

**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**  
**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

**Maestría en Ciencias**  
**Física Aplicada**



**El propagador del gravitón masivo**  
**en teorías de Kaluza-Klein**

Tesis presentada para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**José Alfonso Ahuatzí Avendaño**

Asesor:

**Dr. J. Jesús Toscano Chávez**

Julio del 2024

# **El propagador del gravitón masivo en teorías de Kaluza-Klein**

Estudiante:

**José Alfonso Ahuatzi Avendaño**

Asesor:

**Dr. J. Jesús Toscano Chávez (FCFM-BUAP)**

**Título:** El propagador del gravitón masivo en teorías de Kaluza-Klein.

**Estudiante:** José Alfonso Ahuatzí Avendaño

COMITÉ

---

Dra. Ana Aurelia Avilez López  
Presidente

---

Dr. Héctor Novales Sánchez  
Secretario

---

Dr. Gilberto Tavares Velazco  
Vocal

---

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Suplente

---

Dr. J. Jesús Toscano Chávez  
Asesor



# Agradecimientos

Agradezco a mis padres, a mis hermanos y a mi abuela por el apoyo brindado, por la unión, la paciencia y por su actuar más allá de lo que el deber les demanda.

Agradezco a mi asesor, el Dr. J Jesús Toscano Chávez, por brindar su conocimiento sin reservas, por su tiempo y apoyo.

Agradezco al CONACyT, por el apoyo económico brindado para el desarrollo y realización de esta tesis.

*A la memoria de mi abuela Juana Vázquez Pérez*

# Resumen

En esta tesis de maestría se estudia el propagador general de un bosón de norma masivo de espín-2 generado en el contexto de las teorías de Kaluza-Klein. Se muestra que asociados con los tres estados de polarización vinculados con la masa existe un pseudo-bosón de Goldstone vectorial y uno escalar. Se discute el carácter no dinámico de los ghost asociados con esta partícula. El proceso de fijación de la norma que permite definir a los diversos propagadores asociados con la partícula de espín-2 se introduce en el marco del formalismo campo-anticampo, el cual es la base de la simetría BRST.

**Palabras clave:** Propagador, gravitón masivo, gravedad linealizada, Kaluza-Klein, pseudo-bosones de Goldstone, ghost, BRST, dimensiones extra.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría de Einstein-Hilbert linealizada</b>	<b>3</b>
1.1. Linealización de la teoría de Einstein-Hilbert . . . . .	3
1.2. El propagador del campo de norma de espín-2 . . . . .	5
1.3. Simetría BRST en 4 dimensiones . . . . .	9
<b>2. Mecanismos de generación de masa</b>	<b>14</b>
2.1. El mecanismo de Englert-Higgs (EHM) . . . . .	14
2.2. El mecanismo de Kaluza-Klein (KKM) . . . . .	19
<b>3. Compactificación de la Teoría de Einstein-Hilbert linealizada en 5 dimensiones</b>	<b>31</b>
3.1. Compactificación de la Teoría de Einstein-Hilbert linealizada en 5 dimensiones . . . . .	31
3.2. Simetría BRST con dimensiones extra . . . . .	40
3.3. El propagador del campo de norma de espín-2 masivo . . . . .	46
<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>51</b>
<b>A. Integrales de las funciones <math>\{f^{(m)}(\bar{x})\}</math></b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>



# Introducción

La existencia de una teoría cuántica que describa satisfactoriamente a la gravedad en compañía del resto de interacciones físicas fundamentales es un área de investigación latente. La teoría cuántica de campos ha tenido éxito en describir la naturaleza de las interacciones electrodébil y fuerte, de las cuales conocemos su fenomenología de pequeñas distancias hasta un rango de acción del orden de  $10^{-18}\text{m}$ , de acuerdo con los actuales aceleradores de partículas. En contraposición, la cuarta interacción fundamental, la gravedad, ha sido descrita satisfactoriamente por la teoría General de la Relatividad de Einstein (GR) a nivel macroscópico y cosmológico (es decir, de manera clásica). El objetivo es estudiar a la gravedad como una teoría cuántica de campos por lo que en esta tesis de maestría se analizará la teoría de Einstein-Hilbert linealizada extradimensional, en  $d = 4 + 1$  dimensiones. A partir de dicha teoría con una dimensión extra se puede obtener una teoría efectiva al incorporar el mecanismo de Kaluza-Klein (KKM), el cual está relacionado con la obtención de un espectro de masas en analogía con el celebrado mecanismo de Engler-Higgs (EHM).

El mecanismo de Kaluza-Klein lleva tal nombre por el trabajo de Kaluza [1], quien en 1921 encuentra una teoría en la que figuran la teoría gravitacional de Einstein y la del electromagnetismo de Maxwell en el contexto de 5 dimensiones y del proceso de compactificación de la quinta de dichas dimensiones proporcionada por Klein en 1926 [2]. Aledaño a Kaluza, un trabajo similar fue llevado a cabo, de manera independiente, por Nordström en 1914 [3]. Posteriormente, la teoría que ha incentivado mayormente el uso de las dimensiones extras es la teoría de cuerdas, desde su fundación, como una teoría de la interacción fuerte o en el caso de la incorporación de la supersimetría cuando se incluyen fermiones en compañía del gravitón como una partícula de espín 2 no masiva [4]. Sobre la cantidad de dimensiones extra un número que suele resaltar es 11 dimensiones. Las diversas formulaciones de supercuerdas están estrechamente relacionadas con la teoría  $M$  en 11 dimensiones [5] y además la supergravedad en 11 dimensiones es un límite de bajas energías de la teoría  $M$  [6].

La Relatividad General en el sentido de la teoría de campos es una teoría de espín-2 de modo que en el caso de su cuantización la gravedad es descrita por una partícula no masiva, el gravitón. Cuando el campo de espín-2 mediador de la fuerza gravitacional es masivo su cuantización da paso a gravitones masivos. Se intuye que la masa del gravitón es pequeña, por ejemplo, cotas para masas del orden de  $10^{-27} eV$  o menores han sido reportadas en [9]. La gravedad masiva, ha sido objeto de estudio como alternativa a la energía oscura y se espera que la masa del gravitón pueda arrojar soluciones en el problema de la constante cosmológica. Por su parte, las teorías de gravedad masiva han tenido problemas históricos en la predicción de cantidades bien medidas en el contexto de GR, una de las más famosas es la discontinuidad de van Dam-Veltman-Zakharov (vDVZ) [10], descubierta en los 70's, relacionada con la incongruencia entre las predicciones entre el límite de masa cero de las teorías masivas y GR. Dicha discontinuidad ha sido ampliamente estudiada y se sabe que es producto del uso de la teoría lineal más allá de su régimen de validez, dicho problema se puede resolver con el mecanismo de Vainshtein. Otro problema común está relacionado con la aparición de grados de libertad espurios; por ejemplo, un sexto estado de polarización nombrado ghost de Boulware-Deser esta íntimamente ligado con la inclusión de las interacciones gravitacionales no lineales [11, 12].

La construcción de una teoría cuántica de la gravedad se convirtió en un área de estudio común después de los 70's aunque se comenzó a desarrollar inclusive antes de que se conocieran problemas específicos relacionados con la teoría cuántica de campos en general [13, 14, 15]. Un ejemplo típico de esto es el problema de renormalización (que surgió en la construcción de QED), particularmente la no renormalización de las divergencias ultravioletas en GR. Esto en lugar de desalentarnos debe ser motivo de estudio y construcción de soluciones como en su mo-

mento lo fue la inclusión de ghosts de Faddeev-Popov en las teorías de Yang-Mills, el entendimiento de la libertad asintótica en QCD o la inclusión del EHM en el sector electrodébil. Hoy se sabe que, aunque una teoría sea no renormablizable, esto no impide la predicción de observables físicas en el marco de las teorías efectivas [16]. En la física de partículas es de suma importancia la definición de los propagadores pues permiten realizar correcciones radiativas. Como se explicará en la presente tesis, obtener el propagador de un campo de espín-2 masivo en una teoría con compactificación de dimensiones extra, en una norma general, significa definir también los propagadores de los correspondientes pseudo-bosones de Goldstone. Así, el propagador del gravitón masivo se calculará en una teoría efectiva (que incluirá a la teoría de Fierz-Pauli) donde participe el mecanismo de compactificación de dimensiones extra de Kaluza-Klein (KKM), en concordancia con las técnicas conocidas en la teoría cuántica de campos [17, 18, 20].

El contenido de esta tesis se presenta en el siguiente orden. En el primer capítulo se discuten aspectos globales de la teoría linealizada de Einstein-Hilbert libre en 4 dimensiones. Se analiza la teoría de campo de espín-2, sin masa, y se muestra que las expresiones de su propagador son análogas a las de los campos de espín-1 en la norma armónica. Por otra parte, se discute el formalismo de campo-anticampo para introducir la simetría BRST y se obtiene el sector de ghost. En el segundo capítulo se presentan dos mecanismos de generación de masa: el mecanismo de Higgs (EHM) y el mecanismo de Kaluza-Klein (KKM) aplicados a un modelo abeliano, con el propósito de mostrar sus similitudes. En el tercer capítulo se implementa el mecanismo de Kaluza-Klein (KKM) en la teoría de Einstein-Hilbert linealizada en  $d = 4 + 1$  dimensiones. Se discuten las transformaciones de norma estándar (SGT's) y no estándar (NSGT's) que permiten identificar el papel de campo de norma o de pseudo-bosón de Goldstone de los campos. El campo de norma de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , el cual es un campo análogo al gravitón masivo, surge como las excitaciones de KK del gravitón sin masa  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , junto con los pseudo-bosones de Goldstone vectorial  $h_{G\mu}^{(m)}$  y escalar  $h_G^{(m)}$ . Se analizan los grados de libertad del gravitón masivo y se estudia la estructura de su propagador en tres casos específicos. En el caso de la norma más general el propagador del campo de espín-2 masivo está completamente definido hasta que se definen los propagadores de los pseudo-bosones de Goldstone. Para definir propagadores bien comportados del campo de espín-2 masivo y de sus pseudo-bosones de Goldstone se analizan funciones de fijación de la norma generales (lineales). El propagador de  $h_{G\mu}^{(m)}$  queda definido hasta que se fija la norma para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ . En el caso del pseudo-bosón de Goldstone  $h_G^{(m)}$  su sector se cancela en el proceso de compactificación por lo que se utiliza el truco de Stückelberg para introducirlo y su propagador queda definido ante la elección de la función que fija la norma para  $h_{G\mu}^{(m)}$ . En el caso de la función de fijación de norma para el gravitón se muestra que son necesarios dos parámetros: uno de norma denotado como  $\xi$  y otro asociado con la traza de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  denotado como  $\zeta$  y se enfatiza la necesidad de que el valor del segundo de estos parámetros sea  $\zeta = -1$ . Finalmente, los sectores de ghost usual y de los modos excitados se obtienen a partir del formalismo de campo-anticampo que introduce la simetría BRST con compactificación de dimensiones extra, de modo que se tienen los campos ghost vectoriales  $\bar{C}_\mu^{(0)}$  ( $C_\mu^{(0)}$ ) asociados con  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , y aquellos para los modos excitados:  $\bar{C}_\mu^{(m)}$  ( $C_\mu^{(m)}$ ) y  $\bar{C}_h^{(m)}$  ( $C_h^{(m)}$ ), asociados con  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y  $h_{G\mu}^{(m)}$ , respectivamente. Se discute el carácter no dinámico de los ghost.

# Capítulo 1

## Teoría de Einstein-Hilbert linealizada

En esta sección se analiza la teoría de Einstein-Hilbert linealizada, una teoría de norma que involucra al gravitón. En la primera sección se muestran convenciones generales de la teoría y se explica el proceso de linealización. En la siguiente sección se estudia la teoría del campo de espín-2  $h_{\mu\nu}$  y se obtienen sus propagadores. En la última sección de este capítulo se obtiene el sector de ghost mediante el formalismo de campo-anticampo para introducir la simetría BRST.

### 1.1. Linealización de la teoría de Einstein-Hilbert

La teoría de Einstein-Hilbert describe el comportamiento de los fenómenos gravitacionales de acuerdo con la teoría de la relatividad general (GR) de Einstein, en esta sección se discute cómo se obtiene la teoría linealizada. A pesar de que la teoría puede incluir interacciones, la discusión se limita a la teoría libre de modo que se obtienen los propagadores de los campos involucrados, tanto del gravitón sin masa  $h_{\mu\nu}$  como de sus correspondientes campos ghost. La obtención de propagadores de los campos de norma es de importancia en la física de partículas porque permiten hacer cálculos de correcciones radiativas. En el caso del campo de espín-1, su propagador ha sido ampliamente estudiado, pero en el caso de los objetos de espín-2 su estructura es de latente estudio para normas generales.

Se usa la signatura  $\eta = \text{diag}(+, -, -, -)$  y la siguiente convención para el tensor de Riemann  $R^\lambda_{\rho\mu\nu}$  y el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ :

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\tau} \Gamma^\tau_{\mu\rho}, \quad (1.1)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (1.3)$$

donde  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  son las conexiones de Levi-Civita y  $R$  es el escalar de Ricci. Además se consideran unidades naturales  $c = \hbar = 1$ . La acción de gravedad permitida por la invariancia ante difeomorfismos es:

$$S = \int d^4x \left[ \Lambda - \frac{1}{\kappa^2} R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dots + \mathcal{L}_{\text{materia}} \right], \quad (1.4)$$

el término  $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$  no aparece pues se puede escribir en términos de  $R^2$  y  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$  por el teorema de Gauss

Bonnet [20]. La constante  $\kappa^2 = 16\pi G$  arregla unidades donde  $G$  es la constante de Newton. Por su parte  $\Lambda = \lambda(-8\pi G)^{-1}$  con  $\lambda$  la constante cosmológica, sólo es relevante a energías del orden de  $|\Lambda| < 10^{-46} GeV^4$ ,  $|\lambda| < 10^{-56} cm^{-2}$ . Debido a que  $R$  tiene valores muy pequeños, los valores de  $R^2$  y  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  son despreciables comparados con  $R$ , por lo que suele trabajarse exclusivamente con la acción de Einstein-Hilbert [21]. A nivel clásico la acción de Einstein-Hilbert es la siguiente:

$$S_{EH} = \int dw \left( -\frac{1}{\kappa^2} R \right). \quad (1.5)$$

La construcción de una acción invariante en el contexto de la relatividad especial incluye el uso de una medida de integración invariante que resulta ser el 4-volumen o volumen propio  $dw$ . Sea un sistema localmente plano  $x^{\mu'}$  y un sistema general  $x^\mu$  el volumen propio se define como:

$$dw = \left| \det \left[ A^{\mu'}_{\mu} \right] \right| d^4x, \quad A^{\mu'}_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}. \quad (1.6)$$

El hecho de que el tensor métrico se transforme como  $g = A^T \eta A$  implica que  $\det(g) = \det^2(A) \det(\eta)$ , donde sabemos que  $\det(\eta) = -1$  directamente de la signatura elegida. Sea  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , entonces  $\det^2(A) = -g$  de la cual el volumen propio toma la forma  $dw = \sqrt{-g} d^4x$ . Considerando esto último la acción de la teoría de Einstein-Hilbert clásica es:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{\kappa^2} R \right). \quad (1.7)$$

Como posteriormente estudiaremos la teoría de Einstein-Hilbert en  $d = 4 + n$  dimensiones, el superíndice  $(0)$  se utilizará para identificar los campos de la teoría usual en 4 dimensiones. La linealización de la teoría de Einstein-Hilbert surge cuando la métrica, en un límite de campo gravitacional débil, se descompone como la métrica de Minkowski más una perturbación 2-tensorial simétrica  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  que cumple  $|h_{\mu\nu}^{(0)}| \ll 1$ , lo cual considerando la condición  $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$  se traduce en lo siguiente:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}^{(0)}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{(0)\mu\nu} + \kappa^2 h^{(0)\mu\rho} h_{\rho}^{(0)\nu} + \dots, \quad (1.8)$$

donde el tensor métrico es exacto, a primer orden en  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  y el tensor métrico inverso se expande a más altos órdenes. Para incluir interacciones entre tres gravitones en adelante se debe incluir más términos de la expansión del tensor métrico inverso. Con el objetivo de obtener las expresiones propias de la gravedad linealizada basta quedarse a primer orden en  $\kappa$ , tanto en el tensor métrico como en su inverso, de tal forma que la lagrangiana es a lo sumo cuadrática en  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ .

En el proceso de linealización debemos calcular la cantidad  $\sqrt{-g}$ . Un cálculo directo de  $g$  a segundo orden en  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  y  $h^{(0)} \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{(0)}$  nos lleva a:

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}^{(0)}) = -1 - \kappa h^{(0)} + \frac{\kappa^2}{2} (h_{\mu\nu}^{(0)} h^{(0)\mu\nu} - h^{(0)} h^{(0)}) + O(h^{(0)3}) \quad (1.9)$$

y posteriormente el cálculo de  $\sqrt{-g}$ , igual a segundo orden, nos lleva a lo siguiente [15]:

$$\sqrt{-g} \approx 1 + \frac{\kappa}{2} h^{(0)} + \frac{\kappa^2}{8} \left( h^{(0)} h^{(0)} - 2h_{\mu\nu}^{(0)} h^{(0)\mu\nu} \right) + O(h^{(0)3}). \quad (1.10)$$

Utilizamos las expresiones anteriores y linealizamos la acción (1.7) y obtenemos:

$$S_{EHLA} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(0)} \partial_\lambda h^{(0)\lambda\nu} - \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(0)} \partial^\nu h^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(0)} \partial^\mu h^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\rho\sigma}^{(0)} \partial^\mu h^{(0)\rho\sigma} \right] \right\}. \quad (1.11)$$

Esta es la acción de gravedad linealizada, las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de dicha acción son  $G^{\alpha\beta} = 0$ , donde el tensor de Einstein linealizado esta dado por:

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{\kappa}{2} \left[ \partial_\tau \partial^\alpha h^{(0)\tau\beta} + \partial_\tau \partial^\beta h^{(0)\tau\alpha} - \partial^\alpha \partial^\beta h^{(0)} - \square h^{(0)\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \partial^\lambda \partial^\tau h_{\lambda\tau}^{(0)} + \eta^{\alpha\beta} \square h^{(0)} \right]. \quad (1.12)$$

Las soluciones de las ecuaciones de Einstein se han estudiado en múltiples contextos, uno de ellos es en la versión linealizada. Algunas de las soluciones más conocidas son las *soluciones armónicas* que satisfacen la ecuación de d'Alembert. Para encontrar dichas soluciones se establecen las llamadas condiciones de Donder o armónicas y se definen como:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (1.13)$$

A primer orden en  $\kappa$  la condición anterior se puede reescribir como:

$$\partial_\mu \left( h^{(0)\mu\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} h^{(0)} \right) = 0. \quad (1.14)$$

La condición armónica suele simplificar las ecuaciones de movimiento, así como el tensor de energía momento, por dichos motivos es de uso extendido en la literatura.

La acción (1.11) se va a promover de 4 a  $d = 4 + 1$  dimensiones en el capítulo 3, para obtener una teoría efectiva con el uso del mecanismo de compactificación de dimensiones extras de Kaluza-Klein. A la teoría de Einstein-Hilbert linealizada también la llamaremos simplemente gravedad linealizada.

## 1.2. El propagador del campo de norma de espín-2

La teoría de gravedad linealizada proviene de la linealización de la acción de Einstein-Hilbert a segundo orden en los campos  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , como se vió en la sección anterior. La teoría es representada por un campo de espín-2 sin masa  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , gobernado por la siguiente acción:

$$S_{EHL}[h_{\mu\nu}^{(0)}] = \int \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(0)} \partial_\lambda h^{(0)\lambda\nu} - \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(0)} \partial^\nu h^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(0)} \partial^\mu h^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\rho\sigma}^{(0)} \partial^\mu h^{(0)\rho\sigma} \right] \right\} d^4x, \quad (1.15)$$

la cual se desprende del trabajo de Fierz y Pauli (FP) de 1939, como un caso particular de una teoría relativista

de espín  $s$  arbitrario descrita por un tensor simétrico de rango  $s$  [8, 12]. Fierz y Pauli mostraron que en el caso de espín-2 no masivo las ecuaciones de movimiento eran idénticas a las de gravedad linealizada, es decir para las ondas gravitacionales donde la simetría es dictada por las transformaciones infinitesimales de coordenadas, lo cual constituye el paradigma estándar de la gravedad linealizada.

La acción (1.15) es invariante bajo las siguientes transformaciones de norma:

$$\delta h_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(0)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(0)}(x), \quad (1.16)$$

donde  $\xi_\mu^{(0)}$  y  $\xi_\nu^{(0)}$  son los parámetros de norma del grupo de difeomorfismos. De manera concreta un difeomorfismo es un isomorfismo en variedades diferenciales, *i.e.* una transformación invertible que mapea una variedad diferencial ( $\mathcal{M}$ ) en otra ( $\mathcal{N}$ ). El conjunto de los isomorfismos de la presente teoría son en el espaciotiempo denotado por  $\mathcal{M}^4$ , de modo que el conjunto de dichas transformaciones forman el grupo de difeomorfismos que se denota como  $Diff(\mathcal{M}^4)$ .

Un cálculo sencillo permite ver que la acción (1.15) se puede reescribir de la siguiente forma hasta un término de superficie:

$$\mathcal{S}_{EHL}[h_{\mu\nu}^{(0)}] = \int d^4x \frac{1}{4} \partial_\sigma h_{\alpha\beta}^{(0)} (G^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^{\rho\sigma} - 2G^{\alpha\beta\sigma\kappa} G_{\kappa}^{\rho\gamma\delta}) \partial_\rho h_{\gamma\delta}^{(0)}, \quad (1.17)$$

la cual es una forma cuadrática en los campos donde se han utilizado los tensores  $I_{\alpha\beta\gamma\delta}$  y  $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$  definidos como:

$$I_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}), \quad (1.18)$$

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = I_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}. \quad (1.19)$$

La notación anterior es estandarizada [13, 14] y  $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$  se puede entender como un tensor métrico e  $I_{\alpha\beta\gamma\delta}$  representa un tensor identidad en el espacio de tensores simétricos. Considerando que  $\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\tau}I_{\lambda\tau\alpha\beta} = I^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\mu) = I_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ , para apoyar el hecho de que  $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$  se comporta como un tensor métrico se puede ver que  $G^{\gamma\delta\mu\nu}$  sería su correspondiente tensor métrico inverso y cumple la relación:

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta}G^{\gamma\delta\mu\nu} = I_{\alpha\beta}^{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

La acción de gravedad linealizada se puede escribir de la siguiente forma hasta un término de superficie:

$$\mathcal{S}_{EHL}[h_{\mu\nu}^{(0)}] = \frac{1}{4} \int d^4x h^{(0)\alpha\beta} [-G_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^2 + 2G_{\alpha\beta\sigma\kappa}\partial^\sigma\partial^\rho G_{\rho\gamma\delta}^\kappa] h^{(0)\gamma\delta}. \quad (1.21)$$

Las ecuaciones de Lagrange derivadas de (1.17) producen la siguiente ecuación para  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  donde se puede apreciar el operador diferencial de la expresión anterior, el cual llamaremos el *operador de Hilbert linealizado*:

$$\left( -G_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^2 + 2G_{\alpha\beta\sigma\kappa}\partial^\sigma\partial^\rho G_{\rho\gamma\delta}^\kappa \right) h^{(0)\gamma\delta} = 0. \quad (1.22)$$

El propagador del gravitón sin masa  $D^{\gamma\delta\mu\nu}$  es la función de Green de la ecuación (1.22):

$$\left(-G_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^2 + 2G_{\alpha\beta\sigma\kappa}\partial^\sigma\partial^\rho G_{\rho\gamma\delta}^\kappa\right)D^{\gamma\delta\mu\nu}(x-y) = I_{\alpha\beta}^{\mu\nu}\delta^4(x-y). \quad (1.23)$$

En otras palabras,  $D^{\gamma\delta\mu\nu}$  es el inverso del operador de Hilbert linealizado. Como suele ocurrir en las teorías de norma, el operador de Hilbert linealizado no se puede invertir. Para validar esto último, uno debe darse cuenta que cualquier contracción del operador de Hilbert linealizado con derivadas o tensores métricos produce una cancelación de términos. Por ejemplo, nótese que al proyectar el operador  $\partial^\alpha\partial^\beta$  a la ecuación (1.23) se obtiene lo siguiente:

$$\left((-1+1)\cdot\partial_\gamma\partial_\delta\partial^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\eta_{\gamma\delta}\partial^2\partial^2\right)D^{\gamma\delta\mu\nu} = \partial^\mu\partial^\nu\delta^4(x-y), \quad (1.24)$$

lo cual de manera esquemática se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left(0\cdot\partial_\gamma\partial_\delta\partial^2 + 0\cdot\eta_{\gamma\delta}\partial^2\partial^2\right)D^{\gamma\delta\mu\nu} = \partial^\mu\partial^\nu\delta^4(x-y). \quad (1.25)$$

Para resolver este problema se procede a fijar la norma. La cuantización de la teoría se hace en el contexto de la siguiente integral de trayectoria:

$$Z = \int dh_{\mu\nu}\delta(G^\alpha(h))\det\left|\frac{\partial G^\alpha}{\partial\xi_\beta}\right|e^{iS[h]}, \quad (1.26)$$

donde  $G^\alpha(h)$  es la función de norma a ser impuesta y  $\frac{\partial G^\alpha}{\partial\xi_\beta}$  se refiere a la variación del término de fijación de norma como dicta (1.16). Concretamente, la función de fijación de norma más general tiene la forma:

$$G_\alpha(h) \equiv \left(\partial^\mu h_{\mu\alpha} + \zeta\partial_\alpha h\right). \quad (1.27)$$

La función de fijación de norma (1.27) y el método de exponenciación de Faddeev-Popov conducen (a segundo orden en  $h^{(0)}$ ) a la acción de fijación de norma [14, 15, 35]:

$$S_{gf} = \int d^4x \left(\frac{1}{2\xi}f_\lambda^{(0)}f^{(0)\lambda}\right), \quad f_\lambda^{(0)} = \partial^\mu \left(h_{\mu\lambda}^{(0)} + \zeta\eta_{\mu\lambda}h^{(0)}\right). \quad (1.28)$$

En las expresiones anteriores están involucrados dos parámetros; uno de norma  $\xi$  y otro relacionado con la participación de la traza, denotado por  $\zeta$ , que define diferentes familias de normas. No confundir el parámetro escalar  $\xi$  con los parámetros vectoriales  $\xi_\mu^{(0)}$ , la presencia de los índices de Lorentz en estos últimos los distinguen. La elección estándar es la familia de normas armónicas en la que  $\zeta = -\frac{1}{2}$ , debido a que dicha norma simplifica las ecuaciones de movimiento a nivel clásico (además tiene algunas propiedades interesantes [34]). La acción de fijación de la norma armónica es:

$$S_{gf} = \int d^4x \left(\frac{1}{2\xi}f_\lambda^{(0)}f^{(0)\lambda}\right), \quad f_\lambda^{(0)} = \partial^\mu \left(h_{\mu\lambda}^{(0)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}h^{(0)}\right). \quad (1.29)$$

A partir de la expresión anterior se puede ver de manera sencilla que  $f_\sigma^{(0)}$  se puede reescribir en términos del tensor  $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$  como  $f_\sigma^{(0)} = \partial^\mu G_{\mu\sigma\alpha\beta}h^{(0)\alpha\beta}$ . Así, el término de fijación de la norma se puede reescribir como sigue:

$$S_{gf} = \int d^4x \frac{1}{4}\partial^\sigma h^{(0)\alpha\beta} 2\left(\frac{1}{\xi}\right)G_{\alpha\beta\sigma\kappa}G_{\rho\gamma\delta}^\kappa\partial^\rho h^{(0)\gamma\delta}. \quad (1.30)$$

Sea  $\xi_g$  la notación para el parámetro de norma, podemos incluir el término de fijación de la norma  $R_\xi$  de la teoría de gravedad linealizada (de masa cero), a nivel acción de tal forma que se obtiene el resultado:

$$\mathcal{S}_{EHL} + \mathcal{S}_{gf} = \frac{1}{4} \int d^4x \partial^\sigma h^{(0)\alpha\beta} \left[ G_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_{\rho\sigma} - 2 \left( 1 - \frac{1}{\xi_g} \right) G_{\alpha\beta\sigma\kappa} G_{\rho\gamma\delta}^\kappa \right] \partial^\rho h^{(0)\gamma\delta} \quad (1.31)$$

$$= \frac{1}{4} \int d^4x h^{(0)\alpha\beta} \left[ -G_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^2 + 2 \left( 1 - \frac{1}{\xi_g} \right) G_{\alpha\beta\sigma\kappa} \partial^\sigma \partial^\rho G_{\rho\gamma\delta}^\kappa \right] h^{(0)\gamma\delta}. \quad (1.32)$$

Sea  $q$  el 4-momento del gravitón, después de efectuar la transformada de Fourier sobre los campos, la acción en el espacio de momentos toma la forma:

$$S_{EHL} + S_{gf} = \frac{1}{4} \int d^4q \tilde{h}_{\alpha\beta}^{(0)} \Delta^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{h}_{\gamma\delta}^{(0)}, \quad (1.33)$$

donde el tensor  $\Delta^{\alpha\beta\gamma\delta}$  esta definido como:

$$\Delta^{\alpha\beta\gamma\delta} = q^2 G^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2 \left( 1 - \frac{1}{\xi_g} \right) G^{\alpha\beta\sigma\kappa} q_\sigma q_\rho G_{\kappa}^{\rho\gamma\delta}. \quad (1.34)$$

Como es sabido, el inverso de la cantidad anterior representa el propagador tensorial del gravitón  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , sin masa, de la teoría de gravedad linealizada en la norma armónica ( $\zeta = -\frac{1}{2}$ ). A partir de un ansatz de la forma:

$$\tilde{\Delta}_{\gamma\delta\mu\nu} = \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left[ G_{\gamma\delta\mu\nu} + c_1 \left( q_\gamma q_\nu \eta_{\delta\mu} + q_\gamma q_\mu \eta_{\delta\nu} + q_\delta q_\nu \eta_{\gamma\mu} + q_\delta q_\mu \eta_{\gamma\nu} \right) \right], \quad (1.35)$$

podemos calcular el propagador al imponer que la expresión (1.34) y (1.35) satisfagan la siguiente condición:

$$\Delta^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\Delta}_{\gamma\delta\mu\nu} = i I_{\mu\nu}^{\alpha\beta}. \quad (1.36)$$

El ansatz es propuesto como una expresión análoga del propagador del campo de espín-1, el cual es ampliamente conocido, con la consideración adicional de la aparición de los 4 índices de Lorentz,  $c_1$  es una constante. El propagador del gravitón sin masa  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  tiene la siguiente estructura:

Propagador de  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  en la norma armónica

$$\tilde{\Delta}_{\gamma\delta\mu\nu} = \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left[ G_{\gamma\delta\mu\nu} - 2(1 - \xi_g) \frac{I_{\gamma\delta\lambda\epsilon} q^\lambda q^\tau I_{\tau\mu\nu}^\epsilon}{q^2} \right]. \quad (1.37)$$

Esta expresión se ve explícitamente de la siguiente forma:

$$\tilde{\Delta}_{\gamma\delta\mu\nu} = \frac{i}{2} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \left[ \left( \eta_{\gamma\mu}\eta_{\delta\nu} + \eta_{\gamma\nu}\eta_{\delta\mu} - \eta_{\gamma\delta}\eta_{\mu\nu} \right) - \frac{(1 - \xi_g)}{q^2} \left( q_\gamma q_\nu \eta_{\delta\mu} + q_\gamma q_\mu \eta_{\delta\nu} + q_\delta q_\nu \eta_{\gamma\mu} + q_\delta q_\mu \eta_{\gamma\nu} \right) \right], \quad (1.38)$$

la cual es idéntica a la expresión reportada en [33].

Los propagadores que surgen de cambiar el valor del parámetro  $\xi_g$  en la expresión (1.37) provienen en principio de la elección primordial  $\zeta = -\frac{1}{2}$  de modo que se les puede adjudicar un nombre compuesto, así que, por ejemplo, se puede definir el propagador de *Feynman-armónico* o el de *Landau-armónico* de la siguiente forma:

$$\text{Feynman } \xi_g \rightarrow 1: \quad \tilde{\Delta}_{\gamma\delta\mu\nu} = \frac{i}{q^2 + i\epsilon} G_{\gamma\delta\mu\nu}, \quad (1.39)$$

$$\text{Landau } \xi_g \rightarrow 0: \quad \tilde{\Delta}_{\gamma\delta\mu\nu} = \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left[ G_{\gamma\delta\mu\nu} - 2 \frac{I_{\gamma\delta\lambda\epsilon} q^\lambda q^\tau I_{\tau\mu\nu}^\epsilon}{q^2} \right]. \quad (1.40)$$

Si no se da una especificación adicional sobre el parámetro  $\xi_g$ , se referirá a la elección  $\zeta = -\frac{1}{2}$  simplemente como la norma armónica. Estos propagadores son bien comportados para calcular correcciones radiativas porque se hacen cero en el límite de  $q \rightarrow \infty$ .

### 1.3. Simetría BRST en 4 dimensiones

En esta sección se presenta el sector de ghost, de tipo vectorial, de la teoría de Einstein-Hilbert linealizada, el cual se obtiene a partir de la simetría BRST, mediante el formalismo campo-anticampo. También se incluye la discusión del sector de ghost para una teoría abeliana porque dicha teoría es analizada en el capítulo de mecanismos de generación de masa. Por simplicidad se omitirán los superíndices (0) durante la discusión general y se retoman en las expresiones finales.

La simetría BRST provee un método de cuantización para sistemas de norma generales [19]. La simetría BRST surge de manera natural con el formalismo campo-anticampo [39, 40]; para implementarlo, los parámetros de norma se incorporan como grados de libertad con estadística opuesta, después se introduce un anticampo por cada uno de los campos de la teoría y una carga conservada llamada número de ghost, de modo que los grados de libertad de la teoría son caracterizados por los campos de norma, ghost ( $C^\mu$ ), antighost ( $\bar{C}^\mu$ ) y campos auxiliares ( $B^\mu$ ). Además, se deben remover los anticampos de una manera no trivial.

La acción original  $S_0$  es una funcional de los campos de norma exclusivamente, a la cual se le agregará el término relacionado con los ghost para cuantizar la teoría apropiadamente. Se introduce un campo ghost por cada parámetro de norma, con los ghost con estadística opuesta a los parámetros de norma. Para fijar la norma y cuantizar la teoría es necesario introducir los pares triviales, llamados antighost y campos auxiliares. Sea  $\Phi^A$  que representa a los campos, por cada  $\Phi^A$ , un anticampo  $\Phi_A^*$  es introducido, con estadística opuesta a  $\Phi^A$ . Sea  $gh(\Phi^A)$  el número de ghost de  $\Phi^A$ , se define  $gh(\Phi_A^*) = -gh(\Phi^A) - 1$ . Los números de ghost correspondientes son: 0 para los campos de norma y auxiliares, +1 para los ghost y -1 para los antighost.

En este espacio de configuraciones extendido de campos y anticampos, una estructura simpléctica  $(,)$  es introducida, llamada antiparéntesis, considerando diferenciación izquierda ( $R$ ) y derecha ( $L$ ), definida para dos funcionales  $F$  y  $G$  como:

$$(F, G) = \frac{\delta_R F}{\delta \Phi^A} \frac{\delta_L G}{\delta \Phi_{*A}} - \frac{\delta_R F}{\delta \Phi_A^*} \frac{\delta_L G}{\delta \Phi^A}, \quad (1.41)$$

de lo cual se pueden definir, de manera análoga a los paréntesis de Poisson, los antiparéntesis fundamentales.  $\Phi^A$  y  $\Phi_A^*$  son variables conjugadas en el siguiente sentido:

$$(\Phi^A, \Phi_B^*) = \delta_B^A \quad (1.42)$$

$$(\Phi^A, \Phi^B) = (\Phi_A^*, \Phi_B^*) = 0. \quad (1.43)$$

La *acción extendida* es una funcional bosónica de los campos y anticampos,  $S[\Phi, \Phi^*]$ , con número de ghost cero, la cual satisface la ecuación maestra definida como:

$$(S, S) = 2 \frac{\delta_R S}{\delta \Phi^A} \frac{\delta_L S}{\delta \Phi_A^*} = 0. \quad (1.44)$$

Las transformaciones BRST son generadas por la acción extendida de la siguiente forma:

$$\delta_B \Phi^A = (\Phi^A, S) = \frac{\delta_L S}{\delta \Phi_A^*} \quad (1.45)$$

$$\delta_B \Phi_A^* = (\Phi_A^*, S) = -\frac{\delta_L S}{\delta \Phi^A}. \quad (1.46)$$

A su vez, la acción extendida  $S$  es invariante bajo dichas transformaciones debido a la ecuación maestra, es decir,  $\delta_B S = (S, S) = 0$ . Las soluciones de interés de la ecuación maestra son llamadas soluciones propias, las cuales cumplen la siguiente condición de frontera:

$$S[\Phi, \Phi^*] \Big|_{\Phi^*=0} = S_0[\phi] \quad (1.47)$$

donde  $\phi$  representa los campos originales, es decir, los campos de norma. Para la presente teoría, la solución propia  $S$  puede expresarse de la siguiente forma:

$$S[\Phi, \Phi^*] = S_0[\phi] + (\delta_B \Phi^A) \Phi_A^*, \quad (1.48)$$

la cual es una acción bosónica, con número de ghost cero. Ahora, para cuantizar la teoría se procede a fijar la norma ya que la acción extendida es degenerada. Ya que los anticampos no representan grados de libertad, deben ser removidos antes de cuantizar la teoría. Sin embargo, los anticampos no se pueden hacer simplemente cero pues  $S_0$  es degenerada. Los anticampos se pueden remover al introducir una funcional fermiónica de los campos,  $\Psi[\Phi]$ , con número de ghost  $-1$ , de modo que:

$$\Phi_A^* = \frac{\delta \Psi[\Phi]}{\delta \Phi^A}, \quad (1.49)$$

donde no es necesario distinguir entre diferenciación izquierda y derecha. La presencia de los pares triviales,  $\bar{C}^\mu$  y  $B^\mu$  es necesaria porque los únicos campos con número de ghost  $-1$  son los antighost. Como  $(\delta_B \Phi^A) \Phi_A^* = \delta \Psi[\Phi]$ , la solución propia toma la forma:

$$S[\Phi, \delta \Psi / \delta \Phi] = S_0[\phi] + \delta \Psi[\Phi]. \quad (1.50)$$

Esta es la acción con fijación de norma BRST, la cual no es degenerada y es invariante bajo las transformaciones BRST. Esta simetría residual que tiene la acción no degenerada también recibe el nombre de simetría BRST, la cual juega un papel central a nivel cuántico. Dicha simetría es la que originalmente descubrieron Becchi, Rouet y Stora, e independientemente Tyutin, a partir de 1974, [19]. Las transformaciones serán denotadas por  $\delta$ .

Para la presente teoría donde están involucrados los campos de norma de espín-2, representados de manera genérica por  $h^{\mu\nu}$  debemos definir la acción extendida, conformada por la solución propia más el término trivial. Como en el capítulo de mecanismos de generación de masa discutiremos una teoría abeliana para un campo denotado como  $A^\mu$ , también se incluirá la acción extendida de ese sector.

En el caso de gravedad linealizada, los parámetros de norma  $\xi^\mu$  se incorporan como grados de libertad con estadística opuesta  $\epsilon(C^\mu) = \epsilon(\xi^\mu) + 1$  y número de ghost  $gh[C^\mu] = +1$ . Se introduce el par trivial  $\bar{C}^\mu$  y  $B^\mu$  con las propiedades  $\epsilon(\bar{C}^\mu) = 1$ ,  $gh[\bar{C}^\mu] = -1$  y  $\epsilon(B^\mu) = 0$ ,  $gh[B^\mu] = 0$ . Entonces el espacio de configuración lo definen los siguientes campos:

$$\Phi^A = \{h^{\mu\nu}, C^\mu, \bar{C}^\mu, B^\mu\}, \quad (1.51)$$

y sus correspondientes anticampos con estadística opuesta:

$$\Phi_A^* = \{h_{\mu\nu}^*, C_\mu^*, \bar{C}_\mu^*, B_\mu^*\}. \quad (1.52)$$

De forma análoga, el espacio de configuración para la teoría del grupo abeliano es:

$$\Phi^A = \{A^\mu, C, \bar{C}, B\}, \quad (1.53)$$

y sus correspondientes anticampos con estadística opuesta:

$$\Phi_A^* = \{A_\mu^*, C^*, \bar{C}^*, B^*\}. \quad (1.54)$$

Así, la acción extendida, la cual es la suma de la solución propia más los términos triviales, es de la forma:

$$S[\Phi, \Phi^*] = \int d^4x \left[ \mathcal{L}_0 + h_{\mu\nu}^* (\partial^\mu C^\nu + \partial^\nu C^\mu) + \bar{C}_\mu^* B^\mu + A_\mu^* \partial^\mu C + \bar{C}^* B \right]. \quad (1.55)$$

En la acción anterior no existe un término que involucre a  $C_\mu^*$ , como si ocurre en Yang-Mills. Esta característica también la comparte la teoría abeliana de modo que no aparece el término que involucra a  $C^*$ . Para fijar la norma procedemos a expandir la acción de la siguiente forma:

$$S[\Phi, \Phi^*] = \int d^4x \left[ \mathcal{L}_0 + \frac{\delta\Psi}{\delta h^{\mu\nu}} \delta h^{\mu\nu} + \frac{\delta\Psi}{\delta C^\mu} \delta C^\mu + \frac{\delta\Psi}{\delta A^\mu} \delta A^\mu + \frac{\delta\Psi}{\delta C} \delta C \right] \quad (1.56)$$

La funcional  $\Psi[\Phi]$  fermiónica es proporcional a los antighost y debe tener número de ghost  $-1$ . Dicha funcional para los campos de la teoría de gravedad linealizada y abeliana es:

$$\Psi[\Phi] = \int d^4x \left[ \bar{C}^\mu \left( f_\mu - \frac{\xi_g}{2} B_\mu \right) - \bar{C} \left( f - \frac{\xi}{2} B \right) \right], \quad (1.57)$$

donde la función de fijación de norma  $f^\mu$  ( $f$ ), el parámetro de norma  $\xi_g$  ( $\xi$ ) y el campo auxiliar  $B^\mu$  ( $B$ ) están asociados con el grupo  $Diff(M^4)$  ( $U(1)$ ). La funcional  $\Psi[\Phi]$  está completamente definida hasta la elección de las funciones de fijación de la norma. Para poder calcular los propagadores de los campos de norma, las funciones deben tener la siguiente forma:

$$f^\lambda = \partial_\mu (h^{\mu\lambda} + \zeta \eta^{\mu\lambda} h), \quad f = \partial_\mu A^\mu. \quad (1.58)$$

Sustituyendo (1.58) en (1.57), se puede obtener las expresiones para los anticampos siguientes, para la teoría de espín-2 y espín-1, respectivamente:

$$h_{\mu\nu}^* = \frac{\delta\Psi}{\delta h^{\mu\nu}} = -(\partial_\mu \bar{C}_\nu + \zeta \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{C}_\rho) \quad (1.59)$$

$$\bar{C}_\mu^* = \frac{\delta\Psi}{\delta \bar{C}^\mu} = f_\mu - \frac{\xi_g}{2} B_\mu \quad (1.60)$$

$$B_\mu^* = \frac{\delta\Psi}{\delta B^\mu} = -\frac{\xi_g}{2} \bar{C}_\mu \quad (1.61)$$

$$A_\mu^* = \frac{\delta\Psi}{\delta A^\mu} = \partial_\mu \bar{C} \quad (1.62)$$

$$\bar{C}^* = \frac{\delta\Psi}{\delta \bar{C}} = -f + \frac{\xi}{2} B \quad (1.63)$$

$$B^* = \frac{\delta\Psi}{\delta B} = \frac{\xi}{2} \bar{C}. \quad (1.64)$$

Con los resultados anteriores, la acción (1.56) toma la forma:

$$S_\Psi = \int d^4x \left[ \mathcal{L}_0 - (\partial_\mu \bar{C}_\nu + \zeta \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{C}_\rho) (\partial^\mu C^\nu + \partial^\nu C^\mu) + B^\mu \left( f_\mu - \frac{\xi_g}{2} B_\mu \right) + \partial_\mu \bar{C} \partial^\mu C - B \left( f - \frac{\xi}{2} B \right) \right]. \quad (1.65)$$

Los campos auxiliares  $B^\mu$  y  $B$  aparecen sólo cuadráticamente, de modo que pueden ser removidos, utilizando las ecuaciones de movimiento, de modo que  $B^\mu = \frac{1}{\xi_g} f^\mu$ ,  $B = \frac{1}{\xi} f$  y tenemos lo siguiente:

$$S_\Psi = \int d^4x \left[ \mathcal{L}_0 - (\partial_\mu \bar{C}_\nu + \zeta \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{C}_\rho) (\partial^\mu C^\nu + \partial^\nu C^\mu) + \frac{1}{2\xi_g} f_\mu f^\mu + \partial_\mu \bar{C} \partial^\mu C - \frac{1}{2\xi} f^2 \right] \quad (1.66)$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_0 + \bar{C}_\mu [\eta^{\mu\nu} \partial^2 + (1 + 2\zeta) \partial^\mu \partial^\nu] C_\nu - \bar{C} \partial^2 C + \frac{1}{2\xi_g} f_\mu f^\mu - \frac{1}{2\xi} f^2 \right\}, \quad (1.67)$$

de esta expresión podemos identificar las lagrangianas de fijación de la norma y de ghosts. La lagrangiana de fijación de la norma se expresa de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\xi_g} f_\mu f^\mu - \frac{1}{2\xi} f^2 \quad (1.68)$$

$$= \frac{1}{2\xi_g} \partial^\mu (h_{\mu\lambda} + \zeta \eta_{\mu\lambda} h) \partial_\nu (h^{\nu\lambda} + \zeta \eta^{\nu\lambda} h) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.69)$$

La lagrangiana de ghost asociada a los campos de espín-2 está definida hasta la elección del parámetro  $\zeta$ , como se puede ver en la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_{FPG} = \bar{C}_\mu [\eta^{\mu\nu} \partial^2 + (1 + 2\zeta) \partial^\mu \partial^\nu] C_\nu - \bar{C} \partial^2 C. \quad (1.70)$$

La expresión del propagador del ghost vectorial a partir de (1.70) es:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{1 + 2\zeta}{2(1 + \zeta)} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \quad (1.71)$$

Por motivos de claridad a partir de aquí se utilizan los superíndices  $(0)$ . Recuérdese que se utilizó la norma armónica para calcular el propagador del gravitón  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , se puede notar que ambas expresiones anteriores se simplifican cuando  $\zeta = -\frac{1}{2}$ . Con esto último se concluye que la norma armónica tiene la particularidad de que ayuda a resolver las ecuaciones de Einstein linealizadas a nivel clásico y a su vez a nivel cuántico permite que los propagadores de los campos ghost se vean simplificados.

Por otra parte, si se quiere calcular el propagador del gravitón sin masa usando el parámetro  $\zeta = -1$  el propagador no está definido, así como el propagador de sus campos ghost, como se puede apreciar en la expresión (1.71). Que el propagador del gravitón se indefina ante el valor  $\zeta = -1$  tiene que ver con que si uno calcula el propagador del gravitón con el parámetro  $\zeta$  arbitrario, en su expresión también aparece un término proporcional a  $\frac{1}{1+\zeta}$ , como en la expresión del propagador del ghost. Esto se podrá ver cuando veamos la expresión del propagador masivo de espín-2 con la elección  $\zeta = -1$ , pues el límite de masa cero de dicha expresión diverge.

En conclusión, la lagrangiana de ghost para la presente teoría en la que se involucran  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  y  $A_\mu^{(0)}$ , en la norma armónica, es:

$$\mathcal{L}_{FPG} = \mathcal{L}_{FPGA^{(0)}} + \mathcal{L}_{FPGh^{(0)}}, \quad (1.72)$$

donde

$$\mathcal{L}_{FPGA^{(0)}} = -\bar{C}_A^{(0)} \partial^2 C_A^{(0)} \quad (1.73)$$

$$\mathcal{L}_{FPGh^{(0)}} = \bar{C}_\mu^{(0)} [\eta^{\mu\nu} \partial^2] C_\nu^{(0)}. \quad (1.74)$$

Los propagadores de los ghost vectorial  $\tilde{C}_\mu^{(0)}$  (en la norma armónica) y escalar  $\tilde{C}^{(0)}$  son, respectivamente:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2} \eta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\Delta}(p) = \frac{i}{p^2}. \quad (1.75)$$

Como se puede apreciar, el propagador del ghost vectorial es idéntico al propagador del fotón en la norma de Feynman-'t Hooft. Finalmente, recuérdese que una interpretación general de los ghost es que sirven como grados de libertad con estadística opuesta (que se cuantizan con anticonmutador), que cancelan los efectos de los estados de polarización espurios de los bosones de norma a partir de la simetría BRST. Sin embargo, como ocurre en las teorías abelianas, los ghost del gravitón no generan dinámica, pues no se acoplan al resto de los campos.

## Capítulo 2

# Mecanismos de generación de masa

Ya que los términos de masa explícitos para conexiones rompen la simetría de norma, es necesaria la implementación de un mecanismo de generación de términos masivos. Las dos opciones existentes son:

- El mecanismo de Englert-Higgs.
- El mecanismo de Kaluza-Klein.

En este capítulo se explican las características principales de ambos mecanismos en un modelo abeliano.

### 2.1. El mecanismo de Englert-Higgs (EHM)

El mecanismo por el cual el rompimiento espontáneo de una simetría (SSB, por sus siglas en inglés) genera la masa de un boson de norma fue explorado y generalizado al caso no abeliano por Higgs, Kibble, Gurelnik, Hagen, Brout y Engler. De acuerdo con el Modelo Estándar, el mecanismo de Higgs es responsable de la masa de los bosones de norma de la interacción débil ( $W^\pm$  y  $Z^0$ ). La partícula de Higgs es responsable además de las masas de quarks y leptones. Los ingredientes del mecanismo de Higgs (EHM) son:

- Rompimiento espontáneo de una simetría (SSB).
- Uso de la simetría local de norma.

Se procede a explicar el rompimiento espontáneo de una simetría. Sea  $\mathcal{G}$  un grupo de Lie, y  $H$  un subgrupo de  $\mathcal{G}$ , sus generadores pueden dividirse en dos conjuntos:

$$\underbrace{\{T^a\}}_{d_g} \longrightarrow \underbrace{\{T^{\bar{a}}\}}_{d_H}, \quad \underbrace{\{T^{\hat{a}}\}}_{d_g - d_H} \quad (2.1)$$

donde  $T^a$  son los  $d_g$  generadores de  $\mathcal{G}$ ,  $T^{\bar{a}}$  representa a los  $d_H$  generadores de  $H$  y  $T^{\hat{a}}$  son los  $d_g - d_H$  generadores que no generan a  $H$ .

Sea  $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r)$  una lagrangiana en una representación no trivial de campos escalares  $\phi_r$  de  $\mathcal{G}$  e invariante ante dicho grupo, también será invariante de su subgrupo  $H$ . Esto significa que los multipletes de campos  $\phi_r$  de  $\mathcal{G}$  pueden ser descompuestos en multipletes de campos de  $\phi_{\bar{s}}$  de  $H$  de modo que se puede definir  $\mathcal{L}(\phi_{\bar{s}}, \partial_\mu \phi_{\bar{s}})$ . Es legítimo definir una transformación de punto de  $\mathcal{G}$  en  $H$ . Ante dicho mapeo la simetría  $\mathcal{G}$  no se debe destruir, sino sólo ocultarse. Cuando la simetría  $\mathcal{G}$  es global, se puede presentar el fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría de  $\mathcal{G}$  en  $H$ . Sea  $\Phi$  un conjunto de campos escalares, dados en la representación fundamental del grupo  $\mathcal{G}$ ,

y sea  $\Phi_{min}$  el conjunto de campos que cumple las condiciones de energía mínima, para romper la simetría  $\mathcal{G} \rightarrow H$ , se elige una dirección particular. de modo que esta dirección sea dejada invariante por el grupo  $H$ , pero no por la acción de elementos de  $\mathcal{G}$  que no pertenecen a  $H$ , lo cual se puede establecer en términos de los generadores por:

$$T^{\hat{a}}\Phi_{min} = 0, \quad T^{\hat{a}}\Phi_{min} \neq 0. \quad (2.2)$$

En este sentido, se dice que los generadores  $T^{\hat{a}}$  han sido rotos a una escala de energía  $v$ , que será definida más adelante. Así, la esencia del rompimiento espontáneo de una simetría continua se sintetiza en lo que se conoce como el:

**Teorema de Goldstone:** *Asociado con cada generador roto  $T^{\hat{a}}$  de  $\mathcal{G}$  a la escala de energía  $v$ , hay un escalar de masa cero, llamado bosón de Goldstone. Además aparecen también campos escalares con masa.*

Ilustraremos el rompimiento espontáneo de la simetría  $U(1)$  global. Sea la lagrangiana invariante bajo dicho grupo:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^*(\partial^\mu \Phi) - V(\Phi^*, \Phi) \quad V(\Phi^*, \Phi) = \mu^2 \Phi^* \Phi + \lambda(\Phi^* \Phi)^2. \quad (2.3)$$

Definimos  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1(x) + i\Phi_2(x))$ , con  $\Phi_1(x)$  y  $\Phi_2(x)$  campos escalares reales, de esta forma:

$$\Phi^* \Phi = \frac{1}{2}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2). \quad (2.4)$$

Sea  $\lambda > 0$ , el estado base del sistema se puede conocer a partir de la configuración de campos que satisfaga:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi_j} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \Phi_j^*} = 0. \quad (2.5)$$

La expresión anterior implica la siguiente condición para los campos escalares:

$$\left[ \mu^2 + 2\lambda(\Phi^* \Phi) \right] \Phi_j = 0 \quad j = 1, 2. \quad (2.6)$$

Tenemos dos casos particulares; el primero cuando  $\mu^2 > 0$ , que implica que el mínimo de los campos es cero  $\Phi = 0$  en el cual se tiene una teoría de 2 campos escalares con masa  $\mu$ ; el segundo, el cual es degenerado y es de nuestro interés, ocurre cuando  $\mu^2 < 0$  de modo que  $\Phi = 0$  es un máximo local, mientras que al definir  $v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} > 0$  entonces  $\Phi^* \Phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$  representa una superficie de energía mínima. Dicha superficie es un círculo de radio  $v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$  dado por la expresión:  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 = v^2$ . En el caso de grupos con mayor cantidad de generadores se trataría de una hipersuperficie de energía mínima.

Como el estado base es degenerado y la degeneración es infinita romper la simetría significa elegir una dirección particular  $\Phi_o$  de dicho círculo que no dependa del espacio-tiempo.  $\Phi_o$  debe transformarse en la representación fundamental de  $U(1)$ . En coordenadas cartesianas el mínimo de energía se puede expresar de la siguiente forma:  $\Phi_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + i0) = \frac{v}{\sqrt{2}}$ , que cumple  $\Phi_o^* \Phi_o = \frac{v^2}{2}$ . Ahora se puede expandir la teoría en torno al mínimo elegido, sea  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + iG(x)]$  tenemos:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi_o + \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(v + H) + iG]. \quad (2.7)$$

Sustituyendo esto último en la lagrangiana (2.3), obtenemos una expresión donde aparece un término cinético para el escalar  $G(x)$ , pero no su término de masa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu G\partial^\mu G + \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 - \frac{\lambda}{4}G^4 - \frac{\lambda}{2}(2vH+H^2)G^2, \quad (2.8)$$

así, ante el rompimiento espontáneo de la simetría  $U(1)$  apareció un escalar sin masa  $G(x)$ , el cual podemos identificar como un bosón de Goldstone.

En cambio, cuando la simetría es de norma (local), surge el mecanismo de Higgs en presencia de campos de norma, además de los campos escalares que permiten el rompimiento espontáneo de la simetría. Se induce un mapeo entre los campos de norma de la siguiente forma:

$$\underbrace{\{A_\mu^a\}}_{d_g} \longrightarrow \underbrace{\{A_\mu^{\bar{a}}\}}_{d_H}, \quad \underbrace{\{A_\mu^{\hat{a}}\}}_{d_g-d_H} \quad (2.9)$$

En el grupo original  $\mathcal{G}$ , los campos  $A_\mu^a$  no pueden tener masa al ser campos de norma, lo mismo para los campos  $A_\mu^{\bar{a}}$  que son campos de norma bajo la perspectiva de  $H$ . En contraposición, los campos asociados a los generadores rotos  $A_\mu^{\hat{a}}$  pueden adquirir masa pues ahora se transforman tensorialmente bajo  $H$ , es decir, como campos de materia. En el caso de la simetría  $\mathcal{G}$  local los bosones de Goldstone ya no lo son más y se les denominan pseudo-bosones de Goldstone ya que representan grados de libertad espurios toda vez que pueden ser removidos con una norma específica conocida como la *norma unitaria*.

**Mecanismo de Higgs:** *Los bosones de Goldstone conforman la componente longitudinal de los bosones de norma. La cantidad de bosones de Goldstone es igual a la cantidad de generadores rotos y a su vez es igual al número de bosones de norma que adquieren masa.*

Para ilustrar el mecanismo de Higgs ahora supongamos que la teoría es de norma. Entonces, el modelo se compone de un escalar complejo, acoplado a un campo vectorial  $A^\mu$  que está incluido en el tensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Se define la derivada covariante como  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ , de tal modo que la lagrangiana invariante de norma es la siguiente:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi - V(\Phi^*, \Phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad V(\Phi^*, \Phi) = \mu^2 \Phi^* \Phi + \lambda(\Phi^* \Phi)^2. \quad (2.10)$$

Ahora se cambia la notación de  $G$  por  $G_A(x)$ , el subíndice  $A$  denota que está relacionado con el campo de norma  $A_\mu$ , como se explicará más adelante. Ahora sustituimos la expresión para  $\Phi_o + \Phi(x)$ , (2.7) en la lagrangiana (2.10) de modo que obtenemos un lagrangiana donde se involucran combinaciones entre los campos  $G_A$ ,  $A_\mu$  y  $H$ , de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)H^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu G_A + qvA_\mu)(\partial^\mu G_A + qvA^\mu) - \lambda vH^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 + \dots, \quad (2.11)$$

donde se omitieron algunos términos que no son de interés para la siguiente discusión. Identificamos los términos cuadráticos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)H^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu G_A + qvA_\mu)(\partial^\mu G_A + qvA^\mu), \quad (2.12)$$

los cuales son invariantes ante las siguientes transformaciones de norma:

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.13)$$

$$\delta H(x) = 0 \quad (2.14)$$

$$\delta G_A(x) = -qv \alpha(x). \quad (2.15)$$

Como la simetría  $\mathcal{G}$  es de norma (local), se tiene lo siguiente: existe el campo escalar masivo  $H$  con masa  $m_H^2 = 2\lambda v^2$  y el campo  $A_\mu$  y el bosón  $G_A$  tienen simetría de norma de acuerdo con las transformaciones (2.13) - (2.15). La redundancia de la teoría de norma se puede eliminar fijando la *norma unitaria*, donde las componentes de los bosones de Goldstone se hacen cero, de modo que los grados de libertad explícitos son mínimos. El campo  $G_A$  representa grados de libertad espurios y por ello se puede retirar de la teoría, por lo que también se le denomina *pseudo-bosón* de Goldstone.

La norma unitaria corresponde a la elección de  $G_A(x) = 0$  que deja a las transformaciones de norma de la forma:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.16)$$

$$H'(x) = H(x) \quad (2.17)$$

$$G'_A(x) = -qv \alpha(x). \quad (2.18)$$

Al implementar esta última transformación en la expresión (2.12) obtenemos una lagrangiana donde se presenta un escalar con masa que legítimamente podemos identificar como el *bosón de Higgs* y el campo de norma vectorial  $A^\mu$  que ha adquirido masa  $m = qv$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu, \quad (2.19)$$

de modo que se ha efectuado el mecanismo de Higgs: *los bosones de Goldstone forman la parte longitudinal de los bosones de norma*.

Lo anterior ocurrió en la norma unitaria; sin embargo, en teoría de perturbaciones, la norma unitaria tiene utilidad a nivel de árbol, pero genera problemas en el régimen UV, es decir en el cálculo de correcciones radiativas a partir de un loop. El problema se resuelve si se usan normas no unitarias como la norma  $R_\xi$ . El precio de usar una norma no unitaria es que los pseudo-bosones de Goldstone no se eliminen y en cambio se acoplan a los campos de la teoría. Al omitir los términos que involucran al bosón de Higgs  $H(x)$ , podemos ver que la lagrangiana toma la forma:

$$\mathcal{L}(A^\mu, G_A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu G_A \partial^\mu G_A + m \partial_\mu G_A A^\mu, \quad (2.20)$$

donde se aprecia que hay un término cinético para  $G_A$  y un término de mezcla entre  $G_A$  y  $A_\mu$ . Dicho término de mezcla debe ser eliminado, pues su presencia impide definir el propagador de  $A_\mu$ . Así, un objetivo particular, es remover los acoplamientos no físicos provenientes del EHM. Además, la libertad de norma permite modificar la teoría original en una forma no trivial. Con esto en mente, y haciendo referencia al formalismo campo-anticampo visto en la sección 1.3, la parte de la funcional  $\Psi$  (1.57) relacionada con el grupo abeliano ( $U(1)$ ), está completamente definida hasta la elección de las funciones de fijación de la norma  $f$ , que para nuestros propósitos tiene la forma:

$$f = \partial_\mu A^\mu - \xi m G_A, \quad (2.21)$$

la cual es una norma lineal,  $\xi$  es el parámetro real de norma, y genera una lagrangiana de fijación de norma que se despliega como sigue:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} f^2 = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + m G_A \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{2} \xi m^2 G_A^2. \quad (2.22)$$

Así, podemos ver el resultado de  $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{gf}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A^\mu, G_A) + \mathcal{L}_{gf} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu G_A \partial^\mu G_A - \frac{1}{2} \xi m^2 G_A^2 \\ & + m \partial_\mu G_A A^\mu + m G_A \partial_\mu A^\mu, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde se puede apreciar que los últimos dos términos donde surgen los acoplamientos entre el pseudo-bosón de Goldstone  $G_A$  y  $A^\mu$  se cancelan hasta un término de superficie, lo cual se requería. También se puede observar que el pseudo-bosón de Goldstone tiene un término de masa no físico  $\xi m^2$ . Además el término de fijación de norma proporcional a  $(2\xi)^{-1}$  permite calcular el propagador del bosón de norma vectorial masivo, cuya expresión se presenta en la siguiente sección.

Por otra parte, como se esperaba,  $G_A$  no desaparece de la teoría y tiene una acción, propia de un escalar, de la forma:

$$\mathcal{S}_{G_A}(x) = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu G_A \partial^\mu G_A - \frac{1}{2} \xi m^2 G_A^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^4x G_A (-\partial^2 - \xi m^2) G_A \quad (2.24)$$

Sea  $k$  el 4-momento de  $G_A$ , al aplicar la transformada de Fourier a la lagrangiana anterior, se obtiene en el espacio de momentos lo siguiente:

$$\mathcal{S}_{G_A}(k) = \frac{1}{2} \int d^4k \tilde{G}_A (k^2 - \xi m^2) \tilde{G}_A. \quad (2.25)$$

Sea  $D(k) = (k^2 - \xi m^2)$ , el propagador de  $G_A$  denotado como  $\tilde{D}(k)$  se define como el inverso de  $D(k)$ , de tal modo que cumplen la relación:  $D(k)\tilde{D}(k) = i$ . Así el propagador de  $G_A$  es de la forma:

$$\tilde{D}(k) = \frac{i}{k^2 - \xi m^2 + i\epsilon} \quad (2.26)$$

Con respecto al mecanismo de Higgs y a las partículas de espín-2 se sabe que en el rompimiento espontáneo de la simetría local sobreviven bosones masivos de espín-2 y escalares masivos. 't Hooft exploró esta idea, al utilizar un conjunto de coordenadas preferentes que rompen el grupo de transformaciones generales y encontró que es posible que en adición al objeto de espín-2 masivo surjan escalares que puedan tener un propagador anómalo de modo que se puede violar unitariedad por lo que los escalares deben ser removidos de la teoría y propone hacerlo modificando

el sector de materia de la lagrangiana de modo que los escalares se desacoplen [27].

En esta sección se usó la notación  $\mathcal{G}$  para el grupo original de la teoría, para no confundir con la notación del bosón de Goldstone  $G(x)$ ; sin embargo, en la siguiente sección se cambiará la notación de los bosones (y pseudo-bosones) de Goldstone por lo que nos referiremos al grupo original de la teoría con la letra  $G$ .

## 2.2. El mecanismo de Kaluza-Klein (KKM)

En la sección anterior se discutió el mecanismo de Higgs, el cual permite dotar de masa a bosones de norma. El mecanismo de Higgs hace uso de la noción del rompimiento espontáneo de la simetría  $G$  en la simetría  $H$ , con  $H \subset G$ . En el proceso, el concepto de ocultamiento de una simetría juega un papel central. El rompimiento espontáneo de la simetría  $G$  en la simetría  $H$ , lo cual suele denotarse por  $G \rightarrow H$ , requiere de una transformación de punto que acomoda los objetos covariantes de  $G$  en objetos covariantes de  $H$ . En esta sección se discute otro mecanismo que permite dotar de masa a campos de norma a través de la compactificación de coordenadas espaciales extra. Este mecanismo el cual llamaremos mecanismo de Kaluza-Klein (KKM), tiene algunas similitudes con el mecanismo de Higgs.

Considere una teoría de campos definida en un espacio-tiempo plano de dimensión  $d = 4 + n$ , caracterizado por la variedad  $\mathcal{M}^d = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ , con  $\mathcal{M}^4$  la variedad 4-dimensional usual y  $\mathcal{N}^n$  una variedad euclidiana  $n$ -dimensional. Los puntos en esta variedad son denotados por  $(x, \bar{x}) \in (\mathcal{M}^d)$ , con  $x \in \mathcal{M}^4$  y  $\bar{x} \in \mathcal{N}^n$ . Sea  $G(\mathcal{M}^4)$  el grupo de norma de la teoría 4-dimensional e  $ISO(1, 3)$ , el grupo de Poincaré 4-dimensional usual. Entonces, la teoría 4-dimensional, es gobernada por el grupo  $ISO(1, 3) \times G(\mathcal{M}^4)$ , el cual llamaremos el grupo usual o el grupo estándar. Suponga que todos los campos definidos en la variedad  $\mathcal{M}^4$  se promueven a campos definidos en la variedad extendida  $\mathcal{M}^d$ . Los campos son ahora objetos covariantes del grupo extendido  $ISO(1, 3 + n) \times G(\mathcal{M}^{4+n})$ . Suponga que esta descripción surge de una teoría más fundamental, la cual es válida a una escala de energías  $\Lambda$ , cuya escala de distancias imperante  $\Lambda^{-1}$  es mucho menor que el tamaño promedio  $R$  de las dimensiones extra,  $\Lambda^{-1} \ll R$ . En este dominio de energías, las distancias exploradas son tan pequeñas, que hace que las dimensiones extras luzcan como si realmente fueran infinitas. Entonces, tiene sentido suponer que la teoría de campos en  $d$  dimensiones es gobernada por el grupo extendido  $ISO(1, 3 + n) \times G(\mathcal{M}^{4+n})$ . Observe que los grupos  $G(\mathcal{M}^{4+n})$  y  $G(\mathcal{M}^4)$  difieren no como grupos de Lie, ya que tienen el mismo número de generadores, sino como grupos de norma, ya que difiere el número de conexiones.

Dado que las teorías en dimensiones mayor que 4 no son renormalizables por conteo de potencias, la acción de la teoría es dada por una lagrangiana infinita que contiene términos de todas las dimensiones canónicas, que son invariantes bajo el grupo extendido  $ISO(1, 3 + n) \times G(\mathcal{M}^{4+n})$ . Denotando genéricamente a los campos por  $\varphi_N(x, \bar{x})$ , la acción efectiva puede se escrita como

$$S_d[\varphi_N] = \int d^4x d^n\bar{x} \left\{ \mathcal{L}_d(\varphi_N, D_N\varphi_M) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_s}{\Lambda^s} O^{(d+s)}(\varphi_M, D_N\varphi_M) \right\}, \quad (2.27)$$

donde  $\mathcal{L}_d$  es la versión  $d$ -dimensional de la teoría 4-dimensional, la cual tiene dimensión canónica igual a  $d$  (unidades de masa o energía), mientras que las  $O^{d+s}$  son invariantes de dimensión  $d+s$ , con los  $\alpha_s$  parámetros adimensionales.

La idea esencial es llevar esta teoría a una forma adecuada para estudiar los fenómenos físicos que ocurren a las siguientes dos escalas: la escala natural de la teoría 4-dimensional y la escala de compactificación  $R^{-1}$ , suponiendo que dichas escalas no están muy separadas entre sí, pero que ambas están muy por debajo de la escala  $\Lambda$ .

Para llevar a cabo este programa es necesario ocultar la simetría extendida  $ISO(1, 3 + n) \times G(\mathcal{M}^{4+n})$  en la simetría estándar  $ISO(1, 3) \times G(\mathcal{M}^4)$ . El ocultamiento de la simetría extendida en la simetría estándar requiere de dos transformaciones de punto [18], las cuales discutiremos a continuación.

Un primer mapeo de punto consiste en acomodar objetos covariantes del grupo de Lorentz extendido  $SO(1, 3+n)$ , en objetos covariantes de sus dos subgrupos, a saber, el grupo de Lorentz estándar  $SO(1, 3)$  y el grupo ortogonal  $SO(n)$  definido en la variedad euclidiana  $\mathcal{N}^n$ . Este mapeo lo denotaremos por:

$$SO(1, 3+n) \rightarrow SO(n). \quad (2.28)$$

Este mapeo es relativamente simple. Los campos resultantes del primer mapeo son funciones de las coordenadas extras  $\bar{x}$ , así que se requiere de otro mapeo de punto que nos permita remover la dependencia de estas coordenadas. Este mapeo no es trivial debido a que las coordenadas  $\bar{x}$  enumeran grados de libertad. El objetivo es remover todo papel dinámico del grupo  $ISO(n)$  definidos en la variedad euclidiana  $\mathcal{N}^n$ . Con otras palabras, se trata de ocultar la simetría  $ISO(n)$ . Lo anterior se logra ocultando la simetría del grupo de las traslaciones extendido  $T(1, 3+n)$  en el grupo de las traslaciones estándar  $T(1, 3)$ . Esquemáticamente,

$$T(1, 3+n) \rightarrow T(1, 3). \quad (2.29)$$

El mapeo es dado a través de una serie de Fourier general. Ilustramos las ideas principales con el caso de una teoría abeliana. Nos enfocaremos en la versión  $d$ -dimensional de la teoría, ya que es la parte dominante en (2.27), debido a que no depende de la escala  $\Lambda$ .

La teoría abeliana en  $d$ -dimensiones, invariante bajo el grupo  $ISO(1, 3+n) \times U(1, \mathcal{M}^{4+n})$  es dada por la acción:

$$\mathcal{S}_{Ad}[A_M] = -\frac{1}{4} \int d^4x d^n\bar{x} F_{MN}(x, \bar{x}) F^{MN}(x, \bar{x}), \quad (2.30)$$

donde  $F_{MN} = \partial_M A_N(x, \bar{x}) - \partial_N A_M(x, \bar{x})$ . El primer mapeo es dado por:

$$SO(1, 3+n) \longrightarrow SO(1, 3) \times SO(n) \quad (2.31)$$

$$A_M(x, \bar{x}) \longrightarrow \{A_\mu(x, \bar{x}), A_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})\} \quad (2.32)$$

$$\alpha(x, \bar{x}) \longrightarrow \alpha(x, \bar{x}) \quad (2.33)$$

$$F_{MN}(x, \bar{x}) \longrightarrow \{F_{\mu\nu}(x, \bar{x}), F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}), F_{\bar{\mu}\nu}(x, \bar{x})\}, \quad (2.34)$$

con  $\alpha(x, \bar{x})$  el parámetro del grupo abeliano. Note que  $A_\mu(A_{\bar{\nu}})$  es un vector (escalar) de  $SO(1, 3)$  y un escalar (vector) de  $SO(n)$ . En tanto que,  $F_{\mu\nu}$  es un 2-tensor (0-tensor) de  $SO(1, 3)(SO(n))$  y  $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$  es una escalar (2-tensor) de  $SO(1, 3)(SO(n))$ .

Hasta aquí no se ha supuesto nada sobre la compacticidad de la variedad extra. Para implementar el segundo mapeo, suponga que un esquema de compactificación ha sido implementado, pero sin especificar su geometría por el momento. Considere un conjunto completo de funciones ortonormales  $\{f(\bar{x})\}$ , definidas en la variedad compacta, el cual es generado por un operador hermitiano, que definiremos más adelante. El *segundo mapeo* consiste en expresar a los campos  $A_\mu(x, x), A_{\bar{\mu}}(x, x)$ , así como el parámetro de norma  $\alpha(x, x)$ , en términos de la base  $\{f^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$ , esto es, descomponerlos en una serie de Fourier general, en la que los coeficientes de Fourier representan los grados de libertad de la teoría. Estos coeficientes de Fourier reciben el nombre de excitaciones de Kaluza-Klein (KK). Es importante notar que no todos los campos tienen contraparte estándar. En el caso que nos ocupa,  $A_\mu(x, \bar{x})$  tiene contraparte estándar, pero  $A_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})$  no la tiene (la teoría libre de Maxwell usual no tiene campos escalares).

El parámetro de norma tiene contraparte estándar. Entonces necesitamos un criterio que nos permita hacer contacto con la teoría usual, es decir, nuestra teoría efectiva debe contener a la teoría abeliana usual. Es evidente que

los coeficientes de Fourier que correspondan a los campos estándar no deben depender de los detalles geométricos de la variedad compacta. Dado que el conjunto ortonormal  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$  contiene, en general, a la función constante, es claro que los campos estándar deben apuntar en esta dirección. Los campos sin contraparte estándar no deben tener componente en esta dirección, pero dado que la función constante es par, conviene introducir una operación de paridad  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$ , en la variedad compacta. Con base en este criterio, podemos dividir la base  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$  en dos sub-bases, una par  $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x})\}$  y una impar  $\{f_O^{(m)}(\bar{x})\}$ . Suponemos que los campos, además de ser periódicos en la variedad compacta, tienen paridad definida bajo  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$ . Entonces, postulamos que todo campo con contraparte estándar es par (en esta categoría cae el parámetro de norma, mientras que todo campo sin contraparte estándar es impar). La paridad de los diversos objetos de la teoría en consideración es:

$$A_\mu(x, -\bar{x}) = A_\mu(x, \bar{x}), \quad A_{\bar{\mu}}(x, -\bar{x}) = -A_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}), \quad \alpha(x, -\bar{x}) = \alpha(x, \bar{x}). \quad (2.35)$$

De estas paridades se deduce que:

$$F_{\mu\nu}(x, -\bar{x}) = +F_{\mu\nu}(x, \bar{x}), \quad (2.36)$$

$$F_{\mu\bar{\nu}}(x, -\bar{x}) = -F_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}), \quad (2.37)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, -\bar{x}) = +F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}). \quad (2.38)$$

Las series de Fourier correspondientes son:

$$A_\mu(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} A_\mu^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) A_\mu^{(m)}(x), \quad (2.39)$$

$$A_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x), \quad (2.40)$$

$$\alpha(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} \alpha^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \alpha^{(m)}(x). \quad (2.41)$$

Nótese que las transformaciones anteriores producen una curvatura  $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$  par, sin embargo, el modo cero no existe, en el caso de una teoría abeliana, es decir  $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)} = 0$ , así las series de Fourier para las curvaturas son:

$$F_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} F_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) F_{\mu\nu}^{(m)}(x), \quad (2.42)$$

$$F_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x), \quad (2.43)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x). \quad (2.44)$$

Los grados de libertad de la teoría son dados por los coeficientes de Fourier:

$$A_\mu^{(0)}(x) = \int d^n f_E^{(0)} A_\mu(x, \bar{x}), \quad (2.45)$$

$$A_\mu^{(m)}(x) = \int d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{x}) A_\mu(x, \bar{x}), \quad (2.46)$$

$$A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = \int d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{x}) A_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}). \quad (2.47)$$

Estas expresiones establecen de manera explícita que el mapeo es invertible de modo que la física se puede ver a través de dos ventanas energéticas. La simetría más grande no se pierde, se oculta. Después del primer mapeo, la acción (2.30) toma la forma:

$$\mathcal{S}_d[A_\mu, A_{\bar{\mu}}] = -\frac{1}{4} \int d^d x \left[ F_{\mu\nu}(x, \bar{x}) F^{\mu\nu}(x, \bar{x}) - 2F_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) F^{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) + F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \right], \quad (2.48)$$

la cual, después de efectuar el segundo mapeo, se convierte en:

$$S[A_\mu^{(0)}, A_\mu^{(m)}, A_{\bar{\mu}}^{(m)}] = -\frac{1}{4} \int d^4 x \left\{ F_{\mu\nu}^{(0)}(x) F^{(0)\mu\nu}(x) + \sum_{(m)} \left[ F_{\mu\nu}^{(m)}(x) F^{(m)\mu\nu}(x) - 2F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) F^{(m)\mu\bar{\nu}}(x) + F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) \right] \right\}. \quad (2.49)$$

En las expresiones que aparecen en (2.49),

$$F_{\mu\nu}^{(0)} = \partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)}, \quad (2.50)$$

es la curvatura usual de Maxwell, lo que muestra que el primer término en (2.49) corresponde a la teoría libre usual del grupo abeliano. Además,

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x) = \partial_\mu A_\nu^{(m)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(m)}(x), \quad (2.51)$$

$$F_{\mu\bar{\nu}}^{(k)}(x) = \partial_\mu A_{\bar{\nu}}^{(k)}(x) - \sum_{(m)} \left( \int d^n \bar{x} f_O^{(k)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\nu}} f_E^{(m)}(\bar{x}) \right) A_\mu^{(m)}(x), \quad (2.52)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(k)}(x) = \sum_{(m)} \left[ \int d^n \bar{x} (\delta_{\bar{\nu}\bar{\rho}} \delta_{\bar{\mu}\bar{\lambda}} - \delta_{\bar{\mu}\bar{\rho}} \delta_{\bar{\nu}\bar{\lambda}}) f_E^{(k)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\lambda}} f_O^{(m)}(\bar{x}) \right] A_{\bar{\rho}}^{(m)}(x), \quad (2.53)$$

se puede observar que (2.51) es una réplica de (2.50). Por otra parte, en (2.52) vemos la presencia de un término lineal en el campo  $A_\mu^{(m)}(x)$ , así que en el término cuadrático que aparece en (2.49) se genera un término de masa para este campo. La masa del campo en consideración es dada por:

$$\int d^n \bar{x} f_O^{(k)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\nu}} f_E^{(m)}(\bar{x}). \quad (2.54)$$

Note que  $\partial_{\bar{\nu}} f_E^{(m)}(\bar{x})$  es impar, así que esta integral no es cero. Observe que la masa surge como consecuencia de aplicar la derivada  $\partial_{\bar{\nu}}$  sobre el conjunto completo de funciones de  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$ , el cual se supuso que es generado por un operador hermitiano. Tómese en cuenta que los generadores  $P_{\bar{\mu}}$  del grupo de las traslaciones en el espacio euclidiano  $\mathcal{N}^n$ ,  $T(n)$  satisface el álgebra de Lie:

$$[P_{\bar{\mu}}, P_{\bar{\nu}}] = 0 \quad (2.55)$$

y que en el espacio de las coordenadas, actúa, salvo un factor que corrige unidades, como

$$P_{\bar{\mu}} \rightarrow \partial_{\bar{\mu}}, \quad (2.56)$$

más adelante, regresaremos sobre este punto.

Como se puede apreciar de (2.53),  $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x)$  es lineal en los campos escalares, así que el término cuadrático que aparece en (2.49) genera las masas de los campos escalares  $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$ . De las expresiones (2.52) y (2.53) es claro que para definir las masas de los campos para  $A_{\mu}^{(m)}(x)$  y  $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$  es necesario especificar el conjunto de funciones  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$ , para lo cual es necesario especificar la geometría de la variedad compacta. Antes de ello, conviene especificar la naturaleza de los campos  $A_{\mu}^{(0)}(x)$ ,  $A_{\mu}^{(m)}(x)$  y  $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$  con respecto al grupo de norma usual  $U(1, \mathcal{M}^4)$ . Debe notarse que el pasar del grupo extendido  $U(1, \mathcal{M}^{4+n})$  al grupo estándar  $U(1, \mathcal{M}^4)$  está implícito en los mapeos realizados en el espacio-tiempo.

Para clasificar estos campos con respecto al grupo  $U(1, \mathcal{M}^4)$ , el punto de partida es la transformación de norma del grupo extendido  $U(1, \mathcal{M}^{4+n})$ ,

$$\delta A_M(x, \bar{x}) = \partial_M \alpha(x, \bar{x}). \quad (2.57)$$

Después del primer mapeo, esta relación es desdoblada en:

$$\delta A_{\mu}(x, \bar{x}) = \partial_{\mu} \alpha(x, \bar{x}), \quad (2.58)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = \partial_{\bar{\mu}} \alpha(x, \bar{x}). \quad (2.59)$$

Aplicando el segundo mapeo, tomando en cuenta la paridad de los campos y parámetros del grupo, junto con la ortonormalidad del conjunto de funciones  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$ , tenemos:

$$\delta A_{\mu}^{(0)}(x) = \partial_{\mu} \alpha^{(0)}(x), \quad (2.60)$$

$$\delta A_{\mu}^{(m)}(x) = \partial_{\mu} \alpha^{(m)}(x), \quad (2.61)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(k)} = \sum_{(m)} \left( \int d^n \bar{x} f_O^{(k)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\mu}} f_E^{(m)}(\bar{x}) \right) \alpha^{(m)}(x). \quad (2.62)$$

De estas expresiones podemos ver que hay dos tipos de transformaciones, unas generadas por el parámetro  $\alpha^{(0)}(x)$  y otras generadas por los parámetros  $\alpha^{(m)}(x)$ . Llamaremos transformaciones de norma estándar (SGT's, por sus siglas en inglés) a aquellas que se obtienen cuando se toman a los parámetros excitados como  $\alpha^{(m)}(x) = 0$ . Esto en el sentido de que la primera de las ecuaciones (2.60) es justamente la transformación de norma usual. Así las SGT's conducen a:

$$\delta_s A_{\mu}^{(0)} = \partial_{\mu} \alpha^{(0)}, \quad (2.63)$$

$$\delta_s A_{\mu}^{(m)} = 0, \quad (2.64)$$

$$\delta_s A_{\bar{\mu}}^{(m)} = 0, \quad (2.65)$$

lo cual nos dice que  $A_{\mu}^{(0)}$  es el campo de norma asociado con el campo usual  $U(1, \mathcal{M}^4)$ , mientras que  $A_{\mu}^{(m)}$ ,  $A_{\bar{\mu}}^{(m)}$  se transforman como escalares (invariantes) bajo este grupo. Este hecho es importante ya que nos dice que los términos de masa de estos campos son compatibles con la simetría  $U(1, \mathcal{M}^4)$ . A las transformaciones generadas por los parámetros  $\alpha^{(m)}(x)$ , las denominaremos transformaciones de norma (son de norma) no estándar (NSGT's, por sus siglas en inglés) para distinguirlas de las transformaciones de norma asociadas del grupo  $U(1, \mathcal{M}^4)$ , y hacen patente el hecho de que existe una simetría más grande, a saber, el grupo extendido  $U(1, \mathcal{M}^{4+n})$ . Los parámetros

$\alpha^{(m)}(x)$  son los análogos a los del mecanismo de Higgs que están asociados con los generadores rotos. Las NSGT's también están presentes en el mecanismo de Higgs.

Las NSGT's están dadas por:

$$\delta_{ns} A_{\mu}^{(0)} = 0, \quad (2.66)$$

$$\delta_{ns} A_{\mu}^{(m)} = \partial_{\mu} \alpha^{(m)}, \quad (2.67)$$

$$\delta_{ns} A_{\bar{\mu}}^{(k)} = \sum_{(m)} \left( \int d^n \bar{x} f_O^{(k)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\mu}} f_E^{(m)}(\bar{x}) \right) \alpha^{(m)}(x). \quad (2.68)$$

Finalmente, de la invariancia de  $F_{MN}(x, \bar{x})$  bajo el grupo extendido  $U(1, \mathcal{M}^{4+n})$ , se deduce que las curvaturas  $F_{\mu\nu}^{(0)}$ ,  $F_{\mu\nu}^{(m)}$ ,  $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}$  y  $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}$ , son todas invariantes tanto bajo SGT's como NSGT's.

Regresando al tema de la definición específica del conjunto completo de funciones  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$ , considere a los generadores del grupo de las traslaciones  $T(n)$  como operadores hermitianos  $P_{\bar{\mu}}^{\dagger} = P_{\bar{\mu}}$ , con ecuación de eigenvalores dada por:

$$P_{\bar{\mu}} |p_{\bar{\mu}}\rangle = p_{\bar{\mu}} |p_{\bar{\mu}}\rangle. \quad (2.69)$$

Como consecuencia de la hermiticidad de  $P_{\bar{\mu}}$ , la base que genera  $\{|p_{\bar{\mu}}\rangle\}$  es ortogonal y los eigenvalores  $p_{\bar{\mu}}$  son reales. Ahora los eigenkets de  $P_{\bar{\mu}}$  son también eigenkets del invariante de Casimir  $\bar{P}^2 = P_{\bar{\mu}} P_{\bar{\mu}}$  del grupo. Esto es

$$\bar{P}^2 |p_{\bar{\mu}}\rangle = \bar{p}^2 |p_{\bar{\mu}}\rangle = p_{\bar{\mu}} p_{\bar{\mu}} |p_{\bar{\mu}}\rangle. \quad (2.70)$$

Hasta aquí, nada se ha supuesto sobre la variedad espacial, la cual se supone compacta, ya que estamos en el espacio lineal generado por la observable  $\bar{P}^2$ . Note que, en general, el espectro  $p_{\bar{\mu}}$  puede ser continuo, de hecho, esto es lo que ocurre cuando vinculamos este espacio de momentos con un espacio de coordenadas infinito. Pero en nuestro caso, tal espacio de coordenadas es finito.

Sea  $\hat{X}_{\bar{\mu}}$ , el operador de posición en el espacio de coordenadas, el cual se supone que es hermitiano. La ecuación fundamental es:

$$\hat{X}_{\bar{\mu}} |x_{\bar{\mu}}\rangle = x_{\bar{\mu}} |x_{\bar{\mu}}\rangle, \quad (2.71)$$

con  $x_{\bar{\mu}}$  reales y  $\{|x_{\bar{\mu}}\rangle\}$  una base completa. En la base de las coordenadas  $\{|x_{\bar{\mu}}\rangle\}$ , la base de los momentos  $\{|p_{\bar{\mu}}\rangle\}$  es representada por las eigenfunciones:

$$f(\bar{x}) = \langle x_{\bar{\mu}} | p_{\bar{\mu}} \rangle. \quad (2.72)$$

En la base de las coordenadas, la ecuación (2.70) toma la forma:

$$\bar{\nabla}^2 f(\bar{x}) = -\bar{p}^2 f(\bar{x}), \quad (2.73)$$

cuyas soluciones son ondas planas si el espacio es infinito, lo cual da lugar a un espectro continuo  $p_{\bar{\mu}}$ . La situación cambia radicalmente si el espacio es finito, como en nuestro caso, ya que las soluciones deben satisfacer condiciones de frontera finitas, lo cual da lugar a un espectro discreto de momentos  $p_{\bar{\mu}}^{(m)}$ , y con ello el invariante  $p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\mu}}^{(m)} = m_{(m)}^2$ . Falta definir la geometría de la variedad compacta. No es nuestra intención profundizar en las sutilezas que involucra un proceso de compactificación, sino que nos restringimos a mencionar los pasos esenciales. El caso considerado aquí puede ser consultado en las referencias [18].

En un primer paso, se considera una variedad en la que cada una de las  $n$  coordenadas es unida en sus puntos extremos para formar un círculo  $S^1$  de radio  $R$  (no confundir con el escalar de Ricci que comparte la misma notación). Se supone por simplicidad, que todas las coordenadas tienen el mismo tamaño. Así, nuestra variedad es el  $n$ -toro:

$$\underbrace{S^1 \otimes S^1 \otimes \dots \otimes S^1}_{n \text{ factores}} \quad (2.74)$$

Pero para introducir la paridad, se incorpora el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_2$ , el cual asigna a cada punto del círculo  $x_{\bar{\nu}}$  su antípoda  $-x_{\bar{\nu}}$ . Entonces, nuestra variedad es el producto directo de  $n$  orbifolds  $S^1/\mathbb{Z}_2$  [22], esto es,

$$\mathcal{N}^n \rightarrow \underbrace{\frac{S^1}{\mathbb{Z}} \times \dots \times \frac{S^1}{\mathbb{Z}}}_{n \text{ veces}} \quad (2.75)$$

Esto en realidad nos lleva a segmentos de recta. Así, las funciones impares son dadas por senos  $f_{\mathcal{O}}(p_{\bar{\mu}}x_{\bar{\mu}}) = \text{sen}(p_{\bar{\mu}}x_{\bar{\mu}})$  sujetos a satisfacer condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\text{sen}(p_{\bar{\mu}}x_{\bar{\mu}}) \Big|_0^{2\pi R} = 0, \quad (2.76)$$

lo cual implica que  $p_{\bar{\mu}}$  es:

$$p_{\bar{\mu}}^{(m)} = \left( \frac{k_1}{R}, \frac{k_2}{R}, \dots, \frac{k_n}{R} \right), \quad (2.77)$$

con  $k_1, k_2, \dots$ , números naturales. Por lo tanto

$$p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\mu}}^{(m)} = \left( \frac{k_1}{R} \right)^2 + \left( \frac{k_2}{R} \right)^2 + \dots + \left( \frac{k_n}{R} \right)^2 = m_{(m)}^2. \quad (2.78)$$

Las funciones pares son cosenos, los cuales satisfacen las condiciones de frontera de Neumann:

$$\partial_{\bar{\mu}} f_E(p_{\bar{\mu}}x_{\bar{\mu}}) \Big|_0^{2\pi R} = 0, \quad (2.79)$$

que se satisfacen con los  $p_{\bar{\mu}}^{(m)}$  discretas dadas antes. Note que la función constante corresponde al estado con  $p_{\bar{\mu}} = 0$ , esto es,

$$f_E^{(0)} = \langle x_{\bar{\mu}} | 0 \rangle. \quad (2.80)$$

El conjunto completo de funciones  $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{x})\}$  está dado en el Apéndice A.

Regresando a las expresiones  $F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x)$  y  $F_{\bar{\mu}\nu}^{(m)}(x)$ , dadas por las ecuaciones (2.52) y (2.53), vemos que una vez usado el conjunto ortonormal de funciones, toman la forma:

$$F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)} = \partial_\mu A_{\delta\nu}^{(m)} + p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_\mu^{(m)}, \quad (2.81)$$

$$F_{\bar{\mu}\nu}^{(m)} = p_{\bar{\mu}}^{(m)} A_\nu^{(m)} - p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_{\bar{\mu}}^{(m)}. \quad (2.82)$$

Usando estos resultados, podemos escribir la ecuación (2.49) en términos de la siguiente lagrangiana efectiva:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} + \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} \right] \\ & + \sum_{(m)} p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[ \partial_\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)} \partial^\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)} - A_{\bar{\mu}}^{(m)} \mathcal{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} A_{\bar{\nu}}^{(m)} \right], \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde se ha definido la matriz de masa  $\mathcal{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = m_{(m)}^2 \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\nu}}^{(m)}$ , de la cual la traza

$$Tr[\mathcal{M}] = \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathcal{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = (n-1) m_{(m)}^2, \quad (2.84)$$

revela que de los  $n$  campos escalares debido a  $n$  dimensiones extra, uno tiene masa cero y  $n-1$  tienen masa degenerada, idéntica a la que adquiere el bosón de norma. Como los índices con barra toman valores  $\bar{\mu} = 5, 6, \dots, d$ , a los escalares  $A_{\bar{\mu}}^{(m)}$  que tienen masa se les asocia subíndices  $\bar{n} = 5, 6, \dots, d-1$  y el no masivo tendrá el subíndice  $G = d$  asociado al hecho de que  $A_G^{(m)}$  es un pseudo-bosón de Goldstone. La transformación para pasar a eigenestados de masa es ortogonal y cumple las relaciones [17]:

$$\mathcal{O}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'} p_{\bar{\mu}'}^{(m)} = m_{(m)} \delta_{\bar{\mu}G}, \quad A_{\bar{\mu}}^{(m)} = \mathcal{O}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'} A_{\bar{\mu}'}^{(m)} = \mathcal{O}_{\bar{\mu}\bar{n}} A_{\bar{n}}^{(m)} + \mathcal{O}_{\bar{\mu}G} A_G^{(m)}. \quad (2.85)$$

El resultado de la transformación (2.85) en la expresión (2.83) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} + \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} \right] + \sum_{(m)} m_{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \partial_\mu A_G^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[ \partial_\mu A_{\bar{n}}^{(m)} \partial^\mu A_{\bar{n}}^{(m)} - m_{(m)}^2 A_{\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} \right]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

La expresión anterior constituye el resultado de la implementación del KKM en la teoría abeliana en  $n$  dimensiones extra. En el siguiente capítulo se analizará la teoría de gravedad linealizada en  $d = 5$  dimensiones o lo que es lo mismo, con una dimensión extra:  $n = 1$ , por lo que es de interés acotar la discusión de la teoría

abeliana exclusivamente para  $n = 1$  y es lo que discutiremos a continuación. Lo único que se está omitiendo en la conversación al descartar las dimensiones mayores a 5 es quitar el análisis de  $n - 1$  campos escalares de masa degenerada.

Para una dimensión extra la masa está definida exclusivamente a partir de  $p_5^{(m)}$  como:

$$p_5^{(m)} p_5^{(m)} = m_{(m)}^2. \quad (2.87)$$

En este caso existe el campo  $A_\mu^{(0)}$  y sus excitaciones de KK  $A_\mu^{(m)}$ , mientras que la diferencia fundamental es que no existirán escalares masivos  $A_n^{(m)}$  pues sus índices corren de 5 a  $d - 1$ , al ser  $d = 5$  no existen tales términos. Por su parte sí está involucrado el pseudo-bosón de Goldstone  $A_G^{(m)}$  de tal modo que  $G = d = 5$ , así tenemos la lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} + \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} \right] + \sum_{(m)} m_{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \partial_\mu A_G^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Ahora, pasemos a la definición de los propagadores. Primero, notamos que la teoría usual es invariante bajo SGT's. Por lo tanto el propagador de  $A_\mu^{(0)}$  no existe. La acción del modo cero de la teoría abeliana se puede describir hasta un término de superficie como:

$$\mathcal{S}^{(0)} = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} \right) = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu^{(0)} (\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^{(0)}. \quad (2.89)$$

En la acción (2.89) se puede identificar el operador  $\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu$ , el cual no tienen inverso, es decir, no existe un operador  $\tilde{\Delta}_{\nu\rho}$  que cumpla  $\Delta^{\mu\nu} \tilde{\Delta}_{\nu\rho} = i\delta_\rho^\mu$ .

Para la teoría de norma en la que se involucra el campo  $A^{(0)\mu}$  sin masa, en principio trabajamos con un objeto de 4 componentes; sin embargo, sólo dos de ellas representan grados de libertad físicos correspondientes a dos estados de polarización, lo anterior porque de los 4 grados de libertad matemáticos que representa  $A_\mu^{(0)}$ , los parámetros de norma están asociados con 2 constricciones. Esto se ve reflejado en el hecho de que el operador  $\Delta^{\mu\nu}$  no tiene inverso, lo que significa que el propagador no está definido. El problema se resuelve al fijar la norma. En el proceso de cuantización por integral de trayectoria, se puede ver que hay una cantidad infinita de configuraciones de norma que dan idénticos resultados físicos por lo que hay que quedarse con una de dichas configuraciones que sea representativa del sistema.

Definimos una norma de tipo renormalizable, conocidas en la literatura con el nombre de  $R_\xi$ -gauges. De tal forma que la acción de fijación de norma es:

$$S_{gf} = -\frac{1}{2\xi_a} \int d^4x (\partial_\mu A^{(0)\mu})(\partial_\nu A^{(0)\nu}), \quad (2.90)$$

con  $\xi_a$  el parámetro de norma escalar, de modo que la acción con fijación de la norma resulta ser:

$$S^{(0)} + S_{gf} = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu^{(0)} \left[ \partial^2 \eta^{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\xi_a} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu^{(0)}. \quad (2.91)$$

Sea  $k$  el 4-momento del campo  $A_\mu^{(0)}$ , después de efectuar la transformada de Fourier sobre los campos de la acción (2.91), la acción en el espacio de momentos se puede leer como:

$$S^{(0)} + S_{gf} = \int d^4k \frac{1}{2} \tilde{A}_\mu^{(0)} \Delta^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu^{(0)}, \quad (2.92)$$

donde el operador  $\Delta^{\mu\nu}$  esta definido como:

$$\Delta^{\mu\nu} = -k^2 \eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_a}\right) k^\mu k^\nu. \quad (2.93)$$

El inverso de  $\Delta^{\mu\nu}$ , es decir el tensor que cumple la siguiente expresión:

$$\Delta^{\mu\nu} \tilde{\Delta}_{\nu\rho} = i\delta^\mu_\rho, \quad (2.94)$$

está definido como el propagador del campo  $A_\mu^{(0)}$  y se presenta a continuación:

$$\tilde{\Delta}_{\nu\rho} = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[ \eta_{\nu\rho} - (1 - \xi_a) \frac{k_\nu k_\rho}{k^2} \right]. \quad (2.95)$$

Al comparar la expresión anterior con (1.38) de la sección 1.2 se puede apreciar que la estructura del propagador de los campos de espín-2, sin masa, es análoga al caso de espín-1 pero con una estructura más compleja debido al aumento de índices de Lorentz involucrados.

Ahora, recuérdese que la parte de la lagrangiana que tiene que ver con los modos excitados es de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} \right] + \sum_{(m)} m_{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)} + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \partial_\mu A_G^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)}, \quad (2.96)$$

y es invariante bajo las NSGT's dadas por:

$$\delta A^{(m)} = \partial_\mu \alpha^{(m)}, \quad (2.97)$$

$$\delta A_G^{(m)} = -m_{(m)} \alpha^{(m)}, \quad (2.98)$$

por lo tanto, tampoco existen los propagadores para  $A_\mu^{(m)}$  y  $A_G^{(m)}$ . El campo  $A_G^{(m)}$  es en esencia un campo de norma ya que está estrechamente vinculado al campo de norma  $A_\mu^{(m)}$ . Demostremos este hecho, sea la siguiente elección del parámetro de norma:

$$\alpha^{(m)} = \frac{A_G^{(m)}}{m_{(m)}}, \quad (2.99)$$

donde se introduce  $m_{(m)}$  debido a que  $\alpha^{(m)}$  es adimensional y  $A_G^{(m)}$  tiene unidades de masa. Los campos transformados están dados por:

$$A^{(m)'}_{\mu} = A^{(m)}_{\mu} + \frac{\partial_{\mu} A_G^{(m)}}{m_{(m)}} \quad (2.100)$$

$$A^{(m)'}_G = 0, \quad (2.101)$$

esta es la llamada norma unitaria, en la cual se ve claramente como el escalar  $A_G^{(m)}$  es absorbido por el campo de norma  $A_{\mu}^{(m)}$ , pasando así a formar el estado de polarización longitudinal. El campo  $A_G^{(m)}$  desaparece de la teoría, justo de la misma forma en la que los pseudo-bosones de Goldstone son eliminados en el mecanismo de Higgs. Es en este sentido que llamamos a  $A_G^{(m)}$  un pseudo-bosón de Goldstone. En esta norma, la teoría toma la forma:

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} + \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_{\mu}^{(m)} A^{(m)\mu} \right]. \quad (2.102)$$

El propagador del campo  $A_{\mu}^{(m)}$  está ahora bien definido. Este es el propagador unitario:

$$\tilde{\Delta}_{(m)\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 - m_{(m)}^2 + i\epsilon} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m_{(m)}^2} \right]. \quad (2.103)$$

Dicho propagador es muy mal comportado a altas energías o a pequeñas distancias. En efecto, en el límite cuando  $k^{\mu} \rightarrow \infty$ , el propagador no es cero, sino que tiende a  $\frac{1}{m_{(m)}^2}$ . Este comportamiento arruina renormalizabilidad por conteo de potencias. En general, no es un propagador adecuado para hacer correcciones radiativas. Afortunadamente, la naturaleza de norma del campo  $A_{\mu}^{(m)}$  nos permite definir un propagador bien comportado.

De manera análoga, a como se hizo con  $A_{\mu}^{(0)}$ , definimos una norma de tipo renormalizable. Para ello se define la siguiente función de fijación de norma  $f^{(m)}$  para el campo  $A_{\mu}^{(m)}$ :

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \sum_{(m)} [f^{(m)}(x)]^2, \quad f^{(m)}(x) = \partial_{\mu} A^{(m)\mu}(x) - \xi m_{(m)} A_G^{(m)}(x) \quad (2.104)$$

lo cual produce un término bilineal que cancela al término bilineal que había surgido debido al KKM, dota de masa no física al pseudo-bosón de Goldstone y se hace incapie en que permite calcular el propagador del bosón de norma masivo  $A^{(m)\mu}$ .

Al utilizar la lagrangiana de fijación de norma (2.104), las excitaciones de KK masivas  $A_{\mu}^{(m)}$  y el pseudo-bosón de Goldstone  $A_G^{(m)}$  están gobernados por la lagrangiana con fijación de norma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_{\mu}^{(m)} A^{(m)\mu} - \frac{1}{2\xi_a} (\partial_{\mu} A_{\mu}^{(m)})^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[ \partial_{\mu} A_G^{(m)} \partial^{\mu} A_G^{(m)} - \xi m_{(m)}^2 A_G^{(m)} A_G^{(m)} \right] \end{aligned} \quad (2.105)$$

El propagador del vector masivo  $A_{\mu}^{(m)}$  se puede obtener a partir de la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{mA} + \mathcal{L}_{gf} = \sum_{(\underline{m})} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(\underline{m})} F^{(\underline{m})\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(\underline{m})}^2 A_{\mu}^{(\underline{m})} A^{(\underline{m})\mu} - \frac{1}{2\xi_a} (\partial_{\mu} A^{(\underline{m})\mu})^2 \right]. \quad (2.106)$$

La acción anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$S_{mA} + S_{gf} = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{(\underline{m})} A_{\mu}^{(\underline{m})} \left[ (\partial^2 + m_{(\underline{m})}^2) \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi_a}\right) \partial^{\mu} \partial^{\nu} \right] A_{\nu}^{(\underline{m})}. \quad (2.107)$$

Sea  $k$  el 4-momento de las excitaciones vectoriales  $A_{\mu}^{(\underline{m})}$ , después de efectuar la transformada de Fourier sobre los campos de la acción (2.107), la acción en el espacio de momentos se puede leer como:

$$S_{mA} + S_{gf} = \sum_{(\underline{m})} \int d^4k \frac{1}{2} \tilde{A}_{\mu}^{(\underline{m})} \Delta_{(\underline{m})}^{\mu\nu} \tilde{A}_{\nu}^{(\underline{m})}, \quad (2.108)$$

donde el operador  $\Delta_{(\underline{m})}^{\mu\nu}$  esta definido como:

$$\Delta_{(\underline{m})}^{\mu\nu} = -(k^2 - m_{(\underline{m})}^2) \eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_a}\right) k^{\mu} k^{\nu}. \quad (2.109)$$

El inverso de  $\Delta_{(\underline{m})}^{\mu\nu}$ , es decir el tensor que cumple la siguiente expresión:

$$\Delta_{(\underline{m})}^{\mu\nu} \tilde{\Delta}_{\nu\rho(\underline{m})} = i\delta^{\mu}_{\rho}, \quad (2.110)$$

es el propagador de  $A_{\mu}^{(\underline{m})}$  y se presenta a continuación:

$$\tilde{\Delta}_{(\underline{m})\nu\rho} = -\frac{i}{(k^2 - m_{(\underline{m})}^2) + i\epsilon} \left[ \eta_{\nu\rho} - (1 - \xi_a) \frac{k_{\nu} k_{\rho}}{k^2 - \xi_a m_{(\underline{m})}^2} \right]. \quad (2.111)$$

Finalmente, el propagador para el pseudo-bosón de Goldstone  $A_G^{(\underline{m})}$  es el propio de un campo escalar:

$$\tilde{D}(k) = \frac{i}{k^2 - \xi_a m_{(\underline{m})}^2 + i\epsilon}. \quad (2.112)$$

Dadas las expresiones de los propagadores calculados en la norma  $R_{\xi}$  se puede verificar que tienden a cero en el límite  $k \rightarrow \infty$ , lo cual significa que tienen un buen comportamiento en correcciones radiativas.

En suma, se ha mostrado que tanto el KKM como el EHM otorgan herramientas para que los bosones de norma adquieran masa y en el proceso aparecen partículas escalares con masa y sin masa. Particularmente en el KKM más partículas escalares masivas aparecen cuando se considera una mayor cantidad de dimensiones extra. En los siguientes capítulos se analizará el caso de los objetos de espín-2 para  $d = 4 + 1$  dimensiones.

## Capítulo 3

# Compactificación de la Teoría de Einstein-Hilbert linealizada en 5 dimensiones

En este capítulo se presenta la compactificación de la teoría de Einstein-Hilbert linealizada. Se verá que a partir de una acción en  $d = 4 + 1$  dimensiones se recupera la teoría usual de Einstein-Hilbert linealizada en 4 dimensiones más un sector de campos de norma, los cuales corresponden a las excitaciones de KK del gravitón. Como se ha enfatizado a lo largo del texto, el objetivo central es derivar el propagador de un bosón de norma de espín-2, el cual ha sido dotado con masa a través del mecanismo de KK (KKM). Como se verá, la definición más general del propagador de esta partícula comprende la incorporación de campos llamados pseudo-bosones de Goldstone, de naturaleza vectorial y escalar (asociados con la masa) y de campos ghost también de tipo vectorial y escalar (asociados con la invariancia de norma). Este estudio será abordado con una poderosa herramienta desarrollada para cuantizar sistemas de norma generales, que van más allá de las teorías de Yang-Mills. A este formalismo, el cual representa la simetría BRST, se le conoce con el nombre de formalismo campo-anticampo.

### 3.1. Compactificación de la Teoría de Einstein-Hilbert linealizada en 5 dimensiones

En esta sección se tratará la compactificación de la teoría de Einstein-Hilbert, la cual se desarrolla sobre el espacio tiempo plano extendido  $\mathcal{M}^5 = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^1$ , donde  $\mathcal{N}^1$  denota una variedad 1-dimensional euclidiana, denominada *variedad extra*. La teoría es invariante bajo el *Grupo de Poincaré extendido*  $ISO(1, 3 + 1)$  y ante el *grupo de difeomorfismos extendido*  $Diff(\mathcal{M}^5)$ . Suponemos que la dimensión extra tiene tamaño, denotado por  $R$  (no confundir con el escalar de Ricci que comparte la misma notación) y es muy grande comparado con las distancias en la que la teoría más fundamental tiene validez por lo que en la práctica se considera infinita y en igualdad de condiciones con las dimensiones espaciales usuales. En consecuencia, a muy altas energías, muy por arriba de la escala de compactificación  $R^{-1}$ , la simetría gobernante es  $\{ISO(1, 3 + 1), Diff(\mathcal{M}^5)\}$ , la cual llamaremos la *simetría extendida*. Por otra parte, a energías en el rango que van de la escala natural de la teoría usual a la escala de compactificación  $R^{-1}$ , los fenómenos físicos deben estar gobernados esencialmente por el grupo de la teoría estándar  $\{ISO(1, 3), Diff(\mathcal{M}^4)\}$ . Para lograr el objetivo de construir una teoría efectiva bajo dicha simetría estándar se implementará el KKM, el cual ha sido discutido con suficiente detenimiento en la sección 2.2.

El cuanto asociado con el operador de campo simétrico corresponde a una partícula de espín-2, la cual se identifica con el cuanto de gravedad: el gravitón, ha sido ampliamente estudiado en la literatura. La cuantización de la gravedad suele combinar las técnicas desarrolladas por Feynman y De Witt y el *background field method*

introducido por 't Hooft y Veltman [13, 14, 15]. En esta línea de pensamiento, una teoría que incluye un campo de espín-2 es la teoría de Einstein-Hilbert linealizada en la que la métrica, en un límite de campo gravitacional débil, se descompone como la métrica de Minkowski más una perturbación 2-tensorial simétrica  $h_{MN}$ .

Sea  $g_{AB}$  el tensor métrico asociado con el espaciotiempo extendido  $\mathcal{M}^5$ ; el proceso de linealización proviene de la siguiente expansión a primer orden en  $h_{AB}$  en el tensor métrico, con  $g^{AB}$  el tensor métrico inverso:

$$g_{AB} = \eta_{AB} + \kappa_{(4+n)} h_{AB} \quad g^{AB} = \eta^{AB} - \kappa_{(4+n)} h^{AB} + \kappa_{(4+n)}^2 h^{AC} h_C^B + \dots \quad (3.1)$$

donde  $|h_{MN}| \ll 1$  y  $\kappa_{(4+1)}$  es una constante que arregla las unidades del campo  $h_{AB}$ , dado que  $\eta_{AB}$  es adimensional. Sólo se trabajará con el tensor métrico inverso a primer orden en  $h^{MN}$  en el entendido de que queremos una teoría a lo sumo cuadrática en  $h_{MN}$ . Para considerar interacciones de tres o más gravitones hay que considerar potencias más altas en  $\kappa_{(4+1)}$  en el tensor métrico inverso. La métrica del espacio-tiempo plano  $d$ -dimensional se representa como  $\eta^{MN}$  con la convención  $\eta_{MN} = \text{diag}(+, -, -, \dots, -)$  y se cumple que  $h^{MN} = \eta^{MR} \eta^{NS} h_{RS}$ . Nuestra convención de tensor de Riemann, tensor de Ricci, escalar de Ricci y conexiones son tales que:

$$R_{NRT}^L \equiv \partial_R \Gamma_{TN}^L - \partial_T \Gamma_{RN}^L + \Gamma_{RE}^L \Gamma_{TN}^E - \Gamma_{RN}^E \Gamma_{TE}^L, \quad (3.2)$$

$$R_{MN} \equiv R_{MLN}^L, \quad R \equiv g^{MN} R_{MN}, \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{MN}^R \equiv \frac{1}{2} g^{RL} \left( \partial_M g_{NL} + \partial_N g_{ML} - \partial_L g_{MN} \right). \quad (3.4)$$

A primer orden en  $h_{MN}$ , el tensor de Riemann y las conexiones se convierten en [24]:

$$R_{MNRT} = \frac{\kappa_{(4+1)}}{2} \left[ \partial_R \left( \partial_N h_{TM} - \partial_M h_{NT} \right) - \partial_T \left( \partial_N h_{RM} - \partial_M h_{RN} \right) \right], \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{MN}^R = \frac{\kappa_{(4+1)}}{2} \eta^{RL} \left( \partial_L h_{NL} + \partial_N h_{ML} - \partial_L h_{MN} \right). \quad (3.6)$$

Los índices mayúsculos se despliegan de la siguiente manera:  $M = \mu, \bar{\mu}$  con  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$  mientras que  $\bar{\mu}, \bar{\nu}, \dots = 5$ . Podemos establecer la siguiente notación para las coordenadas:  $(x^\mu, x^{\bar{\mu}}) = (x^\mu, x^5) = (x, \bar{x})$ .

La acción de Einstein-Hilbert linealizada 5-dimensional proviene directamente de promover los objetos de 4 dimensiones (en la sección 1 se presentan las expresiones en 4 dimensiones) de la acción de Einstein-Hilbert a  $d = 4 + 1$  dimensiones, dicha acción está dada por:

$$S_{EHL5}[h_{AB}] = \int d^4 x d\bar{x} \mathcal{L}_{EHL5}(x, \bar{x}) \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}_{EHL5}(x, \bar{x}) = -\frac{1}{2} \left[ \partial_M h_N^M \partial_L h^{LN} - \partial_M h^{MN} \partial_N h^L_L + \frac{1}{2} \partial_M h_R^R \partial^M h_S^S - \frac{1}{2} \partial_M h^{RS} \partial^M h_{RS} \right]. \quad (3.8)$$

Como se estableció inicialmente, la simetría de norma existente en la teoría es la invariancia ante el grupo de difeomorfismos extendido  $\text{Diff}(\mathcal{M}^5)$ . Se recuerda que un difeomorfismo es un isomorfismo en variedades diferenciales, *i.e.* una transformación invertible que mapea una variedad diferencial en otra. En el caso de la presente teoría

los isomorfismos se efectúan en el espaciotiempo extendido y el conjunto de dichos mapeos forman el grupo de difeomorfismos extendido  $Diff(\mathcal{M}^5)$ . Las transformaciones de norma 5-dimensionales de la teoría relacionadas con  $Diff(\mathcal{M}^5)$ , son:

$$\delta h_{MN}(x, \bar{x}) = \partial_M \xi_N(x, \bar{x}) + \partial_N \xi_M(x, \bar{x}) \quad (3.9)$$

donde los vectores  $\xi_M$  de  $SO(1, 3+1)$  son los parámetros de norma asociados al grupo de difeomorfismos. La transformación (3.9) se relaciona con una transformación de coordenadas de la forma:  $x'^C = x^C - c_{(4+1)} \xi^C$ , con  $c_{(4+1)}$  una constante.

Para ocultar la simetría del grupo extendido en la simetría del grupo estándar, primero realizamos un mapeo de punto, (el cual puede ser elevado sin dificultad a la categoría de mapeo canónico) que mapea objetos de  $SO(1, 3+1)$  en objetos de su subgrupo  $SO(1, 3)$ :

*Primer mapeo*  $SO(1, 3+1) \longrightarrow \{SO(1, 3)\}$

$$h_{MN}(x, \bar{x}) \longrightarrow \{h_{\mu\nu}(x, \bar{x}), h_{\mu 5}(x, \bar{x}), h_{55}(x, \bar{x})\}, \quad (3.10)$$

$$h^M_M(x, \bar{x}) \longrightarrow \{h(x, \bar{x}), h_{55}(x, \bar{x})\}, \quad (3.11)$$

$$\xi_M(x, \bar{x}) \longrightarrow \{\xi_\mu(x, \bar{x}), \xi_5(x, \bar{x})\}. \quad (3.12)$$

Se ha usado la notación para la traza  $Tr\{h_{MN}\} = \eta^{MN} h_{MN} = h - h_{55}$  al definir  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ . Una vez efectuado el *primer mapeo*, bajo la perspectiva de  $SO(1, 3)$  se tienen 2-tensores  $h_{\mu\nu}$ ; vectores  $h_{\mu 5}$  y escalares  $h_{55}$  que se presentan explícitamente en la siguiente acción:

$$S[h_{\mu\nu}, h_{\mu 5}, h_{55}] = \int d^4x d\bar{x} \mathcal{L}_{EHL5} \quad (3.13)$$

en donde la lagrangiana de Einstein-Hilbert linealizada 5-dimensional se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EHL5} = & -\frac{1}{2} \left[ \left( \partial_\mu h^\mu_\nu \partial_\lambda h^{\lambda\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\rho\sigma} \partial^\mu h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \partial_5 h^{\rho\sigma} \partial_5 h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \partial_5 h \partial_5 h \right) \right. \\ & + \left( -\partial_\mu h^\mu_5 \partial_\lambda h^\lambda_5 + \partial_\mu h^\rho_5 \partial^\mu h_{\rho 5} + \partial_5 h_{5\nu} \partial_5 h_5^\nu - \partial_5 h^\rho_5 \partial_5 h_{\rho 5} - \partial_\mu h^\mu_5 \partial_5 h_{55} - \partial_5 h_5^\nu \partial_\nu h_{55} \right) \\ & \left. + \left( -2\partial_\mu h^\mu_\nu \partial_5 h_5^\nu + 2\partial_\mu h^\mu_5 \partial_5 h_{55} + \partial_\mu h^\mu_5 \partial_5 h + \partial_5 h_5^\nu \partial_\nu h + \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{55} - \partial_\mu h \partial^\mu h_{55} \right) \right] \quad (3.14) \end{aligned}$$

En (3.14) los términos cuadráticos que incluyen exclusivamente a  $h_{55}$  se cancelan idénticamente, mientras que aquellos en donde  $h_{55}$  aparece linealmente se cancelarán bajo el segundo mapeo, por lo que no hay un sector escalar. Este aspecto es importante en la teoría y se estudiará con detalle posteriormente.

Debido al primer mapeo, las transformaciones de norma  $\delta h_{MN}(x, \bar{x})$  se separan de la siguiente forma:

$$\delta h_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = \partial_\mu \xi_\nu(x, \bar{x}) + \partial_\nu \xi_\mu(x, \bar{x}) \quad (3.15)$$

$$\delta h_{\mu 5}(x, \bar{x}) = \partial_\mu \xi_5(x, \bar{x}) + \partial_5 \xi_\mu(x, \bar{x}) \quad (3.16)$$

$$\delta h_{55}(x, \bar{x}) = \partial_5 \xi_5(x, \bar{x}) + \partial_5 \xi_5(x, \bar{x}) \quad (3.17)$$

Al haber efectuado el *primer mapeo* se ha hecho manifiesto que la teoría es potencialmente una teoría efectiva en la que figuran objetos tensoriales, vectoriales y escalares de  $SO(1, 3)$ . Sin embargo, también se puede ver que existe una clara dependencia en la coordenada extra  $\bar{x}$ , por lo que a este nivel, la acción aún es válida a escalas energéticas mayores a  $R^{-1}$ .

Para remover el carácter dinámico de  $\mathcal{N}^1$  se define el *segundo mapeo* en el cual se establece un esquema de compactificación concordante con la existencia de un conjunto completo de funciones ortogonales  $\{f^{(\underline{m})}(\bar{x})\} = \{f_E^{(0)}, f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}), f_O^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$  donde los subíndices representan funciones pares ( $E$ ) e impares ( $O$ ), a su vez  $f_E^{(0)}$  denota la función constante. La identificación de la paridad de las funciones servirá para hacer la separación de aquellos objetos que existen en la teoría linealizada usual (los 2-tensores  $h_{\mu\nu}$ ) y aquellos que no (los vectores  $h_{\mu 5}$  y los escalares  $h_{55}$ ). Por esto último la función escalar debe formar parte de la base de funciones  $\{f^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$ . De modo que todo objeto con contraparte estándar será par respecto al cambio  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$  y aquellos objetos sin contraparte estándar serán impares, esto es:

$$h_{\mu\nu}(x, -\bar{x}) = h_{\mu\nu}(x, \bar{x}) \quad h_{\mu 5}(x, -\bar{x}) = -h_{\mu 5}(x, \bar{x}) \quad h_{55}(x, -\bar{x}) = -h_{55}(x, \bar{x}) \quad (3.18)$$

Esta última condición de paridad no sólo se aplica a los campos de la teoría, sino también a los parámetros de norma. Cuando se haya concretado el proceso de compactificación de la dimensión extra, los grados de libertad serán heredados a los objetos  $\{h_{\mu\nu}^{(0)}, h_{\mu\nu}^{(\underline{m})}, h_{\mu 5}^{(\underline{m})}, h_{55}^{(\underline{m})}\}$ , que sólo dependen de las coordenadas usuales  $x$ , los cuales surgen de un *segundo mapeo* que permite remover el papel de la quinta coordenada como una etiqueta que enumera grados de libertad. Recuérdese que en el primer mapeo, los diversos campos que obedecen a representaciones del grupo de Lorentz estándar aún son funciones de la quinta coordenada. Este proceso, el cual se realiza mediante series de Fourier, nos permite finalmente ocultar la simetría extendida en la simetría estándar:

*Segundo mapeo*  $T(1, 3 + 1) \rightarrow T(1, 3)$

$$h_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} h_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \sum_{(\underline{m})} f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}) h_{\mu\nu}^{(\underline{m})}(x), \quad (3.19)$$

$$h_{\mu 5}(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} f_O^{(\underline{m})}(\bar{x}) h_{\mu 5}^{(\underline{m})}(x), \quad (3.20)$$

$$h_{55}(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} f_O^{(\underline{m})}(\bar{x}) h_{55}^{(\underline{m})}(x). \quad (3.21)$$

Nótese que directamente a partir de la transformación (3.19) se puede obtener la transformación de la traza de  $h_{\mu\nu}$  al contraer con el tensor métrico:

$$h(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} h^{(0)}(x) + \sum_{(\underline{m})} f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}) h^{(\underline{m})}(x). \quad (3.22)$$

Como se ha comentado, aunque  $h_{55}$  se cancele explícitamente en el cálculo, se incluyó cual sería su segundo mapeo para ver su efecto sobre las transformaciones de norma.

*Segundo mapeo*

$$\xi_\mu(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} \xi_\mu^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \xi_\mu^{(m)}(x), \quad (3.23)$$

$$\xi_5(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) \xi_5^{(m)}(x). \quad (3.24)$$

Por otra parte, las expresiones (3.23) y (3.24) constituyen el *segundo mapeo* de los parámetros de norma, los cuales son de tipo vectorial  $\xi_\mu^{(0)}(x)$ ,  $\xi_\mu^{(m)}(x)$  y escalar  $\xi_5^{(m)}(x)$ . Al aplicar este segundo mapeo a las transformaciones de norma de las expresiones (3.15) a (3.17) y haciendo uso de la ortogonalidad de la base  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$  se obtiene lo siguiente:

$$\delta h_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(0)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(0)}(x), \quad (3.25)$$

$$\delta h_{\mu\nu}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(m)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(m)}(x), \quad (3.26)$$

$$\delta h_{\mu 5}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_5^{(m)}(x) + \sum_{(r)} \int d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{x}) \partial_5 f_E^{(r)}(\bar{x}) \xi_\mu^{(r)}(x), \quad (3.27)$$

$$\delta h_{55}^{(m)}(x) = 0. \quad (3.28)$$

Podemos apreciar que la transformación (3.27) tiene dependencia en las derivadas de las funciones  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$  por lo que usando sus propiedades, la expresión (3.27) toma la forma:

$$\delta h_{\mu 5}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_5^{(m)}(x) - p_5^{(m)} \xi_\mu^{(m)}(x). \quad (3.29)$$

Ahora podemos hablar de los conjuntos de transformaciones que se derivan a partir de las expresiones (3.25) a (3.28). Se puede hacer una distinción entre transformaciones de norma estándar y no estándar por los diferentes tipos de parámetros de norma existentes. También se puede sustituir el valor de  $p_5^{(m)}$  por su equivalente  $m_{(m)}$ .

Las transformaciones de norma estándar (SGTs) se definen cuando  $\xi_\mu^{(m)} = 0$  y  $\xi_5^{(m)} = 0$  y toman la forma:

*Standard Gauge Transformations SGT's*

$$\delta_s h_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(0)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(0)}(x), \quad (3.30)$$

$$\delta_s h_{\mu\nu}^{(m)}(x) = 0, \quad (3.31)$$

$$\delta_s h_{\mu 5}^{(m)}(x) = 0, \quad (3.32)$$

$$\delta_s h_{55}^{(m)}(x) = 0. \quad (3.33)$$

En las SGT's se identifican a los  $\xi_\mu^{(0)}$  como los parámetros de norma de la teoría usual y se identifican a los  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  como los campos de norma de gravedad estándar. De las transformaciones anteriores se concluye que las excitaciones de Kaluza-Klein de  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , es decir, los objetos  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ ,  $h_{\mu 5}^{(m)}$  y  $h_{55}^{(m)}$  son invariantes, de modo que bajo la

perspectiva de la teoría estándar pueden ser dotados de masa.

Por otra parte, las transformaciones no estándar surgen al considerar  $\xi_\mu^{(0)} = 0$  y son de la forma:

*Non Standard Gauge Transformations NSGT's*

$$\delta_{ns} h_{\mu\nu}^{(0)}(x) = 0 \quad (3.34)$$

$$\delta_{ns} h_{\mu\nu}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(m)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(m)}(x) \quad (3.35)$$

$$\delta_{ns} h_{\mu 5}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_5^{(m)}(x) - m_{(m)} \xi_\mu^{(m)}(x) \quad (3.36)$$

$$\delta_{ns} h_{55}^{(m)}(x) = 0 \quad (3.37)$$

Podemos apreciar que la transformación (3.35) tiene la misma forma que la expresión (3.30), lo cual establece que las excitaciones de KK  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  son campos de norma y su grupo asociado es el grupo de difeomorfismos. Además, como ya se estableció que las excitaciones de KK  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  tienen masa y son campos de norma, esto implica la existencia de la norma unitaria. Por otra parte, la transformación (3.36) está vinculada con el campo vectorial  $h_{\mu 5}^{(m)}$  que es de norma debido al parámetro  $\xi_5^{(m)}$  y el grupo de simetría asociado es el grupo abeliano. Un último aspecto importante a discutir es que, a partir de la contracción del tensor métrico con las expresiones (3.30) y (3.35) se puede obtener la variación de las trazas  $h^{(0)}$  y  $h^{(m)}$ , lo cual establece que en el proceso de fijación de la norma y para el propósito del cálculo de los propagadores de  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  y  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , sus trazas deben ser tomadas en cuenta.

Cuando se han efectuado los dos mapeos que permiten hacer la compactificación de la dimensión extra, toda la información está contenida en la lagrangiana de la teoría efectiva de Einstein-Hilbert linealizada  $\mathcal{L}_{EHL}$ . Un detalle más debe ser resuelto, las constantes asociadas con la teoría en 5 dimensiones deben ser reescaladas de modo que coincidan con las de la teoría usual en 4 dimensiones. La constante  $\kappa_{(4+1)}$  se relaciona con  $\kappa$  de la siguiente forma:  $\kappa^2 = \left(f_E^{(0)}\right)^2 \kappa_{(4+1)}^2$ , de modo que al haber realizado la integración de la coordenada extra sólo queda una teoría efectiva que depende del parámetro usual  $\kappa^2 = 16\pi G$ . En suma, después de haber efectuado el KKM, obtenemos una teoría efectiva válida para energías del orden de la escala de compactificación  $R^{-1}$  y está descrita por la acción:

$$S \left[ h_{\mu\nu}^{(0)}, h_{\mu\nu}^{(m)}, h_{\mu 5}^{(m)}, h_{55}^{(m)} \right] = \int d^4x \mathcal{L}_{EHL}, \quad (3.38)$$

donde la lagrangiana efectiva de Einstein-Hilbert linealizada se expresa de la forma:

$$\mathcal{L}_{EHL} = \mathcal{L}_{0G} + \mathcal{L}_{mG} + \mathcal{L}_{vec} + \mathcal{L}_{mixG}, \quad (3.39)$$

donde la forma explícita de estas expresiones se muestra a continuación:

$$\mathcal{L}_{0G} = -\frac{1}{2} \left[ \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(0)} \partial_\lambda h^{(0)\lambda\nu} - \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(0)} \partial^\nu h^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(0)} \partial^\mu h^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\rho\sigma}^{(0)} \partial^\mu h^{(0)\rho\sigma} \right] \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mG} = & -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[ \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(m)} \partial_\lambda h^{(m)\lambda\nu} - \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(m)} \partial^\nu h^{(m)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(m)} \partial^\mu h^{(m)} - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\rho\sigma}^{(m)} \partial^\mu h^{(m)\rho\sigma} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 \left( h_{\rho\sigma}^{(m)} h^{(m)\rho\sigma} - h^{(m)} h^{(m)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\mathcal{L}_{vecG} = \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[ \partial^\mu h_{\mu 5}^{(m)} \partial^\rho h_{\rho 5}^{(m)} - \partial_\mu h_5^{(m)\rho} \partial^\mu h_{\rho 5}^{(m)} \right] \quad (3.42)$$

$$\mathcal{L}_{mixG} = \frac{1}{2} \sum_{(m)} p_5^{(m)} \left[ 2\partial_\lambda h^{(m)\lambda\mu} h_{5\mu}^{(m)} + \partial^\mu h_{5\mu}^{(m)} h^{(m)} - h_{5\nu}^{(m)} \partial^\nu h^{(m)} \right]. \quad (3.43)$$

Podemos identificar que (3.40) representa a la teoría usual del campo de espín-2 sin masa, (3.41) representa a la teoría del campo de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , (3.42) corresponde a un término cinético para el vector  $h_{\mu 5}^{(m)}$  y (3.43) es un término de mezcla entre el vector  $h_{\mu 5}^{(m)}$  y el campo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ . El caso de  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  ya ha sido estudiado en la sección 1.2, por lo que ahora nos enfocaremos al estudio del campo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ .

El campo de espín-2 masivo está representado por las excitaciones de KK  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y su lagrangiana (3.41). Primero, se comentarán algunas cuestiones históricas. Dicha lagrangiana del campo de espín-2 se desprende del trabajo de Fierz y Pauli (FP) [8, 12]. En el trabajo original de FP [8] se propuso *a priori* que la traza  $h$  fuera cero con el objetivo de ajustarse a los grados de libertad dictados por la relación  $2s + 1$  para  $s$  el espín del campo en cuestión. El término de masa que contenía sólo era proporcional a  $h_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma}$  y además se incluyó el uso de un multiplicador de Lagrange. Así que, lo que ahora se conoce como la lagrangiana de Fierz-Pauli es una expresión diferente a la tratada por ellos. En posteriores trabajos relacionados con la teoría de espín-2, el multiplicador de Lagrange fue ignorado y también se omitió la inclusión de términos de fijación de norma, lo cual llevó a múltiples teorías en las que el término de masa se usaba como tal y como parámetro de fijación de norma al mismo tiempo [27, 35]. Más tarde se descubrió que para que la gravedad linealizada describa un sistema de espín-2 de manera consistente, en efecto es necesaria la existencia de un término de masa, al que se le suele llamar la *afinación* de Fierz-Pauli (FP *tunning*), cuya estructura se muestra a continuación:

$$-\frac{1}{2} m^2 (h_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} - h^2), \quad (3.44)$$

donde se puede apreciar un signo negativo relativo entre la contracción de  $h_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma}$  y el cuadrado de su traza  $h^2$ , esto para que no aparezcan combinaciones de términos relacionados con contribuciones de espín menor (de energía negativa), llamados ghost de Boulware-Deser (BD). Además, ahora se sabe que sus correspondientes grados de libertad espurios están íntimamente ligados con la inclusión de interacciones gravitacionales de mayor orden ( $O(h_{\mu\nu}^3)$ ), aunque en principio se creía que estos problemas eran inevitables en cualquier tipo de teoría de espín-2 masiva, en [11, 12] se discuten condiciones con las que se puede tener familias de teorías con ausencia de ghosts de BD aunque con la posible presencia de otro tipo de anomalías.

Al efectuar el KKM, el signo negativo relativo, mencionado anteriormente, del término de afinación de FP surge de manera natural, por lo que se verá que  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  propaga 5 grados de libertad, como es de esperarse. La lagrangiana (3.41), de manera análoga al caso sin masa, se puede reescribir como una forma cuadrática en los campos de la siguiente forma hasta un término de superficie:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{mG} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(m)} h^{(m)\alpha\beta} \left[ -G_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^2 + 2G_{\alpha\beta\sigma\kappa} \partial^\sigma \partial^\rho G_{\rho\gamma\delta}^\kappa \right] h^{(m)\gamma\delta} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(m)} h^{(m)\alpha\beta} \left( m_{(m)}^2 G_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} m_{(m)}^2 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} \right) h^{(m)\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Las ecuaciones de movimiento provenientes de la acción anterior son las siguientes:

$$\left[ - \left( \partial^2 + m_{(m)}^2 \right) G^{\alpha\beta\gamma\delta} + 2G^{\alpha\beta\sigma\kappa} \partial_\sigma \partial_\rho G_{\kappa}^{\rho\gamma\delta} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} \right] h_{\gamma\delta}^{(m)} = 0 \quad (3.46)$$

y se verifica que esta expresión representa condiciones tales que el campo de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  tiene 5 grados de libertad, de las 10 componentes en principio independientes. En efecto, al acoplar (3.46) con  $\partial_\beta$  se obtiene la expresión:

$$\partial_\beta h^{(m)\alpha\beta} - \partial^\alpha h^{(m)} = 0, \quad (3.47)$$

válida exclusivamente cuando  $m_{(m)}^2 \neq 0$ . Al sustituir este último término en (3.46) se obtiene la expresión:

$$\partial^2 h_{\alpha\beta}^{(m)} - \partial_\alpha \partial_\beta h^{(m)} + m_{(m)}^2 (h_{\alpha\beta}^{(m)} - \eta_{\alpha\beta} h) = 0, \quad (3.48)$$

la cual al obtener su traza resulta en  $h^{(m)} = 0$  y por lo tanto  $\partial_\beta h^{(m)\alpha\beta} = 0$ . Finalmente, al sustituir esta última condición y la condición de traza nula en la ecuación de la que partimos se obtiene la ecuación de tipo Klein-Gordon:

$$(\partial^2 + m_{(m)}^2) h_{\alpha\beta}^{(m)} = 0. \quad (3.49)$$

En conclusión, la expresión (3.46) es equivalente a las siguientes expresiones:

$$\left(\partial^2 + m_{(m)}^2\right) h_{\alpha\beta}^{(m)} = 0, \quad \partial^\beta h_{\alpha\beta}^{(m)} = 0, \quad h^{(m)} = 0. \quad (3.50)$$

La primera de estas ecuaciones expresa la evolución de las componentes de  $h_{\alpha\beta}^{(m)}$  y las siguientes dos representan 5 constricciones espaciales que conducen a 5 grados de libertad mencionados anteriormente. Información sobre las soluciones para la ecuación de Klein-Gordon para  $h_{\alpha\beta}^{(m)}$  se puede hallar en [32]. Además, como el gravitón masivo tiene 5 grados de libertad físicos, esto se refleja en un formalismo de helicidad para los objetos de espín-2 en el que se necesitan tensores de polarización, denotados como  $\epsilon_{\mu\nu}$  que se construyen a partir de vectores de polarización  $\epsilon_\mu$ , análogos a los que se usan en teorías de norma de campos de espín-1, y cumplen propiedades análogas, por ejemplo, relaciones de completez; más información al respecto puede ser encontrada en las referencias [36, 37]. Las expresiones (3.50) constituyen el resultado que Fierz y Pauli encontraron para los objetos de espín-2 simétricos masivos (y de espín arbitrario en el que deben existir  $2s + 1$  grados de libertad).

Debido a la presencia del término de masa, se puede calcular el propagador de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ . La acción del campo de espín-2 masivo se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{mG} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(m)} h^{(m)\alpha\beta} [-G_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^2 + 2G_{\alpha\beta\sigma\kappa} \partial^\sigma \partial^\rho G_{\rho\gamma\delta}^\kappa] h^{(m)\gamma\delta} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(m)} h^{(m)\alpha\beta} \left( m_{(m)}^2 G_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} m_{(m)}^2 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} \right) h^{(m)\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Al aplicar la transformada de Fourier a la acción anterior, la acción correspondiente en el espacio de momentos es:

$$\mathcal{S}_{mG} = \frac{1}{4} \sum_{(m)} \int d^4q \tilde{h}_{\alpha\beta}^{(m)} \Delta_{(m)}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{h}_{\gamma\delta}^{(m)}, \quad (3.52)$$

donde el operador  $\Delta_{(m)}^{\alpha\beta\gamma\delta}$  esta definido como:

$$\Delta_{(m)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = (q^2 - m_{(m)}^2)G^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2G^{\alpha\beta\sigma\kappa}q_\sigma q_\rho G_\kappa^{\rho\gamma\delta} + \frac{1}{2}m_{(m)}^2\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}. \quad (3.53)$$

Sea la notación  $d_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_{(m)}^2}$ , el propagador asociado con el campo de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , es el inverso del tensor (3.53) y se define como:

Propagador de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  en la norma unitaria

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{(m)\gamma\delta\mu\nu} &= \frac{i}{q^2 - m_{(m)}^2 + i\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \eta_{\gamma\mu}\eta_{\delta\nu} + \eta_{\gamma\nu}\eta_{\delta\mu} - \frac{2}{3}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\mu\nu} \right) - 2 \frac{I_{\gamma\delta\lambda\epsilon}q^\lambda q^\tau I^\epsilon_{\tau\mu\nu}}{m_{(m)}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left( \eta_{\gamma\delta} \frac{q_\mu q_\nu}{m_{(m)}^2} + \eta_{\mu\nu} \frac{q_\gamma q_\delta}{m_{(m)}^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{q_\gamma q_\delta q_\mu q_\nu}{(m_{(m)}^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$= \frac{i}{q^2 - m_{(m)}^2 + i\epsilon} \left[ \frac{1}{2}d_{\gamma\mu}d_{\delta\nu} + \frac{1}{2}d_{\gamma\nu}d_{\delta\mu} - \frac{1}{3}d_{\gamma\delta}d_{\mu\nu} \right]. \quad (3.55)$$

Ahora se discute porqué a la expresión (3.55) se le nombró el propagador en la norma unitaria. Analicemos la lagrangiana (3.42), la cual se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}_{vecG} = -\frac{1}{4} \sum_{(m)} H_{\mu\nu}^{(m)} H^{(m)\mu\nu}, \quad (3.56)$$

donde se ha usado la notación  $h_{\delta\mu}^{(m)} \equiv h_{G\mu}^{(m)}$  y se ha definido la curvatura  $H_{\mu\nu}^{(m)} \equiv \partial_\mu h_{G\nu}^{(m)} - \partial_\nu h_{G\mu}^{(m)}$ . Como se puede apreciar, (3.56) es un término cinético vectorial. Se demostrará que  $h_{G\mu}^{(m)}$  es un pseudo-bosón de Goldstone, razón por la cual se hizo el cambio de notación en su subíndice  $5 \rightarrow G$ . Se demostrará que  $h_{G\mu}^{(m)}$  puede ser eliminado de la teoría por medio de una NSGT específica. Sea la siguiente transformación:

$$\xi_\mu^{(m)} = \frac{h_{G\mu}^{(m)}}{m_{(m)}}, \quad \xi_5^{(m)} = 0, \quad (3.57)$$

entonces, las NSGT's asociadas a  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y  $h_{G\mu}^{(m)}$ , ecuaciones (3.35) y (3.36), toman la forma:

$$h'_{\mu\nu}{}^{(m)} = h_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{1}{m_{(m)}} (\partial_\mu h_{G\nu}^{(m)} + \partial_\nu h_{G\mu}^{(m)}), \quad (3.58)$$

$$h'_{G\mu}{}^{(m)} = 0. \quad (3.59)$$

Es decir  $h_{G\mu}^{(m)}$  forma los estados de polarización asociados a la masa de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ . Así,  $h_{G\mu}^{(m)}$  es un pseudo-bosón de Goldstone vectorial. La teoría resultante debe conducir al propagador unitario. Posteriormente se darán argumentos del porqué  $h_{55}^{(m)}$  también es un pseudo-bosón de Goldstone, aunque no aparezca de forma explícita en la lagrangiana efectiva  $\mathcal{L}_{EHL}$ .

Ahora se identifica el término bilineal dado por la expresión (3.43), el cual se puede expresar hasta un término de superficie como:

$$\mathcal{L}_{mixG} = \sum_{\langle m \rangle} m_{\langle m \rangle} \partial_\mu \left( h^{\langle m \rangle \mu\nu} - \eta^{\mu\nu} h^{\langle m \rangle} \right) h_{G\nu}^{\langle m \rangle}, \quad (3.60)$$

donde se puede apreciar que no es un acoplamiento físico por la aparición del pseudo-bosón de Goldstone vectorial de modo que dicho término bilineal se puede retirar de la teoría, en principio, de dos formas distintas. La primera forma en que se puede retirar el término de mezcla corresponde con la norma unitaria, discutida anteriormente, que en esencia significa hacer  $h_{G\mu}^{\langle m \rangle} = 0$ . En dicha norma no sólo desaparece el término de mezcla, sino que también el término cinético de  $h_{G\mu}^{\langle m \rangle}$ . En conclusión, el propagador del campo de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{\langle m \rangle}$  en la norma unitaria está dado por la expresión (3.55), la cual ha sido ampliamente reportada en la literatura.

Por otra parte, nótese que si se efectúa el límite de masa cero en la expresión (3.55), ésta se indefine, pues correspondería con no haber fijado una norma para el campo de espín-2 sin masa. Esto también ocurre, de manera análoga, en el caso de los propagadores unitarios de la teoría abeliana. Se hace un comentario adicional al respecto del límite de masa tendiendo a cero. Se podría pensar que la existencia de la discontinuidad vDVZ está vinculada necesariamente al hecho de que el límite de masa cero del propagador masivo no coincida con el propagador de masa cero; sin embargo, se han encontrado casos con fijación de la norma en los que aunque el propagador tenga un límite de masa cero continuo, no significa la ausencia de la discontinuidad vDVZ [10]. El límite de masa cero del propagador de una partícula de norma masivo de espín- $s$  no debe porque coincidir, *a priori*, con el propagador del bosón de espín- $s$  sin masa, porque en esencia sus grados de libertad son diferentes, de modo que los estados de helicidad interactúan de diferente manera. Por otra parte, la introducción de términos no lineales a la acción de Fierz-Pauli, es decir gravedad linealizada más el término de *afinación de FP*, restauran el buen comportamiento del límite de masa cero hacia GR, lo cual se conoce como Mecanismo de Vainshtein [12].

El interés real es calcular los propagadores de los campos de norma a través de funciones de fijación de la norma generales, las cuales son útiles para hacer correcciones radiativas. Considerar una norma general implica mantener al pseudo-bosón de Goldstone vectorial por lo que el término de mezcla entre  $h_{G\mu}^{\langle m \rangle}$  y  $h_{\mu\nu}^{\langle m \rangle}$  se debe cancelar en lugar de sólo hacerse cero como en la norma unitaria. En las siguientes secciones se mostrará la forma de la función de fijación de la norma que permite cancelar dicho término bilineal y al mismo tiempo dotar de masa no física a  $h_{G\mu}^{\langle m \rangle}$ . Para poder fijar dicha norma debemos estudiar el formalismo de campo-anticampo en 5 dimensiones, lo cual se presenta en la siguiente sección.

## 3.2. Simetría BRST con dimensiones extra

En esta sección se presenta el formalismo de campo-anticampo para introducir la simetría BRST con compactificación de dimensiones extra, la discusión está enfocada al sector de gravedad linealizada, para el caso particular de  $d = 4 + 1$  dimensiones. El formalismo campo-anticampo ha sido explicado en la sección 1.3 para 4 dimensiones y el mecanismo de KK ha sido explicado en 2.2, por lo que haremos referencia a ambas secciones. Se verá que el modo cero de la teoría con compactificación de dimensiones extra, coincide con los resultados presentados en la sección 1.3.

En el caso de gravedad linealizada extradimensional, los parámetros de norma  $\xi^M$  se incorporan como grados de libertad con estadística opuesta:  $\epsilon(C^M) = \epsilon(\xi^M) + 1 = 1$  y número de ghost  $gh[C^M] = +1$ . Se introduce el par trivial:  $\bar{C}^M$  y  $B^M$  con las siguientes propiedades:  $\epsilon(\bar{C}^M) = 1$ ,  $gh[\bar{C}^M] = -1$  y  $\epsilon(B^M) = 0$ ,  $gh[B^M] = 0$ . Entonces el espacio de configuración lo definen los siguientes campos:

$$\Phi^A = \{h^{MN}, C^M, \bar{C}^M, B^M\}, \quad (3.61)$$

y sus anticampos con estadística opuesta y número de ghost definido como sigue:  $(\Phi_A^*) = \epsilon(\Phi^A) + 1$ ,  $gh[\Phi_A^*] = -gh[\Phi^A] - 1$ , de modo que se tiene el conjunto de anticampos:

$$\Phi_A^* = \{h_{MN}^*, C_M^*, \bar{C}_M^*, B_M^*\}. \quad (3.62)$$

El par trivial contribuye a la solución propia con el término trivial:

$$S_{trivial} = \int d^d x [B^M \bar{C}_M^*]. \quad (3.63)$$

Entonces, la solución propia más el término trivial en 5 dimensiones es de la forma:

$$S = \int d^4 x d\bar{x} [\mathcal{L}_{EHL5} + h_{MN}^* (\partial^M C^N + \partial^N C^M) + \bar{C}_M^* B^M], \quad (3.64)$$

donde  $\mathcal{L}_{EHL5}$  es la teoría de Einstein-Hilbert linealizada en 5 dimensiones que involucra a  $h_{MN}$ . El *primer mapeo* de compactificación para ocultar la simetría del grupo extendido  $O(1, 3+1)$  al grupo estándar  $O(1, 3)$  está definido de la siguiente forma:

$$h^{MN}(x, \bar{x}) \longrightarrow \{h^{\mu\nu}(x, \bar{x}), h^{\mu 5}(x, \bar{x}), h^{55}(x, \bar{x})\}, \quad (3.65)$$

$$C^M(x, \bar{x}) \longrightarrow \{C^\mu(x, \bar{x}), C^5(x, \bar{x})\}, \quad (3.66)$$

$$\bar{C}^M(x, \bar{x}) \longrightarrow \{\bar{C}^\mu(x, \bar{x}), \bar{C}^5(x, \bar{x})\}, \quad (3.67)$$

$$B^M(x, \bar{x}) \longrightarrow \{B^\mu(x, \bar{x}), B^5(x, \bar{x})\}. \quad (3.68)$$

De manera completamente análoga, se define el primer mapeo para los anticampos:

$$h_{MN}^*(x, \bar{x}) \longrightarrow \{h_{\mu\nu}^*(x, \bar{x}), h_{\mu 5}^*(x, \bar{x}), h_{55}^*(x, \bar{x})\}, \quad (3.69)$$

$$C_M^*(x, \bar{x}) \longrightarrow \{C_\mu^*(x, \bar{x}), C_5^*(x, \bar{x})\}, \quad (3.70)$$

$$\bar{C}_M^*(x, \bar{x}) \longrightarrow \{\bar{C}_\mu^*(x, \bar{x}), \bar{C}_5^*(x, \bar{x})\}, \quad (3.71)$$

$$B_M^*(x, \bar{x}) \longrightarrow \{B_\mu^*(x, \bar{x}), B_5^*(x, \bar{x})\}. \quad (3.72)$$

El primer mapeo de compactificación de dimensiones extra produce una acción propia más el término trivial dado por la siguiente expresión:

$$S = \int d^4 x d\bar{x} [\mathcal{L}_{EHLd} + h_{\mu\nu}^* (\partial^\mu C^\nu + \partial^\nu C^\mu) + 2h_{\mu 5}^* (\partial^\mu C^5 + \partial^5 C^\mu) + h_{55}^* (\partial^5 C^5 + \partial^5 C^5) + \bar{C}_\mu^* B^\mu + \bar{C}_5^* B^5], \quad (3.73)$$

de la cual podemos identificar que van a existir campos ghost tanto vectoriales como escalares. Por otra parte, para cuantizar la teoría se debe fijar la norma, ya que la acción extendida con dimensiones extras es degenerada. Ya que los anticampos no representan grados de libertad, deben ser removidos. Los anticampos se pueden remover al introducir una funcional fermiónica de los campos,  $\Psi[\Phi]$ , con número de ghost  $-1$ , de modo que:

$$\Phi_A^* = \frac{\delta\Psi[\Phi]}{\delta\Phi^A} \quad (3.74)$$

La funcional para la teoría de gravedad linealizada extradimensional es:

$$\Psi = \int d^4x d\bar{x} \bar{C}^M \left( f_M - \frac{\xi g}{2} B_M \right), \quad (3.75)$$

nótese que tanto  $B_M$  como  $f_M$  deben ser términos bosónicos, con  $gh = 0$ . El mapeo de punto de  $SO(1, 3 + 1)$  a  $SO(1, 3)$  de la función de fijación de la norma debe ser de la siguiente forma:

$$f^M(x, \bar{x}) \quad \longrightarrow \quad \{f^\mu(x, \bar{x}), f^5(x, \bar{x})\}. \quad (3.76)$$

Establecido lo anterior, se puede efectuar el primer mapeo sobre la funcional  $\Psi$  y se obtiene lo siguiente:

$$\Psi = \int d^4x d\bar{x} \left[ \bar{C}^\mu \left( f_\mu - \frac{\xi g}{2} B_\mu \right) + \bar{C}^5 \left( f_5 - \frac{\xi g}{2} B_5 \right) \right]. \quad (3.77)$$

Ahora se realizará el segundo mapeo que oculta el papel dinámico de las coordenadas de las dimensiones extra. Para tal propósito, de nuevo recurrimos al criterio de paridad para definir las expansiones en serie de Fourier que constituyen el segundo mapeo. De manera ilustrativa se muestra la transformación para las funciones de fijación de norma, en el entendido de que el resto de expresiones debe ser análogo:

$$Par : \quad f^\mu(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} f^{(0)\mu} + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) f^{(m)\mu}(x) \quad (3.78)$$

$$Impar : \quad f^5(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) f^{(m)5}(x) \quad (3.79)$$

Así, las transformaciones asociadas con el resto de campos y anticampos se define de manera análoga con los siguientes criterios de paridad:

$$Par \quad \longrightarrow \quad \{h^{\mu\nu}, C^\mu, \bar{C}^\mu, B^\mu\} \quad (3.80)$$

$$Par \quad \longrightarrow \quad \{h_{\mu\nu}^*, C_\mu^*, \bar{C}_\mu^*, B_\mu^*\} \quad (3.81)$$

$$Impar \quad \longrightarrow \quad \{h^{\mu 5}, h^{55}, C^5, \bar{C}^5, B^5\} \quad (3.82)$$

$$Impar \quad \longrightarrow \quad \{h_{\mu 5}^*, h_{55}^*, C_5^*, \bar{C}_5^*, B_5^*\} \quad (3.83)$$

El *segundo mapeo* de compactificación efectuado en (3.73) produce la siguiente acción extendida:

$$S = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_{EHL} + h_{\mu\nu}^{(0)*} (\partial^\mu C^{(0)\nu} + \partial^\nu C^{(0)\mu}) + \sum_{(m)} h_{\mu\nu}^{(m)*} (\partial^\mu C^{(m)\nu} + \partial^\nu C^{(m)\mu}) \right. \\ \left. + 2 \sum_{(m)} h_{\mu 5}^{(m)*} (\partial^\mu C^{(m)5} - p^{(m)5} C^{(m)\mu}) + \bar{C}_\mu^{(0)*} B^{(0)\mu} + \sum_{(m)} \bar{C}_\mu^{(m)*} B^{(m)\mu} + \sum_{(m)} \bar{C}_5^{(m)*} B^{(m)5} \right\}, \quad (3.84)$$

donde  $\mathcal{L}_{EHL}$  es la lagrangiana efectiva de Einstein-Hilbert, producto de los dos mapeos de compactificación de dimensiones extra, la cual incluye las lagrangianas de  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ ,  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , el término bilineal  $h_{G\mu}^{(m)} - h_{\mu\nu}^{(m)}$  y el término cinético de  $h_{G\mu}^{(m)}$ . Sea  $\mathcal{L}_0$  una notación corta para referirnos a las lagrangianas efectivas originales de la teoría, el modo cero se puede denotar como  $\mathcal{L}_0^{(0)}$ , mientras que los modos excitados serían  $\mathcal{L}_0^{(m)}$ , así, la acción anterior contiene una solución propia más un término trivial del modo cero y de los modos excitados de la siguiente forma:

$$S^{(0)} = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_0^{(0)} + h_{\mu\nu}^{(0)*} (\partial^\mu C^{(0)\nu} + \partial^\nu C^{(0)\mu}) + \bar{C}_\mu^{(0)*} B^{(0)\mu} \right\} \quad (3.85)$$

$$S^{(m)} = \int d^4x \sum_{(m)} \left\{ \mathcal{L}_0^{(m)} + h_{\mu\nu}^{(m)*} (\partial^\mu C^{(m)\nu} + \partial^\nu C^{(m)\mu}) + \bar{C}_\mu^{(m)*} B^{(m)\mu} \right. \\ \left. + 2h_{\mu 5}^{(m)*} (\partial^\mu C^{(m)5} - p^{(m)5} C^{(m)\mu}) + \bar{C}_5^{(m)*} B^{(m)5} \right\}. \quad (3.86)$$

A partir de estas acciones se puede definir el sector de ghost y los términos de fijación de la norma, tanto del modo cero, como de los modos excitados, con el uso de la funcional  $\Psi$ , producto del segundo mapeo de compactificación. Aparecen explícitamente; el ghost vectorial  $C^{(0)\mu}$ , asociado con  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ ; el ghost vectorial  $C^{(m)\mu}$ , asociado con  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y finalmente el ghost escalar  $C^{(m)5}$  relacionado con  $h_{G\mu}^{(m)}$ .

Bajo el segundo mapeo aplicado a (3.77), se genera la funcional  $\Psi$  en la que están involucradas las tres tipos de funciones de fijación de la norma:

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \sum_{(m)} \Psi^{(m)} \quad (3.87)$$

$$\Psi^{(0)} = \int d^4x \bar{C}^{(0)\mu} \left[ f_\mu^{(0)} - \frac{\xi}{2} B_\mu^{(0)} \right], \quad (3.88)$$

$$\Psi^{(m)} = \int d^4x \left\{ \bar{C}^{(m)\mu} \left[ f_\mu^{(m)} - \frac{\xi_g}{2} B_\mu^{(m)} \right] + \bar{C}^{(m)5} \left[ f_5^{(m)} - \frac{\xi_h}{2} B_5^{(m)} \right] \right\}, \quad (3.89)$$

donde  $f_\mu^{(0)}$  fija la norma de  $h^{(0)\mu\nu}$ ,  $f_\mu^{(m)}$  fija la norma de  $h^{(m)\mu\nu}$  y  $f_5^{(m)}$  fija la norma de  $h_{G\mu}^{(m)}$ . Se puede apreciar que el sector del modo cero es idéntico al de la sección 1.3. Nuestra atención se centrará principalmente en los modos excitados para funciones generales. Los tres parámetros de norma asociados con las tres funciones de fijación de la norma  $f_\mu^{(0)}$ ,  $f_\mu^{(m)}$  y  $f_5^{(m)}$ , serán  $\xi$ ,  $\xi_g$  y  $\xi_h$ , respectivamente.

Como se ha establecido anteriormente, la teoría de Einstein-Hilbert linealizada con compactificación de dimensiones extra produce un término bilineal espurio en el que participan el campo de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y el pseudo-bosón de Goldstone vectorial  $h_{G\mu}^{(m)}$  dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_{mixG} = \sum_{(m)} m_{(m)} \partial_\mu \left( h^{(m)\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} h^{(m)} \right) h_{G\nu}^{(m)}. \quad (3.90)$$

La función de fijación de la norma que nos permite retirar dicho término bilineal de la teoría es de la forma:

$$f^{(m)\lambda} = \partial_\mu (h^{(m)\mu\lambda} - \eta^{\mu\lambda} h^{(m)}) - \xi_g m_{(m)} h_G^{(m)\lambda}, \quad (3.91)$$

además, genera un término que permite calcular el propagador del campo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y el pseudo-bosón de Goldstone

vectorial es dotado de una masa no física, que permite definir el propagador para  $h_{G\mu}^{(m)}$ . Este es un escenario distinto al analizado en la sección 3.1, pues ahí el pseudo-bosón de Goldstone se hizo cero; esa norma unitaria permitió calcular un propagador para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  en ausencia de pseudo-bosones de Goldstone. Este *segundo escenario* en donde se considera la función de fijación de la norma (3.91), provee de un propagador (no unitario) para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y un propagador de tipo unitario para la teoría de tipo Proca para  $h_{G\mu}^{(m)}$ . Para no interrumpir la importante discusión relacionada con la implementación del formalismo campo-anticampo, dichos propagadores se presentarán en la siguiente sección.

Por otra parte, al existir un término de masa para el pseudo-bosón de Goldstone  $h_{G\mu}^{(m)}$ , se pierde la invariancia de norma. Como se ha visto, el campo escalar  $h_{55}^{(m)}$  no aparece en la teoría, como una consecuencia de la implementación del KKM. Dadas estas condiciones, la invariancia de norma se puede introducir en la teoría por medio del truco de Stückelberg, el cual consiste en introducir un campo escalar, que convenientemente será elegido como  $h_{55}^{(m)} \equiv h_G^{(m)}$ . El truco de Stückelberg introduce un término cinético para  $h_G^{(m)}$ , así como un término bilineal entre  $h_{G\mu}^{(m)}$  y  $h_G^{(m)}$ . Dicho término bilineal también debe ser eliminado para poder definir los propagadores de  $h_{G\mu}^{(m)}$  y  $h_G^{(m)}$ , por lo que se utiliza la siguiente función para fijar la norma de  $h_{G\mu}^{(m)}$ :

$$f_5^{(m)} = \partial_\mu h_G^{(m)\mu} - \xi_h \sqrt{\xi_g} m_{(m)} h_G^{(m)}. \quad (3.92)$$

La consideración de la función de fijación de la norma (3.92) constituye un *tercer escenario*, en el que no sólo tenemos un propagador no unitario para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , sino que la expresión del propagador de  $h_{G\mu}^{(m)}$  es dada en una norma general y además, asociado al campo de norma  $h_G^{(m)}$ , se incluye en la teoría su correspondiente pseudo-bosón de Goldstone escalar  $h_G^{(m)}$  y su propagador también está definido. El *segundo* y *tercer* escenarios de los propagadores de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y los pseudo-bosones de Goldstone se presentarán en la sección 3.3.

Dadas las dos funciones de fijación de la norma  $f_\mu^{(m)}$  y  $f_5^{(m)}$ , ecuaciones (3.91) y (3.92), ahora se puede definir el sector de ghost de los modos excitados. La función de fijación de norma  $f_\mu^{(0)}$  fue estudiada en 1.3 y sus resultados se incluyen aquí para poder compararlos con los de los modos excitados. Los anticampos quedan dados en términos de los campos antighost y auxiliares, tanto del modo cero, como de los modos excitados, de la siguiente forma:

$$h_{\mu\nu}^{(0)*} = \frac{\delta\Psi^{(0)}}{\delta h^{(0)\mu\nu}} = -(\partial_\mu \bar{C}_\nu^{(0)} + \zeta \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{C}_\rho^{(0)}) \quad (3.93)$$

$$\bar{C}_\mu^{(0)*} = \frac{\delta\Psi^{(0)}}{\delta \bar{C}^{(0)\mu}} = f_\mu^{(0)} - \frac{\xi}{2} B_\mu^{(0)} \quad (3.94)$$

$$B_\mu^{(0)*} = \frac{\delta\Psi^{(0)}}{\delta B^{(0)\mu}} = -\frac{\xi}{2} \bar{C}_\mu^{(0)} \quad (3.95)$$

$$h_{\mu\nu}^{(m)*} = \frac{\delta\Psi^{(m)}}{\delta h^{(m)\mu\nu}} = -(\partial_\mu \bar{C}_\nu^{(m)} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{C}_\rho^{(m)}) \quad (3.96)$$

$$\bar{C}_\mu^{(m)*} = \frac{\delta\Psi^{(m)}}{\delta \bar{C}^{(m)\mu}} = f_\mu^{(m)} - \frac{\xi_g}{2} B_\mu^{(m)} \quad (3.97)$$

$$B_\mu^{(m)*} = \frac{\delta\Psi^{(m)}}{\delta B^{(m)\mu}} = -\frac{\xi_g}{2} \bar{C}_\mu^{(m)}. \quad (3.98)$$

$$h_{\mu 5}^{(m)*} = \frac{\delta \Psi^{(m)}}{\delta h^{\mu 5(m)}} = -\partial_\mu \bar{C}_5^{(m)} + \xi_g m_{(m)} \bar{C}_\mu^{(m)} \quad (3.99)$$

$$\bar{C}_5^{(m)*} = \frac{\delta \Psi^{(m)}}{\delta \bar{C}^{(m)5}} = f_5^{(m)} - \frac{\xi_h}{2} B_5^{(m)} \quad (3.100)$$

$$B_5^{(m)*} = \frac{\delta \Psi^{(m)}}{\delta B^{(m)5}} = -\frac{\xi_h}{2} \bar{C}_5^{(m)}. \quad (3.101)$$

Al sustituir los valores de los anticampos en las acciones extendidas del modo cero y los modos excitados, ecuaciones (3.85) y (3.86), se obtienen los términos de fijación de la norma y el sector de ghost. Ya que en la sección 1.3 al ghost asociado con el campo abeliano se le dio la notación  $C_A^{(0)}$ , entonces al ghost escalar  $C_5^{(m)}$  se le denotará como  $C_h^{(m)}$ . También con esa etiqueta se distinguirá a  $f_h^{(m)} \equiv f_5^{(m)}$ . Nótese que no hay lugar a confusión entre el ghost vectorial  $C^{(m)\mu}$  y  $C_h^{(m)}$  pues el primero tiene índice de Lorentz. La acción extendida del modo cero y de los modos excitados queda de la siguiente forma:

$$S^{(0)} = \int d^4x \left[ \mathcal{L}_0^{(0)} - (\partial_\mu \bar{C}_\nu^{(0)} + \zeta \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{C}_\rho^{(0)}) (\partial^\mu C^{(0)\nu} + \partial^\nu C^{(0)\mu}) + B^{(0)\mu} \left( f_\mu^{(0)} - \frac{\xi}{2} B_\mu^{(0)} \right) \right], \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} S^{(m)} = \int d^4x \sum_{(m)} \left\{ \mathcal{L}_0^{(m)} - (\partial_\mu \bar{C}_\nu^{(m)} + \zeta \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{C}_\rho^{(m)}) (\partial^\mu C^{(m)\nu} + \partial^\nu C^{(m)\mu}) + B^{(m)\mu} \left( f_\mu^{(m)} - \frac{\xi_g}{2} B_\mu^{(m)} \right) \right. \\ \left. + 2\partial_\mu \bar{C}_h^{(m)} \partial^\mu C_h^{(m)} - 2m_{(m)} \partial_\mu \bar{C}_h^{(m)} C^{(m)\mu} - 2\xi_g m_{(m)} \bar{C}_\mu^{(m)} \partial^\mu C_h^{(m)} + 2\xi_g m_{(m)}^2 \bar{C}_\mu^{(m)} C^{(m)\mu} \right. \\ \left. - \left( f_h^{(m)} - \frac{\xi_h}{2} B_5^{(m)} \right) B_5^{(m)} \right\}, \quad (3.103) \end{aligned}$$

donde se aprecia el término de mezcla entre ghost, el cual es de tipo vector-escalar. Después de reacomodar los términos se obtiene el sector de ghost dado por las siguientes expresiones:

$$\mathcal{L}_{FPGh^{(0)}} = \bar{C}_\mu^{(0)} [\eta^{\mu\nu} \partial^2 + (1 + 2\zeta) \partial^\mu \partial^\nu] C_\nu^{(0)}, \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FPGh^{(m)}} = \sum_{(m)} \left\{ \bar{C}_\mu^{(m)} \left[ \eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu + 2\xi_g m_{(m)}^2 \eta^{\mu\nu} \right] C_\nu^{(m)} - 2\bar{C}_h^{(m)} \partial^2 C_h^{(m)} \right. \\ \left. - 2m_{(m)} \partial_\mu \bar{C}_h^{(m)} C^{(m)\mu} - 2\xi_g m_{(m)} \bar{C}_\mu^{(m)} \partial^\mu C_h^{(m)} \right\}. \quad (3.105) \end{aligned}$$

El término de mezcla no permite calcular los propagadores de los ghost asociados con las excitaciones de KK. Recuérdese que el objetivo primordial es definir funciones de norma generales (de tipo renormalizables) y la elección de dichas funciones genera una mezcla entre ghost vectorial y escalar. Esta situación en el sector de ghost no es grave en virtud de que los ghost están desacoplados, es decir, no se acoplan al resto de campos, esto debido a que las transformaciones de norma del campo de espín-2 no involucran a los campos a diferencia de, por ejemplo, los campos de Yang-Mills. Por lo tanto, ni los propagadores, ni las mezclas de ghost participan en el cálculo de correcciones radiativas a un lazo. Los campos ghost no participan en los cálculos de correcciones radiativas, de la misma forma que sucede en QED.

Una vez que se eliminan los campos auxiliares  $B^{(0)\mu}$ ,  $B^{(m)\mu}$  y  $B_5^{(m)}$  de las acciones (3.102) y (3.103), con el uso de las ecuaciones de movimiento (como se explicó en la sección 1.3), los términos de fijación de la norma resultantes son:

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\xi} f_\mu^{(0)} f^{(0)\mu} + \sum_{(m)} \frac{1}{2\xi_g} f_\mu^{(m)} f^{(m)\mu} - \sum_{(m)} \frac{1}{2\xi_h} f_h^{(m)2}. \quad (3.106)$$

En conclusión, los ghost encontrados por medio del formalismo campo-anticampo con compactificación de una dimensión extra son los adecuados, relacionados con los campos de norma existentes, aunque no juegan un papel dinámico ya que aparecen desacoplados de los campos de norma. Los ghots se enlistan a continuación: se tienen los campos ghost vectoriales  $\bar{C}_\mu^{(0)}$  ( $C_\mu^{(0)}$ ) asociados con  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  y para los modos excitados,  $\bar{C}_\mu^{(m)}$  ( $C_\mu^{(m)}$ ) y  $\bar{C}_h^{(m)}$  ( $C_h^{(m)}$ ) se asocian con  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y  $h_{G\mu}^{(m)}$ , respectivamente. Además, los términos de fijación de la norma quedan definidos por (3.106) y dichas expresiones permiten calcular los propagadores de los campos en normas generales, como se verá en la siguiente sección.

### 3.3. El propagador del campo de norma de espín-2 masivo

En la sección 3.1 se calculó el propagador del campo de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  en la norma unitaria (expresión (3.55)), la cual corresponde a eliminar el pseudo-bosón de Goldstone  $h_{G\mu}^{(m)}$  y constituye un *primer escenario* de cálculo de los propagadores de los campos de norma. Por otra parte, en la sección 3.2 se discutió que existen dos escenarios adicionales en los que se puede calcular el propagador del campo de espín-2 masivo, correspondientes con dos funciones de fijación de la norma (lineales) que permiten eliminar términos bilineales espurios y calcular los propagadores de los correspondientes pseudo-bosones de Goldstone. En esta sección se calculan dichos propagadores.

Como se vio en la sección anterior, para fijar la norma de la teoría disponemos de tres funciones de fijación de norma; una asociada al modo cero  $f_\mu^{(0)}$  que fija la norma de  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ ;  $f_\mu^{(m)}$  que fija la norma de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y finalmente  $f_h^{(m)}$  que fija la norma de  $h_{G\mu}^{(m)}$ . En esta sección nuestro interés se centra en las excitaciones de KK.

El término bilineal (3.90) y la existencia del término cinético para el pseudo-bosón de Goldstone  $h_G^{(m)\mu}$ , (3.56) nos permiten definir la función de fijación de norma, de manera genérica como:

$$f^{(m)\lambda} = \partial_\mu (h^{(m)\mu\lambda} - \eta^{\mu\lambda} h^{(m)}) - \xi_g m h_G^{(m)\lambda}, \quad (3.107)$$

la cual es lineal y genera, de acuerdo con la expresión (3.106), una lagrangiana de fijación de la norma que se despliega como sigue:

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\xi_g} \sum_{(m)} f_\lambda^{(m)} f^{(m)\lambda} \quad (3.108)$$

$$= \sum_{(m)} \left\{ \frac{1}{2\xi_g} \partial^\mu (h_{\mu\lambda}^{(m)} - \eta_{\mu\lambda} h^{(m)}) \partial_\nu (h^{(m)\nu\lambda} - \eta^{\nu\lambda} h^{(m)}) \right. \\ \left. - m_{(m)} \partial_\mu (h^{(m)\mu\lambda} - \eta^{\mu\lambda} h^{(m)}) h_{G\lambda}^{(m)} + \frac{1}{2} \xi_g m_{(m)}^2 h_{G\lambda}^{(m)} h_G^{(m)\lambda} \right\}. \quad (3.109)$$

Así, el término de fijación de la norma (3.109) proporciona los términos que permiten (en orden de aparición): calcular el propagador del campo de norma  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , cancelar el acoplamiento donde participan el pseudo-bosón de Goldstone  $h_{G\mu}^{(m)}$  y el campo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y, finalmente, dotar de masa no física al pseudo-bosón de Goldstone.

Pongamos nuestra atención en la acción de fijación de la norma que sirve para calcular el propagador de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ :

$$\mathcal{S}_{gf} = \int d^4x \sum_{(m)} \left\{ \frac{1}{2\xi_g} \partial^\mu (h_{\mu\lambda}^{(m)} - \eta_{\mu\lambda} h^{(m)}) \partial_\nu (h^{(m)\nu\lambda} - \eta^{\nu\lambda} h^{(m)}) \right\}, \quad (3.110)$$

la cual corresponde con hacer  $\zeta = -1$  en el término de fijación de norma general:

$$S_{gf} = \int d^4x \left( \frac{1}{2\xi} f_{\lambda}^{(0)} f^{(0)\lambda} \right), \quad f_{\lambda}^{(0)} = \partial^{\mu} \left( h_{\mu\lambda}^{(0)} + \zeta \eta_{\mu\lambda} h^{(0)} \right). \quad (3.111)$$

Recuérdese que la norma armónica consiste en hacer  $\zeta = -\frac{1}{2}$ , pero esa elección de parámetro no nos sirve para cancelar el término bilineal (3.90).

La acción (3.110) se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned} S_{gf} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(\underline{m})} h^{(\underline{m})\alpha\beta} \left[ -\left(\frac{2}{\xi_g}\right) G_{\alpha\beta\sigma\kappa} \partial^{\sigma} \partial^{\rho} G^{\kappa}_{\rho\gamma\delta} \right] h^{(\underline{m})\gamma\delta} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(\underline{m})} h^{(\underline{m})\alpha\beta} \left(\frac{2}{\xi_g}\right) \left( -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} G_{\sigma\rho\gamma\delta} - \frac{1}{2} \eta_{\gamma\delta} G_{\alpha\beta\sigma\rho} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\sigma\rho} \eta_{\gamma\delta} \right) \partial^{\sigma} \partial^{\rho} h^{(\underline{m})\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

La acción de  $h_{\mu\nu}^{(\underline{m})}$  con el nuevo término de fijación de norma donde  $\zeta = -1$  tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{mG} + S_{gf} &= \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(\underline{m})} h^{(\underline{m})\alpha\beta} \left[ -G_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial^2 + 2 \left(1 - \frac{1}{\xi_g}\right) G_{\alpha\beta\sigma\kappa} \partial^{\sigma} \partial^{\rho} G^{\kappa}_{\rho\gamma\delta} \right] h^{(\underline{m})\gamma\delta} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(\underline{m})} h^{(\underline{m})\alpha\beta} \left(\frac{2}{\xi_g}\right) \left( -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} G_{\sigma\rho\gamma\delta} - \frac{1}{2} \eta_{\gamma\delta} G_{\alpha\beta\sigma\rho} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\sigma\rho} \eta_{\gamma\delta} \right) \partial^{\sigma} \partial^{\rho} h^{(\underline{m})\gamma\delta} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d^4x \sum_{(\underline{m})} h^{(\underline{m})\alpha\beta} \left( m_{(\underline{m})}^2 G_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2} m_{(\underline{m})}^2 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} \right) h^{(\underline{m})\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Después de efectuar la transformada de Fourier en el operador proveniente de la acción anterior y una cantidad considerable de álgebra se obtiene el propagador del gravitón  $h_{\mu\nu}^{(\underline{m})}$  en la norma  $\zeta = -1$ :

Propagador de  $h_{\mu\nu}^{(\underline{m})}$  en la norma  $\zeta \rightarrow -1$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{(\underline{m})\gamma\delta\mu\nu} &= \frac{1}{(q^2 - m_{(\underline{m})}^2)} \left\{ \frac{1}{2} \left( \eta_{\gamma\mu} \eta_{\delta\nu} + \eta_{\gamma\nu} \eta_{\delta\mu} - \frac{2}{3} \eta_{\gamma\delta} \eta_{\mu\nu} \right) - 2(1 - \xi_g) \frac{I_{\gamma\delta\lambda\epsilon} q^{\lambda} q^{\tau} I^{\epsilon}_{\tau\mu\nu}}{q^2 - \xi_g m_{(\underline{m})}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3m_{(\underline{m})}^2} (\eta_{\mu\nu} q_{\gamma} q_{\delta} + \eta_{\gamma\delta} q_{\mu} q_{\nu}) + \frac{1}{(m_{(\underline{m})}^2)^2} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2}{\xi_g} \frac{(q^2 - m_{(\underline{m})}^2)}{q^2 - \xi_g m_{(\underline{m})}^2} \right] q_{\gamma} q_{\delta} q_{\mu} q_{\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Si uno efectúa el límite del parámetro de norma  $\xi_g \rightarrow \infty$  se obtiene el propagador del gravitón unitario, correspondiente con la expresión (3.55). El caso de la norma de Landau no se puede definir por el surgimiento de una divergencia en el límite  $\xi_g \rightarrow 0$ . También se puede ver directamente que para normas con un parámetro arbitrario  $\xi_g \neq 0$  al hacer el límite de masa cero, la expresión se indefinir, lo que significa que el propagador del gravitón sin masa no se puede calcular considerando el valor  $\zeta = -1$  en la función de fijación de la norma. Recordando la expresión para el propagador del campo de ghost vectorial  $C_{\mu}^{(0)}$  (1.71), dicha expresión también se indefinir para

$\zeta = -1$ , justamente por tener una parte proporcional a  $\frac{1}{\zeta+1}$ , lo cual establece una conexión: la elección del parámetro  $\zeta = -1$  no permite que el propagador de  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  exista, que al mismo tiempo tampoco exista propagador para su correspondiente campo ghost  $C_\mu^{(0)}$  y en el caso del campo de norma masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  genera un propagador con un límite de masa cero que diverge. Nótese que esto está relacionado con la forma del término bilineal, pues es el que dicta la necesidad del uso de dicho valor para  $\zeta$ .

Se ha recalado nuestra intención de conseguir propagadores bien comportados para realizar correcciones radiativas, en el caso de  $\zeta = -1$ , el límite  $q \rightarrow \infty$  no es cero. La primera impresión podría ser que sería un propagador mal comportado; sin embargo, que el propagador se comporte de tal forma en dicho límite es un hecho que habría de esperarse, dado que la teoría no es renormalizable en el sentido de Dyson. La expresión (3.114) no es la historia completa, pues el propagador de espín-2 masivo se define por completo hasta establecer los propagadores de los pseudo-bosones de Goldstone. Se enfatiza que además del *primer escenario*, el cual corresponde a la norma unitaria, para el campo de espín-2 masivo, hay dos escenarios más: en el *segundo escenario* se conserva el pseudo-bosón de Goldstone vectorial, mientras que en el *tercer escenario* además del pseudo-bosón de Goldstone vectorial  $h_{G\mu}^{(m)}$ , también se incluye el pseudo-bosón de Goldstone escalar  $h_G^{(m)} = h_{55}^{(m)}$ .

El término cinético del pseudo-bosón de Goldstone  $h_{G\mu}^{(m)}$  aparece explícitamente en la teoría y después de agregar el término de fijación de la norma (3.109),  $h_{G\mu}^{(m)}$  tiene una lagrangiana de tipo Proca de la forma:

$$\mathcal{L} = \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} H_{\mu\nu}^{(m)} H^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} \xi_g m_{(m)}^2 h_{G\mu}^{(m)} h_G^{(m)\mu} \right], \quad (3.115)$$

donde el término de masa  $\xi_g m_{(m)}^2$  no es físico debido a la presencia del parámetro de norma  $\xi_g$  y permite calcular su propagador, definido de la forma:

$$\tilde{\Delta}_{(m)\mu\nu} = \frac{-i}{q^2 - \xi_g m_{(m)}^2} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{\xi_g m_{(m)}^2} \right]. \quad (3.116)$$

Así, los propagadores (3.114) y (3.116) constituyen el *segundo escenario* conformado por un propagador no unitario para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y el propagador tipo unitario para  $h_{G\mu}^{(m)}$ . Este último propagador puede ser utilizado para correcciones radiativas, pero encierra el problema de que no es bien comportado para altas energías. Pero sabemos que, implícito a la presencia de un propagador unitario subyace un pseudo-bosón de Goldstone, el cual ha sido retirado de la teoría. Dicho pseudo-bosón de Goldstone debe ser el campo  $h_{55}^{(m)} = h_G^{(m)}$ . Para demostrarlo se utiliza el truco de Stückelberg.

Ahora establecemos el *tercer escenario*. Como el pseudo-bosón de Goldstone  $h_G^{(m)}$  no aparece explícitamente en la teoría, pues los términos que lo involucran se cancelan en el proceso de compactificación de la dimensión extra, debemos introducirlo por medio de un mecanismo que modifique la estructura de norma de la teoría de una forma conveniente. Dicho mecanismo es conocido como el truco de Stückelberg, el cual consiste en introducir un campo escalar de tal suerte que la nueva teoría tenga invariancia de norma. La necesidad de restaurar la invariancia de norma proviene del hecho de que en el proceso de fijación de la norma de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ ,  $h_{G\mu}^{(m)}$  fue dotado de masa (no física). Regresemos a la lagrangiana (3.115). Para incorporar la invariancia de norma se introduce un campo escalar, convenientemente elegido como  $h_G^{(m)}$ , mediante la transformación:

$$h'_{G\mu}{}^{(m)} = h_{G\mu}^{(m)} + \frac{\partial_\mu h_G^{(m)}}{\sqrt{\xi_g m_{(m)}}}, \quad (3.117)$$

de modo que la nueva teoría tiene una lagrangiana de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} \left( \partial_\mu h_{G\rho}^{(m)} - \partial_\rho h_{G\mu}^{(m)} \right) \left( \partial^\mu h_G^{(m)\rho} - \partial^\rho h_G^{(m)\mu} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \xi_g m_{(m)}^2 \left( h_{G\mu}^{(m)} + \frac{\partial_\mu h_G^{(m)}}{\sqrt{\xi_g m_{(m)}}} \right) \left( h_G^{(m)\mu} + \frac{\partial^\mu h_G^{(m)}}{\sqrt{\xi_g m_{(m)}}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.118)$$

la cual tiene la invariancia de norma:

$$\delta h_{G\mu}^{(m)} = \partial_\mu \xi_5, \quad \frac{\delta h_G^{(m)}}{\sqrt{\xi_g m_{(m)}}} = -\xi_5, \quad (3.119)$$

donde  $\xi_5$  es el parámetro de norma que surge naturalmente en la teoría y se presenta en la expresión (3.36). En este caso, la norma unitaria corresponde con hacer  $h_G^{(m)} = 0$ , ya que entonces se recupera la teoría original. En este sentido, nótese que el truco de Stückelberg actúa como el *inverso* de la norma unitaria. La lagrangina (3.118) se puede expandir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} \left( \partial_\mu h_{G\rho}^{(m)} - \partial_\rho h_{G\mu}^{(m)} \right) \left( \partial^\mu h_G^{(m)\rho} - \partial^\rho h_G^{(m)\mu} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \xi_g m_{(m)}^2 h_{G\mu}^{(m)} h_G^{(m)\mu} + \sqrt{\xi_g m_{(m)}} h_{G\mu}^{(m)} \partial^\mu h_G^{(m)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h_G^{(m)} \partial^\mu h_G^{(m)} \right]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Hemos obtenido una lagrangiana en donde ya aparece el término cinético del pseudo-bosón de Goldstone  $h_G^{(m)}$  y un término bilineal que lo incluye junto con  $h_{G\mu}^{(m)}$ . Así, como se había comentado en la sección 3.2, podemos definir la siguiente función de fijación de la norma general para  $h_{G\mu}^{(m)}$ :

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi_h} \sum_{(m)} f_{\bar{\mu}}^{(m)2}, \quad f_h^{(m)} = \partial_\mu h_G^{(m)\mu} - \xi_h \sqrt{\xi_g m_{(m)}} h_G^{(m)}. \quad (3.121)$$

Esta lagrangiana de fijación de norma contiene los términos que permiten: calcular el propagador de  $h_{G\mu}^{(m)}$ ; cancelar el término bilineal entre pseudo-bosones de Goldstone, introducido por el método de Stückelberg y dotar de masa no física a  $h_G^{(m)}$ :

$$\mathcal{L}_{gf} = \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{2\xi_h} (\partial_\mu h_G^{(m)\mu})^2 + \sqrt{\xi_g m_{(m)}} \partial_\mu h_G^{(m)\mu} h_G^{(m)} - \frac{1}{2} \xi_h \xi_g m_{(m)}^2 h_G^{(m)} h_G^{(m)} \right]. \quad (3.122)$$

Al ser  $h_{G\mu}^{(m)}$  un campo de norma, se identifica el término de fijación de la norma usual de los campos de espín-1 con un parámetro de norma  $\xi_h$  diferente a  $\xi_g$ :

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi_h} \sum_{(m)} (\partial_\mu h_G^{(m)\mu})^2, \quad (3.123)$$

de modo que su propagador tiene la siguiente forma:

Propagador del pseudo-bosón de Goldstone vectorial  $h_{G\mu}^{(m)}$

$$\tilde{\Delta}_{(m)\nu\rho} = -\frac{i}{(q^2 - \xi_g m_{(m)}^2)} \left[ \eta_{\nu\rho} - (1 - \xi_h) \frac{q_\nu q_\rho}{q^2 - \xi_h \xi_g m_{(m)}^2} \right]. \quad (3.124)$$

Resalta el hecho de que en el polo espurio del propagador anterior surgen los dos parámetros de norma multiplicados. Finalmente la lagrangiana del pseudo-bosón de Goldstone escalar  $h_G^{(m)}$  es:

$$\mathcal{L} = \sum_{(m)} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu h_G^{(m)} \partial^\mu h_G^{(m)} - \frac{1}{2} \xi_h \xi_g m_{(m)}^2 h_G^{(m)} h_G^{(m)} \right], \quad (3.125)$$

de la cual se desprende el propagador:

Propagador del pseudo-bosón de Goldstone escalar  $h_G^{(m)}$

$$\tilde{\Delta}_{(m)}(q) = \frac{i}{q^2 - \xi_h \xi_g m_{(m)}^2}. \quad (3.126)$$

Nótese que al igual que en el propagador de  $h_{G\mu}^{(m)}$  (3.124), también están involucrados los dos parámetros de norma  $\xi_h$  (asociado con  $h_{G\mu}^{(m)}$ ) y  $\xi_g$  (asociado con  $h_G^{(m)}$ ). Esto establece la profunda conexión existente entre sus propagadores. Por simplicidad se utilizó sólo la letra  $q$  para referirnos de manera genérica a los 4-momentos de los campos involucrados.

En conclusión, en el *tercer escenario* (el más general disponible), cuando se fija la norma para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  se rompe la invariancia de norma para  $h_{G\mu}^{(m)}$  y al introducir a  $h_G^{(m)}$  mediante el truco de Stückelberg se introduce la invariancia de norma para  $h_{G\mu}^{(m)}$  y  $h_G^{(m)}$ . Los tres propagadores asociados con el campo de espín-2 masivo (ecuación (3.114)) y los pseudo-bosones de Goldstone (ecuaciones (3.124) y (3.126)) quedan definidos bajo la dependencia de los parámetros de norma  $\xi_g$  y  $\xi_h$ . Como las excitaciones de KK  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , del gravitón usual  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , obedecen a la lagrangiana de gravedad linealizada más un término de masa apropiado para los objetos de espín-2, su interpretación es que son campos análogos al gravitón masivo, lo cual justifica el título de esta tesis de maestría.

# Conclusiones y perspectivas

En esta tesis de maestría se presentó el análisis del propagador del gravitón masivo en una norma de tipo  $R_\xi$ , con el objetivo de realizar correcciones radiativas futuras. El propagador del campo de espín-2 masivo está completamente definido hasta la definición de los propagadores de sus pseudo-bosones de Goldstone asociados, de tipo vectorial y escalar. El gravitón masivo surgió de la implementación del mecanismo de Kaluza-Klein sobre la teoría de gravedad linealizada con una dimensión extra. Se presentó una discusión detallada del mecanismo de compactificación de dimensiones extra, el cuál se aplicó tanto a la teoría de Einstein-Hilbert linealizada, como a la acción extendida y a la funcional fermiónica  $\Psi$  involucrada en el formalismo de campo-anticampo para incorporar la simetría BRST. Los propagadores del gravitón y de los pseudo-bosones de Goldstone quedaron completamente definidos. Se mostró que los ghost están desacoplados en gravedad linealizada por lo que no generan dinámica.

Toda observable física (elemento de matriz  $S$ ) deberá ser independiente de los parámetros de norma. En la norma general proporcionada para el campo de espín-2 masivo podemos verificar si ciertas cantidades conocidas en el Modelo Estándar mantienen su carácter de observables físicas en el entendido de ser independientes de norma.

Para definir propagadores bien comportados del campo de espín-2 masivo y sus pseudo-bosones de Goldstone se analizaron funciones de fijación de la norma generales (lineales), en el contexto de la simetría BRST. En el caso de la función de fijación de la norma para el campo de espín-2 masivo se mostró que son necesarios dos parámetros, uno de norma denotado como  $\xi_g$  y el otro asociado con la participación de la traza, denotado por  $\zeta$  y se enfatizó que el valor de este último parámetro necesario para eliminar la mezcla entre el pseudo-bosón de Goldstone y el campo de espín-2 masivo es  $\zeta = -1$ . Ante dicha elección, el propagador de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{(m)\gamma\delta\mu\nu} = & \frac{1}{(q^2 - m_{(m)}^2)} \left\{ \frac{1}{2} \left( \eta_{\gamma\mu}\eta_{\delta\nu} + \eta_{\gamma\nu}\eta_{\delta\mu} - \frac{2}{3}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\mu\nu} \right) - 2(1 - \xi_g) \frac{I_{\gamma\delta\lambda\epsilon} q^\lambda q^\tau I_{\tau\mu\nu}^\epsilon}{q^2 - \xi_g m_{(m)}^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3m_{(m)}^2} (\eta_{\mu\nu} q_\gamma q_\delta + \eta_{\gamma\delta} q_\mu q_\nu) + \frac{1}{(m_{(m)}^2)^2} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2}{\xi_g} \frac{(q^2 - m_{(m)}^2)}{q^2 - \xi_g m_{(m)}^2} \right] q_\gamma q_\delta q_\mu q_\nu \right\}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

cuyo límite  $q \rightarrow \infty$  no es cero, por lo que *a priori*, no es un propagador bien comportado, hecho que cabría esperar dado que la teoría no es renormalizable en el sentido de Dyson.

El propagador del pseudo-bosón de Goldstone  $h_{G\mu}^{(m)}$  quedó definido hasta que se fijó la norma para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y se produjo una lagrangiana de tipo Proca debido a la presencia del término de masa no físico. El propagador resultante para  $h_{G\mu}^{(m)}$  no es bien comportado por lo que se utilizó una función de fijación de norma general para tener propagadores mejor comportados a altas energías. En el caso del pseudo-bosón de Goldstone escalar  $h_G^{(m)}$ , su sector se canceló en el proceso de compactificación. Para construir un propagador bien comportado para  $h_{G\mu}^{(m)}$ , se introdujo al pseudo-bosón de Goldstone escalar  $h_G^{(m)}$ , mediante el truco de Stückelberg, de modo que la teoría se convirtió en invariante de norma. Una vez efectuada la fijación de la norma tanto del campo de espín-2 masivo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , como del pseudo-bosón de Goldstone de norma  $h_{G\mu}^{(m)}$ , se pudieron calcular los propagadores de los pseudo-bosones de Goldstone, cuyas expresiones se muestran a continuación:

$$\tilde{\Delta}_{(m)\nu\rho} = -\frac{i}{(q^2 - \xi_g m_{(m)}^2)} \left[ \eta_{\nu\rho} - (1 - \xi_h) \frac{q_\nu q_\rho}{q^2 - \xi_h \xi_g m_{(m)}^2} \right] \quad (3.128)$$

$$\tilde{\Delta}_{(m)}(q) = \frac{i}{q^2 - \xi_h \xi_g m_{(m)}^2}. \quad (3.129)$$

Nótese que en ambos propagadores están involucrados los dos parámetros de norma  $\xi_h$  (asociado con  $h_{G\mu}^{(m)}$ ) y  $\xi_g$  (asociado con  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ ). Esto establece una profunda conexión entre sus propagadores.

Los ghos se enlistan a continuación: se tienen los ghost vectoriales  $\bar{C}_\mu^{(0)}$  ( $C_\mu^{(0)}$ ) asociados con  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  y para los modos excitados,  $\bar{C}_\mu^{(m)}$  ( $C_\mu^{(m)}$ ) y  $\bar{C}_h^{(m)}$  ( $C_h^{(m)}$ ) se asocian con  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y  $h_{G\mu}^{(m)}$ , respectivamente. Sin embargo, los ghost no juegan un papel dinámico en la teoría pues están desacoplados.

Sobre nuestras perspectivas, se sabe que en la teoría cuántica de campos, la función beta  $\beta$  contiene información sobre las constantes de acoplamiento con respecto a la escala de energía. Particularmente, para las teorías abelianas, el signo de la función  $\beta$  es positivo por lo que la interacción es más fuerte a pequeñas distancias; en cambio, en las teorías no abelianas la función  $\beta$  es negativa por lo que en ellas existe la libertad asintótica, es decir, el valor de las constantes de acoplamiento decrece a mayores energías. En los últimos años ha surgido un nuevo interés por estudiar los efectos del gravitón no masivo sobre las funciones  $\beta$  de las teorías escalar, vectorial y de Yang-Mills, con resultados controversiales. Consideramos que es muy interesante estudiar las funciones  $\beta$  considerando las contribuciones del gravitón masivo, utilizando los propagadores presentados en esta tesis. Esto será sujeto de estudios posteriores.

# Apéndice A

## Integrales de las funciones $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$

A continuación se definen las funciones del conjunto completo de funciones  $\{f^{(m)}\}$  y algunas de sus integrales. Algunas de estas expresiones se presentan en [18]. Las funciones  $\{f^{(m)}\} = \{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}, f_O^{(m)}\}$  tienen por argumento a  $(\bar{p} \cdot \bar{x})$ , pero a lo largo de la tesis por simplicidad sólo se expresan en términos de  $(\bar{x})$  o se omite su argumento si lo permite el contexto. También se omite por economía en la notación el superíndice de Fourier en  $\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x} = \bar{p} \cdot \bar{x}$ . A su vez  $\bar{p} \cdot \bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1}{R_1} + \dots + \frac{m_n \bar{x}_n}{R_n}$ . Las funciones normalizadas son:

$$f_E^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \quad (\text{A.1})$$

$$f_E^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \cos(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) \quad (\text{A.2})$$

$$f_O^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \text{sen}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) \quad (\text{A.3})$$

Al efectuar el segundo mapeo e integrar sobre las  $n$  dimensiones extra aparecen términos proporcionales a las funciones  $f^{(m)}$  pares e impares elevadas a diferentes potencias con diferentes modos de Fourier. A continuación se expresan las dos integrales elevadas a la primera potencia:

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) = \int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Las integrales con funciones elevadas a la segunda potencia representan la propiedad de *ortonormalidad* del conjunto completo de funciones  $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x})\}$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p}^{(k)} \cdot \bar{x}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) f_E^{(k)}(\bar{p}^{(k)} \cdot \bar{x}) \quad (\text{A.6})$$

$$= \int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p}^{(k)} \cdot \bar{x}) = \delta_{(m)k} \quad (\text{A.7})$$

Si se analizan acoplamientos de más alto orden aparecerán términos proporcionales a las funciones  $f^{(m)}$  pares e impares a la tercera potencia con diferentes modos de Fourier:

$$\int_0^{2\pi R_n} \cdots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) f_E^{(k)}(\bar{p}^{(k)} \cdot \bar{x}) f_E^{(r)}(\bar{p}^{(r)} \cdot \bar{x}) = f_E^{(0)} \Delta_{(mkr)} \quad (\text{A.8})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \cdots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p}^{(k)} \cdot \bar{x}) f_E^{(r)}(\bar{p}^{(r)} \cdot \bar{x}) = f_E^{(0)} \Delta'_{(mkr)} \quad (\text{A.9})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \cdots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p}^{(k)} \cdot \bar{x}) f_O^{(r)}(\bar{p}^{(r)} \cdot \bar{x}) \quad (\text{A.10})$$

$$= \int_0^{2\pi R_n} \cdots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p}^{(m)} \cdot \bar{x}) f_E^{(k)}(\bar{p}^{(k)} \cdot \bar{x}) f_O^{(r)}(\bar{p}^{(r)} \cdot \bar{x}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

donde

$$\Delta_{(rms)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{(m,r+s)} + \delta_{(r,m+s)} + \delta_{(s,r+m)}) \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta'_{(rms)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{(m,r+s)} + \delta_{(r,m+s)} - \delta_{(s,r+m)}) \quad (\text{A.13})$$

Y también pueden aparecer integrandos de las funciones  $f^{(m)}$  a la cuarta potencia con diferentes modos de Fourier. Las cuales se expresan a continuación:

$$\int_0^{2\pi R_n} \cdots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)} f_E^{(k)} f_E^{(r)} f_E^{(s)} = \left(f_E^{(0)}\right)^2 \Delta_{(mkr s)} \quad (\text{A.14})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \cdots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)} f_O^{(k)} f_O^{(r)} f_O^{(s)} = \left(f_E^{(0)}\right)^2 \Delta'_{(mkr s)} \quad (\text{A.15})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \cdots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)} f_E^{(k)} f_O^{(r)} f_O^{(s)} = \left(f_E^{(0)}\right)^2 \Delta''_{(mkr s)} \quad (\text{A.16})$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_{(mkr s)} = \frac{1}{2} & (\delta_{(m,k+r+s)} + \delta_{(m+k,r+s)} + \delta_{(m+r,k+s)} \\ & + \delta_{(s,m+k+r)} + \delta_{(m+s,k+r)} + \delta_{(m+k+s,r)} + \delta_{(m+r+s,k)}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{(mkr s)} = \frac{1}{2} & (-\delta_{(m,k+r+s)} + \delta_{(m+k,r+s)} + \delta_{(m+r,k+s)} \\ & - \delta_{(s,m+k+r)} + \delta_{(m+s,k+r)} - \delta_{(m+k+s,r)} - \delta_{(m+r+s,k)}) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \Delta''_{(mkr s)} = \frac{1}{2} & (-\delta_{(m,k+r+s)} - \delta_{(m+k,r+s)} + \delta_{(m+r,k+s)} \\ & + \delta_{(s,m+k+r)} + \delta_{(m+s,k+r)} + \delta_{(m+k+s,r)} - \delta_{(m+r+s,k)}) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Las integrales de  $f_E f_E f_E f_O$  y  $f_E f_O f_O f_O$  se hacen cero idénticamente por los los límites de integración.



# Bibliografía

- [1] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) 1921, 966 (1921).
- [2] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys. 37 895 (1926).
- [3] G. Nordström, *On the possibility of unifying the electromagnetic and gravitational fields*, Phys. Z. 15, 504 (1914).
- [4] J. Scherk and J. H. Schwarz, *Dual models for non-hadrons*, Nucl. Phys. B 81, 118 (1974).
- [5] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. B 443, 85 (1995).
- [6] P. Hörava and E. Witten, *Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary*, Nucl. Phys. B 475, 94 (1996).
- [7] J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, Phys. Rept. (1997).
- [8] Fierz, M. and Pauli, W., *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. Lond., A173, 211-232, (1939).
- [9] C. de Rham *et al.* *Graviton mass bounds* arXiv: 1606.08462 (2017).
- [10] Huang, Xing and Parker, *Graviton Propagator in a Covariant Massive Gravity Theory*, ArXiv, (2007).
- [11] S. Folkerts *et al.* *On ghosts in theories of self-interacting massive spin-2 particles*. arXiv:1107.3157 (2011).
- [12] C. de Rahm. *Massive Gravity*, Living Rev. Relativity 17 (2014).
- [13] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of gravity. I. The Canonical Theory* Pys. Rev. (1967).
- [14] M. Veltman, *Quantum Theory of gravitation*. Methods in field theory course notes. (1976).
- [15] G. 't Hooft and M. Veltman. *One-loop divergencies in the theory of gravitation*, Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, no 1 (1974), p. 69-94.
- [16] N. E. J. Bjerrum-Bohr, *et al.* *Bending of Light in Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. 114, 061301 (2015).
- [17] M. Huerta *Estructura de norma de gravedad linealizada con dimensiones extra compactas*, Tesis de Maestría BUAP, (2020).
- [18] H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano. *Integration of Kaluza-Klein modes in Yang-Mills theories*, Phys. Rev. D 84, 076010, (2011); J. J. Toscano *et al.* *The standard model in extra dimensions and its Kaluza-Klein effective Lagrangian*, arXiv:1603.03128 (2018); M. Huerta, J. J. Toscano *et al.* *Symmetry in the extra-dimensional Yang-Mills theory and its Kaluza-Klein effective description*, Int. Jour. Mod. Phys. A. (2022).
- [19] Becchi, C; Rouet, A and Stora, *The Abelian Higgs-Kibble Model. Unitarity of the S Operator*. Phys. Lett. B52: 344. (1974); Becchi, C; Rouet, A and Stora, *Renormalization of gauge theories*. Ann. Phys. 98: 287. (1976).
- [20] John. F. Donoghue, *Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory*, arXiv: 1702.00319 [hep-th], (2017).

- [21] John. F. Donoghue, *Quantum General Relativity and Effective Field Theory*, arXiv:2211.09902v2 [hep-th] (2023).
- [22] R. Leng *et al.* *Rigorous treatment of the  $S^1/\mathbb{Z}_2$  orbifold model with brane-Higgs couplings*, Phys. Rev. D 103, 075010 (2021).
- [23] L. Bergström, *Dark Matter candidates*, New Journal of Physics (2009).
- [24] G. Atondo-Rubio, *et al.* *Linearized five dimensional Kaluza-Klein theory as a gauge theory*. Revista Mexicana de física, Vol. 54(3), 188-193 (2008).
- [25] S. Y. Choi *et al.* *Factorization and polarization in linearized gravity*, Phys. Rev. D 51, 2751 (1995).
- [26] J. T. Giblin, *The Limited Accuracy of Linearized Gravity*, Phys. Rev. D 99, 023527 (2019) arXiv:1810.05203.
- [27] G. 't Hooft, *Unitarity in the Brout-Englert-Higgs Mechanism for Gravity*, ArXiv (2007).
- [28] I. Oda, *Higgs Mechanism for gravitons*, Modern Physics Letters A, (2010).
- [29] Z. Kakushadze, *Gravitational Higgs Mechanism and massive gravity*, Int. Jour. Mod. Phys. A, (2008).
- [30] L. Alberte, A. H. Chamseddine and V. Mukhanov *Massive gravity: resolving the puzzles*, Journal of High Energy Physics, (2010).
- [31] Wytler. C. S. *Introduction to Einstein-Maxwell equations and the Rainich conditions*, arXiv:1606.08527 (2016).
- [32] K. Hinterbichler, *Theoretical Aspects of Massive Gravity*, Rev. Mod. Phys. 84, 671 (2012).
- [33] G. F. Giudice *et al.* *Quantum Gravity and Extra Dimensions at High-Energy Colliders*, Nucl.Phys. B544, 3-38, (1999).
- [34] G. Gambuti and N. Maggiore. *A note on harmonic gauge(s) in massive gravity*. Physics Letters B 807(2020)135530.
- [35] G. Gambuti and N. Maggiore. *Fierz-Pauli theory reloaded: from a theory of a symmetric tensor field to linearized massive gravity*, Eur. Phys. J. C (2021) 81:171.
- [36] T. Gleisberg *et al.* *Helicity Formalism for Spin-2 Particles*. arXiv:hep-ph/0306182v3 (2003).
- [37] T. Han, J.D. Lykken, and Ren-Jie Zhang. *Kaluza-Klein states from large extra dimensions*, Phys. Rev. D 59, 105006 (1999).
- [38] L. H. Ryder *Quantum Field Theory*, 2nd edn. Cambridge University Press (1996).
- [39] J. Gomis, J. París and Stuart Samuel, *Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization*, arXiv:hep-th/9412228 (1994).
- [40] J. J. Toscano *et al.*, *One-loop structure of the photon propagator in the standard model extension*, Phys. Rev. D 99, 013002 (2019).

