



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Posgrado en Física Aplicada

**Características y propiedades de un haz
parcialmente coherente y parcialmente polarizado
en sistemas ópticos de una y dos lentes**

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias
(Física Aplicada)**

como requisito para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias de la Física Aplicada

por

Paulo César Romero Soria

asesor

Dr. Andrey S. Ostrovsky

Puebla Pue.
Febrero de 2015



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

**Características y propiedades de un haz
parcialmente coherente y parcialmente polarizado
en sistemas ópticos de una y dos lentes**

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias
(Física Aplicada)**

como requisito para la obtención del grado de
Doctor en Ciencias de la Física Aplicada

por

Paulo César Romero Soria

asesor

Dr. Andrey S. Ostrovsky

Puebla Pue.
Febrero de 2015

**Título: Características y propiedades de un haz
parcialmente coherente y parcialmente polarizado en
sistemas ópticos de una y dos lentes
Estudiante: Paulo César Romero Soria**

COMITÉ

Dr. Cruz Meneses Fabián
Presidente

Dra. Rosario Pastrana Sanchez
Secretario

Dr. Luis Arevalo Aguilar
Vocal

Dr. Carlos Robledo Sánchez
Vocal

Dr. Andrey S. Ostrovsky
Asesor

Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	V
Índice de tablas	VII
1. Introducción	7
2. Fundamentos de la teoría unificada de coherencia y polarización	11
2.1. Campo electromagnético y su descripción estadística	11
2.2. Grado electromagnético de coherencia	13
2.3. Grado electromagnético de polarización	14
2.4. Representación en modos coherentes del campo electromagnético	15
2.5. Fuente electromagnética modelo Schell-Gaussiano	18
2.6. Conclusiones	21
3. Sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada	23
3.1. Enfoque bilineal en la representación de un sistema óptico.	23
3.2. Sistemas bilineales en óptica	24
3.3. Conclusiones	27
4. Efecto de la coherencia y la polarización en la formación de imagen y en el espectro del objeto	29
4.1. Cambios de coherencia y polarización en un sistema óptico	29
4.2. Resolución espacial de un sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada	29
4.3. Resolución en frecuencia de un sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada	38
4.4. Conclusiones	43
5. Simulación de un sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada	45
5.1. Representación en modos coherentes de un sistema bilineal	45
5.2. Algoritmo rápido para transformadas bilineales en óptica	47

5.3. Ejemplo de simulación del algoritmo rápido para transformadas bilineales en óptica	49
5.4. Representación alternativa en modos coherentes	51
5.5. Ejemplo de simulación de la Representación alternativa en modos coherentes	55
5.6. Conclusiones	61
6. Conclusiones Generales	63
Apéndice	64
A. Publicaciones del estudiante	67
A.1. Revistas Indizadas	67
A.2. Congresos	67
A.3. Artículos en memorias de congresos:	68
Bibliografía	69

Índice de figuras

3.1. Sistema óptico con una sola lente.	24
4.1. Sistema óptico telecentrico (ambos lentes tienen la misma distancia focal f).	31
4.2. Imagen de dos pinholes iluminados incoherentemente, graficados en coordenadas normalizadas. Los puntos en negrita muestran la localización de los pinholes correspondientes al límite del criterio de resolución de Rayleigh	36
4.3. Solución gráfica de la Ec. (4.20) para el caso de polarización arbitraria (a) y para el caso de valores diferentes para el grado de polarización (b). La numeración de las curvas corresponde a la misma numeración de los parámetros correspondientes dados en el texto. Las raíces de la Ec. (4.20) son mostradas con puntos en negrita y sus valores numéricos son mostrados a la derecha de la gráfica.	37
4.4. Forma del espectro dada por la ecuación 4.	38
4.5. Forma del espectro dada por la Ec. (4.33).	41
4.6. Dependencia de la resolución en frecuencia espacial normalizada del grado global de coherencia (a) y del grado de polarización (b) del campo de iluminación.	44
5.1. Estimación del esfuerzo computacional C en función del número efectivo de modos coherentes \aleph : 1 esfuerzo computacional de acuerdo con la Ec. (5.9); 2 cómputo de acuerdo con la Ec. (5.12); 3 cómputo de acuerdo con la Ec. (5.15)	49
5.2. Error en función del número M . En la gráfica se representan los casos para $\gamma = 0,2$, $\gamma = 0,5$ y $\gamma = 0,8$	61

Índice de tablas

5.1. Resultados de los cálculos para $\gamma = 0,2$.	58
5.2. Resultados de los cálculos para $\gamma = 0,5$.	59
5.3. Resultados de los cálculos para $\gamma = 0,8$.	60

A mis padres: Fernando Romero Valadéz y Azucena Soria Gutiérrez, por su amor y apoyo incondicional a lo largo de todos estos años. A mi hermano por sus invaluable ayuda.

Agradecimientos

Gracias a la BUAP por la oportunidad brindada de crecimiento profesional y al CONACYT por el apoyo económico. A los asesores y miembros del jurado por su ayuda y consejos.

Resumen

Durante la última década se han hecho esfuerzos considerables para desarrollar la teoría de coherencia parcial para el caso de campos electromagnéticos vectoriales ([22],[7],[1],[39]). Uno de los problemas centrales de esta teoría es el análisis de sistemas ópticos (incluyendo el espacio libre, como un caso particular) con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada. Los efectos que tienen la correlación de la iluminación en el proceso de formación de imagen en sistemas ópticos ha sido estudiada y desarrollada para el caso escalar ([1],[7],[5],[18]). En el caso vectorial, ha habido diversos estudios que toman en cuenta los cambios del grado de coherencia y de polarización en propagación de un campo electromagnético en el espacio y en sistemas ópticos. ([9],[42],[38],[20],[40],[14],[33],[12],[43],[3],[4],[2],[17],[19],[10],[13]). Sin embargo, los efectos que tienen los grados de coherencia y polarización en la resolución de sistemas ópticos formadores de imagen no ha sido reportada. Es nuestro objetivo reportar dichos efectos para diversos sistemas ópticos, teniendo en cuenta que ya se tiene con un método para generar la fuente parcialmente coherente y parcialmente polarizada ([27]).

Abstract

During the last decade there have been a lot of effort to develop a vectorial theory of partial coherence ([22],[7],[1],[39]). One of the main problems of this theory is the analysis of optical systems (including the free space, as a particular case) with partial coherence and partial polarized illumination. The effects of correlation in the process of formation of the image and spectra in the optical systems its well known for the scalar case ([1],[7],[5],[18]). For the vectorial case, have been many studies that take in account the changes in the degree of coherence and the degree of polarization for a electromagnetic field in propagation in the space and optical systems ([9],[42],[38],[20],[40],[14],[33],[12],[43],[3],[4],[2],[17],[19],[10],[13]). However, the effects of the degree of coherence and the degree of polarization in the resolution of optical systems that form the image and spectra of a object have not been reported yet. Its the aim of the present job to consider such effects, taking in consideration that is known how to generate such a source with a partial degree of coherence and partial degree of polarization ([27]).

Capítulo 1

Introducción

Durante la última década en Óptica se observa un gran interés en la teoría universal de coherencia y polarización de campos electromagnéticos cuyo inicio fue propuesto por F. Gori y E. Wolf [[9],2]. La revisión de los conceptos básicos de esta teoría puede ser encontrada en el trabajo recientemente publicado por Ostrovsky *et al* [3]. Las numerosas publicaciones sobre la teoría unificada de coherencia y polarización pueden ser agrupadas de la siguiente manera.

En las publicaciones del primer grupo la atención principal está enfocada en la definición del grado de coherencia electromagnética (vectorial) y su relación con el grado de polarización. Originalmente fueron propuestas diversas definiciones [1, 4-7] las cuales a veces se encuentran en contradicción entre sí y con la definición del grado de coherencia escalar [3]. Como resultado, hasta ahora no existe una definición única, universalmente admitida, para el grado de coherencia electromagnética. Según nuestro parecer una definición adecuada tiene que elegirse tomando en cuenta el contexto específico del problema en consideración.

En las publicaciones del segundo grupo, la atención está concentrada en los cambios del grado de coherencia y del grado de polarización en propagación del campo electromagnético. Particularmente, fue mostrado que los grados de coherencia y polarización en general sufren cambios incluso en propagación del campo electromagnético en el espacio libre [8-10]. En el contexto de la propuesta presente una atención especial merece el trabajo de Hanson *et al.* [12] donde se consideran los cambios del grado de coherencia y del grado de polarización en propagación del campo electromagnético en un sistema óptico arbitrario.

El tercer grupo de publicaciones aborda el problema de la representación en modos coherentes de campos electromagnéticos. Para el caso de campos ópticos escalares la teoría de representación en modos coherentes formulada por E. Wolf [12] encontró diversas aplicaciones en la descripción de los procesos y sistemas ópticos estadísticos [13]. Para el caso de campos electromagnéticos (el caso vectorial) la teoría de representación en modos coherentes fue adaptada por primera vez por F. Gori *et al.*[14] y posteriormente desarrollada por J. Tervo *et al.* [5] y K. Kim y E. Wolf [15]. Pero todavía las aplicaciones correspondientes no han sido reportadas.

Las publicaciones del cuarto grupo consideran el problema de la generación experimental de fuentes electromagnéticas secundarias con características estadísticas dadas. Como

se sabe [16,17], este problema puede ser resuelto con base en dos enfoques opuestos: (1) iniciando de una fuente primaria completamente incoherente y no-polarizada, tratar de obtener el resultado deseado a cuenta de los cambios de coherencia y polarización en propagación a través del espacio libre. O bien, (2) iniciando de una fuente primaria completamente coherente y polarizada, tratar de obtener el resultado deseado a cuenta de los cambios de coherencia y polarización en transmisión a través de una pantalla aleatoria. El primer enfoque fue utilizado en el artículo [18], mientras que el segundo enfoque se utilizó en los artículos [19,20,21-23].

En la presente tesis tenemos la intención de realizar el análisis teórico y en simulación de sistemas ópticos con iluminación electromagnética parcialmente coherente y parcialmente polarizada. Tal análisis ya ha sido realizado parcialmente en la referencia [11] mencionada en los párrafos anteriores. Sin embargo, dicha referencia no toma en cuenta al objeto como una parte integrante, o atributo indispensable, en consideración de prácticamente cualquier sistema óptico, enfocando el interés principal sobre los cambios de los grados de coherencia y polarización del campo electromagnético en propagación a través del sistema. Por esta razón los resultados del análisis reportado tienen un significado esencialmente académico. Desde el punto de vista de la práctica parece mucho más importante realizar el análisis del sistema óptico enfocando el interés principal en la influencia de la coherencia y polarización de la iluminación aplicada en la calidad de la transformación del objeto. Hasta el presente, tal planteamiento es nuevo y los resultados correspondientes todavía no han sido reportados. Los primeros pasos en este rumbo han sido realizados por Ostrovsky et al en el trabajo [24], donde se considera el efecto de la coherencia y la polarización de la iluminación electromagnética sobre la resolución de la imagen en un sistema óptico.

El análisis de sistemas ópticos con iluminación electromagnética parcialmente coherente y parcialmente polarizada y el objeto arbitrario en general representa un problema matemático muy complicado. Una simplificación considerable del problema puede ser lograda utilizando la representación en modos coherentes del campo de iluminación, mencionada anteriormente. Asimismo, la representación en modos coherentes puede ser útil en la simulación de sistemas ópticos con iluminación electromagnética parcialmente coherente y parcialmente polarizada, permitiendo reducir considerablemente los esfuerzos computacionales. Sin embargo, es necesaria una investigación exhaustiva de las posibilidades que nos brinda la representación en modos coherentes. Los primeros pasos en este rumbo ya han sido elaborados en los trabajos ([29],[30]).

Objetivo

Desarrollar y comprobar mediante métodos de simulación la teoría de análisis de sistemas ópticos con iluminación electromagnética parcialmente coherente y parcialmente polarizada, orientada a la evaluación de la calidad de la transformación del objeto por el sistema óptico.

Metas

1. Investigar la teoría unificada de coherencia y polarización.

2. Investigar la teoría de sistemas bilineales en óptica. Aplicar dicha teoría en la representación en modos coherentes para hallar el resultado final de un sistema óptico.
3. Investigar el efecto de coherencia y polarización de una fuente de iluminación electromagnética sobre la resolución espacial y resolución en frecuencia en un sistema óptico de formación de imagen, y en un sistema óptico de formación del espectro del objeto, respectivamente.
4. Generalizar la técnica de representación alternativa en modos coherentes basada en los resultados de mediciones radiométricas y aplicarla a la simulación computacional de sistemas ópticos con iluminación electromagnética parcialmente coherente y polarizada.
5. Publicar los resultados obtenidos en revistas indizadas y presentarlos en congresos internacionales y nacionales.

La presente tesis está dividida en 6 capítulos. El capítulo 2 se enfoca en dar una descripción de la teoría unificada de coherencia y polarización elaborada recientemente por E. Wolf. Se presentan las definiciones para la matriz de densidad espectral cruzada, junto con las definiciones del grado de coherencia y el grado de polarización para un campo electromagnético. De igual manera, se estudia la representación en modos coherentes para el mismo caso vectorial. El capítulo 3 aborda el estudio de sistemas bilineales para el caso vectorial. En el capítulo 4 se estudia cuál es la influencia del grado de coherencia y el grado de polarización en la calidad de la imagen y en el espectro para un sistema óptico telecéntrico y un sistema óptico que realiza la transformada de Fourier. Dichos aspectos en la calidad final de un sistema óptico aún no han sido reportados en la literatura para el caso de un campo electromagnético. El trabajo presentado ha tenido resultado dos publicaciones en la revista de arbitraje internacional *Optics Letters* (véase [23] y [24]).

Esta tesis está realizada dentro del marco del proyecto de investigación financiado por CONACYT con número de registro **165142**.

Capítulo 2

Fundamentos de la teoría unificada de coherencia y polarización

La teoría de coherencia parcial (particularmente en el dominio del espacio frecuencia) es ampliamente conocida para el caso escalar. Por supuesto, sabemos que una onda luminosa en propagación, para su correcta descripción, necesita de una expresión vectorial (en adelante supondremos que dicha descripción puede basarse únicamente en el campo eléctrico \mathbf{E} , el campo magnético puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Maxwell). Una teoría de coherencia parcial que abarque el caso de un campo electromagnético; es decir, un campo \mathbf{E} (cuyas componentes supondremos que están a largo del eje x y y), ha sido desarrollada sólo hasta hace una década. Será el propósito del presente capítulo dar una breve descripción de dicha teoría.

2.1. Campo electromagnético y su descripción estadística

Supongamos que se tiene un campo electromagnético \mathbf{E} que es aleatorio, homogéneo y estacionario; además, supondremos que el haz se propaga en la dirección del eje z . De acuerdo con la teoría de coherencia en el espacio de frecuencias [19], dicho campo en cualquier punto \mathbf{x} (de aquí en adelante cualquier expresión de la forma \mathbf{x} denota un punto en el plano de la forma (x, y)) en algún plano $z = cte$ y para cualquier valor de frecuencia ν puede ser caracterizado por el siguiente ensamble estadístico

$$\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, \nu)\} = \{[E_x(\mathbf{x}, \nu), E_y(\mathbf{x}, \nu)]\} \quad (2.1)$$

donde E_x y E_y son las componentes cartesianas del campo eléctrico \mathbf{E} , escritas aquí como una matriz columna. Por simplicidad, a partir de ahora se omitirá la dependencia explícita de la frecuencia. Las propiedades de correlación en segundo orden del campo electromagnético (en el espacio de frecuencias) pueden ser caracterizadas por completo por medio de la matriz de densidad espectral cruzada, definida como

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] = [\langle E_i^*(\mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_2) \rangle] \quad (2.2)$$

donde el asterisco y los brackets representan, respectivamente, el complejo conjugado y el promedio del ensamble. Los elementos diagonales de la matriz $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ describen la

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE COHERENCIA Y POLARIZACIÓN

2.1. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO Y SU DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA

correlación cruzada de cada componente del campo, mientras que las componentes no diagonales describen las correlaciones cruzadas entre distintas componentes del mismo campo.

En secciones siguientes será apropiado tener en cuenta las propiedades que cumplen los elementos de la matriz $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Suponiendo que $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ es una función continua acotada a través de un dominio finito D , se encuentra que esta función es cuadrado integrable, i.e.,

$$\iint_D |\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 < \infty. \quad (2.3)$$

En segundo lugar, $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tiene simetría Hermitiana, i.e.,

$$W_{ji}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = W_{ij}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (2.4)$$

lo cual se sigue de la definición (2.2). También puede mostrarse que $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ es una función definida no-negativa, i.e.,

$$\iint_D W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f^*(\mathbf{x}_1) f(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \geq 0, \quad (2.5)$$

donde $f(\mathbf{x})$ es cualquier función cuadrado integrable. Para $i = j$ y $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, la función $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ se convierte en la densidad espectral, o espectro de potencia, de la componente del campo

$$S_i(\mathbf{x}) = W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle |E_i(\mathbf{x})|^2 \rangle \quad (2.6)$$

por lo que la densidad espectral de todo el campo puede expresarse como

$$S(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle = S_i(\mathbf{x}) + S_j(\mathbf{x}) = \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

donde Tr representa la traza y el simbolo de la daga denota el conjugado Hermitiano.

Ahora se discutirá cómo las propiedades de correlación del campo electromagnético pueden ser evaluadas en una forma cuantitativa. De la definición (2.6), junto con la desigualdad (2.5), implica que

$$|W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leq [S_i(\mathbf{x}_1) S_j(\mathbf{x}_2)]^{1/2} \quad (2.8)$$

Por esto, se puede definir la cantidad que mide la correlación entre las componentes vectoriales E_i y E_j como el valor absoluto normalizado de la función de correlación cruzada $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, i.e.,

$$|\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = \frac{|W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|}{[S_i(\mathbf{x}_1) S_j(\mathbf{x}_2)]^{1/2}}, \quad (2.9)$$

la cual será referida como el coeficiente de correlación. Es evidente que

$$0 \leq |\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leq 1. \quad (2.10)$$

Las componentes vectoriales E_i y E_j son completamente correlacionadas cuando $|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = 1$ y son completamente no correlacionadas cuando $|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = 0$. En la

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.2. GRADO ELECTROMAGNÉTICO DE COHERENCIA

teoría escalar de coherencia en el espacio de frecuencias, el coeficiente de correlación, para $j = i$, se conoce como el grado espectral de coherencia de una onda escalar. Este hecho sirve para definir el grado de coherencia de un campo electromagnético.

2.2. Grado electromagnético de coherencia

El grado de coherencia para el caso vectorial fue propuesto por Wolf [41] y se construye en base a la matriz de densidad espectral cruzada y se define como sigue:

$$|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = \frac{|\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|}{|\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)|}. \quad (2.11)$$

Haciendo uso de la definición (2.9), se encuentra la siguiente relación:

$$\begin{aligned} |\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| &= \frac{W_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + W_{jj}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{[W_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + W_{jj}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)]^{1/2} [W_{ii}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) + W_{jj}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)]^{1/2}} \\ &= \frac{W_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + W_{jj}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{[S_i(\mathbf{x}_1)S_i(\mathbf{x}_2) + S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2) + S_j(\mathbf{x}_1)S_i(\mathbf{x}_2) + S_j(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)[S_i(\mathbf{x}_1)S_i(\mathbf{x}_2)]^{1/2} + \mu_{jj}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)[S_j(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)]^{1/2}}{[S_i(\mathbf{x}_1)S_i(\mathbf{x}_2) + S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2) + S_j(\mathbf{x}_1)S_i(\mathbf{x}_2) + S_j(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)]^{1/2}} \\ &= \frac{\sum_i |\mu_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| |S_i(\mathbf{x}_1)S_i(\mathbf{x}_1)|^{1/2}}{\left[\sum_{i,j} S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2) \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

i.e., $|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$ representa el promedio de los coeficientes de correlación de las componentes ortogonales del campo. Sin embargo, la definición (2.11) presenta una inconsistencia pues no usa toda la información de las propiedades de coherencia del campo vectorial al descartar las componentes no diagonales de la matriz $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Este hecho resulta en que dos campos vectoriales con esencialmente diferentes propiedades de coherencia sean indistinguibles de acuerdo a la definición (2.11), e.g., dos campos con

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{yx} & W_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{W}' = \begin{bmatrix} W_{xx} & 0 \\ 0 & W_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

poseen el mismo grado de coherencia $|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$.

El grado de coherencia para el caso vectorial propuesto por Tervo et al. [37] se define como la normalización de la norma de Frobenius de la matriz de densidad espectral cruzada $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, i.e.,

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left[\frac{\sum_{i,j} |W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2}{\sum_{i,j} S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)} \right]^{1/2} = \left[\frac{\text{Tr}[\mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)]}{\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)} \right]^{1/2}. \quad (2.14)$$

De nuevo, haciendo uso de la definición (2.9), se puede reescribir la Ec. (2.14) como sigue:

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.3. GRADO ELECTROMAGNÉTICO DE POLARIZACIÓN

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left[\frac{\sum_{i,j} |\mu_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 S_i(\mathbf{x}_1) S_j(\mathbf{x}_2)}{\sum_{i,j} S_i(\mathbf{x}_1) S_j(\mathbf{x}_2)} \right]^{1/2}. \quad (2.15)$$

Como puede verse de la Ec. (2.15), $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ representa la raíz cuadrática media ponderada por los coeficientes de correlación para todos los pares (i, j) . La Ec (2.15), junto con la Ec. (2.10), afirman que $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$ si, y sólo si, $|\tilde{\mu}_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = 1$ para cualquier par (i, j) , y $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ si, y sólo si, $|\tilde{\mu}_{ii}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = 0$ para cualquier par (i, j) . En otras palabras, el campo electromagnético vectorial es completamente coherente cuando sus componentes están autocorrelacionadas y correlacionadas cruzadamente y es completamente incoherente cuando sus componentes son completamente no autocorrelacionadas y mutuamente no correlacionadas. Regresando al ejemplo anterior, se puede cerciorar de que los campos con las densidades espectrales dadas por la Ec. (2.13) son distinguibles de acuerdo a la definición de $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Esto puede mostrarse inmediatamente al considerar el campo escalar con sólo una componente ortogonal no nula, e.g., $E_x(\mathbf{x})$. Para dicho campo

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ciertamente, la definición del grado de coherencia para un campo electromagnético definido por Tervo et al., Ec. (2.15) da el resultado correcto $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mu_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$. Sin embargo, en la práctica muchas fuentes poseen matrices diagonales. Por esta razón, en el presente trabajo usaremos sólo la definición de grado de coherencia dado por Wolf.

2.3. Grado electromagnético de polarización

Como es bien sabido, la polarización es otra manifestación del grado de correlación de un campo electromagnético que puede ser caracterizada por la matriz de densidad espectral cruzada $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ para el mismo punto, i.e., $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$. Cuando

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = W_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

se dice que el campo es completamente no polarizado, y cuando

$$\text{Det}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.18)$$

donde Det es el determinante de la matriz, el campo se dice que es completamente polarizado. La polarización puede evaluarse cualitativamente por el grado de polarización definido de la siguiente manera:

$$P(\mathbf{x}) = \left[1 - \frac{4\text{Det}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{[\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]^2} \right]^{1/2}. \quad (2.19)$$

Esta expresión fue propuesta por Wolf [41] definida de manera analoga a la expresión para calcular el grado de polarización en función de la matriz de polarización \mathbf{J} (véase, Cap. 8 de Ref. [42]). Dicha matriz caracteriza las propiedades de correlación de segundo orden del campo eléctrico en un punto \mathbf{x} para un mismo instante de tiempo

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.4. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES DEL CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO

$$P(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - \frac{4\text{Det}\mathbf{J}}{(\text{Tr}\mathbf{J})^2}} \quad (2.20)$$

donde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_x^*(t)E_y(t) \rangle \\ \langle E_y^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_y^*(t)E_y(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Para un campo completamente polarizado tendremos $P(\mathbf{x}) = 1$, para un campo completamente no polarizado $P(\mathbf{x}) = 0$, y para un campo parcialmente polarizado $0 < P(\mathbf{x}) < 1$.

Puede demostrarse que las propiedades de polarización de un campo electromagnético estocástico pueden ser caracterizadas por el grado de coherencia $\hat{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Haciendo uso de la propiedad (2.4), se encuentra que

$$2\text{Det}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = [\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]^2 - \text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]. \quad (2.22)$$

Luego, sustituyendo la Ec. (2.22) en la igualdad (2.19) y tomado en cuenta la definición (2.14) y $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, obtenemos que

$$P(\mathbf{x}) = [2\hat{\mu}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 1]^{1/2}. \quad (2.23)$$

La Ec. (2.23) revela un hecho importante: el campo electromagnético es necesariamente coherente y necesariamente polarizado. En efecto, para un campo completamente coherente la cantidad se cumple para cada par de puntos $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, incluyendo el caso $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, y por tanto $P(\mathbf{x}) = 1$. La Ec. (2.23) demuestra también que el valor mínimo posible para el grado de coherencia es $\hat{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1/\sqrt{2}$.

Como puede verse, el grado de polarización dado por la Ec. (2.23) tiene una naturaleza funcional, dependiendo de las coordenadas del punto del plano $z = cte$. Para caracterizar las propiedades del vector del campo electromagnético en todo el plano, se propone emplear el grado global de polarización, definido de manera analoga al grado global de coherencia

$$\begin{aligned} P_{\text{glob}} &= 2 \frac{\int \text{Tr}[\mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})] d\mathbf{x}}{\int [\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}} - 1, \\ &= 2 \frac{\int_D \tilde{\mu}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) S^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_D S^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} - 1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ciertamente, P_{glob} es igual a la unidad para un campo completamente polarizado y es igual a cero para un campo electromagnético no polarizado.

2.4. Representación en modos coherentes del campo electromagnético

Uno de los resultados más importantes de la teoría escalar de coherencia en el espacio de frecuencias es que bajo ciertas condiciones cualquier campo escalar parcialmente coherente puede ser descompuesto en modos elementales que son completamente coherentes y mutuamente no correlacionados. Dicha descomposición recibe el nombre de representación

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.4. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES DEL CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO

en modos coherentes de un campo parcialmente coherente. La representación en modos coherentes es muy útil en el análisis de campos parcialmente coherentes. La descripción detallada de las diversas aplicaciones en las distintas ramas de la óptica moderna pueden ser encontradas en [22]. En la presente sección se hará una revisión de la representación en modos coherentes para el caso de un campo vectorial.

Usando las relaciones (2.3)-(2.5), puede demostrarse que la matriz de densidad espectral cruzada $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ obedece las siguientes condiciones

$$\iint_D \text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 < \infty, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (2.26)$$

$$\iint_D \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{f}^\dagger(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (2.27)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una matriz fila arbitraria cuadrado integrable. Por lo tanto, se le puede asociar el operador Hilbert-Schmidt. Como bien se sabe de la literatura matemática, todo operador del tipo Hilbert-Schmidt puede descomponerse en series de Mercer [16]. Por esta razón, la matriz de densidad espectral cruzada puede ser representada por la siguiente descomposición en series:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \Lambda_n \Phi_n^\dagger(\mathbf{x}_1) \otimes \Phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.28)$$

donde \otimes es el producto matricial directo, los coeficientes Λ_n son los eigenvalores y las matrices fila $\Phi_n(\mathbf{x}) = [\phi_{n,i}(\mathbf{x})]$ son las eigenfunciones vectoriales de la ecuación integral de Fredholm

$$\int_D \Phi_n(\mathbf{x}_1) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = \Lambda_n \Phi_n(\mathbf{x}_2). \quad (2.29)$$

Debido a las condiciones (2.25)-(2.27), los eigenvalores Λ_n son necesariamente reales y no negativas, y las eigenfunciones $\Phi_n(\mathbf{x})$ pueden normalizarse, i.e.,

$$\int_D \Phi_n(\mathbf{x}) \Phi_m^\dagger(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm}, \quad (2.30)$$

donde δ_{nm} es el simbolo de Kronecker.

Para aclarar el significado físico de la descomposición (2.28), reescribimos la ecuación en la siguiente forma

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \Lambda_n \mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (2.31)$$

donde

$$\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [\phi_{n,i}^*(\mathbf{x}_1) \phi_{n,j}(\mathbf{x}_2)]. \quad (2.32)$$

Es obvio que la matriz de densidad espectral cruzada $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ obedece las mismas ecuaciones diferenciales que gobiernan la propagación de la densidad espectral cruzada

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.4. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES DEL CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO

$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ en el espacio libre. Por esta razón cada $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ se le puede asociar con un modo elemental del campo vectorial electromagnético. Sustituyendo $\mathbf{W}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ de la Ec. (2.32) en la Ec. (2.14), se encuentra que $\hat{\mu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1$ y $P_n(\mathbf{x}) = 1$, es decir, que este modo es completamente coherente y completamente polarizado. Como resultado, llegamos a la siguiente conclusión: *la descomposición (2.31) representa la matriz de densidad espectral cruzada de cualquier fuente parcialmente coherente y parcialmente polarizada como una superposición de contribuciones de modos que son completamente coherentes y completamente no correlacionados entre sí.*

Haciendo uso de las Ecs. (2.28) y (2.30), se puede demostrar fácilmente las siguientes relaciones entre los eigenvalores Λ_n y las propiedades de la matriz de densidad espectral $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$:

$$\iint_D \text{Tr}[\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \sum_n \Lambda_n^2, \quad (2.33)$$

$$\int_D S(\mathbf{W}) d\mathbf{W} = \int_D \text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_n \Lambda_n. \quad (2.34)$$

Ahora discutiremos brevemente el problema de la construcción de la representación en modos coherentes. Para hacer esto, notemos primero que la ecuación integral vectorial (2.28) puede ser reescrita en la forma de dos ecuaciones integrales escalares acopladas, i.e.,

$$\begin{aligned} \int_D [\phi_{n,x}(\mathbf{x}_1)W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \phi_{n,y}(\mathbf{x}_1)W_{yx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 &= \Lambda_n \phi_{n,x}(\mathbf{x}_2), \\ \int_D [\phi_{n,x}(\mathbf{x}_1)W_{xy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \phi_{n,y}(\mathbf{x}_1)W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 &= \Lambda_n \phi_{n,y}(\mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para una matriz dada $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, resolver el sistema de ecuaciones integrales (2.35) representa una tarea no trivial. Hasta el presente, la solución a la ecuación del sistema (2.35) ha sido obtenida de forma cerrada sólo para un caso especial, a saber, para el modelo del campo vectorial Schell-Gaussiano [38]. En la referencia [10] se muestra que el problema se simplifica considerablemente cuando la matriz de densidad espectral cruzada tiene, o puede ser reducida a la forma diagonal, i.e.,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & 0 \\ 0 & W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Para los elementos diagonales para dicha matriz, se puede hacer uso de las siguientes descomposiciones en serie

$$W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \lambda_n \phi_n^*(\mathbf{x}_1) \phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.37)$$

$$W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \mu_n \psi_n^*(\mathbf{x}_1) \psi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.38)$$

donde λ_n y μ_n son los eigenvalores, mientras que $\phi_n(\mathbf{x})$ y $\psi_n(\mathbf{x})$ son las correspondientes eigenfunciones, de las dos ecuaciones integrales desacopladas

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.5. FUENTE ELECTROMAGNÉTICA MODELO SCHELL-GAUSSIANO

$$\int_D \phi_n(\mathbf{x}_1) W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = \lambda_n \phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.39)$$

$$\int_D \psi_n(\mathbf{x}_1) W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = \mu_n \psi_n(\mathbf{x}_2), \quad (2.40)$$

respectivamente. Resolviendo por separado las Ecs (2.39) y (2.40), podemos construir la representación en modos coherentes en forma vectorial simplemente suponiendo

$$\begin{aligned} \Lambda_{2n} &= \lambda_n, & \Phi_{2n}(\mathbf{x}) &= [\phi_n(\mathbf{x}) \ 0], \\ \Lambda_{2n+1} &= \mu_n, & \Phi_{2n+1}(\mathbf{x}) &= [0 \ \psi_n(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

La otra forma de abordar el problema de la representación en modos coherentes en caso vectorial fue propuesto en [13]. En esta aproximación, además de las expresiones modales (2.37) y (2.38) de los elementos diagonales de la matriz $\mathbf{W}((x)_1, \mathbf{x}_2)$ se usan las llamadas expansiones bimodales de los elementos no diagonales, que se definen como sigue:

$$W_{xy}((x)_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{n,m} \nu_{nm} \phi_n^*((x)_1) \psi_m((x)_2), \quad (2.42)$$

$$W_{yx}((x)_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{n,m} \nu_{nm} \psi_n^*((x)_1) \phi_m((x)_2), \quad (2.43)$$

donde

$$\nu_{nm} = \iint_D \phi_n((x)_1) W_{xy}((x)_1, \mathbf{x}_2) \psi_m^*(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (2.44)$$

Dicho enfoque puede ser útil en ciertas aplicaciones prácticas (vease) pero no permite representar la matriz de densidad espectral cruzada $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ en la forma de la ecuación (2.31) y, por lo tanto, no resulta en la verdadera representación en modos coherentes del campo electromagnético.

Concluyendo esta sección, notemos que, como se sigue de las Ecs. (2.28) y (2.29), construir la representación en modos coherentes presupone que la matriz de densidad espectral cruzada $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ esta bien definida *a priori*. Pero si no lo está, un modo alternativo a este problema de la representación en modos coherentes del campo vectorial, que no involucre la solución a las ecuaciones integrales de Fredholm (2.35), es lo más conveniente. Recientemente, Ostrovsky et al. ([22],[28],[29]) propusieron un acercamiento a dicho problema que permite encontrar la representación alternativa en modos coherentes de un campo escalar *a posteriori* en base de mediciones radiométricas.

2.5. Fuente electromagnética modelo Schell-Gaussiano

Este es uno de los modelos más usados debido a que describe adecuadamente una gran variedad de situaciones físicas realizables mediante experimentos. Matemáticamente es fácil de usar, pues permite calcular el grado de coherencia y el grado de polarización de manera directa. Dicho modelo es considerado como el método clásico para describir a un campo luminoso.

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.5. FUENTE ELECTROMAGNÉTICA MODELO SCHELL-GAUSSIANO

Se dice que una fuente es tipo Schell si los elementos de la matriz de densidad espectral cruzada puede escribirse de la siguiente manera

$$W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = [S_i(\mathbf{x}_1)S_j(\mathbf{x}_2)]^{1/2}\mu_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (i = x, y; j = x, y). \quad (2.45)$$

El modelo Schell-Gaussiano supone que la densidad espectral cruzada puede escribirse de esta manera y, además, el espectro de potencia y el grado de coherencia están expresados en la siguiente manera

$$S_i(\mathbf{x}) = A_i^2 \exp\left(-\frac{(\mathbf{x})^2}{2\sigma_{S_i}^2}\right), \quad (2.46)$$

y

$$\mu_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = B_{ij} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2}{2\sigma_{\mu_{ij}}^2}\right], \quad (2.47)$$

donde los parámetros A_i , B_{ij} , σ_{S_i} y $\sigma_{\mu_{ij}}$ se suponen que son independientes de la posición, y que no dependen uno del otro. En particular, las cantidades σ_{S_i} y $\sigma_{\mu_{ij}}$ pueden interpretarse como el ancho cuadrático medio (rms) del espectro de potencia a lo largo de la fuente y el rms del grado de coherencia de la fuente, respectivamente. El cociente de ambas cantidades

$$\gamma_i(\nu) = \frac{\sigma_{\mu_{ij}}}{\sigma_{S_i}} \quad (2.48)$$

puede ser considerada como una medida del *grado global de coherencia* de la fuente modelo Schell-Gaussiana. Nótese que cuando $\gamma \rightarrow 0$ la fuente tiende al límite completamente incoherente, y cuando $\gamma \rightarrow \infty$ la fuente tiende al límite completamente coherente. Finalmente, nótese que dicha función se diferencia del grado electromagnético de coherencia en el sentido de que no es una función puntual.

Se puede demostrar [15] que los parámetros que caracterizan a esta fuente satisfacen las siguientes propiedades:

$$|B_{ij}| = 1, \quad \text{para } i = j, \quad (2.49)$$

$$|B_{ij}| \leq 1, \quad \text{para } i \neq j, \quad (2.50)$$

$$B_{ij} = |B_{ij}| \exp(i\phi). \quad (2.51)$$

Teniendo esto en cuenta podemos ahora calcular el grado de coherencia y el grado de polarización para este tipo de fuentes. Usando la definición del grado de coherencia propuesto por Wolf (vease Ec. 2.11)

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \frac{|\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|}{|\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)|^{1/2}} \\ &= \frac{[S_x(\mathbf{x}_1)S_x(\mathbf{x}_2)]^{1/2}\mu_{xx}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + [S_y(\mathbf{x}_1)S_y(\mathbf{x}_2)]^{1/2}\mu_{yy}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\{[S_x(\mathbf{x}_1) + S_y(\mathbf{x}_1)][S_x(\mathbf{x}_2) + S_y(\mathbf{x}_2)]\}^{1/2}} \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA UNIFICADA DE
COHERENCIA Y POLARIZACIÓN**
2.5. FUENTE ELECTROMAGNÉTICA MODELO SCHELL-GAUSSIANO

$$= \frac{A_x^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{4\sigma_x^2}\right) B_{xx} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2}{2\gamma_{xx}^2}\right) + A_y^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{4\sigma_y^2}\right) B_{yy} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2}{2\gamma_{yy}^2}\right)}{\left[A_x^4 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{2\sigma_x^2}\right) + A_x^2 A_y^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\mathbf{x}_2^2}{2\sigma_y^2}\right) + A_y^2 A_x^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\mathbf{x}_2^2}{2\sigma_x^2}\right) + A_y^4 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}{2\sigma_y^2}\right) \right]} \quad (2.52)$$

De igual manera, haciendo uso de la Ec. (2.19) podemos llegar al siguiente resultado

$$P(\mathbf{x}) = \frac{|A_x - A_y|}{A_x + A_y}. \quad (2.53)$$

De las Ecs. (4.9) y (4.10) se puede observar que no son necesariamente 1 o 0. Por lo tanto, una fuente modelo Schell-Gaussiano representa una fuente que es parcialmente coherente y parcialmente polarizada. Dichas fuentes pueden, en efecto, ser generadas fácilmente en el laboratorio y el modelo matemático que las describe es el más sencillo conocido.

Finalmente, dentro del contexto de la representación en modos coherentes, la estructura modal 1D de la fuente Schell-Gaussiana ha sido construida en las Refs. [36] y [8] y tiene la siguiente forma:

$$\phi_n(x, \nu) = \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x\sqrt{2c}) \exp(-cx^2), \quad (2.54)$$

$$\lambda_n(\nu) = S(0, \nu) \left(\frac{\pi}{a+b+c}\right)^{1/2} \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^n. \quad (2.55)$$

donde

$$a = \frac{1}{4\sigma_S^2(\nu)}, \quad b = \frac{1}{2\sigma_\mu^2(\nu)}, \quad c = (a^2 + 2ab)^{1/2}, \quad (2.56)$$

y H_n es el polinomio de Hermite de orden n . Más adelante (véase Cap. 5) usaremos este resultado para obtener la representación alternativa en modos coherentes para una fuente modelo Schell-Gaussiano. El límite superior del número efectivo de modos coherentes necesarios para representar adecuadamente la fuente 1D modelo Schell-Gaussiano ha sido calculado en Ref. [35] y está dado por

$$\aleph(\nu) \leq \left[1 + \frac{4}{\gamma(\nu)^2}\right]^{1/2}. \quad (2.57)$$

El término número efectivo de modos coherentes fue introducido por Starikov en 1982 [35]. Dicho parámetro nos dice cuántos términos de la sumatoria son necesarios para representar adecuadamente una fuente de iluminación en la representación de modos coherentes. Físicamente puede interpretarse del siguiente modo: entre más incoherente sea la fuente, más modos coherentes son necesarios para su representación.

2.6. Conclusiones

En el presente capítulo se dio una breve descripción de la teoría vectorial de coherencia y polarización. Un análisis comparativo entre las definiciones propuestas del grado electromagnético de coherencia muestran que la definición dada por Tervo et al. [37], es la única que provee de resultados correctos y que es consistente con la teoría escalar de coherencia. Sin embargo, como también se discutió, la definición dada por Wolf [41] es consistente con la de Tervo et al. para el caso cuando la matriz de densidad espectral cruzada es diagonal. Como muchas fuentes físicas pueden caracterizarse por dichas matrices, es suficiente para el presente trabajo usar la definición de Wolf.

Uno de los resultados más importantes de la teoría vectorial de coherencia es que, bajo ciertas condiciones especiales, cualquier campo vectorial parcialmente coherente y parcialmente polarizado puede ser representado como una superposición de modos que son completamente coherentes y completamente polarizados pero no correlacionados entre sí. El problema de cómo calcular dicha representación para un campo vectorial fue brevemente discutida.

Se discutió brevemente el modelo de iluminación Schell-Gaussiano. Dicho modelo es muy importante por dos razones: es matemáticamente simple, y representa adecuadamente diversas fuentes que pueden ser generadas en laboratorio. Posteriormente este modelo será usado para obtener diversos resultados de interés práctico (véase Cap. 4 y Cap. 5).

Capítulo 3

Sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada

3.1. Enfoque bilineal en la representación de un sistema óptico.

La teoría de sistemas lineales ha sido exitosamente empleada para describir diversos sistemas ópticos [32]. Dentro del marco de esta descripción matemática, en un sistema óptico el resultado obtenido en el el plano de observación descrito por una función $g(\mathbf{x})$ está relacionado con la señal de entrada $f(\mathbf{x})$ mediante una transformación lineal

$$g(\mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\mathbf{x}', \quad (3.1)$$

donde $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ es la llamada *respuesta al impulso* del sistema, es decir, la salida en el punto \mathbf{x}' como resultado a la señal de entrada en el punto \mathbf{x} . Dicha transformación lineal describe un sistema óptico para una iluminación que sea completamente coherente o completamente incoherente. Para el primer caso, $f(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x}')$ tienen el significado de amplitud del campo óptico; mientras que para el segundo caso, estas cantidades representan las intensidades. Sin embargo, dicha ecuación deja de ser valida cuando la señal de entrada es una iluminación parcialmente coherente; para dicho caso, como fue mostrado primero por Gamou y luego por Thomsom, se debe aplicar la teoría de sistemas no lineales.

La salida $g(\mathbf{x}')$ de cualquier sistema no lineal puede ser representado como una serie de Volterra

$$g(\mathbf{x}') = q_0(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}_1)\dots f(\mathbf{x}_n)q_n(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1\dots\mathbf{x}_n)d\mathbf{x}_1\dots d\mathbf{x}_n, \quad (3.2)$$

donde $q_n(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1\dots\mathbf{x}_n)$ denota el n -esimo orden del kernel de Volterra del sistema. Saleh mostró que para diversos sistemas ópticos, estos pueden ser representados mediante el

**CAPÍTULO 3. SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA**
3.2. SISTEMAS BILINEALES EN ÓPTICA

tercer término de la serie de Volterra

$$g(\mathbf{x}') = \iint_{-\infty}^{\infty} f^*(\mathbf{x}_1) f(\mathbf{x}_2) q_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (3.3)$$

La transformación descrita por la Ec. (3.3) se denomina *transformación bilineal* y el correspondiente sistema que cumpla con estas características se llama *sistema bilineal*. El kernel de segundo orden de Volterra $q_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ representa la respuesta del sistema para dos impulsos localizados en los puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 y, por lo tanto, dicha función puede referirse como *doble respuesta del impulso*.

3.2. Sistemas bilineales en óptica

Considere ahora un sistema óptico con una sola lente delgada positiva, tal y como se muestra en la Fig 3.1. Como *objeto*, consideraremos una pantalla delgada, la cual afecta la amplitud del campo óptico incidente de acuerdo a la función de transmitancia descrita por $t_0(\mathbf{x})$ y la cual se denomina *transmitancia de amplitud*. Supondremos que el objeto es iluminado por un campo vectorial estocástico cuasi-monocromático caracterizada por la matriz de densidad espectral cruzada $\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Tomando la transmitancia en amplitud, $t_0(\mathbf{x})$, como la entrada del sistema, tendremos como objetivo encontrar la salida del sistema que corresponde al espectro de potencia $S(\mathbf{x}') = \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$ del campo en el plano de salida \mathbf{x}' .

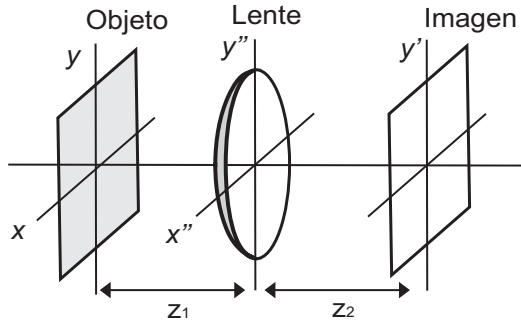


Figura 3.1: Sistema óptico con una sola lente.

Considerese ahora la matriz de densidad espectral cruzada, la cual, recordando el capítulo 2, puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = [W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] = [\langle E_i^*(\mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_2) \rangle] \quad (i = x, y; j = x, y) \quad (3.4)$$

donde $E_i(\mathbf{x})$ denota la componente del campo eléctrico (un elemento del ensamble) en las dos direcciones perpendiculares x y y , perpendicular a la dirección de propagación (en la dirección z), en el punto especificado por \mathbf{x} y donde los brackets angulares denotan, como es usual, el promedio sobre el ensamble.

Definamos ahora la matriz $\mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ como la matriz de la densidad espectral cruzada justo adelante del objeto, entonces

**CAPÍTULO 3. SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA**
3.2. SISTEMAS BILINEALES EN ÓPTICA

$$\mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{T}_0^\dagger(\mathbf{x}_1) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{T}_0(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (3.5)$$

donde \mathbf{T} es la matriz 2×2 de transferencia del objeto y \dagger denota la matriz adjunta.

La matriz de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'')$ justo en frente de la lente está dada por

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{\exp[ik(R_2 - R_1)]}{r_1 r_2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (3.6)$$

donde

$$R_{1(2)} = [(\mathbf{x}_{1(2)}'' - \mathbf{x}_{1(2)})^2 + z_1^2]^{1/2} \quad (3.7)$$

Para simplificar los cálculos, vamos a emplear la aproximación paraxial, la cual es justificable en nuestro caso. Dentro de esta aproximación, se pueden usar las siguientes relaciones

$$\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1 \quad (3.8)$$

$$R_{1(2)} \approx z_1 \quad (3.9)$$

en el denominador de la fracción de la cantidad dentro de la integral, y

$$R_{1(2)} \approx z_1 \left[1 + \frac{(\mathbf{x}_{1(2)}'' - \mathbf{x}_{1(2)})^2}{2z_1^2} \right] \quad (3.10)$$

en la función exponencial. Bajo dichas aproximaciones la Ec. (3.6) se reduce a

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp \left\{ i \frac{k}{2z_1} [(\mathbf{x}_1'' - \mathbf{x}_1)^2 - (\mathbf{x}_2'' - \mathbf{x}_2)^2] \right\} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (3.11)$$

Bajo ciertas condiciones, la lente en el plano \mathbf{x}'' puede considerarse como una placa de transmitancia delgada (en cuyo caso la Ec. (3.14) se simplifica pues en este caso la transmitancia deja de ser una matriz) con una amplitud de transmitancia dada por

$$t_l(\mathbf{x}'') = P(\mathbf{x}'') \exp \left[-i \frac{k}{2f} (\mathbf{x}'')^2 \right] \quad (3.12)$$

donde f es la distancia focal de la lente y $P(\mathbf{x}'')$ es la llamada función de púpila y la cual está definida por

$$P(\mathbf{x}'') = \begin{cases} 1 & \text{Dentro de la apertura de la lente} \\ 0 & \text{Fuera de la lente} \end{cases} \quad (3.13)$$

Por lo tanto, la matriz de densidad espectral cruzada del campo justo delante de la lente será,

**CAPÍTULO 3. SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA**
3.2. SISTEMAS BILINEALES EN ÓPTICA

$$\begin{aligned}\mathbf{W}'(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') &= t_l^*(\mathbf{x}_1'') t_l(\mathbf{x}_2'') \mathbf{W}(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') \\ &= P(\mathbf{x}_1'') P(\mathbf{x}_2'') \exp \left\{ -i \frac{k}{2f} [(\mathbf{x}_2'')^2 - (\mathbf{x}_1'')^2] \right\} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'').\end{aligned}\quad (3.14)$$

Ahora, para encontrar la densidad espectral cruzada del campo en el plano de salida \mathbf{x}' , se usará nuevamente la aproximación paraxial, lo cual da como resultado

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \left(\frac{k}{2\pi z_2} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') \exp \left\{ i \frac{k}{2z_2} [(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2'')^2 - (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1'')^2] \right\} d\mathbf{x}_1'' d\mathbf{x}_2'' \quad (3.15)$$

Para obtener el espectro de potencia se sustituye la cantidad $\mathbf{W}'(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'')$ dada por la Ec. (3.23) dentro de la Ec. (3.24) y tomando en cuenta que para la densidad espectral $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}'$

$$\begin{aligned}S(\mathbf{x}') &= \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = \text{Tr} \left(\frac{k}{2\pi z_2} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') \exp \left\{ i \frac{k}{2z_2} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2'')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1'')^2] \right\} d\mathbf{x}_1'' d\mathbf{x}_2'' \\ &= \text{Tr} \left(\frac{k}{2\pi z_2} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}_1'') P(\mathbf{x}_2'') \exp \left\{ -i \frac{k}{2f} [(\mathbf{x}_2'')^2 - (\mathbf{x}_1'')^2] \right\} \\ &\quad \times \mathbf{W}(\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'') \exp \left\{ i \frac{k}{2z_2} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2'')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1'')^2] \right\} d\mathbf{x}_1'' d\mathbf{x}_2'' \\ &= \text{Tr} \left(\frac{k}{2\pi z_2} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}_1'') P(\mathbf{x}_2'') \exp \left\{ -i \frac{k}{2f} [(\mathbf{x}_2'')^2 - (\mathbf{x}_1'')^2] \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp \left\{ i \frac{k}{2z_1} [(\mathbf{x}_2'' - \mathbf{x}_2)^2 - (\mathbf{x}_1'' - \mathbf{x}_1)^2] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \frac{k}{2z_2} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2'')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1'')^2] \right\} d\mathbf{x}_1'' d\mathbf{x}_2''\end{aligned}\quad (3.16)$$

los exponentiales dentro de las integrales pueden rearrreglarse en función de \mathbf{x}_1'' y \mathbf{x}_2'' , para esto escógase primero las exponenciales con los terminos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_1''

$$\begin{aligned}&\exp \left\{ i \frac{k}{2f} (\mathbf{x}_1'')^2 \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2z_1} - (\mathbf{x}_1'' - \mathbf{x}_1)^2 \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2z_2} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1'')^2 \right\} = \exp \left\{ i \frac{k}{2f} (\mathbf{x}_1'')^2 \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \frac{k}{2z_1} - (\mathbf{x}_1''^2 + \mathbf{x}_1^2 - 2\mathbf{x}_1'' \bullet \mathbf{x}_1) \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2z_2} - (\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}_1''^2 - 2\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}_1'') \right\} \\ &= \exp \left[-i \frac{k}{2z_1} (\mathbf{x}_1'')^2 \right] \exp \left[-i \frac{k}{2z_2} (\mathbf{x}^2) \right] \exp \left[i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) (\mathbf{x}_1'')^2 \right] \exp \left[i \frac{k}{z_2} \mathbf{x}_1'' \left(\mathbf{x}_1 + \frac{z_2}{z_1} \mathbf{x} \right) \right]\end{aligned}$$

separando las integrales tenemos entonces para \mathbf{x}_1 y denominando a esta función $h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1)$

$$\begin{aligned}h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) &= \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \exp \left[-i \frac{k}{2z_1} (\mathbf{x}_1'')^2 \right] \exp \left[-i \frac{k}{2z_2} (\mathbf{x}^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}_1'') \exp \left[i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) (\mathbf{x}_1'')^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[i \frac{k}{z_2} \mathbf{x}_1'' \left(\mathbf{x}_1 + \frac{z_2}{z_1} \mathbf{x} \right) \right] d\mathbf{x}_1''\end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA**
3.3. CONCLUSIONES

y de manera similar, podemos definir una función $h(\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_2)$, por lo tanto, la función del espectro de potencia queda finalmente como

$$S(\mathbf{x}') = \text{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0^*(\mathbf{x}_1) t_0(\mathbf{x}_2) \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) &= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{z_1 z_2} \exp\left[i\frac{k}{2z_2}(\mathbf{x}')^2\right] \exp\left[i\frac{k}{2z_1}\mathbf{x}^2\right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}'') \exp\left[i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{f}\right)(\mathbf{x}'')^2\right] \\ &\times \exp\left[-i\frac{k}{z_2}\mathbf{x}''\left(\mathbf{x}' + \frac{z_2}{z_1}\mathbf{x}\right)\right] d\mathbf{x}''. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Comparando las Ecs. (3.3) y (3.17) podemos llegar a la conclusión de que un sistema óptico como el mostrado en la figura 3.1 representa un sistema bilineal con una respuesta al impulso dado por

$$g_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2). \quad (3.19)$$

Ahora consideraremos dos casos particulares muy importantes, los cuales son muy interesantes desde el punto de vista práctico.

Si la geometría de la Fig. 3.1 satisface la *ley de las lentes*, $1/z_1 + 1/z_2 = 1/f$, la respuesta de doble impulso del sistema toma la misma forma que la Ec. (3.19), pero con

$$h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{z_1 z_2} \exp\left[i\frac{k}{2z_2}(\mathbf{x}')^2\right] \exp\left[i\frac{k}{2z_1}\mathbf{x}^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}'') \exp\left[-i\frac{k}{z_2}\mathbf{x}''\left(\mathbf{x} + \frac{z_2}{z_1}\mathbf{x}\right)\right] d\mathbf{x}'' \quad (3.20)$$

la cual se conoce como la *función* del sistema óptico. En este caso, la Ec. (3.19) puede ser interpretada como la *imagen del objeto* con la escala definida por el factor z_2/z_1 .

Por otra parte, si la Fig. 3.1 satisface la condición $z_1 = z_2 = f$, y si la extensión del plano del objeto es mucho menor a la apertura de la lente, puede mostrarse que la respuesta de doble impulso del sistema toma la forma de la Ec. (3.17), pero con

$$h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{k}{i2\pi f} \exp\left(-i\frac{k}{f}\mathbf{x}'\mathbf{x}\right) \quad (3.21)$$

En este caso, la Ec. (3.17) puede ser interpretada como la transformada 4D de Fourier del objeto con frecuencias espaciales definidas por el vector $(k/2\pi f)\mathbf{x}'$.

3.3. Conclusiones

En el presente capítulo se demostró que la respuesta final de un sistema óptico en general puede describirse mediante una transformación bilineal. Esta respuesta final depende del objeto, fuente de iluminación y de la configuración del sistema óptico; este último siendo posible ser descrito mediante la función respuesta denotada por h . Se obtuvo la

CAPÍTULO 3. SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

3.3. CONCLUSIONES

expresión general para dicha función para un sistema óptico de una lente. Se consideraron dos casos de interés práctico: un sistema óptico formador de imagen y un sistema óptico transformada de Fourier. Para ambos casos se obtuvieron expresiones para h . Hasta ahora nos hemos limitado a saber cuál es el resultado final de un sistema óptico; sin embargo, para poder obtener un resultado con alto valor práctico debemos considerar cuál es la forma del objeto. El siguiente capítulo consideraremos tal caso, en donde, dado un objeto, se analizará cómo depende la calidad final del sistema óptico de las características intrínsecas de la fuente de iluminación, es decir, del grado de coherencia y del grado de polarización de la fuente.

Capítulo 4

Efecto de la coherencia y la polarización en la formación de imagen y en el espectro del objeto

4.1. Cambios de coherencia y polarización en un sistema óptico

En el capítulo anterior se demostró que la salida de un sistema óptico con una lente puede ser representada por una transformación bilineal, conocida en el contexto de óptica como *sistema bilineal*. Se halló también, para una fuente de iluminación y objeto arbitrarios una expresión general para la respuesta al impulso $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Consideramos dos casos especiales: un sistema formador de imagen y un sistema transformada de Fourier, y para ambos casos se encontraron expresiones más simplificadas para la función $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Sin embargo, hasta ahora no hemos considerado la forma del objeto, razón por la cual lo dicho hasta ahora sólo tiene un interés académico. En este capítulo ahora nos concentraremos en hallar la salida del sistema, dados una fuente de iluminación (el cual será considerado como un campo vectorial) y un objeto en particular. En base a esto evaluaremos cómo afecta las propiedades intrínsecas de la fuente con el resultado del sistema óptico; a saber, resolución espacial y resolución en frecuencia, para el caso de un sistema formador de imagen y un sistema transformada de Fourier, respectivamente. El valor práctico del presente capítulo está, entonces, en el hecho de que los resultados presentados no han sido reportados hasta ahora.

4.2. Resolución espacial de un sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada

El efecto de las propiedades de correlación de iluminación en el proceso de formación de imágenes en sistemas ópticos está muy bien estudiado en el caso de la teoría de coherencia escalar ([39], [6] y [5]). Recientemente, se ha dado mucha atención a la teoría vectorial

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

de coherencia o también llamada teoría unificada de coherencia y polarización (para una revisión de dicha teoría y una bibliografía más exhaustiva, véase [22]). En paralelo al desarrollo de esta teoría se ha dado atención a los cambios en los grados de coherencia y a los grados de polarización de campos electromagnéticos en propagación en el espacio libre o en sistemas ópticos. Al mismo tiempo, hasta donde sabemos, no se ha descrito el efecto de la coherencia y la polarización de un campo electromagnético en la resolución de un sistema óptico. A primera vista la generalización de la teoría escalar a la teoría vectorial parece trivial; sin embargo, como se mostrará más abajo, dicha generalización muestra algunos puntos que merecen especial atención.

Empezamos recordando las definiciones principales de la teoría unificada de coherencia y polarización. Las propiedades estadísticas de segundo orden de una onda electromagnética plana aleatoria puede ser descrita completamente por la matriz de densidad espectral cruzada (por brevedad omitiremos la dependencia explícita de la frecuencia ν en las cantidades consideradas)

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mathbf{W}_{xy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{W}_{yx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mathbf{W}_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

donde $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle E_i^*(\mathbf{x}_1)E_j(\mathbf{x}_2) \rangle$ con E_i y E_j siendo las componentes ortogonales del campo eléctrico vectorial, el asterisco denota al complejo conjugado, y los brackets denotan el promedio sobre el ensamble estadístico. Usando esta matriz, las tres cantidades estadísticas fundamentales de la fuente pueden ser definidas: el espectro de potencia (o densidad espectral)

$$S(\mathbf{x}) = \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (4.2)$$

el grado espectral de coherencia

$$\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{[\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)]^{1/2}} \quad (4.3)$$

y el grado espectral de polarización

$$P(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{4\text{Det} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{[\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]^2} \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

Ahora, analizamos el proceso de formación de imagen en sistema óptico simétrico axial isoplanático limitado por difracción con baja apertura angular. Como ejemplo de dicho sistema consideramos el sistema óptico telecéntrico mostrado en la Fig. 1. Sea $t(\mathbf{x})$ la transmitancia compleja del objeto, $\mathbf{W}^{in}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)$ la matriz de densidad espectral de iluminación, y $h(\mathbf{x}')$ la función de amplitud del sistema óptico, definida como la transformada de Fourier 2D de la pupila. Luego, bajo condiciones generales, la matriz de densidad espectral del campo en el plano de imagen pueden escribirse como

$$\mathbf{W}^{out}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} t^*(\mathbf{x}'_1)t(\mathbf{x}'_2)\mathbf{W}^{in}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)h^*(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x})h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})d\mathbf{x}'_1d\mathbf{x}'_2 \quad (4.5)$$

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

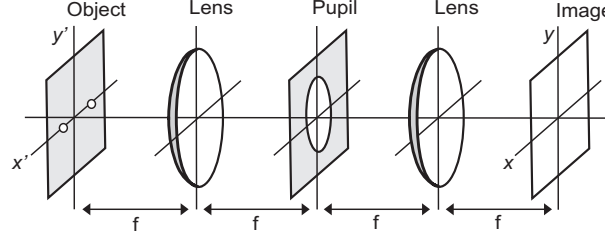


Figura 4.1: Sistema óptico telecentrico (ambos lentes tienen la misma distancia focal f).

Correspondientemente, la imagen del objeto se representa mediante el espectro de potencia

$$S^{out}(\mathbf{x}) = \text{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^*(\mathbf{x}'_1) t(\mathbf{x}'_2) \mathbf{W}^{in}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h^*(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \quad (4.6)$$

Para simplificar el análisis de la Eq. (4.6), usaremos algunas suposiciones que en general no afectan al objeto en estudio.

Primeramente, supondremos que la iluminación de la fuente puede ser representada por el modelo Shell-Gaussiano cuasi-monocromático dado por la matriz de densidad espectral cruzada

$$\mathbf{W}^{in}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{yy}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

cuyos elementos están dados por

$$W_{ii}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = S_{0i} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}'_1{}^2 + \mathbf{x}'_2{}^2}{4\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2)^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (4.8)$$

donde S_{0i} es el espectro de potencia de la componente del campo en el origen del plano del objeto, σ es el tamaño efectivo del haz a través del objeto y σ_i es el parámetro que caracteriza la longitud transversal de correlación de la componente del campo. Para dicha iluminación el grado de coherencia y el grado de polarización están dados por

$$\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{S_{0x} + S_{0y}} \left[S_{0x} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2)^2}{2\sigma_x^2}\right) + S_{0y} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2)^2}{2\sigma_y^2}\right) \right] \quad (4.9)$$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{|S_{0x} - S_{0y}|}{S_{0x} + S_{0y}} \quad (4.10)$$

Segundo, supondremos que la pupila del sistema óptico telecentrico tiene forma circular de radio R , así que la función de amplitud del sistema óptico toma la forma

$$h(\mathbf{x}) = h(r) = \frac{\pi R^2}{\lambda f} \left(2 \frac{J_1(2\pi Rr/\lambda f)}{2\pi Rr/\lambda f} \right) \quad (4.11)$$

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

donde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, λ es la longitud media de onda de iluminación y f es la distancia focal de las lentes usadas en el sistema. Para lo que sigue debe ser mencionado que el cuadrado del segundo factor de la Eq. (4.11), es decir $[2J_1(\pi\xi)/\pi\xi]^2$, es la función decreciente oscilatoria conocida como intensidad del patrón de Airy, con valor unitario en el origen y cuyo primer cero está ubicado en $\xi = 1,22$.

Finalmente, suponemos que el objeto representa una pantalla opaca con dos pinholes localizados simetricamente a lo largo del eje x . La amplitud de la transmitancia de dicho objeto puede ser aproximada por dos deltas de Dirac, i.e.,

$$\begin{aligned} t(\mathbf{x}) &= a\delta(x - d/2, y) + a\delta(x + d/2, y), \\ &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde a es una constante (que en adelante omitiremos y sólo la pondremos en el resultado final) y d es la distancia entre los pinholes, y $d \ll \sigma$; además, $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\mathbf{x}_0 = (d/2, 0)$.

Luego, la Ec. (4.6) queda como

$$\begin{aligned} S^{out}(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) + W_{yy}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2))] h^*(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) t^*(\mathbf{x}'_1) d\mathbf{x}'_1 \right\} t(\mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h^*(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) t^*(\mathbf{x}'_1) d\mathbf{x}'_1 + W_{yy}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) t^*(\mathbf{x}'_1)] d\mathbf{x}'_1 \right\} t(\mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

La primera integral doble de la Ec. (4.13) es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)] h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) t^*(\mathbf{x}'_1) t(\mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'_2 d\mathbf{x}'_1. \quad (4.14)$$

Resolveremos esta integral de la Ec. (4.13) primeramente integrando respecto a la variable \mathbf{x}_1 y, posteriormente, para la variable \mathbf{x}_2 . Tenemos entonces, después de eliminar la integral usando las propiedades de la delta de Dirac, el siguiente resultado

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) [\delta(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}_0)] d\mathbf{x}'_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_0) + W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}_0)] d\mathbf{x}'_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'_1 + \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'_1 \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

$$= W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) + W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}). \quad (4.15)$$

Sustituyendo este valor en la integral original, Ec. (4.14), lleva a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) + W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})] t(\mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})d\mathbf{x}'_2.$$

Ahora, aplicando la propiedad lineal de las integrales, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})t(\mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})d\mathbf{x}'_2 + \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})t(\mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})d\mathbf{x}'_2,$$

y sustituyendo la transmitancia dada por la Ec. (4.12):

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})[\delta(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{x}_0)]d\mathbf{x}'_2 +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})[\delta(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{x}_0)]d\mathbf{x}'_2$$

Aplicamos la linealidad, una vez más, para obtener así cuatro integrales:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})\delta(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_0)d\mathbf{x}'_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})\delta(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{x}_0)d\mathbf{x}'_2 +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})\delta(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_0)d\mathbf{x}'_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2)h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x})\delta(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{x}_0)d\mathbf{x}'_2.$$

Aplicando la propiedad de la delta de Dirac, todas las integrales anteriores pueden eliminarse. Obtenemos así que,

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'_2 = W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2) h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'_2 = W_{xx}(\mathbf{x}_0, -\mathbf{x}_0) h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2) h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'_2 = W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_2) h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_2 + \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'_2 = W_{xx}(-\mathbf{x}_0, -\mathbf{x}_0) h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Para nuestro caso de iluminación tipo Schell-Gaussiana tenemos que:

$$\begin{aligned}
W_{xx}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) &= S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right), \\
W_{xx}(\mathbf{x}_0, -\mathbf{x}_0) &= W_{xx}(-\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{\sigma_x^2}\right), \\
W_{xx}(-\mathbf{x}_0, -\mathbf{x}_0) &= S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right), \\
h(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) &= \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|/f)}{kR|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|/f} \right], \\
h(-\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) &= \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}|/f)}{kR|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}|/f} \right].
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la Ec. (4.16) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} [(W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)] h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) t^*(\mathbf{x}'_1) d\mathbf{x}'_1 = S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{\sigma_x^2}\right) \left\{ \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|/f)}{kR|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|/f} \right] \right\}^2 + \\
& 2S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{\sigma_x^2}\right) \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|/f)}{kR|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|/f} \right] \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}|/f)}{kR|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}|/f} \right] + \\
& S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \left\{ \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}|/f)}{kR|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}|/f} \right] \right\}^2
\end{aligned}$$

aplicando el hecho de que $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}| = |x - d/2|$ y $|\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}| = |x + d/2|$ tendremos

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} [(W_{xx}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2))]h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x})t^*(\mathbf{x}'_1)d\mathbf{x}'_1 = S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \\
& \quad \times \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{\sigma_x^2}\right) \left\{ \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x-d/2|/f)}{kR|x-d/2|/f} \right] \right\}^2 \\
+ 2S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{\sigma_x^2}\right) & \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x-d/2|/f)}{kR|x-d/2|/f} \right] \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x+d/2|/f)}{kR|x+d/2|/f} \right] \\
& + S_{0x} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \left\{ \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x+d/2|/f)}{kR|x+d/2|/f} \right] \right\}^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Por simetría, la segunda integral, Ec.(4.13), con el término W_{yy} como integrando, será

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} [(W_{yy}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2))]h(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x})t^*(\mathbf{x}'_1)d\mathbf{x}'_1 = S_{0y} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \\
& \quad \times \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{\sigma_y^2}\right) \left\{ \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x-d/2|/f)}{kR|x-d/2|/f} \right] \right\}^2 \\
+ 2S_{0y} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2\mathbf{x}_0^2}{\sigma_y^2}\right) & \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x-d/2|/f)}{kR|x-d/2|/f} \right] \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x+d/2|/f)}{kR|x+d/2|/f} \right] \\
& + S_{0y} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_0^2}{2\sigma^2}\right) \left\{ \frac{kR^2}{2f} \left[2 \frac{J_1(kR|x+d/2|/f)}{kR|x+d/2|/f} \right] \right\}^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
S^{out}(x) &= \left(\frac{a\pi R^2}{\lambda f}\right) \exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right) (S_{0x} + S_{0y}) \\
& \quad \left\{ \left(2 \frac{J_1[2\pi R(x-d/2)/\lambda f]}{2\pi R(x-d/2)/\lambda f}\right)^2 + \left(2 \frac{J_1[2\pi R(x+d/2)/\lambda f]}{2\pi R(x+d/2)/\lambda f}\right)^2 \right\} \\
+ 2 \frac{1}{S_{0x} + S_{0y}} & \left[S_{0x} \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_x^2}\right) + S_{0y} \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_y^2}\right) \right] \left(2 \frac{J_1[2\pi R(x-d/2)/\lambda f]}{2\pi R(x-d/2)/\lambda f}\right) \left(2 \frac{J_1[2\pi R(x+d/2)/\lambda f]}{2\pi R(x+d/2)/\lambda f}\right) \}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

La calidad de la imagen dada por la Eq. (4.19) puede ser evaluada de acuerdo con el criterio de resolución de Rayleigh. De acuerdo con este criterio, dos pinholes iluminados con luz incoherente (para este caso $\eta(-d/2, d/2) = 0$) deben ser considerados resueltos cuando el máximo principal del patrón de intensidad de Airy del primer pinhole coincide con el primer cero del patrón de Airy generado por el segundo pinhole (ver Fig. 2). La mínima separación donde pueden resolverse ambos pinholes es por lo tanto $d_{min} = 0,61\lambda f/R$ y el espectro de potencia de la imagen en el centro es $0,735S^{out}(d_{min}/2)$.

Cuando los pinholes son iluminados con iluminación parcialmente coherente la separación mínima d_{min} puede ser encontrada hallando las raíces de la ecuación

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

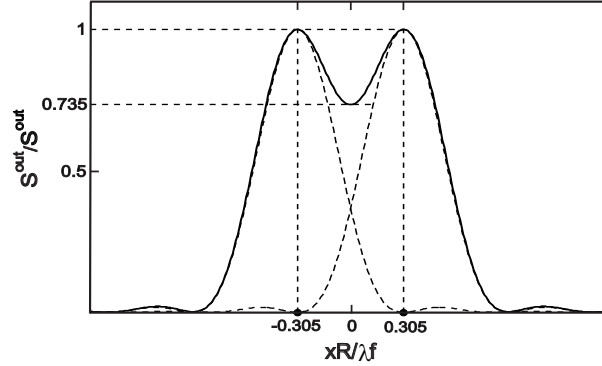


Figura 4.2: Imagen de dos pinholes iluminados incoherentemente, gráficos en coordenadas normalizadas. Los puntos en negrita muestran la localización de los pinholes correspondientes al límite del criterio de resolución de Rayleigh

$$\frac{S^{out}(0)}{S^{out}(d/2)} = 2 \left(2 \frac{J_1(\pi R d / \lambda f)}{\pi R d / \lambda f} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{S_{0x} + S_{0y}} \left[S_{0x} \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_x^2}\right) + S_{0y} \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma_y^2}\right) \right] \right\} = 0,735 \quad (4.20)$$

Es obvio que la separación mínima d'_{min} es mayor que el límite incoherente d_{min} e incrementa con $\eta(-d/2, d/2)$, un hecho que puede ser considerado como una simple generalización del conocido caso escalar al caso vectorial. Para hacer más clara la dependencia de d'_{min} en la estructura intrínseca de correlación de la fuente de iluminación, i.e. en los parámetros σ_i y S_{0i} , resolvimos gráficamente la ecuación trascendental (4.20) para dos casos de iluminación.

En el primer caso evaluamos las raíces de la Ec. (4.20) para un cociente arbitrario S_{0j}/S_{0i} (la polarización P es arbitraria) y para las siguientes combinaciones de valores de los parámetros σ_i :

1. $\sigma_x \ll d, \sigma_y \ll d, [\eta(-d/2, d/2) \approx 0]$;
2. $\sigma_x \gg d, \sigma_y \gg d, [\eta(-d/2, d/2) \approx 1]$;
3. $\sigma_x = \sigma_y = 0,5d, [\eta(-d/2, d/2) \approx 0,14]$;
4. $\sigma_x = \sigma_y = d, [\eta(-d/2, d/2) \approx 0,61]$;

Los resultados correspondientes son mostrados en la Fig. (4.3a). Analizando estos resultados, se puede concluir que la separación mínima resoluble d'_{min} está siempre contenida en el intervalo que va de $0,61\lambda f/R$ a $0,77\lambda f/R$, aumentando cuando la longitud transversal de correlación de la componente del campo incrementa independientemente del grado de polarización.

Para el segundo caso evaluamos las raíces de la Ec. (4.20) para dos valores de parámetros σ_i esencialmente diferentes, a saber $\sigma_i \gg d$ y $\sigma_i \ll d$ y para valores diferentes del cociente S_{0j}/S_{0i} , es decir:

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.2. RESOLUCIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN
PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

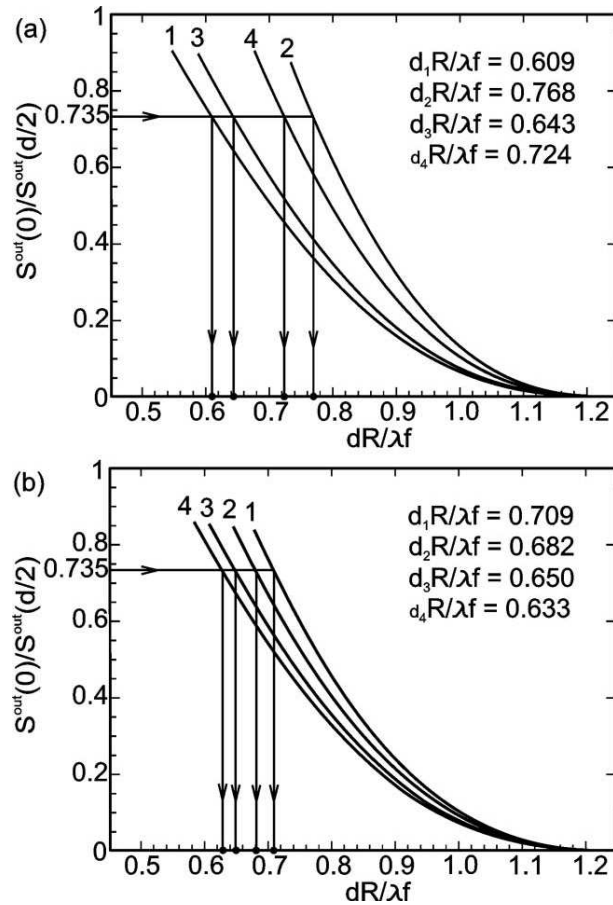


Figura 4.3: Solución gráfica de la Ec. (4.20) para el caso de polarización arbitraria (a) y para el caso de valores diferentes para el grado de polarización (b). La numeración de las curvas corresponde a la misma numeración de los parámetros correspondientes dados en el texto. Las raíces de la Ec. (4.20) son mostradas con puntos en negrita y sus valores numéricos son mostrados a la derecha de la gráfica.

1. $S_{0j}/S_{0i} = 1$, $[\eta(-d/2, d/2) \approx 0,5, P = 0]$;
2. $S_{0j}/S_{0i} = 2$, $[\eta(-d/2, d/2) \approx 0,33, P = 0,33]$;
3. $S_{0j}/S_{0i} = 5$, $[\eta(-d/2, d/2) \approx 0,173, P = 0,66]$;
4. $S_{0j}/S_{0i} = 10$, $[\eta(-d/2, d/2) \approx 0,09, P = 0,82]$;

Los resultados correspondientes son mostrados en la Fig. (4.3b). Como puede verse de la figura, esta vez la separación mínima resoluble d'_{min} disminuye cuando el cociente S_{0j}/S_{0i} aumenta.

CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO

4.3. RESOLUCIÓN EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

4.3. Resolución en frecuencia de un sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada

Como se vio en la sección precedente la separación mínima resoluble de dos objetos puntuales depende de las propiedades intrínsecas de iluminación, aumentando con el aumento de la longitud de correlación de las componentes del campo y disminuyendo con el aumento de la razón de las potencias. Ahora investigaremos cuál es el efecto de las propiedades estadísticas de un campo de iluminación en un sistema óptico transformador de Fourier.

Como es bien sabido, un sistema que realiza la transformada de Fourier forma en el plano de observación, la distribución de intensidad que es proporcional a las frecuencias espaciales del objeto. Para la mayoría de las aplicaciones prácticas la calidad del espectro obtenido puede ser evaluada usando un criterio para la resolución espectral; es decir, que tan bien pueden distinguirse dos líneas espectrales consecutivas. En nuestro caso, debido a la falta de una definición estandar de resolución espectral, emplearemos un criterio propio. Además, es usual considerar que un objeto es iluminado por un campo completamente coherente y polarizado cuando la resolución espectral alcanza su límite mínimo. Sin embargo, en aplicaciones generales, la luz es parcialmente coherente y polarizada.

Considerese un proceso en el que se forma el espectro de frecuencia espectral de un objeto justo a la izquierda de una lente delgada convergente como se muestra en la Fig. (4.4). Supondemos que el objeto representa una pantalla delgada semitransparente caracterizada, en una posición \mathbf{x} , por una transmitancia $t(\mathbf{x})$. Supondremos, además, que el objeto es iluminado por un campo parcialmente coherente y parcialmente polarizado caracterizado por la matriz de densidad espectral cruzada

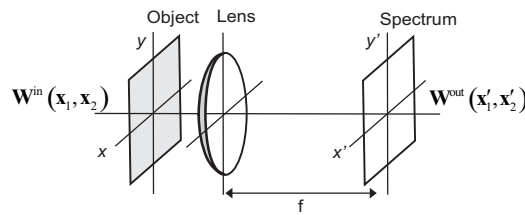


Figura 4.4: Forma del espectro dada por la ecuación 4.

$$\mathbf{W}^{in}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} W_{xx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & W_{xy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ W_{yx}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & W_{yy}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

donde $W_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle E_i^*(\mathbf{x}_1)E_j(\mathbf{x}_2) \rangle$. Usando la aproximación paraxial, puede demostrarse que la matriz de densidad espectral cruzada en el plano focal de la lente, en el plano de observación, tiene la siguiente forma

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.3. RESOLUCIÓN EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{out}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda f} (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2)^2 \right] \iint_{-\infty}^{\infty} t^*(\mathbf{x}'_1) t(\mathbf{x}'_2) \mathbf{W}^{out}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \times \\ \times \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_2 \cdot \mathbf{x}_2) \right] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Correspondientemente, el espectro de potencia del campo en el plano de salida del sistema, expresado en términos del vector de frecuencia espectral $\mathbf{p} = \mathbf{x}'/\lambda f$, está dado por

$$S^{out}(\mathbf{x}) = \text{Tr} \mathbf{W}^{out}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \text{Tr} \left[\frac{1}{(\lambda f)^2} \right] \iint_{-\infty}^{\infty} t^*(\mathbf{x}'_1) t(\mathbf{x}'_2) \mathbf{W}^{in}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp[-i2\pi \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (4.23)$$

Para evaluar la resolución en frecuencia del sistema, escogemos un objeto cuya transmitancia tiene la siguiente forma

$$t(\mathbf{x}) = \cos(2\pi p_0 x) + \cos[2\pi(p_0 + \Delta p)x] \quad (4.24)$$

donde p_0 es una frecuencia espacial fija y Δp es la distancia espectral entre dos armónicos espaciales. Para resolver satisfactoriamente el problema, necesitamos primeramente considerar la transformada de Fourier de la función $\mathbf{W}^{in}(x_1, x_2)$, la cual es

$$\mathbf{W}^{in}(p_1, p_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{W}^{in}(x_1, x_2) \exp[-i2\pi(p_1 x_1 + p_2 x_2)] dx_1 dx_2 \quad (4.25)$$

En la ecuación está presente el producto de las transmitancias para dos puntos cualesquiera. Desarrollando este producto se obtiene

$$\begin{aligned} t^*(\mathbf{x}_1) t(\mathbf{x}_2) &= \{ \cos(2\pi p_0 x_1) + \cos[2\pi(p_0 + \Delta p)x_1] \} \{ \cos(2\pi p_0 x_2) + \cos[2\pi(p_0 + \Delta p)x_2] \} \\ &= \cos(2\pi p_0 x_1) \cos(2\pi p_0 x_2) + \cos[2\pi(p_0 + \Delta p)x_1] \cos[2\pi(p_0 + \Delta p)x_2] \\ &\quad + \cos(2\pi p_0 x_1) \cos[2\pi(p_0 + \Delta p)x_2] + \cos(2\pi p_0 x_2) \cos[2\pi(p_0 + \Delta p)x_1], \end{aligned} \quad (4.26)$$

recordando la siguiente relación

$$\cos(2\pi p_0 x) = \frac{1}{2} [\exp(i2\pi p_0 x) + \exp(-i2\pi p_0 x)]$$

y aplicando esta propiedad a la Ec. (4.26) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} [\exp(i2\pi p_0 x_1) - \exp(-i2\pi p_0 x_1)] [\exp(i2\pi p_0 x_2) - \exp(-i2\pi p_0 x_2)] = \\ = \exp[i2\pi p_0(x_1 + x_2)] + \\ \exp[-i2\pi p_0(x_1 + x_2)] \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.3. RESOLUCIÓN EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA

$$- \exp[i2\pi p_0(x_2 - x_1)] - \exp[-i2\pi p_0(x_2 - x_1)] \quad (4.27)$$

Nótese que para producto de cosenos obtenemos cuatro exponenciales, por lo tanto, tendremos en total 16 términos. Más adelante se demostrará que en total sólo quedarán dos términos. Sustituyendo esta ecuación en la integral (4.25) obtendremos cuatro integrales. Para resolverlas nos fijaremos sólo en la primera integral, los términos restantes se hacen de manera análoga. Tenemos, entonces, lo siguiente

$$\begin{aligned} & \iint \exp[i2\pi p_0(x_1 + x_2)] \mathbf{W}(x_1, x_2) \exp[-i2\pi p(x_1 + x_2)] dx_1 dx_2 = \\ & = \int \exp(i2\pi p_0 x_2) \exp(-i2\pi p x_2) dx_2 \int \exp(i2\pi p_0 x_1) \mathbf{W}^{in}(x_1, x_2) \exp(-i2\pi p x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

aplicando la siguiente propiedad de la transformada de Fourier

$$F[\mathbf{W}(x_1, x_2) \exp(i2\pi p_0 x_1)] = \mathbf{W}(p - p_0, x_2)$$

y la Ec. (4.28) queda como

$$\int \exp(i2\pi p_0 x_2) \mathbf{W}(p - p_0, x_2) \exp(-i2\pi p x_2) dx_2 = \mathbf{W}(p - p_0, p - p_0)$$

Los demás términos serán entonces

$$\mathbf{W}(p - p_0, p - p_0) + \mathbf{W}(p + p_0, p + p_0) - \mathbf{W}(p + p_0, p - p_0) - \mathbf{W}(p - p_0, p + p_0) \quad (4.29)$$

Siguiendo el mismo procedimiento con los términos restantes obtendremos en total 16 términos. Todos estos son

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}(p - p_0 - \Delta p, p - p_0 - \Delta p) + \mathbf{W}(p + p_0 + \Delta p, p + p_0 + \Delta p) - \\ & \mathbf{W}(p + p_0 + \Delta p, p - p_0 - \Delta p) - \mathbf{W}(p - p_0 - \Delta p, p + p_0 + \Delta p) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}(p - p_0, p - p_0 - \Delta p) + \mathbf{W}(p + p_0, p + p_0 + \Delta p) - \\ & \mathbf{W}(p + p_0, p - p_0 - \Delta p) - \mathbf{W}(p - p_0, p + p_0 + \Delta p) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}(p - p_0 - \Delta p, p - p_0) + \mathbf{W}(p + p_0 + \Delta p, p + p_0) - \\ & \mathbf{W}(p + p_0 + \Delta p, p - p_0) - \mathbf{W}(p - p_0 - \Delta p, p + p_0) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Finalmente, para valores suficientemente grandes de p_0 y $p > 0$, el espectro de potencia $S^{out}(p)$ en el plano de observación será

$$S^{out}(p) = \text{Tr} \frac{1}{(4\lambda f)^2} [\widetilde{\mathbf{W}}^{in}(p - p_0, -p + p_0) + \widetilde{\mathbf{W}}^{in}(p - p_0 - \Delta p, -p + p_0 + \Delta p)], \quad (4.33)$$

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.3. RESOLUCIÓN EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA

donde los otros términos son despreciables en comparación a estos dos. La forma típica del espectro dado por la Ec. (4.33) se muestra en la Fig. (4.5). Observando la gráfica, podemos concluir que la resolución frecuencial del sistema en consideración se determina por el ancho efectivo de la función $\widetilde{\mathbf{W}}^{in}$, i.e.,

$$(\Delta p)_{min} = \frac{\text{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{W}}^{in}(p, -p) dp}{\text{Tr} \widetilde{\mathbf{W}}^{in}(0, 0)} \quad (4.34)$$

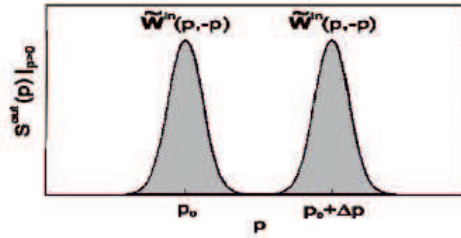


Figura 4.5: Forma del espectro dada por la Ec. (4.33).

Para poder hacer un análisis del resultado obtenido en forma cerrada, supondremos que el objeto es iluminado por un haz Shell-Gaussiano cuya matriz de densidad espectral cruzada tiene la forma de la Ec. (4.7) y cuyos elementos están dados por la Ec. (4.8). Es importante mencionar que el cociente $\gamma_i = \sigma_i/\sigma$ representa una medida del grado global de coherencia (espacial) de la correspondiente componente del campo, mientras que el cociente $\beta = S_{0i}/S_{0j}$ puede asociarse a la medida del grado de polarización del haz.

Haciendo uso de las ecuaciones (4.25) y (4.8), encontramos para la iluminación Shell-Gaussiano

$$\widetilde{W}_{ii}^{in}(p, -p) = S_{0i} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{(x_1 + x_2)^2}{2\sigma_i^2}\right] \exp[-i2\pi p(x_1 - x_2)] dx_1 dx_2. \quad (4.35)$$

Para resolver esta integral de manera sencilla hacemos el siguiente cambio de variable

$$\xi = x_1 - x_2, \quad \eta = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (4.36)$$

con esta sustitución, la integral (4.35) se convierte en

$$\begin{aligned} &= S_{0i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{8\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_i^2}\right) \exp(-i2\pi p\xi) d\xi \\ &= S_{0i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\sigma^2 + \sigma_i^2}{8\sigma^2\sigma_i^2} \xi^2\right) \exp(-i2\pi p\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.37)$$

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**
4.3. RESOLUCIÓN EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA

Podemos ver que la integral (4.35) de dos variables se ha reducido a dos integrales de una variable cada una. Estas son más fáciles de resolver, pues sus soluciones analíticas existen, basta con consultar una tabla de integrales.

Resolvamos primeramente el caso paa la integral respecto a η , para esto hacemos uso de la siguiente integral (para esta y la siguiente integral consulte la referencia [11])

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (4.38)$$

sustituyendo los valores correspondientes llegamos a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta = 2 \int_0^{\infty} \exp(-a^2 u^2) du \quad (4.39)$$

donde

$$a^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \quad u = \eta$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta = 2 \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{2}\sigma}{2} \quad (4.40)$$

Para la integral respecto a ξ haremos uso de la siguiente integral analítica

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2 u^2) \exp(-iuv) du = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} \exp\left(-\frac{v^2}{4a^2}\right) \quad (4.41)$$

donde al sustituir obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\sigma^2 + \sigma_i^2}{8\sigma^2\sigma_i^2} \xi^2\right) \exp(-i2\pi p\xi) d\xi = 2 \int_0^{\infty} \exp(-a^2 u^2) \exp[-iuv] du \quad (4.42)$$

donde

$$a^2 = \frac{4\sigma^2 + \sigma_i^2}{8\sigma^2\sigma_i^2} = \frac{4 + \gamma_i^2}{8\sigma_i^2}$$

y

$$u = \frac{p}{2\pi}, \quad v = \xi$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4\sigma^2 + \sigma_i^2}{8\sigma^2\sigma_i^2} \xi^2\right) \exp(-i2\pi p\xi) d\xi = 2 \frac{\sqrt{\pi}(2\sqrt{2}\sigma_i)}{(4 + \gamma_i^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{4\pi^2 8\sigma_i^2 p^2}{4(4 + \gamma_i^2)}\right].$$

**CAPÍTULO 4. EFECTO DE LA COHERENCIA Y LA POLARIZACIÓN
EN LA FORMACIÓN DE IMAGEN Y EN EL ESPECTRO DEL OBJETO**

4.4. CONCLUSIONES

Al combinar ambos resultados obtenemos finalmente

$$\widetilde{W}_{ii}^{in}(p, -p) = \frac{4\pi\sigma^2 S_{0i}\gamma_i}{(4 + \gamma_i^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{8\pi^2\sigma^2\gamma_i^2}{4 + \gamma_i^2} p^2\right) \quad (4.43)$$

Luego, al sustituir (4.43) en la Ec. (4.34) y usando una vez más la integral (4.38), encontramos la siguiente expresión para la resolución espacial en frecuencias para el sistema óptico transformada de Fourier

$$(\Delta p)_{min} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\right) \frac{\beta + 1}{\beta \frac{\gamma_x}{(4+\gamma_x^2)^{1/2}} + \frac{\gamma_y}{(4+\gamma_y^2)^{1/2}}} \quad (4.44)$$

La expresión (4.44) revela el efecto que tiene el grado de coherencia y el grado de polarización de la fuente de iluminación en la resolución espacial de frecuencia en un sistema óptico que realiza la transformada de Fourier. En efecto, como puede observarse en la Fig. (4.6a), correspondiente al caso cuando el grado de coherencia de ambas componentes del campo electromagnético son iguales (es decir, cuando $\gamma_x = \gamma_y = \gamma$), la resolución espacial de frecuencia $(\Delta p)_{min}$ decae con el incremento de γ independientemente del grado de polarización, empezando del infinito para valores $\gamma \ll 1$ (luz completamente incoherente) y tendiendo asintóticamente a su valor límite mínimo $1/2\sqrt{2\pi}\sigma$ para valores $\gamma \gg 1$ (luz completamente coherente). Por otro lado, como puede verse de la Fig. (4.6b), para $\gamma_x \neq \gamma_y$ (por simplicidad escogemos $\gamma_x = 1$ y $\gamma_y = 0,1$) la resolución espacial de frecuencia $(\Delta p)_{min}$ aumenta con el incremento de β empezando de su valor mínimo para $\beta \ll 1$ (luz completamente polarizada), y tendiendo asintóticamente a su valor límite para $\beta \gg 1$ (luz completamente no polarizada).

4.4. Conclusiones

El análisis dado en la sección (4.2) revela una relación más estrecha entre las propiedades de coherencia de la iluminación electromagnética vectorial y la capacidad resolutoria de un sistema óptico formador de imagen en comparación con el caso escalar. Como ha sido mostrado, la separación mínima resoluble entre dos puntos puntuales depende de la estructura de correlación intrínseca de iluminación, aumenta con el aumento de la longitud de correlación de las componentes del campo y disminuye con el aumento del cociente de sus potencias.

Por otra parte, cuando se está diseñando un sistema óptico que realiza la transformada de Fourier, para obtener la mejor resolución espacial de frecuencia, se debe preferir a la luz completamente coherente independientemente del grado de polarización de la fuente. Cuando por alguna razón esto no es posible, la luz parcialmente coherente deberá ser usada. En este caso se aconseja filtrar de antemano la componente con el mayor grado de coherencia global; esto puede realizarse, e.g., empleando las pantallas polarizantes adecuadas. Sin embargo, debe de considerarse que en ciertas aplicaciones no es necesario obtener la mejor frecuencia espectral. Este tipo de situaciones ocurren, e.g., en el análisis espectral de objetos aleatorios, cuando la baja resolución en frecuencia puede ser usada de manera ventajosa para suavizar el llamado espectro “en bruto” con el propósito de mejorar la fiabilidad estadística del espectro obtenido ([25],[26]). En este caso, la función

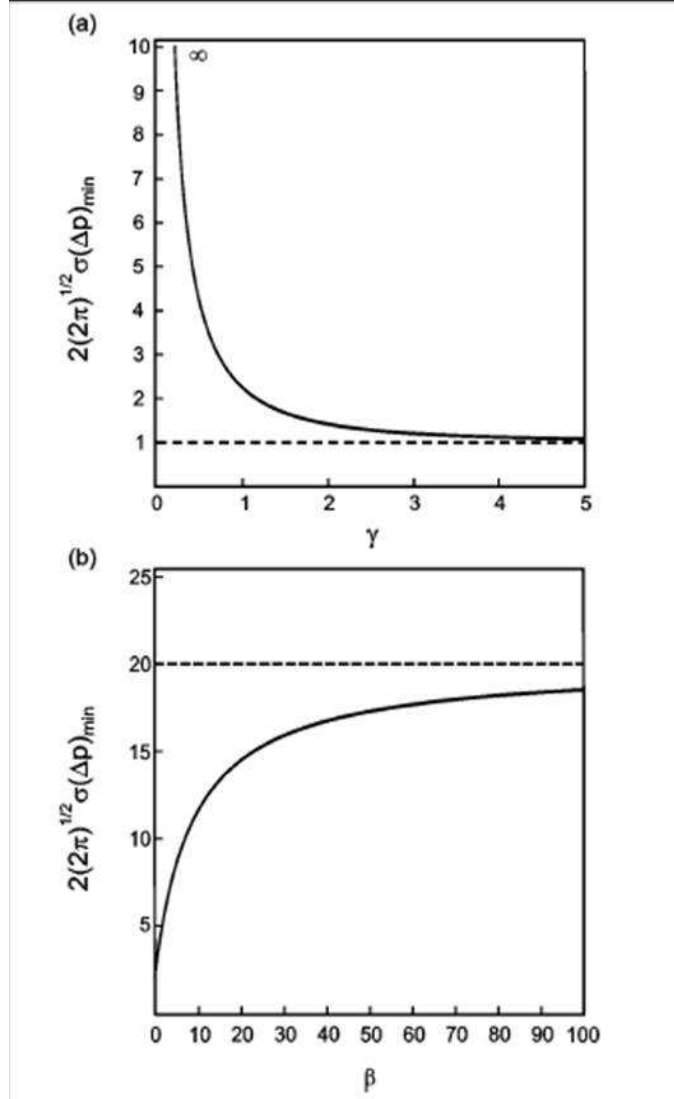


Figura 4.6: Dependencia de la resolución en frecuencia espacial normalizada del grado global de coherencia (a) y del grado de polarización (b) del campo de iluminación.

$\widetilde{\mathbf{W}}(p, -p)$ desempeña el papel de “ventana espectral” cuyo ancho efectivo determina el grado de suavizado estadístico.

Finalmente, no está fuera de lugar mencionar que la iluminación dada por las Ecs. (4.7-4.10) puede ser fácilmente generada con un experimento físico (véase, por ejemplo, [34], [31], [21] y [27]), por lo que los resultados obtenidos pueden encontrar variados usos prácticos.

Capítulo 5

Simulación de un sistema óptico con la iluminación parcialmente coherente y parcialmente polarizada

5.1. Representación en modos coherentes de un sistema bilineal

Recordemos que la representación en modos coherentes (para el caso escalar) de la función de densidad espectral cruzada puede representarse como una serie de Mercer

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \lambda_n \phi_n^*(\mathbf{x}_1) \phi_n(\mathbf{x}_2), \quad (5.1)$$

donde λ_n son los eigenvalores y $\phi_n(\mathbf{x})$ las eigenfunciones de la ecuación integral de Fredholm

$$\int_D W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_n(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 = \lambda_n \phi_n(\mathbf{x}_2). \quad (5.2)$$

Cada término en la sumatoria de la Ec. (5.1) puede considerarse como un modo del campo de iluminación que es completamente coherente. Substituyendo para $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ de la Ec. (5.1) en la Ec. (3.17) obtendremos,

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}') &= \iint_{-\infty}^{\infty} t_0^*(\mathbf{x}_1) t_0(\mathbf{x}_2) \left[\sum_n \lambda_n \phi_n^*(\mathbf{x}_1) \phi_n(\mathbf{x}_2) \right] h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \\ &= \sum_n \lambda_n \left[\iint_{-\infty}^{\infty} t_0^*(\mathbf{x}_1) t_0(\mathbf{x}_2) \phi_n^*(\mathbf{x}_1) \phi_n(\mathbf{x}_2) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right], \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

5.1. REPRESENTACIÓN EN MODOS COHERENTES DE UN SISTEMA BILINEAL

$$\begin{aligned}
 &= \sum_n \lambda_n \left[\int_{-\infty}^{\infty} t_0^*(\mathbf{x}_1) \phi_n^*(\mathbf{x}_1) h^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} t_0(\mathbf{x}_2) \phi_n(\mathbf{x}_2) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 \right], \\
 &= \sum_n \lambda_n \left[\int_{-\infty}^{\infty} t_0(\mathbf{x}_1) \phi_n(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \right]^* \left[\int_{-\infty}^{\infty} t_0(\mathbf{x}_2) \phi_n(\mathbf{x}_2) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 \right],
 \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son variables de integración mudas, la expresión anterior se reduce a

$$S(\mathbf{x}') = \sum_n \lambda_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} t_0(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2. \quad (5.3)$$

Obviamente, cada término bajo la sumatoria en la Ec. 5.3 puede interpretarse como una porción del sistema de salida correspondiente al n -ésimo modo coherente del campo de iluminación o, más brevemente, como una *salida modal* del sistema. Por esto mismo, la expansión dada por la Ec. 5.3 puede referirse como *representación en modos coherentes de un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente*.

Para mostrar las ventajas de la representación en modos coherentes de un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente, reescribiremos la Ec. 5.3 en dos formas distintas, pero equivalentes. La primer forma se puede escribir como

$$S(\mathbf{x}') = \sum_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} t_0(\mathbf{x}) q_1^{(n)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2, \quad (5.4)$$

donde

$$q_1^{(n)} = \sqrt{\lambda_n} \phi_n(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}', \mathbf{x}). \quad (5.5)$$

De acuerdo a las series de Volterra, la función $q_1^{(n)}$ dada por la Ec. 5.4 representa el kernel de primer orden de Volterra y por lo tanto la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_0(\mathbf{x}) q_1^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.6)$$

puede ser considerada como la salida del correspondiente sistema óptico lineal (coherente) o, más brevemente, el *sistema modal*. De este modo, se puede dar la siguiente interpretación física de la expansión 5.4: *un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente puede ser representado como un conjunto paralelo de sistemas modales coherentes con impulso de respuesta $q_1^{(n)}(\mathbf{x})$, cada uno seguido de un cuadrado*.

Reescribiendo ahora la Ec. 5.4 de la siguiente manera

$$S(\mathbf{x}') = \sum_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} t_0^{(n)} q_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2, \quad (5.7)$$

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

5.2. ALGORITMO RÁPIDO PARA TRANSFORMADAS BILINEALES EN ÓPTICA

donde $q_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = h(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ y

$$t_0^n(\mathbf{x}) = \sqrt{\lambda_n} \phi_n(\mathbf{x}) t_0(\mathbf{x}). \quad (5.8)$$

La función $t_0^{(n)}$ describe el resultado de la modulación de un modo del campo por el objeto y puede definirse como el *objeto modal*. Se puede ver que la integral en la Ec. 5.7 representa la respuesta del sistema, completamente coherente, lineal en la amplitud compleja, al objeto modal $t_0^{(n)}(\mathbf{x})$. De esta manera, podremos dar la siguiente interpretación física a la Ec. 5.7: *un sistema óptico con iluminación parcialmente coherente puede ser representado como el conjunto paralelo de los sistemas coherentes con la misma respuesta al impulso $q_1(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ y con los objetos modales $t_0^{(n)}(\mathbf{x})$ como salidas, cada una seguida de un cuadrado.*

5.2. Algoritmo rápido para transformadas bilineales en óptica

En la presente sección, comparamos la complejidad computacional al calcular el espectro de potencia $S(\mathbf{x}')$ al usar la representación bilineal de la Ec. (3.17) y usando la representación en modos coherentes (5.4).

Usando una muestra de $K \times K$ puntos en cada plano \mathbf{x} y \mathbf{x}' , la Ec. 3.17 puede escribirse en forma discreta

$$S(i, j) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K t_0^*(k, l) t_0(m, n) W(k, l, m, n) h^*(i, j, k, l) h(i, j, m, n) \quad (5.9)$$

donde, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se ha supuesto que la distancia entre las muestras Δx y Δy son uno. La cantidad de operaciones a realizar en la Ec. 5.9 corresponde al número de multiplicaciones de los valores t_0^* , t_0 , W , y h tomado sobre todo los posibles valores de los pares de puntos (k, l) , (m, n) , e (i, j) . Para un sólo valor de S el número de operaciones necesarias es el número de elementos en las sumatorias, denotando por C_{ij} a este valor tenemos

$$C_{ij} = K^3 \quad (5.10)$$

operaciones. La cantidad necesaria para completar el cálculo, lo hallamos en el número total de puntos (i, k) . Siendo $K \times K$ la muestra de puntos, el total de operaciones necesarias para obtener el espectro de potencia será K^2 veces C_{ij}

$$C = (K^3)^2 = K^6. \quad (5.11)$$

La magnitud del tiempo computacional es inaceptablemente grande. Por ejemplo, cuando $K = 100$ y si el tiempo computacional es de 10^6 operaciones por segundo, entonces el tiempo necesario para calcular $S(i, j)$ es de alrededor de 300 horas.

Ahora calculemos el esfuerzo computacional usando la Ec. 5.4. Suponiendo que la sumatoria en la representación en modos coherentes está truncada por el número efectivo de

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

5.2. ALGORITMO RÁPIDO PARA TRANSFORMADAS BILINEALES EN ÓPTICA

modos coherentes \aleph (véase Cap. 1, secc. 2.5), podemos escribir la versión discreta de la Ec. (5.7) como

$$S(i, j) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K t_0(k, l) \sqrt{\lambda_n} \phi_n(k, l) h^*(i, j, k, l) \right] \left[\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K t_0(k, l) \sqrt{\lambda_n} \phi_n(k, l) h^*(i, j, k, l) \right]^* . \quad (5.12)$$

Puede mostrarse que el número de operaciones para calcular $S(i, j)$ para este caso es

$$C = \aleph[(K^2)^2 + K^2] = \aleph K^2(K^2 + 1) \quad (5.13)$$

o, para valores suficientemente grandes de K ,

$$C \approx \aleph K^4. \quad (5.14)$$

Para comparar este resultado con el obtenido en la Ec. (5.11), primero discutiremos el rango de valores posibles para \aleph . Como se discutió brevemente en el Cap. 2, el valor \aleph incrementa con la disminución del valor del grado de coherencia de la fuente de iluminación. Para una fuente completamente coherente, $\aleph = 1$, y el esfuerzo computacional requerido para obtener el espectro de potencia es K^4 . Para luz parcialmente coherente, C incrementa de manera lineal con \aleph , i.e., el esfuerzo computacional se hace mayor conforme se vuelve más incoherente la iluminación. Para valores suficientemente grandes de \aleph , por ejemplo $\aleph \geq K$, la iluminación puede considerarse como completamente incoherente. En este caso, la densidad espectral cruzada $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ puede ser aproximada por la función delta de Dirac, i.e.,

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = S_0 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (5.15)$$

y la transformación bilineal Ec. (??) se reduce a

$$S(\mathbf{x}') = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |t_0(\mathbf{x})|^2 |h(\mathbf{x}'; \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (5.16)$$

donde S_0 es una constante. Por lo tanto, el número de operaciones necesarias para obtener $S(i, j)$ se reduce nuevamente a K^4 .

La comparación entre la eficiencia computacional del cálculo directo de la transformación bilineal (5.9) y su representación en modos coherentes (5.12), para valores distintos de \aleph , se ilustra de manera esquemática en la Fig 5.1. Es evidente de esta figura que la representación en modos coherentes (5.12) puede ser empleada de manera eficiente para calcular el espectro de potencia $S(\mathbf{x}')$ cuando $\aleph \leq K$. Para los mismos valores de K y usando la misma rapidez operacional dada en el ejemplo previo, el tiempo computacional necesario para obtener $S(i, j)$ de la Ec. (5.12) toma entre dos minutos y tres horas, dependiendo del grado de coherencia de la fuente. Por analogía al conocido algoritmo rápido de la transformada de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), nos referiremos al presente algoritmo para calcular el espectro de potencia (3.17) en base a la Ec. (5.12) como *algoritmo rápido de la transformada bilineal* (FBLT, por sus siglas en inglés).

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

5.3. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DEL ALGORITMO RÁPIDO PARA TRANSFORMADAS BILINEALES EN ÓPTICA

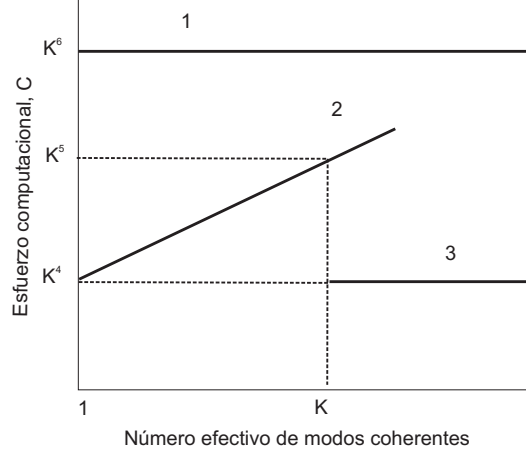


Figura 5.1: Estimación del esfuerzo computacional C en función del número efectivo de modos coherentes N : 1 esfuerzo computacional de acuerdo con la Ec. (5.9); 2 cómputo de acuerdo con la Ec. (5.12); 3 cómputo de acuerdo con la Ec. (5.15)

5.3. Ejemplo de simulación del algoritmo rápido para transformadas bilineales en óptica

Para ilustrar la aplicación del algoritmo FBLT, consideraremos dos ejemplos en donde calculamos el espectro de potencia en el plano de salida del sistema óptico de la Fig.

Como objeto elegimos la función peine de Dirac, i.e.,

$$t(x) = \sum_n \delta(x - mx_0). \quad (5.17)$$

Este objeto fue escogido por dos razones. Primero, la imagen ideal y el espectro de Fourier de tal objeto tiene la misma forma funcional. Segundo, la elección de dicho objeto tiene una expresión analítica explícita, hecho que nos permite evaluar la validez del algoritmo FBLT. Tomando en consideración que el objeto escogido es unidimensional y, por simplicidad, como fuente de iluminación consideraremos que esta es una fuente modelo Schell-Gaussiano con densidad espectral definida por la Ec (4.8). Finalmente, suponiendo que la púpila de la lente tiene forma circular de radio R , la expresión para la función de amplitud del sistema óptico, calculada de acuerdo a la Ec. (3.20), es

$$h(\rho) = \exp\left(i\frac{k}{2z_2}\rho^2\right) \frac{J_1(kR\rho/2f)}{kR\rho/2f}, \quad (5.18)$$

donde $\rho = (u^2 + v^2)^{1/2}$ y J_1 denota la función de Bessel de primer orden.

Primeramente, supondremos que el sistema óptico forma la imagen del objeto sin magnificación ($z_1 = z_2 = 2f$). Luego, sustituyendo $t(x)$, $W(x_1, x_2)$, y $h(u; x)$ de las Ecs. (5.17), (2.45), y (5.18), respectivamente, en la versión unidimensional de la Ec. y usando la propiedad de cambio de la función de Dirac, es posible demostrar que la expresión para el espectro de potencia $S(x')$ es la siguiente:

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

**5.3. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DEL ALGORITMO RÁPIDO PARA
TRANSFORMADAS BILINEALES EN ÓPTICA**

$$S(x') = S(0) \sum_{n,l} A_{ml} \frac{J_1[kR(x' + mx_0)/2f]}{kR(x' + mx_0)/2f} \frac{J_1[kR(x' + lx_0)/2f]}{kR(x' + lx_0)/2f}, \quad (5.19)$$

donde

$$A_{ml} = \exp \left[-\frac{x_0^2}{4\sigma_s^2} (m^2 + l^2) \right] \exp \left[-\frac{x_0^2}{2\sigma_\mu^2} (m^2 - l^2) \right]. \quad (5.20)$$

Por analogía, pero esta vez usando la versión 1D de la Ec. 3.17 obtendremos la siguiente aproximación para el espectro de potencia $S(x')$:

$$\widehat{S}(x') = S(0) \sum_{n=0}^{N-1} B_n \left[\sum_m C_{nk} \frac{J_1[kR(x' + mx_0)/2f]}{kR(x' + mx_0)/2f} \right], \quad (5.21)$$

donde

$$B_n = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{b}{a + b + c} \right), \quad (5.22)$$

y

$$C_{nm} = H_n(mx_0\sqrt{2c}) \exp(-cm^2x_0^2), \quad (5.23)$$

donde H_n , como antes, denota el polinomio de Hermite de orden n .

Ahora, supongamos que el sistema óptico realiza la transformada de Fourier del objeto ($z_1 = z_2 = f$). En este caso, haciendo uso de las Ecs. (3.21), (2.45, en su forma 1D), y (5.17), se puede mostrar que el espectro de potencia $S(x')$ toma la forma

$$S(x') = S_0 \left\{ A_0 + \sum_{m \neq l} A_{ml} \cos \left[\frac{k}{2f} x' x_0 (m - l) \right] \right\}, \quad (5.24)$$

donde

$$A_0 = \sum_m \exp \left(-\frac{x_0^2}{2\sigma_I^2} m^2 \right), \quad (5.25)$$

donde A_{ml} tiene la misma forma que la Ec. (5.20).

Usando ahora el algoritmo FBLT, obtendremos la siguiente aproximación para el espectro de potencia (5.24):

$$\widehat{S}(x') = S_0 \sum_{n=0}^{N-1} B_n \left\{ C_{n0} + 2 \sum_{m \neq l} C_{nml} \cos \left[\frac{k}{2f} x' x_0 (m - l) \right] \right\}, \quad (5.26)$$

donde

$$C_{n0} = \sum_m H_n^2(mx_0\sqrt{2c}) \exp(-2cm^2x_0^2), \quad (5.27)$$

$$C_{nml} = H_n(mx_0\sqrt{2c}) H_n(lx_0\sqrt{2c}) \exp[-cx_0^2(m^2 + l^2)]. \quad (5.28)$$

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

5.4. REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

5.4. Representación alternativa en modos coherentes

La representación en modos coherentes (RMC) de una fuente aleatoria es una herramienta muy poderosa en la óptica contemporánea. En la sección anterior se vio que dicha representación simplifica notoriamente los cálculos computacionales a la hora de querer obtener el espectro de potencia de algún objeto dado; no obstante, para poder utilizar dicho método es necesario conocer la densidad espectral cruzada de la fuente *a priori*, lo cual presenta una desventaja pues está generalmente es desconocida. Entonces, el valor práctico de la RMC es esencialmente restrictiva debido a la complejidad inherente al resolver analíticamente a integral de Fredholm con la densidad espectral-cruzada de la fuente como kernel. Además, como fue mencionado, la expresión analítica para la densidad espectral cruzada de la fuente generalmente se desconoce, hecho que hace que la solución a la integral de Fredholm sea imposible de resolver. Un método alterno fue propuesto por Ostrovsky ([28] y [20]) el cual permite hallar la representación modal de una fuente que no implica resolver la integral de Fredholm, sino en la obtención de mediciones radiométricas. Dicho método se conoce como la Representación Alternativa en Modos Coherentes (RAMC) de la fuente. En la presente sección discutiremos dicho método y la sección siguiente ilustraremos lo mencionado con un ejemplo.

Desde el punto de vista de la radiación emitida, la fuente plana puede ser caracterizada por la intensidad radiante; que representa el cambio de energía por unidad de ángulo sólido alrededor de la dirección especificada por el vector 3D unitario \mathbf{s} , y es definida como

$$J(\mathbf{s}) = \left(\frac{k}{2\pi}\right) \cos^2 \theta \iint_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp[-ik\mathbf{s}_{\perp}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (5.29)$$

donde \mathbf{s}_{\perp} es el vector 2D obtenido al proyectar el vector \mathbf{s} en la fuente del plano, θ es el ángulo que el vector \mathbf{s} hace con el eje z , y k es el número de onda. Las integrales en el lado derecho de la Ec. (5.29) son extendidas sobre el plano $z = 0$ donde $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tiene valores de cero cuando se encuentra fuera de la región D de la fuente.

Debido a que la función $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ generalmente se desconoce a priori, la forma analítica de la función (5.29) también se desconoce. Sin embargo, se puede mostrar que la intensidad radiante $J(\mathbf{s})$ puede ser fácilmente medida por medio de un experimento físico. En realidad, en el plano de una fuente secundaria, si se coloca una lente esférica delgada, la densidad espectral cruzada del campo óptico inmediatamente detrás de la lente está dada por

$$W'(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = t^*(\mathbf{x}_1)t(\mathbf{x}_2)W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (5.30)$$

donde

$$t(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{k}{2f}\mathbf{x}^2\right) \quad (5.31)$$

es la amplitud de la transmitancia de la lente y f es la distancia focal de la lente. El espectro de potencia del campo en el plano focal trasero de la lente, según el principio de Huygens-Fresnel

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

5.4. REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

$$S(\mathbf{x}') = \left(\frac{k}{2\pi}\right) \cos^2 \theta \iint_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp\left(i\frac{\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2}{2f}\right) \exp\left[-i\frac{k}{f}\mathbf{x}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\right] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (5.32)$$

Sustituyendo $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ las Ecs. (5.30) y (5.31) dentro de la Ec. (5.32) y reemplazando \mathbf{x}/f por \mathbf{s}_\perp , obtenemos

$$S(\mathbf{s}_\perp) = \left(\frac{k}{2\pi f}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \exp[-ik\mathbf{s}_\perp(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (5.33)$$

El espectro de potencia $S(\mathbf{s}_\perp)$ puede ser registrado por medio de una cámara CCD. Por lo tanto, la intensidad radiante dada por la Ec. (5.29) puede ser calculada por la siguiente ecuación:

$$J(\mathbf{s}) = S(\mathbf{s}_\perp) f^2 \cos^2 \theta. \quad (5.34)$$

La expresión para la densidad espectral cruzada en términos de la representación modal alternativa es

$$W_A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{m=0}^{M-1} \mu_m \phi_m^*(\mathbf{x}_1) \phi_m(\mathbf{x}_2), \quad (5.35)$$

donde M es algún número entero, y μ_m , y $\phi(\mathbf{x})$ son los eigenvalores y eigenfunciones de la ecuación integral de Fredholm de primer orden. Entonces, usando $W_A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ podemos encontrar una expresión para la intensidad radiante de dicha fuente alternativa. Para esto sustituyase la Ec. (5.35) dentro de la Ec. (5.29)

$$J_A(\mathbf{s}_\perp) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos^2 \theta \sum_{m=0}^{M-1} \mu_m |\widetilde{\phi}_{k\mathbf{s}_\perp}|^2, \quad (5.36)$$

donde

$$\phi_m(\widetilde{k\mathbf{s}_\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(\mathbf{x}) \exp[-ik\mathbf{s}_\perp \mathbf{x}] d\mathbf{x}. \quad (5.37)$$

La intensidad radiante de la fuente original, $J(\mathbf{s})$, puede ser medida mediante un experimento físico y la intensidad radiante de la fuente alternativa, $J_A(\mathbf{s})$, puede ser calculada de acuerdo con la Ec. (5.36). Los valores μ_m pueden ser obtenidos minimizando la siguiente funcional:

$$\begin{aligned} L(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}) &= \int_{2\pi} [J(\mathbf{s}) - J_A(\mathbf{s})]^2 d\Omega \\ &= \int_{2\pi} J(\mathbf{s})^2 d\Omega + \int_{2\pi} J_A(\mathbf{s})^2 d\Omega - 2 \int_{2\pi} J(\mathbf{s}) J_A(\mathbf{s}) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.38)$$

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

5.4. REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

En la Ec. (5.38) $d\Omega$ es el elemento del ángulo sólido alrededor de la dirección especificada por el vector \mathbf{s} , y la integración se realiza sobre el ángulo sólido 2π subtendido por el semihemisferio en el cual la fuente radia. Minimizar la Ec. (5.38) significa encontrar las derivadas parciales siguientes:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_m} = 0, \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1). \quad (5.39)$$

Aplicando dicha derivación a (5.38) y sumando obtenemos

$$L_{\min}(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \mu_m \mu_l Q_{ml} + \sum_{m=0}^{M-1} \mu_m P_m, \quad (5.40)$$

donde

$$Q_{ml} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{|\mathbf{s}_\perp| \leq 1} (1 - \mathbf{s}_\perp)^{3/2} |\tilde{\phi}_m(k\mathbf{s}_\perp)|^2 |\tilde{\phi}_l(k\mathbf{s}_\perp)|^2 d\mathbf{s}_\perp \quad (5.41)$$

$$P_m = - \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{|\mathbf{s}_\perp| \leq 1} (1 - \mathbf{s}_\perp)^{1/2} J(\mathbf{s}) |\tilde{\phi}_l(k\mathbf{s}_\perp)|^2 d\mathbf{s}_\perp. \quad (5.42)$$

El problema de optimización dado por la Ec. (5.40) representa un problema clásico de programación cuadrática, que puede ser resuelto mediante algún programa comercial. Una vez que el problema de optimización dado por la Ec. (5.40) se ha resuelto, se puede usar la función de densidad espectral cruzada $W_A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ como la representación modal alternativa de la fuente original. Por supuesto, dicha función no reproducirá por completo la densidad espectral cruzada de la fuente original; sin embargo, se puede sustituir cuando analizamos la energía de la radiación emitida.

Hay que hacer notar una deficiencia en dicha representación, la cual viene como consecuencia del teorema de equivalencia. Dicho teorema, enunciado para fuentes planas, afirma que fuentes ópticas con diferentes propiedades estadísticas pueden generar la misma intensidad radiante, un resultado que trae como consecuencia una ambigüedad en la RAMC. A continuación proponemos un acercamiento distinto a la construcción de la RAMC la cual está basada en la medida de la densidad espectral cruzada de la fuente usando el experimento de Young.

Consideramos una fuente plana con una densidad espectral cruzada desconocida. En muchos casos de interés práctico se puede suponer que dicha fuente es estadísticamente isotrópica. Supondremos también, por simplicidad, que la función de densidad espectral cruzada de la fuente $W(x_1, x_2)$ es una función real. Como se sabe [42], la función de densidad espectral cruzada puede ser medida para cada par de puntos $x_1 = \xi, x_2 = -\xi$, usando el experimento de interferencia de Young. Una vez que ha sido realizada la medición de $W(\xi, -\xi)$, construimos la función siguiente:

$$W_A(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{M-1} \mu_m \phi_m(x_2) \phi_m(x_1), \quad (5.43)$$

donde M es algún número entero, $\phi_m(x)$ son un conjunto de funciones ortogonales de valor real en algún dominio D , i.e.,

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

5.4. REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

$$\int_D \phi_m(x)\phi_l(x)dx = \delta_{ml}, \quad (5.44)$$

donde δ_{ml} es la delta de Kronecker, y μ_m son los valores que minimizan la funcional

$$L(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} [W(\xi, -\xi) - W_A(\xi, -\xi)]^2 d\xi. \quad (5.45)$$

Como se sigue de lo dicho anteriormente, las funciones modales $\phi_m(x)$ deben ser elegidas de tal manera que formen una base ortogonal en el dominio D . Por razones prácticas, requerimos que estas funciones admitan cálculos de tal modo que la transformada de Fourier de estas funciones existan de forma cerrada. Entonces, como elección de las funciones modales $\phi_m(x)$ se puede utilizar la base formada por los polinomios de Hermite H_m , donde m es el orden del polinomio. Esta base obedece la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)H_m(u)H_l(u)du = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{ml}. \quad (5.46)$$

Comparando las Ecs. (5.44) y (5.46), se encuentra que

$$\phi_m(x) = \left(\frac{1}{\alpha 2^m m!} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{2\alpha^2} x^2\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} x\right) \quad (5.47)$$

donde

$$\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(x, x) dx}{W(0, 0)}, \quad (5.48)$$

es el ancho efectivo de la fuente original. Entonces, sustituyendo la Ec. (5.47) en la Ec. (5.43), encontramos que

$$W_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{\pi}{2\alpha^2}(x_1 + x_2)^2\right] \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\mu_m}{2^m m!} H_m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} x_1\right) H_m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} x_2\right). \quad (5.49)$$

Tomando en cuenta la Ec. (5.49) y la propiedad

$$H_m(-x) = (-1)^m H_m(x), \quad (5.50)$$

la funcional de la Ec. (5.45) toma la forma

$$L(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{M-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[W(\xi, -\xi) - \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{\pi}{\alpha^2} \xi^2\right] \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{\mu_m}{2^m m!} H_m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \xi\right) \right]^2 d\xi \quad (5.51)$$

y aplicando el método de mínimos cuadrados obtenemos

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

5.5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

$$\sum_{m=0}^{M-1} \mu_l Q_{ml} = P_m, \quad (m = 0, 1, \dots, M-1) \quad (5.52)$$

donde

$$Q_{ml} = (-1)^l \frac{1}{2^l l! 2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2u^2) H_l^2(u) H_m^2(u) du, \quad (5.53)$$

$$P_m = \alpha \frac{1}{2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}u, -\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}u\right) \exp(-u^2) H_m^2(u) du. \quad (5.54)$$

Resolviendo este sistema, se encuentra que los valores μ_m^{opt} dan la representación modal alternativa más óptima. La calidad de la representación alternativa en modos coherentes puede ser evaluada por medio del error relativo entre la fuente real y la fuente alternativa

$$\epsilon = \frac{\int_0^{\infty} [W(\xi, -\xi) - W_A^{opt}(\xi, -\xi)]^2 d\xi}{\int_0^{\infty} [W(\xi, -\xi)]^2 d\xi}. \quad (5.55)$$

5.5. Ejemplo de simulación de la Representación alternativa en modos coherentes

Como ilustración del potencial de dicho método, construiremos la RAMC de una fuente tipo Schell-Gaussiano (descrita en el Cap. 1). Para simplificar los calculos obtendremos la RAMC para el caso escalar. La densidad espectral cruzada de dicha fuente está dada por

$$W(x_1, x_2) = S(0) \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\sigma_S^2}\right) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \quad (5.56)$$

donde $\gamma = \sigma_\mu/\sigma_S$ es una medida del grado de coherencia global (véase Cap. 2 secc. 2.5). Para esta fuente, el ancho efectivo será

$$\delta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi, \xi) d\xi}{W(0, 0)} \quad (5.57)$$

pero

$$W(\xi, \xi) = S(0) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_S^2}\right) \quad (5.58)$$

y

$$W(0, 0) = S(0) \quad (5.59)$$

por lo tanto

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

**5.5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN
MODOS COHERENTES**

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(0) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_S^2}\right)}{S(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_S^2}\right) d\xi \\ &= \sqrt{2\pi}\sigma_S\end{aligned}\quad (5.60)$$

El conjunto de funciones ψ_m está definido por

$$\psi_m(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_S}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^m m!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_S^2}\right) H_m\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_S}\right) \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned}W\left(\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}u, -\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}u\right) &= S(0) \exp\left(-\frac{\delta^2 u^2}{2\pi\sigma_S^2}\right) \exp\left(-\frac{2\delta^2 u^2}{\pi\sigma_\mu^2}\right) \\ &= S(0) \exp\left[-\frac{\delta^2 u^2}{\pi} \left(\frac{1}{2\sigma_S^2} + \frac{2}{\sigma_\mu^2}\right)\right] \\ &= S(0) \exp\left[-\frac{\delta^2 u^2}{\pi} \left(\frac{\sigma_\mu^2 + 4\sigma_S^2}{2\sigma_S^2\sigma_\mu^2}\right)\right] \\ &= S(0) \exp\left[-\frac{\delta^2 u^2}{\pi\sigma_S^2} \left(\frac{\sigma_\mu^2/\sigma_S^2 + 4}{2\sigma_\mu^2/\sigma_S^2}\right)\right] \\ &= S(0) \exp\left(-u^2 \frac{4 + \gamma^2}{\gamma^2}\right)\end{aligned}\quad (5.62)$$

en donde en la última parte se usó el valor obtenido para δ (Ec. 5.60). Finalmente, las expresiones para Q_{ml} y P_m serán

$$Q_{ml} = (-1)^l \frac{1}{2^l l! 2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2u^2) H_l^2(u) H_m^2(u) du \quad (5.63)$$

y

$$P_m = S(0) \sqrt{2\pi}\sigma_S \frac{1}{2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4 + \gamma^2}{\gamma^2} u^2\right) H_m^2(u) du \quad (5.64)$$

El error relativo viene dado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{\int_0^{\infty} [W(\xi, -\xi) - W_A(\xi, -\xi)]^2 d\xi}{\int_0^{\infty} |W(\xi, -\xi)|^2 d\xi} \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{4 + \gamma^2}{\gamma^2}\right)^{1/2} \times\end{aligned}$$

**CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA
ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE
POLARIZADA**

**5.5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN
MODOS COHERENTES**

$$\int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{4+\gamma^2}{\gamma^2}u^2\right) - \frac{1}{S(0)\sqrt{2\pi}\sigma_S} \exp(-u^2) \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{\mu_m}{2^m m!} H_m^2(u) \right]^2 du \quad (5.65)$$

Para probar la efectividad del método, se escogieron 3 casos particulares que corresponden a $\gamma = 0,2$, $\gamma = 0,5$, y $\gamma = 0,8$; es decir, una fuente casi completamente incoherente, una fuente parcialmente coherente y una fuente casi totalmente coherente. Para cada caso se tomó $M = 1$, $M = 5$, $M = 10$, y $M = 15$.

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

5.5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

Tabla 5.1: Resultados de los cálculos para $\gamma = 0,2$. También se muestran los errores asociados a cada cálculo.

M	1	5	10	15	20	25	30	35
μ_0	0.3526	0.4912	0.4977	0.4955	0.4966	0.4960	0.4964	0.4961
μ_1		0.4939	0.4847	0.4871	0.4860	0.4867	0.4862	0.4865
μ_2		0.4617	0.4789	0.4759	0.4773	0.4765	0.4770	0.4766
μ_3		0.4987	0.4647	0.4683	0.4668	0.4677	0.4671	0.4675
μ_4		0.3255	0.4614	0.4569	0.4587	0.4578	0.4583	0.4579
μ_5			0.4444	0.4503	0.4484	0.4494	0.4488	0.4492
μ_6			0.4469	0.4385	0.4408	0.4397	0.4404	0.4400
μ_7			0.4200	0.4332	0.4306	0.4318	0.4311	0.4316
μ_8			0.4477	0.4205	0.4238	0.4224	0.4231	0.4227
μ_9			0.2945	0.4175	0.4135	0.4150	0.4142	0.4147
μ_{10}				0.4021	0.4075	0.4057	0.4066	0.4061
μ_{11}				0.4043	0.3968	0.3989	0.3979	0.3985
μ_{12}				0.3800	0.3921	0.3896	0.3907	0.3901
μ_{13}				0.4051	0.3805	0.3834	0.3822	0.3829
μ_{14}				0.2665	0.3778	0.3741	0.3755	0.3748
μ_{15}					0.3639	0.3687	0.3671	0.3679
μ_{16}					0.3659	0.3591	0.3609	0.3600
μ_{17}					0.3439	0.3548	0.3526	0.3536
μ_{18}					0.3666	0.3443	0.3469	0.3458
μ_{19}					0.2412	0.3419	0.3385	0.3398
μ_{20}						0.3292	0.3336	0.3322
μ_{21}						0.3311	0.3249	0.3266
μ_{22}						0.3111	0.3210	0.3190
μ_{23}						0.3317	0.3115	0.3139
μ_{24}						0.2182	0.3093	0.3063
μ_{25}							0.2979	0.3019
μ_{26}							0.2996	0.2940
μ_{27}							0.2815	0.2904
μ_{28}							0.3001	0.2819
μ_{29}							0.1974	0.2799
μ_{30}								0.2696
μ_{31}								0.2711
μ_{32}								0.2547
μ_{33}								0.2716
μ_{34}								0.1787
ϵ (%)	40.14	26.96	18.96	13.98	10.78	9.00	7.56	7.21

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

5.5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

Tabla 5.2: Resultados de los cálculos para $\gamma = 0,5$. También se muestran los errores asociados a cada cálculo.

M	1	5	10	15	20	25	30	35
μ_0	0.8595	1.1716	1.1806	1.1789	1.1794	1.1793	1.1793	1.1793
μ_1		1.0517	1.0390	1.0409	1.0404	1.0406	1.0405	1.0406
μ_2		0.8993	0.9199	0.9177	0.9183	0.9181	0.9182	0.9181
μ_3		0.8509	0.8078	0.8106	0.8100	0.8102	0.8101	0.8101
μ_4		0.5210	0.7178	0.7142	0.7150	0.7148	0.7148	0.7148
μ_5			0.6266	0.6314	0.6305	0.6308	0.6307	0.6307
μ_6			0.5625	0.5557	0.5567	0.5564	0.5565	0.5565
μ_7			0.4809	0.4920	0.4908	0.4911	0.4910	0.4911
μ_8			0.4551	0.4320	0.4336	0.4332	0.4333	0.4333
μ_9			0.2786	0.3839	0.3820	0.3824	0.3823	0.3823
μ_{10}				0.3351	0.3377	0.3372	0.3374	0.3373
μ_{11}				0.3009	0.2972	0.2978	0.2976	0.2977
μ_{12}				0.2572	0.2632	0.2625	0.2627	0.2626
μ_{13}				0.2434	0.2311	0.2319	0.2317	0.2317
μ_{14}				0.1490	0.2053	0.2043	0.2045	0.2044
μ_{15}					0.1792	0.1806	0.1804	0.1804
μ_{16}					0.1609	0.1589	0.1592	0.1592
μ_{17}					0.1376	0.1407	0.1404	0.1405
μ_{18}					0.1302	0.1236	0.1240	0.1239
μ_{19}					0.0797	0.1098	0.1093	0.1094
μ_{20}						0.0959	0.0966	0.0965
μ_{21}						0.0861	0.0850	0.0852
μ_{22}						0.0736	0.0753	0.0751
μ_{23}						0.0696	0.0661	0.0663
μ_{24}						0.0426	0.0587	0.0584
μ_{25}							0.0513	0.0517
μ_{26}							0.0460	0.0455
μ_{27}							0.0394	0.0403
μ_{28}							0.0372	0.0353
μ_{29}							0.0228	0.0314
μ_{30}								0.0274
μ_{31}								0.0246
μ_{32}								0.0210
μ_{33}								0.0199
μ_{34}								0.0122
ϵ (%)	27.34	14.25	7.13	0.85	0.33	0.27	0.22	0.17

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO CON LA ILUMINACIÓN PARCIALMENTE COHERENTE Y PARCIALMENTE POLARIZADA

5.5. EJEMPLO DE SIMULACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN ALTERNATIVA EN MODOS COHERENTES

Tabla 5.3: Resultados de los cálculos para $\gamma = 0,8$. También se muestran los errores asociados a cada cálculo.

M	1	5	10	15	20	25	30	35
μ_0	1.3162	1.7236	1.7285	1.7282	1.7283	1.7283	1.7283	1.7283
μ_1		1.2583	1.2511	1.2515	1.2515	1.2515	1.2515	1.2515
μ_2		0.8948	0.9066	0.9062	0.9063	0.9063	0.9063	0.9063
μ_3		0.6807	0.6557	0.6563	0.6563	0.6563	0.6563	0.6563
μ_4		0.3619	0.4759	0.4751	0.4752	0.4752	0.4752	0.4752
μ_5			0.3431	0.3441	0.3441	0.3441	0.3441	0.3441
μ_6			0.2505	0.2491	0.2492	0.2492	0.2492	0.2492
μ_7			0.1781	0.1805	0.1804	0.1804	0.1804	0.1804
μ_8			0.1355	0.1305	0.1307	0.1307	0.1307	0.1307
μ_9			0.0720	0.0947	0.0946	0.0946	0.0946	0.0946
μ_{10}				0.0683	0.0685	0.0685	0.0685	0.0685
μ_{11}				0.0498	0.0496	0.0496	0.0496	0.0496
μ_{12}				0.0354	0.0359	0.0359	0.0359	0.0359
μ_{13}				0.0269	0.0260	0.0260	0.0260	0.0260
μ_{14}				0.0143	0.0189	0.0189	0.0189	0.0189
μ_{15}					0.0136	0.0136	0.0136	0.0136
μ_{16}					0.0099	0.0099	0.0099	0.0099
μ_{17}					0.0071	0.0072	0.0072	0.0072
μ_{18}					0.0054	0.0052	0.0052	0.0052
μ_{19}					0.0029	0.0038	0.0038	0.0038
μ_{20}						0.0027	0.0027	0.0027
μ_{21}						0.0020	0.0020	0.0020
μ_{22}						0.0014	0.0014	0.0014
μ_{23}						0.0011	0.0010	0.0010
μ_{24}						0.006	0.0007	0.0007
μ_{25}							0.0005	0.0005
μ_{26}							0.0004	0.0004
μ_{27}							0.0003	0.0003
μ_{28}							0.0002	0.0002
μ_{29}							0.0001	0.0001
μ_{30}								0.0001
μ_{31}								0.0001
μ_{32}								0.0001
μ_{33}								0.0000
μ_{34}								0.0000
ϵ (%)	17.50	1.24	0.25	0.21	0.21	0.19	0.19	0.18

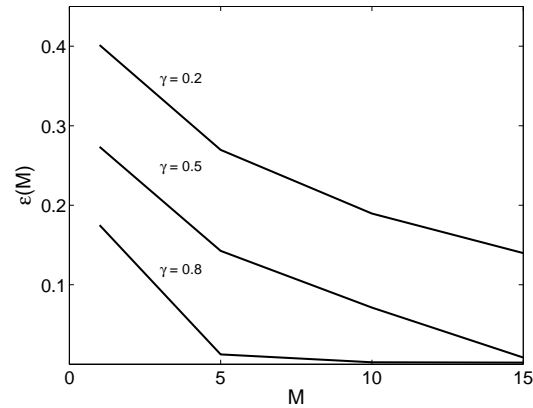


Figura 5.2: Error en función del número M . En la gráfica se representan los casos para $\gamma = 0,2$, $\gamma = 0,5$ y $\gamma = 0,8$

La RAMC para una fuente Schell-Gaussiano reproduce correctamente los resultados teóricos. Nótese que entre más coherente es la fuente, menos términos se necesitan para reproducir la fuente. Este resultado corresponde a lo esperado, pues una fuente totalmente coherente se caracteriza precisamente por poseer un sólo término en la densidad espectral cruzada. Obsérvese también cómo decese el error conforme el grado de coherencia aumenta (vea Figura 5.2).

5.6. Conclusiones

Se propuso un nuevo enfoque en la representación alternativa en modos coherentes de una fuente plana. Dicho planteamiento está basado en las mediciones de la densidad espectral cruzada en el experimento de Young, seguida de una simulación numérica para comprobar la validez del método propuesto.

Capítulo 6

Conclusiones Generales

Como ha sido mostrado, la separación mínima resoluble entre dos puntos puntuales depende de la estructura de correlación intrínseca de iluminación, aumenta con el aumento de la longitud de correlación de las componentes del campo y disminuye con el aumento del cociente de sus potencias.

Por otra parte, cuando se está diseñando un sistema óptico que realiza la transformada de Fourier, para obtener la mejor resolución espacial de frecuencia, se debe preferir a la luz completamente coherente independientemente del grado de polarización de la fuente. Cuando por alguna razón esto no es posible, la luz parcialmente coherente deberá ser usada. En este caso se aconseja filtrar de antemano la componente con el mayor grado de coherencia global; esto puede realizarse, e.g., empleando las pantallas polarizantes adecuadas. Sin embargo, debe de considerarse que en ciertas aplicaciones no es necesario obtener la mejor frecuencia espectral. Este tipo de situaciones ocurren, e.g., en el análisis espectral de objetos aleatorios, cuando la baja resolución en frecuencia puede ser usada de manera ventajosa para suavizar el llamado espectro “en bruto” con el propósito de mejorar la fiabilidad estadística del espectro obtenido ([25],[26]). En este caso, la función $\widetilde{W}(p, -p)$ desempeña el papel de “ventana espectral” cuyo ancho efectivo determina el grado de suavizado estadístico.

La RAMC para una fuente Shell-Gaussiano reproduce correctamente los resultados teóricos. Nótese que entre más coherente es la fuente, menos términos se necesitan para reproducir la fuente. Este resultado corresponde a lo esperado, pues una fuente totalmente coherente se caracteriza precisamente por poseer un sólo término en la densidad espectral cruzada. Se espera ampliar dicho resultado al caso más general de un campo vectorial electromagnético, en donde la densidad espectral cruzada es ahora una matriz 2×2 .

Apéndice

Apéndice A

Publicaciones del estudiante

A.1. Revistas Indizadas

1. A.S. Ostrovsky, M.A. Olvera-Santamaría, P.C. Romero-Soria, “Effect of coherence and polarization on resolution of optical imaging system”, *Opt. Lett.* **36**; 9, 1677-1679, (2011).
2. A.S. Ostrovsky, M.A. Olvera-Santamaría, P.C. Romero-Soria, “Effect of coherence and polarization on spatial frequency resolution in optical Fourier transforming system”, *Opt. Lett.* **36**; 23,4719-4721,(2011).
3. A.S. Ostrovsky, A.M. Zemliak, M.A. Olvera-Santamaría, P.C. Romero-Soria, “Alternative coherent-mode representation of a random source”, *J. of Physics: Conference Series*, **276**, 1-7, (2011)

A.2. Congresos

1. A.S. Ostrovsky, A.M. Zemliak, M.A. Olvera, P.C. Romero-Soria; “Alternative coherent-mode representation of a random source,” Proceedings of the VII Conference RIAO-OPTILAS, Perú, Lima, Septiembre 2010 (Poster)
2. Andrey S. Ostrovsky, Miguel A. Olvera-Santamaría, Paulo C. Romero-Soria, “Effect of coherence and polarization on resolution of optical imaging,” *Frontiers in Optics* 2011, San José California, USA (Poster).
3. Andrey S. Ostrovsky, Miguel A. Olvera-Santamaría, Paulo C. Romero-Soria, “Effect of coherence and polarization on resolution of optical imaging,” *ICO-22 Congress*, Puebla, México, 2011 (Poster).
4. Paulo C. Romero-Soria, Miguel A. Olvera-Santamaría, Andrey S. Ostrovsky, “Efecto de la coherencia y la polarización en la resolución de un sistema óptico formador de imagen,” *Encuentro Nacional de Ciencias*, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la BUAP, 28-30 de Septiembre 2011 (Poster).

APÉNDICE A. PUBLICACIONES DEL ESTUDIANTE
A.3. ARTÍCULOS EN MEMORIAS DE CONGRESOS:

5. Paulo C. Romero-Soria, Miguel A. Olvera-Santamaría, Andrey S. Ostrovsky, “Efecto de la coherencia y la polarización en la resolución de un sistema óptico formador de iamgen,” LIV Congreso Nacional de Física, Mérida, México, 2011 (Poster).
6. Paulo C. Romero-Soria, Miguel A. Olvera-Santamaría, Andrey S. Ostrovsky, “Efecto de la coherencia y la polarización en la resolución en frecuencias en un sistema óptico transformada de Fourier,” LV Congreso Nacional de Física, Morelia, México, 2012 (Poster).
7. Andrey S. Ostrovsky, Paulo C. Romero-Soria, Esteban Vélez-Juárez, “Fast Algorithm for Computer Simulation of Optical Systems with Partially Coherent and Partially Polarized Illumination” Progress In Electromagnetics Research Symposium, Moscú, Rusia, 2012 (Poster)

A.3. Artículos en memorias de congresos:

1. Paulo C. Romero-Soria, Andrey S. Ostrovsky, “Effect of coherence and polarization on resolution of optical imaging system ”, Frontiers in Optics Conference, San Jose, USA, 2011.

Bibliografía

- [1] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK., 1999.
- [2] X. Du and D. Zhao. “Propagation of random electromagnetic beams through axially nonsymmetrical optical beams”. *Opt. Commun.*, **281**:2711–2715, 2008.
- [3] X. Du and D. Zhao. “Parametric study of uniformly polarized stochastic electromagnetic beam and its imaging”. *Phys. Lett.*, **373**:4297–4300, 2009.
- [4] X. Du and D. Zhao. “Optical Hartley transform of partially coherent electromagnetic beams”. *J. Electromagnetic Waves Appl.*, **24**:521–530, 2010.
- [5] D. G Fischer and T. D. Visser. “Spatial correlation properties of focused partially coherent light”,. *J. Opt. Soc. Am. A*, **21**:2091–2102, 2004.
- [6] A. T. Friberg, T. D. Visser, W. Wang, and E. Wolf. “Focal shifts of converging diffracted waves of any state of spatial coherence”,. *Opt. Comm.*, **196**:1–7, 2001.
- [7] J. W. Goodman. *Statistical Optics*. Wiley, 1985.
- [8] F. Gori. “Collet-Wolf sources and multimode lasers”. *Opt. Commun.*, **34**:301–305, 1980.
- [9] F. Gori. “Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams ”. *OptLett*, **23**:241–243, 1998.
- [10] F. Gori, M. Santarsiero, R. Simon, G. Piquero, B. Borghi, and G. Guattari. “Coherent-mode decomposition of partially polarized, partially coherent sources”. *J. Opt. Soc. Am. A*, **20**:78–84, 2003.
- [11] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. “*Table of integrals, Series and Products*”, 5^o ed. Academic Press, 1994.
- [12] S. G. Hanson, W. Wang, M. L. Jakobsen, and Takeda. “Coherence and polarization of electromagnetic beams modulated by random phase screens and their changes through complex ABCD optical systems”. *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**:2338–2346, 2008.
- [13] K. Kim and E. Wolf. “A scalar-mode representation of stochastic, planar, electromagnetic sources”. *Opt. Commun.*, **261**:19–22, 2005.

- [14] O. Korotkova, B. G. Hoover, V. L. Gamiz, and E. Wolf. “Coherence and polarization properties of far fields generated by quasi-homogeneous planar electromagnetic source”. *J. Opt. Soc. Am. A*, **22**:2547–2556, 2005.
- [15] O. Korotkova, M. Salem, and E. Wolf. “Beam Conditions for Radiation Generated by an Electromagnetic Gaussian-Shell Source”. *Optics Communications*, **1**:225, 2004.
- [16] E. Kreyszig. *Introductory Analysis with Applications*. Wiley, New York, 1978.
- [17] K. Lindfors, T. Setälä, M. Kaivola, and A. T. Friberg. “Degree of polarization in tightly focused optical beams”. *J. Opt. Soc. Am. A*, **22**:561–568, 2005.
- [18] A. Luis. “Degree of coherence for vectorial electromagnetic fields as the distance between correlation matrices”. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**:1063–1068, 2004.
- [19] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK., 1995.
- [20] A. S. Ostrovsky. “*Coherent-Mode Representations in Optics*”,. SPIE Press, Bellingham, WA, USA, 2006.
- [21] A. S. Ostrovsky, G. Martínez-Niconoff, V. Arrizon, P. Martínez-Vara, M. A. Olvera-Santamaría, and C. Rickenstorff-Parrao. “Modulation of coherence and polarization using liquid crystal spatial light modulators”,. *Opt. Express*, **17**:5257–5264, 2009.
- [22] A. S. Ostrovsky, P. Martínez-Vara, M. A. Olvera-Santamaría, and G. Martínez-Niconoff. “*Vector coherence theory: An overview of basic concepts and definitions*”,. Chap.5 in *Recent Research Developments in Optics*, A. Gayathri (Research Singpost), 20009.
- [23] A. S. Ostrovsky, M. A. Olvera-Santamaría, and P. C. Romero-Soria. “Effect of coherence and polarization on resolution of optical imaging system”. *Optics Letters*, **36**:1–3, 2011.
- [24] A. S. Ostrovsky, M. A. Olvera-Santamaría, and P. C. Romero-Soria. “Effect of coherence and polarization on spatial frequency resolution in optical Fourier transforming system”. *Optics Letters*, **36**:1–3, 2011.
- [25] A. S. Ostrovsky and E. Pino-Mota. “Classification of random image fields using synthetic discriminant functions: spectral statistical approach and its computer optical realization”. *Opt. Commun.*, **5**:219–225, 1998.
- [26] A. S. Ostrovsky, E. Pino-Mota, and J. I. Palma-Cuatlanquiz. “Optical classification of random image fields using spectral discriminant functions”. *Optics and Laser in Engineering*, **40/12**:43–53, 2003.
- [27] A. S. Ostrovsky, G. Rodríguez-Zurita, C. Meneses-Fabian, M. A. Olvera-Santamaría, and C. Rickenstorff-Parrao. “Experimental generating the partially coherent and partially polarized electromagnetic sources”,. *Opt. Express*, **18**:12864–12871, 2010.

- [28] A. S. Ostrovsky, A. M. Zemliak, and E. Hernandez-Garcia. “Alternative coherent-mode representation of a planar source”. *Opt. Commun.*, **249**:1–6, 2005.
- [29] A. S. Ostrovsky, A. M. Zemliak, and M. A. Olvera. “Experimental determining the alternative coherent-mode representation of a planar source”. *Opt. Commun.*, **284**:2638–2641, 2011.
- [30] A. S. Ostrovsky, A. M. Zemliak, M. A. Olvera-Santamaría, and P. C. Romero-Soria. “Alternative coherent-mode representation of a random source”. *J. of Physics: Conference Series*, **274**:1–7, 2011.
- [31] G. Piquero, F. Gori, P. Romanini, M. Santarsiero, R. Borghi, and A. Mondello. “Synthesis of partially polarized Gaussian Schell-model sources”,. *Opt. Commun.*, **208**:9–16, 2002.
- [32] B. E. Saleh. “Optical bilinear transformations: General properties”. *Optica Acta*, **26**:777–799, 1979.
- [33] M. Salem and E. Wolf. “Coherence-induced polarization changes in light beams”. *Optics Letters*, **33**:1180–1182, 2008.
- [34] T. Shirai, O. Korotkova, and E. Wolf. “A method of generating electromagnetic Gaussian Shell-model beams”,. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **7**:232–237, 2005.
- [35] A. Starikov. “Effective number of degrees of freedom of partially coherent sources”. *J. Opt. Soc. Am. A*, **72**:1538–1544, 1982.
- [36] A. Starikov and E. Wolf. “Coherent-mode representation of Gaussian Schell-model sources and their radiation fields”. *J. Opt. Soc. Am.*, **72**:923–928, 1982.
- [37] J. Tervo, T. Setälä, and A. T Friberg. “Degree of coherence for electromagnetic fields”,. *Opt. Express*, **11**:1137–1143, 2003.
- [38] J. Tervo, T. Setälä, and A. T Friberg. “Theory of partially coherent electromagnetic fields in the space-frequency domain”,. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**:2205–2215, 2004.
- [39] W. Wang, A. T. Friberg, and E. Wolf. “Focusing of partially coherent light in systems of large Fresnel numbers”,. *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**:491–496, 1997.
- [40] E. Wolf. “Correlation-induced changes in the degree of polarization, the degree of coherence, and the spectrum of random electromagnetic beams on propagation”. *Optics Letters*, **28**:1078–1079, 2003.
- [41] E. Wolf. “Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams”,. *Phys. Lett. A*, **312**:263–267, 2003.
- [42] E. Wolf. “*Theory of Coherence and Polarization of Light*”. Cambridge, 2007.
- [43] H. T. Yura and S. G. Hanson. “Optical beam wave propagation through complex optical systems”,. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**:1931–1948, 1987.