BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE ACTIVIDADES EN GEOGEBRA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. MARIANA MORALES LÓPEZ

DIRECTORA DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CO-DIRECTORA DE TESIS
DRA. HONORINA RUIZ ESTRADA

PUEBLA, PUE. JUNIO, 2023

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

LIC. MARIANA MORALES LÓPEZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 07 de junio de 2023, con la tesis titulada:

"COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE ACTIVIDADES EN GEOGEBRA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 23 de junio de 2023

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA'LAHR/l'agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Índice

Índice de Figuras

Resumen

Se presenta el reporte de una investigación cuyo objetivo es describir cómo es la comprensión del concepto del límite de una función de un grupo de estudiantes de bachillerato después de implementar actividades diseñadas bajo la Teoría APOE y adaptadas en GeoGebra. Se trata de un estudio cualitativo con actividades pensadas a partir de una descomposición genética del concepto de límite y adaptadas a GeoGebra. Los resultados de la aplicación de las actividades adaptadas en GeoGebra a un grupo de estudiantes de nivel medio superior mostraron las primeras estructuras necesarias para la comprensión del concepto de límite.

Palabras claves: Límite, Teoría APOE, GeoGebra.

Abstract.

This work shows the preliminary results of a research with the goal of describing how do high school students understand the concept of a function's limit after they work with activities designed under APOS Theory and implemented using GeoGebra. It is a qualitative study with activities designed after a genetic decomposition of the limit concept and adapted to GeoGebra. The results of the adapted activities in GeoGebra when applied to a group of high school students showed the construction of the first mental structures needed to understand the limit concept.

Keywords. Limit, APOS Theory, GeoGebra.

Introducción

Los estudiantes de nivel medio superior se enfrentan por primera vez al estudio del cálculo, lo cual representa una ruptura con lo aprendido previamente en el álgebra (Neira, 2013), se introducen nuevos elementos como cuantificadores y signos, que pese a ser ya conocidos, se usan ahora en contextos diferentes. En particular, el concepto de límite presenta muchas dificultades en los estudiantes como se ha descrito ampliamente en la literatura, dichas dificultades pueden ser epistemológicas (Sierpinska, 1987) o hasta de lenguaje por el uso común que solemos darle a la palabra límite (Artigue et al., 1995).

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) estudia cómo se construyen los conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014) y brinda el sustento teórico a la investigación que aquí se presenta. Asimismo, se ha estudiado ampliamente el uso de computadoras, programación o herramientas digitales para mejorar el aprendizaje de conceptos matemáticos, a partir de la teoría APOE y desde otros enfoques teóricos. Desde la década de los ochenta se ha usado programación para la enseñanza de inducción matemática y el uso de dichas herramientas se estudió formalmente (Dubinsky, 1989). Posteriormente, se han realizado trabajos de investigación sobre las mejoras en el aprendizaje por el uso de computadoras en el álgebra (Tall y Thomas, 1991). Publicaciones más recientes dan cuenta de trabajos que se han realizado con estudiantes de pregrado como en la investigación de Afgani que usa la teoría APOE en un análisis descriptivo cualitativo con cuatro ítems de prueba para el aprendizaje de límite (Afgani et al., 2017) o el trabajo de Marsitin y Sesanti que usa el software matemático "Maple" y la teoría APOE con la misma finalidad (Marsitin y Sesanti, 2018). A inicios del 2020, la suspensión presencial de actividades escolares por la pandemia de Covid-19 obligó a las y los docentes a buscar nuevas formas de enseñar matemáticas, es por ello, que las actividades propuestas en esta investigación se implementaron en un ambiente digital.

La búsqueda de estrategias para mejorar el aprendizaje del concepto de límite fundamentadas en la Teoría APOE se ha abordado desde diversas perspectivas y con diferentes enfoques, se inicia en el análisis teórico y a partir de ello se construye una descomposición genética de las estructuras mentales que deben construirse para entender el concepto, en particular existe una descomposición genética del aprendizaje del concepto de límite que usó algunas actividades de codificación en computadora para probarlas con 25 estudiantes de primer semestre de un curso de cálculo experimental (Cottrill et al., 1996). Dicha descomposición genética fue sometida a análisis empírico y se refinó a partir del estudio de las respuestas a actividades de estudiantes de nivel medio superior (Swinyard y Larsen, 2012).

La meta del trabajo propuesto es mostrar que, actividades diseñadas con bases teóricas fundamentadas en APOE e implementadas en entornos digitales pueden ayudar a los estudiantes del nivel medio superior a construir el concepto de límite. El trabajo se conforma primero por la descripción del sustento teórico, las estructuras y procesos mentales que constituyen la teoría APOE, posteriormente, por la descomposición genética que se usa y la adaptación a plataforma digital de las actividades diseñadas a partir de la descomposición genética por Morante (2020). Continúa con un análisis de las estructuras mentales que buscan fomentar las actividades y después la implementación de las mismas. Finalmente, se presenta el análisis de dicha implementación.

Capítulo 1

Formulación y planteamiento del problema de investigación

Los estudiantes de nivel medio superior presentan dificultades con el aprendizaje del concepto de límite como lo mencionan Neira (2013) y Sierpinska (1987) que es indispensable para las materias de cálculo. Como lo mencionan (Guerrero y Hernández, 2020) se puede cambiar la forma tradicional de enseñar límites en el nivel medio superior usando actividades basadas en la Teoría APOE para construir estructuras mentales más completas. Asimismo, la pandemia de Covid-19 obligó a suspender las actividades presenciales en las escuelas y modificó la forma de trabajo al trasladar los aprendizajes a entornos y plataformas virtuales. Es por ello, que surge una necesidad apremiante de adaptar actividades fundamentadas en la teoría APOE a estas nuevas herramientas digitales y de probarlas empíricamente.

1.1 Pregunta de la investigación

¿Cómo es la comprensión del límite de una función de un grupo de estudiantes de bachillerato después de aplicar actividades diseñadas con la Teoría APOE y adaptadas a GeoGebra?

1.2 Objetivo de la investigación

Describir la comprensión de un grupo de estudiantes de nivel medio superior cuando resuelven actividades basadas en la Teoría APOE e implementadas en GeoGebra, después de haber estudiado el tema de límite de una función en un curso que no estuvo basado en la Teoría APOE.

1.3 Supuesto

La implementación de actividades basadas en la Teoría APOE y adaptadas en GeoGebra permitirá mostrar las estructuras mentales que construye un grupo de estudiantes de nivel medio superior cuando las resuelven en un entorno virtual, después de haber estudiado este tema en un curso que no se basó en la Teoría APOE.

1.4 Justificación

El aprendizaje del concepto de límite resulta complicado para la mayoría de los estudiantes, fenómeno que se ha estudiado ampliamente desde el siglo pasado en trabajos como el de Sierpinska (1987) que lo hizo con estudiantes de humanidades o Neira que estudia las dificultades del salto del álgebra al cálculo. En particular hay dificultades con los estudiantes del nivel medio superior como lo menciona Hitt (2003):

> Los alumnos que ingresan por primera vez a un curso de cálculo, generalmente han tenido un acercamiento intuitivo del infinito, muy probablemente con aspectos de la "vida real" (e.g. que el universo es infinito), sin haber reflexionado sobre aspectos propios del infinito en matemáticas; ello dificulta en cierta medida su comprensión en un contexto matemático. En el aprendizaje del concepto de límite (fundamental para la construcción adecuada de los conceptos del cálculo) se requiere un conocimiento sobre los procesos infinitos. (p. 2)

La Teoría APOE, a través de una descomposición genética, proporciona herramientas para conocer las dificultades que enfrenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de límite y ayuda a diseñar una instrucción adecuada para soslayar dichas dificultades. La situación actual de pandemia ha fortalecido la importancia de utilizar las herramientas digitales para el aprendizaje, en particular, de las matemáticas como lo menciona Artigue (2019) en su trabajo sobre el futuro del aprendizaje de las matemáticas con tecnologías digitales. Por estos motivos, es necesario diseñar e implementar actividades en un ambiente virtual, basados en la Teoría APOE que permitan la construcción del concepto de límite por los estudiantes.

Capítulo 2

Marco teórico

De acuerdo con Arnon et al. (2014) "una vez que se definen los constructos de una teoría, los modelos son los que muestran cómo se relacionan y desarrollan. Los modelos sirven como base para que las teorías se prueben experimentalmente. En APOE, la descomposición genética hace eso" (p. 27). Así, los constructos de la teoría APOE son las estructuras mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema y los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y tematización.

2.1 Acciones

Los autores de la Teoría APOE refieren que un concepto primero se concibe como una Acción y una Acción es una transformación dirigida externamente de un Objeto, u Objetos, previamente concebidos. Una Acción es externa ya que cada paso de la transformación necesita llevarse a cabo explícitamente y guiada por instrucciones externas. Los pasos de la Acción aún no pueden ser imaginados y ninguno se puede saltar (cada paso induce al siguiente). Así, si sólo se tiene la concepción de Acción se necesitan guías externas ya que las Acciones son las estructuras más primitivas. Finalmente, se describe que la concepción de Acción es necesaria para el desarrollo de otras estructuras: los Procesos son Acciones interiorizadas y los Objetos mentales surgen por la aplicación de Acciones. Finalmente, nuevas Acciones llevan al desarrollo de estructuras de orden superior ya que al hacer operaciones se encapsulan en Objetos.

2.2 Interiorización y Procesos

Los Procesos se construyen usando uno de dos mecanismos: interiorización o coordinación. Cada uno de esos mecanismos hace que surja un nuevo Proceso. Al repetir y reflexionar las Acciones, el individuo pasa de necesitar guías externas a tener control interno sobre ellas. Esto se caracteriza por una habilidad de imaginar los pasos que se llevan a cabo sin tener que realizar cada uno explícitamente, así como poder saltarse pasos y revertirlos. La interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio mental. Una Acción interiorizada es un Proceso.

2.3 Encapsulación y Objetos

La encapsulación ocurre cuando el individuo aplica una Acción a un Proceso, esto es, que ve a una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática a la cual se le pueden aplicar Acciones.

2.4 Desencapsulación, Coordinación e Inversión de Procesos

Una vez que un Proceso se ha encapsulado en un Objeto mental: se puede desencapsular, cuando surja la necesidad, de vuelta a su Proceso subyacente. Es decir, al aplicar el mecanismo de desencapsulación, un individuo puede regresar al Proceso del cual surgió el Objeto.

El mecanismo de coordinación es indispensable en la construcción de algunos Objetos. Dos Objetos pueden ser desencapsulados, sus Procesos coordinados, y los Procesos coordinados encapsulados para formar un nuevo Objeto.

2.5 Descomposición Genética

> La descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante puede necesitar construir para aprender un concepto matemático específico. Típicamente, empieza como una hipótesis basada en la experiencia del investigador en el aprendizaje y enseñanza del concepto, su conocimiento de la Teoría APOE, su conocimiento matemático, investigación previamente publicada sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto. Hasta que se prueba experimentalmente una descomposición genética es una hipótesis y es referida como preliminar. (Arnon et al., 2014, p. 27)

A continuación, se presenta la DG del límite de una función de una variable real en $x = a$ (Cottrill, 1996, citado en Arnon et al., 2014) en la cual se fundamenta este trabajo. Sin embargo, es importante mencionar que dicha investigación no habla de las estructuras previas que se necesitan para construir el concepto de límite. Es por ello, que se retoma el trabajo de Morante et al. (2021) que describe los conocimientos previos son necesarios para su aprendizaje: el concepto de función de una variable real como proceso; el concepto de desigualdad como proceso, el concepto de orden en los números reales como proceso, el concepto de intervalo como objeto y un esquema de cuantificación de dos niveles. Así la DG se sintetiza en los siguientes pasos:

1. La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.
2. La acción de evaluar la función f en algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano al valor a que el anterior.
3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:
   a) Interiorización de la Acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a.
   b) Construcción de un Proceso en el rango en el que $f(x)$ se aproxima al valor L.
   c) Coordinación de (a) y (b) a través de f.
4. Reconstruir el proceso del paso 3(c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza mediante la introducción de estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$
5. Aplicación de un esquema de cuantificación de dos niveles para conectar el proceso reconstruido del paso 5 con la definición formal de límite.
6. Aplicación de una concepción completa $\varepsilon - \delta$ a situaciones específicas.

2.6 Uso de la tecnología en la Educación Matemática

Para introducir su Modelo de Ecosistemas Educativos Híbridos, Rubio-Pizzorno y Montiel (2020) mencionan que, gracias a la sociología, se ha podido reconocer que la tecnología digital está ampliando la materialidad social, que antes era solo física, y ahora integra lo híbrido entre lo físico y lo digital. Por su parte, la investigación educativa ayuda a reconocer la existencia de otros espacios susceptibles de ser usados con fines educativos, como la realidad aumentada, la realidad mixta, entre otros. Todos estos espacios se suman a los espacios clásicos físico y digital para configurar nuevos territorios de aprendizaje que se introducen como Ecosistemas Educativos Híbridos.

De esta manera, gracias a la integración de los aportes de la antropología, la sociología y la investigación educativa, se configura la idea de Ecosistemas Educativos Híbridos, la cual está constituida por espacios de diversas naturalezas, que se intersecan, confluyen y se integran de manera armónica y transparente. Cada uno de estos espacios tiene asociadas tecnologías características, aunque no excluyentes de otros espacios.

Si estas tecnologías son usadas para desarrollar un trabajo matemático, entonces aportarán un valor epistémico y otro pragmático, que Rubio-Pizzorno y Montiel (2020) definen de la siguiente manera:

Valor epistémico de las tecnologías: formas en que las tecnologías ayudan a comprender el objeto matemático y genera preguntas sobre éste, al ser usadas para desarrollar un trabajo matemático específico.

Valor pragmático de las tecnologías: potencial productivo de las tecnologías, es decir, eficiencia, costo y campo de validez.

De esta forma, la adaptación de las actividades busca aprovechar las ventajas que proporcionan las herramientas digitales, en este caso GeoGebra, para conseguir construir las estructuras mentales necesarias para que el estudiante alcance la concepción dinámica del concepto de límite. GeoGebra es un software libre para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que puede ser usado en distintas plataformas y dispositivos, lo cual lo hace muy atractivo para los usuarios. Asimismo, como mencionan Rubio-Pizorno y Montiel (2020) los aspectos que se deben considerar para sacar el mayor provecho del uso de la tecnología son:

I. Explorar las tecnologías disponibles, considerando los diferentes espacios sociales.
II. Posicionarse en un enfoque teórico específico que permitirá determinar a qué se refiere en particular el trabajo matemático y el uso de las tecnologías para cada caso.
III. Indagar en los valores epistémico y pragmático de las tecnologías características de los diferentes espacios, en el desarrollo del trabajo matemático específico.
IV. Explorar la manera de usar coordinadamente las diferentes tecnologías para un mejor aprovechamiento de sus valores pragmático y epistémico en desarrollo del trabajo matemático. (Rubio-Pizzorno y Montiel 2020, p. 300)

Capítulo 3

Método

El método de investigación es descriptivo cualitativo con actividades diseñadas a partir del ciclo de investigación APOE. Se trata de una investigación cualitativa ya que se busca describir los aprendizajes del concepto de la forma más completa y cuidadosa posible partiendo del interés en los procesos y la calidad de las actividades (Fraenkel et al., 2012). Para Arnon et al. (2014) una investigación basada en APOE debe contener: análisis teórico, diseño e implementación de la instrucción, y recolección y análisis de datos.

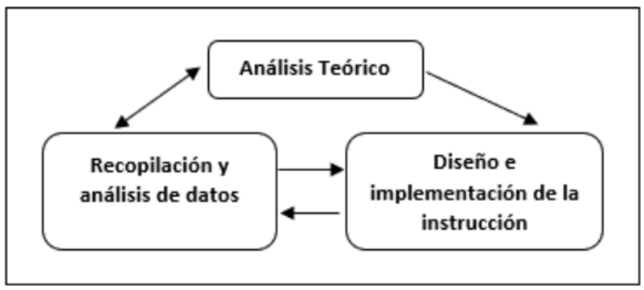


Figura 1 Componentes del ciclo de investigación de la teoría APOE (Adaptado de Asiala et al. 1996)

Como se observa en la Figura 1, los tres componentes están relacionados, así: el análisis teórico lleva al diseño e implementación de la instrucción, después se recopilan y analizan los datos con el enfoque de la teoría con el propósito de responder dos preguntas: ¿el estudiante logró hacer las construcciones mentales que se mencionaban en el análisis teórico? y ¿qué tan bien aprendieron los contenidos matemáticos? Las respuestas nos pueden llevar a un rediseño de la instrucción o del mismo análisis teórico que se hizo en primera instancia. De esta manera, se va repitiendo el ciclo hasta alcanzar las respuestas deseadas que indiquen qué tanto el análisis teórico como las evidencias empíricas muestren las mismas construcciones mentales (Arnon et al. 2014).

En el presente trabajo no se llevó a cabo el ciclo de investigación completo ya que se partió de un análisis teórico ya realizado y de un diseño de actividades que implementó Morante como lo reporta en su trabajo (2020). En esta investigación se adaptaron a GeoGebra 10 de las actividades diseñadas por Morante (2020) a partir de la descomposición genética del concepto de límite y posteriormente se aplicaron dos de ellas para la recopilación y análisis de datos. La justificación del diseño se realizó mediante un análisis de contenido respaldado en la descomposición genética de Cottrill et al. (1996) observando la correspondencia entre las actividades y los pasos de la descomposición genética.

Las actividades diseñadas buscan que el estudiante construya las estructuras mentales descritas en la descomposición genética al trabajar con representaciones numéricas y gráficas de algunas funciones. GeoGebra brinda herramientas que permiten que los estudiantes puedan acercarse (hacer zoom) en las gráficas, deslizar puntos sobre los ejes o sobre la curva de la gráfica, en la representación algebraica permite evaluar múltiples valores y tabularlos para observar su comportamiento. En un inicio, se espera que el estudiante realice actividades con algunas funciones y que posteriormente, guiado por algunas preguntas y ejercicios, reflexione sobre lo que ocurre y, al interiorizar lo que responde, pueda ir coordinando el Proceso construido en el dominio con el Proceso en el rango a través de la función. En este punto, se espera que el estudiante alcance una concepción dinámica del Límite de acuerdo a los tres primeros pasos de la descomposición genética, al tratarse de estudiantes de nivel medio superior y sus primeros acercamientos a este concepto. En el trabajo de Hernández et al. (2023) se entiende la concepción dinámica del límite de una función como el número (si es que existe) al que se aproximan los valores de la función cuando sus respectivas preimágenes se aproximan a un determinado número real y es algo informal e intuitivo.

Las actividades diseñadas por Morante (2020) y puestas a prueba con un grupo de estudiantes de nivel superior fueron adaptadas en el presente trabajo para seguir los pasos propuestos en la descomposición genética, pero en un ambiente digital. Como mencionan Rubio-Pizzorno y Montiel (2020) la tecnología digital por sí misma no tiene una valoración epistémica o pragmática, pero esta valoración surge al realizar trabajos matemáticos que usan la tecnología digital. Citando a Artigue (2002, p. 268), “el valor epistémico [y pragmático], por supuesto, no es algo que pueda definirse de manera absoluta; este depende de los contextos”.

3.1 Actividades

En esta sección se describen las 10 actividades que fueron adaptadas a GeoGebra de manera breve y posteriormente en las secciones siguientes se presentan completas las dos actividades implementadas a un grupo de estudiantes en enero de 2022. El trabajo de Morante (2020) presenta el diseño y aplicación de 25 actividades fundamentadas en la Teoría APOE y la Descomposción Genética de Swinyard y Larsen (2012) para el aprendizaje del concepto de límite hasta su definición formal con estudiantes de nivel superior. Sin embargo, como el presente trabajo está dirigido a estudiantes del nivel medio superior que aprenden el concepto de límite sólo en su concepción dinámica se adaptaron exclusivamente 10 de las 25 actividades antes mencionadas.

La primera actividad se centraba en el registro numérico-algebraico y presentaba un applet para evaluar una función polinomial y posteriormente una hoja de cálculo para registrar los valores obtenidos resaltando que el alumnado debía fijarse en el valor de *x=0.* Al observar lo que habían registrado en la tabla se hacían preguntas, primero sobre lo que ocurría con los valores del dominio, después con los del rango y finalmente, se cuestionaba sobre la relación entre lo que ocurría con los dos.

Las actividad 2 consistía de un applet con la gráfica de una función y un deslizador. Posteriormente, se realizaban preguntas buscando la construcción de las estructuras mentales descritas en la descomposición genética.

Considera la siguiente representación gráfica de una función $f(x)$ para responder lo que se te pide.

Usa el punto A que está sobre la gráfica para moverlo y responder a las siguientes preguntas, puedes observar que el applet te va mostrando las coordenadas del punto al moverlo sobre la curva de la representación gráfica de la función. También puedes hacer zoom para acercar o alejar la vista.

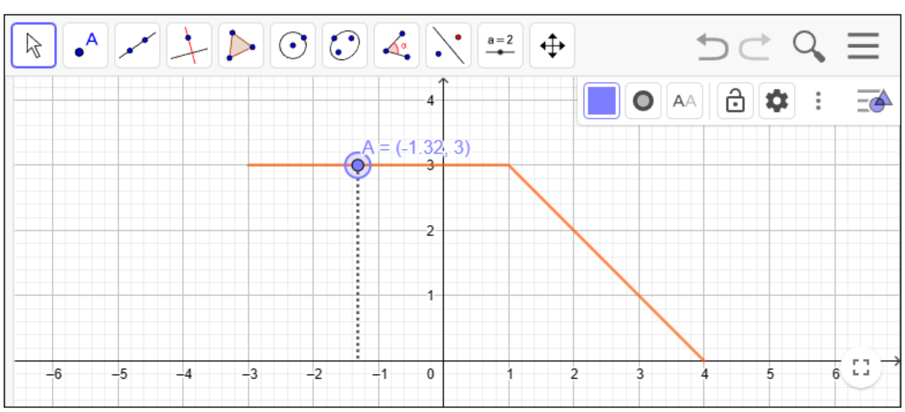


Figura 2 Actividad en GeoGebra con el applet que muestra la gráfica y el punto deslizable de la actividad 2.

La actividad 3 presentaba la función $f(x) = \left(\frac{x^3+2\,x^2-1}{4-3\,x}\right)$ en un applet que permitía evaluar muchos valores de *x* y después se pedía que fueran registrando los valores obtenidos en una hoja de cálculo y posteriormente se solicitaba que pensara en lo que ocurría con los valores del dominio y rango al aproximarse a $x = -1$ y a $f(-1)$.

La cuarta actividad es similar a la anterior, pero presenta una función definida por trozos $f(x) = \left\{\begin{matrix} x & : & -1 \leq x < 1 \\ x-1 & : & 1 \leq x < 3 \end{matrix}\right\}$ y el applet para evaluarla, así se fomentaba que pensaran en lo que pasaba con los valores de *x* cerca del 1 y sus correspondientes valores de *f* cercanos a *f(1)*.

La actividad 5 presentaba la representación gráfica de una función definida por partes y discontinua en *f(-2)*. La gráfica tenía un deslizador sobre la curva que iba mostrando explícitamente las coordenadas de cada punto con rectas perpendiculares en ambos ejes coordenados. De igual forma se pedía que al manipular la gráfica fueran registrando los valores de las imágenes que iban visualizando y por último que reflexionaran sobre las aproximaciones laterales y la relación entre ambas tanto en el dominio como en el rango.

La actividad 6 también presentaba una función en trozos, pero lo hacía desde el registro gráfico como se muestra a continuación y pedía que pensaran en qué ocurría con valores cercanos a *x=1* y sus respectivas imágenes.

Observa la gráfica de la función f y la tabla a continuación para responder a las preguntas. Recuerda que puedes hacer zoom en la gráfica o dar click derecho para tener los valores en ese punto

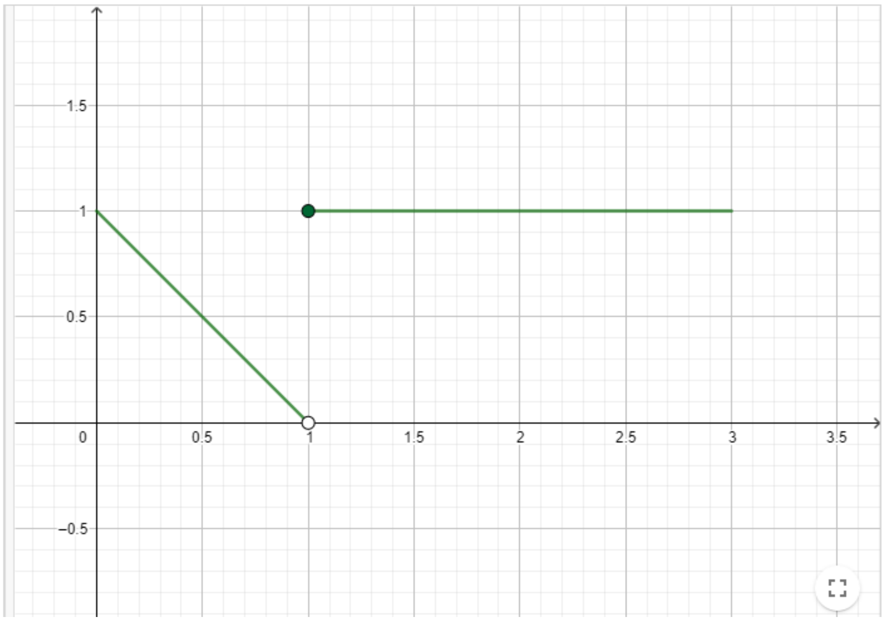


Figura 3 representación gráfica de la función de la actividad 6.

En contraste, la actividad 7 se centraba en el registro numérico, presentando una tabla con valores como lo ejemplifica la figura siguiente y continuaba con preguntas de reflexión sobre lo que ocurría al acercarse por la izquierda o la derecha para así poder visualizar si los estudiantes realizaban las acciones esperadas.

Actividad 7

Author: Mariana

Observa la siguiente tabla que representa los valores sucesivos de x y los valores que toma $f(x)$ al evaluar dichos valores

x tiende al valor

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	...	¿?	...	4.0001	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	1.97484	1.99749	1.99974	1.99997	...	¿?	...	2.00002	2.00024	2.00249	2.02484

$f(x)$ tiende al valor

Figura 4 Tabla con valores de la actividad 7

La actividad número 8 proporcionaba una tabla con valores y una función sencilla para que los estudiantes reforzaran la construcción de la idea de aproximación.

a) Usando el applet evalúa los $f(x)$ para los valores de x que se muestran en la tabla y genera tu tabla con los dos renglones. La función que usaremos es $f(x) = x - 2$

x tiende al valor

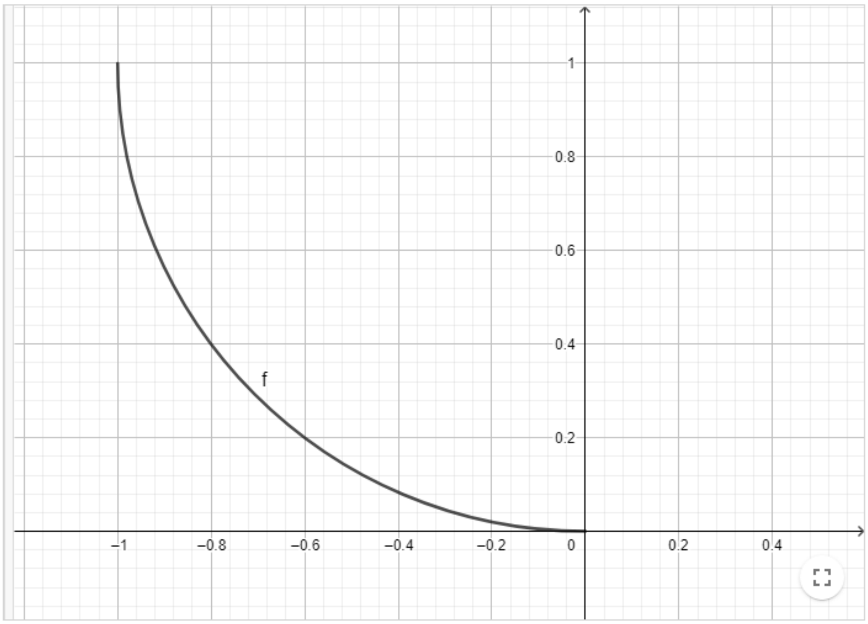
x	5.9	5.99	5.999	5.9999	...	¿?	...	6.0001	6.001	6.01	6.1
$f(x) = x - 2$					...	¿?	...				

$f(x)$ tiende al valor

Figura 5 inicio de la actividad 8.

La siguiente actividad también presentaba la gráfica de una función de una curva, pero ahora se pedía fijarse en un punto en valores de *x* que se encontraban en una parte no discontinua de la misma. Asimismo, se presentaba una pequeña tabla para que los estudiantes visualizaran de forma más evidente la aproximación al valor solicitado, que en este caso era de $x = -0.6$ y sus $f(x)$ aproximándose al 0.2 para que finalmente coordinaran los procesos realizados en el dominio y rango de la función.

Observa la representación gráfica de la función f y la tabla debajo para responder a las preguntas.



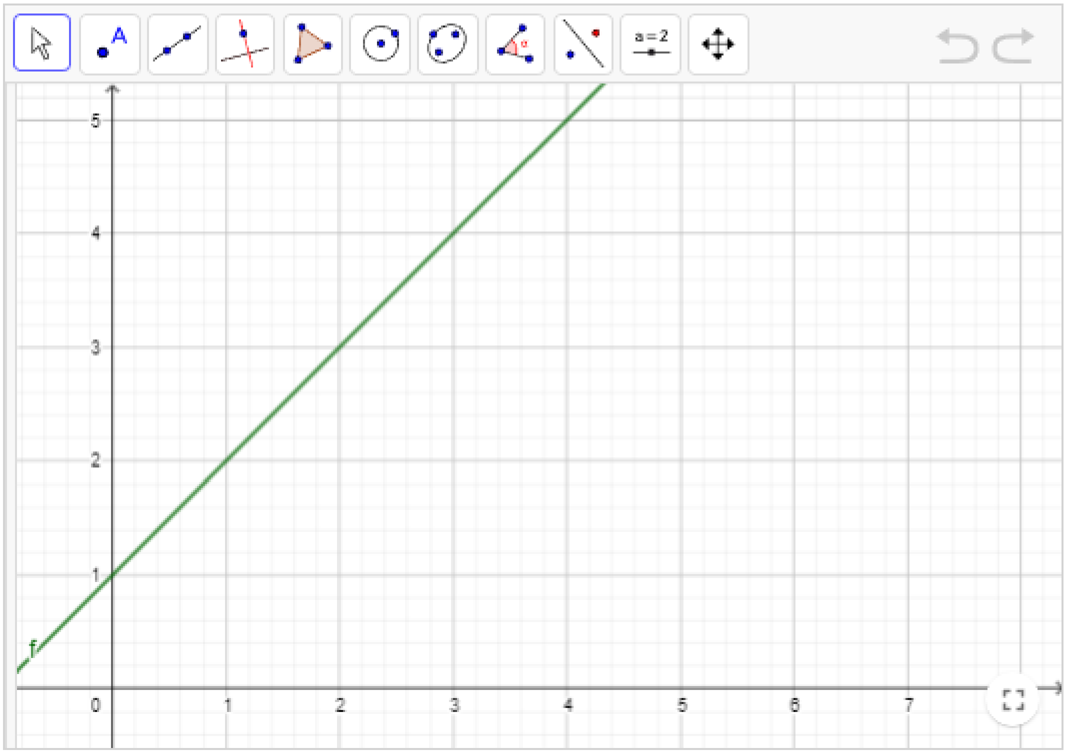
x tiende al valor

x	-0.61	-0.601	-0.6001	-0.60001	...	¿?	...	-0.59999	-0.5999	-0.599	-0.59

Figura 6 ejemplo de la gráfica y tabla presentadas en la actividad 9

En las actividades finales se mencionaban términos como intervalos centrados en un punto dada una gráfica y se pedía que observaran las intersecciones con la gráfica de la función. En la actividad 10.1 se presentaba una gráfica de una función lineal y una tabla de valores para que respondieran algunas preguntas sobre el comportamiento de los valores en el dominio, con las imágenes y finalmente la relación de ambas para poder observar en las respuestas de los estudiantes si habían realizado las construcciones descritas en la descomposición genética.

Observa la representación gráfica de la función f y la tabla para responder a las preguntas



x tiende al valor

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	¿ a?	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999	3.9999	...	¿ L?	...	4.0001	4.001	4.01	4.1

$f(x)$ tiende al valor

Figura 7 parte de la actividad 10.1

En la actividad 10.2 el Applet permite al estudiante construir sus propios intervalos dado un radio específico o elegir el punto central del intervalo y hacerlo tan grande o tan pequeño para poder construir la Acción de aproximación.

En la gráfica de la función f (en color rojo) se muestra un intervalo abierto (en color azul) centrado en L. Además, se muestra un intervalo abierto (en color
verde) centrado en a. En ambos casos los extremos de los intervalos se han prolongado hasta la intersección con la gráfica de f.

Figura 8 Gráfica que forma parte de la actividad 10.2 que busca centrar la atención del estudiante en los intervalos centrados en un punto.

Finalmente, la última actividad era muy similar a la anterior, pero pedía ahora que los estudiantes construyeran un intervalo con centro y extremos dados.

c) En la applet que está abajo, construye un nuevo intervalo centrado en $a = 3$ pero con extremos en $x = 2.2$ y $x = 3.8$ y márcalos con un segmento de recta

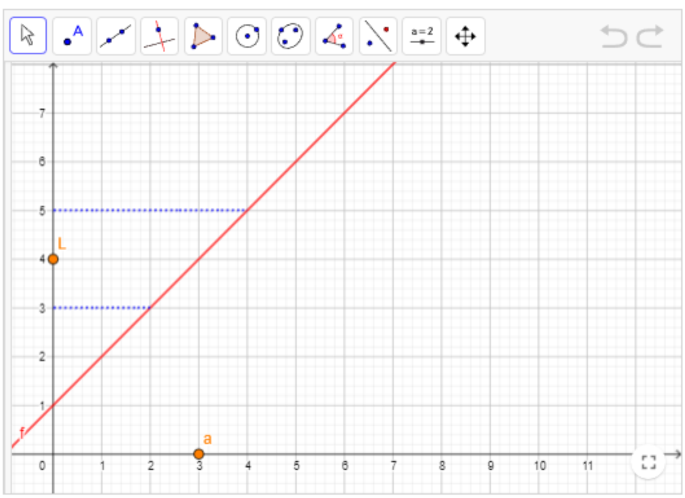


Figura 9 parte de la actividad 10.3 que pide que ahora los estudiantes construyan el intervalo.

El libro con todas las actividades en GeoGebra se puede consultar en https://www.geogebra.org/m/rpyyamxb

3.2 Actividad 1

Inciso a

Considera la función $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ y el valor $x = 0$

a) Usando el applet de abajo, evalúa la función f en los valores x que se presentan enseguida:

-1, -0.75, -0.6, -0.5, -0.37, -0.25, -0.125, 0, 0.001, 0.29, 0.32, 0.48, 0.6, 0.75, 0.98

Registra los valores $f(x)$ en la hoja de cálculo que está debajo del applet en el lugar que corresponde para cada x evaluado

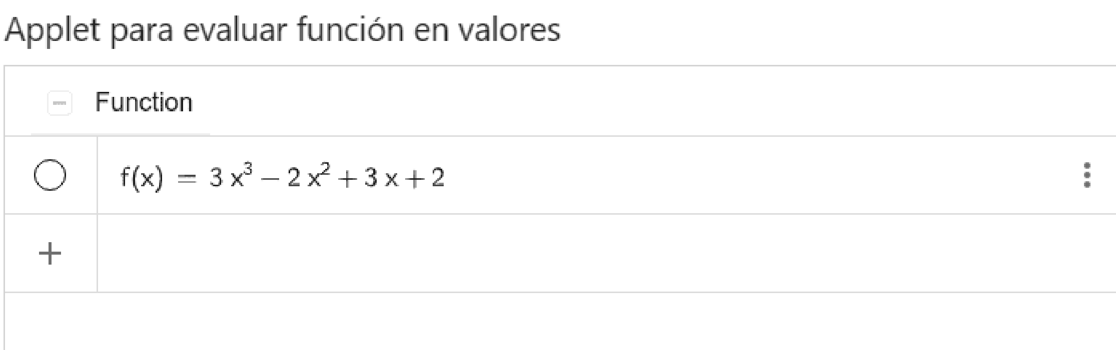


Figura 10 Applet que evalúa la función cuando el estudiante introduce un valor.

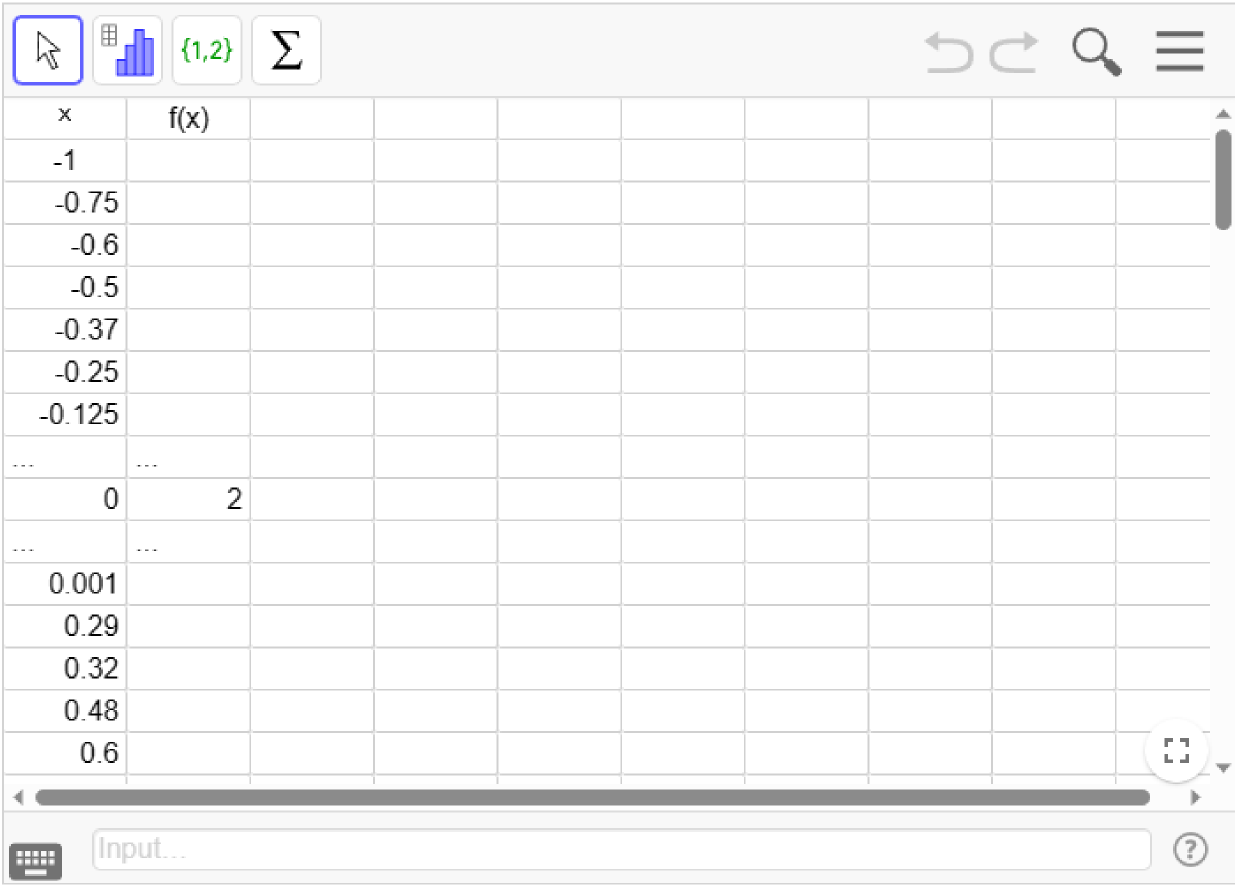


Figura 11 Hoja de cálculo para registro de resultados que se van obteniendo.

Inciso b

b) Al observar los registros de la tabla ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores x cuando los comparas con el valor $x = 0$? Pon especial atención en lo que ocurre con los valores si los consideras desde arriba hasta llegar al cero y después si empiezas desde abajo hasta llegar al cero ¿Qué podrías decir de dichos valores?

En la primera fila ¿Puedes dar un ejemplo de los valores que podrían ir en donde están los tres puntos a la izquierda del cero? ¿y a la derecha?

Inciso c

c) Al observar los valores que obtuviste y que registraste en la hoja de cálculo ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(0) = 2$? ¿Observas alguna diferencia cuando empiezas a verlos desde arriba de la tabla o desde abajo?

Inciso d

d) Ahora considera las dos columnas ¿Puedes describir qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación a la variable x?

3.3 Actividad 5

Considera la siguiente representación gráfica de una función $f(x)$ para responder lo que se te pide.

Usa el punto azul que está sobre la gráfica para moverlo y responder a las siguientes preguntas, observa lo que ocurre con sus coordenadas y pon atención a los segmentos de color verde y rosa.

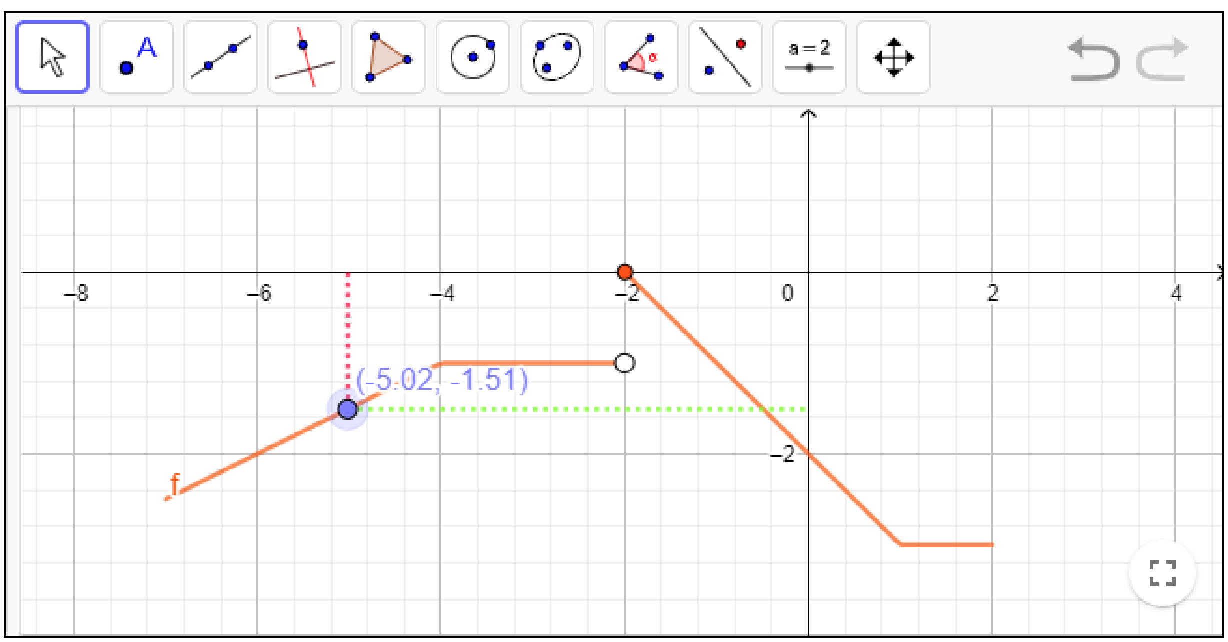


Figura 12. Imagen del applet con la gráfica de la actividad 5.

Inciso a

a) Determina los valores para la función $f(x)$ con las x que se presentan en la siguiente tabla y termina de completarla

x	-6	-4	-2.8	-2.4	-2.2	…	-2	…	-1.8	-1.4	-1.2	-1	2
$f(x)$													

b) Al observar los registros de la tabla ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores x cuando los comparas con el valor $x = -2$?

c) ¿Qué puedes decir del comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-2)$? ¿Observas alguna diferencia cuando te vas acercando por la derecha o por la izquierda?

d) ¿Puedes describir qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación a la variable x?

3.4 Participantes

El grupo constaba de 35 estudiantes que atendían el último semestre de una preparatoria (bachillerato) privada incorporada a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Los estudiantes, al estar tomando los cursos terminales, se dividen por áreas de interés del conocimiento; de esta forma, el grupo seleccionado formaba parte del área de ingenierías y ciencias exactas. La materia en la cual se implementaron las actividades fue la de “Una introducción a la Probabilidad y al Cálculo Diferencial e Integral” en plan anual. Los alumnos habían concluido el estudio sobre el tema de límites y estaban iniciando el estudio del tópico de continuidad por lo que las actividades se implementaron en el marco de una sesión de repaso del tema de límites.

Es importante mencionar, que el grupo seguía recibiendo clases en un ambiente 100% a distancia debido a la pandemia causada por COVID-19. Las lecciones se impartían a través de la plataforma de Google Meet; por otra parte, las actividades se implementaron en GeoGebra donde se podía ir visualizando el avance y respuestas de cada uno de los alumnos. Asimismo, el docente de la clase les solicitaba como evidencia que tomaran capturas de pantalla de sus trabajos para subirlo en Google Classroom.

Capítulo 4

Resultados y análisis

Las actividades propuestas fueron aplicadas en enero de 2022. Inicialmente, se pensó en aplicar tres actividades, de las 10 que se habían adaptado a GeoGebra, ya que el periodo de la clase era de 50 minutos. Debido a la duración de la clase se pudieron implementar sólo dos actividades, así que se seleccionaron la Actividad 1 y la Actividad 5 ya que la primera se centraba en el registro numérico y la segunda en el registro gráfico.

La primera actividad propuesta se enfoca en observar la construcción de los tres primeros pasos de la Descomposición Genética de Cottrill et al. (1996) en el registro algebraico-numérico. En esta actividad se proporciona al estudiante un applet de GeoGebra con la función $f(x) = 3\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 2$ y se le pide al alumno que evalúe la función en valores que van de -1 a 1 centrando la atención en $x = 0$. Al tratarse de un polinomio, el applet facilita la evaluación de la función en los valores de x propuestos y se le pide al estudiante que vaya registrando los resultados obtenidos en una tabla. Posteriormente, se plantean algunas preguntas con el objetivo de cumplir con los dos primeros pasos de la DG, es decir:

La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.

La acción de evaluar la función f en algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano al valor a que el anterior. Finalmente, la última pregunta pide al alumno el considerar tanto los valores del dominio como del rango para continuar con el tercer paso de la DG que dice:

3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:

    a) Interiorización de la Acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a.

    b) Construcción de un Proceso en el rango en el que $f(x)$ se aproxima al valor L.

    c) Coordinación de (a) y (b) a través de f.

Así, se buscaba que los estudiantes realizaran la Acción de evaluar los valores en la función y registraran lo que obtenían. Se esperaba que al ir escribiendo los valores de $f(x)$ el estudiante pudiera centrar su atención en qué iba ocurriendo con los valores del dominio y los obtenidos en el rango y de esa forma construir los dos primeros pasos de la Descomposición Genética.

4.1 Respuestas a la Actividad 1

Al observar las respuestas de las primeras dos tareas se encontraron resultados interesantes, como que algunos estudiantes no usaron el applet para evaluar los valores, pero sí los registraron en la tabla. En la primera tarea, 18 estudiantes usaron el applet evaluando la función, 10 estudiantes no lo usaron y 3 lo hicieron de forma incorrecta. En la segunda tarea se pedía a los estudiantes registrar lo obtenido en la anterior y se contó con: 23 que lo registraron de forma correcta, 4 registraron algunos y sólo 3 no lo hicieron. De esta forma, fueron más los que tienen registros correctos que los que tienen la función evaluada en el primer applet.

La siguiente tarea solicitaba a los estudiantes proporcionar ejemplos de valores aproximándose al cero, primero por los menores o negativos y después por los positivos o mayores a cero. Las preguntas que seguían fueron diseñadas para evaluar la construcción de las estructuras mentales referidas en la Descomposición Genética. Así, la primera pregunta pedía que explicaran qué pasaba con los valores de x al compararlos con $x = 0$.

Al categorizar las respuestas se obtuvo una variedad amplia, la mayoría no respondió a la pregunta, pocos se fijaron en los valores de x, seis centraron su atención en lo que ocurría con $f(x)$ y con el resto de los estudiantes no quedaba claro si sí estaban centrando su atención en los valores de *x* al aproximarse al valor de *x=0* ya que sólo respondieron que aumentaban o disminuían, que eran positivos o negativos, que tenían el mismo valor o se repetían e incluso usaron los términos crecer o decrecer que no permiten tener certeza sobre lo que estaban observando por lo que no era claro si se referían más bien a los valores del rango.

En esta parte se observó que los estudiantes respondían observando tanto lo que ocurría con el dominio como con el rango, como se puede observar en estos ejemplos de respuestas:

E5 "Todos los valores de x son negativos y los valores de $f(x)$ ya varían ya que son los primeros cuatro son negativos y los últimos tres son positivos antes de llegar al cero. Ahora en los valores x todos son positivos y los valores de $f(x)$ son igual positivos y van subiendo de numero de menor a mayor."

E9: *"$x = 0$ su $f(x) = 2$, en los valores de arriba podría decir que van aumentando hasta llegar al dos y los de abajo van restando hasta llegar al 2"*

Sin embargo, algunos estudiantes sí hicieron la distinción y respondieron fijándose en lo que ocurría con los valores del dominio, pero sus respuestas parecen hacer exclusivamente distinción de si los valores eran positivos o negativos, o mayores y menores que cero, como en los siguientes ejemplos:

E15: "*…puedo observar que algunos valores son negativos y otros ya son positivos."*

E7*:"…al observar los valores de x desde arriba a llegar a 0 los valores son negativos y van disminuyendo y al observarlo desde el cero para abajo los valores ya son positivos y van aumentando*"

Así, podemos notar que los estudiantes no muestran el Proceso de aproximación en el dominio sino otras características de las sucesiones de números.

La segunda tarea pedía unos ejemplos de valor de x cercanos al cero aproximándose desde valores positivos y negativos. Después, se pedía que centraran su atención en los valores de la función evaluados en $x = 0$; finalmente se pedía que compararan lo que ocurría con los valores de $f(x)$ con relación a la variable x . A lo cual los estudiantes respondieron en una mayoría, diez de ellos, centrando su atención en si eran positivos o negativos. Nueve de ellos centraron su atención en el dominio o los valores de x que era lo que se esperaba observar. Sin embargo, cuatro de ellos centraron su atención en los valores de la función exclusivamente y cinco compararon o relacionaron lo que ocurría con los valores del dominio y la función evaluada. Un estudiante usó términos como acercamiento o aproximación y seis más dieron respuestas que no se pudieron identificar con los pasos de la DG. A continuación mostramos algunos ejemplos de las respuestas:

E5: "Los valores a partir de 0 para arriba, puedo observar que entre mas grande el numero en el valor de x, el valor de f(x) es menor a comparación de los valores de x de cero para abajo, (es decir, los valores en este caso son mayores en valores mas pequeños)."

E7: "…al observar los valores de x desde arriba a llegar a 0 los valores son negativos y van disminuyendo y al observarlo desde el cero para abajo los valores ya son positivos y van aumentando"

E12: "Que son muy aproximados y son positivos aunque cambie el signo de "-" y de "+""

Posteriormente, se solicitaba que observaran los valores que habían registrado de la función evaluada y que compararan los valores obtenidos con el valor de $f(0) = 2$ y precisaran qué distinguían si se aproximaban con $x < 0$ o con $x > 0$. La mayoría de los estudiantes respondió que observaban un cambio, ya sea en términos de aumentar/disminuir o de crecer/decrecer. Otros centraron su atención en si eran negativos o positivos, lo cual ocurría con los valores de x, no alrededor de $f(0)$. Tes estudiantes respondieron que no observaban diferencias y tres más que no respondieron. En estas respuestas también fue notable la distinción entre positivos y negativos pese a que el valor en el que debían centrar su atención era $f(0) = 2$ como en estos ejemplos:

E3: *"Si ya que los primeros 4 valores de arriba son negativos y los últimos nueve ya son positivos pero los tres primero llegan antes de f(0)=2 y los demás ya son positivos."*

E9: *"No veo mucha diferencia, son valores parecidos y solo cambian de signo"*

Sin embargo, al intentar evidenciar si se había construido el Proceso en el dominio donde se pudieran imaginar una infinidad de valores cada vez más cercanos a cero se obtuvieron respuestas que no mostraron dicha construcción. Por ejemplo, la alumna:

E11: *De arriba hasta llegar al cero son menores que cero y cuando comienza acercarse al cero son positivos acercándose al 2. De abajo hacia arriba los valores de f(x) son más grandes y positivos y al acercarse al cero aumenta con el .001 llega al 2*

Lo cual nos permite ver que la alumna no se fijó en los valores de x sino que no pudo separar lo que ocurría con los valores del dominio y con la función evaluada. En total fueron menos de una tercera parte del total de respuestas que sí se centraban en los valores de x y de ellos sólo uno respondió en sentido de acercamiento o aproximación y la mayoría sólo enunció que percibían cambios de negativo a positivo, pero no pudieron hacer explícito el proceso de imaginar valores cada vez más cercanos al cero.

En dicha tarea se esperaba algo similar, pero ahora centrando la atención en el rango. La DG describe la construcción de un proceso en el rango que permite imaginar una infinidad de valores y aproximándose a un valor L que, en el caso de la presente actividad, pedía centrar su atención en lo que ocurría alrededor de $f(0) = 2$. Cuando se les pidió que observaran lo que ocurría con el comportamiento de los valores de la función comparados con el mencionado previamente, la mayoría sí se fijó en los valores de y respondiendo que aumentaban/disminuían o crecían/decrecían, mas 5 estudiantes siguieron observando lo que ocurría en el dominio y respondieron que había un cambio de negativos a positivos o de menores a mayores que cero; 3 estudiantes dijeron que no notaban diferencias y otros 3 no respondieron.

Entre las respuestas encontradas podemos ejemplificar las que se fijan en el rango, pero no llegan a evidenciar la aproximación por valores sucesivamente más cercanos:

E11: *Sí, ya que los primeros 4 valores de arriba son negativos y los últimos nueve ya son positivos pero los tres primero llegan antes de f(0)=2 y los demás ya son positivos.*

E2: *Que va cambiando uniformemente, el cambio es debido al dato ingresado. Puedo observar que el cambio va de mayor a menor y si lo vemos al revés de menor a mayor*

Y las que siguieron observando lo que ocurría con los valores de x y no con los valores de la función:

E4: *Sí, a partir de 0 para arriba los valores decrecen entre más grande sea el valor de x, y de 0 para abajo la situación es inversa.*

Finalmente, encontramos algunas respuestas que dificultan la interpretación en términos de la Teoría, debido al vocabulario utilizado por los estudiantes y a algunas expresiones ambiguas, como por ejemplo:

E8: *No noto alguna diferencia, todos van de cierta forma constante hasta llegar al "punto central" (2).*

El último inciso buscaba evaluar el tercer paso de la DG donde se construyera un Proceso coordinado de los procesos previos, tanto en el dominio como en el rango a través de la función. En esta pregunta, más de la mitad de los estudiantes dejaron la respuesta en blanco o respondieron que no sabían o no entendían la pregunta. Hay ejemplos que nos hacen ver que faltan algunas de las estructuras previas que deben tener los estudiantes para construir el concepto de límite, como lo es el concepto de función. Los estudiantes mostraron sólo la concepción Acción de función de acuerdo a las ideas Dubinsky de 1991 que dice que se da cuando el individuo puede pensar en una función en términos de aceptación de entradas, manipulándolas de alguna forma, y produciendo salidas sin la necesidad de hacer cálculos explícitos como lo muestra este ejemplo:

E2: … *que cada valor de x al hacer f(x) se da esto:* $f(x) = 3\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 2$ *y se relaciona sólo en las x y todos llevan la misma fórmula a partir de usar la f(x)*

Por lo tanto, no podemos afirmar que se construyera el Proceso de aproximación en el dominio, rango y su coordinación a través de la función.

4.2 Respuestas a la Actividad 5

La actividad 5 se enfoca en el registro gráfico así que presentaba un applet con la gráfica de una función discontinua y un punto que se podía deslizar sobre la curva. Al mover el punto se mostraban sus coordenadas como par ordenado, así como las perpendiculares a los ejes de colores diferentes. Al inicio se pedía completar una tabla con valores de $f(x)$ a partir de un listado de valores de x dados de acuerdo a los dos primeros pasos de la DG:

1. La acción de evaluar *f* en un solo punto *x* que se considera cercano, o incluso igual al valor a.

2. La acción de evaluar la función *f* en algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano al valor *a* que el anterior.

Posteriormente, se pedía que respondieran qué podían observar de los valores de x cuando los comparaban con el valor $x = -2$ a lo cual sólo dos de los estudiantes se fijaron en valores del dominio, seis respondieron asociándolos con los valores de la función como:

E1: *tiende al cero el x=-2 y los demás cambia sus números*

E9 quien también responde sobre los valores de las imágenes (que sí son menores o iguales que cero): *Van cambiando y van siendo todos negativos*.

Para observar la construcción mencionada en la DG, pero centrada en el registro gráfico se presentó un applet con la gráfica de una función discontinua en $x = -2$. El applet de GeoGebra permitía mover un punto sobre la curva de la gráfica e iba indicando las coordenadas del mismo. De esta forma, la primera tarea presentada solicitaba que los estudiantes determinaran los $f(x)$ correspondientes a unos valores dados y que completaran la tabla.

En seguida, se pedía que observaran los registros de la tabla que habían hecho y que respondieran ¿qué podían decir del comportamiento de los valores x cuando los comparas con el valor $x = -2$? Algunos ejemplos de respuestas son:

E7:… que el valor de -2 es el límite entre números positivos y números negativos

E17:… que van en múltiplos de .2

El inciso b pedía que compararan los valores de $f(x)$ con el valor de $f(-2)$ y si observaban diferencias al acercarse por la izquierda o por la derecha. Las respuestas a esta pregunta parecen ser las que mejor evidencian las construcciones esperadas, recordemos que la gráfica de la función era creciente en $-7 < x < 4$ posteriormente era constante, $y = -1$, en $-4 < x < -2$; en $x = -2$ era discontinua y después era decreciente. Son particularmente interesantes las respuestas como:

E2: *Por el lado de la derecha son constantes en línea recta horizontal, mientras por la izquierda van decreciendo. Lo mismo que el inciso anterior y sí una diferencia en los valores pero los signos son iguales.*

Ya que muestra la Acción de identificar que los valores de f son todos negativos de acuerdo con el Paso 2 de la DG. Otros mostraron indicios similares, aunque cuando se acercaban por la derecha los valores van aumentando su respuesta muestra la Acción deseada.

E13: *En ambos casos hay diferencias cuando se van acercando por la derecha los valores van disminuyendo (-1) hasta llegar a (0) que en este caso en f(-2) y al acercarse por la izquierda empieza en (-2) y se queda en reposo en (-1) hasta llegar a f(-2) que en f(x) queda como 0.*

Sin embargo, la mayoría de las respuestas no mostraba claridad en las construcciones que se esperaba observar porque se referían a si eran valores menores (sin especificar a qué) o positivos.

Finalmente, el inciso c preguntaba qué ocurría con los valores de $f(x)$ en relación con lo que ocurría con la variable x para tratar de mostrar si se había construido el tercer paso de la DG.

El análisis de la respuesta no permite ver la construcción del Proceso descrito ya que no se evidenciaron la construcción de los Procesos en el eje X y el otro en el eje Y, lo que imposibilita la coordinación de ambos como se puede ver en estos ejemplos:

E1: *…van disminuyendo sus valores de f(x) y los x son más altos*

E6: *…los valores son menores que con las f(x) y son valores constantes por así decirlo*

E14: *En la variable x sus valores aumentan, mientras que en f(x) la mayoría de los valores tienden a quedarse en el mismo valor. Sin embargo, hay algunos en los que sus valores cambian como: -0.2, -0.59, -0.79*

El análisis parece mostrar que no consideran aproximarse al valor de $x = 2$ y su respectiva imagen, sino que observan la gráfica y perciben que hay un cambio en los valores de la función pero esto no permite evaluar si se construyeron los Procesos en Dominio, Rango ni su coordinación a través de la gráfica de la función. Sin embargo, al menos cinco estudiantes sí evidencian estructuras mentales Proceso de función, pues mencionan la dependencia del cambio en x para que se produzca el cambio en *f(x)*, inclusive, algunos describen el cambio simultáneo de ambas variables.

Conclusiones

El análisis de las respuestas no permitió observar todas las construcciones descritas en la Descomposición Genética para el concepto de límite de una función. Las respuestas de los estudiantes entrevistados solo permitieron identificar las Acciones de la DG descritos en los 2 primeros pasos de la misma. Sin embargo, para la construcción del concepto se requería también evidenciar las construcciones de los Procesos en el Dominio y en el Rango y, finalmente, la coordinación de ambos Procesos. En las dos actividades aplicadas se muestra la carencia también de ciertas estructuras previas que son necesarias para construir el concepto de límite. Por ejemplo, es necesario que los estudiantes hayan construido el concepto de función como un Proceso, lo cual no ocurrió en el grupo entrevistado ya que cuando se les preguntaba por lo que ocurría con valores del dominio casi todos respondían con los valores de la función evaluada.

Las respuestas mostraron que el registro gráfico era más amigable para manipular en la plataforma y permitía evidenciar mejor las Acciones de evaluar la función en puntos cada vez más cercanos a un $x = a$ que en el registro algebraico-numérico.

En ninguna de las dos actividades se puede valorar si se construyeron las estructuras del cuarto paso, correspondiente a la Encapsulación del Proceso del paso 3, ya que no se realizaron las Acciones en el dominio y rango en los registros algebraico-numérico ni en el gráfico.

Las actividades en GeoGebra les resultaron atractivas a los estudiantes y durante la clase expresaron dudas e interés. Sin embargo, al registrar las respuestas en la misma plataforma no se puede profundizar en las respuestas obtenidas, lo cual tal vez podría haberse hecho con una entrevista clínica posterior a la aplicación de actividades o al observar a un grupo más pequeño de estudiantes y poder revisar no sólo sus respuestas, sino poder hacer preguntas u observaciones más detalladas. Sin embargo, debido a que fue una única sesión de trabajo con el grupo ya no se pudo profundizar más.

Los estudiantes de bachillerato donde se implementó no mostraron la construcción de la concepción dinámica del concepto de límite. Esto se puede deber al poco tiempo dedicado a su estudio, a la enseñanza centrada en operaciones algebraicas o a las carencias en construcciones previas, como pueden ser del concepto de función como se pudo observar en el trabajo de los estudiantes y del orden en los números reales, donde algunos sólo se fijaban en el signo o en los incrementos, pero no en el orden (aumentar o disminuir). Cabe destacar que estos estudiantes ya habían concluido el estudio del tema de límites en su curso y que en sus respuestas se aprecia el comportamiento de las funciones propuestas a un nivel de dependencia y de cambio en las variables, para algunos también, la coordinación de las mismas, pero no los Procesos de aproximación infinita necesarios para la concepción dinámica del límite de una función.

El grupo mostró carecer de las estructuras previas para poder construir el concepto de límite. De acuerdo a Dubinsky et al. (2005, p. 338) en el concepto de función “si un individuo requiere la expresión explícita para poder pensar sobre el concepto de función y puede hacer poco más que sustituir la variable en la expresión y manipularla se considera que tiene una comprensión de Acción de las funciones”. Esto se observó en la primera actividad, donde las respuestas mostraban que sólo evaluaban los valores de la función y no parecía que pasaran de la Acción, ya que para tener la concepción Proceso de función el estudiante puede pensar en la función en términos de aceptar entradas, manipularlas de alguna forma, y producir salidas sin necesidad de hacer cálculos explícitos (Arnon et al., 2014).

Como concluyen Rubio-Pizzorno y Montiel (2022) se ha abierto una nueva era de investigación con tecnologías en matemática educativa que dice que debemos preguntarnos sobre los valores epistémico y pragmático de todas las tecnologías para poder aprovecharlas don un sentido educativo y didáctico más consciente para conocer qué matemáticas y cómo se aprenden en la era digital.

Referencias

Afgani, M. W., Suryadi, D., & Dahlan, J. A. (2017, September). Analysis of undergraduate students' mathematical understanding ability of the limit of function based on APOS theory perspective. In *Journal of Physics: Conference Series* (*Vol. 895*, No. 1, p. 012056). IOP Publishing.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer Science & Business Media.

Artigue, M., Douady, R., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.

Artigue, M. (2009). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In: Hoyles, C., Lagrange, JB. (eds) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. New ICMI Study Series, vol 13. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: a research paradigm. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167–192

Dubinsky, E. (1989). Teaching mathematical induction II. *7. The Journal of Mathematical Behavior*, 8(3), 285–304

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2012). *How to design and evaluate research in education* (Vol. 7, p. 429). McGraw-hill.

Guerrero, J. J., & Hernández, L. A. (2020). Análisis de actividades didácticas para el estudio del límite de una función por medio de la teoría APOE. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 5, 1-19.

Hernández, L.A., Trigueros, M., Ruiz, H., & Juárez, E. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias,* 41, (2). https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*, *Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico)*.

Marsitin, R., y Sesanti, N. R. (2018, January). Limit learning with apos theory and maple to develop mathematical communication and critical thinking. In *University of Muhammadiyah Malang's 1st International Conference of Mathematics Education (INCOMED 2017)* (pp. 54-59). Atlantis Press.

Morante, J. D. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite basada en teoría APOE* [Tesis de Maestría]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/assets/docs/catalogo-tesis/mem/2020/JoseDavidMoranteRodriguez.pdf

Morante Rodríguez, J. D., Hernández Rebollar, L. A., & Ruiz Estrada, H. (2022). Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería. *Educación matemática*, 34(1), 249-279. https://doi.org/10.24844/EM3401.09

Neira, G. I. (2013). Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. *Infancias Imágenes*, *12*(1), 44–50. https://doi.org/10.14483/16579089.4919

Rubio-Pizzorno, S., y Montiel, G. (2020). Ecosistemas Educativos Híbridos en la investigación en matemática educativa. In *Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco* (pp. 271-312). Pimenta Cultural.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371–397.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 43(4), 465-493. Education, *43*(4), 465–493. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(2), 125–147. https://doi.org/10.1007/BF00555720

Anexos

El libro con todas las actividades en GeoGebra se encuentra en:

https://www.geogebra.org/m/rpyyamxb

Las actividades que se aplicaron fueron.

Actividad 1

https://www.geogebra.org/m/djcvnsdp

Actividad 5

https://www.geogebra.org/m/u2mhtae5

Respuestas a la primera actividad

i. Al observar los registros de la tabla ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores x cuando los comparas con el valor x=0? Pon especial atención en lo que ocurre con los valores si los consideras desde arriba hasta llegar al cero y después si empiezas desde abajo hasta llegar al cero ¿Qué podrías decir de dichos valores?	ii. Al observar los valores que obtuviste y que registraste en la hoja de cálculo ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores f(x) cuando los comparas con el valor f(0)=2? ¿Observas alguna diferencia cuando empiezas a verlos desde arriba de la tabla o desde abajo?	iii. Ahora considera las dos columnas ¿Puedes describir qué sucede con el comportamiento de los valores f(x) con relación a la variable x?
puedo observara que algunos valores son negativos y otros ya son positivos.	van aumentando	empiezan en negativos hasta que van aumentando y comienzan los números positivos
De arriba hasta llegar al cero son menores que cero y cuando comienza acercarse al cero son positivos acercándose al 2. De abajo hacia arriba los valores de fx son mas grandes y positivos y al acercarse al cero aumenta con el .001 llega al 2	si, los números van desde arriba como menores que 0 hasta aumentar sus valores desde abajo de la tabla	Los valores se aproximan a 2
	se observan diferencias desde arriba de la tabla	

Los valores se acercan al 2	cuando se considera el resto salen decimales a diferencia del f(0)	Conforme aumenta el valor de x, f(x) va creciendo
Todos los valores de x son negativos y los valores de f(x) ya varían ya que son los primeros cuatro son negativos y los últimos tres son positivos antes de llegar al cero. Ahora en los valores x todos son positivos y los valores de f(x) son igual positivos y van subiendo de numero de menor a mayor.	Si ya que los primeros 4 valores de arriba son negativos y los últimos nueve ya son positivos pero los tres primero llegan antes de f(0)=2 y los demás ya son positivos.	Van cambiando ya que los primeros tres de f(x) los resultados son negativos y después ya son positivos los últimos tres pero aun la variable de x siguen siendo negativos, pero después de llegar a f(0)=2 ya tanto como x y f(x) son positivos.
Los valores a partir de 0 para arriba, puedo observar que entre mas grande el numero en el valor de x, el valor de f(x) es menor a comparación de los valores de x de cero para abajo, (es decir, los valores en este caso son mayores en valores mas pequeños).	Si, a partir de 0 para arriba los valores decrecen entre mas grande sea el valor de x, y de 0 para abajo la situación es inversa.	Cuando x es negativa, el valor que obtenemos un numero mas pequeño en cantidad mas grande que en un valor mas pequeña.
x=0 su f(x) = 2, en los valores de arriba podria decir que van aumentando hasta llegar al dos y los de abajo van restando hasta llegar al 2	si hay diferencia desde abajo en f(0.001)=2	que cada valor de x al hacer f(x) se da esto: f(x)=3 x^(3)-2 x^(2)+3 x+2 y se relaciona solo en las x y todos llevan la misma formula a partir de usar la f(x)
al observar los valores de x desde arriba a llegar a 0 los valores son negativos y van disminuyendo y al observarlo desde el cero para abajo los valores ya son positivos y van aumentando.	si cuando los observo desde arriba de la tabla los valores van aumentando y si los miro desde abajo los valores van disminuyendo hasta llegar a valores negativos.	el valor de f(x) va aumentando bastante con relación a la variable x
Que los valores conforme se van acercando al 0 aumentan su valor numérico.	Si, los valores disminuyeron.	Mientras menos sea la variable x mayor es f(x).
que depende de si te vas acercando o alejando va aumentando o disminuyendo el valor.		
pues que va aumentando su valor	si, en los dos casos van disminuyendo o aumentando	que su cantidad es mayor

	su cantidad , se nota mas la diferencia de abajo	
Puedo decir que cada valor va cambiando debido a la función y el cambio que tiene es sistemático porque va aumentando o disminuyendo dependiendo el dato colocado.	Qué va cambiando uniformemente, el cambio es debido al dato ingresado. Puedo observar que el cambio va de mayor a menor y si lo vemos al revés de menor a mayor.	Lo mismo que lo anterior, que van obteniendo un cambio uniforme y sistemático.
Que son muy aproximados y son positivos aunque cambie el signo de "-" y de "+"	No veo mucha diferencia, son valores parecidos y solo cambian de signo	No sabría describirlo.
Los valores de arriba hasta llegar a cero son negativos y los de abajo hasta llegar a cero son positivos	f(x) no es continúa	
Van aumentando su valor (ascendiendo).	La diferencia es la manera en la que se visualizaría la tabla. Si se ve de arriba hacia abajo veremos como el valor f(x) va aumentando de poco en poco. En cambio si la tabla la observamos de abajo hacia arriba los valores de f(x) irán disminuyendo.	
que antes de llegar a cero todos los valores de arriba de 0 son numeros merones que cero y los numeros de arriba de cero son mayores que cero	que apartir del 0 a la derecha fue aumentando mas progresivamente	que apartir de que los numeros positivos aparecen la en x aumente mas progresivamente los valores de f(x)
Los valores van siendo positivos conforme van bajando para el 0		
de arriba hacia abajo los valores van aumentando empieza con -0.38 y termina en 1.59. de abajo hacia arriba los valores van disminuyendo empieza con 5.84 y termina en 2	no noto una diferencia	
Van subiendo y bajando los valores	Dan un número entero y positivo	
Que los valores siempre llegan al mismo punto que es 0	si, porque los de arriba son negativos y los de abajo no	Va aumentando

Que en la parte de arriba van incrementando hasta llegar a 2 y en la parte de abajo pasa algo contrario (descienden las cantidades hasta llegar a 2)..	no noto alguna diferencia,todos van de cierta forma constante hasta llegar al "punto central" (2).	que todos va a llegar a "ser" el numero 2
abajo del cero claramente son negativos y arriba del cero son positivos, además que van de menor a mayor		
Que todos terminan en el valor 2	Pues cuando los vemos desde arriba van en aumento hasta llegar al 2 y desde abajo van disminuyendo hasta el 2	No entendí muy bien la pregunta):
Podría decir que en los valores que se encuentran arriba del cero al ser negativos el resultado disminuye, en el caso de los valores que se encuentran después del cero incrementan y son enteros		
Tienen un aumento regular pasando de ser negativos a positivos	Si, primero son negativos y con decimales, después positivos con decimales	Irán de manera creciente o decreciente según sea el valor dado
Que arriba desnivela y abajo ya va mas parejo	los primeros aumentan y disminuyen y los segundos van aumentando	creo que el signo le afecta al resultado

Inciso i)

Al observar los registros de la tabla ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores x cuando los comparas con el valor x=0? Pon especial atención en lo que ocurre con los valores si los consideras desde arriba hasta llegar al cero y después si empiezas desde abajo hasta llegar al cero ¿Qué podrías decir de dichos valores?

Nota: No suman 26 ya que algunos estudiantes tenían más de un elemento en su respuesta

Categoría	Se fija sólo en los valores de x (dominio)	Positivo y negativo	Compara o relaciona dominio y rango	Usan el término acercamiento o aproximación	Sólo se fija en los valores de f(x) (imágenes)	Otro	No respondió
Inciso i	9	10	5	1	4	6	1

ii. Al observar los valores que obtuviste y que registraste en la hoja de cálculo ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores f(x) cuando los comparas con el valor f(0)=2? ¿Observas alguna diferencia cuando empiezas a verlos desde arriba de la tabla o desde abajo?

Categoría	Aumentar, disminuir. Cambian: crecen o decrecen	Mayores o menores que cero (negativos, positivos)	No hay diferencia	Otro	No respondió
Inciso ii	12	5	3	4	3

iii. Ahora considera las dos columnas ¿Puedes describir qué sucede con el comportamiento de los valores f(x) con relación a la variable x?

Categoría	Positivos/negativos	Aumentan/disminuyen Crecen/decrecen Menores/mayore	Relacionan dominio y rango	Sólo se fija en valores del dominio o rango sin relacionarlos	No contestó / no entendió
Inciso iii	1	1	1	1	

Respuestas a la segunda actividad

i. Al observar los registros de la tabla ¿qué puedes decir del comportamiento de los valores x cuando los comparas con el valor x=-2?	**ii. ¿Qué puedes decir del comportamiento de los valores f(x) cuando los comparas con el valor f(-2)? ¿Observas alguna diferencia cuando te vas acercando por la derecha o por la izquierda?**	**iii. ¿Puedes describir qué sucede con el comportamiento de los valores f(x) con relación a la variable x?**
tiende al cero el x=-2 y los demás cambia sus números	aumentan y disminuyen	van disminuyendo sus valores de f(x) y los x son mas altos
es el mismo valor, que en este caso es -1	si los valores se van acercando por ambos lados	los valores son menores que con las fx y son valores constantes por así decirlo.
pasan de -2.4 a -1	comienza a aproximarse a -1	por la izquierda y por la derecha se van a ir aproximando a -1 con intervalos de 2 unidades o decimales

Van cambiando y van siendo todos negativos.	Van variando ya que van cambiando.	Van variando uno con otros
Que primero se mantienen constantes y después decrecen.	Por el lado de la derecha son constantes en linea recta horizontal, mientras por la izquierda van decreciendo.	Que entre mas grande el valor de x, el valor de f(x) disminuye.
que unos estan a la izquierda (-6) y el otro a la derecha(-1) para acercarse al valor x=-2	lo mismo que el inciso anterior y si una diferencia en los valores pero los signos son iguales	dependiendo de las coordenadas de la variable x se vera reflejada en f(x) ejemplo coordenadas de x= -1.8 y su f(x) (dependiendo de las coordenadas de la grafica) es -0.18
los valores de la izquierda van aumentando y los valores hacia la derecha disminuyen.	en ambos casos hay diferencias cuando se van acercando por la derecha los valores van disminuyendo (-1) hasta llegar a (0) que en este caso en f(-2) y al acercarse por la izquierda empieza en (-2) y se queda en reposo en (-1) hasta llegar a f(-2) que en f(x) queda como 0.	Los valores de x van cambiando constantemente y en f(x) se quedan en constante reposo y muy pocas veces cambia la variante.
Que el valor f de x es igual a 0	Si, los valores cambian son negativos y positivos	Aumentan o disminuyen según el valor f de x
que es una cantidad menor	de x por la izquierda y de f(x) por la derecha	pues en variable x se queda con el mismo valor y en el otro vector si se van viendo los aumentos
Su cambio o comportamiento es debido a cómo están colocada la función dentro de la gráfica, dentro de las coordenadas es el cambio que tiene	El comportamiento tiene una diferencia dependiendo de las coordenadas y la colocación de la gráfica.	Qué dentro de la gráfica una se puede marcar como horizontal f(x) y otra como la vertical (x)
Que tiene un valor sucesivo	Tienen una leve diferencia en decimales.	Solo noto que van en descendencia.
De izquierda a derecha los valores van aumentando	En algunos valores llega a cambiar ligeramente.	En la variable x sus valores aumentan, mientras que en f(x) la mayoría de los valores tienden a quedarse en el mismo valor. Sin embargo hay algunos en los que sus valores cambian como: -0.2, -0.59, -0.79

que el valor de -2 es el limite entre numeros positivos y numeros negativos	solo que aparti del -2 va disminullendo por la izquierda	que cada vez que aumenta los valores en f(x) tambien aumenta mas significativamente en x
Se repiten ya que sale que es -1	Va siendo positivo y se va convirtiendo en 0.	Todos son negativos
Sale el mismo resultado aunque el -2 sea como -0.8, -2.4, -2.6. Sale como resultado -1	En la derecha ya todo es con cero y en la izquierda se va acercando más al uno y dos en negativo	Va marcando los puntos en donde los pide en la tabla, el valor que pide con el vcalor que choca Xy Y
que los valores se repiten	si el valor es menor	que va cambiando según el aumento
so observa que se tienden a ser -1	si, que por el lado Izquierdo, se observa que ciertos valores lograron su "objetivo" de llegar/Ser (-1)	Que los valores obtenidos no tienden a ser positivos en esta occacion .
Se encuentran por un momento en el mismo valor	No hay gran diferencia porque durante varios valores se mantiene en un mismo valor	Son constantes
que van en multiplo de .2	los de derecha aumentan y los de izquierda decrecen	es una sucesión numerica a ambos lados

Inciso i

Se fija en el dominio	Se fija en la gráfica (no en la tabla)	Se fija en las imágenes	Cambiar / pasar	Negativo / positivo	Constantes / lo mismo / se repiten	Aumentan / disminuyen / crecen /decrecen	Se fija en la tabla	No sabe o no contestó
5	3	12	3	2	3	2	5	2

Inciso ii

Aumentan / disminuyen /menores / mayores	Se fija en las imágenes	Se fija en el dominio	Se aproxima sólo por un lado (izquierdo o derecho)	Varían / cambian	Sí se aproximan por ambos lados	Negativo / positivo / cambia de signo	Ve la gráfica
3	6	2	5	4	3	4	2

Inciso iii

Se fija en dominio e imágenes	Disminuyen/ aumentan / menores /	Se fija sólo en la imagen	Constante / reposo	Cambian / varían	Se fija en la gráfica	Notan la dependencia	Negativos positivos	Decimales
9	7	4	3	2	2	2	2	1