



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Aplicaciones de la teoría de percolación: de la física de altas energías a la agroecología

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRÍA EN CIENCIAS  
(FÍSICA APLICADA)**

por

Diana Rosales Herrera

Asesorada por

Dr. Arturo Fernández Téllez  
Dr. Jhony Eredi Ramírez Cancino

Puebla Pue.  
Julio de 2023





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Aplicaciones de la teoría de percolación: de la física de altas energías a la agroecología

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRÍA EN CIENCIAS  
(FÍSICA APLICADA)**

por

Diana Rosales Herrera

Asesorada por

Dr. Arturo Fernández Téllez  
Dr. Jhony Eredi Ramírez Cancino

Puebla Pue.  
Julio de 2023



**Título:** Aplicaciones de la teoría de percolación: de la física de altas energías a la agroecología

**Estudiante:** DIANA ROSALES HERRERA

COMITÉ

---

Dr. Mario Iván Martínez Hernández  
Presidente

---

Dr. Jorge Velázquez Castro  
Secretario

---

Dr. Mario Rodríguez Cahuantzi  
Vocal

---

Dr. Jesús Francisco López Olguín  
Vocal

---

Dr. Arturo Fernández Téllez  
Dr. Jhony Eredi Ramírez Cancino  
Asesor



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Agradecimientos</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>3</b>  |
| Bibliografía . . . . .   | 5         |
| <b>2. Teoría de percolación</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1. Teoría de percolación en una dimensión . . . . .  | 7         |
| 2.2. Teoría de percolación en dos dimensiones . . . . .  | 9         |
| 2.3. Proceso de simulación . . . . .   | 14        |
| 2.3.1. Implementación del algoritmo Union-Find . . . . .   | 15        |
| 2.3.2. Implementación del algoritmo de Hoshen y Kopelman . . . . .   | 15        |
| 2.3.3. Implementación del algoritmo de Newman y Ziff . . . . .   | 17        |
| 2.3.4. Implementación del algoritmo de Mertens y Moore . . . . .   | 17        |
| 2.4. Metodología establecida para el cómputo de observables . . . . .  | 18        |
| 2.4.1. Umbral de percolación en el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada a primeros vecinos . . . . . | 20        |
| 2.4.2. Umbral de percolación en el modelo continuo de dos dimensiones con discos. . . . .                          | 20        |
| Bibliografía . . . . .   | 23        |
| <b>3. Aplicación de la teoría de percolación en la propagación de enfermedades en plantaciones</b>                 | <b>25</b> |
| 3.1. Percolación con sitios complejos . . . . .  | 27        |
| 3.2. Aplicaciones en la agroecología . . . . .   | 29        |
| 3.2.1. Estrategias . . . . .   | 30        |
| Bibliografía . . . . .   | 36        |
| <b>4. Aplicación de la teoría de percolación en la propagación de enfermedades por movilidad humana</b>            | <b>37</b> |
| 4.1. Teoría de percolación y redes complejas . . . . .   | 37        |
| 4.2. Redes de conexión del Estado de Puebla . . . . .  | 40        |
| 4.2.1. Tamaño de la componente más grande y el umbral de percolación . . . . .                                     | 43        |
| 4.3. Estrategias de movilidad basadas en la teoría de percolación . . . . .  | 45        |
| 4.4. Anexo . . . . .   | 45        |
| Bibliografía . . . . .   | 50        |
| <b>5. Aplicación de la teoría de percolación en la física de altas energías</b>                                    | <b>51</b> |
| 5.1. Observables del Modelo de Percolación de Cuerdas de Color . . . . .   | 51        |
| 5.1.1. Temperatura en el modelo de percolación de cuerdas de color . . . . .                                       | 56        |
| 5.2. Aplicación de la metodología y proceso de simulación . . . . .  | 57        |
| 5.3. Resultados . . . . .  | 59        |
| 5.3.1. Escalamiento de las observables y estimación en el límite termodinámico. . . . .                            | 59        |
| 5.3.2. Efecto de sistema finito en colisiones de partículas. . . . .   | 62        |
| 5.3.3. Densidad de cuerdas y energía de centro de masa. . . . .  | 64        |

|   |           |
|---|-----------|
| 5.3.4. Diagrama de fase para la formación del plasma de quarks y gluones en función de $\sqrt{s}$ y $A_M$ . | 65        |
| Bibliografía  | 69        |
| <b>6. Conclusiones y perspectivas</b>   | <b>71</b> |
| Bibliografía  | 75        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>77</b> |

# Agradecimientos

Los autores agradecen al Laboratorio Nacional de Supercómputo del Sureste de México perteneciente a la red de laboratorios nacionales CONACYT, por los recursos computacionales, el apoyo y la asistencia técnica.



# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de percolación es una rama de la física estadística que nos permite estudiar, modelar y determinar las condiciones necesarias para que ocurra un fenómeno de transporte [1.1, 1.2].

Esta teoría surge de las observaciones hechas por el ingeniero inglés Simon Broadbent cuando se encontraba diseñando filtros de carbón para máscaras de gas. Este personaje se dio cuenta de la relación que había entre el grado de porosidad del carbón y la eficiencia de filtrado de éste. Posteriormente, en colaboración con el matemático J. M. Hammersley, Broadbent concluyó que el transporte de un fluido (o partículas individuales) a través de un medio aleatorio con enlaces abiertos (o cerrados) de acuerdo a cierta proporción se trataba de un nuevo proceso de difusión [1.2, 1.3]. De ésta forma entre los años de 1954 y 1957 la teoría de percolación se formalizó y estudió como una teoría matemática basada en conceptos geométricos y probabilísticos.

En general, el medio aleatorio se modela como una red en la que se define un vínculo entre sus elementos. El principal problema a resolver en la teoría de percolación es hallar el valor crítico de la proporción de *sitios abiertos* con la cual emerge una característica fundamental de conexión en los componentes de la red. Dicho valor depende de la estructura de la red y la dimensión [1.1].

Debido a su gran versatilidad, la teoría de percolación ha sido aplicada en un amplio rango de problemas como la propagación de enfermedades en plantas [1.4], la propagación de incendios forestales [1.5], el flujo de corriente eléctrica a través de un circuito [1.6] y el estudio de redes complejas [1.7], entre otros [1.8].

El presente trabajo tiene como objetivo aplicar la teoría de percolación en distintos contextos bajo la misma metodología, reinterpretando en cada marco de referencia el significado de las observables, en particular el del umbral de percolación. La aplicación de la teoría de percolación es factible en fenómenos de diversa índole y escala porque en éstos las observables de interés son resultado de la colectividad de los elementos participantes.

Este escrito queda organizado de la siguiente manera:

- Capítulo 2: A partir de la construcción de la red uno-dimensional se introducen los conceptos básicos de la teoría de percolación. Posteriormente, se comenta la problemática que surge en la estimación de algunas observables, como el umbral de percolación  $p_c$ , cuando se trabaja en una red cuadrada de tamaño  $L \times L$ . Debido a que la teoría de percolación es una teoría sensible al tamaño del sistema se destacan las leyes de escalamiento que relacionan a las observables de interés con el tamaño lineal  $L$  de la red. Dichas leyes de escalamiento permiten la estimación de las observables en el límite termodinámico, es decir, cuando  $L \rightarrow \infty$  manteniendo fija la densidad. En este sentido, se detallan los algoritmos implementados en el proceso de simulación y la metodología establecida para la estimación de las observables en las diferentes problemáticas abordadas a lo largo del presente trabajo. En particular, se ejemplifica el cálculo del umbral de percolación en el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada a primeros vecinos y en el caso continuo de dos dimensiones con discos.
- Capítulo 3: En este capítulo se analiza el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada con una fracción  $I$  de sitios con vecinos extendidos, es decir, cuando coexisten en la red dos definiciones de vecinos cercanos. En consecuencia, se espera que al aumentar el valor del parámetro  $I$  el umbral de percolación se reduzca. Posteriormente, motivados por la propagación de enfermedades en

plantaciones regulares se modela una red cuadrada con una fracción  $I$  de sitios que tienen vecinos extendidos y el complemento  $1 - I$  de sitios con definición de vecindad tradicional (primeros o segundos vecinos). En este contexto, la definición de vecino complejo surge de la interacción contigua de una celda con planta susceptible y una celda con presencia de un fitopatógeno con movilidad propia. En particular, a partir de la metodología establecida en el capítulo 2 se estima el umbral de percolación como función del parámetro  $I$ .

- Capítulo 4: En este capítulo se estudian las propiedades de conexión de los municipios del Estado de Puebla y su efecto en la propagación de la enfermedad COVID-19. En este modelo los municipios son representados por los nodos de una red compleja, los cuales quedan enlazados de acuerdo a dos definiciones de vecinos cercanos: las que se dan entre municipios que colindan geográficamente y aquellos que se conectan a través de la infraestructura carretera estatal. Así, desde la perspectiva de la teoría de percolación de sitios y enlaces sobre redes complejas se proponen estrategias de movilidad para la contención del virus causante de la enfermedad. Estas estrategias consisten en remover nodos o enlaces de forma que la red de conexión se fragmente en pequeños racimos y los brotes de la enfermedad se mantengan aislados. Para ello, en este marco de referencia se implementa la metodología establecida para el cálculo de  $s_{\text{máx}}(p)$  definido como el tamaño del racimo de más grande en función de la densidad  $p$  de nodos (o enlaces) en la red compleja. A partir de ésta observable y su relación con la observable *strength*  $P_{\text{str}}(p)$  y la *susceptibilidad* de éste es posible estimar la fracción crítica de nodos (o enlaces) removidos que desconecta al racimo percolante.
- Capítulo 5: En el contexto de la física de altas energías se estudian las colisiones centrales de iones pesados bajo el modelo de percolación de cuerdas de color (CSPM por sus siglas en inglés). El CSPM sienta sus bases en la teoría de percolación continua en dos dimensiones con discos en donde la formación de racimos se da a través del traslape de dichos objetos. A través de la metodología establecida se estiman en el límite termodinámico las observables de interés del CSPM, en particular el umbral de percolación  $\eta_c$  en el que el racimo percolante de cuerdas de color se asocia con la formación del Plasma de Quarks y Gluones (QGP por sus siglas en inglés). Posteriormente, las observables del CSPM son escaladas con el número de nucleones  $A_M$  del proyectil, por lo que los efectos de sistema finito pueden ser tomados en cuenta y comparados con los estimados en el límite termodinámico. El principal resultado es la estimación de la energía de centro de masa  $\sqrt{s}$  mínima necesaria para la formación del QGP como función del número de nucleones, la cual es consistente con los datos reportados en la literatura.
- Capítulo 6: En éste capítulo se presentan las principales conclusiones obtenidas en este trabajo.

# Bibliografía

- [1.1] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction To Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [1.2] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley, “Percolation processes: I. crystals and mazes,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 53, no. 3, pp. 629–641, 1957.
- [1.3] A. Efros, *Physics And Geometry of Disorder*. Mir Publishers, 1982.
- [1.4] J. E. Ramírez, E. Molina-Gayosso, J. Lozada-Lechuga, L. M. Flores-Rojas, M. I. Martínez, and A. Fernández Téllez, “Percolation strategy to improve the production of plants with high pathogen susceptibility,” *Phys. Rev. E*, vol. 98, p. 062409, Dec 2018.
- [1.5] E. V. Albano, “Critical behaviour of a forest fire model with immune trees,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 27, no. 23, p. L881, 1994.
- [1.6] S. Kirkpatrick, “Percolation and conduction,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 45, pp. 574–588, Oct 1973.
- [1.7] D. S. Callaway, M. E. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, “Network robustness and fragility: Percolation on random graphs,” *Physical review letters*, vol. 85, no. 25, p. 5468, 2000.
- [1.8] A. A. Saberi, “Recent advances in percolation theory and its applications,” *Physics Reports*, vol. 578, pp. 1–32, 2015. Recent advances in percolation theory and its applications.



## Capítulo 2

# Teoría de percolación

Comenzaremos ésta sección introduciendo los conceptos básicos de la teoría de percolación para sistemas en una y dos dimensiones considerando modelos discretos. Haremos énfasis en las relaciones de escalamiento de algunas observables alrededor del punto en el que el sistema sufre una transición de fase.

Posteriormente se describen los modelos de percolación discreta de sitios y enlaces en la red cuadrada, así como el modelo de percolación continua en dos dimensiones para discos y los algoritmos de simulación implementados para cada modelo. Dichos modelos serán de utilidad para modelar los problemas abordados en los capítulos siguientes.

Finalmente, se establece la metodología para el análisis de datos y la estimación del umbral de percolación. En particular, se reproducen los cálculos para el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada a primeros vecinos y para el modelo de percolación continua en dos dimensiones para discos.

### 2.1. Teoría de percolación en una dimensión

Partimos de imaginar una cadena lineal lo suficientemente larga, sobre cuyos sitios definimos la propiedad de *estar ocupado* o *vacío* con probabilidad  $p$  o  $1-p$ , respectivamente. Una vez definida la probabilidad de ocupación, se da paso a la formación de racimos. Para el caso unidimensional podemos definir un racimo como un conjunto de sitios ocupados que son vecinos cercanos y entre los cuales no existe un sitio vacío. En Fig. 2.1 se muestran, de izquierda a derecha, racimos de tamaño 1, 2 y 3, respectivamente; se puede notar que cada racimo queda delimitado por un sitio vacío a cada extremo.

De esta forma tendremos racimos de diferentes tamaños, siendo el racimo más pequeño el de tamaño 1, pero puede existir un racimo lo suficientemente grande que es capaz de enlazar los extremos de la red. A este racimo se le conoce como racimo percolante y es muy importante porque a través de él ocurre el fenómeno de transporte.

El problema fundamental de la teoría de percolación es determinar el valor de la probabilidad de ocupación  $p$  a partir del cual se estructura el racimo percolante, marcando una transición de fase en el sistema. A este valor se le conoce como probabilidad crítica o umbral de percolación y usualmente es denotado como  $p_c$ . Notar que en la red uno-dimensional al menos existe un sitio vacío cuando  $p = 1 - \epsilon$  para cualquier  $\epsilon \in (0, 1)$ . Por lo tanto, se puede concluir que en ésta red el umbral de percolación es  $p_c = 1$  y no es posible observar la región  $p > p_c$  [2.1].

De esta forma, al considerar  $p < 1$  la probabilidad de que un sitio arbitrario lejos de los efectos de la



Figura 2.1: Las celdas sombreadas representan los sitios ocupados en la cadena. En la imagen se muestran, de izquierda a derecha, racimos de tamaño 1, 2 y 3.

frontera de la cadena pertenezca a un racimo de tamaño  $s$  es  $sn_s$ , donde  $n_s = p^s(1-p)^2$  es el número de racimos de tamaño  $s$  por sitio en la cadena. En general, cada sitio ocupado debe pertenecer a un racimo, por lo que la probabilidad de que un sitio pertenezca a cualquier racimo es igual a la probabilidad  $p$  de ocupación. En particular, lo anterior puede ser verificado para el caso uno-dimensional cuando  $p < p_c$  mediante

$$\begin{aligned}
 \sum_s n_s s &= \sum_s p^s (1-p)^2 s \\
 &= (1-p)^2 \sum_s s p^s \\
 &= (1-p)^2 \sum_s p \frac{d(p^s)}{dp} \\
 &= p(1-p)^2 \sum_s \frac{d(p^s)}{dp} \\
 &= p(1-p)^2 \frac{d(\sum_s p^s)}{dp} \\
 &= p(1-p)^2 \frac{d(p/(1-p))}{dp} \\
 &= p(1-p)^2 \frac{1}{(1-p)^2} \\
 &= p.
 \end{aligned}$$

De lo anterior podemos definir

$$w_s = \frac{sn_s}{\sum_s n_s s} = \frac{sn_s}{p}$$

como la probabilidad de que el racimo al que pertenece un sitio ocupado elegido al azar sea de tamaño exactamente  $s$ . Por tanto el tamaño promedio de los racimos es estimado como

$$S = \sum_s s w_s = \sum_s \frac{s^2 n_s}{p}. \quad (2.1)$$

Notemos que el desarrollo del numerador de la Ec.(2.1) es de la forma

$$\begin{aligned}
 \sum_s s^2 p^s (1-p)^2 &= (1-p)^2 \sum_s s^2 p^s \\
 &= (1-p)^2 \left( p \frac{d}{dp} \left( p \frac{d}{dp} \sum_s p^s \right) \right) \\
 &= (1-p)^2 \left( p \frac{d}{dp} \left( \frac{p}{(1-p)^2} \right) \right) \\
 &= (1-p)^2 \left( \frac{p(1+p)}{(1-p)^3} \right) \\
 &= \frac{p(1+p)}{(1-p)}.
 \end{aligned}$$

Al sustituir dicho desarrollo en la expresión (2.1) se tiene que el tamaño promedio de los racimos cuando  $p < p_c$  es

$$S = \frac{1+p}{1-p}, \quad (2.2)$$

cuya divergencia en  $p \rightarrow 1$  muestra el rápido crecimiento que pueden alcanzar los racimos cerca del umbral de percolación. La ecuación 2.2 puede ser re-escrita como el escalamiento

$$S \propto \frac{1}{p_c - p}. \quad (2.3)$$

Una cantidad de importancia en la teoría de percolación que se relaciona con el tamaño promedio de racimos  $S$  es la longitud de correlación  $\xi$ , la cual es introducida al analizar el comportamiento de la función de correlación (o función de conectividad a pares)  $g(r)$  cuando  $p < 1$ . La función de correlación  $g(r) = p^r$  es definida como la probabilidad de que dos sitios ocupados elegidos al azar que se encuentran a una distancia  $r$  uno del otro pertenezcan al mismo racimo. Notemos que la distancia mínima que podemos medir es  $r = 0$ , es decir, la distancia de un sitio ocupado a él mismo, en cuyo caso  $g(0) = 1$ . Por otra parte, cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $g(r)$  tiende a cero exponencialmente. Esto es,

$$\begin{aligned} g(r) &= p^r \\ &= \exp(\ln(p^r)) \\ &= \exp(r \ln(p)) \\ &= \exp\left(-r \ln\left(\frac{1}{p}\right)\right), \end{aligned}$$

donde la longitud de correlación es una constante definida como

$$\xi^{-1} = \ln\left(\frac{1}{p}\right) = -\ln(p).$$

Recordando la expansión en serie de Taylor sabemos que  $\ln(1-x) \approx -x$  para valores de  $x$  cercanos a 0. Tomando el cambio de variable  $p = 1-x$  y despejando  $-x = p-1$  tenemos que  $-\ln(p) = 1-p$ , y por tanto para el caso unidimensional la longitud de correlación queda expresada como

$$\xi^{-1} = p_c - p, \tag{2.4}$$

que de manera similar al tamaño promedio de racimos  $S$  tiene un comportamiento asintótico alrededor del umbral de percolación  $p_c = 1$ . En el problema en una dimensión puede observarse de manera directa que la longitud de correlación  $\xi$  es proporcional al tamaño promedio  $S$  de los racimos, pues el tamaño  $s$  de los racimos no es muy diferente de la longitud  $s-1$  de éstos cuando  $s$  aumenta, esto es:

$$S \propto \xi(p \rightarrow p_c). \tag{2.5}$$

Otro resultado importante en la teoría de percolación en una dimensión es que el tamaño promedio  $S$  de los racimos puede ser expresado como la suma sobre  $r$  de la función de correlación  $g(r)$ , es decir,

$$\sum_s g(r) = S, \tag{2.6}$$

donde es necesario hacer la siguiente precisión: La probabilidad  $g(r)$  de que un sitio ocupado fijo pertenezca al mismo racimo que un sitio ocupado que se encuentra a una distancia  $r$  hacia la derecha de éste es la misma si en cambio se tomara hacia la izquierda. Puesto que en la sumatoria de la ecuación (2.6) no podemos diferenciar la dirección que se elige, debemos sumar dos veces cada valor de  $r > 0$  para tener una conteo correcto.

Para concluir esta sección, recalcaremos el hecho de que en el caso unidimensional observamos que ciertas cantidades pudieron ser descritas mediante la ley de potencias  $1/(p_c - p)$  mostrando un comportamiento divergente cerca de la probabilidad crítica  $p_c = 1$ .

## 2.2. Teoría de percolación en dos dimensiones

Comenzaremos ésta sección con la teoría de percolación discreta de sitios en la red cuadrada. Partimos de una red cuadrada de tamaño  $L \times L$ , cuyas celdas tienen probabilidad independiente  $p$  de encontrarse en el estado *ocupado* y probabilidad  $1-p$  de encontrarse en el estado *vacío*.

De manera similar al caso unidimensional debemos estudiar la formación de racimos de sitios que son vecinos cercanos. Una de las definiciones habituales de vecinos cercanos es la que se conoce como primeros

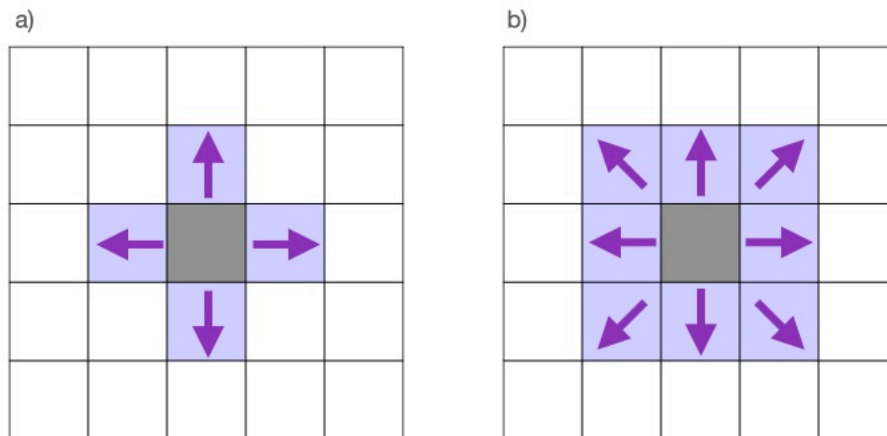


Figura 2.2: En la imagen se muestran en sombreado púrpura las definiciones de primer (a) y segundo vecino cercano (b) de un sitio ocupado en la red cuadrada (sombreado gris).

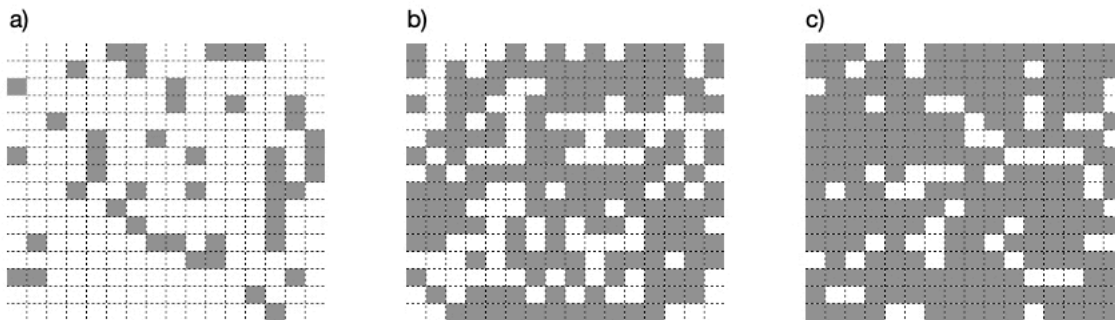


Figura 2.3: a) Red cuadrada a primeros vecinos con probabilidad de ocupación  $p = 0.2$ ; b) Formación del racimo percolante en la red cuadrada a primeros vecinos; c) Red cuadrada a primeros vecinos con probabilidad de ocupación  $p = 0.8$ .

vecinos o  $2N$  (*nearest-neighbor*), por sus siglas en inglés, en la que un sitio ocupado tiene por vecino a la celda superior, inferior, lateral izquierdo y derecho como se muestra en Fig. 2.2 a). Otra definición usual es la conocida como segundos vecinos o  $3N$  (*next-to-nearest neighbor*) por sus siglas en inglés, en donde ahora se incluyen las celdas de las esquinas (ver Fig. 2.2 b) ).

En Fig. 2.3 se muestra una red cuadrada de tamaño  $16 \times 16$  con diferentes valores de probabilidad de ocupación  $p$  a primeros vecinos. Se puede observar que cuando  $p = 0.2$  sólo algunos sitios se encuentran ocupados, mientras que para  $p = 0.8$  casi la totalidad de las celdas de la red se hallan ocupadas. Nuevamente, el problema fundamental de la teoría de percolación es determinar el valor de la probabilidad crítica o umbral de percolación  $p_c$  a partir del cual se forma el racimo percolante que conecta dos lados opuestos de la red y propicia el fenómeno de transporte (ver Fig. 2.3 b) ).

Una forma geométrica de caracterizar la formación de racimos es mediante su perímetro  $t$ , el cual se define como el número de vecinos cercanos vacíos. Por ejemplo, todos los racimos (a excepción del racimo percolante) a primeros vecinos en una dimensión tienen perímetro  $t = 2$  (ver Fig. 2.1), en contraste con el racimo de tamaño uno en la red cuadrada a primeros vecinos que tiene perímetro  $t = 4$ . Es importante no confundir el perímetro  $t$  con la superficie de un racimo ya que  $t$  también incluye a los vecinos vacíos que se encuentran atrapados dentro del racimo tal como se muestra en Fig. 2.4.

Por lo anterior, una forma intuitiva de registrar el crecimiento de los racimos es calculando el número promedio de racimos de tamaño  $s$  por casilla en la red  $n_s$ , tal como en el caso unidimensional. De manera

|    |   |    |   |   |  |   |   |   |
|----|---|----|---|---|--|---|---|---|
|    | 1 | 2  | 3 |   |  |   |   |   |
| 12 |   |    |   | 4 |  |   | 1 |   |
| 11 |   | 13 |   | 5 |  | 4 |   | 2 |
| 10 |   |    |   | 6 |  |   | 3 |   |
|    | 9 | 8  | 7 |   |  |   |   |   |

Figura 2.4: Se muestran dos racimos en la red cuadrada. Para cada uno se especifica el número de primeros vecinos vacíos que conforman el perímetro.

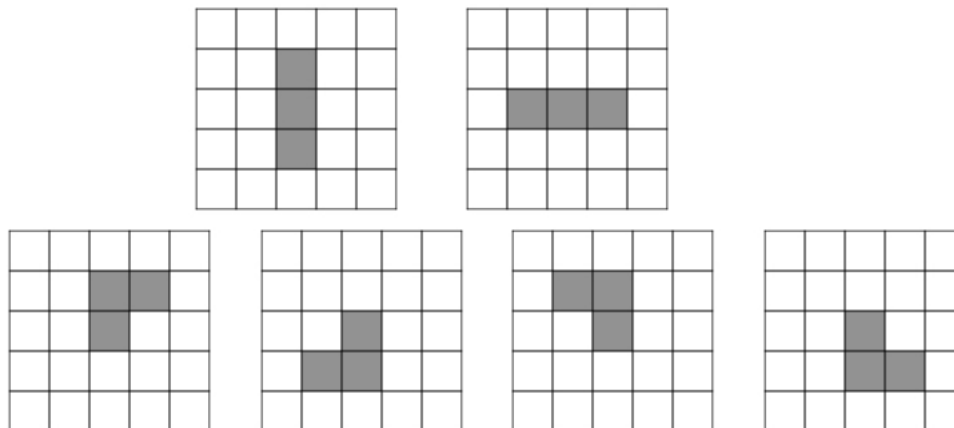


Figura 2.5: En este esquema se muestran las 6 posibles configuraciones en las que puede hallarse un racimo de tamaño 3 en la red cuadrada a primeros vecinos.

general podemos calcular  $n_s$  mediante la expresión

$$n_s = \sum_{t=1}^{\infty} g_{st} p^s (1-p)^t, \tag{2.7}$$

donde  $g_{st}$  se define como el número de configuraciones de un racimo de tamaño  $s$  y perímetro  $t$ . Por ejemplo, como se muestra en Fig.2.5 para un racimo de tamaño  $s = 3$  se tiene que  $g_{3,8} = 2$  y  $g_{3,7} = 4$ , es decir, existen 2 maneras de formar un racimo de tamaño 3 y perímetro 8 (racimos lineales) y 4 maneras de formar un racimo del mismo tamaño con perímetro 7 (rotaciones de racimo en forma de "L"). Por tanto,  $n_3 = 2p^3(1-p)^8 + 4p^3(1-p)^7$ .

Como se puede observar, para la red cuadrada la expresión (2.7) queda condicionada al número de posibles configuraciones en la que puede formarse un racimo de tamaño  $s$ . Sin embargo caracterizar todos los posibles racimos en la red cuadrada es casi imposible, pues aunque parece sencillo notemos que tan solo para  $s = 4$  suman 19 arreglos posibles, mientras que para  $s = 5$  se contabilizan 63 configuraciones. Actualmente se sabe por simulación en computadora que un racimo de tamaño  $s = 24$  acumula  $10^{13}$  posibles arreglos. Este procedimiento generalizado del caso uno-dimensiional resulta poco útil para estudiar la formación de racimos, sobre todo cuando se trabajan con redes de gran tamaño [2.1–2.4].

Otro hecho muy importante que debe ser considerado es que la teoría de percolación es una teoría sensible al tamaño del sistema, lo cual influye en la determinación de las observables, en particular del

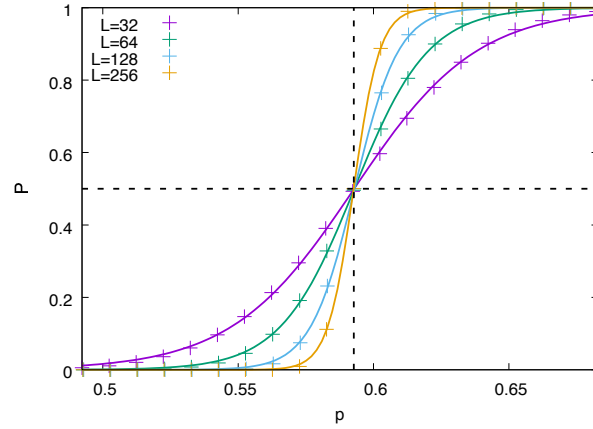


Figura 2.6: Probabilidad de percolación para  $L = 32, 64, 128$  y  $256$  (cruces), ajustada mediante la expresión (2.8) (línea continua). Se observa como al aumentar el valor de  $L$  la probabilidad de percolación tiende a una función escalón.

umbral de percolación.

Tomando en cuenta lo anterior, se define la probabilidad de percolación  $P_L(p)$  como la probabilidad de que en la red de tamaño  $L \times L$  se dé la formación del racimo percolante con la probabilidad de ocupación  $p$ . En Fig. 2.6 se muestran los datos de simulación (cruces) de la probabilidad de percolación  $P_L(p)$  para la red cuadrada a primeros vecinos con los valores  $L = 32, 64, 128$  y  $256$ .

Dichos datos fueron ajustados mediante la ecuación

$$P_L(p) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{p - p_{cL}}{\Delta_L} \right) \right), \quad (2.8)$$

donde  $p_{cL}$  es la estimación del umbral de percolación para el sistema de tamaño  $L \times L$  y  $\Delta_L$  corresponde al ancho de la región de transición en la que la probabilidad de percolación pasa de 0 a 1. Podemos observar en Fig. 2.6 cómo la región de transición  $\Delta_L$  depende del tamaño  $L$  del sistema, pues es más ancha para  $L = 32$  (curva púrpura) que para  $L = 256$  (curva amarilla).

Lo anterior significa que conforme aumenta el tamaño  $L$  del sistema,  $\Delta_L$  se reduce de modo que cuando  $L \rightarrow \infty$  la probabilidad de percolación  $P_L(p)_{L \rightarrow \infty}$  corresponde a la función escalón

$$P_L(p)_{L \rightarrow \infty} \sim \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ 1 & \text{si } p \geq p_c. \end{cases} \quad (2.9)$$

En este punto salta a la vista que la precisa determinación del umbral de percolación  $p_c$  se obtiene en el límite termodinámico. Puesto que computacionalmente es imposible generar redes de tamaño infinito se simulan redes para distintos valores ascendentes de  $L$  como se realizó en Fig. 2.6. Posteriormente, para cada valor de  $L$  se extraen del ajuste los valores de  $p_{cL}$  y  $\Delta_L$  con los que se analizan los efectos de sistema finito mediante leyes de escalamiento que relacionan éstas y otras cantidades de interés con el tamaño  $L$  del sistema.

En particular se tiene que

$$\Delta_L \propto L^{-1/\nu}. \quad (2.10)$$

y

$$p_{cL} - p_c \propto L^{-1/\nu}, \quad (2.11)$$

donde  $\nu$  es el exponente crítico asociado a la longitud de correlación alrededor del umbral de percolación mediante la expresión

$$\xi^{-1} \propto |p - p_c|^\nu, \quad (2.12)$$

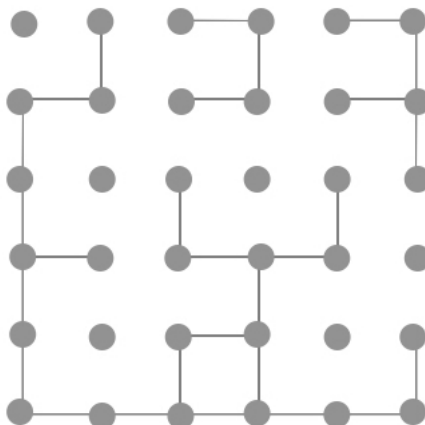


Figura 2.7: Se ejemplifica el modelo de percolación discreta de enlaces en la que los nodos de la red pueden estar conectados mediante las aristas con probabilidad  $p$ .

y cuyo valor aceptado en dos dimensiones es  $\nu = 4/3$  [2.1].

Complementando la información anterior, otras cantidades que también pueden ser escaladas con el tamaño  $L$  del sistema son el tamaño promedio de racimo  $S$  y el *strength*  $P_{\text{str}}$  definido como la probabilidad de que un sitio elegido al azar pertenezca al racimo percolante. Esto es

$$S \propto L^{\gamma/\nu} \tag{2.13}$$

y

$$P_{\text{str}} \propto L^{-\beta/\nu}, \tag{2.14}$$

donde los exponentes críticos  $\gamma$  y  $\beta$  provienen de las expresiones

$$S \propto |p - p_c|^{-\gamma}, \tag{2.15}$$

y

$$P_{\text{str}} \propto |p - p_c|^\beta, \tag{2.16}$$

respectivamente. Los valores aceptados para éstos exponentes en dos dimensiones son  $\gamma = 43/18$  y  $\beta = 5/36$ , y describen la divergencia del tamaño promedio de los racimos cuando  $p \rightarrow p_c$  y el crecimiento abrupto de  $P_{\text{str}}$ , respectivamente.

Un hecho importante sobre los exponentes críticos  $\nu, \gamma$  y  $\beta$  es que tienen una propiedad de universalidad, es decir, que permanecen igual para distintas redes que tienen la misma dimensión. Por ejemplo, en el caso uno-dimensional los exponentes críticos toman los valores  $\nu = 1$ ,  $\gamma = 1$  y  $\beta = 0$ . Lo anterior puede ser corroborado pues al sustituir  $\nu = 1$  y  $\gamma = 1$  en las expresiones (2.12) y (2.15) reproducimos las expresiones (2.4) y (2.3), respectivamente. Además,  $\beta = 0$  significa que cuando  $p < 1$  la probabilidad de que un sitio elegido al azar pertenezca al racimo percolante es  $P_{\text{str}} = 0$ .

Para finalizar ésta sección, resta comentar que además de la percolación de sitios en la red cuadrada también existen otros modelos de percolación discreta. Un ejemplo es el modelo de percolación de enlaces en la que se tiene una retícula de nodos que se conectan mediante aristas con probabilidad  $p$ . En Fig. 2.7 se muestra el esquema del modelo de enlaces, el cual puede ser tratado de forma semejante al de sitios, debido a que ambos pueden interpretarse como redes duales (ver Fig. 2.8) [2.5]. Éste tipo de modelos ha sido ampliamente utilizado para estudiar el flujo de corriente eléctrica en circuitos [2.6]. Otro modelo de percolación discreta es el que lleva por nombre modelo de percolación de nodos y enlaces. En este modelo tanto los nodos como los enlaces tienen probabilidad independiente de estar presentes o no.

Este modelo puede ser extendido a una versión continua, el cual consiste en disponer objetos (como discos o cuadrados) de manera arbitraria sobre una región cuadrada de tamaño  $L \times L$ , de modo que el

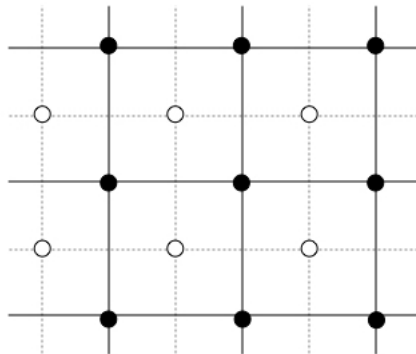


Figura 2.8: En líneas sólidas y puntos color negro se muestra la red  $\mathbb{Z}^2$  asociada al modelo de percolación de enlaces, mientras que con líneas punteadas y puntos color blanco se esquematiza la red  $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  asociada al modelo de percolación de sitios. Ambas redes son el dual una de la otra.

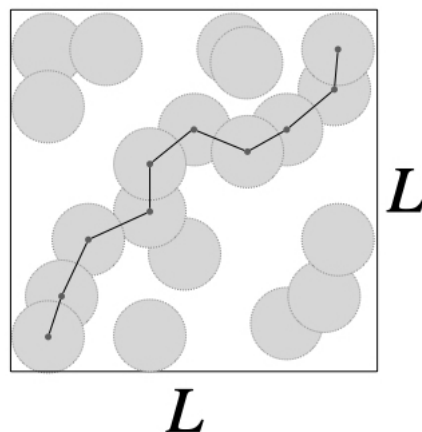


Figura 2.9: Modelo de percolación continua en dos dimensiones con discos donde se resalta la formación del racimo percolante.

traslape de éstos objetos da paso a la formación de racimos. A diferencia del caso discreto, en este modelo no se emplea la probabilidad de ocupación  $p$  sino que se define el parámetro de llenado  $\eta = Na/L^2$  que corresponde al número  $N$  de objetos de área  $a$  dispuestos sobre la superficie de tamaño  $L^2$ . En este modelo continuo la distribución espacial de los centros de los objetos es un Proceso de Puntos de Poisson (PPP) [2.7–2.10].

En Fig. 2.9 mostramos el modelo de percolación continua en dos dimensiones con discos en la que se ilustra el racimo percolante de discos traslapados. Un hecho interesante es que la estimación del umbral de percolación en los modelos continuos en dos dimensiones emplean la misma relación de escalamiento (2.11) asociada al exponente  $\nu$ , lo cual es un fuerte indicio de que éste modelo pertenece a la misma clase de universalidad que los modelos discretos [2.7].

Los modelos de percolación discretos y continuos descritos previamente son de utilidad para modelar un sin fin de fenómenos en diversos campos del conocimiento.

## 2.3. Proceso de simulación

En esta sección haremos una breve descripción de los algoritmos implementados en el proceso de simulación para la formación y detección de racimos en los diferentes modelos de percolación estudiados. Recordemos que para poder hacer nuestras estimaciones debemos simular sistemas con grandes valores

de  $L$  por lo que es de suma importancia implementar algoritmos eficientes.

Comenzaremos detallando los algoritmos implementados para los modelos de percolación discreta, que por practicidad describiremos en el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada.

### 2.3.1. Implementación del algoritmo Union-Find

El algoritmo Union-Find es un algoritmo muy importante que nos ayuda a rastrear la formación de los racimos. En nuestras simulaciones las tres ideas esenciales de éste algoritmo consisten en

- dotar a cada racimo de un valor numérico natural  $r$  llamado raíz que lo identifique y distinga de los demás,
- explorar los vecinos cercanos de un sitio ocupado en la red y determinar el racimo al que pertenecen (*Find*),
- si dos racimos  $r_1$  y  $r_2$  son adyacentes debe unirlos en un solo racimo (*Union*).

Para ejemplificar lo anterior supongamos que elegimos al azar el  $j$ -ésimo sitio ocupado en la red, le asignamos la raíz  $r_j$  y exploramos el estado de ocupación de sus primeros vecinos cercanos con la parte Find. En el supuesto de que el sitio  $r_j$  no tenga vecinos cercanos ocupados se le registra en una lista auxiliar como un racimo de tamaño 1. Por el contrario, cuando la parte Find del algoritmo encuentra vecinos cercanos ocupados puede ocurrir que éstos aún no tengan un valor raíz asignado, por lo que la parte Union les identifica con la misma raíz  $r_j$  del sitio elegido. En el caso de los que vecinos cercanos ocupados ya cuenten con una raíz  $r_i$  para algunos  $i = 1, 2, 3, 4$  el algoritmo compara cada uno con el valor de  $r_j$ . Si  $r_i \neq r_j$  significa que se trata de racimos diferentes que deben ser amalgamados en uno solo. Para esto, mediante una función auxiliar  $Size()$  comparamos el tamaño del racimo con raíz  $r_j$  y el de raíz  $r_i$ . Sin pérdida de generalidad, si  $Size(r_i) > Size(r_j)$ , entonces reasignamos a todos los sitios del racimo con raíz  $r_j$  la raíz  $r_i$ . Así, mediante la parte Union del algoritmo se unen en un solo racimo

En el caso de que el sitio elegido tenga dos (o más) vecinos que tienen la misma raíz  $r_i$  debe entenderse que éste sitio esta uniendo dos elementos que ya pertenecen al mismo racimo, tal como se observar en Fig. 2.10 a).

### 2.3.2. Implementación del algoritmo de Hoshen y Kopelman

El procedimiento que a continuación se describe es una implementación a primeros vecinos del algoritmo propuesto en 1976 por Joseph Hoshen y Raoul Kopelman, el cual se basa en el rastreo y etiquetado de los sitios ocupados en la red cuadrada [2.11].

En nuestra implementación generamos dos vectores booleanos  $X_0$  y  $X_1$  de tamaño  $L$  con probabilidad de ocupación  $p$  fija, donde las entradas de los vectores están identificadas de forma unívoca con el conjunto de etiquetas  $\{1, 2, \dots, L\}$ . Las entradas de los vectores que resulten ocupadas serán igual a 1, mientras que las entradas que representen un sitio vacío serán igual a 0. Para la entrada  $i \in \{1, 2, \dots, L\}$  del vector  $X_0$  verificamos su estado de ocupación, si se encuentra ocupada examinamos las entradas vecinas  $X_0[i+1]$  y  $X_1[i]$  que mediante el algoritmo Union-Find serán amalgamadas si una o ambas entradas también se encuentran ocupadas. En el caso del sitio  $X_0[L]$  únicamente se verifica la entrada  $X_1[L]$ .

Una vez que se han examinado las  $L$  entradas del vector booleano  $X_0$  guardamos en una lista auxiliar el registro de los racimos detectados. Posteriormente re-escribimos la información del vector  $X_1$  en el vector  $X_0$  previamente examinado y generamos un nuevo vector  $X_1$ , con el cual repetimos el proceso anterior hasta haber analizado en total  $L$  vectores. En Fig. 2.11 mostramos un esquema de ésta implementación.

La diferencia entre el algoritmo de Hoshen y Kopelman y nuestra implementación radica en que el primero verifica el estado de ocupación de todos los vecinos cercanos de cada celda en una red cuadrada ya generada, mientras que el segundo genera la red columna por columna y únicamente verifica dos de los cuatro vecinos cercanos (hacia abajo y hacia la derecha) de un sitio ocupado. Por lo tanto, nuestra implementación reduce la saturación de memoria RAM y tiempo de cómputo.

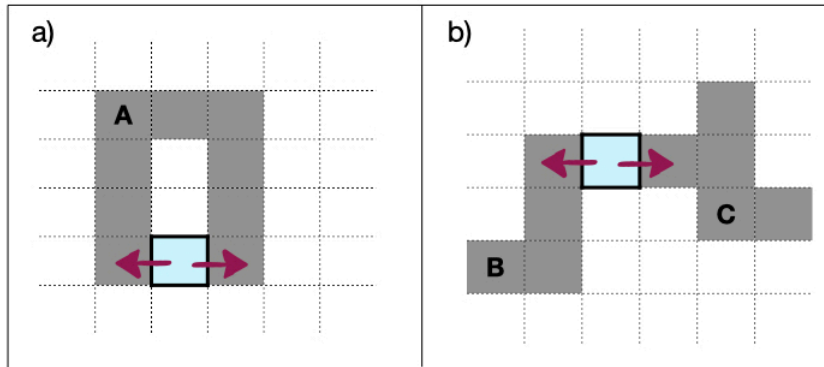


Figura 2.10: a) La parte Find del algoritmo detecta que los vecinos del sitio analizado pertenecen al mismo racimo. b) Cuando el algoritmo detecta que los vecinos de un sitio analizado pertenecen a racimos distintos la parte Union los amalgama en un solo racimo.

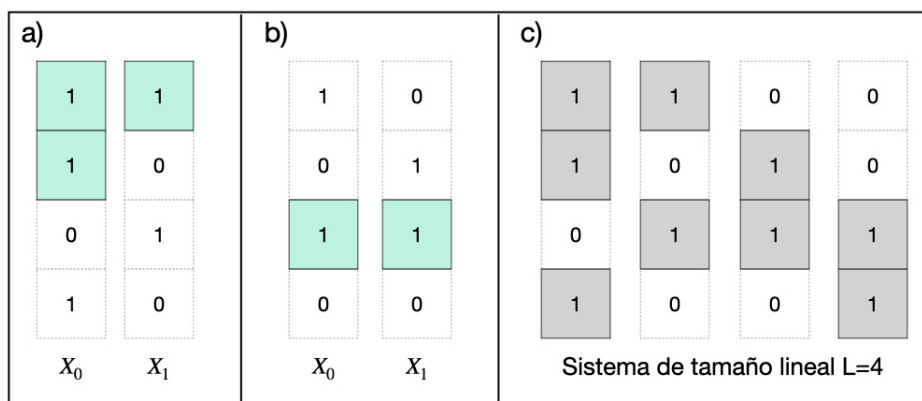


Figura 2.11: a) Se ilustra en verde las entradas de los vectores  $X_0$  y  $X_1$  que son amalgamadas en un mismo racimo. La entrada inferior del vector  $X_0$  es considerada como un racimo de tamaño 1. b) La información del vector  $X_1$  es re-escrita sobre el vector  $X_0$  y se genera un nuevo vector  $X_1$ . c) El algoritmo continúa hasta evaluar  $L$  vectores booleanos.

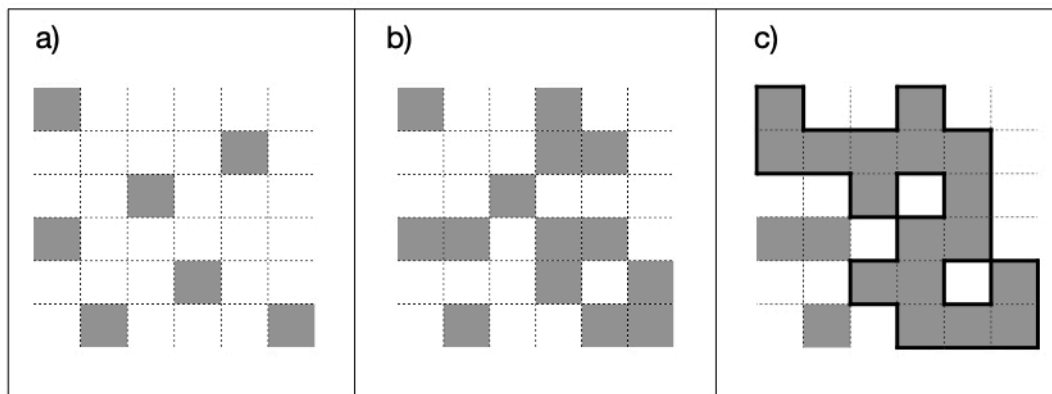


Figura 2.12: a) El algoritmo de Newman y Ziff se caracteriza por ocupar una por una y al azar las celdas de la red. b) Conforme aumenta el número de celdas ocupadas se da la formación de racimos. c) El algoritmo se detiene cuando detecta que el sistema percola.

### 2.3.3. Implementación del algoritmo de Newman y Ziff

A continuación describiremos es la implementación computacional realizada al algoritmo propuesto por Mark Newman y Robert Ziff (2001). Este algoritmo se caracteriza por registrar la formación de racimos desde una red cuadrada vacía en la que se ocupan uno por uno y al azar los sitios de la red [2.12].

Para esto simulamos una red cuadrada como una matriz nula de tamaño  $L \times L$  y asociamos de forma unívoca cada entrada de la matriz con un elemento de la lista de etiquetas  $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, L^2\}$ . A fin de establecer un orden y condición para ocupar las entradas de la matriz permutamos los elementos de la lista de etiquetas  $\mathcal{L}$ . Para cada elemento  $j$  de la lista permutada  $\mathcal{L}_{\text{perm}}$  generamos un número aleatorio  $x$  de una distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$  y lo comparamos con un valor  $p$  fijo. Si  $x < p$ , entonces la entrada de la matriz con etiqueta  $\mathcal{L}_{\text{perm}}[j]$  se declara ocupada y se identifica mediante un 1.

Cada vez que se ocupa una entrada de la matriz se verifica el estado de ocupación de las entradas vecinas y en caso de también estar ocupadas se amalgaman en un solo racimo mediante el algoritmo Union-Find. El algoritmo continúa agregando sitios ocupados en la red hasta que se cumpla alguna condición impuesta, por ejemplo la detección del racimo percolante. En este punto se almacena el número crítico  $n_c$  de sitios ocupados que fueron agregados en el sistema y se repite el algoritmo, realizándose un total de  $10^5$  veces.

En Fig. 2.12 se muestra un esquema representativo de las principales fases computacionales el algoritmo de Newman y Ziff, comenzando por los primeros sitios ocupados que se encuentran aislados (a)), pasando por la formación de racimos de mayor tamaño (b)) hasta que se satisface la condición para detener el algoritmo (c)).

En particular, el algoritmo de Newman y Ziff es muy eficiente porque para la formación y detección de racimos de un sistema con  $n + 1$  sitios ocupados sólo agrega aleatoriamente un sitio a un sistema previo de  $n$  sitios. Lo anterior contrasta con los algoritmos estándar de percolación debido a que éstos generan por completo nuevos sistemas para cada valor de  $p$  que se quiera investigar.

Resta mencionar que tanto la implementación del algoritmo de Hoshen y Kopelman como la implementación del algoritmo de Newman y Ziff pueden ser utilizadas para el modelo de percolación discreta de enlaces y de nodos y enlaces siguiendo los mismos pasos.

### 2.3.4. Implementación del algoritmo de Mertens y Moore

En ésta sección describiremos el algoritmo propuesto por Stephan Mertens y Cristopher Moore en el año 2012 para el modelo de percolación continua en dos dimensiones, el cual a su vez es una adaptación del algoritmo de Newman y Ziff [2.7]. En particular describiremos la implementación para el caso en el que los objetos son discos de área  $a_0 = \pi r_0^2$ .

Para esto, se simula una región cuadrada de tamaño  $L \times L$  en la que añadiremos uno por uno y al azar

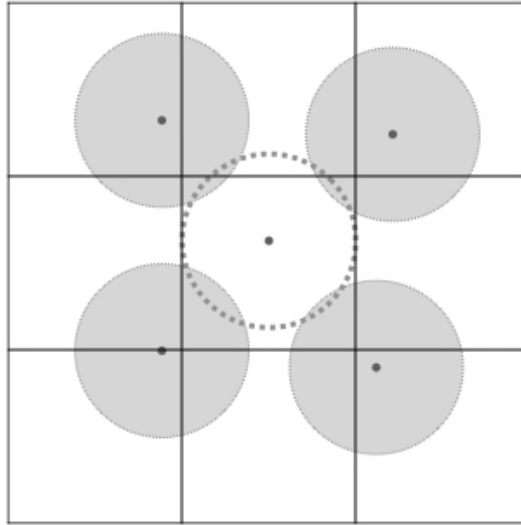


Figura 2.13: La superficie que contiene a los discos se cuadrícula en celdas de longitud igual al diámetro un disco. De esta forma los vecinos del disco examinado (punteado) solo podrán existir en las ocho celdas que rodean a la que lo contiene.

discos, que al traslaparse unos con otros darán paso a la formación de racimos, tal como en se muestra en Fig. 2.9.

Notar que a diferencia de los modelos discretos en el que los sitios o enlaces tienen una posición establecida, en el caso continuo en dos dimensiones los discos quedan distribuidos aleatoriamente. Por lo anterior, para determinar a los vecinos cercanos de un disco examinado conviene cuadricular el sistema en celdas de longitud  $2r_0$  y asociarle a cada una los discos cuyos centros caigan ahí. Este recurso computacional restringe el número de análisis cuando se examinan los vecinos de un disco, es decir, los vecinos de dicho disco solo podrán estar en la misma celda o en alguna de las ocho celdas vecinas, tal como se ejemplifica en Fig.2.13.

Cada vez que se añade un disco se identifica la celda a la que pertenece y mediante el algoritmo Union-Find se verifica si en las celdas vecinas existen discos con los que traslapa. En este caso, el proceso de añadir discos se detiene hasta que se detecta la formación del racimo percolante. De manera similar al algoritmo de Newman y Ziff, en ésta implementación se registra el número crítico  $n_c$  de discos que fueron agregados en el sistema hasta que el sistema percoló. Posteriormente el algoritmo se reinicia y se ejecuta un total de  $10^5$  veces.

Finalmente, cabe mencionar que el algoritmo de Mertens y Moore funciona para dimensión arbitraria y forma arbitraria de los objetos [2.7].

## 2.4. Metodología establecida para el cómputo de observables

En ésta sección se describe la metodología general establecida para el cálculo de observables en la teoría de percolación, en particular para el umbral de percolación, a partir de los datos obtenidos en el proceso de simulación.

El objetivo es estimar el valor promedio de una observable de interés  $\mathcal{O}$  dentro del contexto del ensamble microcanónico, en el que mantenemos fijo el número  $N$  de participantes. Para esto, mediante simulación por computadora se debe generar una colección  $\{\theta_N\}$  de mediciones de  $\mathcal{O}$  para un sistema con  $N$  de participantes. Tomando en cuenta que las mediciones del sistema fluctúan en cada ejecución del algoritmo de simulación es necesario considerar una función  $\mathbf{P}$  de distribución de probabilidad que caracterice dichas fluctuaciones. Por lo tanto, la estimación de la observable  $\mathcal{O}$  en función de algún

parámetro  $\mathbf{o}$  queda expresa de manera general como la siguiente convolución

$$\mathcal{O}(\mathbf{o}) = \sum_N \theta_N \mathbf{P}_N. \quad (2.17)$$

Por construcción, en los fenómenos modelados como percolación discreta en una red cuadrada de tamaño  $L \times L$  las fluctuaciones que tiene el sistema al ser ocupado con  $N$  elementos corresponden a una distribución binomial con parámetros  $L^2$  y  $p \in [0, 1]$ , es decir,

$$\mathbf{P}_N = \mathcal{B}(L^2, N, p) \quad (2.18)$$

$$= \binom{L^2}{N} p^N (1-p)^{L^2-N}. \quad (2.19)$$

Por otra parte, para los problemas modelados como percolación continua en dos dimensiones la distribución de discos sigue una distribución de Poisson con media  $\alpha = \eta L^2/a$  [2.7], esto es,

$$\mathbf{P}_N = \text{Poisson}(\alpha)_N \quad (2.20)$$

$$= \frac{\alpha^N}{N!} e^{-\alpha}. \quad (2.21)$$

En consecuencia, para el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada se estima la observable  $\mathcal{O}$  en función de la probabilidad de ocupación  $p$  como

$$\mathcal{O}(p) = \sum_{N=0}^{L^2} \theta_N \mathcal{B}(L^2, N, p), \quad (2.22)$$

mientras que para el caso continuo en dos dimensiones con parámetro de llenado  $\eta$  se estima mediante

$$\mathcal{O}(\eta) = \sum_{N=0}^{\infty} \theta_N \text{Poisson}(\alpha)_N. \quad (2.23)$$

Aunque en ecuación (2.22) se realiza una suma finita los autores de la referencia [2.12] proponen calcular los coeficientes binomiales de forma iterativa para evitar el cálculo del factorial de números muy grandes de la siguiente manera

$$\mathcal{B}(L^2, N, p) = \begin{cases} \mathcal{B}(L^2, N-1, p) \frac{L^2-N+1}{N} \frac{p}{1-p} & \text{si } N > \mathcal{N}_{\text{máx}}, \\ \mathcal{B}(L^2, N+1, p) \frac{N+1}{L^2-N} \frac{1-p}{p} & \text{si } N < \mathcal{N}_{\text{máx}}, \end{cases} \quad (2.24)$$

donde  $\mathcal{N}_{\text{máx}} = pL^2$  es el punto en el que la distribución binomial tiene su valor máximo.

En lo que respecta a la expresión (2.23) debemos acotar el número de elementos a sumar utilizando el criterio de las  $5\sigma$ . De esta forma, definimos  $N_{\text{mín}} = \bar{N} - 5\sigma = \bar{N} - 5\lfloor \alpha^{1/2} \rfloor$  y  $N_{\text{máx}} = \bar{N} + 5\sigma = \bar{N} + 5\lfloor \alpha^{1/2} \rfloor$  donde  $\bar{N} = \lfloor \alpha \rfloor$ . Además, para evitar dificultades numéricas en el cálculo del factorial de números muy grandes se sugiere sustituir los cocientes  $\alpha^N/N!$  por los pesos de Poisson  $w_N$ , los cuales son estimados de forma recursiva como [2.7]

$$w_{\bar{N}-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\bar{N}-(k-1)}{\alpha} w_{\bar{N}-(k-1)} & \text{si } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.25)$$

y

$$w_{\bar{N}+k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\alpha}{\bar{N}+k} w_{\bar{N}+k-1} & \text{si } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.26)$$

<sup>1</sup>No confundir  $N_{\text{máx}}$  con  $\mathcal{N}_{\text{máx}}$  de ecuación 2.24.

Finalmente, se normaliza la suma dividiendo entre  $\sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n$ , de modo que la expresión (2.23) se re-escribe como

$$\mathcal{O}(\eta) = \frac{\sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \theta_n e^{-\alpha} w_n}{\sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n}, \quad (2.27)$$

A continuación se ejemplificará el uso de la metodología para la estimación del umbral de percolación en el modelo discreto de percolación de sitios para la red cuadrada y en el modelo de percolación continua en dos dimensiones con discos.

### 2.4.1. Umbral de percolación en el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada a primeros vecinos

Tras haber ejecutado  $10^5$  veces la implementación del algoritmo de Newman y Ziff para los valores  $L = 32, 64, 128$  y  $256$  obtenemos una colección de números críticos  $\{N_c\}$ , con los cuales definimos

$$f_L(N) = \frac{\text{frecuencia de } N}{\text{total de realizaciones}} \quad (2.28)$$

como la probabilidad de que la red cuadrada de tamaño  $L \times L$  percole tras haber añadido exactamente  $N$  sitios ocupados. Posteriormente definimos

$$\mathbf{F}_L(N) = \sum_{k=0}^N f_L(k) \quad (2.29)$$

como la probabilidad de que el sistema de tamaño  $L \times L$  percole tras haber agregado a lo más  $N$  sitios ocupados. Notar que la probabilidad  $\mathbf{F}_L(N)$  corresponde a  $\theta_N$  en la expresión (2.22), por lo que de acuerdo a la metodología establecida la probabilidad de percolación  $P_L(p)$  en función de  $p$  en el modelo de percolación de sitios a primeros vecinos en la red cuadrada de tamaño  $L \times L$  se expresa como

$$P_L(p) = \sum_{N=0}^{L^2} \mathbf{F}_L(N) \mathcal{B}(L^2, N, p). \quad (2.30)$$

En Fig. 2.6 se muestran los datos obtenidos (cruces), los cuales fueron ajustados mediante ecuación (2.8). Observar que para cada ajuste de  $P_L(p)$  se obtiene un valor del ancho de la región de transición  $\Delta_L$ , el cual se relaciona con  $L$  y el exponente crítico  $\nu$  mediante el escalamiento de la expresión (2.10). En Fig. 2.14a se muestra el gráfico de  $\ln(\Delta_L)$  en función de  $\ln(L)$  (cuadros púrpura), con cuyo ajuste estimamos  $-1/\nu = -0.747 \pm 0.005$ . Por lo tanto, el exponente crítico estimado es  $\nu = 1.338$ , el cual se encuentra en buen acuerdo con lo reportado en Ref. [2.1].

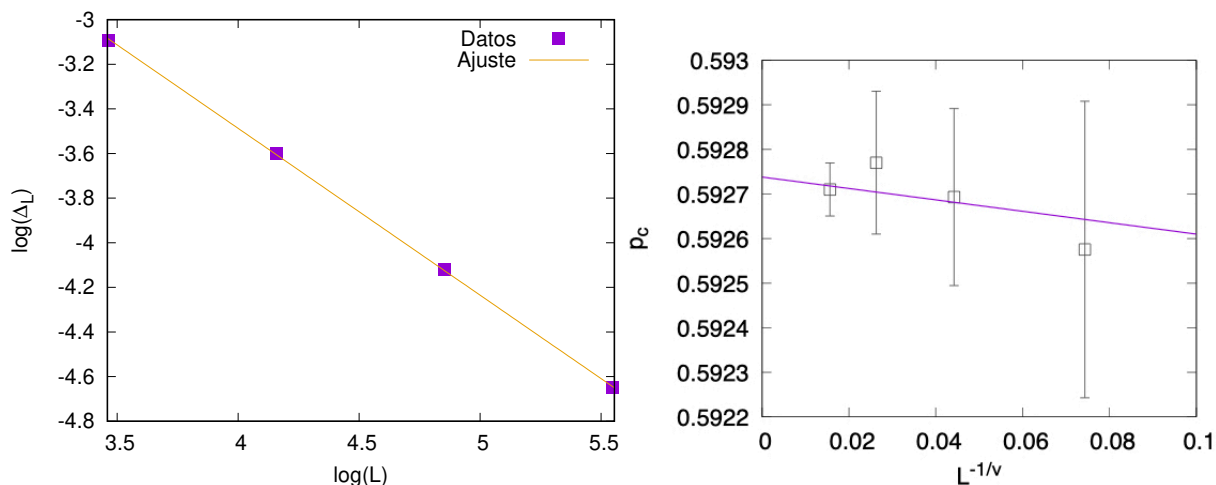
Posteriormente, sustituimos la estimación de  $\nu$  en la expresión (2.11) y ajustamos los datos mediante una función de la forma  $g(x) = mx + b$  con  $x = L^{-1/\nu}$ . Así, cuando  $L \rightarrow \infty$  se tiene que  $g(x) \rightarrow b$ , es decir, la intersección de la recta de ajuste con el eje Y proporciona la estimación del umbral de percolación en el límite termodinámico. Nuestra estimación del umbral de percolación en el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada a primeros vecinos es  $p_c = 0.59273 \pm 0.00006$ , siendo  $p_c = 0.59274$  en valor aceptado y reportado en [2.1].

Finalmente, cabe mencionar que siguiendo la misma metodología y haciendo las modificaciones pertinentes puede calcularse el tamaño promedio  $S$  de los racimos y el strength  $P_{\text{str}}$ , de manera que mediante los escalamientos de las ecuaciones (2.15) y (2.16) se estima  $\gamma = 2.367$  y  $\beta = 0.1824$ .

### 2.4.2. Umbral de percolación en el modelo continuo de dos dimensiones con discos.

Para la estimación del umbral de percolación en el modelo continuo en dos dimensiones con discos se utiliza la implementación del algoritmo de Mertens y Moore descrita en la subsección 2.3.4. De acuerdo a la metodología establecida, la probabilidad de percolación en este caso se expresa como

$$P_L(\eta) = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{F}_L(N) \text{Poisson}(\alpha)_N, \quad (2.31)$$



(a) Escalamiento (2.10) para el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada a primeros vecinos. (b) Determinación del umbral de percolación  $p_c$  en el límite termodinámico.

Figura 2.14: Mediante las relaciones de escalamiento con el tamaño lineal  $L$  del sistema es posible estimar el exponente crítico  $\nu$  y el umbral de percolación  $p_c$  en el límite termodinámico.

que al acotar y normalizar se expresa como

$$P_L(\eta) = e^{-\alpha} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \mathbf{F}_L(n) w_n \Big/ \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n, \quad (2.32)$$

donde  $\mathbf{F}_L(n)$  es la probabilidad de que el sistema de tamaño  $L \times L$  percole tras haber agregado a lo más  $n$  discos.

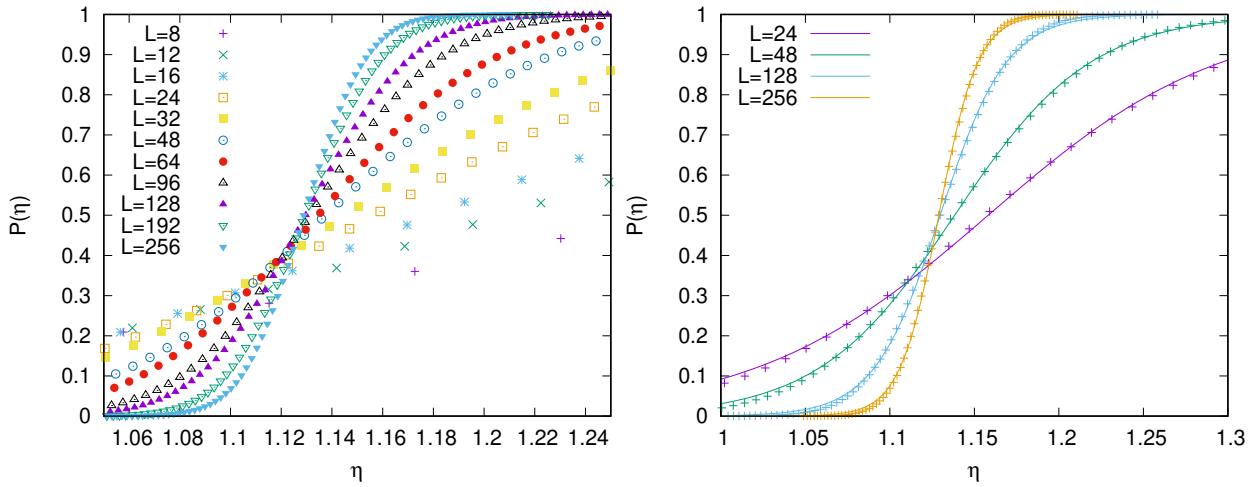
Los procesos de simulación fueron realizados para valores de  $L = 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192$  y 256. Los datos obtenidos de la expresión (2.32) son graficados (ver Fig. 2.15a) y ajustados con la función (2.8) cambiando  $p$  y  $p_{cL}$  por  $\eta$  y  $\eta_{cL}$ , respectivamente. En Fig. 2.15b se muestran las curvas de ajuste para algunos valores de  $L$ .

Posteriormente, estimamos el exponente crítico  $\nu$  mediante el escalamiento del ancho de la región de transición  $\Delta_L$  con el tamaño lineal del sistema  $L$  expresado como en (2.10). En Fig. 2.16a mostramos el ajuste de los datos como una línea recta, cuya pendiente nos da la estimación  $1/\nu = 0.758(7)$ , que se encuentra en buen acuerdo con lo reportado en la literatura [2.1, 2.7].

Debemos notar que debido a las condiciones de frontera impuestas el escalamiento (2.11) tiene otra contribución de  $L^{-1/\nu}$  por lo que  $\eta_{cL}$  queda escalado como

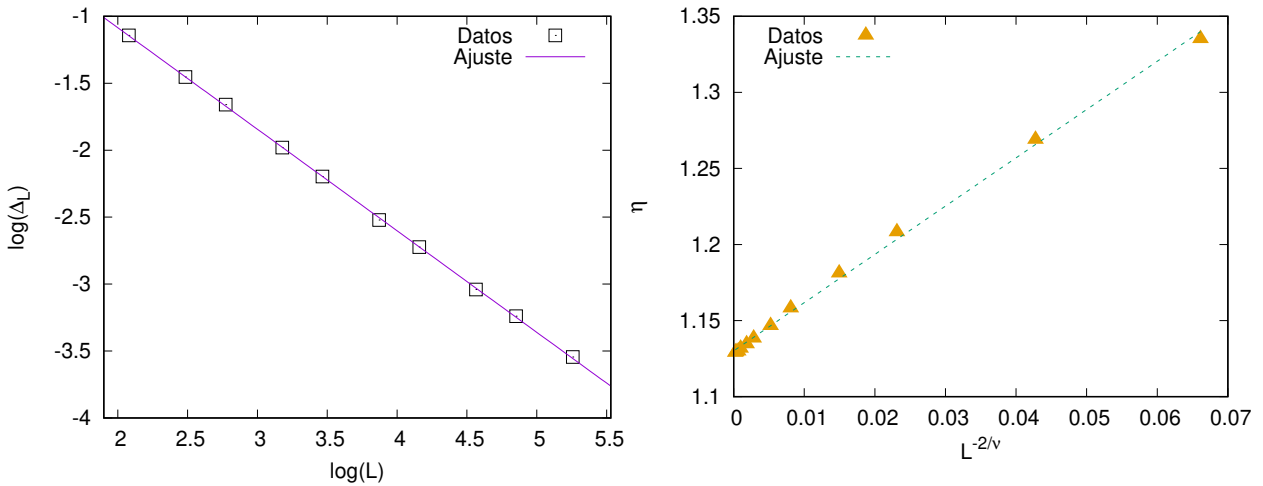
$$\eta_{cL} - \eta_c \propto L^{-2/\nu}. \quad (2.33)$$

Finalmente, se grafica cada determinación de  $\eta_{cL}$  proveniente del ajuste (2.8) en función de  $L^{-2/\nu}$  y se estima  $\eta_c$  en el límite termodinámico como la extrapolación de los datos, tal como se muestra en Fig. 2.16b. Luego se estima el umbral de percolación  $\eta_c = 1.1279(1)$  en el límite termodinámico, el cual se encuentra en buen acuerdo con el valor más preciso  $\eta_c = 1.12808737(6)$  reportado en [2.7].



(a) Probabilidad de percolación para el modelo continuo en dos dimensiones con discos para diferentes valores de  $L$ . (b) Datos para valores de  $L = 24, 48, 128$  y  $256$ . Se observa cómo al aumentar el valor de  $L$  la curva tiende a una función escalón.

Figura 2.15: Datos y ajuste de la probabilidad de percolación en el modelo de percolación continua en dos dimensiones con discos.



(a) Se grafica  $\log(\Delta_L)$  en función de  $\log(L)$  y se ajusta como una línea recta, cuya pendiente estima  $1/\nu$  en el límite termodinámico. (b) La estimación de  $\eta_c$  se da mediante el ajuste de los datos como una recta cuya intersección con el eje Y corresponde al valor buscado.

Figura 2.16: Estimación del exponente crítico  $\nu$  y el umbral de percolación  $\eta_c$  en el límite termodinámico para el modelo de percolación continua en dos dimensiones con discos.

# Bibliografía

- [2.1] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction To Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [2.2] B. Derrida and L. De Seze, “Application of the phenomenological renormalization to percolation and lattice animals in dimension 2,” in *Current Physics—Sources and Comments*, vol. 2, pp. 275–283, Elsevier, 1988.
- [2.3] A. Conway, “Enumerating 2d percolation series by the finite-lattice method: Theory,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 28, no. 2, p. 335, 1995.
- [2.4] F. Family, “Relation between size and shape of isotropic and directed percolation clusters and lattice animals,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 15, no. 11, p. L583, 1982.
- [2.5] J. E. Steif, “A mini course on percolation theory,” *Jyväskylä lectures in mathematics*, no. 3, 2011.
- [2.6] S. Kirkpatrick, “Percolation and conduction,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 45, pp. 574–588, Oct 1973.
- [2.7] S. Mertens and C. Moore, “Continuum percolation thresholds in two dimensions,” *Physical Review E*, vol. 86, no. 6, p. 061109, 2012.
- [2.8] J. Kingman, “G. matheron, random sets and integral geometry,” 1975.
- [2.9] D. Stoyan, W. S. Kendall, S. N. Chiu, and J. Mecke, *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [2.10] R. L. Streit and R. L. Streit, “The poisson point process,” *Poisson Point Processes: Imaging, Tracking, and Sensing*, pp. 11–55, 2010.
- [2.11] J. Hoshen and R. Kopelman, “Percolation and cluster distribution. i. cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm,” *Physical Review B*, vol. 14, no. 8, p. 3438, 1976.
- [2.12] M. E. Newman and R. M. Ziff, “Fast monte carlo algorithm for site or bond percolation,” *Physical Review E*, vol. 64, no. 1, p. 016706, 2001.



## Capítulo 3

# Aplicación de la teoría de percolación en la propagación de enfermedades en plantaciones

La teoría de percolación es una herramienta muy versátil, cuyas aplicaciones permea áreas de diversas índoles, incluyendo el ámbito de la propagación de enfermedades en plantaciones [3.1–3.3]. En particular, es de nuestro interés aquellos fenómenos de propagación en los que el patógeno tiene movilidad propia, como en el caso de *Phytophthora* [3.4, 3.5].

No es casualidad que la palabra *Phytophthora* provenga etimológicamente del griego *phyto-planta* y *phthora-destructor* [3.6]. La agresividad y la difícil erradicación de éste patógeno ha encendido las alarmas en diversos sectores científicos, pues entre el amplio rango de especies que puede atacar se encuentran aquellas de importancia alimenticia y económica como el tomate, el chile, la papa, aguacate, etc. [3.7–3.9]. Una de las principales características que distingue a este patógeno flagelado es su capacidad de detectar la presencia de las plantas mediante cambios químicos en el ambiente (quimiotaxis), a las cuales nada de forma dirigida a través de finas películas de agua [3.9, 3.10]. Cuando *Phytophthora* no logra conseguir alimento entra en un estado de latencia, pudiendo permanecer inactivo en el suelo durante varios ciclos de cultivo. Las altas temperaturas y los suelos anegados favorecen la propagación de éste microorganismo de perjudiciales efectos [3.9].

Un ejemplo de las consecuencias sociales que tuvo (y puede volver a tener) la propagación descontrolada de *Phytophthora* es el evento histórico conocido como la ‘Gran Hambruna Irlandesa’ (1845-1850). En este suceso más de un millón de irlandeses fallecieron por inanición debido a que durante 5 años consecutivos los cultivos de papa, que por cuestiones políticas eran su única fuente de alimento, se pudrieron y no fueron aptos para consumo humano [3.11, 3.12].

En México, a causa de *Phytophthora* se han reportado daños entre el 90% y 100% en cultivos de chile ‘chilaca’ y ‘poblano’, principalmente en la región de San Martín Texmelucan, Puebla [3.13, 3.14]. En suma, en 2014 en el país se alcanzaron pérdidas de hasta 63 millones de pesos en plantaciones de chile debido a plagas y enfermedades entre las cuales destaca dicho patógeno [3.15]. Además de las pérdidas económicas y ambientales, éste microorganismo ha causado en diversas zonas del país el reemplazo o abandono de importantes cultivos.

En Ref. [3.4], los autores modelan una plantación como una red regular de dimensiones y analizan la propagación de *Phytophthora* como un proceso de transporte. Debido a que *a priori* no es posible saber si de las semillas sembradas crecerán plantas susceptibles o resistentes al fitopatógeno asumen que éstas se encuentran distribuidas uniformemente en el sistema. De esta forma, los sitios de la red ocupados con una planta susceptible son los sitios por los cuales el patógeno puede fluir y propagarse hacia sus vecinos, mientras que los sitios con planta resistente contienen localmente la enfermedad al no proveer alimento al fitopatógeno. Por otra parte, los quistes de *Phytophthora* que se reactivan al iniciar un nuevo ciclo de siembra son modelados como sitios inoculados al inicio del proceso de propagación. Se observa que la interacción entre un sitio ocupado con una planta susceptible y un sitio inoculado sobre planta resistente (o bien un sitio vacío) que son adyacentes modifican la definición habitual de primer y segundo vecino

cercano de la planta, tal como se muestra en Fig. 3.1. De esa forma la interacción *planta-patógeno* crea un efecto puente en el que la planta susceptible puede enlazar a celdas que quedan por fuera de su vecindad tradicional, lo que fomenta la formación de racimos de plantas susceptibles o enfermas, en particular favorece la formación del racimo percolante. En contraste, los sitios con planta y los sitios inoculados que no interactúan mantienen su definición de vecino cercano.

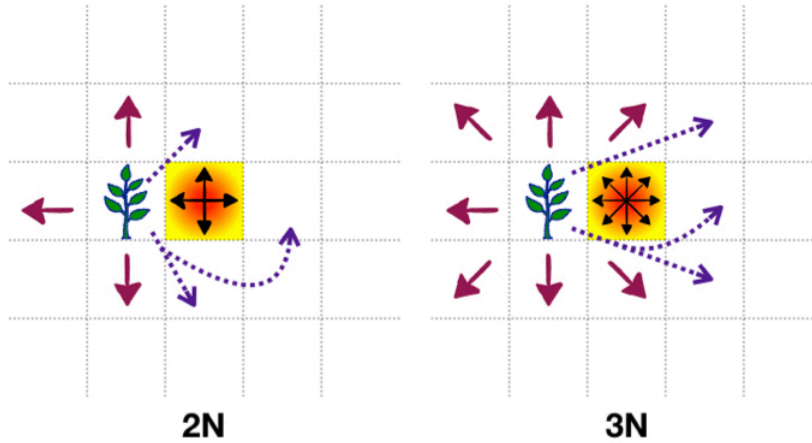


Figura 3.1: En Ref. [3.4] los autores estudian la modificación (flechas moradas) de la definición habitual de vecino cercano (flechas rojas) cuando una celda con planta susceptible es adyacente a una celda vacía pero con presencia de un patógeno (celda gradiente amarillo-rojo). Se ilustra el caso para la red cuadrada a primeros (2N) y segundos vecinos (3N).

Cuando aumenta el porcentaje de celdas inoculadas en la red puede darse el caso ilustrado en Fig. 3.2 a), donde la vecindad de una planta susceptible queda completamente con presencia del patógeno. Debido a que el microorganismo tiene movilidad a primeros vecinos la planta susceptible puede enlazar a celdas más alejadas, tal como se muestra en Fig. 3.2 b), los cuales hemos nombrados vecinos complejos Comp1. De ésta forma, el modelo de plantación monocultivo presentado en Ref. [3.4] puede entenderse como una red percolante con una fracción de sitios con vecindad tradicional y el complemento con vecindad compleja. Otra posibilidad de vecinos complejos es la que surge de extender las diagonales de Comp1, tal como se muestra en Fig. 3.2 c) nombrada Comp2.

La existencia de los modelos presentados en Ref. [3.4,3.5] que reportan sistemas donde existen a la vez sitios con vecinos tradicionales y sitios con vecinos complejos motivan los análisis realizados en el presente trabajo de tesis.

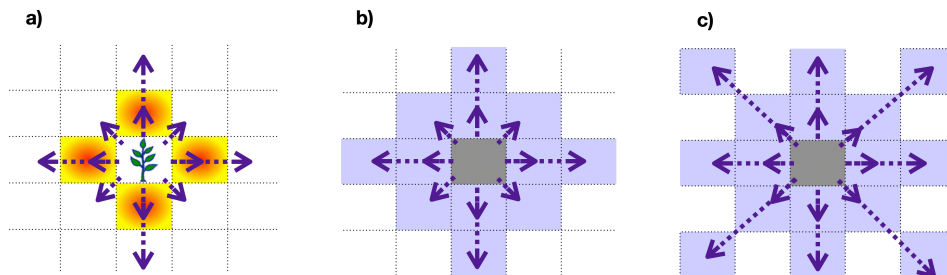


Figura 3.2: a) Se ilustra el caso en el que la vecindad de una planta susceptible queda completamente con presencia del patógeno (celda gradiente amarillo-rojo). Dado que el microorganismo tiene movilidad a primeros vecinos la planta susceptible puede enlazar a celdas más alejadas. b) Vecindad modificada de una planta susceptible (Nomenclatura Comp1). c) Extensión de las diagonales de la vecindad mostrada en inciso b) (Nomenclatura Comp2).

### 3.1. Umbrales de percolación para la red cuadrada con una fracción de sitios complejos

En esta sección discutiremos la metodología para estimar el umbral de percolación de redes cuadradas con combinación de vecinos cercanos. La relevancia de éste tipo de sistemas surge de manera natural en modelos de propagación de enfermedades, tal como se ha observado en el modelado de la dispersión de *Phytophthora* en plantaciones en Ref. [3.4].

Siguiendo la metodología establecida en el Capítulo 2, trabajaremos con el algoritmo de Newman y Ziff haciendo una modificación para incorporar los sitios con vecindad compleja Comp1 o Comp2. Tal como se ha descrito los sitios en la red cuadrada son añadidos uno por uno y al azar. En cada paso, se genera un número aleatorio  $x$  uniformemente distribuido en el intervalo  $(0,1)$  que posteriormente se compara con el valor dado de la fracción  $I$  de sitios complejos. Si  $x < I$  el sitio añadido será clasificado como complejo, de lo contrario será definido de manera usual. Por consiguiente existen dos casos extremos de interés. Cuando  $I = 0$ , el sistema se constituye únicamente por sitios con vecinos tradicionales, mientras que en el caso opuesto cuando  $I = 1$  el sistema estará definido solo con sitios con vecinos complejos.

Las definiciones de vecindad que se contemplan en el proceso de simulación son 2N, 3N, Comp1 (ver Fig. 3.2 b)) y Comp2 (ver Fig.3.2 c)), los cuales se combinan en la red cuadrada de la siguiente manera:

- Red con sitios a primeros vecinos combinados con sitios a segundo vecinos (2N+3N)
- Red con sitios a primeros vecinos combinados con sitios con vecinos complejos (2N+Comp1)
- Red con sitios a segundos vecinos combinados con sitios con vecinos complejos (3N+Comp1)
- Red con sitios a primeros vecinos combinados con sitios con vecinos complejos extendidos (2N+Comp2)
- Red con sitios a segundos vecinos combinados con sitios con vecinos complejos extendidos (3N+Comp2)

Debemos recordar que la simulación de los sistemas percolantes es susceptible a efectos de sistema finito, por lo que la estimación de la probabilidad de percolación  $P_L(p)$  se estima en función de  $L=32, 48, 64, 96, 128, 192, 256, 384, 512$ . De manera semejante que en el caso tradicional, el umbral de percolación en el límite termodinámico es estimado a través de la ley de escalamiento  $p_{cL} - p_c \propto L^{-\alpha/\nu}$ , donde  $\alpha$  toma el valor de 2 para las condiciones impuestas de la formación del racimo percolante [3.16].

Posteriormente, para cada combinación realizada se espera observar una transición del umbral de percolación en los casos extremos  $I = 0$  e  $I = 1$ , tal como se observa en Ref. [3.4]. Por ejemplo, en la red con vecindad combinada 2N+3N los casos extremos deben reproducir los cálculos del umbral de percolación ya conocidos, esto es,  $I = 0$  concierne a la tradicional red cuadrada a primeros vecinos donde  $p_c = 0.59274$ . Por otro lado,  $I = 1$  compete al caso tradicional de la red cuadrada a segundos vecinos donde  $p_c = 0.407$  [3.17, 3.18].

El primer análisis realizado consiste en la estimación del umbral de percolación en la red cuadrada con vecindad combinada 2N+3N en función de  $I$ . Como puede observarse en Fig. 3.3, el umbral de percolación decrece conforme aumenta  $I$ . En particular se obtiene que cuando  $I = 0$  el valor del umbral es  $p_{c_{2N}} = 0.592736(6)$ , el cual se encuentra en buen acuerdo con la estimación más precisa  $p_{c_{2N}} = 0.59274$  [3.17, 3.19]. Por otro lado, cuando  $I = 1$  se tiene que  $p_{c_{3N}} = 0.40726(1)$ , que de igual manera concuerda bastante bien con la estimación  $p_{c_{3N}} = 0.407$  reportada en Ref. [3.18].

En lo que respecta al sistema nombrado 2N+Comp1 el caso extremo  $I = 0$  nuevamente reproduce el umbral de la teoría de percolación tradicional en la red cuadrada. Por otra parte, la estimación del umbral de percolación en la red cuadrada que únicamente tiene vecinos complejos Comp1 es  $p_{c_{Comp1}} = 0.289117252(9)$  que se encuentra en buena concordancia con el valor  $p_{c_{Comp1}} = 0.288$  reportado en Ref. [3.18] (ver Fig. 3.4a). El comportamiento decreciente de los datos se mantiene cuando la red tiene vecindad combinada 2N+Comp2. Se observa en Fig. 3.4b que cuando  $I = 1$  la probabilidad crítica estimada es  $p_{c_{Comp2}} = 0.20900(5)$ , cuya estimación previamente calculada en Ref. [3.20] es  $p_{c_{Comp2}} = 0.208$ . El hecho de que Comp2 extienda las diagonales de Comp1 ocasiona que el sistema 2N+Comp2 percole más rápido.

Por otro lado, en Figs. 3.5a y 3.5b se presentan los umbrales de percolación estimados en función de  $I$  para los sistemas 3N+Comp1 y 3N+Comp2, respectivamente. Se observa en ambos gráficos que

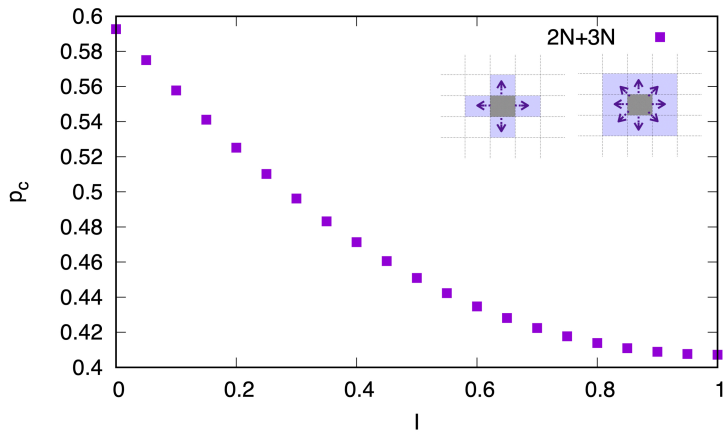
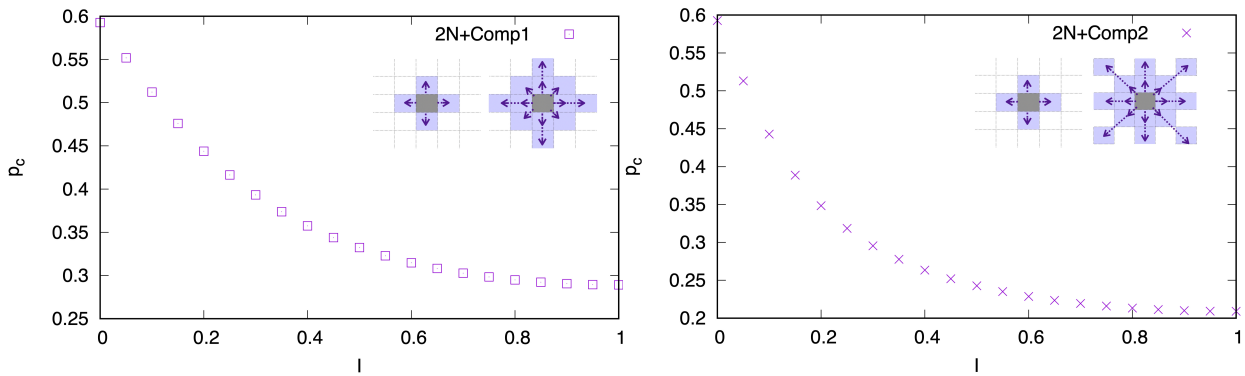


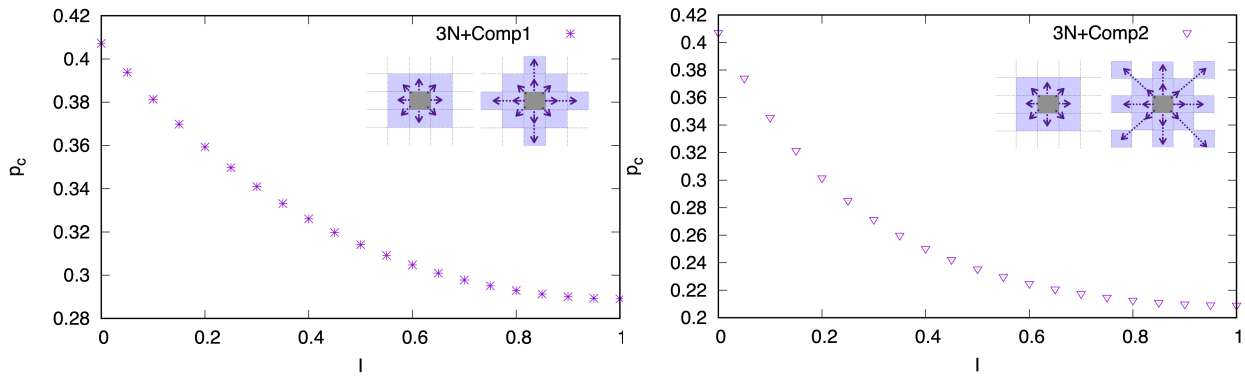
Figura 3.3: Estimaciones del umbral de percolación  $p_c$  en función de  $I$ .



(a) Umbrales de percolación para el caso 2N+Comp1. (b) Umbrales de percolación para el caso 2N+Comp2.

Figura 3.4: Curvas críticas para distintas combinaciones de vecinos cercanos en la red en función del parámetro  $I$ .

cuando  $I = 0$  la probabilidad crítica corresponde a la teoría de percolación en la red cuadrada a segundos vecinos. Además, los umbrales de percolación cuando  $I = 1$  en ambos sistemas corresponden a  $p_{c_{\text{Comp1}}} = 0.289117(6)$  y  $p_{c_{\text{Comp2}}} = 0.20900(5)$ , respectivamente.



(a) Umbrales de percolación para el caso 3N+Comp1. (b) Umbrales de percolación para el caso 3N+Comp2.

Figura 3.5: Umbrales de percolación para distintas combinaciones de vecinos cercanos en la red en función del parámetro  $I$ .

En Fig. 3.6 se presentan todos los umbrales de percolación estimados. Salta a la vista que para bajos valores de  $I$  los umbrales de percolación de los sistemas 2N+Comp1 y 3N+Comp1 difieren, sin embargo aproximadamente para  $I > 0.75$  los umbrales son bastante parecidos. Lo mismo se observa para los sistemas 2N+Comp2 y 3N+Comp2. Este efecto puede tener su origen en que al aumentar la cantidad de sitios complejos Comp1 o Comp2 se pierde el efecto de los sitios con vecindad tradicional 2N o 3N.

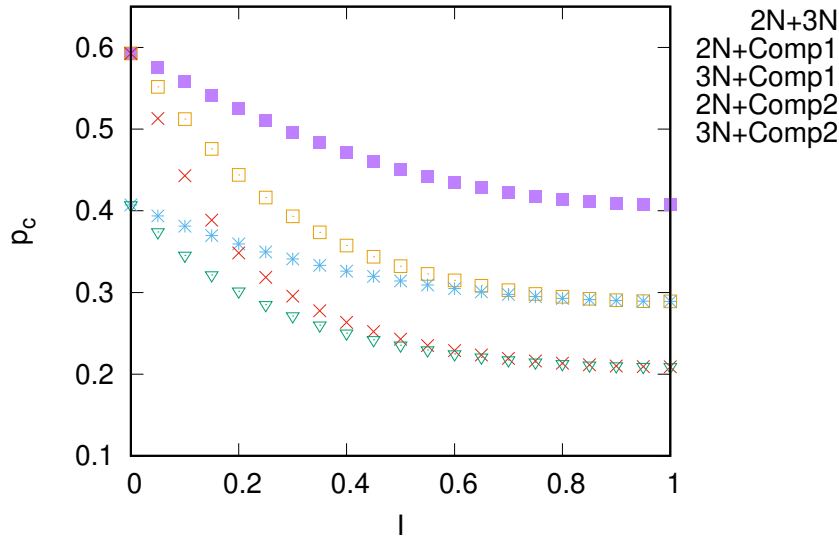


Figura 3.6: Se muestran los umbrales de percolación estimados para todos los casos analizados. Además se presentan los umbrales

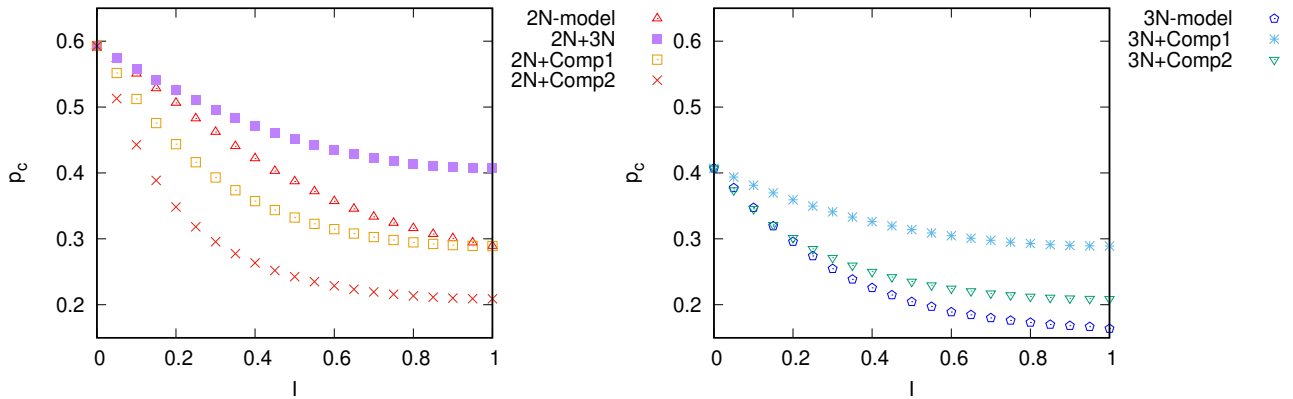
### 3.2. Aplicaciones en la agroecología

Es necesario enfatizar que en el contexto de las plantaciones monocultivo, la susceptibilidad de la planta al patógeno puede ser bien representada por la probabilidad de ocupación de la red cuadrada, por lo que las estimaciones del umbral de percolación son una recomendación del porcentaje máximo de suelo sembrado para evitar la formación del racimo percolante de plantas susceptibles que pueden enfermar e incluso hasta morir.

En Ref. [3.21] los autores modelan una plantación monocultivo como una red cuadrada con vecinos usuales 2N o 3N, en donde designan la fracción  $I$  de celdas uniformemente distribuidas con presencia del patógeno *Phytophthora*. En Fig. 3.9 se comparan los umbrales de percolación estimados en ésta sección con los reportados en Ref. [3.21]. Los sistemas antes referenciados los denotaremos por 2N-model y 3N-model.

Al cotejar los datos de los cuatro sistemas en los que se involucra como primer elemento la definición 2N se observa que todos coinciden en  $I = 0$ , como es de esperarse. Sin embargo, cuando  $I = 1$  se observa que los umbrales de los sistemas 2N+3N y 2N+Comp2 son valores extremos. Notar que cuando  $I = 1$  los umbrales de los sistemas 2N-model y 2N+Comp1 son muy semejantes con valores de  $p_{c_{2N-model}} = 0.289231$  y  $p_{c_{Comp1}} = 0.289117(6)$ , respectivamente, tal como se observa en Fig. 3.7a. Esto se debe a que en el sistema 2N-model todos los primeros vecinos de un sitio elegido tienen presencia del patógeno por lo que al interactuar con la planta susceptible generan la definición Comp1 (ver Fig. 3.2 a) y b)). Por otro lado, como puede observarse en Fig.3.7b los sistemas restantes reproducen umbrales diferentes en el extremo  $I = 1$ . Algo importante que debemos notar es que el sistema 3N-model para  $I = 1$  de Ref. [3.21] representa sitios que tiene todos sus segundos vecinos con presencia del patógeno *Phytophthora*, por lo que la interacción *planta-patógeno* extiende la vecindad tradicional de la planta y da lugar al sitio complejo ilustrado en Fig. 3.8. El considerar en la vecindad 8 celdas más a la redonda ocasiona que el umbral del sistema 3N-model en este caso extremo sea  $p_{c_{3N-model}} = 0.163828$ , más bajo que el del sistema 3N+Comp2.

Por otro lado, en Fig. 3.9 se muestran todos los umbrales de percolación estimados en ésta sección y los reportados en Ref. [3.21]. Un resultado importante es que para un valor bajo de  $I$  el sistema 2N+3N



(a) Comparación de los umbrales de percolación para los sistemas 2N, 2N+3N, 2N+Comp1 y 2N+Comp2. (b) Comparación de los umbrales de percolación para los sistemas 3N, 3N+Comp1 y 3N+Comp2.

Figura 3.7: Comparación de los umbrales de percolación.

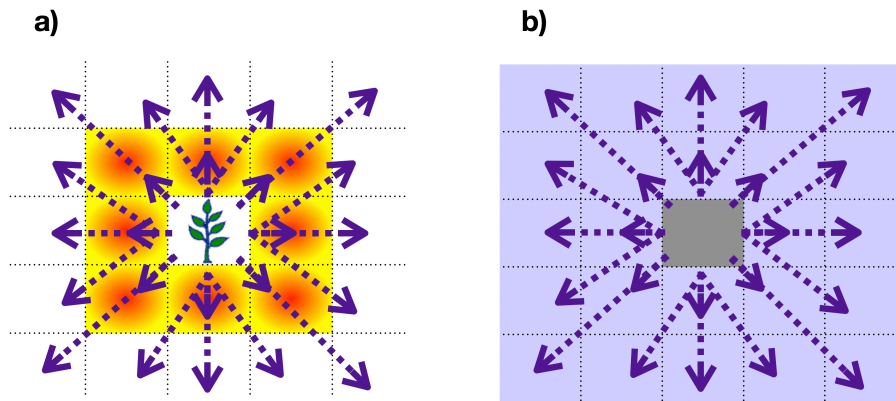


Figura 3.8: a) Planta susceptible con presencia del patógeno en todos sus segundos vecinos (celdas gradiente amarillo-rojo). b) La interacción *planta-patógeno* da origen a que se extienda la definición habitual de segundos vecinos cercanos.

se comporta como el sistema 2N-model. De similar manera sucede para los sistemas 3N+Comp2 y 3N-model. Además, para altos valores de  $I$  los sistemas 2N+Comp1 y 3N+Comp1 pueden ser caracterizados como el sistema 2N-model. Lo anterior, implica que en dichos rangos de  $I$  los sistemas con una fracción de sitios complejos resultan mejores para caracterizar a 2N-model o 3N-model, debido a que éstos sistemas son más fáciles de simular.

Resta comentar que de acuerdo a los resultados debe evitarse la formación de este tipo de conexión en la red que modela una plantación monocultivo, debido a los bajos umbrales de percolación que se alcanza.

### 3.2.1. Estrategias

Comúnmente se cree que la milpa es un cultivo donde únicamente se siembra maíz, sin embargo los cultivos tipo milpa se caracterizan por intercalar dos o más especies. Tradicionalmente la milpa se conforma de la llamada ‘triada Mesoamericana’ que consta de maíz, frijol y calabaza, y aunque en diferentes zonas del país se combinan otro tipo de ejemplares la idea subyacente es la misma: intercalar plantas.

A diferencia de las plantaciones monocultivo, la estructura alternada de la milpa propicia una interacción benéfica entre especies que deriva en la polinización y la fertilidad del suelo, además de que las plantas más resistentes al ataque de patógenos y plagas semejan una barrera natural que protege a las

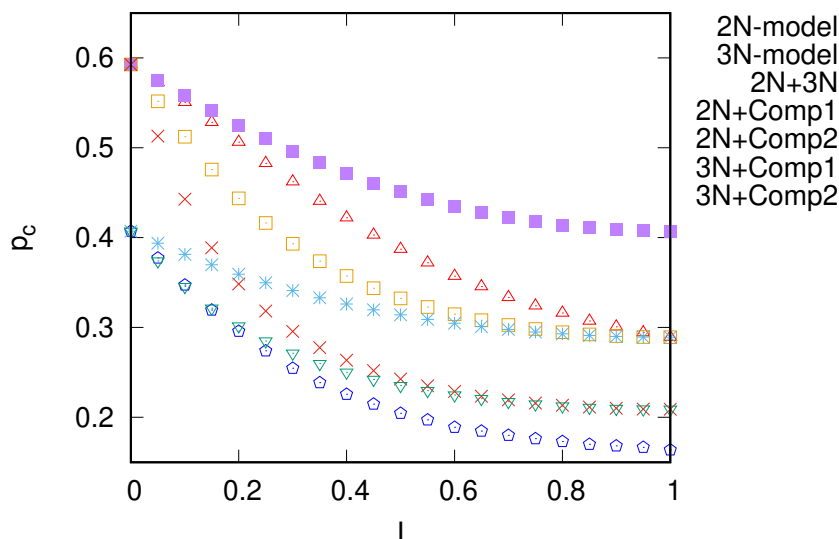


Figura 3.9: Se presenta la comparación de los umbrales estimados en este trabajo y en Ref. [3.21].

más susceptibles.

Ante esto, los autores de Ref. [3.21] analizaron cómo se ve modificado el desplazamiento del patógeno cuando la milpa de dos componentes A y B se siembra en columnas o en diagonales alternadas. En Fig. 3.10 se observa que la presencia de la planta resistente tipo B (por donde el patógeno no puede moverse) corta algunas o todas las conexiones de la planta tipo A. Por ejemplo, en el modelo de diagonales a 2N la planta A queda completamente aislada, mientras que para la misma definición en el modelo de columnas la planta A mantiene conexión con las plantas de su misma columna.

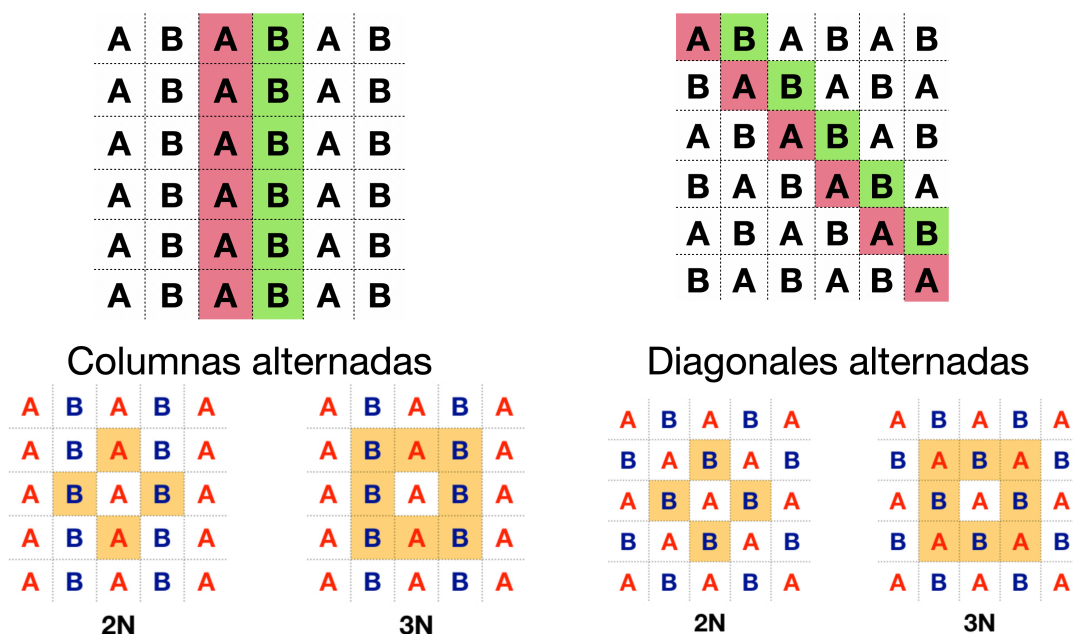


Figura 3.10: Modelos de siembra alternada reportado en Ref. [3.21]. En la parte inferior se ilustran las definiciones de primeros y segundos vecinos cercano de cada modelo. El cambio en la estructura de la red reduce los sitios por donde el patógeno puede fluir.

El principal resultado obtenido por dichos investigadores es la determinación de curvas críticas en el

espacio de susceptibilidades  $\chi_A - \chi_B$  para valores fijos del porcentaje de celdas inoculadas  $I$  y probabilidad de ocupación  $p$ . Los puntos que conforman estas curvas son umbrales de percolación a partir de los cuales el sistema percola. Las estimaciones fueron plasmadas en diagramas de fase comparativos donde los productores pueden elegir la estructura de milpa que mejor les convenga según sus características iniciales. Para ejemplificar el alcance de su investigación los autores utilizaron la susceptibilidad de chile poblano, de árbol y serrano expuestos a diferentes cepas del patógeno, los cuales acomodaron a pares como serrano-árbol (círculo), serrano-poblano (triángulo) y poblano-árbol (cuadrado) donde el color de cada figura representa un tipo de cepa (ver Fig.3.11) [3.5,3.21]. Los pares de susceptibilidad que se encuentran sobre la región blanca corresponden a combinaciones de plantas que pueden sembrarse al 100% sin que la enfermedad se propague. Por otro lado, las figuras sobre las regiones de color están asociadas a los pares de susceptibilidad que hacen percolar el sistema, por lo que se indica la densidad máxima de siembra para evitar la formación del racimo percolante.

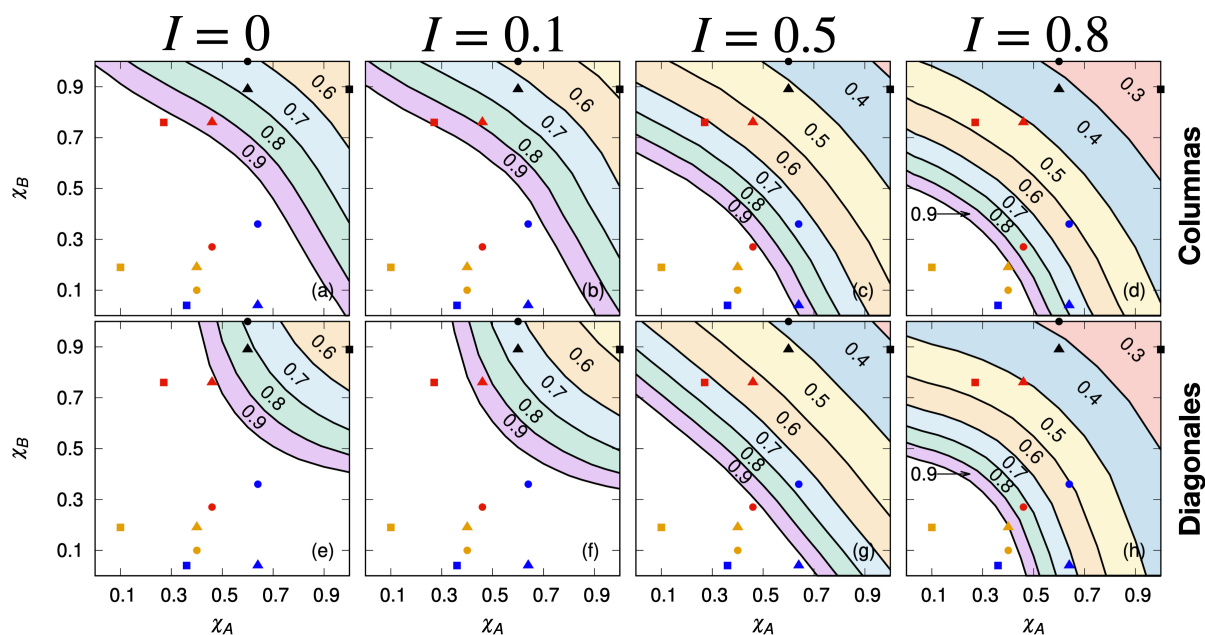


Figura 3.11: Diagrama de fase para la red cuadrada a primeros vecinos donde los modelos de columnas y diagonales son comparados para los valores de inoculación  $I = 0, 0.1, 0.5$  y  $0.8$ . El caso extremo  $I = 0$  representa un sistema con un solo sitio inoculado al inicio del proceso de propagación

De acuerdo a los resultados presentados en Fig. 3.11 para valores bajos de  $I$  conviene sembrar diagonales ya que permite más combinaciones de susceptibilidades que pueden ser sembradas en toda la plantaciones. Por otro lado, cuando se reduce la distancia entre plantas el sistema se considera a segundo vecinos, en cuyo caso el modelo de columnas es el recomendable. Notar que tanto en el modelo de columnas como en el de Diagonales a primeros y segundos vecinos a partir de  $I > 5$  el efecto de los sitios inoculados al inicio del proceso de propagación parece homogenizarse por lo que se vuelve indistinto qué modelo usar. Pese a esto, siguen existiendo regiones de susceptibilidad donde no se da la formación del racimo percolante aún si todas las celdas de la plantación tiene presencia del patógeno.

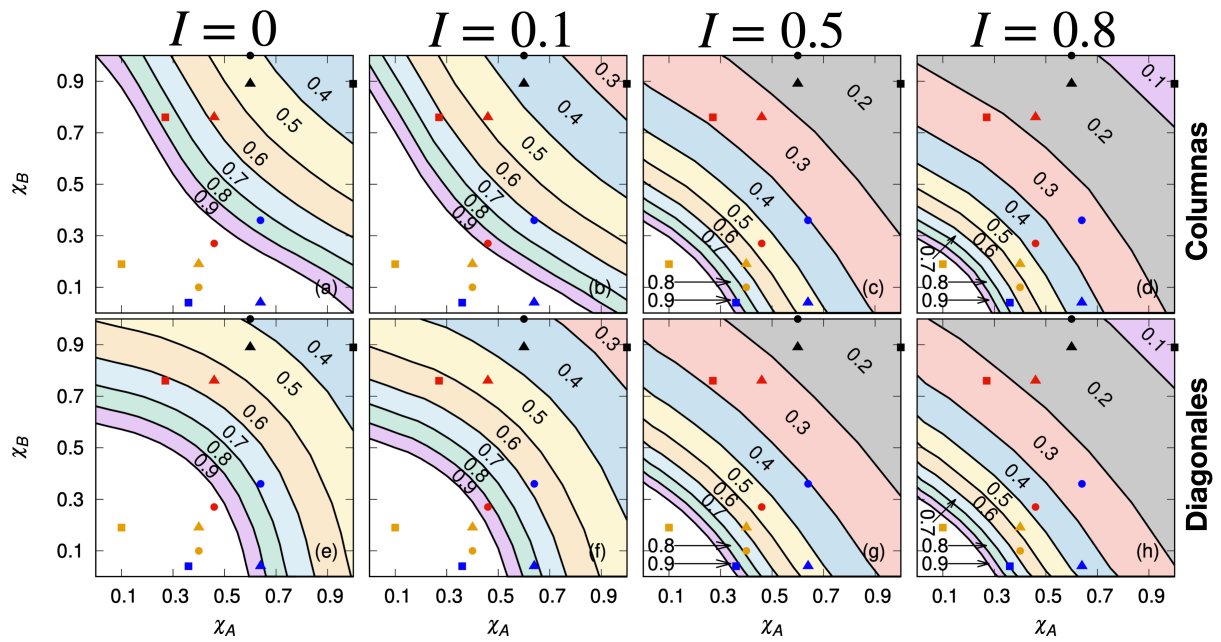


Figura 3.12: Diagrama de fase para la red cuadrada a segundos vecinos donde los modelos de columnas y diagonales son comparados para los valores de inoculación  $I = 0, 0.1, 0.5$  y  $0.8$ . El caso extremo  $I = 0$  representa un sistema con un solo sitio inoculado al inicio del proceso de propagación



# Bibliografía

- [3.1] S. Poggi, F. Neri, V. Deytieux, A. Bates, W. Otten, C. A. Gilligan, and D. J. Bailey, "Percolation-based risk index for pathogen invasion: application to soilborne disease in propagation systems," *Phytopathology*, vol. 103, no. 10, pp. 1012–1019, 2013.
- [3.2] D. J. Bailey, W. Otten, and C. A. Gilligan, "Saprotrophic invasion by the soil-borne fungal plant pathogen *rhizoctonia solani* and percolation thresholds," *The New Phytologist*, vol. 146, no. 3, pp. 535–544, 2000.
- [3.3] J. J. Ludlam, G. J. Gibson, W. Otten, and C. A. Gilligan, "Applications of percolation theory to fungal spread with synergy," *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 9, no. 70, pp. 949–956, 2012.
- [3.4] J. E. Ramírez, C. Pajares, M. Martínez, R. R. Fernández, E. Molina-Gayosso, J. Lozada-Lechuga, and A. F. Téllez, "Site-bond percolation solution to preventing the propagation of *phytophthora* zoospores on plantations," *Physical Review E*, vol. 101, no. 3, p. 032301, 2020.
- [3.5] J. E. Ramírez, E. Molina-Gayosso, J. Lozada-Lechuga, L. M. Flores-Rojas, M. I. Martínez, and A. Fernández Téllez, "Percolation strategy to improve the production of plants with high pathogen susceptibility," *Phys. Rev. E*, vol. 98, p. 062409, Dec 2018.
- [3.6] D. C. Erwin, O. K. Ribeiro, *et al.*, *Phytophthora diseases worldwide*. American Phytopathological Society (APS Press), 1996.
- [3.7] T. Jung, A. M. Vettraino, T. Cech, and A. Vannini, "The impact of invasive *phytophthora* species on european forests," in *Phytophthora: A global perspective*, pp. 146–158, CABI Wallingford UK, 2013.
- [3.8] A. R. Hardham and L. M. Blackman, "Phytophthora cinnamomi," *Molecular plant pathology*, vol. 19, no. 2, pp. 260–285, 2018.
- [3.9] M. K. Hausbeck and K. H. Lamour, "Phytophthora capsici on vegetable crops: research progress and management challenges," *Plant disease*, vol. 88, no. 12, pp. 1292–1303, 2004.
- [3.10] M. Lois, "Ensayo de inducción de resistencia a *phytophthora-capsici*.<sup>en</sup> judía ("*phaseolus vulgaris*") con un cultivo esterilizado de fo47," 2014.
- [3.11] J. B. Ristaino, "Tracking historic migrations of the irish potato famine pathogen, *phytophthora infestans*," *Microbes and infection*, vol. 4, no. 13, pp. 1369–1377, 2002.
- [3.12] B. J. Haas, S. Kamoun, M. C. Zody, R. H. Jiang, R. E. Handsaker, L. M. Cano, M. Grabherr, C. D. Kodira, S. Raffaele, T. Torto-Alalibo, *et al.*, "Genome sequence and analysis of the irish potato famine pathogen *phytophthora infestans*," *Nature*, vol. 461, no. 7262, pp. 393–398, 2009.
- [3.13] E. González, M. J. Yáñez, V. Santiago, and Á. Montero, "Biodiversidad fungosa en la marchitez del chile y algunos factores involucrados, en tlacotepec de josé manzo, el verde, puebla," *Agrociencia*, vol. 38, no. 6, pp. 653–661, 2004.
- [3.14] A. Gil Muñoz, F. Manzo, B. Martínez Corona, B. V. Peña Olvera, J. Rodríguez, and L. Salazar Liendo, "Rescate in situ del *chileño poblano* en puebla, méxico," *Revista Fitotecnia Mexicana*, 2007.

- [3.15] “Implementan combate estratégico vs plaga en plantaciones de chile: Ecv,” 2014.
- [3.16] J. T. García, D. R. Herrera, J. Ramírez, A. F. Téllez, and C. Pajares, “Percolation leads to finite-size effects on the transition temperature and center-of-mass energy required for quark-gluon plasma formation,” *Physical Review D*, vol. 106, no. 3, p. L031503, 2022.
- [3.17] M. E. Newman and R. M. Ziff, “Fast monte carlo algorithm for site or bond percolation,” *Physical Review E*, vol. 64, no. 1, p. 016706, 2001.
- [3.18] K. Malarz and S. Galam, “Square-lattice site percolation at increasing ranges of neighbor bonds,” *Physical Review E*, vol. 71, no. 1, p. 016125, 2005.
- [3.19] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction To Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [3.20] M. Majewski and K. Malarz, “Square lattice site percolation thresholds for complex neighbourhoods,” *arXiv preprint cond-mat/0609635*, 2006.
- [3.21] D. Rosales Herrera, J. E. Ramírez, M. Martínez, H. Cruz-Suárez, A. Fernández Téllez, J. F. López-Olgún, and A. Aragón García, “Percolation-intercropping strategies to prevent dissemination of phytopathogens on plantations,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 31, no. 6, p. 063105, 2021.

## Capítulo 4

# Aplicación de la teoría de percolación en la propagación de enfermedades por movilidad humana

Un ejemplo de la versatilidad de la teoría de percolación es poder modelar la propagación de agentes infecciosos como un fenómeno de transporte. En el capítulo 3 se estudió la dispersión de enfermedades en plantaciones bajo el modelo de percolación de sitios en la red cuadrada con vecinos complejos. En dicho contexto los individuos susceptibles a enfermarse (plantas) se encuentran fijos en las celdas de la red, mientras que el fitopatógeno fluye sobre la red por sus propios medios pudiendo causar un racimo percolante de plantas enfermas o muertas.

Sin embargo, en el contexto de la propagación de (algunas) enfermedades en humanos la diseminación del agente infeccioso depende de la movilidad e interacción de los individuos susceptibles, tal como sucede con la enfermedad COVID-19 causada por el virus SARS-CoV-2.

En este capítulo se mostrará cómo siguiendo la metodología propuesta y reinterpretando el significado de las observables de la teoría de percolación es posible estudiar la propagación de la enfermedad COVID-19 en el Estado de Puebla. En éste análisis los modelos de percolación implementados son el de sitios y el enlaces sobre una red compleja, la cual difiere de las redes regulares debido a que los nodos, los enlaces y la conexión entre ambos son diversos. Los resultados de éste análisis están reportados en Ref. [4.1].

### 4.1. Teoría de percolación y redes complejas

Una red compleja es una colección de nodos conectados aleatoriamente por enlaces (ver Fig. 4.1 ), cuya estructura y dinámica quedan determinadas por el fenómeno modelado [4.2].

En el contexto de las redes complejas la unión entre nodos a través de enlaces forman conjuntos llamados componentes (racimos), cuyos tamaños son de importancia en particular el de la componente más grande [4.3]. Otra cantidad de importancia que define las principales propiedades estructurales de una red compleja es el *grado* de los nodos definido como el número de enlaces conectados a un nodo, que no necesariamente es igual al número de nodos adyacentes. [4.3].

Con el concepto de grado es posible definir

$$p_k = \frac{\# \text{ de nodos con grado } k}{\# \text{ total de nodos en la red}} \quad (4.1)$$

como la probabilidad de que un nodo elegido uniformemente al azar tenga grado  $k$  [4.3]. Cuando los nodos de la red compleja están igualmente conectados con probabilidad independiente  $p$  el número de enlaces  $k$  conectados a cualquier nodo se distribuye como una distribución binomial de la forma

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}, \quad (4.2)$$

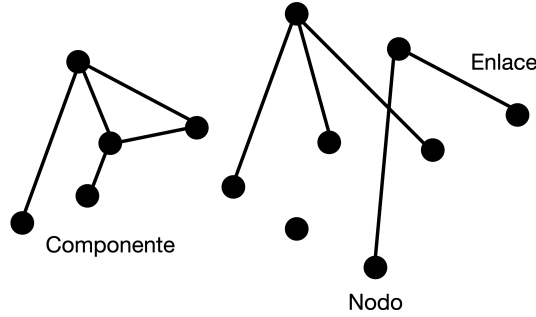


Figura 4.1: Estructura de una pequeña red compleja compuesta de 13 nodos y 10 enlaces. Se ilustra la definición de nodo, enlace y componente.

donde  $N$  es el número total de nodos en la red, por lo que se espera que en promedio cada nodo tenga  $\langle k \rangle = p(N - 1)$  enlaces [4.4, 4.5]. Cuando  $N \rightarrow \infty$  con  $\langle k \rangle$  constante la probabilidad  $p_k$  expresada en ecuación (4.2) se aproxima bastante bien a una distribución de Poisson de la forma [4.6, 4.7]

$$p_k \sim e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (4.3)$$

A este tipo de redes se les conoce en la literatura como redes *Erdős-Rényi* en honor a los matemáticos Paul Erdős y Alfred Rényi que las estudiaron ampliamente, en particular las transiciones de fase al variar  $\langle k \rangle$  (o equivalentemente  $p$ ). Dichos autores demostraron que cuando  $\langle k \rangle < 1$  en la red existen solo algunos enlaces por lo que las componentes son pequeñas y aisladas. Por otra parte, cuando  $\langle k \rangle > 1$  emerge una componente llamada *componente gigante* (racimo percolante) que ocupa una fracción considerable de nodos en la red. [4.2, 4.3, 4.5–4.7].

Sin embargo, en muchos fenómenos como el *World Wide Web* y el Internet el número de enlaces no se distribuyen homogéneamente, es decir, en la red existen muchos nodos poco conectados y a la vez pocos nodos con un alto número de conexiones [4.3–4.5, 4.8, 4.9]. Ésta característica tiene como consecuencia que  $p_k$  tenga una cola larga hacia la derecha, por lo que la fracción de nodos en la red con grado  $k$  se comporta como una ley de potencias de la forma

$$p_k \sim k^{-\alpha} \quad (4.4)$$

para algún exponente  $\alpha$  constante; éstas redes reciben el nombre de redes *libre de escala* [4.3, 4.5]. Debido a que medir la cola de  $p_k$  mediante el histograma de los grados pueden ser muy ruidoso M. Newman, autor de Ref. [4.3], propone realizar el gráfico de la función de distribución acumulada

$$P_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i, \quad (4.5)$$

la cual corresponde a la probabilidad de que el grado de un nodo sea mayor o igual a  $k$ . Por lo anterior, para las redes libre de escala se tiene que

$$P_k \sim \sum_{i=k}^{\infty} i^{-\alpha} \sim k^{-(\alpha-1)}, \quad (4.6)$$

la cual mantiene el comportamiento libre de escala en la distribución de grados [4.3].

En general, los principales temas de estudio de las redes complejas se enfocan en cuáles nodos de la red están mejor conectados o tienen mayor influencia sobre los demás (centralidad), así como también examinan cómo se conectan entre sí dichos nodos (conectividad) [4.3]. Además, también son de relevancia la distribución de tamaños de las componentes y el tamaño de la componente más grande, al igual que el diámetro de la red que caracteriza la posibilidad de que dos nodos al azar estén conectados entre sí [4.10, 4.11].

Por otra parte, en Ref. [4.12] los autores señalan que

“The understanding of the topological structure of networks and its change under external action is the central problem of the statistical physics of random networks.”

(“El entendimiento de la estructura topológica de las redes y su cambio bajo una acción externa es el problema central de la física estadística de las redes aleatorias.” ),

por lo que en particular los procesos percolantes fueron los primeros fenómenos en ser estudiados profundamente en las redes complejas, estableciendo paralelismos entre ambos campos [4.3, 4.4].

Por ejemplo, la tolerancia de errores (resiliencia) en los nodos (o enlaces) puede asociarse al modelo de percolación de sitios (enlaces) en la red compleja puesto que el *mal funcionamiento* de un nodo puede modelarse como un sitio vacío. La tolerancia de errores es de suma importancia cuando se estudian fenómenos de transporte en la red compleja, pues al excluir aleatoriamente una fracción de nodos la topología de la red puede verse drásticamente modificada [4.3, 4.11, 4.13]. En concreto, las redes Erdős-Rényi tienen mala tolerancia a errores debido a la homogeneidad del grado de los nodos, por lo que tras el error es complicado que los nodos restantes queden conectados entre sí. Sin embargo, en las redes libre de escala es más probable elegir aleatoriamente nodos con muy pocas conexiones que al removerlos no modifican el diámetro de la red, en contraste con las redes Erdős-Rényi donde el diámetro aumenta [4.11]. Así, basados en la teoría de percolación los autores de Ref. [4.13] establecieron que para redes libre de escala con exponente  $\alpha \leq 3$  la fracción  $q_{cn}$  de nodos removidos aleatoriamente que fragmentan la red tiende a 1 aún en sistemas finitos, es decir, la red no sufre una transición de fase.

Notar que en las redes Erdős-Rényi es indistinto si el error de los nodos es aleatorio o en orden decreciente del grado ya que la eliminación de cada nodo causa el mismo daño en la red. Por el contrario, esto no sucede en las redes libre de escala pues quitar de manera deliberada (ataque) los nodos altamente enlazados vulnera fuertemente la conexión de la red fragmentándola en componentes aisladas [4.11].

En Fig. 4.2 a) y c) se ilustran una red Erdős-Rényi y una red libre de escala, respectivamente. En Fig. 4.2 b) y d) se muestra que la eliminación de nodos o enlaces fragmentan la respectiva red en tres componentes, sin embargo debido a la estructura particular de cada red el impacto es diferente. Notar que en Fig. 4.2 d) la existencia de un nodo altamente conectado impulsa su alta tolerancia a la remoción aleatoria de enlaces, por lo que la mayoría de los nodos siguen estando conectados en una componente de tamaño considerable.

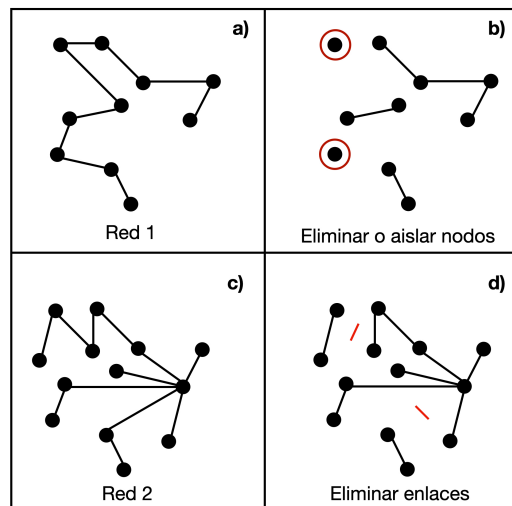


Figura 4.2: a) Se muestra una red cuyos nodos en promedio tienen el mismo grado similar; b) remover un nodo equivale a suprimir todos sus enlaces; c) se muestra una red con un nodo altamente conectado; d) se observa que al eliminar enlaces de la red 2 pueden seguir existiendo caminos que mantienen conectados a los nodos.

Por lo anterior, casi de manera natural surge una necesidad de aplicar ambos campos de estudio en contextos sociales. Por ejemplo, en una red compleja los nodos pueden representar a individuos o grupos de personas, mientras que los enlaces entre ellos reproducen las interacciones sociales [4.10]. En cuanto a los

procesos dinámicos de la red éstos pueden describir la dispersión de ideas, de información o enfermedades, puesto que dependen fuertemente de los patrones de conexión entre personas [4.2, 4.14, 4.15].

En particular, existen diversos trabajos [4.16–4.18] donde se ha aplicado la teoría de percolación y las redes complejas en el estudio de la propagación de enfermedades. En dichas investigaciones la transición de fase es de mucha importancia ya que puede ser interpretada como un indicador del momento en el que el brote de una enfermedad se disemina extensamente [4.10, 4.19–4.21].

## 4.2. Redes de conexión del Estado de Puebla

En ésta sección se analiza la conexión de los municipios del Estado de Puebla para estudiar la propagación de la enfermedad COVID-19 como un fenómeno percolante.

Utilizando la división política del Estado de Puebla a cada uno de los 217 municipios se le asigna como etiqueta un número natural, teniendo en cuenta que algunos municipios se encuentran divididos en parches tal como es el caso de los municipios de Acatlán de Osorio, Caltepec, Chiautla, Huehuetla, Huehuetlán el chico, Jonotla, Rafael Lara Grajales, Tecamatlán y Zoquiapan [4.22]. Cada municipio etiquetado será representado por un nodo en la red, sumando en total 226 elementos. Posteriormente, para cada municipio se registran las etiquetas de los municipios con los que colinda. Por ejemplo, el municipio de Tepatlaxco de Hidalgo identificado por la etiqueta 163 tiene por vecinos a los municipios de Acajete, Amozoc y Puebla que son representados por los nodos con la etiqueta 1, 15 y 114, respectivamente. En Fig. 4.3 se muestra la representación de la red compleja del Estado de Puebla para ésta definición de vecinos cercanos. Se observa que los municipios con menos conexión son aquellos que colindan con un solo vecino, por ejemplo los municipios de Acateno, Chichiquila, Honey, San Miguel Ixtilán y Tlaxco (nodos 2, 50, 57, 135 y 187, respectivamente). Por otra parte, los municipios con más vecinos son Tlatlauquitepec y Tehuacán con 11 vecinos (nodos 186 y 156, respectivamente), seguidos de los municipios de Puebla y Zacapala (nodos 114 y 206) con 10 municipios cercanos. En ésta red el total de enlaces corresponde a 575.

De manera similar, considerando que los municipios del Estado se conectan mediante la infraestructura carretera (libre y de cuota) se identificaron y unieron las etiquetas de los nodos por los cuales cruza cada tramo carretero definido en Ref. [4.23]. Por ejemplo, el tramo carretero *Amozoc-Perote* es la conexión de los municipios de Amozoc, Tepatlaxco de Hidalgo, Acajete, Nopalucan, San José Chiapa, Libres y Tepeyahualco cuyas etiquetas asociadas son 15, 163, 1, 104, 128, 94 y 170, respectivamente. La representación de red compleja para ésta definición de vecinos cercanos se muestra en Fig 4.4, en donde se observa que la formación de 5 componentes:

- la componente formada por la unión de los municipios Teotlalco y Jolalpan (nodos 160 y 87, respectivamente),
- la componente formada por los municipios Zoquitlán y Coxcatlán (nodos 217 y 35, respectivamente),
- la componente que se conforma por los municipios Venustiano Carranza, Jalpan, Xicotepc, Zihuateutla, Juan Galindo, Huauchinango y Honey (nodos 194, 86, 197, 213, 91, 71 y 57, respectivamente).
- la componente que se conforma por los municipios Ahuazotepec, Ahuacatlán, Aquixtla, Camocuautla, Chignahuapan, Tepango de Rodríguez, Tepetzintla, Zacatlán, Zapotitlán de Méndez y Tetela de Ocampo (nodos 8, 6, 16, 28, 53, 162, 167, 208, 210 y 172, respectivamente).
- la componente formada por el resto de municipios donde existen tramos carreteros libres y de cuota. Notar que en esta componente los nodos con más conexiones son los municipios de Puebla y Libres (nodos 114 y 94) con 15 enlaces cada uno, seguidos de los municipios de Tehuacán y Acatzingo (nodos 156 y 4) con 9 enlaces cada uno.

Cabe mencionar que en el Estado de Puebla existen municipios cuyas vías de transporte terrestre se conforman por caminos de terracería o no pavimentados, por lo que no son contemplados en la red de conexión por sistema carretero (ver Anexo). En ésta red compleja el número de enlaces suman 216.

De acuerdo a los resultados obtenidos por Erdős-Rényi [4.7] y por Reuven Cohen [4.13], y como puede ser observado en Figs. 4.3 y 4.4, ambas redes tienen la presencia de la componente gigante, es decir, del racimo percolante que conecta todo el Estado de Puebla.

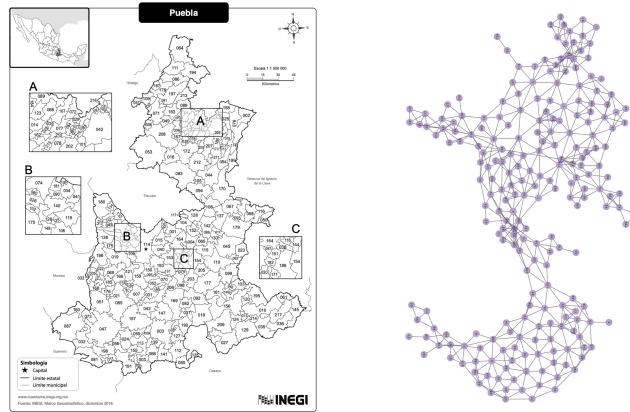


Figura 4.3: Red compleja del Estado de Puebla donde los vecinos cercanos de cada municipio son aquellos con los que colinda. El mapa de la división municipal del Estado de Puebla fue extraído de Ref. [4.22]. En Anexo se muestra a mayor detalle la red de compleja.

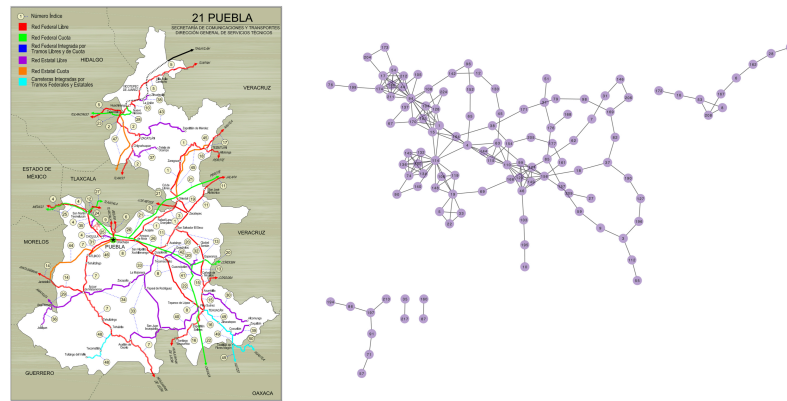
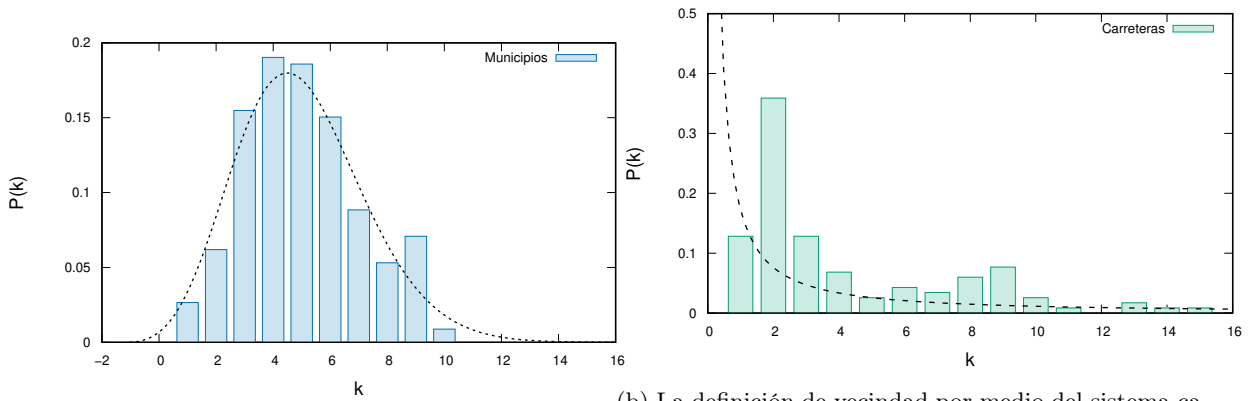


Figura 4.4: Red compleja del Estado de Puebla donde los vecinos cercanos de cada municipio son aquellos conectados por los tramos del sistema carretero estatal. El mapa de la principal infraestructura carretera del estado fue extraído de Ref. [4.23]. En Anexo se muestra a mayor detalle la red de compleja.

De manera específica, las distribuciones del grado de los nodos obtenidas para las redes previamente descritas indican que usando la definición de municipios colindantes genera una red tipo *Erdős-Rényi* con media  $\langle k \rangle \sim 5$  (ver Fig. 4.5a), mientras que al considerar conexión por infraestructura carretera se produce una red *libre de escala* con exponente  $\alpha \sim 1.2$  (ver Fig. 4.5b).

Cabe resaltar en Figs. 4.3 y 4.4 que el hecho de elegir diferentes definiciones de vecinos cercanos genera redes diferentes aún tratándose del mismo conjunto de nodos. Notar que una definición de vecinos cercanos que describe de manera más adecuada la conexión de los municipios del Estado de Puebla es considerar a la vez la definición de municipios colindantes y la de infraestructura carretera como se muestra en Fig. 4.6. La red compleja de *municipios+carreteras* se compone de los 575 enlaces de la red de municipios y 87 enlaces de la red de carreteras, sumando en total 662 enlaces. Esta condición genera un efecto de vecinos complejos (como en capítulo 3) en el sentido de que ahora algunos municipios tendrán por vecinos cercanos no solo a sus adyacentes, sino que también a municipios más alejados. Por ejemplo, el municipio de Puebla que en la red de municipios tenía 10 enlaces pasó a tener 21 en la red de municipios+carreteras. Por otra parte, municipios como Tlaxco permanecieron con un solo vecino.

En Figs. 4.7a y 4.7b se muestran en el mapa del Estado de Puebla los municipios de Puebla y Libres (nodos 114 y 94) respectivamente, los cuales corresponden a los nodos más conectados en la red de municipios+carreteras con 21 y 16 enlaces en el orden dado. Como se mencionó previamente, el municipio de Puebla aumentó 11 enlaces al considerar el sistema carretero. Por otra parte, el municipio de Libres colinda geográficamente con 5 municipios, pero debido a que sobre él confluyen importantes tramos



(a) La definición de vecinos colindantes provoca que la red de conexión del Estado de Puebla sea tipo Erdős-Rényi con  $\langle k \rangle \sim 5$

(b) La definición de vecindad por medio del sistema carretero estatal determina una red libre de escala con exponente  $\alpha \sim 1.2$ , donde observamos pocos nodos altamente conectados.

Figura 4.5: Distribuciones de grado según las definiciones de vecindad por a) municipios colindantes y b) sistema carretero.

carreteros sus vecinos se incrementan 16. Notar que los municipios de Acajete, Amozoc y Tapatlaxco de Hidalgo (nodos 1, 15 y 163, respectivamente) son al mismo tiempo vecinos cercanos de Puebla y Libres.

En Fig. 4.8 se muestra la distribución de grado de los nodos de la red compleja municipios+carreteras. Pese a que a la red de municipios se le agregaron enlaces de la red de carreteras éstos sólo contribuyeron a la conexión de algunos nodos sin alterar sustancialmente la estructura previa. De acuerdo al ajuste, la red de municipios+carreteras corresponde a una red tipo *Erdős-Rényi* con media  $\langle k \rangle \sim 7$ .

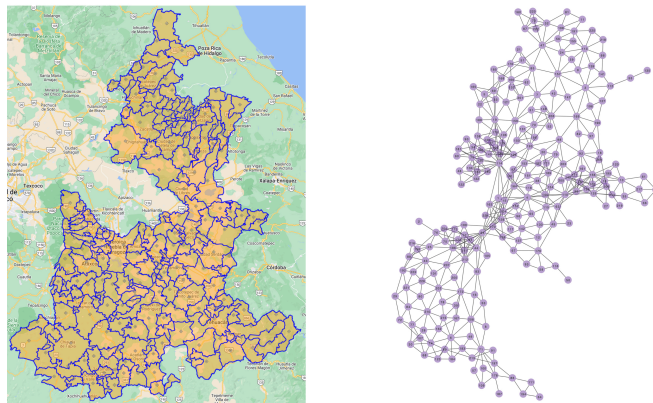
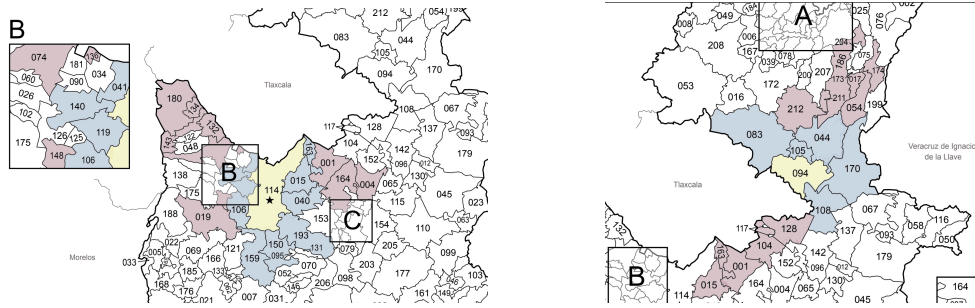


Figura 4.6: Red compleja del Estado de Puebla donde los vecinos cercanos de cada municipio son aquellos formados por los municipios colindantes y el sistema carretero.

De ésta forma, al conocer la estructura de la red compleja de municipios+carreteras es posible plantear estrategias de contención al remover aleatoriamente nodos o enlaces. En éste marco de referencia, remover un nodo consistirá en cortar todos sus enlaces y significará que el desplazamiento de personas hacia afuera o dentro del municipio representado queda prohibido, es decir, el municipio queda completamente aislado. Por otro lado, eliminar un enlace en la red equivale a imposibilitar el flujo de personas sólo sobre determinados municipios.

Para evaluar el efecto de dichas estrategias es preciso antes hallar los umbrales de percolación de nodos y enlaces respectivamente en los que la red compleja se desconecta.



(a) Se muestra al municipio de Puebla (amarillo) y sus vecinos cercanos conformados por aquellos municipios con los que colinda (azul) y con los que conecta a través del sistema carretero (rosa).

(b) Se muestra al municipio de Libres (amarillo) y sus vecinos cercanos conformados por aquellos municipios con los que colinda (azul) y con los que conecta a través del sistema carretero (rosa).

Figura 4.7: Vecindad de los municipios a) Puebla y b) Libres, los cuales representan los nodos más conectados en la red de municipios+carreteras con 21 y 16 enlaces, respectivamente.

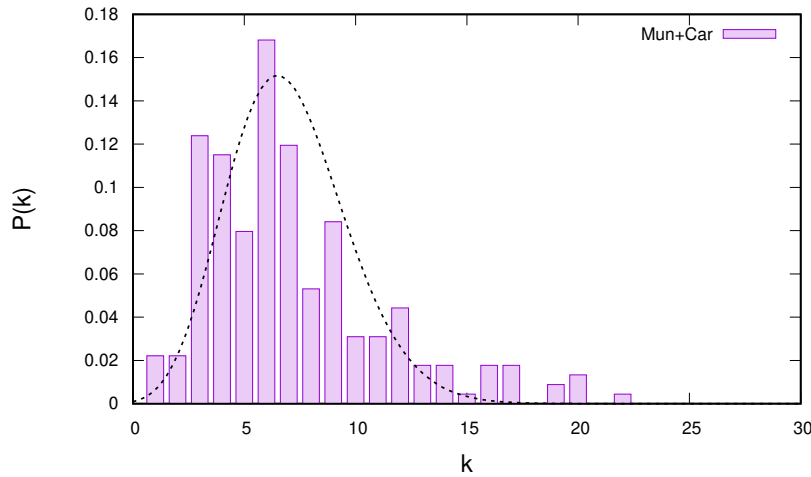


Figura 4.8: Distribución del grado de los nodos de la red compleja que contempla vecindades tanto por colindancias como por sistema carretero.

#### 4.2.1. Tamaño de la componente más grande y el umbral de percolación

En el contexto de la propagación de enfermedades, el significado del tamaño promedio de las componentes y el tamaño de la componente más grandes es de mucha importancia pues pueden ser asociados con el número promedio de municipios afectados y el brote de mayor extensión al final del proceso de propagación, respectivamente.

Para conocer éstas cantidades en la red de conexión de municipios+carreteras del Estado de Puebla se implementa la metodología establecida en el capítulo 2 en dos casos: el primero en el que se remueven nodos y el segundo en el que se remueven enlaces.

De acuerdo a la ecuación (2.17) la observable de interés  $\mathcal{O}$  corresponde al tamaño de la componente más grande denotado como  $s_{\text{máx}}$ , mientras que la distribución  $\mathbf{P}$  corresponde a una distribución binomial  $\mathcal{B}$ . Por tanto, en la red de municipios+carreteras el tamaño de la componente más grande es estimado como

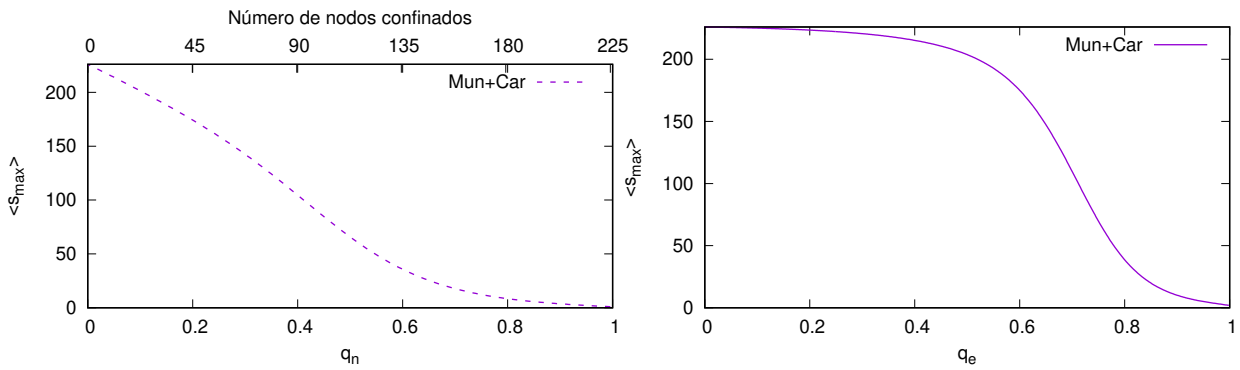
$$s_{\text{máx}}(p_n) = \sum_{k=0}^{N_n} s_{\text{máx}}(k) \mathcal{B}(N_n, k, p_n), \quad (4.7)$$

donde  $N_n = 226$  es el número total de nodos en la red,  $p_n$  es la densidad de nodos ocupados u existentes en la red y  $s_{\text{máx}}(k)$  es el tamaño promedio del racimo más grande tras haber añadido en la red  $k$  sitios.

Notar que el algoritmo de Newman y Ziff consiste en agregar nodo por nodo al azar, sin embargo en éste contexto la propagación de la enfermedad puede ser detenida al remover sitios por lo que el parámetro de interés es  $q_n = 1 - p_n$ , que corresponde a la fracción de nodos removidos o vacíos.

En lo que concierne al tamaño de la componente más grande al eliminar enlaces el proceso es como ecuación (4.7) sustituyendo el número de nodos  $N_n$  por  $N_e = 662$  número de enlaces, y  $p_n$  por  $p_e$  que corresponde a la fracción de enlaces. Nuevamente el parámetro de interés es el complemento  $q_e = 1 - p_e$ .

En Figs.4.9a y 4.9b se muestran los gráficos del tamaño promedio del racimo más grande como un promedio del número de simulaciones realizadas ( $10^5$ ), en función de la fracción  $q_n$  de nodos y  $q_e$  de enlaces removidos, respectivamente. Se observa, por ejemplo, que  $q_n = 0.34$  equivale a aislar aleatoriamente alrededor de 76 municipios, lo cual conlleva a que la extensión promedio de municipios afectados sea de aproximadamente 128, es decir, el 57% de los municipios del Estado de Puebla. Sin embargo, debido a la estructura de la red compleja remover  $q_e = 0.34$  enlaces no tiene el mismo efecto pues el tamaño del racimo más grande comprende alrededor de 218 municipios, casi el 96%.



(a) Tamaño promedio del racimo más grande en función de la fracción  $q_n$  de nodos removidos. (b) Tamaño promedio del racimo más grande en función de la fracción  $q_e$  de enlaces removidos.

Figura 4.9: Tamaño promedio del racimo más grande en función de a) la fracción  $q_n$  de nodos removidos, y b) de enlaces  $q_e$  eliminados. Se observa que para reducir el tamaño del racimo más grande se necesita remover más enlaces que en su similar de nodos.

En particular, para tener un efecto similar al de remover nodos y que el tamaño de la componente más grande sea de 128 municipios se necesita un valor  $q_e = 0.67$ , lo cual equivale a remover alrededor de 443 enlaces de los 662 totales.

Por otra parte, conocer el umbral de percolación en una red de conexión social es muy importante ya que puede ser empleado para estimar el número máximo de nodos o enlaces removidos (fallas) que el sistema puede tolerar antes de que la componente gigante se desconecte, que en la propagación de enfermedades implicaría tener pequeños brotes aislados. Por lo anterior, es posible relacionar  $s_{\max}$  con el strength  $P_{\text{str}}$  del racimo más grande definido en el capítulo 2 como la probabilidad de que un sitio elegido al azar pertenezca al racimo percolante, mediante [4.16, 4.24]

$$P_{\text{str}}(p) = s_{\max}(p)/N_n. \quad (4.8)$$

Luego entonces, las fluctuaciones del strength  $P_{\text{str}}$  son medidas a través de la susceptibilidad como [4.25]

$$\chi(p) = \frac{s_{\max}^2(p)/N_n^2 - (P_{\text{str}}(p))^2}{P_{\text{str}}(p)}, \quad (4.9)$$

donde  $s_{\max}^2(p)$  corresponde al promedio cuadrático del racimo más grande, mientras que  $p$  puede ser sustituido por  $p_n$  o  $p_e$  según sea el caso.

Debido a que en este problema el tamaño de ambas redes está establecido el umbral de percolación  $p_c$  puede ser determinado al hallar el valor de  $p$  en el que ocurre el valor máximo de  $\chi$ , esto es,

$$p_c = \arg \{ \max_p \chi(p) \}. \quad (4.10)$$

El valor máximo se alcanza cuando  $q_n = 0.513$  y  $q_e = 0.748$ , respectivamente.

### 4.3. Estrategias de movilidad basadas en la teoría de percolación

Conocer la estructura de la red compleja de municipios+carreteras nos permitió estimar la fracción crítica de nodos o enlaces que deben ser removidos para frenar lo más posible la propagación de la enfermedad COVID-19.

Las estimaciones de la sección previa muestran que  $\chi$  alcanza su valor máximo cuando  $q_n = 0.513$  para el caso de remover nodos. Esto equivale a que al aislar aleatoriamente 115 municipios el tamaño del racimo más grande consta de aproximadamente 61 elementos (ver Fig. 4.9a). Por otra parte, en el caso de eliminar enlaces, es decir, impedir el flujo sobre ciertos municipios, el umbral de percolación es de  $q_e = 0.748$ , punto en el cual el tamaño del racimo más grande es de aproximadamente 70 municipios.

Se observa que dada la alta conectividad del Estado de Puebla por medio de colindancias y sistema carretero es más efectivo aislar municipios.

Sin embargo, aún aislando de manera particular los cinco nodos más conectados, a saber Puebla, Libres, Tehuacán, Palmar de Bravo y Acatzingo (nodos 114, 94, 156, 110 y 4) con 21, 16, 15, 14 y 14 enlaces respectivamente, la red parece no alterarse como se muestra en Fig. 4.10. Al retirarlos, los municipios con mayor conexión se vuelven Huejotzingo y Tlatlauquitepec (nodos 74 y 186) con 13 enlaces cada uno, seguidos de los municipios Atlixco, Tepeyahualco, San José Chiapa y Nopalucan (nodos 19, 170, 128 y 104) con 12 enlaces cada uno.

Cabe resaltar que los municipios previamente mencionados son de importancia social y económica en el Estado de Puebla, por lo que su aislamiento deliberado podría tener un alto impacto económico que no compensa con su poca contribución a la reducción de la propagación de la enfermedad COVID-19 debido a la estructura de la red.

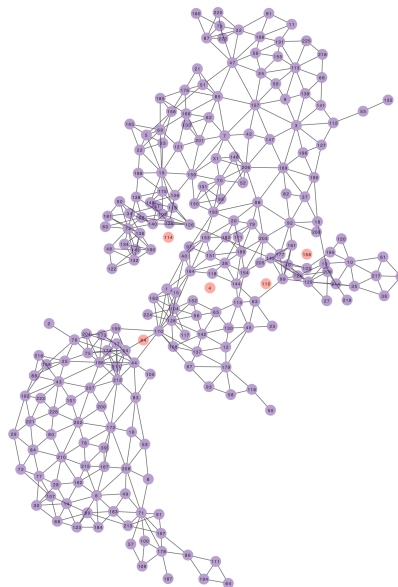


Figura 4.10: Se muestra la red compleja de municipios+carreteras del Estado de Puebla en la que se eliminaron todos los enlaces de los municipios de Puebla, Libres, Tehuacán, Palmar de Bravo y Acatzingo (nodos 114, 94, 156, 110 y 4, respectivamente) por su alta conectividad.

### 4.4. Anexo

Las redes complejas que a continuación se presentan fueron elaboradas en *Cytoscape*.

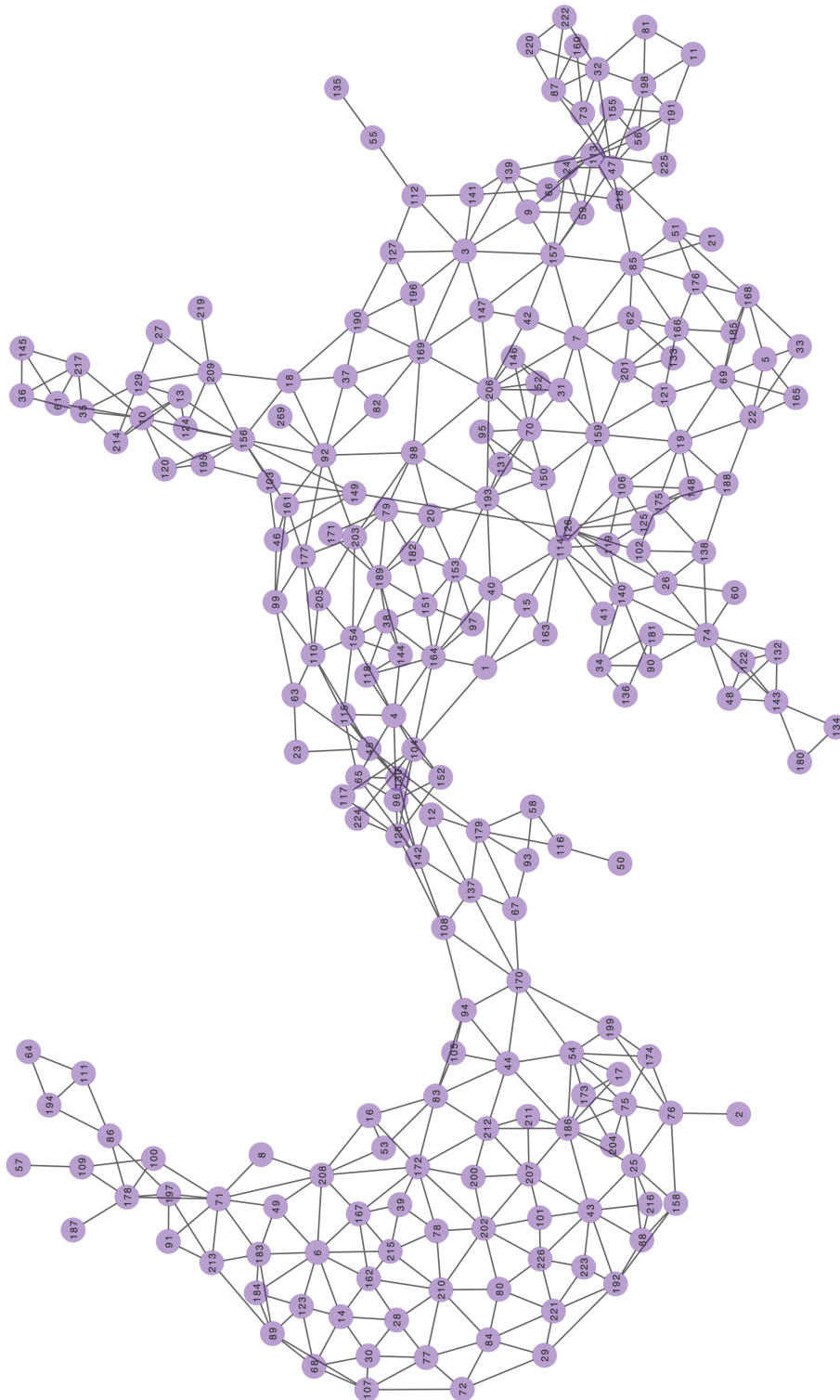


Figura 4.11: Red compleja del Estado de Puebla por municipios colindantes.

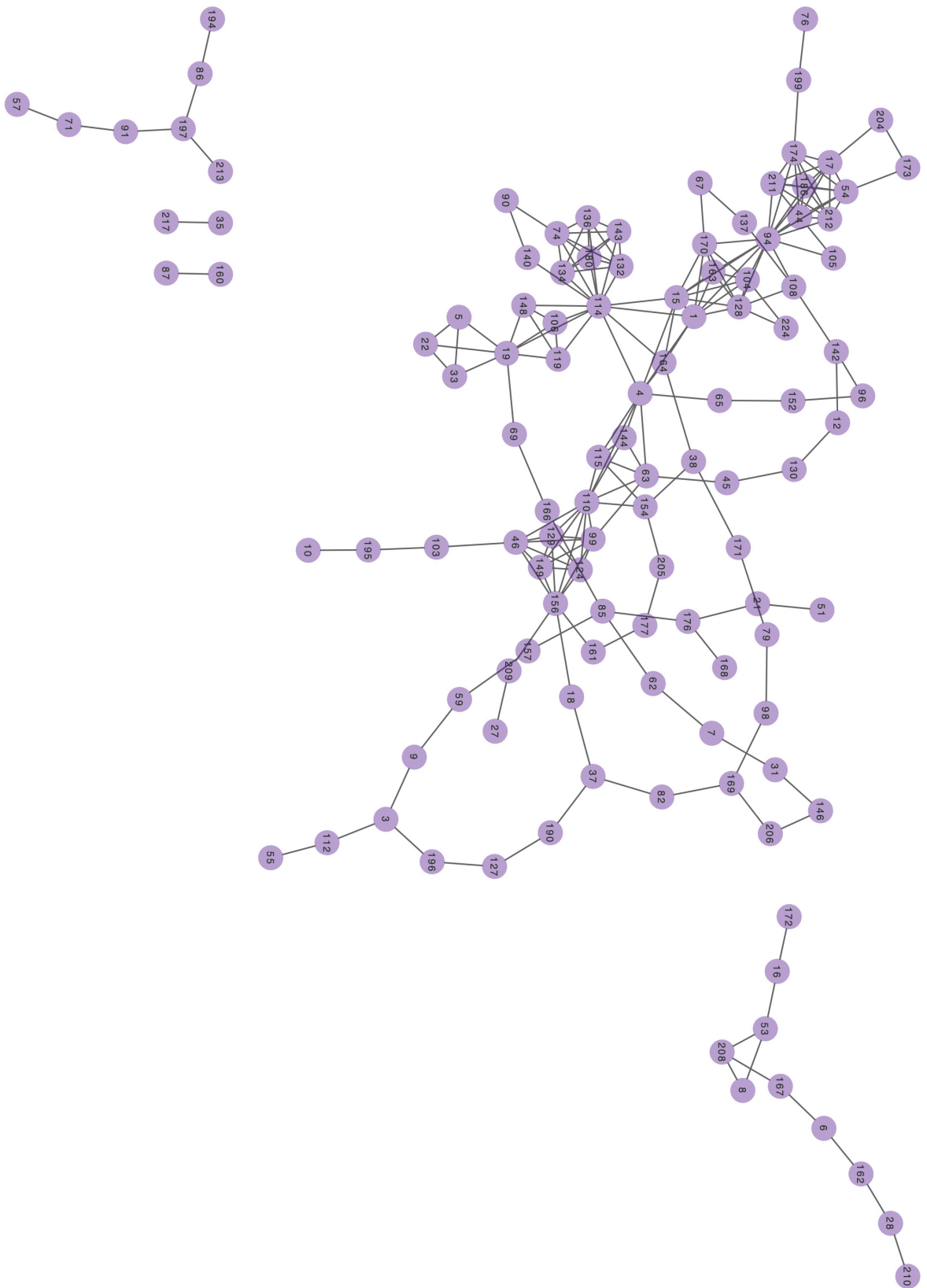


Figura 4.12: Red compleja del Estado de Puebla con vecinos definidos por sistema carretero.

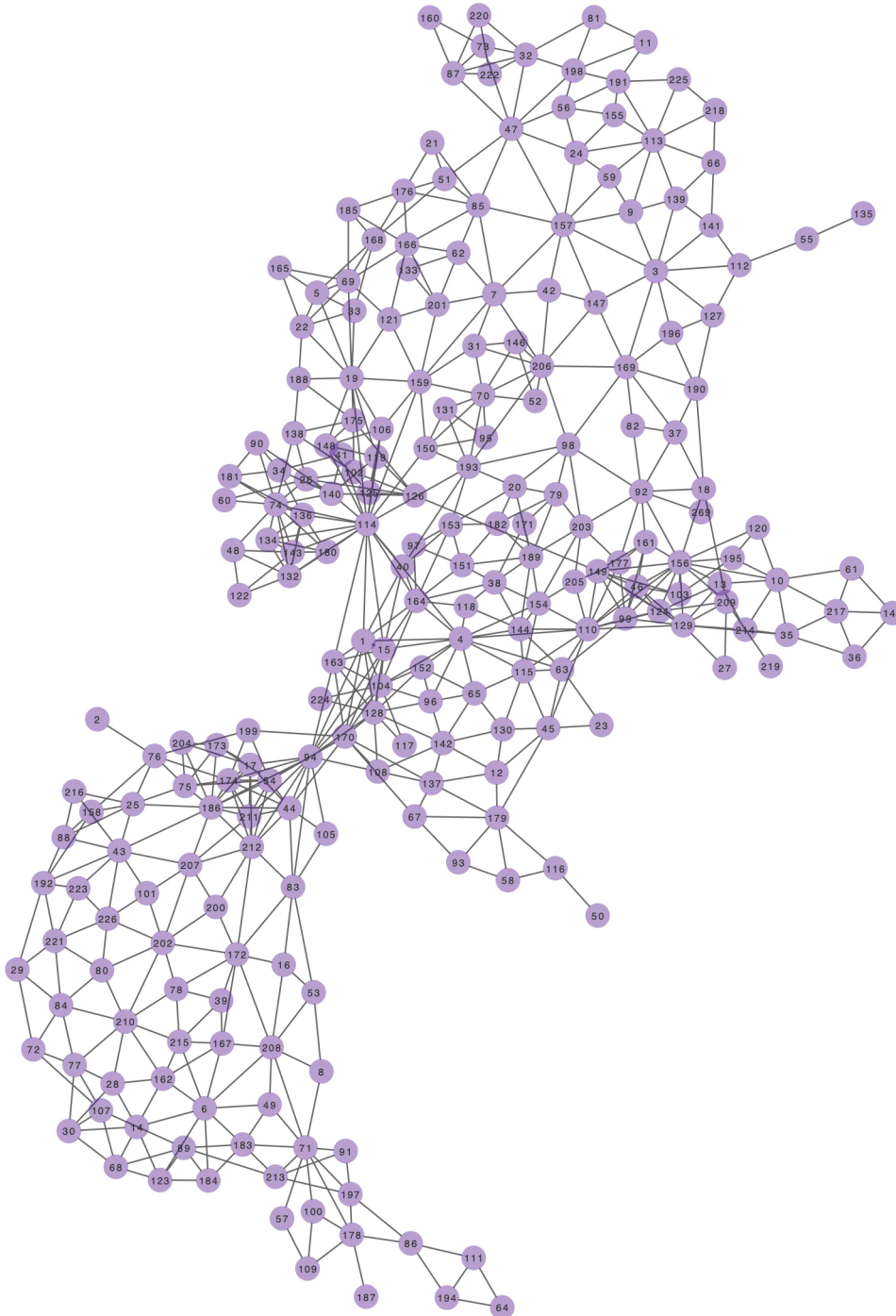


Figura 4.13: Red compleja del Estado de Puebla por municipios colindantes y sistema carretero.

# Bibliografía

- [4.1] J. E. Ramírez, D. R. Herrera, B. Díaz, M. I. Martínez, P. V. Juárez, and A. F. Téllez, “Análisis del proceso de propagación espacio-temporal de covid-19 en el estado de puebla,” Tech. Rep. 1 Jan-Feb, CONCYTEP, 2022.
- [4.2] M. E. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, “Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications,” *Physical review E*, vol. 64, no. 2, p. 026118, 2001.
- [4.3] M. E. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [4.4] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of modern physics*, vol. 74, no. 1, p. 47, 2002.
- [4.5] S. Fortunato, “Community detection in graphs,” *Physics reports*, vol. 486, no. 3-5, pp. 75–174, 2010.
- [4.6] P. Erdős and A. Rényi, “On random graphs,” *Publ. Math. Debrecen*, vol. 6, pp. 290–297, 1959.
- [4.7] P. Erdős and A. Rényi, “On the strength of connectedness of a random graph,” *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 12, no. 1, pp. 261–267, 1961.
- [4.8] A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, “Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web,” *Physica A: statistical mechanics and its applications*, vol. 281, no. 1-4, pp. 69–77, 2000.
- [4.9] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos, “On power-law relationships of the internet topology,” *ACM SIGCOMM computer communication review*, vol. 29, no. 4, pp. 251–262, 1999.
- [4.10] M. N. Khan, “Phase transitions in random graphs-outbreak of epidemics to network robustness and fragility,” 2010.
- [4.11] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási, “Error and attack tolerance of complex networks,” *nature*, vol. 406, no. 6794, pp. 378–382, 2000.
- [4.12] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, “Giant strongly connected component of directed networks,” *Physical Review E*, vol. 64, no. 2, p. 025101, 2001.
- [4.13] R. Cohen, K. Erez, D. Ben-Avraham, and S. Havlin, “Resilience of the internet to random breakdowns,” *Physical review letters*, vol. 85, no. 21, p. 4626, 2000.
- [4.14] M. E. Newman and D. J. Watts, “Scaling and percolation in the small-world network model,” *Physical review E*, vol. 60, no. 6, p. 7332, 1999.
- [4.15] D. Kempe, J. Kleinberg, and É. Tardos, “Maximizing the spread of influence through a social network,” in *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, pp. 137–146, 2003.
- [4.16] F. Radicchi, “Predicting percolation thresholds in networks,” *Physical Review E*, vol. 91, no. 1, p. 010801, 2015.

- [4.17] C. Moore and M. E. Newman, “Epidemics and percolation in small-world networks,” *Physical Review E*, vol. 61, no. 5, p. 5678, 2000.
- [4.18] M. E. Newman, “Spread of epidemic disease on networks,” *Physical review E*, vol. 66, no. 1, p. 016128, 2002.
- [4.19] R. Cohen and S. Havlin, “Percolation in complex networks,” *Complex Media and Percolation Theory*, pp. 419–431, 2021.
- [4.20] L. Sander, C. Warren, I. Sokolov, C. Simon, and J. Koopman, “Percolation on heterogeneous networks as a model for epidemics,” *Mathematical biosciences*, vol. 180, no. 1-2, pp. 293–305, 2002.
- [4.21] D. S. Callaway, M. E. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, “Network robustness and fragility: Percolation on random graphs,” *Physical review letters*, vol. 85, no. 25, p. 5468, 2000.
- [4.22] INEGI, “División municipal del estado de puebla.”
- [4.23] S. de Comunicaciones y Transportes, “Informe de datos viales 2013.”
- [4.24] A. Coniglio and D. Stauffer, “Fluctuations of the infinite network in percolation theory,” *Lett. Nuovo Cimento;(Italy)*, vol. 28, no. 2, 1980.
- [4.25] F. Radicchi and S. Fortunato, “Explosive percolation in scale-free networks,” *Physical review letters*, vol. 103, no. 16, p. 168701, 2009.

## Capítulo 5

# Aplicación de la teoría de percolación en la física de altas energías

En los experimentos de física de altas energías tales como los realizados en RHIC y LHC dos proyectiles (protones o núcleos pesados) que viajan a velocidades cercanas a la velocidad de la luz se hacen colisionar frontal y centralmente. Instantes antes a la colisión y debido a la contracción de Lorentz dichos proyectiles semejan dos discos delgados de los que emanan tubos de color (ver Fig. 5.1), los cuales son modelados sobre el plano transversal a la colisión como discos de radio  $r_0 \sim 0.2 - 0.3$  fm [5.1, 5.2]. Dichos discos, llamados cuerdas de color quedan distribuidos aleatoriamente sobre la superficie transversal a la colisión.

La interacción fundamental entre las cuerdas de color está dada por el traslape de éstas, dando lugar a la formación de racimos. A medida que aumenta la energía de centro de masa  $\sqrt{s}$  o el número de nucleones de los proyectiles aumenta la cantidad de cuerdas en el sistema, por lo que puede darse la formación de un racimo percolante de cuerdas de color, tal como se muestra en Fig. 5.2 c). Físicamente, es posible asociar la formación del racimo percolante con la transición *confinado-desconfinado* de los quarks, llamado Plasma de Quarks y Gluones que experimentalmente ha sido observado en colisiones Au-Au en RHIC y Pb-Pb en LHC.

Éste fenómeno puede ser bien descrito por el modelo de percolación de cuerdas de color, el cual es la implementación del modelo de percolación continua en dos dimensiones con discos y la teoría de la cromodinámica cuántica.

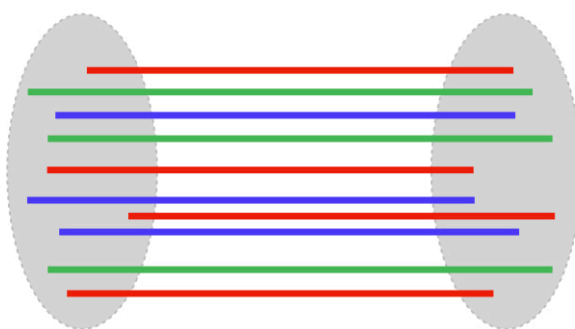


Figura 5.1: Esquema de dos proyectiles (discos color gris) instantes antes de la colisión, en la que se proyectan los tubos de color.

### 5.1. Observables del Modelo de Percolación de Cuerdas de Color

En ésta sección se definirán las principales observables del modelo de percolación de cuerdas de color.

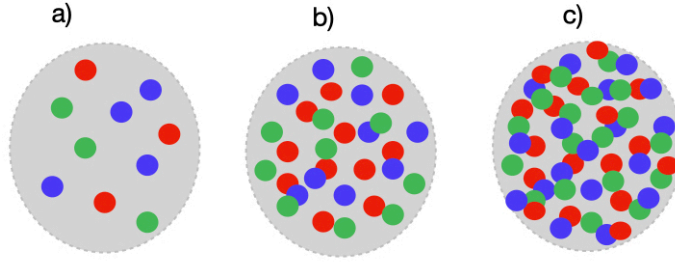


Figura 5.2: Se muestran diferentes densidades de cuerdas de color. a) cuerdas aisladas; b) formación de racimos; c) formación del racimo percolante.

En éste modelo cada cuerda de color tiene área  $S_1 = \pi r_0^2$ , campo de color  $\mathbf{Q}_1$  orientado aleatoriamente, multiplicidad  $\mu_1$  y momento transverso cuadrático medio  $\langle p_T^2 \rangle_1$  [5.1]. Dado que la interacción de las cuerdas de color se da mediante su traslape podemos analizar tres casos:

- cuando el traslape de las cuerdas es total,
- cuando las cuerdas se traslapan en su frontera,
- cuando el traslape es parcial.

En el primer caso, el área  $S_N$  donde se traslapan completamente  $N$  cuerdas será  $S_N = S_1$ . Debido a que los campos de color están orientados aleatoriamente y cubren la totalidad del área  $S_N$  sucede que al realizar la suma vectorial  $\sum_1^N \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}$  en promedio el producto punto de los campos es cero, es decir,  $\langle \mathbf{Q}_{1i} \cdot \mathbf{Q}_{1j} \rangle = 0$  donde los subíndices  $i, j$  corresponden a la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima cuerda traslapada, respectivamente. Por tanto, la carga de color total para  $N$  cuerdas traslapadas completamente es  $Q^2 = NQ_1^2$ , o bien,  $Q = \sqrt{N}Q_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}NQ_1$  donde el cociente  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  es el factor por el cual se suprime el color [5.3]. Además, tanto la multiplicidad como el momento transverso cuadrático medio son proporcionales al campo de color por lo que  $\mu = \sqrt{N}\mu_1$  y  $\langle p_T^2 \rangle = \sqrt{N}\langle p_T^2 \rangle_1$  [5.4–5.6].

En el segundo caso donde el traslape de las cuerdas de color es mínimo se tiene que  $S_N = NS_1$ , mientras que la carga de color, la multiplicidad y el momento transverso cuadrático medio quedan expresados como  $Q = NQ_1$ ,  $\mu = N\mu_1$  y  $\langle p_T^2 \rangle = \langle p_T^2 \rangle_1$ , respectivamente [5.7].

Sin embargo el tercer caso debe analizarse con cuidado, por lo que la forma más sencilla de observar el comportamiento de las observables es estudiar un racimo formado por el traslape parcial de dos cuerdas de color, tal como se muestra en Fig.5.3. En éste esquema se identifican las regiones  $S^{(1)}$  y  $S^{(3)}$  donde no ocurrió traslape y la región central  $S^{(2)}$  que resulta del traslape de las dos cuerdas de color. Por construcción geométrica se tiene que  $S^{(1)} = S^{(3)}$  y  $S^{(1)} + S^{(2)} = S_1$ , de ahí que el área de las regiones donde no hubo traslape es  $S_1 - S^{(2)}$ .

Debido a que la carga de color está uniformemente distribuida y con orientación aleatoria sobre la cuerda de área  $S_1$  es posible definir la densidad de color  $q = Q_1/S_1$ , por lo que las regiones  $S^{(1)}$  y  $S^{(3)}$  tienen carga de color  $Q^{(1)} = Q^{(3)} = qS^{(1)} = Q_1 \left( \frac{S^{(1)}}{S_1} \right)$  [5.1, 5.8].

Por otro lado, en la región  $S^{(2)}$  cada cuerda de color traslapada contribuye a la carga de color con  $qS^{(2)} = Q_1 \left( \frac{S^{(2)}}{S_1} \right)$ , por lo que al realizar la suma vectorial se tiene que  $(Q^{(2)})^2 = 2(qS^{(2)})^2$ , o bien,  $Q^{(2)} = \sqrt{2}qS^{(2)} = \sqrt{2}Q_1 \left( \frac{S^{(2)}}{S_1} \right)$  [5.8]. Por tanto, la carga de color total  $Q$  para un racimo de dos cuerdas de color traslapadas parcialmente se expresa como

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(3)} \quad (5.1)$$

$$= 2Q_1 \left( \frac{S^{(1)}}{S_1} \right) + \sqrt{2}Q_1 \left( \frac{S^{(2)}}{S_1} \right), \quad (5.2)$$

la cual es menor que la suma de los campos de color debido a la naturaleza vectorial del color [5.1, 5.8]. En éste ejemplo particular, la interacción fundamental (traslape) de dos cuerdas de color dio lugar a tres regiones con distinta intensidad de campo de color que de forma independiente producen partículas.

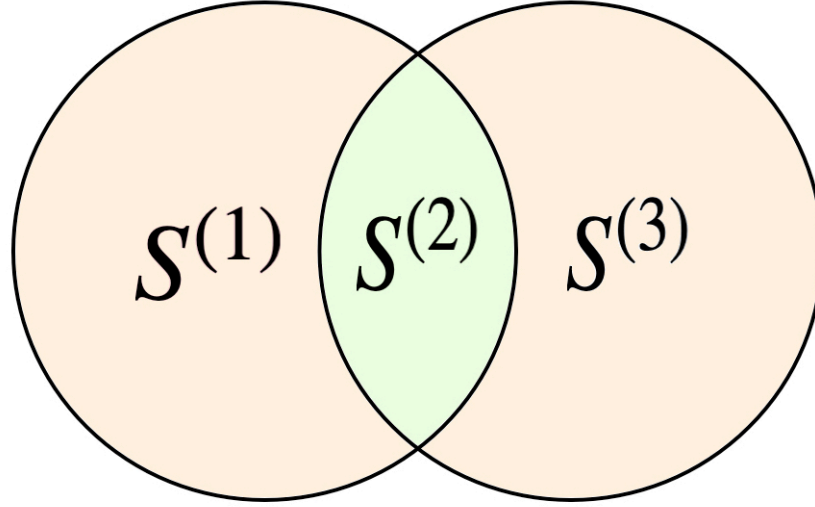


Figura 5.3: Esquema de dos cuerdas de color parcialmente traslapadas, donde se identifican las regiones  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$  y  $S^{(3)}$ . La región  $S^{(2)}$  se considera una nueva fuente de color con producción de partículas independiente.

Es importante notar que en general para una región  $S^{(i)}$  en la que se traslapan  $n_i$  cuerdas la carga de color es  $Q^{(i)} = \sqrt{n_i}Q_1 \left(\frac{S^{(i)}}{S_1}\right)$  [5.3]. La proporcionalidad de la carga de color  $Q^{(i)}$  con la raíz cuadrada del número de cuerdas traslapadas tiene como consecuencia que en esa región haya una reducción en la multiplicidad de las partículas producidas como se mostrará a continuación [5.6].

En el racimo formado por el traslape de dos cuerdas de color la multiplicidad de los hadrones cargados es

$$\mu = \mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \mu^{(3)} \quad (5.3)$$

donde  $\mu^{(i)}$  es la multiplicidad asociada a la región  $S^{(i)}$  con  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente.

En el caso de traslape parcial, la proporcionalidad de la multiplicidad  $\mu^{(i)}$  y la carga de color  $Q^{(i)}$  en una región  $S^{(i)}$  se expresa de manera general como  $\mu^{(i)} = \mu_1 Q^{(i)} / Q_1$ , por lo que

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= \mu_1 Q^{(1)} / Q_1 \\ &= \mu_1 Q_1 \left(\frac{S^{(1)}}{S_1}\right) \left(\frac{1}{Q_1}\right) \\ &= \mu_1 \left(\frac{S^{(1)}}{S_1}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} &= \mu_1 Q^{(2)} / Q_1 \\ &= \mu_1 \sqrt{2} Q_1 \left(\frac{S^{(2)}}{S_1}\right) \left(\frac{1}{Q_1}\right) \\ &= \mu_1 \sqrt{2} \left(\frac{S^{(2)}}{S_1}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, por construcción se tiene que la multiplicidad total es

$$\begin{aligned} \mu &= \mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \mu^{(3)} \\ &= 2\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \\ &= 2\mu_1 \left(\frac{S^{(1)}}{S_1}\right) + \sqrt{2}\mu_1 \left(\frac{S^{(2)}}{S_1}\right) \end{aligned}$$

**Aplicación de la teoría de percolación en la física de altas energías**  
5.1 Observables del Modelo de Percolación de Cuerdas de Color

---

donde podemos observar que  $\mu \neq 2\mu_1$ . Considerando constante la multiplicidad  $\mu_1$  de una cuerda de color el cálculo anterior puede expresarse como

$$\frac{\mu}{\mu_1} = 2 \frac{S^{(1)}}{S_1} + \sqrt{2} \frac{S^{(2)}}{S_1}. \quad (5.4)$$

Por otro lado, para hallar el momento transversal cuadrático medio de todas las partículas producidas en el racimo de tamaño 2 se procede de forma similar, esto es:

$$\langle p_T^2 \rangle = \langle p_T^2 \rangle^{(1)} + \langle p_T^2 \rangle^{(2)} + \langle p_T^2 \rangle^{(3)} \quad (5.5)$$

$$= 2 \frac{\mu_1}{\mu} \frac{S^{(1)}}{S_1} \langle p_T^2 \rangle_1 + \sqrt{2} \sqrt{2} \frac{\mu_1}{\mu} \frac{S^{(2)}}{S_1} \langle p_T^2 \rangle_1. \quad (5.6)$$

Por lo que al sustituir el inverso de la multiplicidad total expresada en (5.4) y usando que  $2(S^{(1)} + S^{(2)}) = 2S_1$  tenemos que

$$\frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_1} = \frac{2(S^{(1)}/S_1) + \sqrt{2}\sqrt{2}(S^{(2)}/S_1)}{2(S^{(1)}/S_1) + \sqrt{2}(S^{(2)}/S_1)} \quad (5.7)$$

$$= \frac{2}{2(S^{(1)}/S_1) + \sqrt{2}(S^{(2)}/S_1)}. \quad (5.8)$$

Por tanto, generalizando para un racimo formado por N cuerdas la multiplicidad de los hadrones cargados  $\mu$  puede expresarse como

$$\mu = \sum_i \mu^{(i)} = \sum_i \mu_1 \sqrt{n_i} \frac{S^{(i)}}{S_1}. \quad (5.9)$$

Además, usando que  $\sum_i n_i S^{(i)} = NS_1$  el momento transversal cuadrático medio  $\langle p_T^2 \rangle$  de las partículas producidas queda como

$$\langle p_T^2 \rangle = \frac{1}{\mu} \sum_i \mu^{(i)} \langle p_T^2 \rangle^{(i)} = \frac{\sum_i n_i (S^{(i)}/S_1) \langle p_T^2 \rangle_1}{\sum_i \sqrt{n_i} \frac{S^{(i)}}{S_1}} = \frac{N \langle p_T^2 \rangle_1}{\sum_i \sqrt{n_i} \frac{S^{(i)}}{S_1}}. \quad (5.10)$$

Un efecto interesante es la relación que existe entre la multiplicidad y el momento transversal cuadrático medio, la cual puede entenderse como una ley de conservación del momento transversal total producido, es decir, [5.8]

$$\frac{\mu}{\mu_1} \frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_1} = N. \quad (5.11)$$

Notemos que en las ecuaciones (5.9) y (5.10) el índice superior de las sumas varía según el número de regiones  $S^{(i)}$  generadas (ver Fig. 5.4), por lo que para poder sumar debemos identificar cada una de las regiones  $S^{(i)}$  y contabilizar el número  $n_i$  de cuerdas traslapadas en dicha región. Lo anterior resulta complicado para racimos con un alto número de cuerdas de color por lo que conviene expresar a todas las regiones  $S^{(i)}$  que tienen el mismo número de cuerdas traslapadas  $n_i$  en un sólo término  $S_n^{\text{tot}}$  definido como la suma de todas las regiones que tienen  $n = n_i$  cuerdas de color traslapadas [5.9]. Esto es

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\sqrt{1}}{S_1} \sum_{i, n_i=1} S_{n_i=1}^{(i)} + \frac{\sqrt{2}}{S_1} \sum_{i, n_i=2} S_{n_i=2}^{(i)} + \dots + \frac{\sqrt{N}}{S_1} \sum_{i, n_i=N} S_{n_i=N}^{(i)} \quad (5.12)$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{n}}{S_1} \sum_{i, n_i=n} S_{n_i=n}^{(i)} = \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{n}}{S_1} S_n^{\text{tot}}. \quad (5.13)$$

De forma similar la ecuación (5.10) se expresa como

$$\frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_1} = \frac{N}{\sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{n}}{S_1} S_n^{\text{tot}}}. \quad (5.14)$$

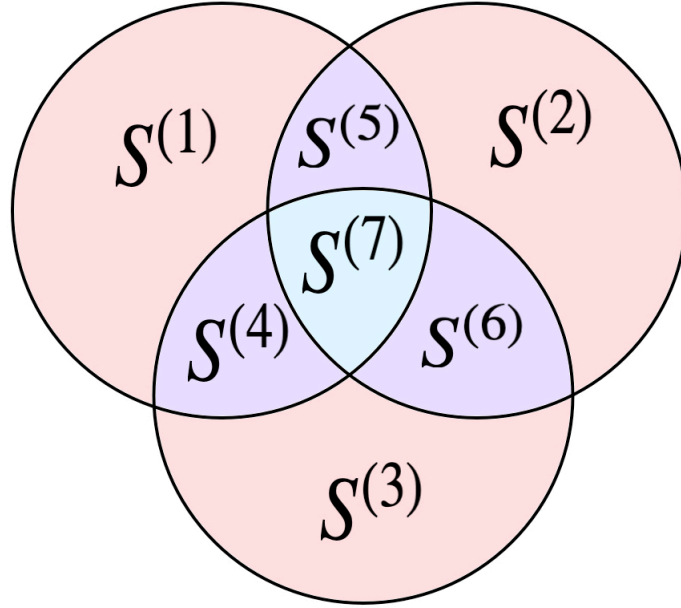


Figura 5.4: Esquema de tres discos traslapados que da origen a 7 regiones  $S^{(i)}$ . Notemos que las regiones  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$  y  $S^{(3)}$  tienen  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$  disco que no sufrió traslape, mientras que las regiones  $S^{(4)}$ ,  $S^{(5)}$  y  $S^{(6)}$  tienen  $n_4 = n_5 = n_6 = 2$  discos traslapados. Finalmente la región  $S^{(7)}$  tiene  $n_7 = 3$  discos traslapados. Nótese que el número de regiones  $S^{(i)}$  y su respectiva cantidad  $n_i$  para un racimo de 3 discos cambia según la configuración de dicho racimo.

Como se asume que las cuerdas de color se distribuyen uniformemente la ecuación (5.13) puede reescribirse como

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\langle \sqrt{n} \rangle}{S_1} S, \quad (5.15)$$

donde  $S$  denota el área total de interacción. Recordemos que el parámetro de percolación se define como el número  $N$  de cuerdas de color de área  $S_1$  distribuidas sobre un área  $S$ , es decir,  $\eta = \frac{NS_1}{S}$ . Entonces, se tiene que

$$\frac{\eta}{N} = \frac{S_1}{S} \quad (5.16)$$

$$\implies \frac{S}{S_1} = \frac{N}{\eta}. \quad (5.17)$$

Sustituyendo en ecuación (5.15) se obtiene

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{N \langle \sqrt{n} \rangle}{\eta}, \quad (5.18)$$

donde el cociente  $\langle \sqrt{n} \rangle / \eta$  define el factor  $F(\eta)$  por el cual la multiplicidad se ve amortiguada debido a la formación de racimos por traslape. De éste modo, en términos explícitos de la multiplicidad el factor de supresión de color se expresa como

$$F(\eta) = \frac{\mu}{N\mu_1}, \quad (5.19)$$

el cual debe satisfacer  $F(\eta) < 1$  ya que  $N\mu_1 \geq \mu$ .

Además, es posible estimar  $F(\eta)$  mediante la fracción del área total ocupada por las cuerdas, denotada como  $\phi(\eta)$ , que en el límite termodinámico corresponde a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Poisson}_n = 1 - e^{-\eta}. \quad (5.20)$$

Por tanto, al dividir la ecuación (5.20) entre  $\eta$  se obtiene que

$$F(\eta) = \sqrt{\frac{1 - e^{-\eta}}{\eta}} \quad (5.21)$$

$$= \sqrt{\frac{\phi(\eta)}{\eta}}. \quad (5.22)$$

Así, mediante el factor de supresión de color es posible relacionar la multiplicidad total  $\mu$  después del traslape de  $N$  cuerdas de color (estado final) con la multiplicidad  $\mu_1$  que suponemos tiene cada cuerda (estado inicial), esto es

$$\mu = N\mu_1 F(\eta). \quad (5.23)$$

Además, como se observa en la ecuación (5.14) el cociente  $\frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_1}$  se relaciona con  $\frac{\mu}{\mu_1}$ , que al despejarlo de la expresión (5.19) y sustituirlo conduce a que  $\frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_1} = \frac{1}{F(\eta)}$ , o bien

$$\langle p_T^2 \rangle = \frac{\langle p_T^2 \rangle_1}{F(\eta)}. \quad (5.24)$$

Al expresar las ecuaciones (5.23) y (5.24) en términos del factor de supresión de color  $F(\eta)$  puede observarse de manera más clara el comportamiento de éstas cantidades en relación al factor de llenado  $\eta$ . Observemos que cuando  $\eta \rightarrow 0$  tenemos que  $\phi(\eta) \approx \eta$ , por lo que  $F(\eta) \rightarrow 1$  y por tanto  $\mu \rightarrow N\mu_1$ . Esto es, debido a la baja densidad de cuerdas de color es muy probable que no haya traslape entre ellas. Por otro lado, cuando  $\eta \rightarrow \infty$  tenemos que  $F(\eta) \rightarrow 0$  y por tanto  $\frac{\mu}{N} = F(\eta)\mu_1 < \mu_1$ , es decir, debido al aumento de cuerdas en el sistema y por ende al proceso de formación de racimos se producen menos partículas. En cuanto al momento transversal cuadrático medio tenemos que  $\langle p_T^2 \rangle = \frac{\langle p_T^2 \rangle_1}{F(\eta)}$  aumenta [5.8, 5.9].

Uno de los objetivos del trabajo presentado en éste capítulo es calcular los efectos de sistema finito que sufren las observables de interés, por lo que la fracción del área total que cubren los discos la dejaremos expresada como  $\phi(\eta)$ .

### 5.1.1. Temperatura en el modelo de percolación de cuerdas de color

En el modelo de percolación de cuerdas de color la distribución de Schwinger para partículas sin masa se expresa en términos de  $p_T^2$  como

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim e^{-\pi p_T^2/x^2}, \quad (5.25)$$

donde el valor promedio de la tensión de la cuerda es  $\langle x^2 \rangle$ . En Ref. [5.8] se argumenta que el origen de las fluctuaciones de las cuerdas está relacionado con la parte estocástica del vacío en QCD, por lo que se asume que dichas fluctuaciones siguen una distribución Gaussiana con media 0 y varianza  $\langle x^2 \rangle$  [5.3, 5.10, 5.11]

$$D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle x^2 \rangle}} e^{-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle}}. \quad (5.26)$$

Así, la distribución de momento transversal es hallada al hacer la convolución del mecanismo de Schwinger con la distribución de las fluctuaciones en la tensión [5.10, 5.12], esto es

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim \int_{-\infty}^{\infty} D(x) e^{-\pi p_T^2/x^2} dx \quad (5.27)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi\langle x^2 \rangle}} \int_0^{\infty} e^{-\pi p_T^2/x^2} e^{-x^2/2\langle x^2 \rangle} dx \quad (5.28)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\langle x^2 \rangle}} \frac{\sqrt{\pi\langle x^2 \rangle}}{\sqrt{2}} e^{-p_T \sqrt{\frac{2\pi}{\langle x^2 \rangle}}} \quad (5.29)$$

$$= e^{-p_T \sqrt{\frac{2\pi}{\langle x^2 \rangle}}}. \quad (5.30)$$

Teóricamente la expresión (5.30) es válida para todos los valores de  $\langle p_T^2 \rangle$ , sin embargo al compararlo con los datos experimentales de la distribución de momento transverso se observa que éste decaimiento exponencial sólo ajusta un pequeño intervalo de datos y se le conoce como *región de bajo  $p_T$* . En Fig. 5.5 se muestra la distribución de momento transverso para una colisión pp a 13 TeV donde la región de bajo  $p_T$  queda ajustada por  $e^{-p_T \sqrt{\frac{2\pi}{\langle x^2 \rangle}}}$  (línea continua roja).

Por otra parte, notemos que la distribución de momento transverso puede re-escribirse como

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim e^{-\beta p_T}. \quad (5.31)$$

donde  $\beta = \left(\frac{2\pi}{\langle x^2 \rangle}\right)^{1/2}$  puede interpretarse como el inverso de la temperatura del sistema ya que la ecuación (5.31) se asemeja a la distribución de Boltzman en donde se satisface que  $T = 1/\beta$ <sup>1</sup>.

Por lo anterior, es posible definir una temperatura para el modelo de percolación de cuerdas de color que podamos relacionar con  $\eta$  y la formación de racimos. Para esto, se calcula  $\langle p_T^2 \rangle$  mediante el mecanismo de Schwinger normalizado, esto es

$$\langle p_T^2 \rangle = \beta \int_0^\infty p_T^2 e^{-\beta p_T} dp_T \quad (5.32)$$

$$= \frac{2}{\beta^2} \quad (5.33)$$

$$= \frac{1}{\pi} \langle x^2 \rangle. \quad (5.34)$$

Posteriormente, se comparan las ecuaciones (5.24) y (5.34) y se obtiene que

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\pi \langle p_T^2 \rangle_1}{F(\eta)}, \quad (5.35)$$

que al sustituir en  $\beta$  nos conduce a la definición deseada de temperatura

$$T = \sqrt{\frac{\langle p_T^2 \rangle_1}{2F(\eta)}}. \quad (5.36)$$

Cabe mencionar tres cosas importantes respecto a la definición de  $T$ , la primera es que el valor de  $\langle p_T^2 \rangle_1$  lo consideraremos como una constante fija debido a que en la literatura se utilizan diferentes valores [5.3, 5.8]. Lo segundo por mencionar es que  $T$  sólo describe la temperatura del sistema en la región de bajo  $p_T$ . Finalmente, resta comentar que mediante  $\eta$  es posible medir la temperatura inicial del sistema y a media que las cuerdas de color cubren mayor área de interacción ésta temperatura se vuelve una temperatura global [5.8].

## 5.2. Aplicación de la metodología y proceso de simulación

En esta sección emplearemos la metodología establecida en el capítulo 2 para expresar las observables  $\phi$ ,  $F$ ,  $\mu$ ,  $\langle p_T^2 \rangle$ , y  $T$  evaluadas en el umbral de percolación  $\eta_{cL}$ , de modo que podamos tener estimaciones para cada valor de  $L = 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192$  y  $256$  y posteriormente estimarlas en el límite termodinámico.

Comencemos observando que el área  $\phi(\eta)$  que cubren  $N$  cuerdas de color traslapadas es una variable aleatoria que cambia en cada ejecución del algoritmo, por lo que conviene trabajar con el valor promedio sobre el número de simulaciones realizadas, es decir,  $\bar{\phi}_N$ . Por tanto, de acuerdo al enfoque de la ecuación (2.23) tenemos que

$$\phi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\phi}_n e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}. \quad (5.37)$$

---

<sup>1</sup>Se escribe  $\beta$  para distinguir del exponente crítico  $\beta$

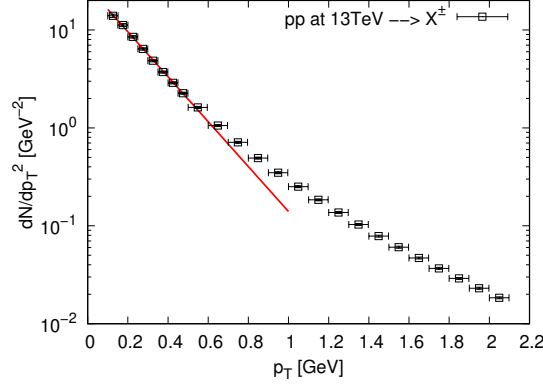


Figura 5.5: Se muestra la distribución de momento transverso para colisiones pp a 13 TeV. En rojo se muestra el ajuste tipo exponencial que concuerda con los datos en la región de bajo  $p_T$ .

En particular es de nuestro interés conocer el valor de las observables en el momento en el que se forma el racimo percolante, por lo que definimos el área crítica que cubren las cuerdas de color como la evaluación de  $\phi$  en el umbral de percolación que depende del tamaño del sistema, esto es

$$\phi_{cL} = \phi(\eta_{cL}) = e^{-\alpha_{cL}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\phi}_n \frac{\alpha_{cL}^n}{n!}, \quad (5.38)$$

donde  $\alpha_{cL} = \frac{\eta_{cL} L^2}{\pi r_0^2}$ .

De acuerdo a la metodología el siguiente paso es acotar el número de elementos en la suma usando el criterio de  $5\sigma$  y sustituir los pesos de Poisson. Notemos que la media  $\alpha$  no tiene un valor arbitrario pues para el caso de cuerdas de color de radio  $r_0 = 0.25$  se tiene que

$$(\alpha_{cL})^{1/2} = \left(\frac{\eta_{cL}}{\pi}\right)^{1/2} \frac{L}{r_0} = 4 \left(\frac{\eta_{cL}}{\pi}\right)^{1/2} L, \quad (5.39)$$

es decir,  $5\sigma = 20L \left(\frac{\eta_{cL}}{\pi}\right)^{1/2}$  términos.

Por lo tanto podemos aproximar la ecuación (5.38) como

$$\phi_{cL} \approx e^{-\alpha_{cL}} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \bar{\phi}_n w_n \Big/ \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n. \quad (5.40)$$

En lo que respecta al factor de supresión de color se sustituye  $\bar{\phi}_N$  por  $\phi_N$  en ecuación (5.22) de modo que el factor de supresión de color para un racimo de  $N$  cuerdas de color se expresa como

$$F_N = \sqrt{\frac{\bar{\phi}_N L^2}{N \pi r_0^2}} \quad (5.41)$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\pi} r_0} \sqrt{\frac{\bar{\phi}_N}{N}}, \quad (5.42)$$

el cual depende explícita e implícitamente de  $L$ . Procediendo bajo el esquema de la metodología el factor de supresión de color en el umbral de percolación  $\eta_{cL}$  se define como

$$F_{cL} = F(\eta_{cL}) = e^{-\alpha_{cL}} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} F_n w_n \Big/ \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n. \quad (5.43)$$

Por otra parte, dada la dependencia de ecuación (5.24) con el momento transverso cuadrático medio  $\langle p_T^2 \rangle_1$  de una cuerda de color conviene definir el momento transverso cuadrático medio adimensional como

$$\mathcal{P} = \frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_1} = \frac{1}{F(\eta)}. \quad (5.44)$$

Entonces para un sistema con  $N$  cuerdas de color

$$\mathcal{P}_N = \frac{1}{F_N}, \quad (5.45)$$

donde  $F_N$  es conocido. De manera similar a lo realizado previamente, se tiene que

$$\mathcal{P}_{cL} = \mathcal{P}(\eta_{cL}) = e^{-\alpha_{cL}} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \frac{w_n}{F_n} \Big/ \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n. \quad (5.46)$$

En lo que respecta a la multiplicidad notemos que la definición de ecuación (5.23) presenta problemas de divergencia ya que  $\mu \propto L^3$ , consecuencia de que  $N = \eta L^2 / \pi r_0^2$  y de la contribución del factor  $L$  de ecuación (5.42). Por lo anterior conviene trabajar con la densidad de multiplicidad, la cual obtenemos al dividir entre  $L^2$ , esto es,

$$M = \frac{\mu}{L^2} = NF(\eta) \frac{\mu_1}{L^2}, \quad (5.47)$$

donde consideramos  $M_1 = \frac{\mu_1}{L^2}$  constante. De esto que la multiplicidad adimensional queda expresada en términos de  $F(\eta)$  como

$$\mathcal{M} = \frac{M}{M_1} = NF(\eta). \quad (5.48)$$

Por tanto, de acuerdo a la metodología establecida se tiene que

$$\mathcal{M}_{cL} = \mathcal{M}(\eta_{cL}) = e^{-\alpha_{cL}} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \mathcal{M}_n w_n \Big/ \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n, \quad (5.49)$$

donde  $\mathcal{M}_n = nF_n$ .

Finalmente, para el caso de la temperatura  $T$  conviene definir una temperatura  $T^*$  adimensional para evitar trabajar con  $\langle p_T^2 \rangle_1$  de modo que se propone

$$T^* = \frac{T(\eta)}{\sqrt{\langle p_T^2 \rangle_1}} = \frac{1}{\sqrt{2F(\eta)}}. \quad (5.50)$$

Procediendo de la misma manera tenemos que para un racimo de  $N$  cuerdas de color

$$T_N^* = \frac{1}{\sqrt{2F_N}}, \quad (5.51)$$

mientras que en el umbral de percolación  $\eta_{cL}$  tenemos que

$$T_{cL}^* = T^*(\eta_{cL}) = e^{-\alpha_{cL}} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} T_n^* w_n \Big/ \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} w_n. \quad (5.52)$$

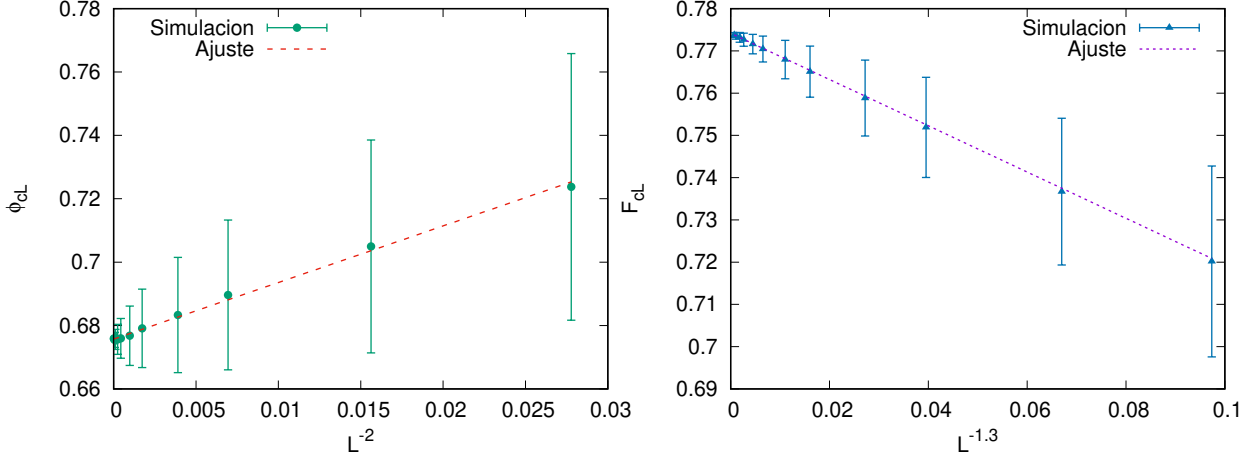
Posteriormente, mediante simulación por computadora se generan los datos para cada valor de  $L = 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192$  y  $256$ , que posteriormente serán analizados.

## 5.3. Resultados

### 5.3.1. Escalamiento de las observables y estimación en el límite termodinámico.

Comenzaremos ésta sección mostrando las leyes de escalamiento y la estimación de las observables  $\phi, F, \mu, \langle p_T^2 \rangle$ , y  $T$  en el límite termodinámico.

De manera general los datos obtenidos en simulación son ajustados mediante la función de la forma  $g_1(L) = aL^b + c$  donde el exponente  $b$  nos será de utilidad para linealizar los datos, es decir, poder extrapolarlos como una línea recta de la forma  $g_2(x) = ax + c$  donde  $x = L^b$  y  $c$  es la estimación de la observable en el límite termodinámico.



(a) Mediante el escalamiento de ecuación (5.53) se estima en el límite termodinámico el área que cubren los discos  $\phi_c = 0.6757(7)$ . (b) Se estima la función de supresión de color crítica  $F_c = 0.7742(1)$  como la extrapolación de los datos cuando  $L \rightarrow \infty$ .

Figura 5.6: Área cubierta por discos  $\phi_{cL} = \phi(\eta_{cL})$  (círculos verde) (a) y función de supresión de color  $F_{cL} = F(\eta_{cL})$  (triángulos azul) (b) en función de  $L$ . En ambos casos la intersección de la recta de ajuste con el eje Y proporciona la estimación en el límite termodinámico.

En Fig. 5.6a mostramos los datos de simulación y el ajuste para el área que cubren las cuerdas de color  $\phi$ , cuya ley de potencias hallada se expresa como

$$\phi_{cL} - \phi_c \propto L^{-2}, \quad (5.53)$$

donde  $\phi_c = 0.6757(7)$  es nuestra estimación en el límite termodinámico, la cual se encuentra en buen acuerdo con la determinación  $\phi_c = 0.67634831(2)$  reportada en Ref. [5.13]. En cuanto al factor de supresión de color  $F$  hallamos la relación

$$F_{cL} - F_c \propto L^{-1.3} \quad (5.54)$$

con  $F_c = 0.7742(1)$  en el límite termodinámico (ver Fig. 5.6b), siendo  $F_c = 0.77430816(4)$  el valor calculado con las mejores estimaciones de  $\eta_c$  y  $\phi_c$  reportados en [5.13].

Por otra parte, para la multiplicidad y el momento transverso cuadrático medio adimensionales se tienen las leyes de potencia

$$\mathcal{M}_{cL} - \mathcal{M}_c \propto L^{-1.66} \quad (5.55)$$

y

$$\mathcal{P}_{cL} - \mathcal{P}_c \propto L^{-1.33}, \quad (5.56)$$

respectivamente, cuyas estimaciones en el límite termodinámico son  $\mathcal{M}_c = 0.8731(6)$  y  $\mathcal{P}_c = 1.2917(2)$ , tal como se muestra en Figs. 5.7a y 5.7b. Nuevamente, nuestras estimaciones están en buen acuerdo con  $\mathcal{M}_c = 0.87348726(6)$  y  $\mathcal{P}_c = 1.29147548(7)$ , respectivamente, las cuales son obtenidas con las mejores estimaciones de  $\eta_c$  y  $\phi_c$  [5.13].

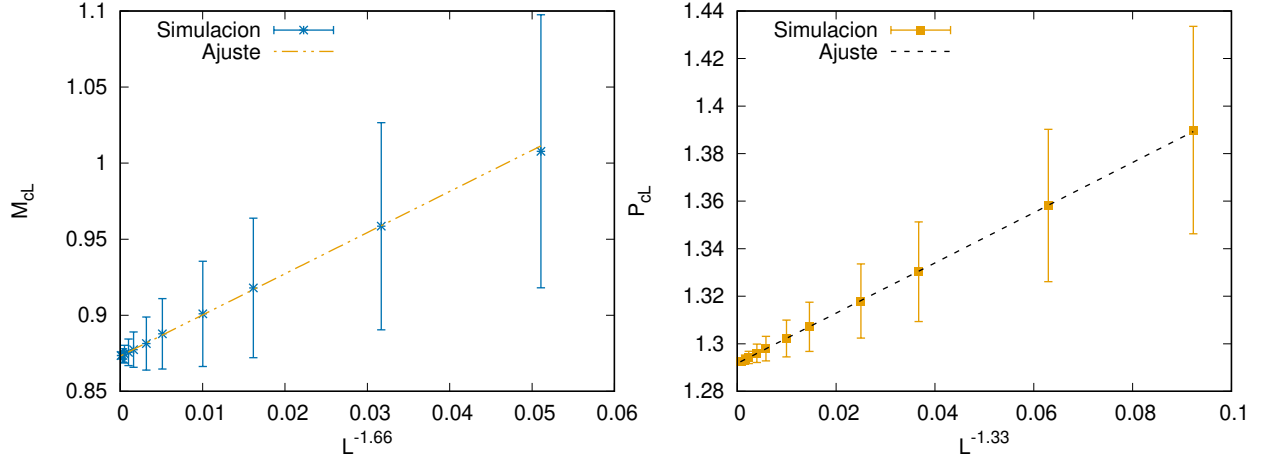
Finalmente, para la temperatura de transición definida como la evaluación  $T_{cL}^* = T^*(\eta_{cL})$  hallamos que  $T_{cL}^*$  satisface la ley de escalamiento

$$T_{cL}^* - T_c^* \propto L^{-1.32}. \quad (5.57)$$

En Fig. 5.8 mostramos el ajuste de los puntos  $T_{cL}^*$  mediante la función

$$mL^{-1.32} + T_c^*, \quad (5.58)$$

donde  $m = 0.316(4)$  y  $T_c^* = 0.80365(8)$ , siendo éste último nuestra estimación de la temperatura adimensional en el límite termodinámico. Observemos lo parecido que es nuestra estimación con el valor  $T_c^* = 0.80357803(3)$  obtenido al usar la determinación del umbral de percolación  $\eta_c$  y el área  $\phi_c$  que cubren los discos reportados en Ref. [5.13].



(a) Multiplicidad adimensional  $\mathcal{M}_c = 0.8731(6)$  estimada en el límite termodinámico como la intersección de la recta de ajuste y el eje Y.

(b) Momento transversal cuadrático medio adimensional  $\mathcal{P}_c = 1.2917(2)$  estimado mediante el escalamiento de ecuación (5.56).

Figura 5.7: Multiplicidad adimensional  $\mathcal{M}_{cL} = \mathcal{M}(\eta_{cL})$  (estrellas azul) a) y momento transversal cuadrático adimensional  $\mathcal{P}_{cL} = \mathcal{P}(\eta_{cL})$  (cuadrados amarillo) b) en función de  $L$ . Ambas estimaciones se realizan como la extrapolación de los datos de simulación.

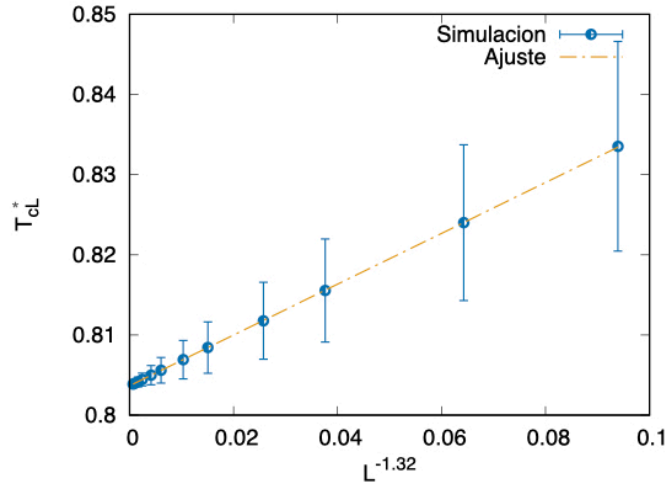


Figura 5.8: Temperatura de transición adimensional definida como  $T_{cL}^* = T^*(\eta_{cL})$  calculada para distintos valores de  $L$  y su estimación en el límite termodinámico.

### 5.3.2. Efecto de sistema finito en colisiones de partículas.

Todas las estimaciones anteriores fueron hechas en el límite termodinámico por lo que tiene sentido preguntarse cómo se comportan éstas observables cuando los efectos de sistema finito son tomados en cuenta, de modo que es necesario relacionar las observables  $\eta, \phi, F, \mu, \langle p_T^2 \rangle$  y  $T$  con el tipo de colisión que se analiza. Para esto, modelamos dos proyectiles como discos de radio atómico  $R_A$  que colisionan frontal y centralmente, tal como se muestra en Fig. 5.9. Para describir ésta colisión en términos del modelo se encierra el área de la colisión en una región cuadrada de tamaño  $L \times L$  (ver Fig. 5.10), de modo que para dentro del cuadrado quepa un número entero de cuerdas de color definimos

$$L = \frac{R_A}{r_0} \quad (5.59)$$

$$= \frac{r_0^* A_M^{1/3}}{r_0} \sim 5A_M^{1/3}, \quad (5.60)$$

donde  $r_0^* \sim 1.2 - 1.3$  fm una constante [5.14] y  $A_M$  es el número de nucleones del proyectil (ver Tabla 5.1).

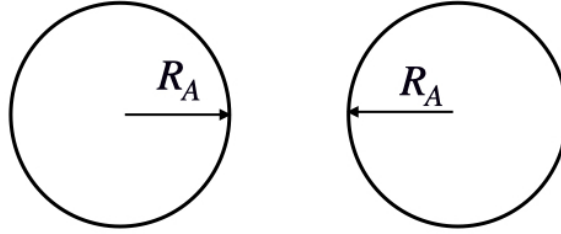


Figura 5.9: Colisión frontal y simétrica de dos proyectiles con radio atómico  $R_A$ .

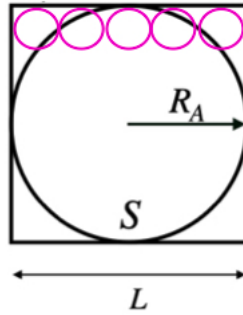


Figura 5.10: La superficie  $S$  de la colisión se encierra dentro de un cuadro de tamaño  $L \times L$ .

Dado que en general las observables de interés se expresan como un escalamiento de la forma  $X_{cL} - X_c \propto L^Z$  podemos tener una interpretación de los datos experimentales al sustituir  $L = 5A_M^{1/3}$ , esto significa escalar las observables con el número de nucleones del proyectil mediante

$$X_{cL} - X_c \propto (5A_M^{1/3})^Z. \quad (5.61)$$

Por ejemplo, el factor de supresión de color se escala con el tamaño del sistema como se muestra en ecuación (5.54), que escalado en términos del número de nucleones se tiene del ajuste que

$$F_{cL} = m(5A_M^{1/3})^{-1.3} + F_c, \quad (5.62)$$

donde  $m = -0.547584$  y  $F_c = 0.7742$  corresponden a la pendiente del ajuste y la estimación del factor de supresión de color en el límite termodinámico, respectivamente. Por lo tanto, para un colisión pp se

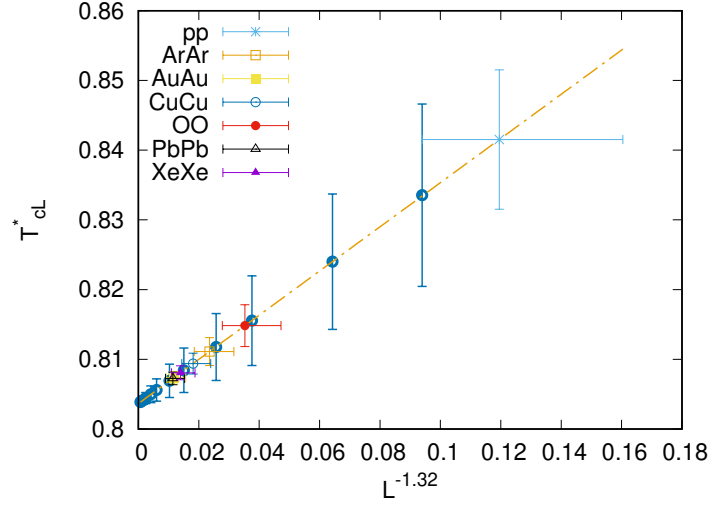


Figura 5.11: Temperatura de transición adimensional para colisiones pp y AA.

tiene que  $A_M = 1$  por lo que  $F_{cL} = 0.706624$ , mientras que para una colisión Pb-Pb que tiene número de nucleones  $A_M = 208$  se tiene que  $F_{cL} = 0.767512$ .

Este ejemplo deja ver lo importante que es considerar el tipo de colisión en las observables del modelo de percolación de cuerdas de color, pues se muestra cómo cambia el valor entre diferentes tipos de colisión y también cómo difieren éstos de la estimación en el límite termodinámico.

En particular éste análisis es de relevancia en la temperatura de transición  $T^*$  asociada a la formación del plasma de quarks y gluones, cuyo escalamiento en el número de nucleones se expresa como

$$T_{cL}^* - T_c^* \propto A_M^{-4/9}. \quad (5.63)$$

En Fig. 5.11 se muestran las estimaciones de  $T_{cL}^*$  para colisiones pp y AA, y el error estadístico propagado por las expresiones (5.60) y (5.63), el cual es calculado como se describe a continuación. Para el caso  $\sigma_L$  tenemos que

$$\sigma_L^2 = \left( \frac{\partial L}{\partial r_0^*} \right)^2 \sigma_{r_0^*}^2 + \left( \frac{\partial L}{\partial r_0} \right)^2 \sigma_{r_0}^2 \quad (5.64)$$

$$\approx 0.2L, \quad (5.65)$$

| Colisión | $A_M$ |
|----------|-------|
| pp       | 1     |
| O-O      | 16    |
| Ar-Ar    | 40    |
| Cu-Cu    | 63    |
| Xe-Xe    | 132   |
| Au-Au    | 197   |
| Pb-Pb    | 208   |

Tabla 5.1: Se muestran diferentes tipos de colisiones simétricas y el número de nucleones  $A_M$  que le corresponden.

donde  $\sigma_{r_0^*} = \sigma_{r_0} = 0.05$ , mientras que

$$\sigma_{T_{cL}^*}^2 = \left( \frac{\partial T_{cL}^*}{\partial m} \right)^2 \sigma_m^2 + \left( \frac{\partial T_{cL}^*}{\partial T_c^*} \right)^2 \sigma_{T_c^*}^2 + \left( \frac{\partial T_{cL}^*}{\partial L} \right)^2 \sigma_L^2 \quad (5.66)$$

$$\approx 0.08L^{-1.32}, \quad (5.67)$$

donde  $m = 0.3169$ ,  $T_c^* = 0.80365$ ,  $\sigma_m = 0.001473$  y  $\sigma_{T_c^*} = 0.000004$  obtenidos del ajuste.

El resultado más importante mostrado en Fig. 5.11 es que la temperatura de transición es mayor para sistemas pequeños, es decir, para colisiones pp. De las definiciones (5.22) y (5.50) puede observarse que para que esto suceda  $\eta$  debe aumentar y a su vez  $F(\eta)$  disminuir. Recordemos que la forma de aumentar  $\eta$  es aumentando la energía de centro de masa  $\sqrt{s}$  o el tamaño del sistema en colisión.

### 5.3.3. Densidad de cuerdas y energía de centro de masa.

Motivados por el resultado anterior buscamos relacionar  $\eta$  con  $\sqrt{s}$  y analizar los efectos de sistema finito para cada tipo de colisión de proyectiles.

En [5.15] los autores expresan el número promedio de cuerdas en una colisión pp como función de la energía de centro de masa  $\sqrt{s}$  mediante

$$N^{pp}(\sqrt{s}) = 2 + 4 \left( \frac{r_0}{R_p} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{s}}{m_p} \right)^{2\lambda}, \quad (5.68)$$

donde  $R_p = 0.84 - 0.87$  fm y  $m_p = 938$  MeV/ $c^2$  corresponden al radio y masa del protón, respectivamente, y  $\lambda = 0.201(3)$  es hallada mediante el ajuste de datos experimentales.

Como el número de cuerdas es una cantidad extensiva en el área definimos la densidad de cuerdas  $\eta^{pp}$ , la cual es una cantidad intensiva. Para esto, multiplicamos  $N^{pp}$  por  $\pi r_0^2/L^2$  obteniendo

$$\eta^{pp}(\sqrt{s}) = \frac{\pi}{25} \left[ 2 + 4 \left( \frac{r_0}{R_p} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{s}}{m_p} \right)^{2\lambda} \right]. \quad (5.69)$$

De manera similar, para colisiones centrales AA tenemos que

$$\eta^{AA}(\sqrt{s}) = \eta^{pp}(\sqrt{s}) A_M^{\alpha(\sqrt{s})}, \quad (5.70)$$

con

$$\alpha(\sqrt{s}) = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{1}{1 + \ln(\sqrt{s}/s_0 + 1)} \right], \quad (5.71)$$

donde  $\sqrt{s_0} = 245(29)$  GeV/ $c^2$  es hallado mediante el ajuste de datos experimentales [5.15].

De esta manera, cuando elegimos trabajar en el límite termodinámico tenemos que la condición de percolación se da cuando  $\eta_c = 1.1279(1)$ , por lo que al resolver la igualdad  $\eta^{AA} = \eta_c$  obtenemos la energía de centro de masa  $\sqrt{s}$  mínima necesaria para la formación del plasma de quarks y gluones. En Fig. 5.12 se muestran las curvas  $\eta^{AA}(\sqrt{s})$  para diferentes colisiones cuya intersección con la recta  $\eta_c = 1.1279(1)$  nos proporciona el valor de  $\sqrt{s}$  (ver Tabla 5.2)

Por otro lado, cuando elegimos tomar en cuenta el tamaño de los sistemas, la condición de percolación depende del valor  $\eta_{cL}$  de cada tipo de colisión, el cual puede ser obtenido mediante el escalamiento presentado en ecuación (5.61) con sus respectivos valores  $m = 0.316$ ,  $\eta_c = 1.1279(1)$  y el exponente  $Z = -2/3\nu$ . En Fig. 5.13 se muestra la intersección de la curva  $\eta^{AA}$  con la recta  $\eta_{cL}$  para cada tipo de colisión de partículas. En Tabla 5.3 se resume la información obtenida.

Al comparar ambos casos se observa que para sistemas pequeños la diferencia en la energía de centro de masa al considerar o no el tamaño del sistema cambia sustancialmente (ver Tabla 5.4). En Fig. 5.14 se muestra el cociente  $\sqrt{s_c}/\sqrt{s_{cL}}$  donde se muestra que para sistemas pequeños vale aproximadamente 0.5, mientras que tiende a 1 para sistemas grandes.

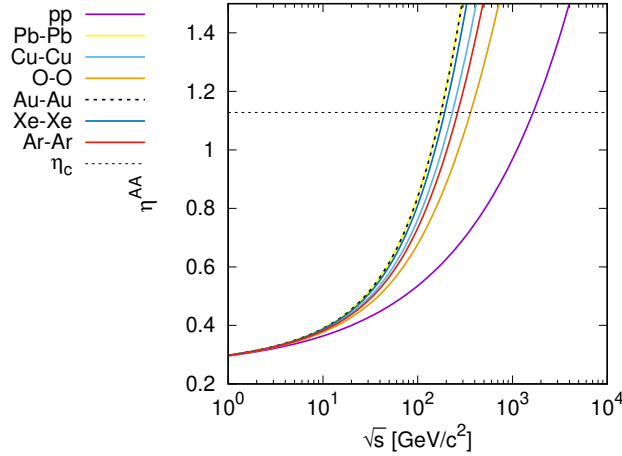


Figura 5.12: La intersección de la curva  $\eta^{AA}$  para cada proyectil con la recta punteada  $\eta_c = 1.1279(1)$ , proporciona la energía de centro de masa  $\sqrt{s}_c$ .

| Colisión | $A_M$ | $\sqrt{s}_c$ Gev/ $c^2$ |
|----------|-------|-------------------------|
| pp       | 1     | 1716                    |
| O-O      | 16    | 357                     |
| Ar-Ar    | 40    | 260                     |
| Cu-Cu    | 63    | 234                     |
| Xe-Xe    | 132   | 193                     |
| Au-Au    | 197   | 175                     |
| Pb-Pb    | 208   | 173                     |

Tabla 5.2: Estimación de  $\sqrt{s}$  para diferentes colisiones de partículas cuando se toma  $\eta_c$  en el límite termodinámico.

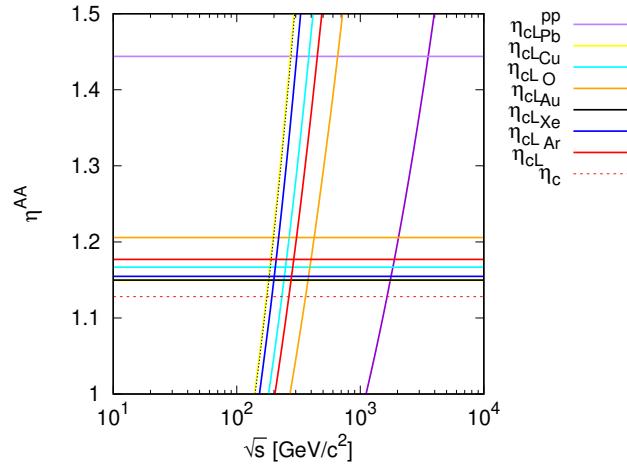


Figura 5.13: Se muestra  $\eta^{AA}$  para cada proyectil cuya intersección con la recta constante (del mismo color) corresponde a la energía de centro de masa  $\sqrt{s}_{cL}$  que depende del tipo de colisión.

### 5.3.4. Diagrama de fase para la formación del plasma de quarks y gluones en función de $\sqrt{s}$ y $A_M$ .

Finalmente, el resultado más importante de éste capítulo es un diagrama de fase para la formación del plasma de quarks y gluones en función de la energía de centro de masa  $\sqrt{s}$  y el número de nucleones

| Colisión | $A_M$ | $\sqrt{s_{cL}}$ GeV/ $c^2$ | $\eta_{cL}$ |
|----------|-------|----------------------------|-------------|
| pp       | 1     | 3700                       | 1.444       |
| O-O      | 16    | 420                        | 1.2057      |
| Ar-Ar    | 40    | 290                        | 1.1768      |
| Cu-Cu    | 63    | 246                        | 1.1668      |
| Xe-Xe    | 132   | 201                        | 1.1547      |
| Au-Au    | 197   | 184                        | 1.1497      |
| Pb-Pb    | 208   | 182                        | 1.1491      |

Tabla 5.3: Estimación de  $\sqrt{s_{cL}}$  para diferentes colisiones de partículas cuando se distingue  $\eta_{cL}$  de cada tipo de colisión.

| Colisión | $A_M$ | $\sqrt{s_c}$ GeV/ $c^2$ | $\sqrt{s_{cL}}$ GeV/ $c^2$ |
|----------|-------|-------------------------|----------------------------|
| pp       | 1     | 1716                    | 3700                       |
| OO       | 16    | 357                     | 420                        |
| ArAr     | 40    | 260                     | 290                        |
| CuCu     | 63    | 234                     | 246                        |
| XeXe     | 132   | 193                     | 201                        |
| AuAu     | 197   | 175                     | 184                        |
| PbPb     | 208   | 173                     | 182                        |

Tabla 5.4: Tabla comparativa entre la energía de centro de masa  $\sqrt{s_c}$  mínima para la formación del plasma de quarks y gluones cuando  $\eta_c^{AA} = 1.1279$  y la energía de centro de masa  $\sqrt{s_{cL}}$  mínima considerando efectos de sistema finito en  $\eta_{cL}^{AA}$  para cada proyectil.

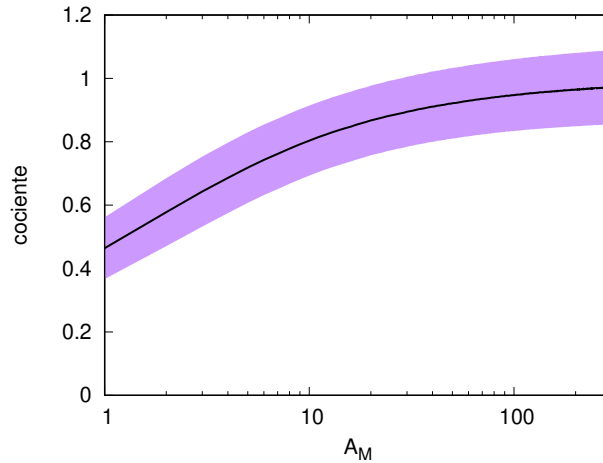


Figura 5.14: Se observa que el cociente  $\sqrt{s_c}/\sqrt{s_{cL}}$  decrece cuando  $A_M$  disminuye, por lo que el efecto de sistema finito es más notorio para colisiones pp que para colisiones Au-Au o Pb-Pb.

$A_M$  de los proyectiles.

En Fig. 5.15 se muestra el diagrama de fase. La línea continua representa la curva crítica de la energía de centro masa  $\sqrt{s_{cL}}$  mínima requerida que toma en cuenta el tamaño de los sistemas, mientras que la curva discontinua no. Además, se identifica con una línea punteada horizontal la energía de centro de masa  $\sqrt{s} = 200$  GeV/ $c^2$  que corresponde a las energías alcanzadas en RHIC. En el gráfico se ubican colisiones pp, O-O, Ar-Ar, Cu-Cu, Xe-Xe, Au-Au y Pb-Pb a diferentes energías. En particular resaltamos la concordancia del diagrama de fase con los datos experimentales de la colisión pp a  $\sqrt{s_c} = 5.02$  TeV/ $c^2$  y las colisiones Au-Au y Pb-Pb a energía de  $\sqrt{s_c} = 200$  GeV/ $c^2$ , para las cuales se ha reportado la

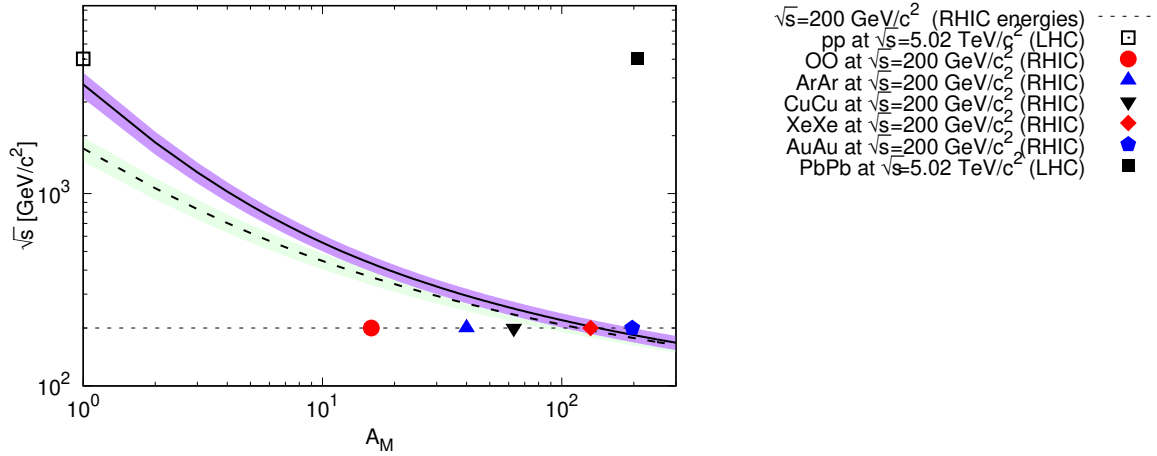


Figura 5.15: Energía de centro de masa  $\sqrt{s}_c$  en el límite termodinámico (línea sólida) y  $\sqrt{s}_c$  (línea discontinua) que distingue el tipo de colisión, con sus respectivas franjas de error. Se ilustran diferentes colisiones.

formación del plasma de quarks y gluones. Otro hecho importante es que dicho diagrama explica porqué en los experimentos realizados en LHC para colisiones Pb-Pb a  $\sqrt{s}_c = 2.76 \text{ TeV}/c^2$  y  $\sqrt{s}_c = 5.02 \text{ TeV}/c^2$  se afirma la formación del QGP.



# Bibliografía

- [5.1] I. Bautista, C. Pajares, and J. E. Ramírez, “String percolation in aa and p+ p collisions,” *Revista mexicana de física*, vol. 65, no. 3, pp. 197–223, 2019.
- [5.2] T. Biro, H. B. Nielsen, and J. Knoll, “Colour rope model for extreme relativistic heavy ion collisions,” *Nuclear Physics B*, vol. 245, pp. 449–468, 1984.
- [5.3] J. D. De Deus and C. Pajares, “Percolation of color sources and critical temperature,” *Physics Letters B*, vol. 642, no. 5-6, pp. 455–458, 2006.
- [5.4] A. Bialas and W. Czyz, “Conversion of color field into qq matter in the central region of high-energy heavy ion collisions,” *Nuclear Physics B*, vol. 267, no. 1, pp. 242–252, 1986.
- [5.5] M. A. Braun, F. del Moral, and C. Pajares, “Percolation of strings and the relativistic energy data on multiplicity and transverse momentum distributions,” *Phys. Rev. C*, vol. 65, p. 024907, Jan 2002.
- [5.6] M. Braun and C. Pajares, “Transverse momentum distributions and their forward-backward correlations in the percolating color string approach,” *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 23, p. 4864, 2000.
- [5.7] A. N. Mishra, D. Sahu, and R. Sahoo, “Jet transport coefficient at the large hadron collider energies in a color string percolation approach,” *Physics*, vol. 4, no. 1, pp. 315–328, 2022.
- [5.8] M. Braun, J. D. de Deus, A. Hirsch, C. Pajares, R. Scharenberg, and B. Srivastava, “De-confinement and clustering of color sources in nuclear collisions,” *Physics Reports*, vol. 599, pp. 1–50, 2015.
- [5.9] M. Braun and C. Pajares, “Multiplicities, transverse momenta and their correlations from percolating colour strings,” *Multiparticle Production*, p. 396, 1999.
- [5.10] A. Bialas, “Fluctuations of the string tension and transverse mass distribution,” *Physics Letters B*, vol. 466, no. 2-4, pp. 301–304, 1999.
- [5.11] H. Dosch, “Gluon condensate and effective linear potential,” *Physics Letters B*, vol. 190, no. 1-2, pp. 177–181, 1987.
- [5.12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. US Government printing office, 1964.
- [5.13] S. Mertens and C. Moore, “Continuum percolation thresholds in two dimensions,” *Physical Review E*, vol. 86, no. 6, p. 061109, 2012.
- [5.14] K. S. Krane, *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons, 1991.
- [5.15] I. Bautista, J. G. Milhano, C. Pajares, and J. D. de Deus, “Multiplicity in pp and aa collisions: the same power law from energy–momentum constraints in string production,” *Physics Letters B*, vol. 715, no. 1-3, pp. 230–233, 2012.



## Capítulo 6

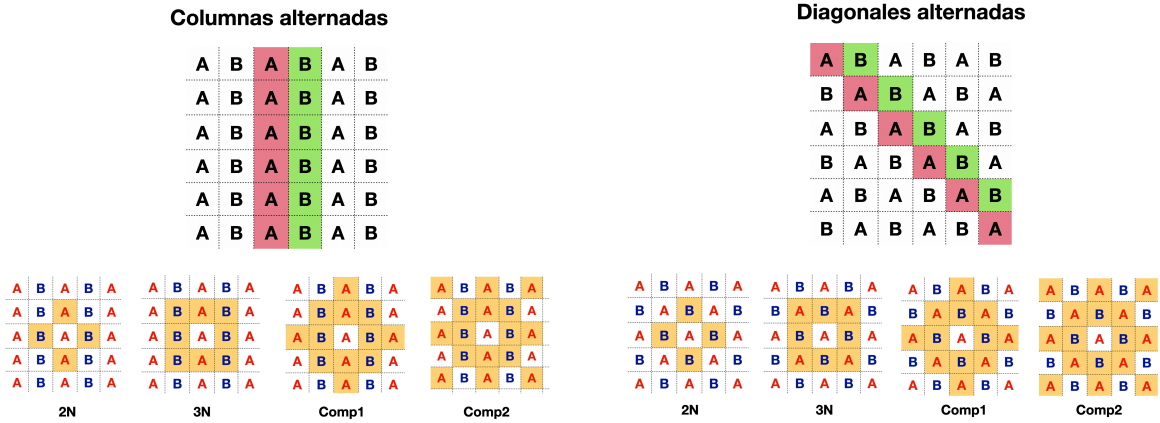
# Conclusiones y perspectivas

La teoría de percolación es una herramienta útil para el análisis y estudio de diversos fenómenos. En particular, en éste trabajo desde la perspectiva de la teoría de percolación en dos dimensiones fue posible estudiar la propagación de enfermedades en plantaciones, la dispersión de enfermedades favorecidas por la movilidad e interacción humana y la formación del plasma de quarks y gluones en colisiones pp y AA. Los estudios y análisis antes mencionados fueron realizados implementando la misma metodología, reinterpretando de manera adecuada el significado de las observables en cada marco de referencia, en especial el del umbral de percolación. La aplicación de la teoría de percolación en fenómenos de diversa índole y escala fue factible debido a que las observables de interés en cada contexto surgieron como resultado de la colectividad de los elementos participantes. La realización del presente trabajo de tesis deja ver que la teoría de percolación es un campo fértil de investigación que permea aspectos sociales, biológicos, ecológicos, etc., a grandes y pequeñas escalas. El formalismo desarrollado en este trabajo abre una amplia gama de perspectivas y trabajo a futuro que más adelante se detallan.

El primer problema abordado concierne a la propagación de enfermedades en plantaciones. En éste modelo una plantación monocultivo fue modelada como una red cuadrada, donde la interacción entre plantas y patógenos adyacentes dieron lugar a vecindades particulares que extienden la conexión de las plantas, favoreciendo la rápida formación de racimos. En éste contexto, la herramienta desarrollada permitió determinar los umbrales de percolación, los cuales fueron comparados con los obtenidos en el modelo propuesto en Ref. [6.1]. De ésta comparación se concluye que el sistema con fracción de sitios complejos puede modelar los que se propone en Ref. [6.1] para algún régimen del parámetro  $I$ . Se planea a corto plazo la escritura de un artículo para reportar dichas estimaciones y resultados. Como continuación de ésta línea de investigación se busca estudiar los cambios que sufren las definiciones de vecindad  $2N$ ,  $3N$ ,  $Comp1$  y  $Comp2$  en un sistema de siembra tipo milpa con columnas y diagonales alternadas, respectivamente (ver Figs. 6.1a y 6.1b). En consecuencia los umbrales de percolación se verían modificados para cada una de las 10 combinaciones ilustradas en Fig. 6.2. Otras modificaciones que pueden ser consideradas es trabajar sobre una red triangular, la cual modelaría el sistema de plantación conocido como *tresbolillo*.

En lo que respecta a la aplicación de la teoría de percolación sobre las redes complejas se analizó la propagación de la enfermedad COVID-19 en el Estado de Puebla como un fenómeno percolante para establecer estrategias sanitarias de contención. Para esto se estimó el umbral de percolación de nodos o enlaces removidos de la red de conexión para evitar la extensa dispersión del virus. Las estimaciones obtenidas fueron reportadas en el artículo *Estrategias de movilidad basadas en la teoría de percolación para evitar la diseminación de enfermedades: COVID-19*, publicado en la Revista Mexicana de Física [6.2]. Como trabajo a futuro se busca incorporar en la red de conexión del Estado de Puebla *fallos en cascada*. Este concepto está muy relacionado con la resiliencia de la red, y se distingue en que cada nodo tiene una probabilidad crítica de fallar y desencadenar fallos en los nodos vecinos. La propuesta que presentamos es asociar la probabilidad crítica de fallo en cada nodo con la fracción de habitantes vacunados en cada municipio. Así, un alto número de personas vacunas implica la baja probabilidad de que el municipio en cuestión propicie o continúe el proceso de propagación del virus.

Finalmente, la aplicación de la teoría de percolación en el contexto de la física de altas energías bajo el modelo de percolación de cuerdas de color resulta ser una herramienta fenomenológica muy exitosa en la descripción de la formación del plasma de quarks y gluones y en la reproducción de los datos



(a) Modelo de siembra con columnas alternadas propuesto en Ref. [6.1]. En la parte inferior se muestran las vecindades a) 2N, b) 3N, c) Comp1 y c) Comp2 de una celda con planta tipo A, la cual suponemos es más susceptible que la planta tipo B.

(b) Modelo de siembra con diagonales alternadas propuesto en Ref. [6.1]. En la parte inferior se muestran las vecindades a) 2N, b) 3N, c) Comp1 y c) Comp2 de una celda con planta tipo A, la cual suponemos es más susceptible que la planta tipo B.

Figura 6.1: Propuestas de siembra alternada (Ref. [6.1]) con dos tipos de plantas: A (susceptible) y B (resistente). Para cada modelo se ilustra las definiciones de vecindad definidas en el Capítulo 3. El cambio en la estructura de la red reduce los sitios por donde el patógeno puede fluir.

experimentales. En este línea de investigación fue posible determinar la energía de centro de masa mínima necesaria para la formación del QGP considerando los efectos de sistema finito. Los resultados obtenidos en el Capítulo 5 fueron publicados en la revista Physical Review D como Letter bajo el título *Percolation leads to finite-size effects on the transition temperature and center-of-mass energy required for quark-gluon plasma formation* [6.3]. En cuanto al trabajo a futuro se pretende explorar algunas modificaciones viables del modelo de percolación de cuerdas de color. En particular, tenemos interés en considerar un modelo de cuerdas de color con perfiles de densidad no homogéneo, la fenomenología del modelo que considera cuerdas de color con interacción repulsiva, y buscar una densidad de probabilidad para la tensión de las cuerdas que sea capaz de reproducir los datos experimentales en la distribución de momento transversal de las partículas producidas en las colisiones efectuadas en la física de altas energías.

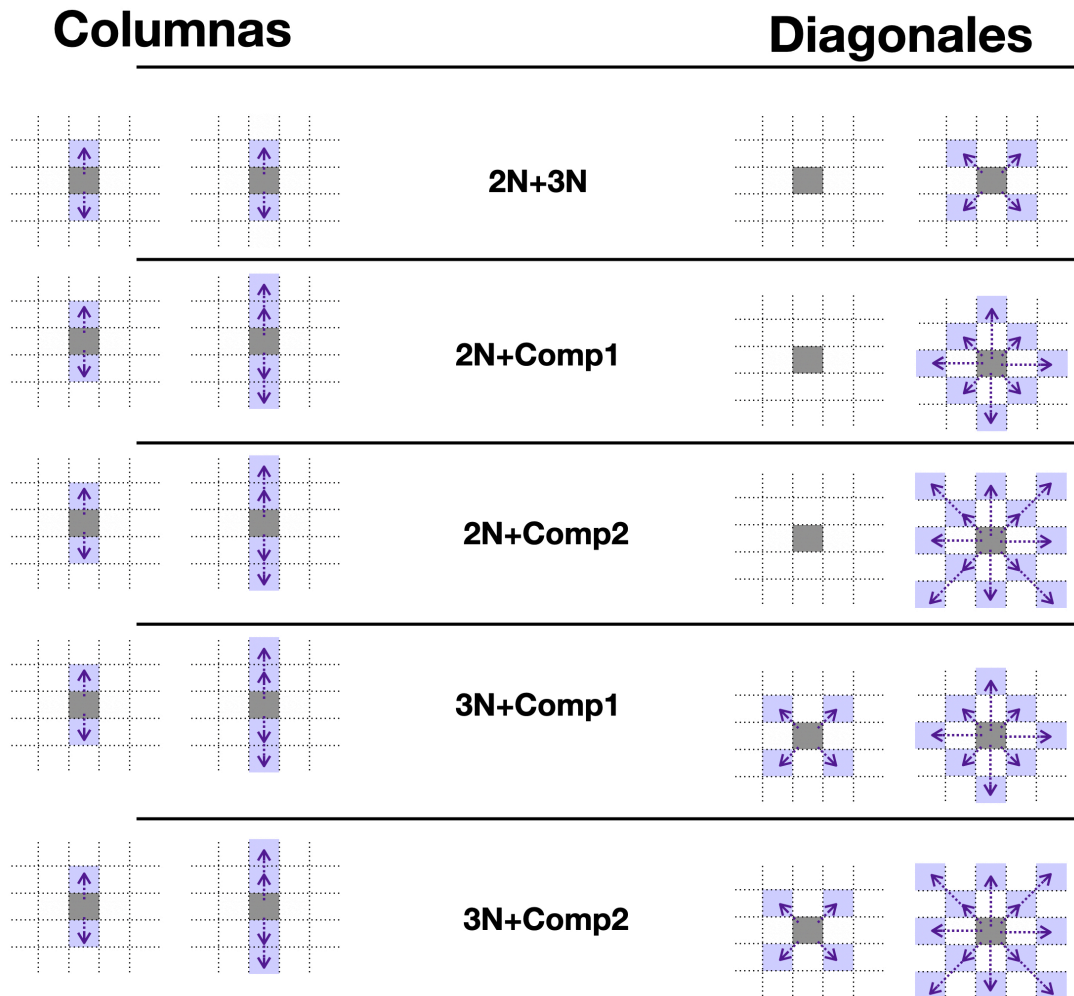


Figura 6.2: Modificaciones en las definiciones de vecinos cercanos 2N, 3N, Comp1 y Comp2 cuando en la red la planta resistente corta los caminos por donde el patógeno puede avanzar.



# Bibliografía

- [6.1] D. Rosales Herrera, J. E. Ramírez, M. Martínez, H. Cruz-Suárez, A. Fernández Téllez, J. F. López-Olguín, and A. Aragón García, “Percolation-intercropping strategies to prevent dissemination of phytopathogens on plantations,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 31, no. 6, p. 063105, 2021.
- [6.2] J. E. Ramírez, D. R. Herrera, J. V. Castro, B. Díaz, M. I. Martínez, P. V. Juárez, and A. F. Téllez, “Estrategias de movilidad basadas en la teoría de percolación para evitar la diseminación de enfermedades: Covid-19,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 68, no. 1 Jan-Feb, pp. 011701–1, 2022.
- [6.3] J. T. García, D. R. Herrera, J. E. Ramírez, A. F. Téllez, and C. Pajares, “Percolation leads to finite-size effects on the transition temperature and center-of-mass energy required for quark-gluon plasma formation,” *Physical Review D*, vol. 106, no. 3, p. L031503, 2022.

## Estrategias de movilidad basadas en la teoría de percolación para evitar la diseminación de enfermedades: COVID-19

D. Rosales Herrera<sup>a</sup>, J. E. Ramírez<sup>b,\*</sup>, J. Velázquez-Castro<sup>a,†</sup>, B. Díaz<sup>c,d</sup>,  
M. I. Martínez<sup>a</sup>, P. Vázquez Juárez<sup>e</sup> y A. Fernández Téllez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,  
Apartado Postal 165, 72000 Puebla, Pue., México.

† [jorgevc@fcfm.buap.mx](mailto:jorgevc@fcfm.buap.mx)

<sup>b</sup>Centro de Agroecología, Instituto de Ciencias, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,  
Apartado Postal 165, 72000 Puebla, Pue., México.

Consejo de Ciencia y Tecnología del estado de Puebla,

Privada B poniente de la 16 de Septiembre 4511, 72534, Puebla, Pue., México.

\*e-mail: [jhony.ramirezcanino@viep.com.mx](mailto:jhony.ramirezcanino@viep.com.mx)

<sup>c</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid.

Avenida de la Universidad 30, 28911 Leganés, España.

<sup>d</sup>Grupo de Teorías de Campos y Física Estadística, Instituto Gregorio Millán (UC3M),

Unidad Asociada al Instituto de Estructura de la Materia, CSIC, Serrano 123, 28006 Madrid, España.

<sup>e</sup>Facultad de Contaduría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,

Apartado Postal 165, 72000 Puebla, Pue., México.

Received 12 May 2021; accepted 3 June 2021

La movilidad de las personas es uno de los principales factores que propician la propagación espacial de epidemias. Las medidas de control epidemiológico basadas en la restricción de movilidad son generalmente poco populares y las consecuencias económicas pueden llegar a ser muy grandes. Debido a los altos costos de estas medidas, es de gran relevancia tener estrategias globales que optimicen las medidas minimizando los costos. En este trabajo, se calcula el umbral de percolación de la propagación de enfermedades en redes. De manera particular, se encuentra el número de caminos a restringir y localidades que tienen que ser aisladas para limitar la propagación global de COVID-19 en el Estado de Puebla, México. Simulaciones computacionales donde se implementan las medidas de restricción de movilidad entre los diferentes municipios, junto con las medidas de confinamiento, muestran que es posible reducir un 94 % de la población afectada comparado con el caso en el que no se implementa ninguna medida. Esta metodología puede ser aplicada a distintas zonas para ayudar a las autoridades de salud en la toma de decisiones.

*Descriptor:* Teoría de percolación; umbral de percolación; propagación de enfermedades; COVID-19.

Human mobility is an important factor in the spatial propagation of infectious diseases. On the other hand, the control strategies based on mobility restrictions are generally unpopular and costly. These high social and economic costs make it very important to design global protocols where the cost is minimized and effects maximized. In this work, we calculate the percolation threshold of the spread in a network of a disease. In particular, we found the number of roads to close and regions to isolate in the Puebla State, Mexico, to avoid the global spread of COVID-19. Computational simulations taking into account the proposed strategy show a potential reduction of 94 % of infections. This methodology can be used in broader and different areas to help in the design of health policies.

*Keywords:* Percolation theory; percolation threshold; disease propagation; COVID-19.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.68.011701>

### 1. Introducción

A finales del mes de diciembre de 2019 se supo de la aparición de un nuevo virus, SARS-CoV-2, de la familia corona, que inició su propagación en un mercado de animales de Wuhan, Hubei, China Central. Este virus provoca una enfermedad respiratoria, denominada COVID-19, altamente contagiosa y de alta letalidad en individuos con comorbilidades, de edad avanzada o con problemas respiratorios [1, 2]. La enfermedad se propagó en aquella región del país asiático y en pocos meses se registró la presencia de este virus en todo nuestro planeta, convirtiéndose en una pandemia que ha causado la muerte de cientos de miles de seres humanos

en todos los continentes. Por lo tanto, es necesario estudiar la situación actual y profundizar en posibles estrategias que pueden ayudar a mitigar la propagación espacial de este virus y otras enfermedades. Para esto, las autoridades de diferentes países han implementado medidas locales de confinamiento, en donde se limita hasta cierto grado la movilidad de las personas. Sin embargo, éstas medidas han sido impuestas de manera general y al parecer sin tomar en cuenta el tipo de conexión que hay entre los poblados. Los resultados de estas medidas han sido variados y también los analizaremos para algunos países.

## Percolation leads to finite-size effects on the transition temperature and center-of-mass energy required for quark-gluon plasma formation

J. C. Texca García,<sup>1</sup> D. Rosales Herrera<sup>1</sup>, J. E. Ramírez<sup>1,2,3,\*</sup>, A. Fernández Téllez<sup>1</sup>, and C. Pajares<sup>4,†</sup>

<sup>1</sup>*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal 165, 72000 Puebla, Puebla, Mexico*

<sup>2</sup>*Centro de Agroecología, Instituto de Ciencias, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal 165, 72000 Puebla, Puebla, Mexico*

<sup>3</sup>*Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla, Privada B poniente de la 16 de Septiembre 4511, 72534 Puebla, Puebla, Mexico*

<sup>4</sup>*Departamento de Física de Partículas and Instituto Galego de Física de Altas Enerxías, Universidad de Santiago de Compostela, E-15782 Santiago de Compostela, España*

 (Received 25 February 2022; accepted 4 August 2022; published 25 August 2022)

We investigate the finite-size effects on the transition temperature associated with the quark-gluon plasma (QGP) formation. From a percolation perspective, the onset of the QGP in high-energy collisions occurs when the spanning cluster of color strings emerges. The principal result presented here is the finite-size effects on the transition temperature expressed as a power law in terms of the nucleon number. We found that the transition temperature is higher for small systems than for large ones. It means that minimal triggering conditions events in pp collisions require about 20 times higher energies than AuAu-PbPb collisions. We also estimate the center-of-mass energy required for the QGP formation as a function of the nucleon number. Our results are consistent with the minimal center-of-mass energies at which the QGP has been observed.

DOI: [10.1103/PhysRevD.106.L031503](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.L031503)

In high energy physics, multiparticle production is usually described in terms of color strings stretched between the projectile and target, which decay into new strings through color neutral  $q\bar{q}$  pairs production and subsequently hadronize to produce the observed hadrons [1,2]. Color strings may be viewed as small circular areas distributed in the transverse plane (of the collision) filled with a color field created by colliding partons that interact when they overlap. With the increasing energy and size of the colliding system, the number of strings grows. They start to overlap, forming clusters in the transverse plane, in a similar way to the phenomena studied by two-dimensional percolation theory [3]. At one critical density, a giant cluster of color strings appears where the quarks are no more confined. This interpretation marks the percolation phase transition and the onset of the quark-gluon plasma (QGP) [4]. A first experimental evidence of the QGP was observed in AuAu collisions at RHIC that later was confirmed in PbPb

collisions at LHC, through the study of all the harmonics of the azimuthal distributions, showing the existence of a collective motion of quarks and gluons [5–7]. Furthermore, the data analysis for pp and pA collisions at LHC [8] and d-Au and <sup>3</sup>He-Au collisions at RHIC [9] conclude that in these experiments, most properties observed in heavy-ion collisions are also present.

The general result due to the SU(3) random summation of color charges of overlapped strings is a reduction of the multiplicity and an increase of the string tension, hence an increase of the mean transverse momentum [10]. For a cluster formed by  $n$  strings, it is found that its multiplicity  $\mu_n$  and average transverse momentum square  $\langle p_T^2 \rangle_n$  are given by [11]

$$\mu_n = (nS_n/S_1)^{1/2}\mu_1, \quad (1)$$

$$\langle p_T^2 \rangle_n = (nS_1/S_n)^{1/2}\langle p_T^2 \rangle_1, \quad (2)$$

where  $S_1 = \pi r_0^2$  is the transverse area of the strings, and  $S_n$  the area covered by the cluster,  $\mu_1$  and  $\langle p_T^2 \rangle_1$  are the multiplicity and average transverse momentum squared for a single string, respectively. Here  $r_0$  is the radius of the string and takes values between 0.2 and 0.3 fm. Taking into account fluctuations of the number of strings at a fixed density, the average of  $nS_1/S_n$  is

\*jhony.ramirezcanino@viep.com.mx

†pajares@fpaxp1.usc.es

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP<sup>3</sup>.