



# BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas

---

Postgrado en Ciencias Matemáticas

## Operadores $\alpha$ -Fredholm en Espacios de Hilbert

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MARCO ANTONIO ZAMORA SARABIA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SLAVIŠA DJORDJEVIĆ

PUEBLA, PUE. NOVIEMBRE 2022





**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE**  
**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

MARCO ANTONIO ZAMORA SARABIA

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 18 de noviembre de 2022, con la tesis titulada:

*Operadores  $\alpha$ -Fredholm en Espacios de Hilbert*

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.  
H. Puebla de Z. a 22 de noviembre de 2022

**DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO**  
**COORDINADORA DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**





*Para mi prometida, la cual nunca me dejara caminar solo.*



## Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia por todo el apoyo recibido durante mi desarrollo profesional. Especialmente a mi madre que ha sido mi motivación y anhelo para concluir con mi formación, a mi mamá Piedad por brindarme todo su apoyo, a mi papá Francisco y a mis hermanos.

Al Doctor Slavisa Djordjević, por aceptar trabajar conmigo y apoyarme en la dirección de este trabajo, por su tiempo, enseñanza y comprensión que tuvo conmigo. Muchas gracias porque no me dejo de apoyar en todo momento.

A mis senoidales: Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, Dr. Gabriel Kantún Montiel, Dr. David Herrera Carrasco y Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros por aceptar revisar y enriquecer esta tesis, así como su gran apoyo y amabilidad que obtuve de su parte a lo largo de la carrera.

Gracias a todos mis profesores de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la BUAP, por brindarme lo mejor de ustedes y por la ayuda que me dieron durante toda la maestría. También le doy gracias a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por permitirme desarrollarme académicamente dentro de sus aulas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), cuya apoyo permitió que pudiera realizar mi posgrado y la realización de este trabajo.

A todos ustedes *GRACIAS*.



# Introducción

Los temas de la teoría de operadores y su subconjunto más importante, la teoría espectral, se desarrollaron rápidamente después de 1900. Un acontecimiento importante fue la aparición de la teoría de ecuaciones integrales de Fredholm, que surgió como un nuevo enfoque del problema de Dirichlet. La teoría de Fredholm, en honor a Erik Ivar Fredholm, se ocupa de la solución de la ecuación integral de Fredholm. En un enfoque más amplio, la teoría de Fredholm es el estudio de los operadores, que son generalizaciones de operadores representados como diferencia de la identidad y un operador lineal compacto en un espacio de Hilbert, o más general, de Banach. Estos operadores de Fredholm juegan un papel muy importante en la teoría espectral de operadores.

En el caso de espacios de Hilbert separable, se ha estudiado ampliamente la teoría de los operadores de Fredholm y semi-Fredholm, así como sus caracterizaciones a través de los teoremas de Atkinson. Se han desarrollado un estudio detallado de conceptos como el índice de un operador, el ascenso y descenso, las propiedades de los operadores de Weyl, semi-Weyl, Browder y semi-Browder, espectros esenciales, entre otros.

Sin embargo, para el caso cuando el espacio de Hilbert no es separable, es decir  $\dim \mathcal{H} = h$  con  $h > \aleph_0$ , fue hasta los años 70's cuando G. Edgar, J. Ernest y S. G. Lee en [11] generalizaron los operadores de Fredholm para estos espacios. Para ello, considerando un número cardinal  $\alpha$  tal que  $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$ , presentaron nuevas definiciones, tales como espacio  $\alpha$ -cerrado, el cual es un subespacio  $M$  de  $\mathcal{H}$  que cumple que exista un subespacio cerrado  $E$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $E \subset M$  y  $\dim(M \cap E^\perp) < \alpha$ , y  $\alpha$ -acotado, el cual es un subconjunto  $E$  de  $\mathcal{H}$  tal que para toda  $\epsilon > 0$  existe un conjunto  $\{x_m : m \in M\} \subseteq E$  con  $\text{Card } M < \alpha$  tal que  $E \subseteq \bigcup_{m \in M} B_\epsilon(x_m)$  donde  $B_\epsilon(x_m)$  es la bola con centro  $x_m$  y radio  $\epsilon$ , lo que les permitió generalizar los operadores de Fredholm a un tipo de operador más general, a los cuales les llamaremos operadores  $\alpha$ -Fredholm.

Un operador lineal  $T \in B(\mathcal{H})$  es  $\alpha$ -compacto si  $T(B_1(0))$  es  $\alpha$ -acotado donde

$B_1(0)$  es la bola unitaria en  $\mathcal{H}$ . Denotamos por  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  al ideal bilateral en  $B(\mathcal{H})$  de todos los operadores lineales de rango menor que  $\alpha$ . Nuevamente en [11] los autores obtuvieron que un operador  $\alpha$ -compacto está contenido en  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , el ideal que es la cerradura de  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ . Los operadores  $\aleph_0$ -compactos son precisamente los operadores compactos. Como  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  es un ideal, podemos tomar al álgebra cociente  $B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  y a  $\pi_\alpha : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  el homomorfismo natural. Entonces siguiendo la idea del teorema de Atkinson para operadores Fredholm, podemos definir de forma natural que un operador es  $\alpha$ -Fredholm si  $\pi_\alpha(T)$  es invertible en  $B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar con más detalle la teoría de los operadores  $\alpha$ -Fredholm, ver qué propiedades análogas a las de los operadores de Fredholm se cumplen y analizar todo su contenido teórico. En el primer capítulo se revisarán los preliminares, nociones básicas de la Teoría de operadores de Fredholm y espectro que nos dotará del conocimiento necesario para entender los posteriores capítulos.

En el segundo capítulo se introducirán los conceptos de operador  $\alpha$ -compacto y subespacio  $\alpha$ -cerrado, y se presentarán algunas de sus características, posteriormente se presenta a la nulidad aproximada de un operador y se revisarán algunas caracterizaciones que comparte con el núcleo de  $T$ , para luego definir y analizar a los operadores  $\alpha$ -Fredholm.

En el tercer capítulo se estudia a los operadores  $\alpha$ -Weyl y se revisaran algunas de sus propiedades, además se introducirá la noción del espectro de  $\alpha$ -Weyl y su relación con los espectros de  $T$ , más aún, se estudiará si cumple con el Teorema del mapeo espectral, para finalizar introduciremos el estudio de las matrices de operadores y su espectro  $\alpha$ -Weyl.





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Operadores lineales . . . . .	4
1.2. Operador adjunto . . . . .	7
1.3. Operadores compactos . . . . .	9
1.4. El Álgebra de Calkin . . . . .	11
1.5. Operadores de Fredholm . . . . .	12
1.6. El módulo mínimo esencial . . . . .	15
<b>2. Teoría de operadores de <math>\alpha</math>-Fredholm.</b>	<b>19</b>
2.1. Operadores $\alpha$ -compactos. . . . .	19
2.2. Conjuntos $\alpha$ -cerrados. . . . .	21
2.3. Nulidad aproximada . . . . .	22
2.4. Operadores de $\alpha$ -Fredholm . . . . .	29
2.5. El módulo mínimo $\alpha$ -esencial . . . . .	36
<b>3. Operadores <math>\alpha</math>-Weyl</b>	<b>37</b>
3.1. Operadores Weyl . . . . .	37
3.2. Operadores $\alpha$ -Weyl . . . . .	38
3.3. Teorema del mapeo espectral . . . . .	42
3.4. El espectro $\alpha$ -Weyl de matrices de operadores . . . . .	46
<b>Conclusión</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se plantearán los resultados básicos que ayudarán a presentar y desarrollar la teoría de operadores Fredholm para espacios con dimensión finita.

Sea  $X$  un espacio lineal (o espacio vectorial) sobre  $\mathbb{K}$ , donde  $\mathbb{K}$  es el campo de números reales o complejos. A los elementos de  $X$  se les llamarán vectores y los elementos de  $\mathbb{K}$  se les dirán escalares. A lo largo de este trabajo usaremos a  $X, Y, Z$  para referirnos a los espacios normados.

Un espacio lineal dotado de una norma se denomina *espacio lineal normado* o solo *espacio normado*. Si un espacio lineal normado es completo con respecto a la métrica inducida por la norma, entonces se llama espacio de Banach.

Sea  $X$  un espacio lineal. Un *producto interno* en  $X$  es una función  $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  que satisface lo siguiente

- (i)  $(x, x) \geq 0$  para todo  $x \in X$ ,
- (ii) para todo  $x \in X$ ,  $(x, x) = 0$  si y sólo si  $x = 0$ ,
- (iii)  $(ax, y) = a(x, y)$  para todo  $a \in \mathbb{K}$ ,  $x, y \in X$ ,
- (iv)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ , para todo  $x, y, z \in X$ ,
- (v)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ,

donde  $\bar{a}$  denota el complejo conjugado de  $a$ . Un espacio lineal con un producto interno se denomina *espacio con producto interno*.

Usando la desigualdad de Schwarz,  $(|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y))$ , para cualquier  $x, y \in X$ ) se puede definir una norma a partir del producto interno, como  $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$  para  $x \in X$ , por lo que todo espacio lineal con producto interno es un espacio normado. Si  $X$  es completo con respecto a la métrica inducida por esta norma, entonces se llama *espacio de Hilbert*. Para diferenciar a los espacios normados con los espacios de Hilbert, a estos últimos los denotaremos por  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  o  $\mathcal{L}$ . En lo que sigue, la clausura (cerradura) de un subconjunto  $S$  de un espacio normado se denota por  $cl(S)$  o  $\bar{S}$ .

La noción de ortogonalidad de los vectores es muy importante en un espacio con producto interior. Se dice que los elementos  $x, y$  en un espacio con producto interior son *ortogonales* si  $(x, y) = 0$ , y lo denotamos por  $x \perp y$ .

Para un subconjunto  $S$  de  $X$ , el *complemento ortogonal* de  $S$  es el conjunto

$$S^\perp := \{x \in X : (x, u) = 0, \text{ para todo } u \in S\}.$$

Así, el conjunto  $S^\perp$  consta de aquellos vectores en  $X$  que son ortogonales a todos los vectores en  $S$ . Por la continuidad del producto interno obtenemos que  $S^\perp$  es un subespacio cerrado de  $X$ . Si  $S_1$  y  $S_2$  son subconjuntos de un espacio con producto interno tal que  $x \perp y$  para todo  $x \in S_1$  y  $y \in S_2$ , entonces escribiremos  $S_1 \perp S_2$ .

A continuación presentaremos algunas de las propiedades principales del complemento ortogonal, las cuales se pueden consultar en [15] y [17].

**Lema 1.1.** *Si  $X$  es un espacio con producto interior y  $S \subset X$  entonces:*

- $0 \in S^\perp$ .
- Si  $0 \in S$  entonces  $S \cap S^\perp = \{0\}$ , en otro caso  $S \cap S^\perp = \emptyset$ .
- $\emptyset^\perp = X$ ;  $\{0\}^\perp = X$ ;  $X^\perp = \{0\}$ .
- Si  $S$  contiene una bola abierta  $B(a, r)$ , para algún  $a \in X$  y  $r > 0$ , entonces  $S^\perp = \{0\}$ ; en particular, si  $S$  es un conjunto abierto no vacío, se obtendrá que  $S^\perp = \{0\}$ .

- Si  $B \subset A$ , entonces  $A^\perp \subset B^\perp$ .
- $S \subset (S^\perp)^\perp$ .

**Teorema 1.2.** *Sea  $S$  un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Para cualquier  $x \in \mathcal{H}$ , existe un único  $y \in S$  y  $z \in S^\perp$  tal que  $x = y + z$ .*

Escribiremos  $S^{\perp\perp} = (S^\perp)^\perp$ .

**Corolario 1.3.** *Si  $S$  es un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces  $S^{\perp\perp} = S$ .*

**Corolario 1.4.** *Si  $S$  es un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  entonces  $\mathcal{H} = S \oplus S^\perp$ , es decir,  $\mathcal{H} = S + S^\perp$  y  $S \cap S^\perp = \{0\}$ .*

Recordemos lo siguiente, sea  $X$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K}$ , y supongamos que existe una operación binaria llamada producto definida entre vectores como:

$$\begin{aligned} \cdot : X \times X &\longrightarrow X \\ \cdot (x, y) &\longmapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

Decimos que  $X$  es un *álgebra* si para todos  $u, v, w \in X$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$  cumplen que:

- a)  $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ .
- b) Existe  $e \in X$  tal que  $e \cdot u = u \cdot e = u$ .
- c)  $u \cdot (u + v) = u \cdot v + u \cdot w$ .
- d)  $(v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u$ .
- e)  $u \cdot \lambda v = \lambda u \cdot v = \lambda(u \cdot v)$ .

Si además se cumple que  $X$  es un espacio de Banach y  $\|uv\| \leq \|u\| \|v\|$ , para cualquier  $u, v \in X$ , diremos que  $X$  es un álgebra de Banach.

## 1.1. Operadores lineales

Recordemos que una función  $T : X \rightarrow Y$  entre espacios vectoriales  $X$  e  $Y$  se llama operador lineal si

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y) \text{ para todo } x, y \in X, \\ T(ax) &= aT(x) \text{ para todo } x \in X, a \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Si  $T : X \rightarrow Y$  es un operador lineal, a menudo escribiremos  $Tx$  en lugar de  $T(x)$  para  $x \in X$ . Observemos que

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

es un subespacio de  $X$ , llamado el *espacio nulo* de  $T$ , y

$$R(T) = \{Tx : x \in X\}$$

es un subespacio de  $Y$ , llamado el *rango* de  $T$ .

Decimos que un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  es uno a uno (o inyectivo) si  $N(T) = \{0\}$ , y es sobre (o sobreyectivo) si  $R(T) = Y$ .

Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados. Sabemos que un operador lineal continuo de  $X$  en  $Y$  es una función del espacio lineal  $X$  en el espacio lineal  $Y$  que es continuo con respecto a las topologías inducidas por las normas de  $X$  e  $Y$  respectivamente.

**Definición 1.5.** Sea  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal entre los espacios normados  $X$  e  $Y$ .  $T$  es un operador lineal acotado (o simplemente operador acotado) si existe  $c > 0$  tal que

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Además,  $T$  es un operador acotado si y sólo si la imagen bajo  $T$  de cualquier conjunto acotado en  $X$  es acotado en  $Y$ .

Gracias al siguiente resultado, el cual puede ser consultado en [17], observamos que los términos “operador lineal acotado” y “operador lineal continuo” son sinónimos y, como tales, los usaremos indistintamente.

**Teorema 1.6.** *Sea  $T$  un operador lineal de un espacio normado  $X$  en un espacio normado  $Y$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- a)  $T$  es un operador lineal acotado.
- b)  $T$  es un operador lineal continuo.
- c)  $T$  es uniformemente continuo.
- d)  $T$  es continuo en algún punto  $x_0$  de  $X$ .
- e)  $T$  es continuo en 0.

De aquí en adelante, para fines prácticos, solo diremos operador acotado en lugar de operador lineal acotado. Los resultados restantes de esta sección pueden ser consultados en [1], [15], [17] y [18].

Denotamos el conjunto de todos los operadores acotados de  $X$  a  $Y$  por  $B(X, Y)$ . Si  $Y = X$ , entonces escribimos a  $B(X, Y)$  como  $B(X)$ . Si  $T \in B(X)$ , entonces decimos que  $T$  es un operador acotado en  $X$ .

Observemos que  $B(X, Y)$  es un espacio lineal con suma y multiplicación escalar que se definen puntualmente, es decir, si  $T, T_1, T_2 \in B(X, Y)$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ , entonces  $T_1 + T_2$  y  $\alpha T$  están definidos por

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x) &= T_1x + T_2x, \quad x \in X, \\ (\alpha T)(x) &= \alpha Tx, \quad x \in X.\end{aligned}$$

Además, para dotar a  $B(X, Y)$  de una norma necesitamos la siguiente igualdad

$$\inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, x \in X\} = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

y así en particular  $\|Ty\| \leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}\|y\|$  para todo  $y \in X$ .

**Lema 1.7.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados. Si  $\|\cdot\| : B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$  se define por*

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}, T \in B(X, Y),$$

*entonces  $\|\cdot\|$  es una norma en  $B(X, Y)$ .*

**Teorema 1.8.** *Si  $Y$  es un espacio de Banach, entonces  $B(X, Y)$  es un espacio de Banach.*

Notemos que, si  $X, Y$  y  $Z$  son espacios normados,  $T \in B(X, Y)$  y  $S \in B(Y, Z)$ , tomando la operación  $\circ$  como la composición de funciones, entonces  $S \circ T \in B(X, Z)$  y  $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$ . A menudo escribiremos  $ST$  en lugar de  $S \circ T$  y lo llamaremos el producto de  $S$  y  $T$ .

Claramente, si  $X$  es un espacio de Banach entonces  $B(X)$  con su suma de operadores, multiplicación por un escalar, su producto de operadores y su norma anteriormente definidos, es un álgebra de Banach.

Si los espacios  $X, Y$  y  $Z$  no son todos iguales, el hecho de que podamos definir el producto  $ST$  no significa que podamos definir el producto  $TS$ . Sin embargo, si  $X = Y = Z$  entonces  $TS$  y  $ST$  estarán definidos, pero estos pueden no ser iguales, incluso si todos los espacios son de dimensión finita.

Luego, para  $T \in B(X)$ ,  $TT$  se denotará por  $T^2$ ,  $TTT$  se denotará por  $T^3$  y, más generalmente, el producto de  $T$  consigo mismo  $n$  veces se denotará por  $T^n$ .

**Lema 1.9.** *Sea  $X$  un espacio normado. Si  $\{T_n\}$  y  $\{S_n\}$  son sucesiones en  $B(X)$  tales que  $T_n \rightarrow T$  y  $S_n \rightarrow S$  entonces  $S_n T_n \rightarrow ST$ .*

**Definición 1.10.** *Sean  $X, Y$  espacios normados. Se dice que un operador  $T \in B(X, Y)$  es invertible, si existe  $S \in B(Y, X)$  tal que  $ST = I_X$ ,  $TS = I_Y$ , en cuyo caso  $S$  es el inverso de  $T$  y se denota por  $T^{-1}$ .*

Nótese que, si  $T \in B(X, Y)$  es invertible entonces su inversa es única. Tomando a  $T \in B(X, Y), S \in B(Y, Z)$  invertibles, se puede verificar que  $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ . En caso que  $T \in B(X)$  es invertible, entonces  $(T^{-1})^{-1} = T$  y, para  $I_X \in B(X)$ ,  $I_X^{-1} = I_X$ .

**Definición 1.11.** *Sea  $T$  un operador lineal de un espacio normado  $X$  en un espacio normado  $Y$ . Decimos que  $T$  está acotado por abajo si existe una constante  $a > 0$  tal que*

$$a\|x\| \leq \|Tx\|,$$

para todo  $x \in X$  (donde la norma del lado izquierdo es la norma en  $X$  y la del lado derecho es la norma en  $Y$ ).

**Lema 1.12.** *Sea  $T$  un operador lineal de  $X$  en  $Y$ . Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a)  $T$  tiene inversa en su rango.

(b)  $T$  es acotado por abajo.

Además, si  $T \in B(X, Y)$  y si  $X$  es un espacio de Banach, entonces cada uno de los enunciados equivalentes anteriores implica que  $\overline{R(T)} = R(T)$  (es decir,  $R(T)$  es cerrado en  $Y$ ).

Sea  $T \in B(X, Y)$ , el módulo mínimo de  $T$  es

$$m(T) = \inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}.$$

Si  $T$  es acotada por abajo entonces  $m(T) > 0$ .

**Teorema 1.13.** Sea  $T \in B(X, Y)$ .  $m(T) > 0$  si y sólo si  $R(T)$  es cerrado y  $N(T) = \{0\}$ .

Si  $T \in B(X, Y)$ , escribimos  $\text{dist}(x, N(T)) = \inf\{\|x - y\| : Ty = 0\}$ , para cualquier  $x \in X$ .

**Definición 1.14.** Si  $T \in B(X, Y)$ , el módulo mínimo reducido de  $T$  es definido como

$$\gamma(T) := \inf_{x \notin N(T)} \frac{\|Tx\|}{\text{dist}(x, N(T))}.$$

Si  $T = 0$ , tomamos a  $\gamma(T) = \infty$ .

**Teorema 1.15.** Sea  $T \in B(X, Y)$ . Entonces  $\gamma(T) > 0$  si y sólo si  $R(X)$  es cerrado.

## 1.2. Operador adjunto

Sean  $X, Y$  espacios con productos internos y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Un operador lineal  $T^* : Y \rightarrow X$  se le llamará *el adjunto* de  $T$  si

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ para todo } x \in X, y \in Y.$$

Observemos que los productos internos en el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación anterior son los de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Se puede observar que si  $T \in B(X, Y)$ , entonces  $T^* \in B(Y, X)$ . Además, las siguientes relaciones son validad:

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \|T\|, \quad \|T^*T\| = \|T\|^2, \\ N(T) &= R(T^*)^\perp, \quad N(T^*) = R(T)^\perp, \\ N(T)^\perp &= \overline{R(T^*)}, \quad N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}. \end{aligned}$$

Es posible que el adjunto de un operador sea el propio operador, por ejemplo, sea  $X$  un espacio con producto interno, si  $I$  es el operador de identidad en  $X$  entonces  $I^* = I$ .

Los siguientes resultados de esta sección pueden ser consultados en [15] y [17].

**Lema 1.16.** Sean  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  espacios de Hilbert,  $R, S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ,  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  y  $a, b \in \mathbb{C}$ . Entonces:

- (i)  $(T^*)^* = T$ ;
- (ii)  $(aR + bS)^* = \bar{a}R^* + \bar{b}S^*$ ;
- (iii)  $(TR)^* = R^*T^*$ .

Ahora tenemos una consecuencia inmediata.

**Corolario 1.17.** Sea  $T \in B(\mathcal{H})$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a)  $T$  es invertible;
- (b)  $N(T^*) = \{0\}$  y existe  $a > 0$  tal que  $\|Tx\| \geq a\|x\|$  para todo  $x \in X$ .

También existe una relación entre la invertibilidad de un operador y la invertibilidad de su adjunto.

**Lema 1.18.** Si  $T \in B(\mathcal{H})$  es invertible entonces  $T^*$  es invertible y  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

El siguiente resultado probablemente sea bien conocido ya que relaciona el módulo mínimo de un operador con su adjunto.

**Teorema 1.19.** Dado  $T \in B(\mathcal{H})$ , implica que

$$m(T) = \inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma((TT^*)^{\frac{1}{2}})\},$$

donde  $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ no es invertible}\}$  es el espectro del operador  $A$ .

Por último daremos algunas relaciones sobre las dimensiones del núcleo y rango de  $T$  y  $T^*$ .

**Teorema 1.20.** *Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $T \in B(\mathcal{H})$ , entonces*

$$1) \dim N(T) = \dim R(T^*)^\perp.$$

$$2) \dim N(T^*) = \dim R(T)^\perp.$$

**Teorema 1.21.** *Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $T \in B(\mathcal{H})$ , entonces  $\dim R(T) = \dim R(T^*)$  (ya sea finito ó  $\infty$ ). En particular,  $T$  tiene rango finito si y sólo si  $T^*$  tiene rango finito.*

### 1.3. Operadores compactos

Una clase importante de operadores que estudiaremos son los llamados operadores compactos.

**Definición 1.22.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Se dice que el operador  $T$  es un operador compacto, si para cada subconjunto acotado  $E$  de  $X$ ,  $T(E)$  es un subconjunto relativamente compacto, es decir,  $\overline{T(E)}$  es compacto.*

Denotaremos el conjunto de todos los operadores compactos de  $X$  a  $Y$  por  $K(X, Y)$ , además notemos que cada operador compacto es un operador acotado, es decir,  $K(X, Y) \subset B(X, Y)$ . En el caso de que  $Y = X$ , entonces denotamos  $K(X, Y)$  por  $K(X)$ , y se dice que un operador  $T \in K(X)$  es un operador compacto en  $X$ .

Claramente,  $T$  es un operador compacto si y sólo si para cada sucesión acotada  $(x_n)$  en  $X$ , la sucesión  $(Tx_n)$  en  $Y$  tiene una subsucesión convergente.

Ahora presentaremos algunas propiedades algebraicas bien conocidas de los operadores compactos, las cuales se pueden consultar en [15].

**Teorema 1.23.** *Sean  $X, Y, Z$  espacios normados.*

(a) *Si  $S, T \in K(X, Y)$  y  $a, b \in \mathbb{C}$  entonces  $aS + bT$  es compacto. Así  $K(X, Y)$  es un subespacio lineal de  $B(X, Y)$ .*

(b) *Si  $S \in B(X, Y)$ ,  $T \in B(Y, Z)$  y al menos uno de los operadores  $S$  ó  $T$  es compacto, entonces  $TS \in B(X, Z)$  es compacto.*

Recordemos que un operador  $T$  entre espacios normados  $X$  e  $Y$  es de rango finito (ó  $T$  es un operador lineal de dimensión finita) si tiene un rango de dimensión finita. El siguiente teorema muestra, como caso particular, que todos los operadores lineales en espacios de dimensión finita son compactos. Por lo tanto, los operadores compactos son una generalización de los operadores en espacios de dimensión finita.

**Teorema 1.24.** *Sean  $X, Y$  espacios normados y  $T \in B(X, Y)$ .*

(a) *Si  $T$  tiene un rango finito, entonces  $T$  es compacto.*

(b) *Si  $\dim(X)$  ó  $\dim(Y)$  son finitos, entonces  $T$  es compacto.*

**Teorema 1.25.** *Si  $X$  es un espacio normado de dimensión infinita, entonces el operador de identidad  $I_X$  en  $X$  no es compacto.*

**Corolario 1.26.** *Si  $X$  es un espacio normado de dimensión infinita y  $T \in K(X)$ , entonces  $T$  no es invertible.*

El siguiente teorema indica que el límite de una sucesión de operadores compactos en  $B(X, Y)$  es compacto.

**Teorema 1.27.** *Si  $X$  es un espacio normado,  $Y$  es un espacio de Banach y  $\{T_n\}$  es una sucesión en  $K(X, Y)$  que converge a un operador  $T \in B(X, Y)$ , entonces  $T$  es compacto. Así  $K(X, Y)$  está cerrado en  $B(X, Y)$ .*

**Corolario 1.28.** *Si  $X$  es un espacio normado,  $Y$  es un espacio de Banach y  $\{T_n\}$  es una sucesión de operadores acotados de rango finito que convergen a  $T \in B(X, Y)$ , entonces  $T$  es compacto.*

Denotamos por  $K_0(X, Y)$  al conjunto de todos los operadores acotados de rango finito de un espacio normado  $X$  en un espacio normado  $Y$ . El Corolario 1.28 nos dice que  $\overline{K_0(X, Y)} = K(X, Y)$ , si  $Y$  es un espacio de Banach. Además, tenemos que

$$K_0(X, Y) \subset K(X, Y) \subset B(X, Y).$$

**Teorema 1.29.** *Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert y  $T \in B(\mathcal{H})$ , entonces  $T$  es compacto si y sólo si  $T^*$  es compacto.*

## 1.4. El Álgebra de Calkin

Recordemos algunas definiciones esenciales. Sean  $X$  un espacio lineal y  $M$  un subespacio cualquiera, definamos en  $X$  la siguiente relación:

$$v \sim u \text{ si } v - u \in M.$$

Obsevemos que  $\sim$  es una relación de equivalencia. Por consiguiente el espacio cociente  $X/M$  es la colección de todas las clases  $[x] = x + M = \{x + w : w \in M\}$ , donde  $x \in X$ . Este conjunto, dotado de las siguientes operaciones vectoriales

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= (u + M) + (v + M) = (u + v) + M = [u + v] \text{ y} \\ \lambda[u] &= \lambda(u + M) = \lambda u + M = [\lambda u], \end{aligned}$$

con  $u, v \in X$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ , es un espacio lineal. Más aún, si  $M$  es cerrado entonces la función  $\|\cdot\|_{X/M}$ , definida en  $X/M$  mediante la regla

$$\|[a]\|_{X/M} := \inf_{b \in [a]} \|b\| = \inf_{m \in M} \|a + m\|,$$

es una norma en  $X/M$ , y el espacio  $X/M$  dotado con esta norma es un espacio de Banach.

Dado que  $K(X)$  es cerrado en  $B(X)$  entonces el espacio cociente  $B(X)/K(X)$  es un espacio de Banach. Por otro lado, para el espacio  $K_0(X)$  no podemos concluir de igual manera ya que este no es cerrado.

**Definición 1.30.** *Sea  $X$  un álgebra, se dice que  $\mathcal{I} \subset X$  es un ideal del álgebra  $X$  si*

- i)  $a - b \in \mathcal{I}$  para todo  $a, b \in \mathcal{I}$ .
- ii)  $a \cdot b \in \mathcal{I}$  y  $b \cdot a \in \mathcal{I}$ , para todo  $a \in X$  y  $b \in \mathcal{I}$ .

Los conjuntos  $K_0(X)$  y  $K(X)$  son ideales para el álgebra  $B(X)$ .

**Lema 1.31.** *Sea  $X$  un álgebra de Banach con identidad  $e$  y sea  $\mathcal{I}$  un ideal cerrado en  $X$ , tal que  $\mathcal{I} \neq X$ . Entonces la relación de equivalencia  $\sim$  es congruente con el producto en el álgebra  $X$ . Al dotar al espacio cociente  $X/\mathcal{I}$  con la operación producto*

$$[u][v] = [uv],$$

$X/\mathcal{I}$  se convierte en un álgebra de Banach con identidad  $[e] = e + \mathcal{I}$ .

Notemos que, si  $\mathcal{I}$  es solamente un ideal,  $X/\mathcal{I}$  es solamente un álgebra con las operaciones del espacio cosiente. Por tal motivo  $B(X)/K_0(X)$  es nada más que un álgebra. Por otra parte gracias Lema 1.31,  $B(X)/K(X)$  es un álgebra de Banach con identidad  $[I_X] = I_X + K(X)$ , al que llamaremos el *álgebra de Calkin*.

Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de Banach con identidad  $e$ . Diremos que  $u \in \mathcal{A}$  es invertible por la izquierda (derecha) si existe  $v \in \mathcal{A}$  tal que  $vu = e$  ( $uv = e$ ). Más aún,  $u$  es invertible si es invertible por la izquierda y por la derecha.

Observemos que, en el caso donde  $\mathcal{A} = X/\mathcal{I}$ , tenemos que  $[u]$  es invertible por la izquierda si y sólo si existe  $v \in X$  tal que  $e - vu, vu - e \in \mathcal{I}$ .

De manera análoga se procede para  $[u]$  cuando es invertible por la derecha.

**Definición 1.32.** Sean  $X$  un álgebra de Banach e  $\mathcal{I}$  un ideal. Para  $u \in X$ , diremos que:

- $u$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}$  si existe  $v \in X$  tal que  $e - vu \in \mathcal{I}$  ó  $vu - e \in \mathcal{I}$ .
- $u$  es invertible por la derecha módulo  $\mathcal{I}$  si existe  $v \in X$  tal que  $e - uv \in \mathcal{I}$  ó  $uv - e \in \mathcal{I}$ .
- $u$  es invertible módulo  $\mathcal{I}$  si es invertible por la derecha módulo  $\mathcal{I}$  y por la izquierda módulo  $\mathcal{I}$ .

## 1.5. Operadores de Fredholm

La siguiente teoría aunque se cumple para espacios de Banach, ver [1], para nuestros propósitos la presentaremos para espacios de Hilbert, ya que las demostraciones siguen siendo iguales.

Sean  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  espacios de Hilbert; si  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  definamos y denotamos a la nulidad y defecto de  $T$  como  $nul(T) := \dim N(T)$  y  $def(T) := \text{codim } R(T) = \dim \mathcal{H}/R(T)$  respectivamente. Dado que estamos en un espacio de Hilbert, se puede probar que  $def(T) = \dim N(T^*)$ .

**Definición 1.33.** Sean  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  espacios de Hilbert, el conjunto de todos los operadores semi-Fredholm superiores está definido por

$$\Phi_+(\mathcal{H}, \mathcal{K}) := \{T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) : \text{nul}(T) < \infty \text{ y } R(T) \text{ es cerrado}\},$$

mientras que el conjunto de todos los operadores semi-Fredholm inferiores está definido por

$$\Phi_-(\mathcal{H}, \mathcal{K}) := \{T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) : \text{def}(T) < \infty\}.$$

El conjunto de todos los operadores semi-Fredholm está definido por

$$\Phi_{\pm}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) := \Phi_+(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \cup \Phi_-(\mathcal{H}, \mathcal{K}).$$

El conjunto de todos los operadores Fredholm está definida por

$$\Phi(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \Phi_+(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \cap \Phi_-(\mathcal{H}, \mathcal{K}).$$

Estableceremos que  $\Phi_+(\mathcal{H}) = \Phi_+(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ,  $\Phi_-(\mathcal{H}) = \Phi_-(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ,  $\Phi(\mathcal{H}) = \Phi(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  y  $\Phi_{\pm}(\mathcal{H}) = \Phi_{\pm}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ .

Un concepto importante en la teoría de Fredholm es la noción de índice de un operador. Si  $T \in \Phi_{\pm}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ , el *índice* de  $T$  es definido como

$$i(T) = \text{nul}(T) - \text{def}(T).$$

Claramente,  $i(T)$  es un número entero ó  $\pm\infty$ , el caso donde el índice sea  $\pm\infty$  será de gran interés cuando extendamos la teoría de Fredholm.

**Definición 1.34.** Sea  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . Diremos que  $T$  es un operador Weyl si  $T \in \Phi(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  y  $i(T) = 0$ .

A continuación presentaremos algunos resultados para los operadores de Fredholm.

**Lema 1.35.** Sea  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . Entonces  $T \in \Phi_+(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  si y sólo si  $T^* \in \Phi_-(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . Además,  $T \in \Phi_-(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  si y sólo si  $T^* \in \Phi_+(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . En ambos casos  $i(T) = -i(T^*)$ .

**Teorema 1.36.** Sean  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_3$  espacios de Hilbert. Si  $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $S \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ .

1) Si  $T \in \Phi_+(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $S \in \Phi_+(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ , entonces  $ST \in \Phi_+(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$  y

$$\begin{aligned} \text{nul}(ST) &\leq \text{nul}(T) + \text{nul}(S), \quad \text{def}(ST) \leq \text{def}(T) + \text{def}(S), \\ i(ST) &= i(T) + i(S). \end{aligned}$$

2) Si  $T \in \Phi_-(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $S \in \Phi_-(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ , entonces  $ST \in \Phi_-(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ .

3) Si  $T \in \Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $S \in \Phi(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ , entonces  $ST \in \Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ .

**Teorema 1.37.** *Dado  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  espacios de Hilbert, se cumple que*

1) Si  $T \in \Phi_+(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $A \in K(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , entonces  $T + A \in \Phi_+(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .

2) Si  $T \in \Phi_-(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $A \in K(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , entonces  $T + A \in \Phi_-(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .

3) Si  $T \in \Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $A \in K(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , entonces  $T + A \in \Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .

Recordemos que el álgebra de Calkin  $B(\mathcal{H})/K(\mathcal{H}) = C(\mathcal{H})$  es un álgebra de Banach con la norma

$$\|T + K(\mathcal{H})\| = \inf\{\|T + F\| : F \in K(\mathcal{H})\} = \|T\|_{K(\mathcal{H})}, T \in B(\mathcal{H}).$$

Sea  $\pi : B(\mathcal{H}) \rightarrow C(\mathcal{H})$  denota el homomorfismo natural en  $C(\mathcal{H})$  dado por  $\pi(T) = T + K(\mathcal{H})$ .

El siguiente resultado es muy importante ya que nos permite caracterizar a los operadores Fredholm.

**Teorema 1.38** (Atkinson). *Sean  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  espacios de Hilbert y  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i)  $T$  es un operador Fredholm, es decir,  $T \in \Phi(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ .

ii) Existen operadores  $A_1, A_2 \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ,  $F_1 \in K_0(\mathcal{H})$  y  $F_2 \in K_0(\mathcal{K})$  tales que

$$A_1T = I + F_1, TA_1 = I + F_2.$$

iii) Existen operadores  $A_1, A_2 \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ,  $F_1 \in K(\mathcal{H})$  y  $F_2 \in K(\mathcal{K})$  tales que

$$A_1T = I + F_1, TA_1 = I + F_2.$$

Si consideramos a  $\pi_0 : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})/K_0(\mathcal{H})$  el homomorfismo natural, dado por  $\pi_0(T) = T + K_0(\mathcal{H})$ , entonces podemos obtener el siguiente resultado

**Teorema 1.39** (Atkinson II). *Si  $T \in B(\mathcal{H})$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes*

- i)  $T$  es un operador de Fredholm;
- ii)  $\pi_0(T)$  es invertible en el álgebra  $B(\mathcal{H})/K_0(\mathcal{H})$ ;
- iii)  $\pi(T)$  es invertible en el álgebra de Calkin  $C(\mathcal{H})$ .

Gracias al teorema de Atkinson obtenemos algunos resultados

**Teorema 1.40.** *Sean  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_3$  espacios de Hilbert,  $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  y  $S \in B(\mathcal{H}_2; \mathcal{H}_3)$ . Entonces*

- 1) Si  $ST \in \Phi_+(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$  y  $T \in \Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  entonces  $S \in \Phi_+(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ .
- 2) Si  $ST \in \Phi_-(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$  y  $S \in \Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  entonces  $T \in \Phi_-(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ .
- 3) Si  $ST \in \Phi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$  entonces  $T$  es Fredholm si y sólo si  $S$  es Fredholm.

**Teorema 1.41.** *Sean  $S \in B(\mathcal{H})$  y  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $ST = TS$  y  $ST$  Fredholm, entonces  $S$  y  $T$  son Fredholm.*

**Lema 1.42.** *Sean  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  espacios de Hilbert,  $T \in \Phi_+(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  y  $M$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Entonces  $T(M)$  es cerrado en  $\mathcal{K}$ .*

## 1.6. El módulo mínimo esencial

Si  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert complejo separable. Sea  $V|T|$  la descomposición polar de  $T$  donde  $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$  y  $E_T(\cdot)$  la medida espectral para  $|T|$ , inducida por la familia espectral de  $|T|$ . Definimos la nulidad esencial, denotado por  $ess\ nul\ T$ , como

$$ess\ nul\ T = \inf\{\dim R(E_T([0, \epsilon])) : \epsilon > 0\}.$$

y definimos  $ess\ def\ T$  por

$$ess\ def\ T = ess\ nul\ T^*.$$

El conjunto de los operadores invertibles en  $B(\mathcal{H})$  será denotado como  $\mathcal{I}_{B(\mathcal{H})}$ . En [3], Richard Bouldin demostró una caracterización para la clausura del conjunto de los operadores invertibles.

**Teorema 1.43.** *El operador  $T$  pertenece a la clausura de los operadores invertibles  $\mathcal{I}_{B(\mathcal{H})}$  si y sólo si  $\text{nul } T = \text{nul } T^*$ .*

**Observación.** Notemos que el anterior teorema es válido para cualquier espacio de Hilbert.

El *espectro esencial* de un operador  $T$ , denotado por  $\sigma_e(T)$ , es definido como  $\sigma_e(T) = \{z : T - zI \text{ no es un operador de Fredholm}\}$ .

Definamos el *módulo mínimo esencial* de un operador  $T$  como

$$m_e(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|)\}.$$

**Teorema 1.44.** *Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $T \in B(\mathcal{H})$  entonces se obtienen los siguientes resultados:*

- i)  $m_e(T) = m(\pi(T))$ .
- ii)  $m_e(T) > 0$  si y sólo si existen  $B \in B(\mathcal{H})$  y  $K \in K(\mathcal{H})$  tales que  $BT = I + K$ .
- iii)  $m_e(T) > 0$  si y sólo si  $R(T)$  es cerrado y  $\text{nul } T < \infty$ .
- iv)  $m_e(T^*) > 0$  si y sólo si existen  $A \in B(\mathcal{H})$  y  $K \in K(\mathcal{H})$  tales que  $TA = I + K$ .
- v)  $m_e(T^*) > 0$  si y sólo si  $R(T^*)$  es cerrado y  $\text{nul } T^* < \infty$ .
- vi)  $T$  es un operador Fredholm si y sólo si  $m_e(T)$  y  $m_e(T^*)$  son positivos, en este caso  $m_e(T) = m_e(T^*)$ .

Definamos el *módulo de invertibilidad*, denotado por  $\rho(T)$ , como

$$\rho(T) = \inf\{\lambda : \dim E_T((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon))\mathcal{H} = \dim \mathcal{H}, \text{ para } \epsilon > 0\}.$$

Establezcamos algunas de las propiedades básicas de  $\rho(T)$  y su relación con  $m_e(T)$ .

**Teorema 1.45.** *Sea  $T \in B(\mathcal{H})$ . Entonces se cumplen las siguientes cláusulas:*

- i)  $\rho(T) \geq m_e(T) \geq 0$ .

ii) Sea  $G(\cdot)$  denota la medida espectral de  $T^*T$ . La siguiente fórmula, que es más accesible para los cálculos, es equivalente a la definición anterior de  $\rho(T)$ :

$$\rho(T)^2 = \inf\{\lambda : \dim G([0, \lambda + \epsilon))H = \dim \mathcal{H} \text{ para } \epsilon > 0\}.$$

iii) Si  $\rho(T)$  es positivo entonces  $n(T) < \dim H$  y  $\dim T(\mathcal{H}) = \dim H$ .

iv) Tenemos que  $\rho(T) = 0$  si y sólo si  $\text{ess nul } T = \dim H$ . Por lo tanto  $\rho(T) = 0 = \rho(T^*)$  implica que  $T$  pertenece a la clausura de los operadores invertibles.

v) Tenemos que  $\rho > 0$  si y sólo existen operadores  $B$  y  $C$  tales que  $BT = I + C$  donde  $\dim C(\mathcal{H}) < \dim H$ . Es más,  $B$  puede ser tomado tal que  $\|B\|$  esta arbitrariamente cerca de  $\frac{1}{\rho(T)}$ .

vi) Tenemos que  $\rho > 0$  si y sólo existen operadores  $B$  y  $C$  tales que  $TB = I + C$  donde  $\dim C^*(\mathcal{H}) < \dim H$ .

vii) Si ambos  $\rho(T)$  y  $\rho(T^*)$  son positivos entonces son iguales.



# Capítulo 2

## Teoría de operadores de $\alpha$ -Fredholm.

En este capítulo generalizaremos algunos conceptos y resultados de las anteriores secciones, los cuales son necesarios para poder ampliar la teoría de Fredholm a espacios de dimensión arbitraria.

### 2.1. Operadores $\alpha$ -compactos.

En esta sección ampliaremos la noción de subconjuntos compactos, y posteriormente se definirá lo que será un operador  $\alpha$ -compacto.

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert no separable, a partir de este capítulo denotaremos a  $\dim \mathcal{H}$  como  $h$ . Si  $\alpha$  es un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$ , donde  $\aleph_0$  es la cardinalidad de  $\mathbb{N}$ , definamos el subconjunto  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  en  $B(\mathcal{H})$  como el conjunto de todos los operadores de rango menor que  $\alpha$ , es decir

$$\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H}) = \{T \in B(\mathcal{H}) : \dim R(T) < \alpha\}.$$

Observemos que  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  es un ideal. En efecto, sea  $T \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $S \in B(\mathcal{H})$ , se tiene que  $TS(\mathcal{H}) = T(S(\mathcal{H})) \subseteq T(\mathcal{H})$ , se sigue que  $\dim(R(TS)) \leq \dim R(T) < \alpha$ , por lo tanto  $TS \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ . Por otro lado,  $ST = S|_{R(T)}T$  y el dominio de  $S|_{R(T)}$  es de dimensión menor que  $\alpha$  entonces  $\dim(R(ST)) < \alpha$ , de este modo  $ST \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ .

Ahora, si definimos  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}) := \overline{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})}$  obtenemos el siguiente resultado.

**Lema 2.1.** *El conjunto  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  es un ideal cerrado en  $B(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Sean  $T \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $S \in B(\mathcal{H})$ , entonces existe una sucesión  $\{T_n\}$  en  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $T_n \rightarrow T$  en  $B(\mathcal{H})$ . Dado que  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  es un ideal de  $B(\mathcal{H})$ ,  $ST_n$  y  $T_nS$  pertenecen a  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por consiguiente  $\{ST_n\}$  y  $\{T_nS\}$  son sucesiones de  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ . Como  $S \in B(\mathcal{H})$ , existe  $k > 0$  tal que  $\|Sx\| \leq k\|x\|$ , para toda  $x \in \mathcal{H}$ . Así pues, tomando a  $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2k}$ , existe  $N_{\epsilon_0} \in \mathbb{N}$  que satisfice que  $\|T_n - T\| < \epsilon_0$  para  $n \geq N_{\epsilon_0}$ . Luego, para  $x \in \mathcal{H}$  con  $\|x\| \leq 1$  y  $n \geq N_{\epsilon_0}$  se cumple que

$$\begin{aligned} \|(T_nS - TS)x\| &= \|(T_nS)x - (TS)x\| = \|(T_n - T)(Sx)\| \\ &\leq \|T_n - T\| \|Sx\| < \epsilon_0 k \|x\| \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|T_nS - TS\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$  de aquí que  $TS \in \overline{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})} = \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Análogamente para probar que  $ST \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .  $\square$

**Lema 2.2.** *Si  $T \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces  $T^* \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , existe  $\{T_n\}$  en  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $T_n \rightarrow T$  y  $\dim R(T_n) < \alpha$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $\dim R(T_n^*) = \dim R(T_n) < \alpha$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $T_n^* \rightarrow T^*$  entonces  $T^* \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .  $\square$

Notemos que si  $\alpha = \aleph_0$ ,  $\mathcal{F}_{\aleph_0}(\mathcal{H})$  es el conjunto de los operadores acotados de rango finito, y por consecuencia  $\mathcal{I}_{\aleph_0}(\mathcal{H})$  es el conjunto de los operadores compactos. Por ende es necesario generalizar el concepto de operador compacto.

**Definición 2.3.** *Sean  $\mathcal{H}$  espacio de Hilbert y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$ . Un subconjunto  $E$  de  $\mathcal{H}$  se denomina  $\alpha$ -acotado si para toda  $\epsilon > 0$  existe un conjunto  $\{x_m : m \in M\} \subseteq E$  con  $\text{Card } M < \alpha$  tal que*

$$E \subseteq \bigcup_{m \in M} B_\epsilon(x_m)$$

donde  $B_\epsilon(x_m)$  es la bola con centro  $x_m$  y radio  $\epsilon$ .

**Definición 2.4.** *Si  $\alpha$  es un cardinal tal que  $\aleph \leq \alpha \leq h$ , entonces un operador lineal  $T \in B(\mathcal{H})$  es  $\alpha$ -compacto si  $T(B_1(0))$  es  $\alpha$ -acotado donde  $B_1(0)$  es la bola unitaria en  $\mathcal{H}$ .*

Las muchas caracterizaciones del ideal  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , pueden resumirse convenientemente en el teorema obtenido en [11].

**Teorema 2.5.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- 1)  $T \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .
- 2)  $T$  es  $\alpha$ -compacto.
- 3) Cada subespacio lineal cerrado  $H_0$  de  $\mathcal{H}$  para el cual  $H_0 \subset T(\mathcal{H})$ , tiene dimensión menor que  $\alpha$ .
- 4) Para cada  $\epsilon > 0$  existe un subespacio cerrado  $H_\epsilon \subset \mathcal{H}$ , con codimensión menor que  $\alpha$ , tal que

$$\|T\|_{H_\epsilon} < \epsilon.$$

- 5) Todo subespacio de  $\mathcal{H}$  sobre el cual  $T$  es acotado por abajo tiene dimensión menor que  $\alpha$ .

## 2.2. Conjuntos $\alpha$ -cerrados.

A continuación daremos la noción de subespacio  $\alpha$ -cerrado, la cual fue introducida por G. Edgar, J. Ernest y S. G. Lee en [11], que nos ayudará a generalizar algunos conceptos que tenemos en la teoría de Fredholm.

**Definición 2.6.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $\alpha$  un cardinal tal que  $1 \leq \alpha \leq h$ . Un subespacio  $M$  de  $\mathcal{H}$  es  $\alpha$ -cerrado si existe un subespacio cerrado  $E$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $E \subset M$  y  $\dim(M \cap E^\perp) < \alpha$ .

**Lema 2.7.** Sea  $M$  un subespacio de  $\mathcal{H}$  y  $\alpha$  un número cardinal. Si  $M$  es cerrado entonces  $M$  es  $\alpha$ -cerrado.

*Demostración.* Dado que  $M$  es cerrado, como  $M \subseteq M$  y  $\dim(M \cap M^\perp) = \dim(\{0\}) < \alpha$  entonces  $M$  es  $\alpha$ -cerrado.  $\square$

Sin embargo el recíproco del Lema 2.7 es válido bajo ciertas restricciones, como lo veremos a continuación.

**Lema 2.8.** Sean  $M$  un subespacio de  $\mathcal{H}$  y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\alpha \leq \aleph_0$ . Entonces  $M$  es  $\alpha$ -cerrado si y sólo si  $M$  es cerrado.

*Demostración.* Supongamos que  $M$  es  $\alpha$ -cerrado. Entonces existe  $E \subseteq M$  cerrado tal que  $E \subseteq M$  y  $\dim(M \cap E^\perp) < \alpha \leq \aleph_0$  es decir  $M \cap E^\perp$  tiene dimensión finita, por lo tanto  $M = (M \cap E^\perp) \oplus E$  es cerrado.  $\square$

Los siguientes resultados, obtenidos de [12] y [13], son de gran importancia para continuar con nuestro análisis.

**Lema 2.9.** *Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $1 \leq \alpha \leq h$ . Si  $M$  y  $L$  son subespacios de  $\mathcal{H}$ , con  $M$  subespacio cerrado y  $\dim L < \alpha$ , entonces  $K + L$  es  $\alpha$ -cerrado.*

**Teorema 2.10.** *Sean  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un número cardinal,  $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- 1) *Existe  $A \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $R(T + A)$  es cerrado.*
- 2)  *$R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado.*
- 3)  *$R(T^*)$  es  $\alpha$ -cerrado.*

### 2.3. Nulidad aproximada

Recordemos la definición de nulidad aproximada de un operador lineal en un espacio de Hilbert, introducida por Edgar, Ernest y Lee en [11] y para ello enunciaremos los dos siguientes lemas cuya demostración la podemos consultar en [12].

**Lema 2.11.** *Sea  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\epsilon > 0$ . Entonces existe un subespacio cerrado  $M_\epsilon(T)$  de  $\mathcal{H}$  tal que:*

$$N(T) \subseteq M_\epsilon(T), \quad (2.1)$$

$$\|Tx\| < \epsilon\|x\| \text{ para todo } x \in M_\epsilon(T), x \neq 0 \text{ y} \quad (2.2)$$

$$\|Tx\| \geq \epsilon\|x\| \text{ para todo } x \in (M_\epsilon(T))^\perp. \quad (2.3)$$

Observemos que el espacio cerrado  $M_\epsilon(T)$  está dependiendo tanto del operador  $T$  como de  $\epsilon$ , cuando no hay confusión con lo anterior denotaremos a  $M_\epsilon(T)$  solo por  $M_\epsilon$ .

**Lema 2.12.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\epsilon > 0$ . Supongamos que  $M$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  tal que para todo  $x \in M$  se tiene que  $\|Tx\| \leq \epsilon\|x\|$ , y supongamos que  $L$  es un subespacio cerrado tal que  $\|Tx\| \geq \epsilon\|x\|$  para todo  $x \in L^\perp$ . Entonces se tiene que  $\dim M \leq \dim L$  y  $\dim L^\perp \leq \dim M^\perp$ .

Más aún, si  $M'$  y  $M''$  son subespacios cerrados tales que satisfacen las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3), entonces

$$\dim(M') = \dim(M'') \text{ y } \dim((M')^\perp) = \dim((M'')^\perp).$$

Entonces, para  $\epsilon > 0$ , sea  $\delta_\epsilon(T)$  la dimensión común de todos los subespacios que satisficjan las tres condiciones del Lema 2.11. Por lo que podemos dar el siguiente concepto.

**Definición 2.13.** La nulidad aproximada del operador  $T \in B(\mathcal{H})$  es definida por

$$\delta(T) = \min\{\delta_\epsilon(T) : \epsilon > 0\}.$$

Observamos que para dados  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , con  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ , van a existir subespacios cerrados  $M_{\epsilon_1}$  y  $M_{\epsilon_2}$  de  $\mathcal{H}$  tales que va a satisfacer cada uno las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3) del Lema 2.11. En particular se va a cumplir lo siguiente

$$\|Tx\| < \epsilon_1\|x\| \text{ para toda } x \in M_{\epsilon_1} \setminus \{0\} \text{ y} \quad (2.4)$$

$$\|Tx\| \geq \epsilon_2\|x\| \text{ para toda } x \in M_{\epsilon_2}^\perp. \quad (2.5)$$

Como  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  obtenemos que  $\|Tx\| \geq \epsilon_2\|x\| \geq \epsilon_1\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_2}^\perp$ , entonces por el Lema 2.12, se tiene que:

$$\delta_{\epsilon_1}(T) = \dim(M_{\epsilon_1}) \leq \dim(M_{\epsilon_2}) = \delta_{\epsilon_2}(T),$$

y por lo tanto  $\delta_{\epsilon_1}(T) \leq \delta_{\epsilon_2}(T)$ . De lo anterior va a existir un  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\delta_\epsilon(T) = \delta(T)$  para cada  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ .

También notemos lo siguiente: si, para  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\epsilon \in (0, \infty)$ ,  $M_\epsilon$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  que satiface que

$$\|Tx\| < \epsilon\|x\| \text{ para todo } x \in M_\epsilon \setminus \{0\}, \text{ y} \quad (2.6)$$

$$\|Tx\| \geq \epsilon\|x\| \text{ para todo } x \in M_\epsilon^\perp, \quad (2.7)$$

entonces  $(T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp$  satisfice las condiciones (2.1), (2,2) y (2,3) del Lema 2.11 para  $T^*$ .

En efecto, primero probaremos que  $N(T^*) \subset (T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp$ . Sea  $x \in N(T^*)$ , para cualquier  $y \in T(M_\epsilon^\perp)$  existe  $z \in M_\epsilon^\perp$  tal que  $y = Tz$ , esto implica que

$$(y, x) = (Tz, x) = (z, T^*x) = (z, 0) = 0,$$

por lo tanto  $x \in (T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp$ , es decir  $N(T^*) \subseteq (T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp$ .

Ahora probemos que  $(T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp$  satisfice (2.2) del Lema 2.11. Si  $x \in (T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp \setminus \{0\}$  implica que  $(x, y) = 0$ , para todo  $y \in T(M_\epsilon^\perp)$ , de manera que para cualquier  $z \in M_\epsilon^\perp$ , como  $Tz \in T(M_\epsilon^\perp)$ , se tiene que  $(T^*x, z) = (x, Tz) = 0$ . Por lo tanto  $T^*x \in (M_\epsilon^\perp)^\perp = M_\epsilon$ , pues  $M_\epsilon$  es cerrado. De lo anterior y de (2.6) se sigue que

$$\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (x, TT^*x) \leq \|x\| \|T(T^*x)\| < \|x\| \epsilon \|T^*x\|,$$

cumpliendo que  $\|T^*x\| < \epsilon \|x\|$ , para todo  $x \in (T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp \setminus \{0\}$ .

Finalmente probemos que  $((T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp)^\perp$  cumple con la condición (2.3) del Lema 2.11. Sea  $y \in T(M_\epsilon^\perp)$ , entonces existe  $x \in M_\epsilon^\perp$  tal que  $Tx = y$  y

$$\|x\| \|T^*y\| = \|x\| \|T^*Tx\| \geq (x, T^*Tx) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2.$$

Por (2.7), se sigue que  $\|Tx\|^2 \geq \|Tx\| \epsilon \|x\| = \|y\| \epsilon \|x\|$ , por lo tanto  $\|x\| \|T^*y\| \geq \epsilon \|y\|$ , para todo  $y \in T(M_\epsilon^\perp)$ , concluyendo que  $\|T^*y\| \geq \epsilon \|y\|$ , para todo  $y \in T(M_\epsilon^\perp)$ . Por último, por el Lema 1.12,  $T(M_\epsilon^\perp)$  es cerrado, lo cual implica que  $((T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp)^\perp = T(M_\epsilon^\perp)$ .

Por todo lo anterior podemos dar el siguiente resultado:

**Teorema 2.14.** *Sea  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\epsilon > 0$ . Entonces existe un subespacio cerrado  $M_\epsilon$  de  $\mathcal{H}$  tal que:*

$$N(T^*) \subseteq (T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp, \quad (2.8)$$

$$\|T^*x\| < \epsilon \|x\| \text{ para todo } x \in (T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp, x \neq 0 \text{ y} \quad (2.9)$$

$$\|T^*x\| \geq \epsilon \|x\| \text{ para todo } x \in T(M_\epsilon^\perp). \quad (2.10)$$

Más aún,  $\delta_\epsilon(T^*) = \dim((T(M_\epsilon^\perp)^\perp)^\perp)$ .

La siguiente caracterización de la invertibilidad por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , obtenida en [11], será útil en nuestro trabajo.

**Teorema 2.15.** *Sea  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert de dimensión infinita  $h$  y sea  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Entonces, para cualquier  $T \in B(\mathcal{H})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ .*
- ii)  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .*
- iii)  $\delta(T) < \alpha$ .*
- iv)  $\text{nul}(T) < \alpha$  y  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado.*
- v) Existe un subespacio cerrado  $M$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $M \cap N(T) = \{0\}$ ,  $T(M)$  es cerrado y  $\dim M^\perp < \alpha$ .*

*Demostración.* *i)  $\Rightarrow$  ii)* Por la contención  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tenemos la prueba de esta implicación

*ii)  $\Rightarrow$  iii)* Supongamos que  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces existe  $S \in B(\mathcal{H})$  tal que

$$I - ST \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}).$$

Sea  $0 < \epsilon_0 < 1$  fijo. Por el Lema 2.11, para el operador  $ST$  existe un subespacio  $M_{\epsilon_0}(ST)$  cerrado tal que

- $N(ST) \subseteq M_{\epsilon_0}(ST)$ .
- $\|(ST)x\| < \epsilon_0\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_0}(ST) \setminus \{0\}$  y
- $\|(ST)x\| \geq \epsilon_0\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_0}(ST)^\perp$ .

De esto se sigue que

- $N(T) \subseteq N(ST) \subseteq M_{\epsilon_0}(ST)$ ,
- $\|Tx\| < \|S\|^{-1}\epsilon_0\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_0}(ST) \setminus \{0\}$  y
- $\|Tx\| \geq \|S\|^{-1}\epsilon_0\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_0}(ST)^\perp$ .

Dado lo anterior, se deduce que  $\|(I - ST)x\| \geq \|x\| - \|(ST)x\| \geq \|x\| - \epsilon_0\|x\| = (1 - \epsilon_0)\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_0}(ST) \setminus \{0\}$ , por lo tanto  $(I - ST)|_{M_{\epsilon_0}(ST)}$  es acotada por abajo, y como  $I - ST \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , por el Lema 2.5 obtenemos que  $\dim(M_{\epsilon_0}(ST)) < \alpha$ . Ahora, si  $\epsilon = \|S\|^{-1}\epsilon_0$ , tomando a  $M_\epsilon(T) = M_{\epsilon_0}(ST)$  se cumplen las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3) del Lema 2.11, por lo tanto  $\delta(T) \leq \delta_\epsilon(T) = \dim(M_{\epsilon_0}(ST)) < \alpha$ .

*iii)  $\Rightarrow$  iv)* Sea  $\delta(T) < \alpha$ , entonces existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ ,  $\delta_\epsilon(T) = \delta(T) < \alpha$ . Por consecuencia existe un subespacio  $M_\epsilon$  cerrado tal que

$$(1) \quad N(T) \subseteq M_\epsilon.$$

$$(2) \quad \|Tx\| < \epsilon\|x\| \text{ para todo } x \in M_\epsilon \setminus \{0\}.$$

$$(3) \quad \|Tx\| \geq \epsilon_0\|x\| \text{ para todo } x \in M_\epsilon^\perp.$$

De (1) obtenemos  $\text{nul}(T) \subseteq M_\epsilon$  y de (3) que  $T$  es acotada por abajo en  $M_\epsilon^\perp$  por lo que  $T(M_\epsilon^\perp)$  es cerrado. Como  $\mathcal{H} = M_\epsilon \oplus M_\epsilon^\perp$ , lo cual implica que  $R(T) = T(M_\epsilon) \oplus T(M_\epsilon^\perp)$ , además  $\dim(T(M_\epsilon)) \leq \dim(M_\epsilon) = \delta(T) < \alpha$ , por lo tanto por el lema 2.9  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado.

*iv)  $\Rightarrow$  i)* Dado que  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado entonces existe  $E$  subespacio cerrado tal que  $E \subseteq R(T)$  y  $\dim(R(T) \cap E^\perp) < \alpha$ . Sea  $M = T^{-1}(E) \cap N(T)^\perp$  como  $M \cap N(T) = \{0\}$  se tiene que  $T|_M : M \rightarrow E$  es inyectiva. Ahora, sea  $y \in E \subseteq R(T)$ , existe  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $T(x) = y$ , como  $\mathcal{H} = N(T) \oplus N(T)^\perp$  entonces existe  $u \in N(T)$  y  $v \in N(T)^\perp$  tal que  $x = u + v$ , se sigue que  $y = Tx = T(u + v) = Tv$  por lo tanto  $v \in T^{-1}(E)$ , es decir,  $v \in T^{-1}(E) \cap N(T)^\perp = M$ . Se concluye que  $T|_M$  es sobreyectiva, obteniendo así que  $T|_M : M \rightarrow E$  es biyectiva. Y como  $E$  es cerrado, existe  $S \in B(\mathcal{H})$  tal que  $(ST)|_M = I_M$ , es decir,  $(I - ST)|_M = 0$ .

Tomando a  $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$  y  $H = M \oplus M^\perp$ , podemos interpretar a  $T$  y  $S$  como sigue

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} : M \oplus M^\perp \rightarrow E \oplus E^\perp \quad (2.11)$$

y

$$S = \begin{bmatrix} T|_M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : E \oplus E^\perp \rightarrow M \oplus M^\perp \quad (2.12)$$

por lo que

$$(I - ST) = \begin{bmatrix} I_M & 0 \\ 0 & I_{M^\perp} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T|_M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$= \begin{bmatrix} I_M - T|_M^{-1}T_{11} & T|_M^{-1}T_{12} \\ 0 & I_{M^\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T|_M^{-1}T_{12} \\ 0 & I_{M^\perp} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Por lo tanto  $R(I - ST) \subseteq M^\perp$  esto implica que  $\dim R(I - ST) \leq \dim M^\perp$ . Ahora observemos que  $M^\perp = (M^\perp \cap N(T)) \cup (M^\perp \cap (N(T))^\perp)$  con  $(M^\perp \cap N(T)) \cap (M \cap (N(T))^\perp) = \{0\}$ . Luego, como  $M \subseteq (N(T))^\perp$  tenemos que  $N(T) \subset M^\perp$ , obteniendo así que

$$\begin{aligned} \dim(M^\perp) &= \dim(M^\perp \cap N(T)) + \dim(M^\perp \cap N(T)^\perp) \\ &= \dim(N(T)) + \dim(M^\perp \cap N(T)^\perp) \\ &< \alpha + \dim(M^\perp \cap N(T)^\perp), \end{aligned} \quad (2.15)$$

y como  $T(M) = E$  entonces  $T(M \cap N(T)^\perp) = T(M) \cap R(T) = E \cap R(T)$  por ello si tomamos  $T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$ , obtenemos que

$$\dim(M^\perp \cap (N(T))^\perp) \leq \dim(E^\perp \cap R(T)).$$

En consecuencia

$$\dim(M^\perp) < \alpha + \dim(M^\perp \cap N(T)^\perp) \leq \alpha + \dim(E^\perp \cap R(T)) \leq \alpha + \alpha = 2\alpha = \alpha.$$

Por lo cual  $\dim(R(I - ST)) \leq \dim M^\perp < \alpha$ , así que  $I - TS \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ , concluyendo que  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ .

*ii)  $\Rightarrow$  v)* Supongamos que  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces existe  $S \in B(\mathcal{H})$  tal que

$$I - ST \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}).$$

Sea  $0 < \epsilon_0 < 1$  fijo. Por el Lema 2.11, para el operador  $ST$  existe un subespacio  $M_{\epsilon_0}(ST)$  cerrado tal que

- $N(ST) \subseteq M_{\epsilon_0}(ST)$ ,
- $\|(ST)x\| < \epsilon_0\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_0}(ST) \setminus \{0\}$  y

- $\|(ST)x\| \geq \epsilon_0\|x\|$  para todo  $x \in M_{\epsilon_0}(ST)^\perp$ .

Si tomamos a  $M = M_{\epsilon_0}(ST)^\perp$ , de lo anterior se sigue que  $M^\perp \cap N(T) = \{0\}$ ,  $M$  es cerrado y  $\|Tx\| \geq \|S^{-1}\|\epsilon_0$  para todo  $x \in M$ , es decir,  $T$  es acotado por abajo en  $M$ . Entonces por el Lema 1.12  $T(M)$  es cerrado. Finalmente, como  $I - ST \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $I - ST$  es acotado por abajo en  $M^\perp$ , por el Teorema 2.5 obtenemos que  $\dim(M^\perp) < \alpha$ .

$v) \Rightarrow i)$  Supongamos que se cumple  $iv)$ . Dado que  $M \cap N(T) = \{0\}$  esto implica que  $M \subset N(T)^\perp$  así pues  $N(T) \subset M^\perp$  por lo tanto

$$\text{nul}(T) = \dim N(T) \leq \dim(M^\perp) < \alpha.$$

Además, como  $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$  de ahí que  $R(T) = T(M) \oplus T(M^\perp)$ , donde  $\dim(T(M^\perp)) \leq \dim M^\perp < \alpha$ , por el Lema 2.9 se tiene que  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado.  $\square$

De igual manera, daremos una caracterización de la invertibilidad por la derecha módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .

**Teorema 2.16.** *Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de dimensión infinita y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Entonces para cualquier  $T \in B(\mathcal{H})$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $T$  es invertible por la derecha módulo  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ .*
- ii)  $T$  es invertible por la derecha módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .*
- iii)  $\delta(T^*) < \alpha$ .*
- iii)  $\text{def}(T) < \alpha$  y  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado.*
- iv) Existe un subespacio cerrado  $M$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $M \subseteq R(T)$ , y  $\dim M^\perp < \alpha$ .*

*Demostración.* Observemos que si  $T$  es invertible por la derecha módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  existe  $S \in B(\mathcal{H})$  tal que  $I - TS \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Luego, por el Teorema 2.2  $(I - TS)^* \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  pero  $(I - TS)^* = I - S^*T^*$  de aquí que  $I - S^*T^* \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , es decir,  $T^*$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Entonces, por los Teoremas 2.15 y 2.10 se deduce que  $i)$ ,  $ii)$ ,  $iii)$  y  $iv)$  son equivalentes.

Ahora probaremos que  $iv) \Rightarrow i)$ . Supongamos que se cumple  $iv)$ , en consecuencia  $R(T)^\perp \subseteq M^\perp$  obteniendo así que

$$d(T) = \dim(R(T))^\perp \leq \dim(M^\perp) < \alpha.$$

Más aún, como  $M$  es cerrado,  $M \subseteq R(T)$  y  $\dim(R(T) \cap M^\perp) \leq \dim(M^\perp) < \alpha$  se sigue que  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado.

Finalmente probaremos  $iii) \implies iv)$ . Supongamos que para  $T \in B(\mathcal{H})$  se cumple que  $\text{def}(T) < \alpha$  y  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado, de esto último se sigue que existe  $M$  subespacio cerrado tal que  $M \subseteq R(T)$  y  $\dim(R(T) \cap M^\perp) < \alpha$  por consiguiente  $R(T)^\perp \subseteq M^\perp$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} M^\perp &= (R(T)^\perp \cap M^\perp) \oplus (R(T) \cap M^\perp) \\ &= R(T)^\perp \oplus (R(T) \cap M^\perp), \end{aligned} \tag{2.16}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \dim(M^\perp) &= \dim(R(T)^\perp) + \dim(R(T) \cap M^\perp) \\ &< \text{def}(T) + \alpha = \alpha + \alpha = \alpha, \end{aligned} \tag{2.17}$$

concluyendo que  $T$  cumple  $iv)$ . □

## 2.4. Operadores de $\alpha$ -Fredholm

En esta sección presentaremos el concepto de operador  $\alpha$ -Fredholm, con  $\alpha$  un número cardinal mayor o igual que  $\aleph_0$ . Veremos como estos operadores cumplen con resultados análogos a los vistos en la Sección 1.5.

Dado que el conjunto  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  es un ideal cerrado de  $B(\mathcal{H})$ , entonces  $B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  es un álgebra de Banach con las operaciones  $[S] + [T] = [S + T]$ ,  $[ST] = [S][T]$  y la norma  $\|[T]\| = \inf\{\|T + K\| : K \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})\}$ , donde  $[T]$  y  $[S]$  son las clases  $T + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $S + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  respectivamente. Por otro lado, ya que el ideal  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  no es cerrado en  $B(\mathcal{H})$  esto implica que  $B(\mathcal{H})/\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  es solo un álgebra. Esto es importante porque algunos resultados serán válidos para ambos ideales, pero algunos otros no lo serán por esta condición.

Usaremos  $\pi_\alpha$  para denotar el homomorfismo natural de  $B(\mathcal{H})$  sobre  $B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  dado por  $\pi_\alpha(T) = T + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Siguiendo la idea del teorema del Atkinson damos la siguiente definición.

**Definición 2.17.** *Sea  $\alpha$  un número cardinal tal que  $1 \leq \alpha \leq h$ . Un operador  $T \in B(\mathcal{H})$  se llama  $\alpha$ -Fredholm si  $\pi_\alpha(T)$  es invertible en  $B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .*

Observemos que si  $\pi_\alpha(T)$  es invertible en  $H/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , existe  $S \in B(\mathcal{H})$ , tal que

$$I + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}) = \pi_\alpha(S)\pi_\alpha(T) = (S + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}))(T + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})) = ST + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$$

y

$$I + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}) = \pi_\alpha(T)\pi_\alpha(S) = (T + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}))(S + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})) = TS + \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}).$$

Por lo tanto  $\pi_\alpha(T)$  es invertible en  $B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  si y sólo si  $T$  es invertible módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  si y sólo si existe  $S_1, S_2 \in B(\mathcal{H})$  y  $K_1, K_2 \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $S_1T = I + K_1$  y  $TS_2 = I + K_2$ .

En anteriores Secciones se han visto algunas propiedades que cumplen los operadores Fredholm, por lo que nos preguntamos si todas ellas se pueden extender para los operadores  $\alpha$ -Fredholm.

**Teorema 2.18.** *Sean  $T_1, T_2 \in B(\mathcal{H})$ . Si  $T_1$  y  $T_2$  son operadores  $\alpha$ -Fredholm. Entonces  $T_2T_1$  es  $\alpha$ -Fredholm.*

*Demostración.* Sea  $T_1$  y  $T_2$   $\alpha$ -Fredholm entonces existen  $S_1, S_2 \in B(\mathcal{H})$  y  $K_1, K'_1, K_2, K'_2 \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que

$$\begin{aligned} S_1T_1 &= I + K_1; \quad T_1S_1 = I + K'_1 \text{ y} \\ S_2T_2 &= I + K_2; \quad T_2S_2 = I + K'_2. \end{aligned}$$

De esto se tiene que

$S_1S_2T_2T_1 = S_1(I + K_2)T_1 = S_1IT_1 + S_1K_2T_1 = I + K_1 + S_1K_2T_1 = I + (K_1 + S_1K_2T_1)$ , con  $K_1 + S_1K_2T_1 \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Por lo tanto  $\pi_\alpha(T_2T_1)$  es invertible por la izquierda. Análogamente para mostrar que  $\pi_\alpha(T_2T_1)$  es invertible por la derecha, concluyendo que  $\pi_\alpha(T_2T_1)$  es invertible.  $\square$

A continuación daremos algunas caracterizaciones de los operadores  $\alpha$ -Fredholm con la ayuda de algunos resultados que obtuvimos en anteriores secciones.

**Teorema 2.19.** Sean  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert de dimensión infinita y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$ . Entonces, para cualquier  $T \in B(\mathcal{H})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm.
- (ii)  $T$  es invertible módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .
- (iii)  $\max\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \alpha$
- (iv)  $\text{nul}(T) < \alpha$ ,  $\text{def}(T) < \alpha$  y  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado.

*Demostración.* Son consecuencia de los Teoremas 2.15 y 2.16. □

Para fines prácticos denotamos por  $\Phi_\alpha(\mathcal{H})$  al conjunto de todos los operadores  $\alpha$ -Fredholm en  $B(\mathcal{H})$ . Recordemos que nuestro propósito en esta sección es generalizar los resultados que tenemos para los operadores de Fredholm en el caso de los operadores  $\alpha$ -Fredholm. Para ello, definamos a los operadores semi- $\alpha$ -Fredholm.

**Definición 2.20.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert con dimensión  $h$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\alpha < h$ :

- a) El conjunto de los operadores semi- $\alpha$ -Fredholm superiores, denotado por  $\Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ , esta dado como:

$$\Phi_\alpha^+(\mathcal{H}) = \{T \in B(\mathcal{H}) : \text{nul}(T) < \alpha \text{ y } R(T) \text{ es } \alpha\text{-cerrado}\}.$$

- b) El conjunto de los operadores semi- $\alpha$ -Fredholm inferiores, denotado por  $\Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ , esta dado como:

$$\Phi_\alpha^-(\mathcal{H}) = \{T \in B(\mathcal{H}) : \text{def}(T) < \alpha \text{ y } R(T) \text{ es } \alpha\text{-cerrado}\}.$$

Observemos claramente que  $\Phi_\alpha(\mathcal{H}) = \Phi_\alpha^+(\mathcal{H}) \cap \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ . Además, podemos reescribir los Teorema 2.15 y 2.16 de la siguiente manera.

**Teorema 2.21.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de dimensión infinita  $h$  y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Entonces, para cualquier  $T \in B(\mathcal{H})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $T \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .
- ii)  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ .
- iii)  $\delta(T) < \alpha$ .

**Teorema 2.22.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de dimensión infinita y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Entonces para cualquier  $T \in B(\mathcal{H})$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $T \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ .
- ii)  $T$  es invertible por la derecha módulo  $\mathcal{I}_\alpha$ .
- iii)  $\delta(T^*) < \alpha$ .

Los siguientes corolarios son consecuencias inmediatas de los resultados previos.

**Corolario 2.23.** Si  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  es un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Entonces,  $T \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  si y sólo si  $T^* \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ . Además  $T \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$  si y sólo si  $T^* \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .

*Demostración.* Por los Teoremas 2.21 y 2.22 se tiene que  $T \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  si y sólo si  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  si y sólo si  $T^*$  es invertible por la derecha módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  si y sólo si  $T^* \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ . Análogamente se deduce para el otro caso.  $\square$

**Corolario 2.24.** Sean  $T, S \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ .

- i) Si  $T \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  y  $S \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ , se tiene que  $ST \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .
- ii) Si  $T \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$  y  $S \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ , se tiene que  $ST \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ .

*Demostración.* i) Sean  $T, S \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  entonces existe  $T_1, S_1 \in B(\mathcal{H})$  y  $K_1, K_2 \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que

$$T_1T = I + K_1; \quad \text{y} \quad S_1S = I + K_2;$$

De esto se tiene que

$$\begin{aligned} T_1S_1ST &= T_1(I + K_2)T = T_1IT + T_1K_2T \\ &= I + K_1 + T_1K_2T = I + (K_1 + T_1K_2T), \end{aligned}$$

con  $K_1 + T_1 K_2 T \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Por lo tanto  $ST$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha$  y por el Teorema 2.21  $ST \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .

ii) Es análogo a i).

□

**Teorema 2.25.** *Sea  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ .*

i) Si  $T \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  y  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces  $T + F \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .

ii) Si  $T \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$  y  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces  $T + F \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ .

iii) Si  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces  $T + F$  es  $\alpha$ -Fredholm.

*Demostración.* i) Sean  $T \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  y  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ , por el Teorema 2.21,  $T$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , es decir, existe  $S \in B(\mathcal{H})$  tal que  $I - ST \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Dado que  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  es ideal, se sigue que

$$I - S(T + F) = (I - ST) + SF \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}),$$

por lo tanto  $T + F \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .

ii) La prueba es análoga a i).

iii) Se deduce de i) y ii).

□

**Teorema 2.26.** *Sean  $T, S \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ .*

i) Si  $ST \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  y  $T \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ , implica que  $S \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .

ii) Si  $ST \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$  y  $S \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ , implica que  $T \in \Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$ .

iii) Si  $ST \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ , entonces  $T \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$  si y sólo si  $S \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ .

*Demostración.* i) Supongamos que  $ST \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  con  $T \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ . Por el Teorema 2.19, existe  $T_1 \in B(\mathcal{H})$  y  $K \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que

$$TT_1 = I + K.$$

Por esto, tenemos que

$$S = S(TT_1 - K) = (ST)T_1 - SK.$$

Dado que  $T_1$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha$  y  $ST \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ , por el Teorema 2.21 y el Corolario 2.24 se sigue que  $STT_1 \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ . Como  $SK \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  concluimos, por el Teorema 2.25, que  $S \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ .

ii) Es análogo a i).

iii) Se deduce de i) y ii).

□

**Teorema 2.27.** Sean  $T, S \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un cardinal, con  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Si  $ST$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $ST = TS$ , entonces  $S$  y  $T$  son  $\alpha$ -Fredholm.

*Demostración.* Si  $ST \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$  con  $ST = TS$  entonces existe  $A_1, A_2 \in B(\mathcal{H})$  tal que

$$A_1(ST) - I \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}) \quad \text{y} \quad (ST)A_2 - I \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H}).$$

Claramente  $(A_1S)T - I \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $T(SA_2) - I = (TS)A_2 - I = STA_2 - I \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , por lo tanto  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm. Se procede de igual forma para  $S$ . □

Sigue preguntarnos ¿cómo son  $\Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ ,  $\Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$  y  $\Phi_\alpha(\mathcal{H})$  en la topología de  $B(\mathcal{H})$ ? Para ello tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.28.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert con dimensión  $h$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha$ .

- 1) El conjunto  $\Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  es abierto en  $B(\mathcal{H})$ .
- 2) El conjunto  $\Phi_\alpha^-(\mathcal{H})$  es abierto en  $B(\mathcal{H})$ .
- 3) El conjunto  $\Phi_\alpha(\mathcal{H})$  es abierto en  $B(\mathcal{H})$ .

*Demostración.* i) Sea  $T \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ , por el Teorema 2.21 se sigue que existe  $T_1 \in B(\mathcal{H})$  y  $K \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que

$$T_1T = I + K. \tag{2.18}$$

Sean  $\epsilon = \|T_1\|^{-1}$  y  $s \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $\|S\| < \epsilon$ . De (2.18) tenemos que

$$T_1(T + S) = T_1T + TS = (I + TS) + K.$$

Notemos que

$$\|T_1S\| \leq \|T_1\| \|S\| < \|T_1\| \epsilon \leq 1,$$

por lo que  $(I - T_1S)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ . De esto obtenemos que

$$(I - T_1S)^{-1}T(T + S) = (I - T_1S)[(I + T_1S) + K] = I + (I + T_1S)^{-1}K,$$

donde  $(I + T_1S)^{-1}K \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . Por lo tanto  $T + S$  es invertible por la izquierda módulo  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , es decir,  $T + S \in \Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$ . Se concluye que  $\Phi_\alpha^+(\mathcal{H})$  es un conjunto abierto en  $B(\mathcal{H})$ . □

Gracias al teorema anterior nos podemos preguntar ¿cómo es la clausura del conjunto de los operadores  $\alpha$ -Fredholm?

**Teorema 2.29.** *Dados  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert con dimensión  $h$  y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Tenemos que*

$$\overline{\Phi_\alpha(\mathcal{H})} = \{T \in B(\mathcal{H}) : \delta(T) = \delta(T^*) \text{ ó } \max\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \alpha\}.$$

*Demostración.* Si  $\max\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \alpha$ ,  $T \in \Phi_\alpha(\mathcal{H}) \subseteq \overline{\Phi_\alpha(\mathcal{H})}$ .

Ahora, si se cumple que  $\delta(T) = \delta(T^*)$  por el Teorema 1.43,  $T \in \overline{\mathcal{S}_{B(\mathcal{H})}}$ . Esto implica que existe  $\{T_n\}$  sucesión de  $\mathcal{S}_{B(\mathcal{H})}$  tal que converge a  $T$ . De esto, se sigue que  $\pi_\alpha(T_n)$  es invertible en  $B(\mathcal{H})/\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo tanto  $T_n \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , concluyendo así que  $T \in \overline{\Phi_\alpha(\mathcal{H})}$ . Obteniendo finalmente que

$$\{T \in B(\mathcal{H}) : \delta(T) = \delta(T^*) \text{ ó } \max\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \alpha\} \subseteq \overline{\Phi_\alpha(\mathcal{H})}.$$

Para demostrar la contención que falta, vamos a probar que

$$\{T \in B(\mathcal{H}) : \delta(T) \neq \delta(T^*) \text{ y } \max\{\delta(T), \delta(T^*)\} \geq \alpha\} \subseteq \mathcal{H} \setminus \overline{\Phi_\alpha(\mathcal{H})}.$$

Tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} & \{T \in B(\mathcal{H}) : \delta(T) \neq \delta(T^*) \text{ y } \max\{\delta(T), \delta(T^*)\} \geq \alpha\} \\ &= \bigcup_{\alpha \leq \beta \leq h} \{T \in B(\mathcal{H}) : \min\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \beta \leq \max\{\delta(T), \delta(T^*)\}\}. \end{aligned}$$

Notemos que para cualquier  $\alpha \leq \beta \leq h$ ,

$$\{T \in B(\mathcal{H}) : \min\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \beta \leq \max\{\delta(T), \delta(T^*)\}\}$$

$$= \{T \in B(\mathcal{H}) : T \text{ solo es invertible por la izquierda o derecha módulo } \mathcal{I}_\beta(\mathcal{H})\},$$

el cual es un conjunto abierto en  $B(\mathcal{H})$  (por el Teorema 2.28) que no intercepta a  $\Phi_\alpha(\mathcal{H})$ , por lo tanto

$$\{T \in B(\mathcal{H}) : \min\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \beta \leq \max\{\delta(T), \delta(T^*)\}\} \subset \text{int}(\mathcal{H} \setminus \Phi_\alpha(\mathcal{H})) = \mathcal{H} \setminus \overline{\Phi_\alpha(\mathcal{H})},$$

para todo  $\alpha \leq \beta \leq h$ . Concluyendo así lo que queríamos demostrar. □

## 2.5. El módulo mínimo $\alpha$ -esencial

Gracias a que tenemos el concepto de los operadores  $\alpha$ -Fredholm, podemos entender la noción del módulo mínimo esencial de un operador para espacios de Hilbert que no son separables.

Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de dimensión infinita, con dimensión  $h$  y  $\alpha$  un número cardinal que satisfaga  $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$ . Para cualquier  $T \in B(\mathcal{H})$ , establecemos el *espectro  $\alpha$ -esencial* de  $T$  como

$$\sigma_\alpha(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es } \alpha\text{-Fredholm}\}.$$

**Observación:** Claramente  $\sigma_\alpha(T) \subset \sigma(T)$ . Luego, si  $T = T^*$  y  $(Tx, x) \geq 0$ , para todo  $x \in H$ , por el Lema 6.46 de [17] se sigue que  $\sigma_\alpha(T) \subset [0, \infty)$ .

Definamos el *módulo mínimo  $\alpha$ -esencial* de un operador  $T$  como

$$m_\alpha(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|)\}.$$

Dado que  $|T| = |T|^*$  y  $(|T|x, x) \geq 0$ , por la observación anterior  $m_\alpha(T) \in [0, \infty)$ .

**Teorema 2.30.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert con dimensión  $h$  y  $\alpha$  un cardinal,  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Si  $T \in B(\mathcal{H})$  entonces se obtienen los siguientes resultados:

- i)  $m_\alpha(T) = \sigma(|T|)$ .
- ii)  $m_\alpha(T) > 0$  si y sólo si existe  $B \in B(\mathcal{H})$  y  $K \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $BT = I + K$ .
- iii)  $m_\alpha(T) > 0$  si y sólo si  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado y  $\text{nul } T < \alpha$ .
- iv)  $m_\alpha(T^*) > 0$  si y sólo si existe  $A \in B(\mathcal{H})$  y  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $TA = I + K$ .
- v)  $m_\alpha(T^*) > 0$  si y sólo si  $\text{nul}(T^*) < \alpha$ .
- vi) Si  $m_\alpha(T), m_\alpha(T^*) > 0$  si y sólo si  $T \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ . En este caso  $m_\alpha(T) = m_\alpha(T^*)$ .

# Capítulo 3

## Operadores $\alpha$ -Weyl

En este capítulo veremos que los operadores Weyl y todos sus conceptos que conlleva a definirlos, así como algunos de sus resultados, pueden ser generalizados para espacios de dimensión mayor o igual que  $\aleph_0$ .

### 3.1. Operadores Weyl

Recordemos que, si  $T \in \Phi_{\pm}(\mathcal{H})$ , el índice de  $T$ , denotado por  $i$ , está dado por:

$$i(T) = \text{nul}(T) - \text{def}(T)$$

**Definición 3.1.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert, la clase de los operadores Weyl en  $B(\mathcal{H})$ , denotado por  $\Phi_0(\mathcal{H})$ , está definida por

$$\Phi_0(\mathcal{H}) = \{T \in B(\mathcal{H}) : T \in \Phi(\mathcal{H}), i(T) = 0\}.$$

El espectro Weyl de  $T \in B(\mathcal{H})$ , denotado por  $\omega(T)$ , está definido como

$$\omega(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ no es Weyl}\}.$$

Por S. K. Berberian en [15], podemos establecer la siguiente equivalencia:

$$\omega(T) = \bigcap_{K \in K(\mathcal{H})} \sigma(T + K)$$

donde  $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : S - \lambda \text{ no es invertible}\}$  para cualquier  $S \in B(\mathcal{H})$ .

Algunas propiedades de los operadores Weyl son las siguientes

**Teorema 3.2.** *Sea  $S, T \in B(\mathcal{H})$ , si  $S$  y  $T$  son Weyl esto implica que  $ST$  es Weyl.*

**Teorema 3.3.** *Si  $T \in \Phi_0(\mathcal{H})$  y  $K \in K(\mathcal{H})$  entonces  $T + K \in \Phi_0(\mathcal{H})$ .*

**Teorema 3.4.** *Si  $T \in \Phi_0(\mathcal{H})$  si y solo si existe  $F \in K(\mathcal{H})$  tal que  $T + F$  es invertible.*

**Teorema 3.5.**  $\Phi_0(\mathcal{H})$  es abierto, es decir, para cada operador  $T \in \Phi_0(\mathcal{H})$  existe  $\epsilon > 0$  tal que si un operador  $S \in B(\mathcal{H})$  satisfice que  $\|S\| < \epsilon$ , entonces  $T + S \in \Phi_0(\mathcal{H})$ .

## 3.2. Operadores $\alpha$ -Weyl

En esta sección presentaremos el concepto de operador  $\alpha$ -Weyl, con  $\alpha$  un número cardinal mayor o igual que  $\aleph_0$ . Veremos como estos operadores cumplen con resultados análogo a los vistos en la Sección anterior.

Sea  $\Theta_+(\mathcal{H}) = \{\alpha \text{ número cardinal} : \aleph_0 \leq \alpha \leq h\}$

Podemos establecer una operación suma en  $\Theta(\mathcal{H}) = \Theta_+(\mathcal{H}) \cup \{-\beta : \beta \in \Theta_+(\mathcal{H})\}$  como sigue, para cada  $\alpha \in \Theta(\mathcal{H})$  tal que  $\alpha \geq \aleph_0$

- i)  $\alpha + \beta = \alpha$  si  $-\alpha < \beta \leq \alpha$ .
- ii)  $-\alpha + \beta = -\alpha$  si  $-\alpha \leq \beta < \alpha$ .
- iii)  $\alpha - \alpha = 0$ .

Ahora podemos extender la definición de índice de un operador como sigue.

**Definición 3.6.** *Sea  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\beta \in \Theta_+(\mathcal{H})$ . Definamos el  $\beta$ -índice de  $T$  como*

$$i_\beta(T) = \begin{cases} i(T), & \text{si } \beta = \aleph_0 \text{ ó } \beta > \aleph_0 \text{ y } \max\{nul(T), nul(T^*)\} \geq \beta, \\ 0, & \text{si } \beta > \aleph_0 \text{ y } \max\{nul(T), nul(T^*)\} < \beta. \end{cases}$$

Observemos que  $i_\beta \in \Theta(\mathcal{H})$  y  $i_\beta(T) = -i_\beta(T^*)$ . De [8] obtenemos algunos resultados que serán de gran ayuda.

**Proposición 3.7.** *Sea  $\alpha$  cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ .*

- i) *Si  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $K \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ , entonces  $i_\beta(T + K) = i_\beta(T)$ , para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ .*

2) Si  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $S$  es  $\alpha$ -Fredholm entonces  $i_\beta(TS) = i_\beta(T) + i_\beta(S)$ , para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ .

Luego, de la misma manera que se define a los operadores Weyl, se hará con los operadores  $\alpha$ -Weyl.

**Definición 3.8.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un cardinal,  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Decimos que  $T$  es un operador  $\alpha$ -Weyl si  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $i_\beta(T) = 0$ , para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ .

Si  $\aleph_0 < \alpha < h$ , entonces podemos definir una familia de operadores  $\alpha$ -Weyl, en notación  $\Phi_\alpha^0(\mathcal{H})$ , como:

$$\Phi_\alpha^0(\mathcal{H}) = \{T \in \Phi_\alpha(\mathcal{H}) : i_\beta(T) = 0, \text{ para todo } \beta, \aleph_0 \leq \beta < \alpha\}.$$

Dada la definición anterior podemos establecer el espectro esencial de Weyl de  $T$  de peso  $\alpha$  como

$$\alpha\omega(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ no es un operador } \alpha\text{-Weyl}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \Phi_\alpha^0(\mathcal{H})\}.$$

Para fines prácticos solo llamaremos a  $\alpha\omega(T)$  como el espectro  $\alpha$ -Weyl de  $T$ . Se pueden observar que  $\sigma_\alpha(T) \subseteq \alpha\omega(T)$  para cualquier  $\aleph \leq \alpha < h$ .

En los siguientes problemas, aunque están presentados para  $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ , son válidos de igual forma para  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  ya que sus demostraciones son análogas.

**Proposición 3.9.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de dimensión infinita  $h$  y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Se cumplen las siguientes cláusulas

1) Si  $T$  es  $\alpha$ -Weyl y  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces  $T + F$  es  $\alpha$ -Weyl.

2) Si  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Weyl obtenemos que  $TS$  es  $\alpha$ -Weyl.

*Demostración.* Se sigue de los Teoremas 2.18 y 2.25, y la Proposición 3.7. □

**Teorema 3.10.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ .  $T$  es  $\alpha$ -Weyl si y sólo si existe  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $T + F$  es invertible.

*Demostración.* Supongamos que  $T$  es  $\alpha$ -Weyl, se sigue que  $n(T) = n(T^*)$  y  $i_\beta(T) = 0$  para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ .

Si  $n(T) = n(T^*) \leq \aleph_0$  es el caso del Teorema 3.4.

Si  $\aleph_0 < n(T) < \alpha$ . Por observaciones anteriores existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\delta_\epsilon(T) = \delta(T)$  para todo  $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ .

Tomando  $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ , existe  $X_\epsilon$  subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  tal que  $N(T) \subset X_\epsilon$ ,  $\|Tx\| < \epsilon\|x\|$  para toda  $x \in X_\epsilon \setminus \{0\}$ ,  $\|Tx\| \geq \epsilon\|x\|$  para todo  $x \in X_\epsilon^\perp$  y  $\dim X_\epsilon = \delta_\epsilon(T) = \delta(T) < \alpha$ .

Más aún, por el Teorema 2.14 se cumple  $\dim(T(X_\epsilon^\perp)^\perp) = \delta_\epsilon(T^*) = \delta(T^*) < \alpha$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\delta(T^*) < \delta(T)$ . Por el Lema ??  $\delta(T) = n(T) = n(T^*) < \delta(T^*)$  lo cual contradice nuestra suposición.

Por lo tanto  $\delta(T) = \delta(T^*)$ , esto implica que existe  $f \in B(X_\epsilon, T(X_\epsilon^\perp)^\perp)$  isomorfismo. Luego como  $T$  es acotado por abajo en  $X_\epsilon^\perp$ , tomando a

$$T_3 = T|_{X_\epsilon^\perp} : X_\epsilon^\perp \rightarrow T(X_\epsilon^\perp)^\perp$$

es invertible. Podemos definir el siguiente operador

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix} : X_\epsilon \oplus X_\epsilon^\perp \rightarrow T(X_\epsilon^\perp)^\perp \oplus T(X_\epsilon^\perp). \quad (3.1)$$

Claramente  $\mathcal{T}$  es invertible. Observemos que  $T$  se puede expresar de la siguiente manera

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_\epsilon \\ X_\epsilon^\perp \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} T(X_\epsilon^\perp)^\perp \\ T(X_\epsilon^\perp) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Entonces, tomando a

$$F = \mathcal{T} - T = \begin{bmatrix} f - T_1 & -T_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_\epsilon \\ X_\epsilon^\perp \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} T(X_\epsilon^\perp)^\perp \\ T(X_\epsilon^\perp) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

obtenemos que  $R(F) \subset T(X_\epsilon^\perp)^\perp$  lo cual implica que  $\dim R(F) \leq \dim(T(X_\epsilon^\perp)) < \alpha$ . Concluyendo que  $T + F = \mathcal{T}$  es invertible con  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ .

Supongamos que existe  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $T + F$  es invertible, lo cual implica que  $T + F$  es  $\alpha$ -Fredholm con  $i_\beta(T + F) = 0$ , para todo  $\beta < \alpha$ . Dado que  $T = (T + F) - F$ , con  $-F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  por el Teorema 2.25 y la Proposición 3.7,  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $i_\beta(T) = 0$  para todo  $\beta < \alpha$ , es decir  $T$  es  $\alpha$ -Weyl.  $\square$

**Corolario 3.11.** *Para todo  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph \leq \alpha < h$ , se cumplirá que  $\alpha\omega(T^*) = (\alpha\omega(T))^*$ .*

*Demostración.* Si  $\lambda \notin \alpha\omega(T)$  si y sólo si  $T - \lambda I \in \Phi_\alpha^0(\mathcal{H})$  si y sólo si existe  $S \in B(\mathcal{H})$  invertible y  $K \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $T - \lambda I = S + K$  si y sólo si  $T^* - \bar{\lambda}I = S^* + K^*$  con  $S^*$  invertible y  $K \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  si y sólo si  $\bar{\lambda} \notin \alpha\omega(T^*)$ .  $\square$

**Teorema 3.12.** *Sean  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un número cardinal,  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Entonces*

$$\alpha\omega(T) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})} \sigma(T + F).$$

*Demostración.* Si  $\alpha = \aleph_0$ , es el caso

$$\aleph_0\omega(T) = \bigcap_{F \in K_0(X)} \sigma(T + F).$$

Si  $\aleph_0 < \alpha$ , sea  $\lambda \notin \alpha\omega(T)$  entonces  $T - \lambda$  es un operador  $\alpha$ -Weyl, por el Teorema 3.10 existe  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $T - \lambda + F$  es invertible, por lo tanto

$$\lambda \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})} \sigma(T + F).$$

Ahora, sea  $\lambda \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})} \sigma(T + F)$  entonces existe  $F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  tal que  $(T + F) - \lambda = (T - \lambda) + F$  es invertible, por el Teorema 3.10  $T - \lambda$  es  $\alpha$ -Weyl por lo que  $\lambda \notin \alpha\omega(T)$ .  $\square$

**Corolario 3.13.** *Si  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  es un número cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ , entonces  $\alpha\omega(T + K) = \alpha\omega(T)$ , para todo  $K \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Tomemos  $K \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$ , por el Teorema 3.12 tenemos que

$$\alpha\omega(T + K) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})} \sigma((T + K) + F) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})} \sigma(T + (K + F)) = \alpha\omega(T). \quad (3.4)$$

$\square$

### 3.3. Teorema del mapeo espectral

Sea  $p(t)$  un polinomio de la forma

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n.$$

Entonces, si  $T \in B(\mathcal{H})$  definamos el operador

$$p(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n.$$

Dado que estamos trabajando en un espacio de Hilbert sobre el campo  $\mathbb{C}$ , el espectro esencial cumplirá con el Teorema del mapeo espectral.

**Teorema 3.14.** *Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert complejo y  $T \in B(\mathcal{H})$ . Si  $p(t)$  es un polinomio entonces*

$$\sigma_e(p(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma_e(T)\}.$$

Vamos a denotar al conjunto  $\{p(\lambda) : \lambda \in \sigma_e(T)\}$  por  $p(\sigma_e(T))$ .

Ahora, en base a esto una pregunta natural es la siguiente ¿se puede decir algo sobre el espectro de Weyl con respecto al Teorema del mapeo espectral?

Por las propiedades de los operadores Weyl tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.15.** *Si  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $p(t)$  es un polinomio, tenemos que*

$$w(p(T)) \subseteq p(w(T)).$$

Para demostrar el anterior resultado, es indispensable el Teorema 3.2. Notemos que el recíproco de este mismo no se cumple, ya que puede pasar que  $ST$  sea Weyl pero  $S$  y  $T$  no lo sean. Por lo tanto, para demostrar la contención que nos falta, tenemos que probar bajo que condiciones se cumple el recíproco del Teorema 3.2.

Gracias al Teorema 1.41 una condición necesaria es que  $S$  y  $T$  conmuten. Luego, por 1) del Teorema 1.36 sabemos que  $i(ST) = i(T) + i(S)$ , por lo que si  $ST$  es Weyl esto implica que  $0 = i(T) + i(S)$ , por lo tanto, si queremos concluir que  $T$  y  $S$  son Weyl, necesariamente  $i(T)$  e  $i(S)$  tienen que ser ambos no negativos o ambos no positivos.

Se dice que un operador  $T$  definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es hiponormal si

$$T^*T - TT^* \geq 0 \text{ o equivalentemente } \|T^*x\| \leq \|Tx\| \text{ para todo } x \in \mathcal{H}. \quad (3.5)$$

Si  $T$  es hiponormal, entonces  $T - \lambda I$  es hiponormal para todos los valores complejos de  $\lambda$ . Adicionalmente, si  $T$  es Fredholm, entonces, por (3.5),  $\text{ind}(T) \leq 0$ , obteniendo así el siguiente resultado.

**Teorema 3.16.** *Si  $T$  y  $S$  son operadores hiponormales entonces*

$$S \text{ y } T \text{ son Weyl si y sólo si } ST \text{ es Weyl.}$$

Notemos que el anterior Teorema es igualmente válido si  $S$  y  $T$  tienen índices estables, es decir si  $i(T), i(S) \geq 0$  ó  $i(T), i(S) \leq 0$ . Gracias al anterior teorema podemos demostrar que el espectro de Weyl cumple con el Teorema del mapeo espectral.

**Teorema 3.17.** *Sean  $T \in B(\mathcal{H})$  un operador hiponormal y  $p(t)$  un polinomio, entonces*

$$\omega(p(T)) = p(\omega(T)).$$

Siguiendo la analogía de las secciones anteriores, la siguiente pregunta es natural: ¿el espectro  $\alpha$ -esencial y el espectro  $\alpha$ -Weyl de un operador  $T$  cumplirán el Teorema del mapeo espectral?

Para el espectro  $\alpha$ -esencial tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.18.** *Sean  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$  y  $p(t)$  un polinomio, tenemos que*

$$\sigma_\alpha(p(T)) \subseteq p(\sigma_\alpha(T)).$$

*Demostración.* Supongamos que  $p(t)$  no es una constante. Sea  $\mu \notin p(\sigma_\alpha(T))$ . Consideremos el polinomio  $p(t) - \mu$ , el cual lo podemos factorizar como

$$p(t) - \mu = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n),$$

donde  $n$  es el grado del polinomio y  $a$  es el coeficiente mayor de  $p$ , se sigue que

$$p(T) - \mu I = a(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I).$$

Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p(\lambda_i) = \mu \notin p(\sigma_\alpha(T))$  por lo tanto  $\lambda_i \notin \sigma_\alpha(T)$ , es decir,  $T - \lambda_i I \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ ; se sigue del Teorema 2.18 que  $p(T) - \mu I \in \Phi_\alpha(\mathcal{H})$ . Concluyendo que  $\mu \notin \sigma_\alpha(p(T))$ , lo que implica que  $\sigma_\alpha(p(T)) \subseteq p(\sigma_\alpha(T))$ .

□

Gracias a los resultados obtenidos en la Sección 2.4 el espectro  $\alpha$ -esencial de un operador  $T$  cumplirá con el Teorema del mapeo espectral.

**Teorema 3.19.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$  y  $p(t)$  un polinomio. Entonces

$$p(\sigma_\alpha(T)) = \sigma_\alpha(p(T)).$$

*Demostración.* Sean  $p(t)$  es un polinomio y  $\lambda \in C$ . Entonces  $p(t) - \lambda$  es un polinomio, por lo que tiene una factorización de la forma

$$p(t) - \lambda = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n),$$

donde  $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in C$  con  $a \neq 0$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma_\alpha(p(T)) &\Leftrightarrow p(T) - \lambda I \in \Phi_\alpha(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow a(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_n I) \in \Phi_\alpha(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow (T - \lambda_i I) \in \Phi_\alpha(\mathcal{H}) \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ (Teorema 2.27)} \\ &\Leftrightarrow \lambda_i \notin \sigma_\alpha(T) \text{ para todo } i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow p(\mu) \neq \lambda \text{ para todo } \mu \in \sigma_\alpha(T) \\ &\Leftrightarrow \lambda \notin p(\sigma_\alpha(T)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

lo que implica que

$$p(\sigma_\alpha(T)) = \sigma_\alpha(p(T)).$$

□

Nuestro siguiente paso es saber si el espectro  $\alpha$ -Weyl cumple con el Teorema del mapeo espectral. Al igual que, para el espectro  $\alpha$ -esencial, tenemos una contención.

**Teorema 3.20.** Dados  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$  y  $p(t)$  un polinomio. Tenemos que

$$\alpha\omega(p(T)) \subseteq p(\alpha\omega(T)).$$

*Demostración.* Sea  $\mu \notin p(\alpha\omega(T))$ . Consideremos el polinomio  $p(t) - \mu$ , el cual lo podemos factorizar como

$$p(t) - \mu = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n),$$

donde  $n$  es el grado del polinomio y  $a$  es el coeficiente mayor de  $p(t)$ , se sigue que

$$p(T) - \mu I = a(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_n I).$$

Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p(\lambda_i) = \mu \notin p(\alpha\omega(T))$  por lo tanto  $\lambda_i \notin \alpha\omega(T)$ , es decir,  $T - \lambda_i I$  es  $\alpha$ -Weyl; de 2) de la Proposición 3.9 se sigue que  $p(T) - \mu I$  es  $\alpha$ -Weyl. Concluyendo que  $\mu \in \alpha\omega(p(T))$ .  $\square$

Para terminar de demostrar que el espectro de  $\alpha$ -Weyl cumple con el Teorema del mapeo espectral necesitamos un resultado equivalente al Teorema 3.16 para operadores  $\alpha$ -Weyl. Por el Teorema 2.27, sabemos que si  $ST$  es  $\alpha$ -Fredholm y conmutan entonces  $S$  y  $T$  son  $\alpha$ -Fredholm. Luego, por 1) de la Proposición 3.9 tenemos que  $i_\beta(ST) = i_\beta(T) + i_\beta(S)$ , para  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ , pero el hecho de que  $i_\beta(ST) = 0$  no necesariamente implica que  $i_\beta(T) = 0 = i_\beta(S)$  para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ . De aquí es que necesitamos que  $i_\beta(T)$  e  $i_\beta(S)$  sean ambos no positivos o no negativos para que se cumpla lo requerido.

Diremos que  $T$  tienen  $\alpha$ -índice estable si  $i_\beta(T)$  ó  $i_\beta(T) \geq 0$ , para  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ . Por consecuencia obtenemos lo siguiente.

**Lema 3.21.** Sean  $T, S \in B(\mathcal{H})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$ . Si  $T$  y  $S$  son tales que  $i_\beta(T)$  e  $i_\beta(S)$  sean ambos no positivos o no negativos y  $ST = TS$ , entonces  $ST$  es  $\alpha$ -Weyl si y sólo si  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Weyl.

*Demostración.* Por resultados anteriores solo nos falta demostrar que si  $ST$  es  $\alpha$ -Weyl implica que  $T$  y  $S$  son Weyl.

Supongamos que  $ST$  es  $\alpha$ -Weyl, es decir,  $ST$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $i_\beta(ST) = 0$  para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ . Por el Teorema 2.27 y la Proposición 3.9 se tiene que  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Fredholm e  $i_\beta(ST) = i_\beta(T) + i_\beta(S)$  esto implica que  $0 = i_\beta(T) + i_\beta(S)$ . Dado que  $S$  y  $T$  tiene  $\beta$ -índice estable solo puede suceder que  $i_\beta(T) = 0 = i_\beta(S)$  para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ . Concluyendo así que  $S$  y  $T$  son  $\alpha$ -Weyl.  $\square$

Esto da idicio a presentar el siguiente resultado.

**Teorema 3.22.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < h$  y  $p(t)$  un polinomio. Si  $T - \lambda I$  es no positivos o no negativos para todo  $\lambda \notin \sigma(T)$ , entonces

$$\alpha\omega(p(T)) = p(\alpha\omega(T)).$$

*Demostración.* Sean  $p(t)$  es un polinomio y  $\lambda \in C$ . Entonces  $p(t) - \lambda$  es igualmente un polinomio, por lo que tiene una factorización de la forma

$$p(t) - \lambda = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n),$$

donde  $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in C$  con  $a \neq 0$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda \notin \alpha\omega(p(T)) &\Leftrightarrow p(T) - \lambda I \text{ es } \alpha\text{-Weyl} \\ &\Leftrightarrow a(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_n I) \text{ es } \alpha\text{-Weyl} \\ &\Leftrightarrow (T - \lambda_i I) \text{ es } \alpha\text{-Weyl para } 1 \leq i \leq n \\ &\quad \text{por el Teorema 3.21} \\ &\Leftrightarrow \lambda_i \notin \alpha\omega(T) \text{ para todo } i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow p(\mu) \neq \lambda \text{ para todo } \mu \in \alpha\omega(T) \\ &\Leftrightarrow \lambda \notin p(\alpha\omega(T)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

lo que implica que

$$p(\alpha\omega(T)) = \alpha\omega(p(T)).$$

□

### 3.4. El espectro $\alpha$ -Weyl de matrices de operadores

En esta sección se mostrará en que condiciones una matriz operadora triangular superior de  $2 \times 2$  que actúa sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$  es  $\alpha$ -Weyl, además de estudiar su espectro  $\alpha$ -Weyl.

Sean  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{K}$  espacios de Hilbert no separables. Si  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $S \in B(\mathcal{K})$ , vamos a denotar por  $M_C$  a un operador que actúa sobre  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$  de la forma

$$M_C = \begin{pmatrix} T & C \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

donde  $C \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ . El espectro  $\omega(M_C)$  ha sido estudiado en [19]. Nuestro propósito es estudiar bajo qué condiciones  $M_C$  va a ser un operador  $\alpha$ -Weyl para cualquier  $C \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ , y así poder analizar el  $\alpha\omega(M_C)$ . Empecemos con un resultado que será de gran ayuda para nuestro estudio.

**Teorema 3.23.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $S \in B(\mathcal{K})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < \min\{\dim(\mathcal{H}), \dim(\mathcal{K})\}$ . Si  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Fredholm si y sólo si  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Fredholm.

*Demostración.* Sea

$$M = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix}.$$

Supongamos que  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Fredholm, por el Teorema 2.19 existen  $T_1 \in B(\mathcal{H})$ ,  $S_1 \in B(\mathcal{K})$ ,  $F_1, F'_1 \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $F_2, F'_2 \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{K})$  tal que

$$TT_1 = I - F_1, T_1T = I - F'_1, SS_1 = I - F_2 \text{ y } S_1S = I - F'_2.$$

Definamos lo siguiente

$$M' = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \text{ y } F' = \begin{pmatrix} F'_1 & 0 \\ 0 & F'_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$M'M = \begin{pmatrix} T_1T & 0 \\ 0 & S_1S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - F_1 & 0 \\ 0 & I - F_2 \end{pmatrix} = I - F$$

y

$$MM' = \begin{pmatrix} TT_1 & 0 \\ 0 & SS_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - F'_1 & 0 \\ 0 & I - F'_2 \end{pmatrix} = I - F'$$

con  $F, F' \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ . Por lo tanto  $M = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Fredholm.

Ahora, supongamos que  $M$  es  $\alpha$ -Fredholm entonces existe  $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$  y  $F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$ ,  $F' = \begin{pmatrix} F'_{11} & F'_{12} \\ F'_{21} & F'_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$  tales que  $ML = I - F$  y  $ML = I - F'$ , se sigue que

$$ML = \begin{pmatrix} TL_{11} & TL_{12} \\ SL_{21} & SL_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & I - F_{22} \end{pmatrix}$$

y

$$LM = \begin{pmatrix} L_{11}T & L_{12}S \\ L_{21}T & L_{22}S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - F'_{11} & -F'_{12} \\ -F'_{21} & I - F'_{22} \end{pmatrix},$$

lo cual implica que  $TL_{11} = I - F_{11}$ ,  $SL_{22} = I - F_{22}$ ,  $L_{11}T = I - F'_{11}$  y  $L_{22}S = I - F'_{22}$  con  $F_{11}, F'_{11} \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{H})$  y  $F_{22}, F'_{22} \in \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{K})$ . Por lo tanto  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Fredholm.  $\square$

Analicemos lo siguiente, sean  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{K}$  espacios de Hilbert y  $\alpha, \beta$  dos cardinales tales que  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha < \dim(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ . Si  $M = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  con  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $I \in B(\mathcal{K})$  entonces  $\text{nul}(M) = \text{nul}(T)$  y  $\text{nul}(M^*) = \text{nul}(T^*)$ , por lo tanto

$$i_\beta(M) = i_\beta(T) \text{ para todo } \aleph_0 \leq \beta < \alpha.$$

Por la Proposición 3.7 se sigue que

$$i_\beta \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = i_\beta \left( \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) = i_\beta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} + i_\beta \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = i_\beta(S) + i_\beta(T),$$

para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ . Por todo lo anterior podemos dar el siguiente resultado.

**Teorema 3.24.** *Dados  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $S \in B(\mathcal{K})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph \leq \alpha < \min\{\dim(\mathcal{H}), \dim(\mathcal{K})\}$ . Si  $T$  y  $S$  tales que  $i_\beta(T)$  e  $i_\beta(S)$  son ambos no positivos o no negativos, entonces  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Weyl si y sólo si  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Weyl.*

*Demostración.* Supongamos  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Weyl. Por el Teorema 3.23 se sigue que  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Fredholm con  $i_\beta \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = i_\beta(T) + i_\beta(S) = 0 + 0 = 0$  para todo  $\alpha \leq \beta < \alpha$ , por lo tanto  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Weyl.

Si suponemos que  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Weyl entonces por el Teorema 3.23  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Weyl y  $i_\beta(T) + i_\beta(S) = i_\beta \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = 0$ , para todo  $\aleph_0 < \beta < \alpha$ . Como que  $T$  y  $S$  tienen  $\alpha$ -índice estables solo puede suceder que  $i_\beta(T) = 0 = i_\beta(S)$ , por lo tanto  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Weyl.  $\square$

**Corolario 3.25.** *Sean  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $S \in B(\mathcal{K})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph \leq \alpha < \min\{\dim(\mathcal{H}), \dim(\mathcal{K})\}$ . Si  $T$  y  $S$  son hiconormales, entonces  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Weyl si y sólo si  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Weyl.*

Recordemos que nuestro objetivo es estudiar al operador  $M_C$  con  $C \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ . Notemos que al operador  $M_C$  lo podemos expresar como sigue:

$$M_C = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

donde  $\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}$  es un operador invertible para cualquier  $C \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ , por lo tanto se va a cumplir que  $i_\beta(M_C) = i_\beta(T) + i_\beta\left(\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}\right) + i_\beta(S) = i_\beta(T) + i_\beta(S)$  para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ . Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.26.** Sean  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $S \in B(\mathcal{K})$  y  $\alpha$  un cardinal tal que  $\aleph_0 \leq \alpha < \min\{\dim(\mathcal{H}), \dim(\mathcal{K})\}$ . Si  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Weyl entonces  $M_C$  es  $\alpha$ -Weyl para todo  $C \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ . Más aún, tenemos que

$$\alpha\omega(M_C) \subseteq \alpha\omega\left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right) \subset \alpha\omega(T) \cup \alpha\omega(S). \quad (3.9)$$

*Demostración.* Si  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Weyl, es decir  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  es  $\alpha$ -Fredholm y  $i_\beta\left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right) = i_\beta(T) + i_\beta(S) = 0$ , para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ , entonces por el Teorema 3.23,  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Fredholm. Gracias a la igualdad (3.8) y al Teorema 2.18 se deduce que  $M_C$  es  $\alpha$ -Fredholm, para cualquier  $C \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ . Más aún,  $i_\beta(M_C) = i_\beta(T) + i_\beta(S) = i_\beta\left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right) = 0$  para todo  $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$ , por lo tanto  $M_C$  es  $\alpha$ -Weyl.

Ahora demostremos las contenciones en (3.9).

Si  $\lambda \notin \alpha\omega(T) \cup \alpha\omega(S)$  entonces  $T - \lambda I$  y  $S - \lambda I$  son  $\alpha$ -Weyl, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} T - \lambda I & 0 \\ 0 & S - \lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} - \lambda I$$

es  $\alpha$ -Weyl, es decir  $\lambda \notin \alpha\omega\left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right)$ . Luego, por lo que acabamos de demostrar se sigue que  $\begin{pmatrix} T - \lambda I & C \\ 0 & S - \lambda I \end{pmatrix} = M_C - \lambda I$  es  $\alpha$ -Weyl, para cualquier  $C \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ , por lo tanto  $\lambda \notin i_\beta(M_C)$ . □

Observemos que en el anterior resultado no es necesario que  $T$  y  $S$  sean  $\alpha$ -Weyl, solo requerimos que  $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$  sea  $\alpha$ -Weyl. Además, surgen las siguientes preguntas abiertas.

**Pregunta 1** ¿En qué condiciones se cumplirá  $\alpha\omega(M_C) = \alpha\omega\left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}\right)$ ?

**Pregunta 2** ¿Será válido que  $\alpha\omega(M_C) = \alpha\omega(T) \cup \alpha\omega(S)$ ? y si así fuera ¿bajo que condiciones?

**Pregunta 3** ¿Se podrá hacer un estudio similar para cualquier matriz de operadores?

## Conclusión

Concluimos lo siguiente: este trabajo se basó en generalizar los conceptos que teníamos en la teoría de operadores Fredholm y Weyl en espacios de Hilbert con dimensión menor o igual a  $\aleph_0$ , a espacios de dimensión mayor o igual que  $\aleph_0$ .

En el capítulo 2 se analizó la teoría de los operadores  $\alpha$ -Fredholm. Se observó que estos operadores cumplen con resultados similares a los obtenidos en la teoría de Fredholm. Por ejemplo: si tenemos un operador  $T$  que es  $\alpha$ -Fredholm y  $K \in \mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$  entonces  $T + K$  es un operador  $\alpha$ -Fredholm, si  $T$  y  $S$  son  $\alpha$ -Fredholm implica que  $ST$  es  $\alpha$ -Fredholm, el conjunto de todos los operadores  $\alpha$ -Fredholm es abierto, etc. Además, se presentó un resultado análogo al Teorema de Atkinson para operadores  $\alpha$ -Fredholm el cual nos dice que  $T$  es Fredholm si y sólo si  $nul(T) < \alpha$ ,  $def(T) < 0$  y  $R(T)$  es  $\alpha$ -cerrado. Más aún, gracias al concepto de nulidad aproximada se obtiene que  $T$  es  $\alpha$ -Fredholm si y sólo si  $\max\{\delta(T), \delta(T^*)\} < \alpha$ . Se obtuvo una caracterización de la cerradura del conjunto de los operadores  $\alpha$ -Fredholm en términos de la nulidad aproximada de  $T$  y  $T^*$ . También se presentó el espectro  $\alpha$ -esencial y el módulo mínimo  $\alpha$ -esencial de un operador, así como su relación entre ellos.

En el capítulo 3 se observó que el concepto de índice, de un operador  $T$ , se puede generalizar a un  $\beta$ -índice, el cual nos ayuda a definir a los operadores  $\alpha$ -Weyl, los cuales también cumplen algunos resultados que teníamos para operadores Weyl. Observamos que el espectro  $\alpha$ -Weyl de un operador  $T$  tiene una igualdad en términos de los espectros de  $T + K$  con  $K$  en  $\mathcal{I}_\alpha(\mathcal{H})$ . también se obtuvo que los espectros  $\alpha$ -esencial y  $\alpha$ -Weyl cumplen con el Teorema del mapeo espectral bajo ciertas condiciones. Se analizó el espectro  $\alpha$ -Weyl en las matrices de operadores obteniendo algunos resultados. Es evidente que en este trabajo no se abarcó toda la teoría de los operadores  $\alpha$ -Fredholm, ya que estos tienen mucho que analizar; al igual que la teoría de los operadores  $\alpha$ -Weyl, esto nos da una gran motivación para seguir analizando y obtener nuevos resultados importantes. También nos queda analizar si otros operadores se pueden generalizar de igual forma, por ejemplo, si los operadores Browder se pueden extender a operadores  $\alpha$ -Browder.



# Bibliografía

- [1] P. Aiena, *Fredholm and Local Spectral Theory with Applications to Multipliers*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [2] S. C. Arora and P. Dharmarha, *On weighted Weyl spectrum II*, Bull. of Korean Mathematical Society 43, (2006), 715-722.
- [3] R. Bouldin, Closure of invertible operators on a Hilbert space, Proceedings of the American Mathematical society 108, (1996), 721–726.
- [4] R. Bouldin, *Distance to Invertible Linear Operators Without Separability*, Proceedings of the American Mathematical Society 116, (1992), 489–497.
- [5] E. Brian Davies, *Linear Operators and their Spectra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Series Number 106, 2010.
- [6] L. Burlando, *Approximation by semi-Fredholm and semi- $\alpha$ -Fredholm operators in Hilbert spaces of arbitrary dimension*, Acta Sci. Math (Szeged) 65/1-2 (1999), 217–275.
- [7] S. R. Caradus, W. E. Pfaffenberger, B. Yood, *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1974.
- [8] L. A. Coburn and A. Lebow, *Components of invertible elements in quotient algebras of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 359-365.
- [9] S.V. Djordjević and F. Hernández-Díaz,  *$\alpha$ -Fredholm Spectrum of Hilbert Space Operators*, Journal of the Indian Math. Soc. 83 (2016), 241-249.
- [10] S. V. Djordjević and F. Hernández Díaz, *On  $\alpha$ -Weyl operators* Advances in Pure Mathematics 6, (2016), 138-143.

- 
- [11] G. Edgar, J. Ernest and S. G. Lee, *Weighing operator spectra*, Indiana University Mathematics Journal 21, (1972), 61–80.
- [12] J. Ernest, *Left Invertibility of Closed Operator Modulo an  $\alpha$ -compact operator*. Tohoku Math. Journ. 24 (1972), 45-49.
- [13] J. Ernest, *Operators with  $\alpha$ -closed range*, Tohoku Math. Journ. 24 (1972), 45–49.
- [14] Haïkel Skhiri, *On the Essential Minimum Modulus of Linear Operators in Banach Spaces*, Acta Sci. Math. (Szeged) 82 (2016), 147–164
- [15] C. S. Kubrusly, *Elements of Operator Theory*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [16] C. S. Kubrusly, *Spectral Theory of Bounded Linear Operators*, Birkhäuser, 2002.
- [17] Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson, *Linear Analysis Functional, Second Edition*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2000.
- [18] M. Thamban, *Linear Operator Equations, Approximation and regularization*, World Scientific Publishing, 2009.
- [19] W. Young Lee. *Weyl spectra of operator matrices*, Proceedings of the American Mathematical Society 129, (2000), 131–138.
- [20] W. Young Lee and S. Hoon Lee, *A Spectral Mapping Theorem For The Weyl Spectrum*, Department of Mathematics, Sung Kyun Kwan University, Suwon J. 38 (1996) 61-65.