regiones de transición mediante un parámetro de escalamiento universal. Dado que dicho comportamiento se manifiesta principalmente para valores pequeños del parámetro de dilución p, donde la influencia de la constricción α es más significativa, como se mencionó en la sección pasada, es necesario realizar el análisis detallado de este parámetro a fin de comprender su papel en la estructura espectral del ensamble.

3.4 Estudio del parámetro α

Como primer acercamiento al estudio del espectro a través del parámetro α, calculamos la densidad espectral, que simplemente se define como la distribución de los autovalores de la matriz con constricciones (3.1). Una de las consecuencias de la independencia estadística de los elementos matriciales, es que la densidad espectral toma valores diferentes de cero en un intervalo acotado, mostrando así bordes bien definidos en el límite $n \to \infty$. El resultado más significativo que nos ilustra este comportamiento es la ley del Semicírculo de Wigner [55]. Esta nos dice que, para una matriz A real y simétrica de tamaño $n \times n$ con media cero y varianza $\sigma^2 = \langle A_{ij}^2 \rangle$ para $i \neq j$ y cuyos momentos permanecen finitos al incrementar n, la densidad espectral converge a la distribución semicircular

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - \lambda^2}, & \text{si } |\lambda| < 2\sigma, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Así para el EMAcC, en el límite en que $p \to 1$, esperamos que la densidad espectral se aproxime a la ley del semicírculo de Wigner. Para el caso contrario, cuando $p \to 0$, notemos que si las entradas de las matrices diagonales fueran variables aleatorias gaussianas independientes, la densidad espectral resultante esperada sería una distribución gaussiana. Por lo que, al considerar la transición de matrices diluidas a llenas, esperaríamos transitar desde un espectro Gaussiano al Semicírculo de Wigner; sin embargo, veremos que debido a la presencia de la constricción se modifica este comportamiento.

Para ilustrar lo anterior, en la Figura 3.10 mostramos la densidad de estados (o *DOS*, por sus siglas en inglés) del EMAcC, con matrices de tamaño $n = 400$ y constricción $\alpha = 1$, para distintos valores del parámetro de dilución p. Tenemos que, a medida que p aumenta, no se observa la transición esperada. Para valores pequeños del parámetro de dilución, observamos que debido a las degeneraciones que introduce la constricción, el espectro se localiza evocando cierta rigidez, por lo que toma una estadística similar a la de una distribución tipo "picket fence" (o delta de Dirac) [56].

Para valores grandes de p, los efectos de la constricción son aparentes no solo en el comportamiento que se muestra en los bordes del espectro, los cuales se alejan del semicírculo de Wigner en dicha región, sino también en que, producto de las degeneraciones del ensamble, la moda de la distribución toma el valor de α, centrándola en este punto. Este fenómeno ocurre para cualquier valor de α; si aumentamos el valor de la constricción,

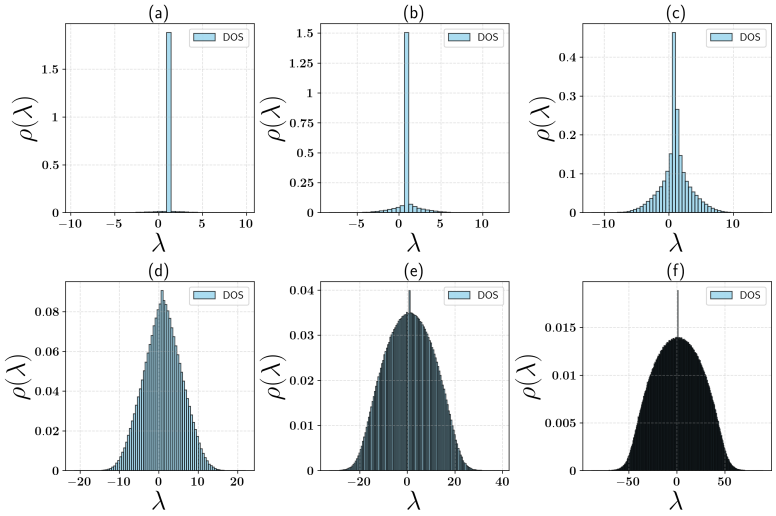


Figura 3.10: Densidad espectral $\rho(\lambda)$ del EMAcC para $n = 400$ con valor de dilución (a) $p = 0.000328$, (b) $p = 0.001450$, (c) $p = 0.006404$, (d) $p = 0.028289$, (e) $p = 0.124961$, (f) $p = 0.742964$. Cada gráfica se construyó utilizando 1×10^6 datos.

esto solo se refleja como una traslación a lo largo del eje de los eigenvalores λ, mientras que para valores negativos de α ocurre la misma traslación, pero en sentido opuesto.

A falta de una expresión teórica como la ecuación (3.6), la descripción del espectro para valores intermedios de p puede llegar a complicarse. Para estos valores de dilución la varianza promedio de los elementos de la matriz con constricciones es fuertemente afectada por la cantidad de elementos nulos, lo que es descrito por completo con el parámetro p. Por esto, buscar una relación entre estas cantidades, y en particular analizar si la variación del parámetro α juega un papel importante, resulta de utilidad para caracterizar nuestro ensamble.

Para establecer esta relación, realizamos un ajuste de datos por tamaño de matriz para la varianza del ensamble, σ^2, en función del parámetro p para distintos tamaños de n, como se muestra en la Figura 3.11. Específicamente, la primera hilera de esta figura presenta la relación de σ^2 y p para los tamaños $n = 50, 200, 800$ del EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$. El ajuste para estas tres gráficas, mostradas en escala log-log, evidencia un excelente correspondencia lineal para cualquier tamaño de matriz. A primera instancia, esto nos sugiere una relación del tipo $\sigma^2 = cp$, con c como un factor de escala. Pero como es natural, antes de hacer esta aseveración debemos constatar si la variación del parámetro

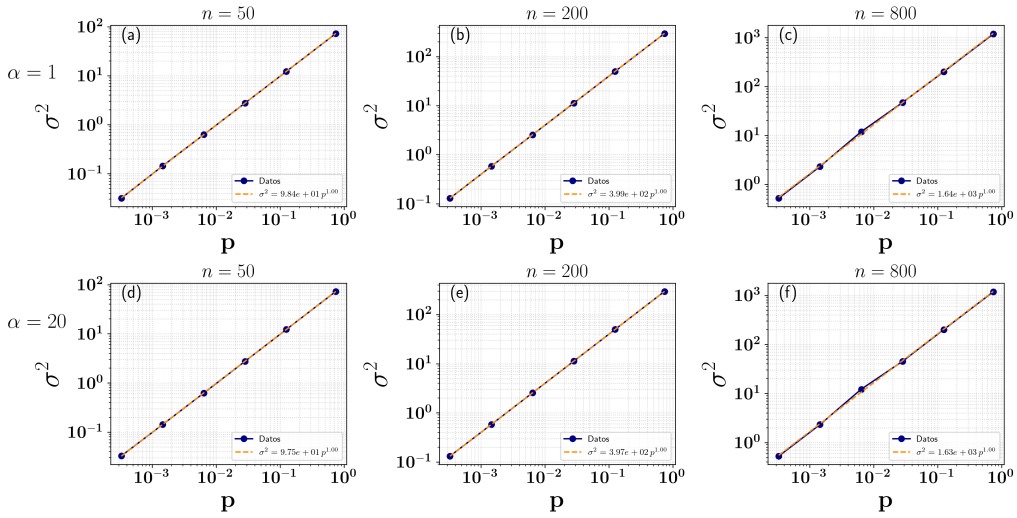


Figura 3.11: Ajuste lineal de σ^2 en función de p para el EMAcC, con valores de constricción: $\alpha = 1$ para tamaños de matriz (a) $n = 50$, (b) $n = 200$, (c) $n = 800$; y $\alpha = 20$ para tamaños de matriz (d) $n = 50$, (e) $n = 200$, (f) $n = 800$. Cada gráfica se construyó utilizando 1×10^6 datos.

α no influye a sobremanera.

Para esto, nos fijamos en la segunda hilera de la Figura 3.11, la que nos presenta la relación entre σ^2 y p para los tamaños $n = 50, 200, 800$ del EMAcC con valor de constricción $\alpha = 20$. Observamos que, a pesar de que α aumentó de manera considerable, el ajuste lineal continúa mostrando una excelente correspondencia para este conjunto de datos. Este comportamiento no solo nos refuerza la factibilidad de una relación del tipo $\sigma^2 = cp$, sino que, gracias a los valores obtenidos en cada ajuste, es posible identificar que el factor de escala depende linealmente del tamaño de la matriz, aproximadamente como $2n$. Así, la relación general entre la varianza y el parámetro de dilución para el EMAcC puede escribirse como

$$\sigma^2 \approx 2np. \tag{3.7}$$

La ecuación 3.7 es un resultado de gran utilidad para caracterizar la densidad del espectro en todo el rango del parámetro de dilución p, ya que además de establecer su relación con la varianza del ensamble, muestra que esta no sufre efecto alguno por la variación de la constricción α. A partir de aquí, como siguiente paso analizamos si dicha independencia se mantiene en otras cantidades asociadas a los autovalores y autovectores

del sistema. En particular, estudiaremos cómo el promedio de la razón compleja, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, y la entropía de Shannon promedio, $\langle S \rangle$, cambian en función del parámetro α.

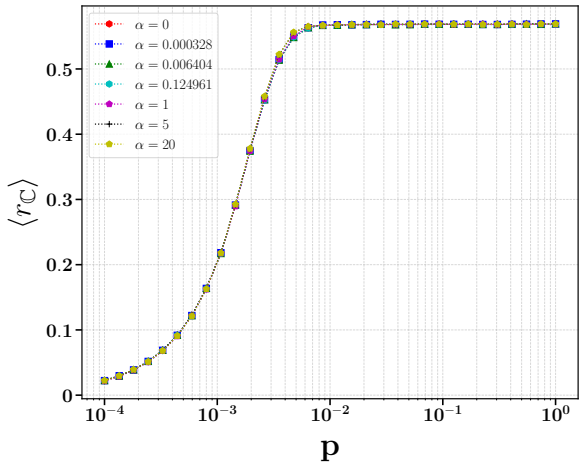
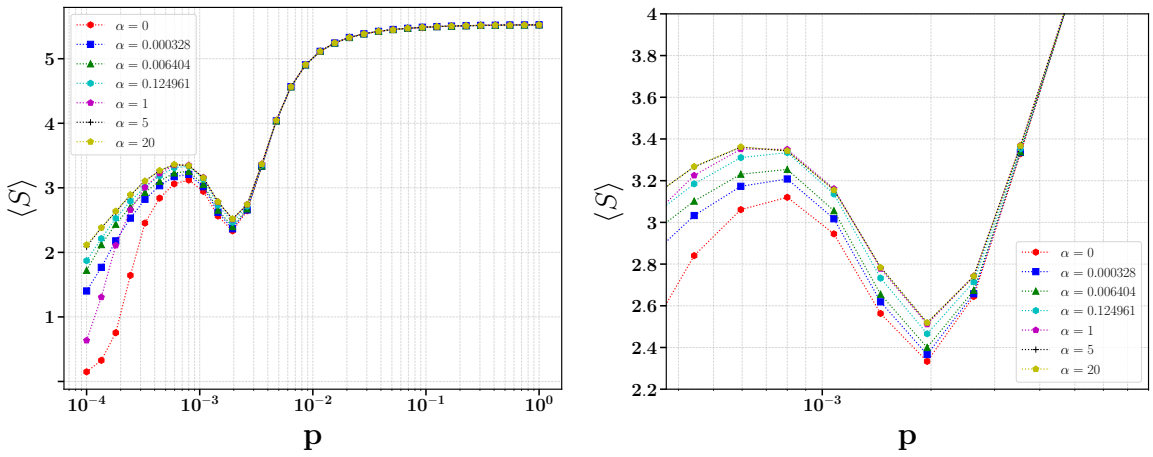


Figura 3.12: Razón $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMAcC para distintos valores de constricción dados por $\alpha = 0$, 0.000328, 0.006404, 0.124961, 1, 5 y 20, con matrices de tamaño $n = 800$. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Para esto, fijémonos primero en la Figura 3.12, esta nos muestra el promedio de la razón entre vecinos complejos cercanos $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, en función del parámetro de dilución p para los valores de constricción $\alpha = 0$, 0.000328, 0.006404, 0.124961, 1, 5 y 20, con matrices de tamaño $n = 800$. En esta figura observamos que todas las curvas prácticamente se empalman, lo cual no es un resultado inesperado. Recordemos que en la densidad espectral vimos que la variación de α únicamente producía una traslación en el eje de los autovalores; así, el espaciado promedio no sufre efecto alguno por la constricción y esta figura confirma precisamente ese comportamiento.

Para la medida asociada a los autovectores nos fijamos a primera instancia en la Figura 3.13a, esta nos muestra la entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ en función del parámetro de dilución p para los valores de constricción $\alpha = 0$, 0.000328, 0.006404, 0.124961, 1, 5 y 20, con matrices de tamaño $n = 800$. Observamos que para valores grandes de p el empalme de estas gráficas se mantiene, la variación de la constricción no parece tener efecto alguno para el límite de matrices llenas. Es en la región de valores intermedios donde podemos apreciar los efectos de la variación de α en $\langle S \rangle$. La Figura 3.13b muestra un acercamiento de esta región, que nos permite observar el cambio del comportamiento de $\langle S \rangle$ según la variación de α. Tomando como referencia la curva correspondiente a $\alpha = 0$,



(a) (b)

Figura 3.13: (a)Entropía $\langle S \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMAcC para distintos valores de constricción dados por $\alpha = 0$, 0.000328, 0.006404, 0.124961, 1, 5 y 20, con matrices de tamaño $n = 800$. (b) Ampliación de la región correspondiente a valores intermedios de p, que permite apreciar con mayor detalle el comportamiento curvilíneo de $\langle S \rangle$ para los distintos valores de α. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

observamos que al incrementar el valor de α ocurre un desplazamiento que corresponde a un incremento de $\langle S \rangle$.

Esto nos muestra una mayor influencia de la constricción, pues la regla empírica indica que las entradas distintas de cero, al ser variables gaussianas, se concentran mayoritariamente en el intervalo $[-3, 3]$. En este régimen, donde el número de estas entradas es reducido, su contribución debe ser nivelada por los elementos diagonales a través de la regla de suma impuesta por la constricción. En consecuencia, al aumentar α, la diagonal adquiere una contribución mayor, lo que modifica la estructura de los autovectores. Esto se traduce en un incremento sistemático de la entropía de Shannon promedio, consistente con el desplazamiento observado de las curvas al aumentar el valor de α.

Con esto, observamos que la variación del parámetro de constricción α induce cambios en las cantidades estudiadas, en particular en el régimen intermedio de dilución. Sin embargo, este análisis no es suficiente para describir de manera completa el comportamiento del ensamble, ya que para valores pequeños del parámetro p las propiedades espectrales quedan fuertemente condicionadas por la presencia de niveles degenerados. Esto motiva el análisis que se presenta a continuación.

3.5 Degeneraciones en el ensamble

Durante todo el tratamiento estadístico de este ensamble hemos visto que las degeneraciones introducidas por el parámetro de constricción α juegan un papel importante en el comportamiento de las cantidades que hemos analizado, en especial en las razones asociadas al estudio de autovalores. Por ello, en esta sección nos interesa caracterizar el número de degeneraciones promedio $\langle D \rangle$ en el espectro del ensamble en función del parámetro de dilución p. El objetivo de este estudio no es solo mostrar la cantidad de degeneraciones por tamaño de matriz, sino, mediante el uso de un parámetro de escalamiento de la forma (3.4), poder distinguir de manera clara entre un régimen fuertemente degenerado y otro esencialmente no degenerado. De esta forma, si logramos identificar el punto a partir del cual el ensamble deja de presentar degeneraciones, podemos usarlo como referencia para evaluar si, a partir de este, las transiciones esperadas en las cantidades espectrales se muestran de manera más clara.

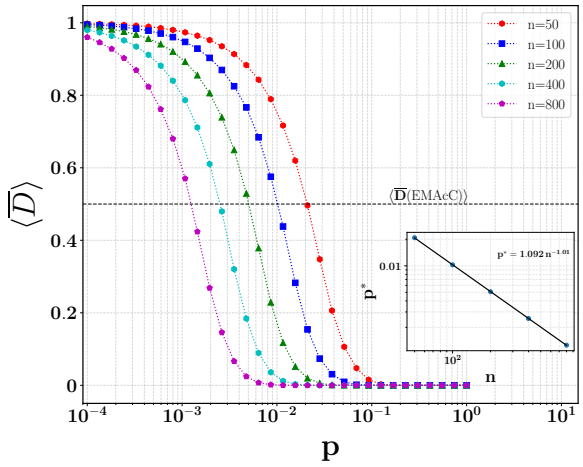


Figura 3.14: Degeneraciones promedio $\langle \overline{D} \rangle$ como función del parámetro de dilución p, para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$, en el caso simétrico, para distintos tamaños de n. La línea punteada indica $\langle \overline{D}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.5$. El inset proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con $\delta = -1.01$.

Además, introducimos la normalización $\langle \overline{D} \rangle = \langle D \rangle / 1 \times 10^6$, respecto a el valor total de la estadística del ensamble. Con esta normalización, todos los valores de $\langle \overline{D} \rangle$ se encuentran acotados en el intervalo [0,1], lo que permite comparar de manera directa las curvas correspondientes a distintos tamaños n, como se muestra en la Figura 3.14.

De la Figura 3.14 observamos que las curvas $\langle \overline{D} \rangle$ se desplazan una distancia uniforme al duplicar n, lo que sugiere que caracterizar esta cantidad a través de un parámetro de escalamiento es viable. Para esto seguimos el procedimiento usual: escogemos los valores de $p*$ correspondientes a la línea que marca la mitad de la transición, $\langle \overline{D} \rangle = 0.5$. Con estos valores de $p*$ obtenemos un comportamiento del tipo (3.3), tal como confirma el inset de la Figura 3.14, que muestra un excelente ajuste con una ley de potencias con exponente $\delta \approx -1$.

Usando la aproximación dada por la ecuación (3.4), si graficamos la degeneración promedio normalizada en función del parámetro de escalamiento ξ, observamos que las curvas para distintos tamaños de n colapsan sobre sí. Además, al usar una escala log-log podemos identificar un valor aproximado de ξ para el cual la degeneración se vuelve prácticamente cero, lo que nos permite distinguir de manera clara entre los regímenes degenerado y no degenerado, como se muestra en la Figura 3.15.

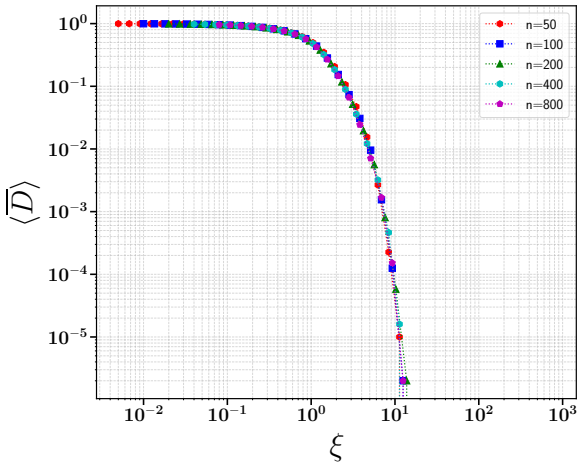


Figura 3.15: Degeneración promedio normalizada $\langle \overline{D} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simétrico, para los tamaños de matriz $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se obtuvo a partir de un total de 1×10^6 datos.

A partir de la Figura 3.15 vemos que para valores del parámetro de escalamiento tales que $\xi \gtrsim 10$ la degeneración promedio se torna prácticamente nula para cualquier tamaño de matriz. Esto, además de identificar con claridad el régimen no degenerado del ensamble, nos deja fijar un punto de corte desde el cual, idealmente, las transiciones entre los límites teóricos de las cantidades asociadas a los autovalores deberían mostrarse de

manera más precisa. Sin embargo, esto no ocurre así. Aún si trabajamos únicamente con la parte no degenerada del ensamble, las transiciones esperadas en las medidas asociadas a autovalores no se manifiestan con claridad. Para ejemplificar esto, la Figura 3.16 muestra que la transición entre los casos límite de la razón compleja $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ sólo sería visible si el punto a partir del cual el ensamble deja de mostrar degeneraciones ocurriera alrededor de $\xi \gtrsim 2.5$. Para los valores relevantes en nuestro ensamble, $\xi \gtrsim 10$, la razón compleja ya se encuentra completamente en el régimen deslocalizado, por lo que este procedimiento no revela ninguna transición.

Esto nos sugiere que la cantidad $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ no es del todo idónea para caracterizar el EMAcC debido a la presencia de las degeneraciones. En consecuencia, en la siguiente Subsección exploraremos una alternativa más sensible a la estructura del espectro, donde introduciremos una nueva medida que muestra de forma alternativa las transiciones esperadas.

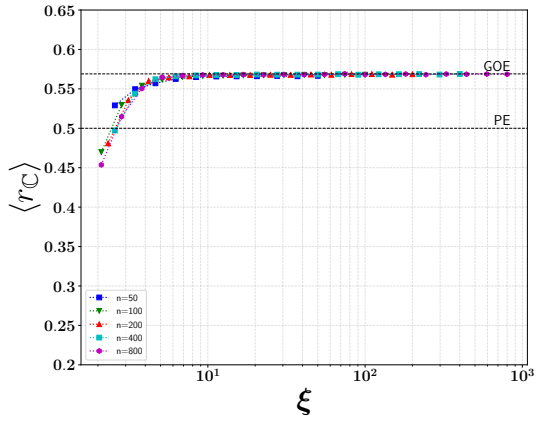


Figura 3.16: Razón compleja promedio $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ en el régimen $\xi > 2$ para el EMAcC con constricción $\alpha = 1$ en el caso simétrico, obtenida para tamaños de matriz $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Las líneas punteadas indican los límites teóricos correspondientes al régimen diluido, dado por el PE con $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\mathrm{PE}} = 0.5$, y al límite de matrices llenas, asociado al GOE con $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\mathrm{GOE}} = 0.569$.

3.5.1 Norma Espectral

Para continuar con nuestro estudio de correlaciones espectrales de corto alcance, e inspirados por su uso en teoría de grafos, introducimos el concepto de la norma espectral de una matriz aleatoria. Esta cantidad fue propuesta por Ivan Gutman en 1978 y se define, en términos de los autovalores $\{\lambda_i\}$ de una matriz de tamaño $n \times n$, como [57]

$$E(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|. \tag{3.8}$$

Esta cantidad es conocida también como la energía espectral (de un grafo) y ha sido utilizada de manera interdisciplinaria en áreas como la física, química, biología, etc.

Para este trabajo, la norma espectral resulta útil, ya que, a diferencia de las razones de espaciamiento introducidas previamente, su definición no se ve afectada por la presencia de degeneraciones en el espectro. En el caso del EMAcC, donde las degeneraciones aparecen de manera recurrente, el cálculo de la norma espectral no introduce indeterminaciones, lo que nos permite explorar el comportamiento del espectro del sistema desde una perspectiva complementaria.

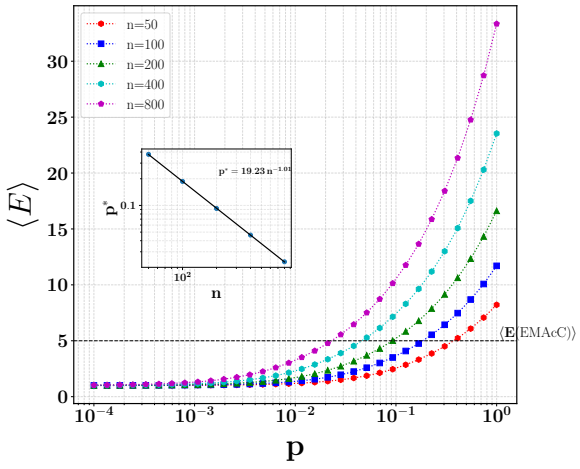


Figura 3.17: Norma espectral promedio $\langle E \rangle$ como función del parámetro de dilución p, para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$, en el caso simétrico, para distintos tamaños de n. La línea punteada indica $\langle E(\text{EMAcC}) \rangle = 5$. El inset proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con $\delta = -1.01$.

Nuestros resultados se muestran en la Figura 3.17, donde se presenta la norma espectral promedio $\langle E \rangle$ como función del parámetro de dilución p. Observamos que las

curvas de esta cantidad son estrictamente monótonas crecientes y que, conforme aumenta el tamaño de la matriz, alcanzan valores cada vez mayores. Además, las curvas se encuentran desplazadas entre sí de manera aproximadamente uniforme, lo que sugiere una posible caracterización en términos de un parámetro de escalamiento.

Para encontrar el parámetro de escalamiento, recurrimos al procedimiento ya establecido. Seleccionamos los valores del parámetro de dilución, denotados como p^*, correspondientes a un punto relevante de la transición. En este caso, y sin perder generalidad, dichos puntos se determinan a partir de $\langle E(\text{EMAcC})\rangle = 5$. Al examinar la dependencia de p^* con el tamaño del sistema, se observa un comportamiento lineal de la forma (3.3), lo cual es confirmado en el inset de la Figura 3.17, donde se muestra el buen ajuste de los datos con una ley de potencias con exponente $\delta \approx -1$.

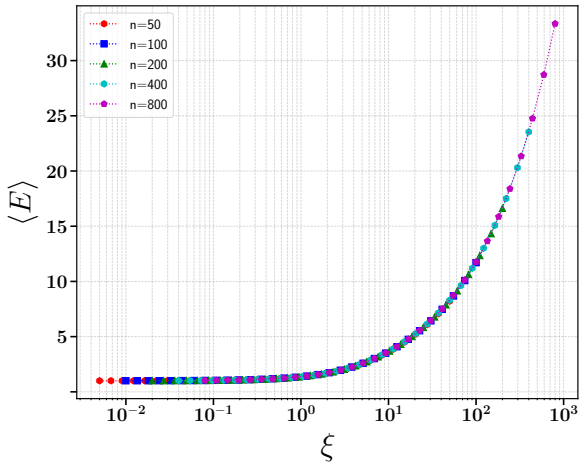


Figura 3.18: Norma espectral promedio $\langle E\rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMAcC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso simétrico, para los tamaños de matriz $n = 50, 100, 200, 400$ y 800. Cada curva se obtuvo a partir de un total de 1×10^6 datos.

Al graficar la norma espectral promedio en función del parámetro de escalamiento ξ, dado por la ecuación (3.4), se observa un colapso completo de las curvas correspondientes a los distintos tamaños n, como se muestra en la Figura 3.18. Este resultado es particularmente relevante ya que, a diferencia de las razones de espaciamiento estudiadas previamente, el cálculo de $\langle E\rangle$ no se ve afectado por las degeneraciones del espectro. De esta forma, el hecho de que $\langle E\rangle$ muestre un colapso al graficarse en función del parámetro de la forma (3.4) refuerza la importancia de dicho parámetro para caracterizar el ensam-

ble y apoya la existencia de un comportamiento universal en las cantidades anteriormente estudiadas.

Capítulo 4

Ensamble de Matrices Aleatorias no Simétricas con Constricciones

4.1 Definición del Modelo

Motivado por los ensambles de Ginibre, y como una extensión natural de nuestro modelo, consideramos el caso no Hermitiano introduciendo un ensamble de matrices no simétricas. El Ensamble de Matrices Aleatorias no Simétricas con Constricciones (EMANScC) se define como el conjunto de matrices reales y no simétricas de tamaño $n \times n$, cuyas entradas fuera de la diagonal son variables aleatorias gaussianas i.i.d con media cero y varianza unitaria. La constricción local impuesta en este modelo también establece que la suma de los elementos de cada fila sea igual a un valor constante (α_i).

De este modo, si una matriz A de tamaño $n \times n$ pertenece al EMANScC, sus elementos A_{ij} satisfacen:

$$A_{ij} = \begin{cases} \epsilon_{ij}, & \text{si } i \neq j, \\ \alpha_i - \sum_{j \neq i} A_{ij}, & \text{si } i = j, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde ϵ_{ij} son variables aleatorias gaussianas independientes con media cero y varianza unitaria.

La constricción también se expresa por la ecuación 3.2, dada por

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} = \alpha_i, \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{4.2}$$

y al igual que en el caso simétrico, la constricción influye directamente en el espectro de la matriz, solo que al estar en el plano complejo, el análisis de este se vuelve cualitativamente distinto.

La dilución del EMANScC se introduce de igual manera mediante un parámetro $p \in [0, 1]$, de modo que los elementos fuera de la diagonal principal pueden ser nulos o aleatorios según el valor de p.

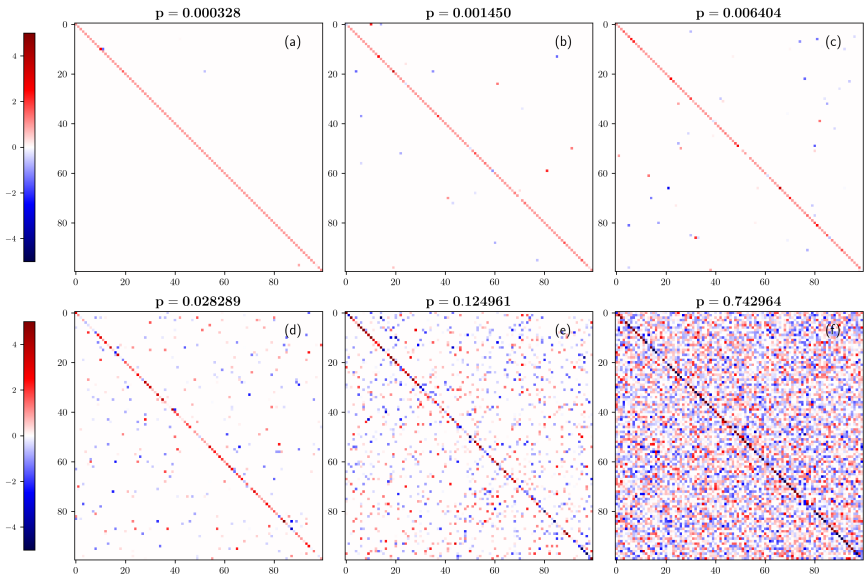


Figura 4.1: Ejemplos de matrices pertenecientes al EMANScC para seis valores del parámetro de dilución con $p = (a)\, 0.000328$, (b) 0.001450, (c) 0.006404, (d) 0.028289, (e) 0.124961 y (f) 0.0742964. $n = 100$ y $\alpha = 1$.

Como un símil del capítulo anterior, y con el fin de ilustrar los efectos de la constricción en los elementos fuera de la diagonal, en la Figura 4.1 se muestran ejemplos de matrices pertenecientes al EMANScC para seis valores distintos del parámetro de dilución con $p = (a)\, 0.000328$, (b) 0.001450, (c) 0.006404, (d) 0.028289, (e) 0.124961 y (f) 0.0742964, para una matriz aleatoria no simétrica de tamaño 100×100 con constricción $\alpha = 1$. En cada panel, los elementos no nulos se representan mediante un gradiente, que indica la distribución de valores positivos y negativos en la matriz. En este caso, también observamos que a medida que los valores de p aumentan, la constricción α ejerce una menor influencia sobre la estructura general de la matriz.

4.2 Estudio de cantidades Espectrales

Si bien son complejos, los autovalores tanto como los autovectores exhiben fluctuaciones entre distintas realizaciones, por lo que resulta natural estudiar sus propiedades de manera estadística, es decir, a través de un ensamble de matrices que cumplen la constricción de suma por filas 4.2. Con este propósito, reutilizamos el enfoque espectral desarrollado en los capítulos anteriores, ahora aplicado al caso no Hermitiano. Para esto, empleamos nuevamente la diagonalización numérica mediante la subrutina *DGEEV* de *LAPACK*, con las cuales obtenemos las cantidades promedio ya definidas para el EMANScC.

Para el análisis estadístico de este ensamble, cada gráfica presentada a partir de esta Sección fue generada usando 1×10^6 datos, con matrices cuadradas simétricas de tamaño $n = 50$, 100, 200, 400 y 800.

4.2.1 Estudio de Eigenvectores

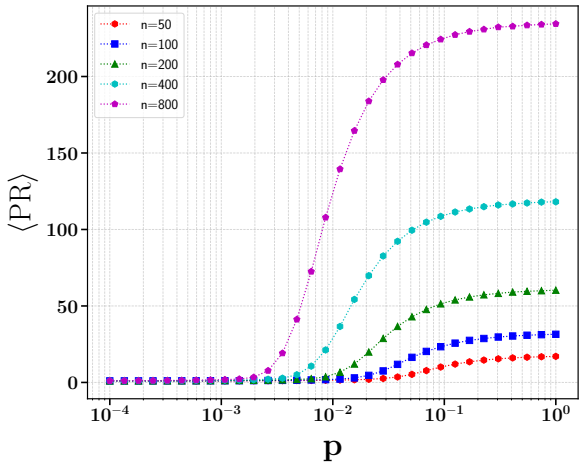


Figura 4.2: Razón de Participación promedio, $\langle PR\rangle$, como función del parámetro de dilución p para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso no simétrico, obtenida para tamaños $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Como resultados principales del estudio de los autovectores, en las Figuras 4.2 y 4.3 se muestran los valores promedio de la razón de participación, $\langle PR\rangle$, y la entropía de Shannon, $\langle S\rangle$, en función del parámetro de dilución p, obtenidos para el EMANScC con $\alpha = 1$.

En el caso no simétrico, ambas gráficas muestran transiciones monótonas, lo que

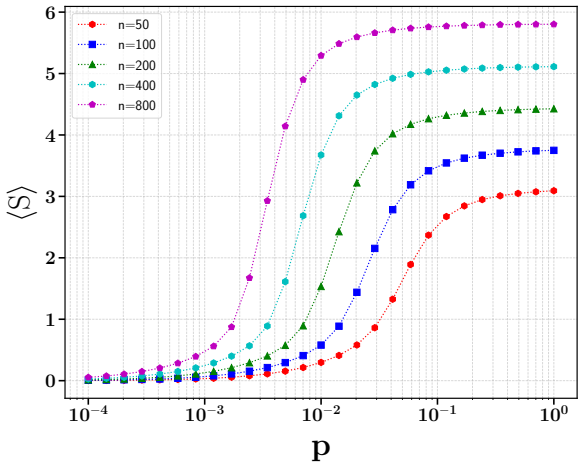


Figura 4.3: Entropía de Shannon promedio, $\langle S \rangle$, como función del parámetro de dilución p para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso no simétrico, obtenida para tamaños de matriz $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

concuerda a primera instancia con el EMAD. A pesar de esto, notemos que los efectos de la constricción no son nulos en todo el régimen de dilución. En el límite cuando $p \to 1$, aunque las matrices se encuentran en su mayoría llenas, las cantidades promedio $\langle S \rangle$ y $\langle PR \rangle$ no alcanzan los valores teóricos correspondientes al ensamble GinOE, $\langle S \rangle_{\text{GinOE}}$ y $\langle PR \rangle_{\text{GinOE}}$. Como en el capítulo anterior, a partir del análisis numérico se observa que, para valores grandes del tamaño de matriz n, estas cantidades tienden a valores asintóticos distintos de los del GinOE, con un comportamiento aproximado por $\langle PR \rangle_{\text{EMANScC}} \sim n/3.4$ y $\langle S \rangle_{\text{EMANScC}} \sim \ln(n/2.42)$.

4.2.2 Estudio de Autovalores

Como resultados principales del estudio de autovalores, en las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran los valores promedio de la razón entre vecinos cercanos, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, y la razón de valores singulares, $\langle r_{sv} \rangle$, en función del parámetro de dilución p, obtenidas para el EMANScC con $\alpha = 1$.

Para el caso no simétrico nos encontramos nuevamente fuera de nuestras expectativas, a pesar de que ambas cantidades exhiben transiciones monótonas. Vemos que, si bien en el límite cuando $p \to 1$ se obtiene una aproximación razonable a los valores teóricos

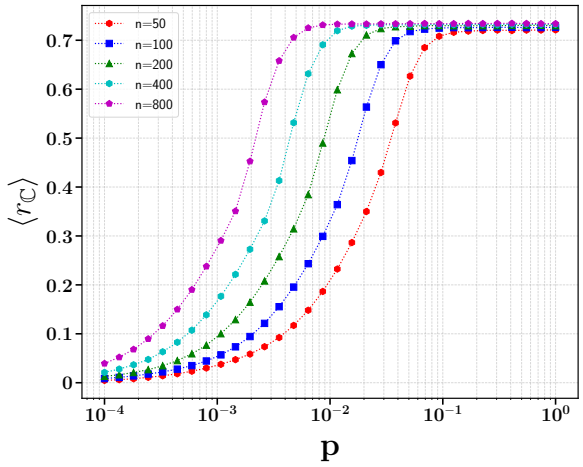


Figura 4.4: Razón compleja promedio, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, como función del parámetro de dilución p para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso no simétrico, obtenida para tamaños de matriz $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

del ensamble GinOE, para valores pequeños de p el espectro adquiere nuevamente aspecto degenerado.

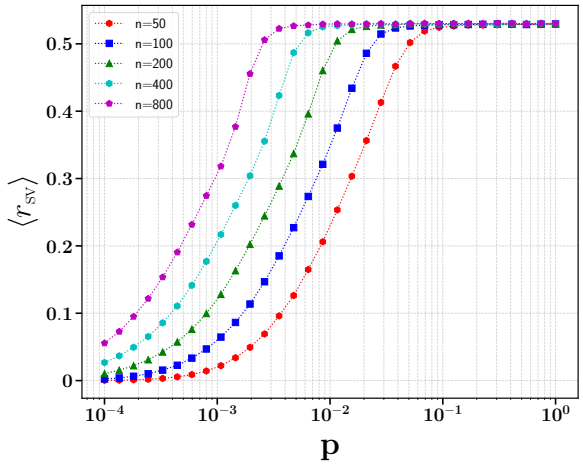


Figura 4.5: Razón de valores singulares promedio, $\langle r_{sv} \rangle$, como función del parámetro de dilución p para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$ en el caso no simétrico, obtenida para tamaños de matriz $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

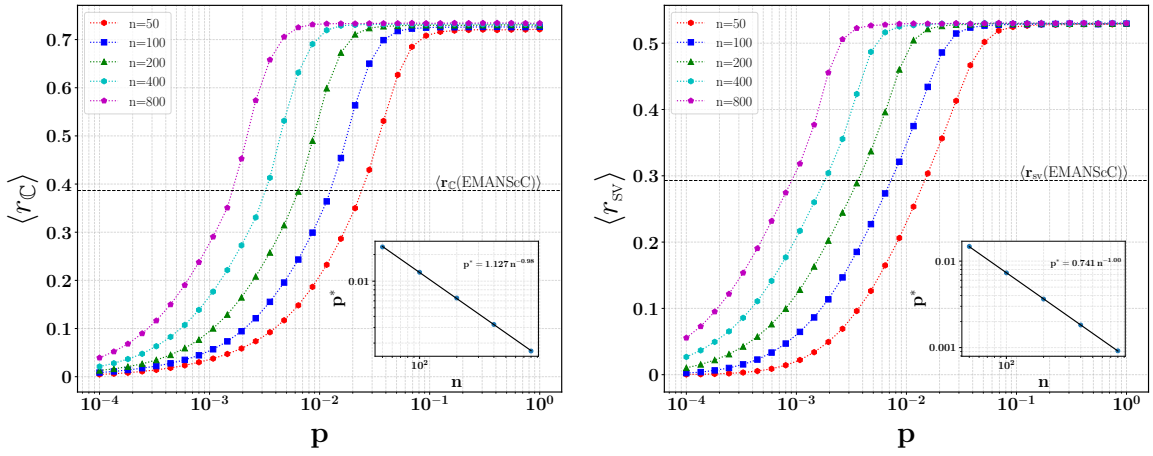
Como vimos, esta degeneración introduce indeterminaciones en el cálculo de ambas

razones y, al asignar dichos casos con valor cero, el límite inferior correspondiente al PE no puede alcanzarse. Como consecuencia, para valores pequeños de p, se obtiene $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle \sim 0$ y $\langle r_{\mathrm{SV}} \rangle \sim 0$.

Al igual que en el Capítulo anterior, más adelante se realizará un estudio detallado de las degeneraciones presentes en el ensamble para profundizar en la caracterización estadística del EMANScC. Sin embargo, antes de analizar explícitamente el papel de dichas degeneraciones, se investigará si las cantidades espectrales consideradas presentan algún tipo de descripción en términos de un escalamiento universal.

4.3 Escalamiento del EMANScC

Motivados por el comportamiento mostrado por las cantidades espectrales en la sección anterior, nos interesa comprobar si este modelo no Hermitiano presenta algún tipo de universalidad, manifestada a través de parámetros de escalamiento. En particular, a partir de las Figuras 4.4 y 4.5 notamos que, al incrementar el tamaño del sistema, las curvas de $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle r_{sv} \rangle$ se desplazan sobre el eje p. Dicho desplazamiento, al graficar los datos en escala



(a) (b)

Figura 4.6: (a)Razón $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y (b)razón r_{sv} como función del parámetro de dilución p con constricción $\alpha = 1$ en el caso no simétrico para distintos tamaños de n. Las líneas punteadas indican (a) $\langle r_{\mathbb{C}}(\mathrm{EMANScC}) \rangle = 0.3866$ y (b) $\langle r_{sv}(\mathrm{EMANScC}) \rangle = 0.2929$. Los insets muestran ajustes con la ecuación (3.3) con (a) $\delta = -0.98$ y (b) $\delta = -1.00$.

semilogarítmica, ocurre a una distancia prácticamente constante cada vez que se duplica el

tamaño del sistema. Esto sugiere la existencia de un parámetro universal dependiente de n que permita observar el colapso de estas cantidades en una curva universal.

Usamos el mismo método que en el Capítulo anterior para caracterizar la posición de las curvas $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle r_{sv} \rangle$. Para ello elegimos un valor de p, etiquetado como p^*, en el que ambas cantidades se encuentren a la mitad de la transición, de modo que podamos establecer su dependencia directa con el tamaño n. En las Figuras 4.6a y 4.6b estos puntos se indican mediante líneas punteadas, correspondientes a los valores $\langle r_{\mathbb{C}}(\text{EMANScC}) \rangle = 0.3866$ y $\langle r_{sv}(\text{EMANScC}) \rangle = 0.2929$, respectivamente.

El inset de las Figuras 4.6a muestra la dependencia de p^* con el tamaño del sistema y, al igual que en el caso simétrico, observamos un comportamiento lineal en escala logarítmica que sugiere una ley de potencias del tipo (3.3). Este ajuste resulta bastante bueno, dando en ambos casos un exponente $\delta \approx -1$. Siguiendo entonces el procedimiento descrito en la ecuación (3.4), al graficar las curvas $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y $\langle r_{sv} \rangle$ para distintos tamaños en función del parámetro ξ, obtenemos un colapso en una sola curva universal; véanse las Figuras 4.7a y 4.7b.

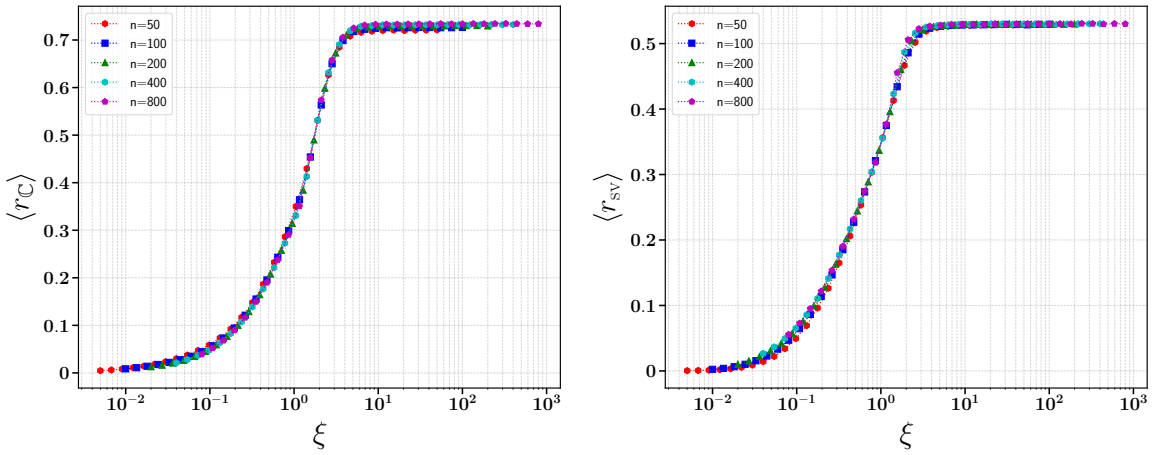


Figura 4.7: (a) Razón $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ y (b) razón $\langle r_{sv} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$, para matrices de tamaños $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Notemos que este escalamiento en términos del parámetro ξ proporciona una forma clara de establecer los distintos regímenes estadísticos de estas razones. En la Figura 4.7a se observa que, para $\xi > 5$, la razón entre vecinos complejos alcanza el límite teórico

propuesto por el ensamble GinOE, es decir, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle = \langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{GinOE}} \approx 0.737$. No obstante, esta caracterización no puede extenderse de manera análoga hacia el régimen de localización, ya que las degeneraciones presentes en el ensamble impiden la existencia de una región en ξ tal que se cumpla $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle = \langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{PE}} \approx 0.5$. Aún así, el régimen de localización del ensamble puede identificarse claramente para $\xi \lesssim 0.47$, mientras que la región de transición se extiende aproximadamente en el intervalo $0.47 \lesssim \xi \lesssim 5$.

De manera análoga, para la razón de valores singulares observamos que el régimen extendido asociado al GinOE se recupera para $\xi > 2$, con $\langle r_{sv} \rangle \approx 0.569$. Sin embargo, las degeneraciones espectrales del ensamble imposibilitan nuevamente la aparición del límite de Poisson en términos del parámetro de escalamiento. De todas formas, el régimen de localización puede asociarse para valores de $\xi \lesssim 0.2$, mientras que la región de transición se extiende aproximadamente en el intervalo $0.2 \lesssim \xi \lesssim 2$. Por lo tanto, $\xi = 0.2$ y 2 marcan el inicio de la transición de deslocalización y el inicio del límite del GinOE, respectivamente.

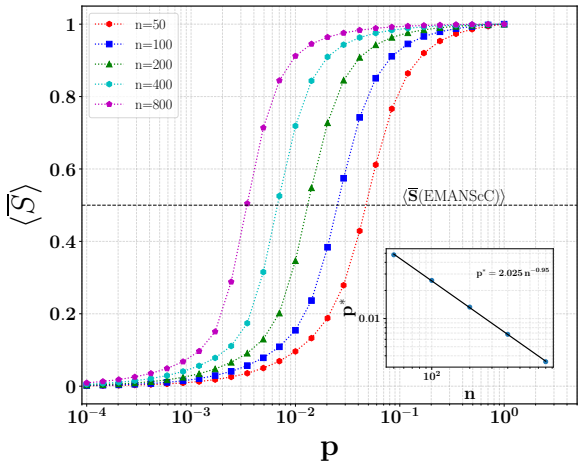


Figura 4.8: Entropía de Shannon promedio $\langle \overline{S} \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMANScC con constricción $\alpha = 1$ para distintos tamaños de n. La línea punteada indica $\langle \overline{S}(\text{EMANScC}) \rangle = 0.5$. El inset proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con $\delta = -0.95$.

Debido a que para este caso no simétrico, los máximos locales mostrados anteriormente para el casi simétrico han desaparecido en las cantidades asociadas a los autovectores, es razonable pensar que el colapso de estas curvas mediante un parámetro de escalamiento de la forma de (3.4) es posible. Esto podemos observarlo primero a través de la entropía

de Shannon S; tenemos que las curvas del promedio $\langle S \rangle$ se desplazan de manera uniforme sobre el eje p al incrementar el tamaño n.

Si introducimos nuevamente la normalización (3.5), de modo que los valores de la entropía se encuentren en el intervalo $[0, 1]$, no solo podemos comparar directamente las curvas para distintos tamaños de n, sino que también podemos elegir de forma directa el valor de p^* en el que estas se encuentran a media transición. Para esta normalización resulta adecuado escoger $\langle \overline{S}(\text{EMANScC}) \rangle = 0.5$. La Figura 4.8 muestra esto, donde el inset sugiere un comportamiento lineal consistente con la ecuación (3.3). De hecho, encontramos un buen ajuste de los datos con una ley de potencias con $\delta \approx -1$, lo que nos indica que aplicar una aproximación de la forma (3.4) es razonable.

A partir de esto, si graficamos la entropía de Shannon normalizada en función del parámetro ξ, notamos que el colapso de las curvas no se produce en todo régimen de dilución, como lo muestra la Figura 4.9. Específicamente, observamos que para valores intermedios del parámetro ξ aparece un ligero desfase entre estas curvas. Podemos atribuir este comportamiento a efectos de tamaño finito, pues observamos que este desplazamiento va disminuyendo según incrementamos el tamaño de las matrices, por lo que para tamaños lo suficientemente grandes (con $n \gtrsim 800$) esperaríamos un traslape prácticamente exacto en toda la región de transición.

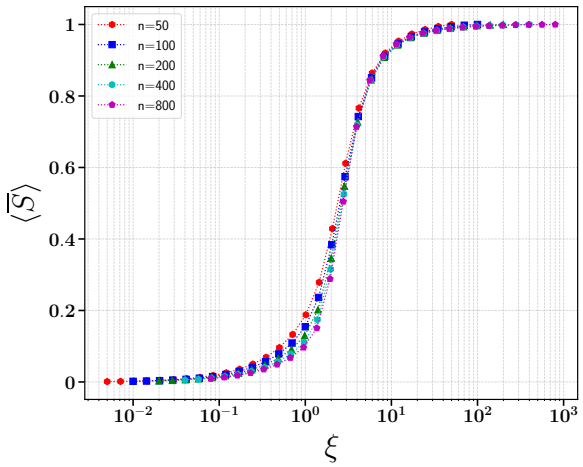


Figura 4.9: Entropía de Shannon $\langle \overline{S} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$ obtenida para matrices de tamaños $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Tomando en cuenta que este desfase se atribuye a efectos de tamaño finito, podemos intentar establecer los regímenes estadísticos de la entropía de Shannon normalizada según el comportamiento de las curvas con los valores más grandes de n. De la Figura 4.9 observamos que, para $\xi < 1$ la entropía promedio alcanza el valor teórico brindado por el PE, es decir, $\langle \overline{S} \rangle = \langle \overline{S} \rangle_{PE} \approx 0$. A partir de esta buena tendencia, y a diferencia del caso simétrico, es importante aclarar que el régimen deslocalizado sí puede identificarse mediante el parámetro de escalamiento. Esto debido a que, para valores con $\xi > 7$ observamos que la entropía normalizada satisface $\langle \overline{S} \rangle \to 1$, lo cual caracteriza un régimen extendido bien definido. No obstante, debe recordarse que la normalización de la entropía se realizó con respecto al valor máximo observado, $\langle \overline{S} \rangle_{\text{MAX}}$, y no respecto al valor teórico correspondiente al GinOE, el cual se encuentra por encima de dicho máximo, como se muestra en la Figura 4.3. En consecuencia, aunque el límite del GinOE no se alcanza estrictamente, la región de transición puede definirse claramente a partir de la entropía $\langle \overline{S} \rangle$ en función de ξ, como $2 \lesssim \xi \lesssim 7$.

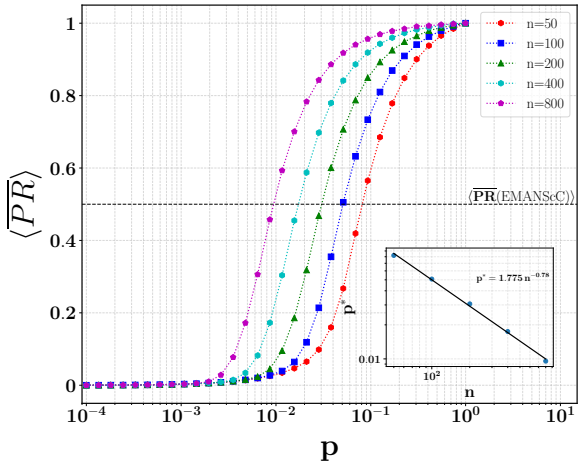


Figura 4.10: Razón de Participación promedio $\langle \overline{PR} \rangle$ como función del parámetro de dilución p con constricción $\alpha = 1$ en el caso no simétrico para distintos tamaños de n. La línea punteada indica indica $\langle \overline{PR}(\text{EMANScC}) \rangle = 0.5$. El inset proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con $\delta = -0.78$.

Para la Razón de Participación PR realizamos el mismo procedimiento. Observamos que las curvas del promedio de la razón de participación se desplazan de una manera similar sobre el eje de dilución, por lo que si utilizamos una normalización de la forma (3.5), tal que los valores del PR se encuentren en el intervalo entre $[0, 1]$, podemos elegir

un valor de p^* tal que nos encontremos a media transición. Como en el caso de la entropía de Shannon, debido a esta normalización es natural escoger $\langle \overline{PR}(\text{EMANScC}) \rangle = 0.5$. La Figura 4.10 ilustra esta elección. Sin embargo, a pesar de que el inset sugiere un comportamiento compatible con la forma (3.3), el ajuste demuestra que no es posible obtener un escalamiento del tipo (3.4) para la razón de participación.

La razón de esto, es que el ajuste muestra que el exponente es $\delta = -0.78$, un valor considerablemente alejado de -1, por lo que la aproximación $\delta \approx -1$ no es factible. Debido a esto, buscamos un nuevo parámetro de escalamiento diferente de ξ que nos permita colapsar las gráficas de la Figura 4.10. Para esto, si graficamos estas curvas como función del parámetro de dilución p dividido por p^*, esto es

$$\frac{p}{p} \propto \frac{p}{n^{\delta}} = \frac{p}{n^{-0.78}} = n^{0.78} p \equiv \xi^*, \tag{4.3}$$

obtenemos un nuevo parámetro de escalamiento ξ^*. Con este nuevo parámetro, observamos que las curvas del promedio de la razón de participación efectivamente colapsan en una sola curva para los distintos valores de n, véase la Figura 4.11. En esta figura podemos notar además la presencia de efectos de tamaño finito, particularmente visibles para $n = 50$.

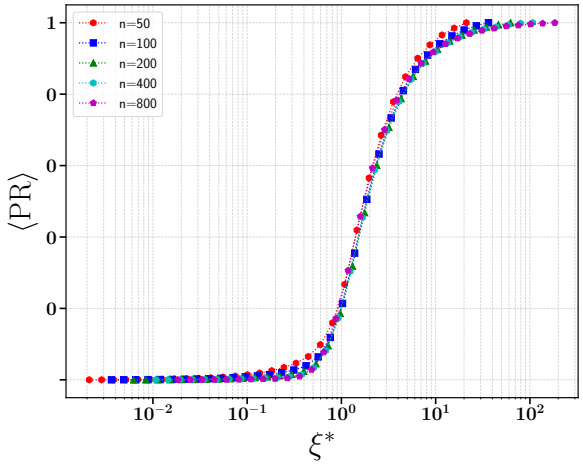


Figura 4.11: Razón de Participación promedio $\langle \overline{PR} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ^* para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$, obtenida para matrices de tamaños $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se construyó utilizando 1×10^6 datos.

Con este nuevo parámetro de escalamiento ξ^*, intentamos establecer los regímenes estadísticos de la razón de participación. De la Figura 4.11 observamos que, para $\xi^* < 0.5$, el valor promedio $\langle \overline{PR} \rangle$ alcanza el comportamiento esperado en el régimen de Poisson, con

$\langle \overline{PR} \rangle \approx 1$, notando que esta cantidad tiende a cero por efectos de la normalización empleada. Por otro lado, para valores grandes del parámetro de escalamiento, $\xi^* > 10$, las curvas muestran una saturación clara hacia $\langle \overline{PR} \rangle \to 1$, lo cual identifica un régimen extendido bien definido. No obstante, este valor corresponde al máximo utilizado en la normalización y no al valor teórico del ensamble GinOE, cuyo valor esperado $\langle PR \rangle_{\text{GinOE}} = n/2.07$ es mayor. En consecuencia, aunque el límite del GinOE no se alcanza estrictamente, la región de transición entre el régimen de Poisson y el régimen extendido puede definirse de manera clara a partir del comportamiento de $\langle \overline{PR} \rangle$ como función de ξ^*.

4.4 Degeneraciones en el ensamble

En analogía con el caso simétrico, en esta sección nos interesa caracterizar las degeneraciones promedio $\langle D \rangle$ presentes en el espectro del EMANScC en función del parámetro de dilución p. El objetivo en este caso, como en el Capítulo anterior, no es únicamente mostrar la cantidad de degeneraciones por tamaño de matriz, sino utilizar$\langle D \rangle$ para caracterizar el ensamble. En particular, a través de la introducción de un parámetro de escalamiento de la forma (3.4), buscamos identificar de manera clara la región en la que las degeneraciones dominan el espectro y aquella en la que su efecto es despreciable. Para ilus-

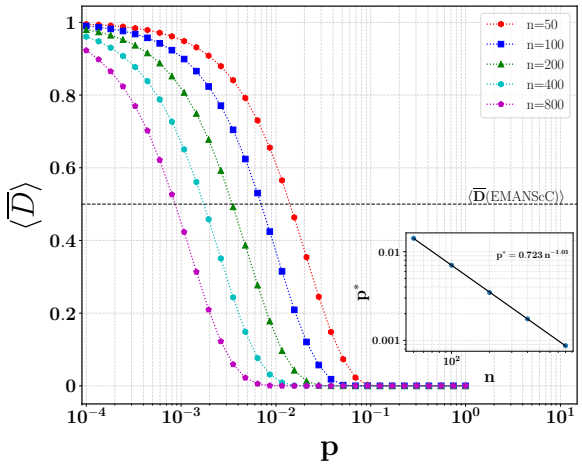


Figura 4.12: Degeneración promedio $\langle \overline{D} \rangle$ como función del parámetro de dilución p para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$ para distintos tamaños de n. La línea punteada indica indica $\langle \overline{D}(\text{EMAcC}) \rangle = 0.5$ El inset proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con $\delta = -1.01$.

trar esto, introducimos nuevamente la normalización $\langle \overline{D} \rangle = \langle D \rangle / 1 \times 10^6$, respecto a el valor total de la estadística del ensamble. Con esta normalización, todos los valores de $\langle D \rangle$ se encuentran dentro del intervalo $[0, 1]$, lo que permite comparar las curvas correspondientes a distintos tamaños de n, como se muestra en la Figura 4.12.

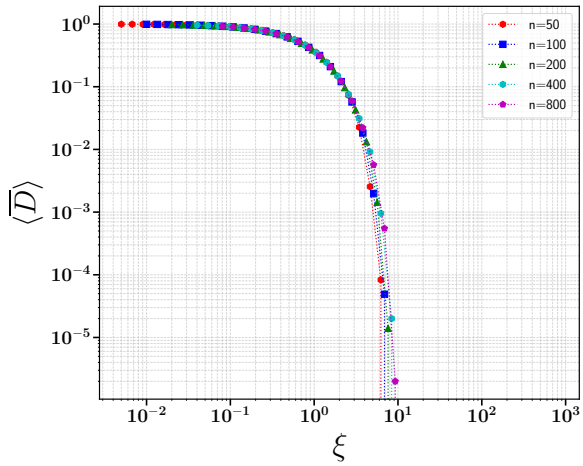


Figura 4.13: Degeneración promedio normalizada $\langle \overline{D} \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$ para los tamaños de matriz $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se obtuvo a partir de un total de 1×10^6 datos.

Observamos que las curvas de la degeneración promedio $\langle \overline{D} \rangle$ se desplazan de manera uniforme al variar el tamaño del sistema, lo que sugiere que es sensato caracterizar esta cantidad mediante un parámetro de escalamiento. Para ello seguimos el mismo procedimiento que en secciones anteriores, escogiendo los valores de p^* correspondientes a la mitad de la transición, $\langle \overline{D} \rangle = 0.5$. Con los valores de p^* obtenidos onservamos un comportamiento compatible con una ley de potencias de la forma (3.3), lo cual es confirmado en el inset de la Figura 4.12, donde se observa un excelente ajuste en forma de ley de potencias con $\delta \approx -1$.

Al introducir el parámetro de escalamiento ξ definido en (3.4) y al graficar la degeneración normalizada promedio en función de este, se observa un colapso de las curvas correspondientes a distintos tamaños de n. Además se distingue un valor de ξ a partir del cual la degeneración promedio se vuelve prácticamente nula. El hecho de que el colapso de todas las curvas no es exacto se debe a efectos de tamaño finito, pues al incrementar el tamaño de n el colapso entre curvas mejora. Esto nos permite separar de forma natural los regímenes degenerado y no degenerado, como se muestra en la Figura 4.13.

De este análisis observamos que, para valores del parámetro de escalamiento tales que $\xi \gtrsim 9$, la degeneración promedio nuevamente se vuelve prácticamente nula para cualquier tamaño de matriz, lo que permite identificar de manera clara el régimen no degenerado del ensamble y, de esta manera, fijar un punto desde el cual deberían presentarse con mayor afluencia las transiciones entre los límites teóricos de las cantidades asociadas a los autovalores.

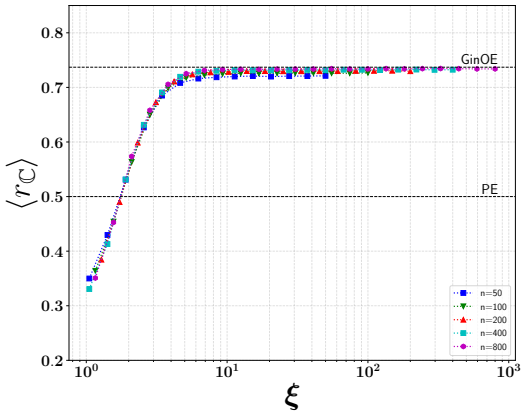


Figura 4.14: Razón compleja promedio del ensamble, $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$, como función del parámetro de escalamiento ξ en el régimen $\xi > 1$ para el EMANScC con constricción $\alpha = 1$, obtenida para tamaños de matriz $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Las líneas punteadas indican los límites teóricos correspondientes al régimen diluido, dado por el PE con $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{PE}} = 0.5$, y al límite de matrices llenas, asociado al GinOE con $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle_{\text{GinOE}} = 0.737$.

Sin embargo, al aplicar este procedimiento se encuentra que dichas transiciones no se revelan. Al igual que en el capítulo anterior, trabajamos con la razón compleja para mostrar esto. Tenemos que en la Figura 4.14, la transición entre los casos límite de la razón compleja $\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$ sólo se observaría si el punto a partir del cual el ensamble deja de presentar degeneraciones ocurriera alrededor de $\xi \gtrsim 1.75$. Para los valores relevantes del ensamble, $\xi \gtrsim 9$, esta cantidad ya se encuentra completamente en el régimen perteneciente al GinOE, por lo que el truncamiento no permite representar a la transición esperada.

Estos resultados son análogos a los obtenidos en el capítulo anterior, donde se observó que las razones de espaciamiento usadas no resultan del todo aptas para caracterizar ensambles en los que existen degeneraciones. Así, tenemos que para el EMANScC, es necesario recurrir a cantidades más sensibles a su estructura, lo que nuevamente motiva

la introducción de una medida alternativa (relativa a la norma espectral) en la siguiente subsección.

4.4.1 Norma de Nikiforov

Para lidiar con el espectro complejo asociado al EMANScC, introducimos la norma de Nikiforov de una matriz aleatoria. Nikiforov propuso [58] este concepto haciendo uso de los valores singulares de una matriz. En particular, dados los valores singulares $\{\sigma_i\}$ de una matriz A de tamaño $n \times n$, la norma de Nikiforov se define como

$$N(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i. \tag{4.4}$$

Esta cantidad, también conocida como la energía de Nikiforov (de un grafo), ha sido empleada en el estudio de distintos tipos de matrices, lo que resalta su importancia y practicidad. En especial, en el caso de matrices cuadradas simétricas, reproduce la norma espectral definida por la ecuación (3.8).

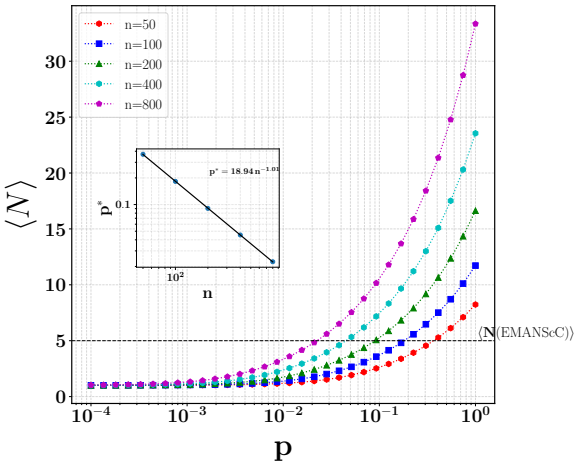


Figura 4.15: Norma de Nikiforov promedio $\langle N \rangle$ como función del parámetro de dilución p, para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$, para distintos tamaños de n. La línea punteada indica $\langle N(\text{EMANScC}) \rangle = 5$. El inset proporciona el ajuste de la ecuación (3.3) con $\delta = -1.01$.

De manera análoga al caso hermitiano, $\langle N \rangle$ resulta especialmente útil para el estudio del EMANScC ya que permite analizar el espectro en presencia de las degeneraciones que introduce la constricción.

En la Figura 4.15 se presenta la norma de Nikiforov promedio $\langle N \rangle$ como función del parámetro p. Como en el caso simétrico, esta cantidad exhibe un comportamiento monótono creciente, alcanzando valores mayores a medida que n aumenta. Adicionalmente, el desplazamiento casi uniforme entre las curvas también sugiere que el sistema puede caracterizarse mediante un parámetro de escalamiento.

Para identificar el parámetro de escalamiento seguimos el procedimiento estándar, fijando un valor de la norma de Nikiforov y determinando los valores p^* del parámetro de dilución asociados a dicho valor. Así, tomamos como referencia la línea $\langle N(\text{EMANScC}) \rangle = 5$. La dependencia de p^* con el tamaño del sistema muestra un comportamiento tipo de ley de potencias de la forma (3.3) con un exponente $\delta \approx -1$, como se observa en el inset de la Figura 4.15.

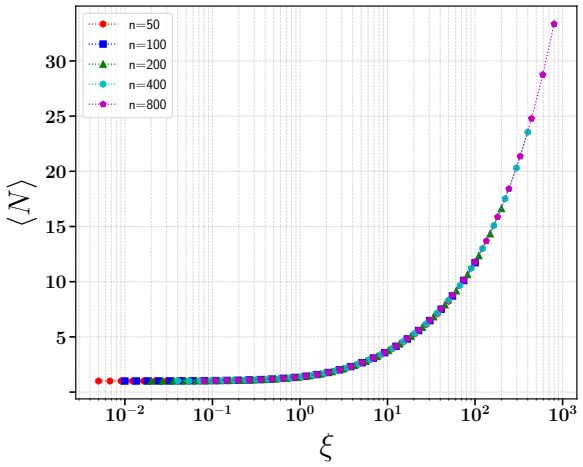


Figura 4.16: Norma de Nikiforov promedio $\langle N \rangle$ como función del parámetro de escalamiento ξ para el EMANScC con valor de constricción $\alpha = 1$, para los tamaños de matriz $n = 50$, 100, 200, 400 y 800. Cada curva se obtuvo a partir de un total de 1×10^6 datos.

Con esto, introducimos el parámetro ξ según la aproximación (3.4). Al expresar la norma de Nikiforov promedio en función de este parámetro, se observa un colapso de las curvas para los distintos tamaños de n, como se aprecia en la Figura 4.16, lo que sugiere la existencia de un comportamiento universal para esta cantidad. Este resultado nos muestra que esta norma proporciona una caracterización consistente del ensamble no hermitiano con constricciones, incluso en presencia de degeneraciones en el espectro. El hecho de que esta cantidad escale adecuadamente con un parámetro de la forma (3.4) refuerza la universalidad

de dicho parámetro para describir el comportamiento espectral del sistema y confirma su utilidad como herramienta para el análisis estadístico de este ensamble a través de las cantidades previamente estudiadas.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron las propiedades espectrales de un ensamble de matrices aleatorias diluidas con constricciones locales, dadas por reglas de suma por fila, y constricciones globales, considerando tanto el caso hermitiano, correspondiente a matrices simétricas (EMAcC), como el caso no hermitiano, asociado a matrices no simétricas (EMANScC). . Para ambos ensambles se analizaron distintas cantidades relacionadas a la teoría de matrices aleatorias, en particular la entropía de Shannon de los autovectores S, la razón de participación de los autovectores PR, la razón entre autovalores complejos más cercanos $r_{\mathbb{C}}$ y la razón de valores singulares r_{sv}. Los resultados obtenidos muestran que, aunque la mayoría de estas cantidades admiten un parámetro de escalamiento en común, las transiciones estadísticas observadas difieren de las predicciones teóricas estándar, como consecuencia directa de la presencia de las constricciones locales que caracterizan a estos ensambles.

Para llegar a esta conclusión, se procedió de la siguiente manera. En primer lugar, tras una introducción teórica a los ensambles de matrices aleatorias, se estudiaron las propiedades espectrales del ensamble de matrices aleatorias diluidas sin constricciones locales (EMAD) para ambas simetrías. Para el EMAD se mostró que las mismas cantidades analizadas a lo largo de este trabajo alcanzan los límites teóricos predichos por el ensamble de Poisson en el régimen de matrices dispersas, así como por los ensambles GOE, en el caso simétrico, y GinOE, en el caso no simétrico, para el régimen de matrices llenas. Este análisis se llevó a cabo con un doble objetivo; por un lado, identificar los límites teóricos que debían alcanzar los ensambles con constricciones locales estudiados posteriormente, y por otro, calibrar los programas computacionales empleados, garantizando así la confiabilidad

de los resultados obtenidos.

Después, en los capítulos 3 y 4 se analizaron de manera sistemática las propiedades espectrales del EMAcC y del EMANScC. A pesar de las diferencias respecto a las predicciones teóricas, se identificaron comportamientos comunes en las cantidades estudiadas, los cuales se resumen en la Tabla 5.1.

EMAcC (caso simétrico)		
Cantidad	Régimen localizado	Régimen deslocalizado
$\langle S \rangle$	~ 0	$\sim \ln n/3.18$
$\langle PR \rangle$	~ 1	$\sim n/5$
$\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$	~ 0	~ 0.569
$\langle r_{sv} \rangle$	~ 0	~ 0.42
EMANScC (caso no simétrico)		
Cantidad	Régimen localizado	Régimen deslocalizado
$\langle S \rangle$	~ 0	$\sim \ln n/2.42$
$\langle PR \rangle$	~ 1	$\sim n/3.4$
$\langle r_{\mathbb{C}} \rangle$	~ 0	~ 0.737
$\langle r_{sv} \rangle$	~ 0	~ 0.569

Tabla 5.1: Valores de cantidades espectrales observados en los regímenes localizado y deslocalizado para los ensambles con constricciones locales, en los casos simétrico (EMAcC) y no simétrico (EMANScC).

Una característica fundamental que sobresale de nuestro análisis es que las transiciones entre los regímenes localizado y deslocalizado no siempre siguen el comportamiento monótono típico observado en los ensambles del EMAD. En particular, la presencia de constricciones locales de suma por fila modifica de manera importante la progresión de varias cantidades espectrales al variar el parámetro de dilución, dando lugar a transiciones atípicas que no pueden caracterizarse únicamente en términos de los límites de Poisson y GOE/GinOE.

Por un lado, aunque las cantidades asociadas a los autovalores sí muestran transiciones estrictamente monótonas, la naturaleza de estas magnitudes, junto con la presencia de degeneraciones en el espectro, introduce indeterminaciones en su cálculo. Dichas indeterminaciones son reasignadas como valores nulos, lo que impide que se alcance el límite de Poisson, a pesar de que el límite correspondiente al ensamble GOE/GinOE sí se reproduce

correctamente.

En contraste con las cantidades asociadas a los autovalores, el comportamiento atípico se manifiesta de forma clara en el caso del EMAcC para las cantidades asociadas a los autovectores, como la entropía de Shannon y la razón de participación. En lugar de exhibir una transición monótona entre los casos límite, estas cantidades presentan una dependencia no monótona en el régimen de dilución intermedia, producto de las correlaciones introducidas por la constricción local, lo que además evita que se alcancen los valores teóricos correspondientes al GOE.

A partir de estos resultados, se analizó el escalamiento de las distintas cantidades espectrales mediante el parámetro ξ dado por la ecuación (3.4), el cual resultó ser efectivo para caracterizar los regímenes estadísticos y las regiones de transición en la mayoría de las cantidades estudiadas. Sin embargo, producto de los comportamientos atípicos anteriormente mencionados, se tuvieron excepciones. En particular, para el EMAcC las cantidades asociadas a los autovectores, como la entropía de Shannon y la razón de participación, no pudieron ser escaladas por ξ, ya que el comportamiento no monótono observado impidió el colapso de las curvas para distintos tamaños n. Asimismo, en el caso no simétrico, aunque la razón de participación PR del EMANScC mostró un colapso efectivo de las curvas, este no se obtuvo mediante el parámetro ξ, sino a través de una variable de escalamiento modificada, ξ'.

Por otro lado, para ambos ensambles se caracterizó la degeneración promedio del espectro como función del parámetro de dilución p. Este análisis no solo pretendía cuantificar el nivel de degeneración en función del tamaño de la matriz, sino también, investigar si mediante un parámetro de escalamiento del tipo (3.4) era posible distinguir entre un régimen degenerado y uno no degenerado. El objetivo principal de esta caracterización fue evaluar si las cantidades más sensibles a la presencia de degeneraciones, como lo son las razones espectrales, mostraban transiciones más precisas hacia sus límites teóricos al restringir el análisis a la región no degenerada del espectro. Para el EMAcC se encontró que dicha región ocurre para valores de $\xi > 10$, mientras que en el EMANScC se presenta para $\xi > 9$. En ambos casos, sin embargo, estos valores del parámetro de escalamiento corresponden ya al régimen deslocalizado, por lo que la delimitación del espectro no conduce a una mejor caracterización de las transiciones, como se evidenció para el caso de la razón compleja $r_{\mathbb{C}}$ en ambos ensambles.

Todo esto sugiere que las razones espectrales, si bien brindan información relevante,

no resultan completamente idóneas para caracterizar de manera precisa ambos ensambles en presencia de degeneraciones, ya que estas introducen indeterminaciones que limitan a cierta manera la identificación certera de los regímenes estadísticos. Motivados por esto, se exploraron cantidades alternativas más sensibles a la estructura general del espectro y menos afectadas por la degeneración del mismo. En particular se utilizaron la norma espectral, definida en la ecuación (3.8), y la norma de Nikiforov, dada por la ecuación (4.4), para los casos simétrico y no simétrico, respectivamente. El análisis de estas cantidades mostró que ambas son compatibles con una caracterización mediante un parámetro de escalamiento del tipo ξ, lo que permitió confirmar de manera consistente la fiabilidad de este parámetro como un descriptor de universalidad. En este contexto, dichas normas actúan como magnitudes complementarias, evidenciando que los ensambles con constricciones locales pueden ser caracterizados sin recurrir a la eliminación de niveles degenerados.

Los resultados presentados en esta tesis muestran que la introducción de constricciones locales de suma por fila modifica de manera significativa las propiedades espectrales de los ensambles de matrices aleatorias diluidas. Sin embargo, es posible caracterizar dichos ensambles a partir de métodos o cantidades alternativas, más sensibles a su estructura general. De esta forma, el trabajo contribuye a una comprensión más completa del impacto de las constricciones locales en la teoría de matrices aleatorias, esperando que sus resultados motiven una aproximación teórica mas detallada.

Bibliografía

[1] M. L. Mehta, *Random matrices* (Elsevier, Amsterdam, 2004).

[2] G. Akemann, J. Baik, and P. Di Francesco, editors. *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory* (Oxford University Press, New York, 2011).

[3] M. Newman, *Networks: An Introduction* (Oxford Academic, Oxford, 2010).

[4] A. L. Barabási, *Network science*, Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci, **371**(1987), 20120375, (2013).

[5] I. J. Farkas, I. Derényi, A. L. Barabási, and T. Vicsek, *Spectra of "real-world" graphs: Beyond the semicircle law*, Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. **64**(2 Pt 2), 026704 (2001).

[6] P. Shukla, and S. Sadhukhan, *Random matrix ensembles with column/row constraints: I*, J. Phys. A Math. Theor. **48**(41), 415002 (2015).

[7] R. Künh, *Spectra of random stochastic matrices and relaxation incomplex systems*, Europhys. Lett. **109**(6), 60003 (2015).

[8] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz and D. J Watts, *Random Graphs with Arbitrary Degree Distributions and Their Applications*, Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. **64**(2 Pt 2), 026118 (2001).

[9] L. Page, S. Brin, R. Motwani, and T. Winograd, *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web*, on The Web Conference, (1999).

[10] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems*, (Princeton university press, Princeton, NJ, (2019).

[11] X. Zhao, F. Liu, S. Xing, and Q. Wang, *Identifying Influential Spreaders in Social Networks Via Normalized Local Structure Attributes*, IEEE Access, **6**, 66095-66104, (2018).

[12] A. N. Langville, and C. D. Meyer, *Google's PageRank and beyond: The science of search engine rankings* (Princeton university press, Princeton, NJ, 2006).

[13] P. Akara-pipattana, and O. Evnin, *Random matrices with row constraints and eigenvalue distributions of graph Laplacians*, J. Phys. A Math. Theor. **56**(29), 295001 (2023).

[14] V. Gurarie, and J.T Chalker, *Bosonic excitations in random media*, Phys. Rev. B **68**(13), 134207 (2003).

[15] M. Mézard, G. Parisi, and A. Zee, *Spectra of euclidean random matrices*, Nucl. Phys. B. **559**(3), 689–701 (1999).

[16] M. Antezza, Y. Castin, and D.A.W Hutchinson, *Quantitative study of two- and three-dimensional strong localization of matter waves by atomic scatterers*, Phys. Rev. A **82**(4) 043602, (2010).

[17] S.E. Skipetrov, and R. Maynard, *Instabilities of waves in nonlinear disordered media*, Phys. Rev. Lett. **85**(4), 736–739 (2000).

[18] C.R. Offer, and B.D. Simons, *Field theory of Euclidean matrix ensembles*, J. Phys. A Math. Gen. **33**(42), 7567–7583 (2000).

[19] Y.V. Fyodorov, *Spectral properties of random reactance networks and random matrix pencils*, J. Phys. A Math. Gen. **32**(42), 7429–7446 (1999).

[20] 45 J. Stäring, B. Mehlig, Y.V. Fyodorov, and J.M. Luck, *Random symmetric matrices with a constraint: the spectral density of random impedance networks*, Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. **67**(4 Pt 2), 047101 (2003).

[21] Y. F. Fyodorov and A. D. Mirlin, *Scaling properties of localization in random band matrices: A σ-model approach*, Phys. Rev. Lett. **67**(18), 2405–2409 (1991).

[22] J. A. Mendez-Bermudez, G. F. de Arruda, F. A. Rodrigues, and Y. Moreno, *Scaling properties of multilayer random networks*, Phys. Rev. E **96**(1-1), 012307 (2017).

[23] J. A. Mendez-Bermudez, G. F. de Arruda, F. A. Rodrigues, and Y. Moreno, *Diluted banded random matrices: Scaling behavior of eigenfunction and spectral properties*, J. Phys. A: Math. Theor. **50**(49), 495205 (2017).

[24] J. A. Mendez-Bermudez, A. Alcazar-Lopez, A. J. Martinez-Mendoza, F. A. Rodrigues, and T.K.D. Peron, *Universality in the spectral and eigenfunction properties of random networks*, Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. **91**(3), 032122 (2015).

[25] F. J. Dyson, *The Threefold Way. Algebraic Structure of Symmetry Groups and Ensembles in Quantum Mechanics*, J. Math. Phys. **3**(6), 1199–1215 (1962).

[26] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, *Random-matrix theories in quantum physics: common concepts*, Phys. Rep. **299**(4-6), 189-425 (1998).

[27] W. Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, Michigan, 1985).

[28] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 3rd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2020).

[29] C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (Academic Press, New York, 1965).

[30] L. E. Reichl, *Transition to chaos: Conservative classical and Quantum Systems.* (Springer Nature, Cham, 1992).

[31] 7 H. Weyl, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1946).

[32] J. H. Conway and D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry* (A K Peters Press, Massachussets, 2003).

[33] F.J. Dyson, *Statistical theory of the energy levels of complex systems. I*, J. Math. Phys. **3**(1), 140–156 (1962).

[34] R. Balian, *Random matrices and information theory*, Il Nuovo Cimento B **57**(1), 183–193 (1968).

[35] R. Grobe, and F. Haake, *Universality of cubic-level repulsion for dissipative quantum chaos*, Phys. Rev. Lett. **62**(25), 2893–2896 (1989).

[36] R. Hamazaki, K. Kawabata, and M. Ueda, *Non-Hermitian many-body localization*, Phys. Rev. Lett. **123**(9), 090603 (2019).

[37] A. Crisanti, and H. Sompolinsky, *Dynamics of spin systems with randomly asymmetric bonds: Langevin dynamics and a spherical model*, Phys. Rev. A Gen. Phys. **36**(10), 4922–4939 (1987).

[38] J. Ginibre, *Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices*, J. Math. Phys. **6**(3), 440–449 (1965).

[39] G. Akemann, and E. Kanzieper, *Integrable structure of ginibre's ensemble of real random matrices and a pfaffian integration theorem*, J. Stat. Phys. **129**(5–6), 1159–1231 (2007).

[40] E.P. Wigner, *Proceedings of the 4th Canadian Mathematics Congress* (University of Toronto Press, Toronto, Canada, 1959).

[41] P.J. Forrester, Log-Gases and Random Matrices (Princeton University Press, Princeton, NJ, United States of America, 2010).

[42] N. Lehmann, and H.J. Sommers, *Eigenvalue statistics of random real matrices*, Phys. Rev. Lett. **67**(8), 941–944 (1991).

[43] M.V. Berry, and M. Tabor, *Level clustering in the regular spectrum*, Proc. R. Soc. Lond. **356**(1686), 375–394 (1977).

[44] 21 O. Bohigas, M.J. Giannoni, and C. Schmit, *Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws*, Phys. Rev. Lett. **52**(1), 1–4 (1984).

[45] 22 R. Grobe, F. Haake, and H.J. Sommers, *Quantum distinction of regular and chaotic dissipative motion*, Phys. Rev. Lett. **61**(17), 1899–1902 (1988).

[46] O. Bohigas, *Random matrices and chaotic dynamics* (LesHouches Session LII, North-Holland, 1989).

[47] 1 L. Sá, P. Ribeiro, and T. Prosen, *Complex spacing ratios: A signature of dissipative quantum chaos*, Phys. Rev. X. **10**(2), (2020).

[48] J.A. Méndez-Bermúdez, and R. Aguilar-Sánchez, *Singular value statistics of directed random graphs*, Phys. Rev. E. **110**(6–1), 064307 (2024).

[49] C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell Syst. Tech. J. **27**(3), 379–423 (1948).

[50] V. Oganesyan, and D.A. Huse, *Localization of interacting fermions at high temperature*, Phys. Rev. B Condens. Matter Mater. Phys. **75**(15), (2007).

[51] T. Peron, B. M. F. de Resende, F. A. Rodrigues, L. da F. Costa, and J. A. Mendez-Bermudez, *Spacing ratio characterization of the spectra of directed random networks*, Phys. Rev. E **102**(6–1), 062305 (2020).

[52] K. Peralta-Martinez and J. A. Mendez-Bermudez, *Directed random geometric graphs: structural and spectral properties*, J. Phys. Complex. **4**(1), 015002 (2023).

[53] S. Sadhukhan, and P. Shukla, *Random matrix ensembles with column/row constraints: II*, J. Phys. A Math. Theor. **48**(41), 415003 (2015).

[54] J. Hutchinson, J. P. Keating and F. Mezzadri, *Random matrix theory and critical phenomena in quantum spin chains*, Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. **92**(3), 032106 (2015)

[55] E.P. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. Math. **67**(2), 325 (1958).

[56] G. Akemann, Z. Burda, and M. Kieburg, *Universality of local spectral statistics of products of random matrices*, Phys. Rev. E. **102**(5–1), 052134 (2020).

[57] I. Gutman, *The energy of a graph*, Ber. Math. Statist. Sekt. For. Graz **103**, 1–22, (1978).

[58] V. Nikiforov, *The energy of graphs and matrices*, J. Math. Anal. Appl. **326**(2), 1472-1475 (2007).