BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

La Integral Distribucional de Denjoy

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta

Oswaldo Flores Medina

Directores de Tesis

Juan Alberto Escamilla Reyna

Juan Héctor Arredondo Ruíz

Puebla, Pue. DICIEMBRE 2014

Índice general

Introducción

Existen al menos dos formas de definir un proceso de integración. Por ejemplo, en el siglo XVII Newton define su integral, que en términos actuales se traduce, como una anti-derivada, o primitiva. Esto se conoce como una definición descriptiva. Por otro lado, Riemann definió su integral tomando primero "sumas" y después el "límite". A este proceso se le conoce como una definición constructiva. Posteriormente el Teorema Fundamental del Cálculo (desarrollado por Newton y Leibnitz de forma independiente) muestra la conexión entre estos dos procesos, sin embargo, es bien sabido que estas integrales no son equivalentes.

Definición 0.1. *Una función con valores reales* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se dice que es Newton integrable, si existe una función diferenciable* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $F'(x) = f(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$. *A* F *se le llama la primitiva de* f *en* $[a, b]$. *Y la integral de* f *sobre* $[a, b]$ *está dada por* $F(b) - F(a)$.

Definición 0.2. *Una función con valores reales* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se dice que es Riemann integrable, si existe un número real* L *tal que: para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una constante* $\delta > 0$, *tal que para toda partición* $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ *y* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, *que satisfacen:* $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ *y* $x_i - x_{i-1} < \delta$ *para toda* $i = 1, \ldots, n$. *Se tiene que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \varepsilon.$$

La integral de f *en* $[a, b]$ *es el número* L.

Ejemplo 0.3. *Sea* $F(x) = x^2 \sin x^{-2}$ *si* $x \neq 0$ *y* $F(0) = 0$. *Ya que* F *es diferenciable en cada punto, su derivada* F' *es Newton integrable, pero no Riemann integrable, sobre* $[0, 1]$.

Un ejemplo de una función que sea Riemann integrable pero no Newton integrable es una función escalonada. Es interesante hacer notar que la derivada F', del Ejemplo 0.3, no es Lebesgue integrable en $[0, 1]$ (la definición de integral de Lebesgue se puede consultar en [14, pág. 29]). Sabemos que la integral de Lebesgue generaliza la integral de Riemann, sin embargo las integrales de Lebesgue y Newton tampoco son equivalentes.

Posteriormente, con la finalidad de integrar derivadas de funciones diferenciables, Denjoy (1912) y Perron (1914) definen dos integrales que cumplen con este objetivo (y que generalizaron la integral de Lebesgue y Newton). Fue casi 10 años después que se probó la equivalencia de estas dos integrales. Hubo una investigación activa sobre la integral de Denjoy-Perron hasta 1935. El gran avance se produjo en 1957/8 cuando Henstock y Kurzweil dieron de forma independiente una definición de integral de “tipo Riemann”. Esta definición resultó equivalente a la integral de Denjoy. No sólo la definición es ahora más sencilla, sino que también las pruebas usando la integral de Henstock-Kurzweil son a menudo más simples (que las demostraciones correspondientes usando la integral de Denjoy).

En los años siguientes, Henstock y otros desarrollaron más la teoría. Pero contrario a lo que ocurre con la integral de Riemann y Lebesgue existen funciones Henstock-Kurzweil integrables cuyo valor absoluto no es integrable. A estas funciones se les conoce como condicionalmente integrables[1]. Y a las funciones que tanto ellas como su valor absoluto son integrables, se les conoce como funciones absolutamente integrables. Como algunas funciones Henstock-Kurzweil integrables son condicionalmente integrables, no se puede definir una norma análoga a la de $L^1(\mathbb{R})$, sobre el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables. Sin embargo, Alexiewicz define en [2] (en 1948) la semi-norma:

$$\| f \|_A = \sup_{I \subset [a,b]} \left\{ \left| \int_I f \right| \right\}.$$

Desafortunadamente $(HK, \|\|_A)$ no es completo. Existen distintos métodos para estudiar el espacio HK en un contexto de mejores propiedades topológicas. Uno de ellos es dotar a HK de una topología vectorial a través de la técnica del límite inductivo (el lector puede consultar el artículo [1], o el desarrollo del contenido de este artículo en la tesis [32]). Otro método es construir la completación de HK como se hace usualmente (ver [22]). El objetivo de nuestro trabajo es estudiar la completación del espacio HK usando la Teoría de Distribuciones. La definición que damos de integral, es para un subespacio de las distribuciones, y es semejante a la hecha por Newton.

[1] En inglés se les llama “nonabsolutely integrable functions”.

Definición 0.4. *Sea f una distribución (función generalizada) sobre la recta real. Si existe una función continua F, con límites reales en $\pm\infty$ tal que $F' = f$ (derivada distribucional). Entonces la integral distribucional de f se define como $\int_{-\infty}^{\infty} f = F(\infty) - F(-\infty)$.*

Esta definición cristaliza el objetivo de muchos matemáticos, en su intento por definir una integral que recupere cualquier derivada.

Trabajar con la integral distribucional tiene la ventaja de obtener una mejor versión del Teorema Fundamental del Cálculo, son válidos muchos teoremas clásicos de la teoría de integración. Además los conceptos empleados para definir la integral distribucional nos permiten generalizar esta teoría de integración en distintas direcciones. Talvila, extiende el concepto de Integral Distribucional en [16], y obtiene aplicaciones en las ecuaciones diferenciales. En [18] se define una integral para funciones definidas en espacios métricos, dicho artículo fue premiado por el Journal of Mathematical Analysis and Applications (JMAA).

En el primer capítulo abordamos la integral de Henstock. El orden es parecido a la forma como la mayoría de los textos desarrollan la teoría de la integral. Este capítulo nos da la pauta para la estructura del capítulo principal. Por supuesto incluimos los resultados que se requirieron en algunas pruebas del Capítulo 3, tal como la fórmula de integración por partes, fundamental para caracterizar las distribuciones en $\mathcal{A}_C$ cuya derivada coincide con el concepto usual de derivada (Sección 3.2.2). Los Capítulos 1 y 2 tienen la finalidad de que el lector no tenga que recurrir a otras fuentes.

En el segundo Capítulo definimos el espacio de las distribuciones, o funciones generalizadas (Definición 2.2). Damos algunos ejemplo entre los cuales estan las distribuciones regulares, generadas por una función localmente Lebesgue integrable. También damos la definición de un concepto análogo al de distribución regular, cuya terminología no es común en los textos que tratan el tema de las distribuciones, se trata de un tipo de distribuciones a las que llamamos en esta tesis: distribuciones HK-regulares, que se refieren a distribuciones generadas por funciones localmente Henstock-Kurzweil integrables.

Hablamos también de las operaciones básicas en este espacio. Operaciones como la suma, el producto por escalar y el producto por una función de clase

C^{∞}. La suma se puede extender a todo $\mathcal{D}'$ de tal manera que al restringir esta suma a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ "coincida" con la suma usual de funciones, mientras que en el caso del producto no es posible definirlo en general (para todo $\mathcal{D}'$) de tal manera que coincida con el producto usual de funciones. Este tema es un precedente para la Sección 3.1.6. Después definimos la derivada para las distribuciones. Cuando nos restringimos a distribuciones regulares, el concepto de derivada distribucional coincide con el que se tiene para funciones en el sentido clásico. En la penúltima sección abordamos la convergencia de distribuciones para tener los elementos que nos permitan hablar de un ejemplo de series de Fourier: la "traza de onda", que nos servirá en el Capítulo 3 para dar un ejemplo de una distribución integrable sobre ciertos intervalos compactos. (Y que nos interesa para generalizaciones porteriores de la integral distribucional en donde la traza de onda será integrable en todo $\mathbb{R}$.)

El inicio del Capítulo 3 quisimos que tuviera un esquema típico, similar al de cualquier texto que desarrolla el tema de la integral. Presentando las propiedades de linealidad y las que involucran intervalos. Después se presentan los teoremas clásicos sobre los cuales siempre se espera hablar: el Teorema Fundamental del Cálculo y las Fórmulas de Cambio de Variable y de Integración por Partes. Temas abordados por lo general en el comienzo del desarrollo de la integral. También incluimos el Teorema de Hake porque caracteriza a la integral de Henstock-Kurzweil, y también se cumple para la integral distribucional. Por supuesto hay muchos otros teoremas considerados clásicos que se pueden consultar en [30] pero que no son requeridos en esta tesis.

La segunda parte del capítulo presenta resultados que de hecho son consecuencia de los elementos dados en la primera mitad. Se desarrollan temas de las distribuciones integrables como espacio: como el tema de las regulares y del espacio dual. Que son consecuencia principalmente de la integración por partes. Se comparan las topologías de $\mathcal{A}_C$ con la de $\mathcal{D}'$ en términos de la convergencía. Y se determina el orden que tienen las distribuciones en $\mathcal{A}_C$.

Consideramos conveniente comentar aquí las aportaciones de este trabajo. El lector podrá notar en primer lugar que aunque casi todos los resultados presentados se obtuvieron del artículo de Talvila [30], el orden es muy distinto, pues en este trabajo se desarrolla la teoría como generalmente se hace al desarrollar teoría de la integral. Comenzando por las definiciones y propiedades básicas, los teoremas clásicos. Dejando al final aspectos de carácter más general como lo son las propiedades de espacio de $\mathcal{A}_C$.

A lo largo de esta tesis el lector encontrará varios comentarios y observaciones que son producto de nuestro estudio, con el objetivo de esclarecer al lector varios de los conceptos, su motivación o su contexto.

Hemos tomado algunos ejemplos que usualmente se consideran en distribuciones y los hemos revisado en el marco de la teoría que estamos desarrollando para proveer de ejemplos que ilustren el espacio de las distribuciones integrables. Varios de ellos no están en el artículo.

Por supuesto la mayor parte de las demostraciones son muy similares a las que presenta Talvila, aunque en varias ocasiones se modificaron algunas de estas pruebas, otras se ampliaron, o se comentaron demostraciones alternativas para obtener los mismos resultado (Teorema 3.50 y Teorema 3.71). Otra contribución de la tesis es el Lema 3.56, el cual se usó para demostrar el Teorema 3.58.

Capítulo 1

La integral de Henstock

Nuestro trabajo, a lo largo de los tres capítulos, lo desarrollaremos para funciones cuyo dominio son intervalos no acotados, así que comenzaremos este capítulo revisando tres aspectos que necesitamos acerca del sistema de los números reales extendidos; su orden, su aritmética y su topología.

Es conocido que a $\mathbb{R}$ se le adjuntan los puntos ∞ y $-\infty$ para formar el **sistema de los números reales extendidos** $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, y se extiende el orden usual sobre $\mathbb{R}$ definiendo que $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Con este orden se obtiene que: cada subconjunto A de $[-\infty, \infty]$ tiene una mínima cota superior, o **supremo**, y una máxima cota inferior, o **ínfimo**, los cuales son denotados por $\sup A$ e $\inf A$, respectivamente, aunque también se usa la notación $\vee A$ para el supremo y $\wedge A$ para el ínfimo.

La aritmética de $\mathbb{R}$ puede ser extendida parcialmente a $[-\infty, \infty]$ de la siguiente manera:

$$x \pm \infty = \pm\infty (x \in \mathbb{R}), \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty (x > 0), \quad x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty (x < 0).$$

En la bibliografía consultada no se intenta definir $\infty - \infty$, pero es común aceptar la convención, a menos que se indique lo contrario, de que

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0.$$

A partir de la topología usual en $\mathbb{R}$, denotada por $\tau_{\mathbb{R}}$, se puede definir una topología para los reales extendidos. A tal topología la denotaremos por $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$, y será la colección de todas la uniones de elementos de $\tau_{\mathbb{R}}$ con intervalos de la forma $[a, x)$, $(x, b]$ y $[a, b]$, con $a, b \in \{\infty, \infty\}$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$. Además, esta topología hace a los reales extendidos un espacio compacto homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Observación 1.1. *En este capítulo trabajaremos con funciones reales cuyo dominio son los reales extendidos, que como ya dijimos es un espacio homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$*, lo que nos puede hacer pensar que es lo mismo trabajar con funciones sobre intervalos acotados que sobre intervalos no acotados. Esto no es verdad, ya que para la teoría de integración este cambio de dominio para las funciones, producirá cambios muy claros en el conjunto de funciones a considerar, tal como se ejemplificará en la Observación 1.5.*

Observese que con esta topología podemos también definir el concepto de límite de una sucesión $\{x_n\}$ en $\overline{\mathbb{R}}$. Es decir, $\{x_n\}$ converge a $x \in \overline{\mathbb{R}}$, si y sólo si para todo abierto $U_x \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$, que contenga a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_x$ si $n \geq N$.

Al hablar de *medida* sobre los reales extendidos siempre nos referiremos a la medida de Lebesgue m. Así, recordemos que la medida de Lebesgue evaluada en los intervalos de $[-\infty, \infty]$ coincide con la función longitud l, y en varias ocasiones emplearemos esta última notación en lugar de m. También recordemos que si una afirmación acerca de los elementos x de un subconjunto $A \subset [-\infty, \infty]$ es verdadera, excepto para los x en un subconjunto nulo de A, diremos que la afirmación es verdadera *casi dondequiera* en A. Si no se especifica cual es el subconjunto A, entonces se asumirá que $A = [-\infty, \infty]$.

Advertimos que en este capítulo sólo trabajaremos con el conjunto de funciones $f : [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\pm\infty) = 0.$$

Se define la **parte positiva** y **negativa** de f por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

así, $f = f^+ - f^+$ y $|f| = f^+ + f^-$.

A continuación damos la definición de intervalo etiquetado, y enseguida algunas especificaciones necesarias para el desarrollo del capítulo.

Definición 1.2. *Sea $\delta : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Un* ***intervalo etiquetado*** *(x, J) consiste de un intervalo cerrado $J \subseteq [-\infty, \infty]$ y un punto $x \in J$. Si el intervalo (x, J) es finito se dirá que está subordinado a δ si*

$$J \subset (x - \delta(x), x + \delta(x)).$$

Y si es un intervalo infinito, se dirá que está subordinado a δ si

$$J \subset (1/\delta(\infty), \infty].$$

La letra $\mathcal{P}$ denotará una colección finita de intervalos etiquetados no traslapados, es decir, una colección de intervalos donde la intersección de cualesquiera dos de ellos es a lo más un punto. Sea $\mathcal{P} = \{(x, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ tal colección, donde cada $[c_i, d_i]$ está contenido en el intervalo $J \subseteq [-\infty, \infty]$. Adoptaremos la siguiente terminología:

(a) Los puntos $\{x_i\}$ serán las etiquetas de $\mathcal{P}$ y los intervalos $\{[c_i, d_i]\}$ serán los intervalos de $\mathcal{P}$.

(b) Si $(x_i, [c_i, d_i])$ está subordinado a δ para cada i, entonces $\mathcal{P}$ está subordinada a δ.

(c) Sea $E \subset [-\infty, \infty]$. Si $\mathcal{P}$ está subordinada a δ y cada $x_i \in E$, entonces $\mathcal{P}$ es E-subordinada a δ.

(d) Si $\mathcal{P}$ está subordinada a δ y $J = \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i]$, entonces $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de J subordinada a δ. De aquí en adelante, si $J = [-\infty, \infty]$ se dirá simplemente que son particiones etiquetadas.

Debe notarse que no toda colección de intervalos no traslapados (de algún intervalo cerrado) es una partición. Por otro lado, obsérvese que si δ_1 y δ_2 son como en la definición anterior, entonces toda partición etiquetada subordinada al ínfimo de estas dos funciones, $\delta_1 \wedge \delta_2$, también está subordinada a δ_1 y a δ_2.

El siguiente teorema es indispensable para garantizar la buena definición de integral, puesto que garantiza la existencia de particiones etiquetadas subordinadas a una función estrictamente positiva definida sobre $\mathbb{R}$. La demostración de este y todos los resultados que aparecen en este capítulo se pueden consultar en [4], [27] y [14].

1.3. Lema de Cousin. *Si δ es una función estrictamente positiva definida sobre $\mathbb{R}$, entonces existe una partición etiquetada de $[-\infty, \infty]$ que está subordinada a δ.*

Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{P} = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ una colección de intervalos etiquetados no traslapados. Usaremos la siguiente notación para una suma de Riemann en la colección $\mathcal{P}$:

$$f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i - c_i).$$

Ahora tenemos los elementos necesarios para la siguiente:

Definición 1.4. *Una función $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es HK-integrable si existe un número real L con la siguiente propiedad: para cada $\epsilon > 0$, existe una función estrictamente positiva δ definida en $\mathbb{R}$ tal que $|f(\mathcal{P}) - L| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada subordinada a δ. El número L se llamará la integral de f y lo denotamos por $\int_{-\infty}^{\infty} f$. Una función f es HK-integrable en un conjunto medible $E \subseteq [-\infty, \infty]$ si $f\chi_E$ es HK-integrable.*

Desde luego, nuestra definición no es ambigua ya que la integral de una función, si existe, es única. Por otro lado, si f es integrable en $E = [a, b]$, un intervalo cerrado en $[-\infty, \infty]$, también se usará la notación $\int_a^b f$ en lugar de $\int_{-\infty}^{\infty} f\chi_E$.

Si en la definición anterior se cambia la función δ por una constante se obtiene la definición de la integral de Riemann. La motivación para considerar a δ como una función en lugar de una constante se puede hacer a través del *Teorema Fundamental del Cálculo* tal como se hace al inicio del primer capítulo de la referencia [27]. Además, el lector puede consultar en el mismo texto la prueba de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo para la HK-integral, como un ejemplo de las demostraciones que dejan ver claramente la ventaja de tomar a δ como una función en lugar de una constante.

El prefijo "HK" es para hacer referencia a los autores de esta definición: Ralph Henstock ($1923 - 2007$) y Jaroslav Kurzweil (1926-). Aunque en ocasiones no usaremos este prefijo a menos de que sea necesario, por lo que las palabras *integral, integrable, etc.* harán referencia, en este capítulo, a *HK-integral, HK-integrable, etc.*

Observación 1.5. *Deseamos hacer notar aquí, la diferencia entre el espacio de funciones cuyo dominio es un intervalo acotado y el conjunto de funciones que tienen como dominio a los reales extendidos (que son, estas últimas, las funciones con las que estamos trabajando). El ejemplo que ilustrará esto es muy simple y se trata de cualquier función constante, por ejemplo la función*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = 1, \text{ para toda } x \in (a, b).$$

*Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces f **es integrable**, pero si $a = -\infty$ y $b = \infty$ entonces f **no será integrable**.*

Está reflexión se puede llevar a un nivel más profundo si se establece una aplicación inyectiva ψ entre los conjuntos $B([a, b])$ y $B(\overline{\mathbb{R}})$, donde $B([a, b])$ y $B(\overline{\mathbb{R}})$ son conjuntos de funciones con valores reales que tienen como dominio a $[a, b]$ y $\overline{\mathbb{R}}$, respectivamente.

Esta aplicación ψ asocia a cada elemento $\overline{f} \in B(\overline{\mathbb{R}})$ una función $f \in B([a, b])$ de la siguiente manera: $\psi(\overline{f}) = f$ si $f(x) := \overline{f}(\overline{x})$, donde $x \in [a, b]$ y $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$. La regla $x \mapsto \overline{x}$ se puede determinar por una composición de funciones, como pueden ser

$\varphi : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x = a, \\ -\infty, & \text{si } x = b, \\ \tan(\lambda(x)), & \text{para } x \in (a, b), \end{cases}$$

la función $\lambda : [a, b] \to [-\frac{\pi/2}{\pi/2}]$ se define como $\lambda(x) := \frac{\pi(a+b-2x)}{2(a-b)}$.

Por supuesto ψ no es sobreyectiva. Por lo tanto, un subconjunto de $B([a, b])$, de funciones que son integrables, no se pueden poner en correspondencia con aquellas que son integrables en $\overline{\mathbb{R}}$.

Esto da lugar a una serie de preguntas cuya discusión es amplia, pero no es nuestro objetivo desarrollar aquí esa discusión. Nuestro objetivo es que el lector tenga presente la diferencia de trabajar con intervalos no acotados.

Ahora presentamos una serie de resultados básicos. El primero de ellos nos dice que las funciones HK-integrables forman un espacio vectorial con las operaciones usuales de producto por escalar y suma de funciones.

Teorema 1.6. *Sean $f, g : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces*

(a) *kf es integrable y $\int_{-\infty}^{\infty} kf = k \int_{-\infty}^{\infty} f$ para cada $k \in \mathbb{R}$.*

(b) *$f+g$ es integrable y* $\int_{-\infty}^{\infty}(f+g)=\int_{-\infty}^{\infty} f+\int_{-\infty}^{\infty} g$.

Teorema 1.7. *Sea* $f:[-\infty,\infty]\longrightarrow\mathbb{R}$. *Entonces: f es integrable si y sólo si f es integrable en cada intervalo cerrado $J\subset[-\infty,\infty]$. Además, si $z\in J=[s,t]$ entonces* $\int_J f=\int_s^z f+\int_z^t f$.

Como mencionamos antes, el involucrar los conceptos de teoría de la medida nos permite mejorar algunos teoremas debilitando las hipótesis, como veremos a continuación.

Teorema 1.8. *Sean $f,g:[-\infty,\infty]\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces*

(a) *Si $f\leq g$ casi dondequiera, entonces* $\int_{-\infty}^{\infty} f\leq\int_{-\infty}^{\infty} g$.

(b) *Si $f=g$ casi dondequiera, entonces* $\int_{-\infty}^{\infty} f=\int_{-\infty}^{\infty} g$.

Teorema 1.9. *Sea $f:[-\infty,\infty]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable y $g:[-\infty,\infty]\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f=g$ casi dondequiera en $[-\infty,\infty]$. Entonces g es integrable, y* $\int_{-\infty}^{\infty} f=\int_{-\infty}^{\infty} g$.

La integral de Henstock-Kurzweil tiene algunos aspectos que llaman la atención al compararla con la integral de Lebesgue, uno de ellos es el hecho de que existen funciones f integrables, pero cuyo valor absoluto $|f|$ no lo es. A estas funciones se les conoce como **condicionalmente integrables**. Y a las funciones f que son integrables y cuyo valor absoluto $|f|$ también lo es, se les llama **absolutamente integrables**. El conjunto $\{f:[-\infty,\infty]\longrightarrow\mathbb{R}|\ f$ es absolutamente integrable $\}$ es un conjunto importante, ya que forma un subespacio vectorial que contiene a todas las funciones positivas que son Henstock-Kurzweil integrables, de hecho coincide con el conjunto de las Lebesgue integrables. En relación a lo anterior enunciamos el siguiente resultado:

Teorema 1.10. *Si f es absolutamete integrable, entonces* $|\int_{-\infty}^{\infty} f|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f|$.

Deseamos definir ahora una norma para el conjunto de las funciones HK-integrables. Como acabamos de comentar, no todas las funciones HK-integrables son absolutamente integrables así que no se puede definir una norma como la que se define en el conjunto de las Lebesgue integrables.

Para definir la norma que deseamos primero definimos una seminorma de la siguiente manera. Para cada función HK-integrable, f, se define

$$\| f \|_A := \sup_{[a,b]\subset\overline{\mathbb{R}}}\left\{\Big|\int_a^b f\Big|\right\}. \tag{1.1}$$

Esta es llamada la seminorma de Alexiewicz (es una seminorma como resultado del Teorema 1.8). Si establecemos la siguiente relación de equivalencia: para f y g, funciones HK-integrables, se dice que $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ casi donde quiera. Entonces podemos definir a $\mathcal{HK}$ como el conjunto de las clases de equivalencia de las funciones HK-integrables. Luego, la expresión (1.1) define una norma sobre $\mathcal{HK}$, y con ello podemos hablar ahora del espacio $(\mathcal{HK}, \| \|_A)$, es decir, el conjunto de clases de equivalencia $\mathcal{HK}$ con una estructura de espacio normado. Desafortunadamente, este espacio no es completo (ver [4, pág. 410]). Tal problema es una de las motivaciones para estudiar el espacio $\mathcal{A}_C$, que trataremos en el Capítulo 3.

A continuación presentamos algunos teoremas de suma importancia. Los dos primeros nos proporcionan criterios que determinan si una función es integrable, sin hacer uso de la definición, ya que en ocasiones puede ser muy complicado recurrir a ella para determinar si una función es integrable o no. El Lema de Saks-Henstock se emplea con mucha frecuencia en las demostraciones.

1.11. Criterio de Cauchy. *Una función $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si, y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una función δ estrictamente positiva en $\mathbb{R}$ tal que $|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ sean particiones etiquetadas subordinadas a δ.*

Teorema 1.12. *Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existen funciones integrables $g_1, g_2 : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $g_1 \leq f \leq g_2$ en $[-\infty, \infty]$, y $\int_{-\infty}^{\infty} (g_2 - g_1) \leq \epsilon$. Entonces f es integrable.*

Teorema 1.13. *Si $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces f es integrable en $[a, b]$.*

1.14. Lema de Saks-Henstock. *Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $\epsilon > 0$. Supongase que δ es una función estrictamente positiva en $\mathbb{R}$ tal que $|f(\mathcal{P}) - \int_{-\infty}^{\infty} f| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada subordinada a δ. Si $\mathcal{P}_0 = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ es cualquier colección de intervalos etiquetados no traslapados, subordinados a δ, entonces*

$$\left| f(\mathcal{P}_0) - \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i}^{d_i} f \right| \leq \epsilon \ \text{y} \ \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)(d_i - c_i) - \int_{c_i}^{d_i} f \right| \leq 2\epsilon.$$

En seguida, incluimos algunos resultados acerca de integrales impropias y una caracterización de funciones absolutamente integrables.

1.15. Teorema de Hake. *Sea* $f : [a, \infty] = I \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable sobre* $[a, b]$ *para cada* $a < b < \infty$*. Entonces* f *es integrable sobre* I*, si y sólo si* $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f$ *existe.*

Corolario 1.16. *Sea* $f : [a, \infty] = I \longrightarrow \mathbb{R}$ *absolutamente integrable sobre* $[a, b]$ *para cada* $a < b < \infty$*.*

(a) *Si* f *es no negativa,* f *es integrable sobre* I *si y sólo si* $\sup\{\int_a^b f : a < b < \infty\} < \infty$*.*

(b) *Si* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es integrable sobre* I *y* $|f(x)| \leq g(x)$ *para cada* $x \in I$*, entonces* f *es absolutamente integrable sobre* I*.*

Teorema 1.17. *Sea* $I = [-\infty, b]$*,* $b < \infty$*, y* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable sobre* I*. Sea* $F(x) = \int_{-\infty}^x f$ *para* $-\infty < x \leq b$*. Entonces* $|f|$ *es integrable sobre* I*, si y sólo si* F *es de variación acotada en* I*. En este caso,* $\int_I |f| = Var(F; I)$*.*

Ahora presentamos las dos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC); el cual es parte, sin duda, de la motivación para desarrollar el estudio de la HK-integral.

1.18. Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 1). *Sea* $A \subset [a, \infty)$ *un conjunto a lo más numerable y sea* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *continua y tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *existe. Si* f *es diferenciable excepto posiblemente en* A*, entonces* f' *es integrable en* $[a, \infty)$ *y* $\int_a^\infty f' = f(\infty) - f(a)$*, donde se define* $f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$*.*

Sería deseable que, en esta primera parte del TFC, A fuera cualquier conjunto de medida cero, pero en tal caso el teorema no es cierto. La función de Cantor es un contraejemplo (véase [4]).

1.19. Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 2). *Si* $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es integrable y se define a* $F(x) = \int_{-\infty}^x f$*,* $-\infty < x < \infty$*, la integral indefinida de* f*. Entonces*

(a) F *es continua en* $[-\infty, \infty]$*;*

(b) F *es diferenciable casi dondequiera en* $[-\infty, \infty)$*, y además* $F' = f$ *casi dondequiera en* $[-\infty, \infty)$*.*

Un resultado interesante es que *toda función integrable es medible*, ello es consecuencia de que *la integral indefinida, F, de la función f es continua cuando $f \in \mathcal{HK}$*. Como F es continua, también lo es $k^{-1}\big(F(t+1/k) - F(t)\big)$ para cada entero positivo k. Y ya que cada función continua es Lebesgue medible y f es el límite, casi donde quiera, de estas funciones cuando k tiende a infinito (esto último por el Teorema 1.19 (b)), entonces f es límite, casi donde quiera, de funciones medibles y por consiguiente también es medible.

Otra propiedad que tiene la integral indefinida está en términos de la siguiente

Definición 1.20. *Sean $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $E \subset [a,b]$, y consideremos F como una función de intervalos. La función F es AC_δ en E si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número positivo η y una función positiva δ sobre E tal que $|F(\mathcal{P})| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea E-subordinada a δ y $\mu(\mathcal{P}) < \eta$. La función F es ACG_δ en E, si E puede escribirse como unión numerable de conjuntos E_n de tal forma que F es AC_δ sobre cada E_n.*

Ahora emplearemos el concepto de función ACG_δ para caracterizar a las funciones HK-integrables.

Teorema 1.21. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es HK-integrable sobre $[a,b]$ si y solo si existe una ACG_δ función F definida en $[a,b]$ tal que $F' = f$ casi dondequiera en $[a,b]$.*

Observación 1.22. *En [14, pág. 147s.] se pueden consultar lo siguiente.*

1. *En la demostración de este teorema, para probar necesidad se emplea la función $F(x) = \int_a^x f$, en otras palabras, toda integral indefinida F es ACG_δ.*

2. *Se puede probar que una función ACG_δ en $[a,b]$ es diferenciable casi dondequiera en $[a,b]$. Por lo tanto, una función F es una integral indefinida si y sólo si F es ACG_δ en $[a,b]$.*

Otro resultado importante para la teoría y que sirve a nuestro fin es el siguiente

1.23. Teorema de Integración por Partes. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es HK-integrable sobre $[a,b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f$ para cada $x \in [a,b]$. Si $G : [a,b] \to \mathbb{R}$*

es absolutamente continua en $[a, b]$*, entonces* fG *es* HK*-integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b fG = F(b)G(b) - (L)\int_a^b FG'. \tag{1.2}$$

En este teorema se puede debilitar la hipótesis sobre G, de que sea absolutamente continua por la hipótesis de que sea de variación acotada. Como resultado de ello la integral de Lebesgue que aparece en el lado derecho de la igualdad (1.2) se cambia por la integral de Riemann-Stieljes, $\int_a^b FdG$.

Este teorema es válido también para la integral de Lebesgue y su redacción es prácticamente la misma.

Capítulo 2

Distribuciones

La teoría de las Distribuciones es un tema interesante pero muy amplio, así que nuestro propósito aquí es abordar solamente los aspectos básicos, y aquello que requerimos en el Capítulo 3 para poder desarrollar el tema central de esta tesis.

Hablaremos de una "generalización" (en cierto sentido, por supuesto) de la noción de función, que será llamada distribución. abordaremos las operaciones con estas distribuciones, así como de la derivada y convergencia de distribuciones. Pero antes de ello daremos una breve motivación del tema.

La Función Delta

La teoría de distribuciones fue creada, entre otras razones (véase [5, pág. 1]), para dar una fundamentación teórica sólida a la definición de la función delta, la cual fue introducida por Dirac (1930)[1] como un recurso técnico en la formulación matemática de la mecánica cuántica. Pero la idea de Dirac de la función delta se puede entender en términos clásico de la siguiente manera.

Considere una varilla de espesor no uniforme. Con el fin de describir como se distribuye su masa a lo largo de esta, se introduce una función de densidad de masa; esto se define físicamente como la masa por unidad de longitud de la varilla en el punto x, y matemáticamente se define como una función tal

[1] "*El significado físico de la función δ es tan grande, que la idea subyacente en esta primera 'función singular' puede remontarse en el tiempo tan lejos como se desee...*" [5, pág. 24]

que la masa total de la sección de la varilla de a hasta b es $\int_a^b \rho(x)dx$. Esta es una descripción satisfactoria de la distribución de masa continua; propiedades dinámicas tales como su centro de masa y momento de inercia se pueden expresar en términos de la función ρ.

Pero si la masa se concentra en un número finito de puntos en lugar de ser distribuida de forma continua, entonces la descripción anterior deja de funcionar. Considere, por ejemplo, un cable de masa despreciable, con una pequeña pero pesada "gota" unida a su punto medio, $x = 0$. Supongase que la gota tiene una unidad de masa y es tan pequeña que es razonable representarla matemáticamente como un punto. Entonces la masa total en el intervalo (a, b) es cero si 0 está fuera del intervalo, y es uno si el cero está dentro del intervalo. No es posible determinar una función ρ que pueda representar esta distribución de masa. Si la hubiera, entonces tendríamos que $\rho(x) = 0$ para toda $x \neq 0$, ya que la masa por unidad de longitud es cero excepto en $x = 0$. Pero si una función se anula en todas partes excepto en un solo punto, es fácil probar que su integral sobre cualquier intervalo debe ser cero, por lo que, integrando sobre un intervalo que incluye el origen no puede dar el valor correcto, 1. Desde el punto de vista físico, la densidad de masa es cero en todo punto excepto en $x = 0$, donde es infinita ya que una masa finita (distinta de cero) es concentrada en una longitud cero; y es tan infinitamente grande allí que la integral es distinta de cero a pesar de que el integrando es positivo solo sobre una región "infinitesimalmente pequeña". Esto tiene sentido físico, aunque es matemáticamente absurdo. Pero Dirac encontró útil pretender que existe una función $\delta(x)$ que tiene precisamente las propiedades mencionadas.

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \delta(x) \geq 0 \text{ para } -\infty < x < \infty,\\
&(2) \qquad \delta(x) = 0 \text{ para } x \neq 0,\\
&(3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.
\end{aligned}
$$

Al usar este objeto δ en cálculos formales, era posible llegar a resultados que eran fisicamente significativos y "correctos". Aunque Dirac no fue la única persona (ni siquiera la primera) en razonar de esta manera, su nombre fue dado al objeto δ, el cual es llamado con frecuencia la función delta de Dirac (o medida de Dirac, o distribución de Dirac).

Los matemáticos puros de la época consideraron la idea de Dirac como un desafío: una idea que es matemáticamete absurda pero funciona y da resultados correctos debe ser, de alguna manera, correcta. Debe existir una teoría en la que δ tenga el lugar que le corresponde.

Las bases sólidas de la teoría buscada fueron desarrollado por Sobolev (en 1936) y Schwartz (en 1950), y por supuesto va mucho más allá de simplemente justificar el uso la función delta. La teoría de distribuciones que ellos desarrollaron libera al cálculo diferencial de ciertas dificultades creadas por la existencia de funciones no diferenciables, y tiene propiedades de gran utilidad. Toda distribución es diferenciable, y para funciones diferenciables en sentido ordinario, la nueva derivada coincide con la derivada ordinaria. Se dispone de teoremas de convergencia que permiten manejar los procesos habituales de paso al límite; y se puede diferenciar e integrar series, término a término, sin preocuparse por la convergencia uniforme.

Esta teoría tiene, sin embargo, sus limitaciones: en general no se puede hablar del producto de dos distribuciones, y además, se requiere de cierta cantidad de conceptos formales.

Invitamos al lector interesado en conocer más detalles a cerca de los antecedentes de la teoría de distribuciones, y la motivación de muchos de sus conceptos y su terminología, a leer el artículo de Bombal: "Origen de la Teoría de las distribuciones"([5]).

La exposición que haremos aquí es sencilla y elemental. Para una teoría desarrollada ampliamente el lector puede consultar [17], [23] o [20]. Por supuesto la referencia que siempre se debe tener presente (y que desarrolla ampliamente el tema) es la obra de Laurent Schwartz ([24]).

2.1. Teoría básica de las Distribuciones

Las distribuciones se definen como las funcionales lineales y continuas sobre el espacio:

$$\mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ \phi \in C^\infty \text{ y } \phi \text{ tiene soporte compacto } \}.$$

Un ejemplo de una función $\phi \in \mathcal{D}$ es

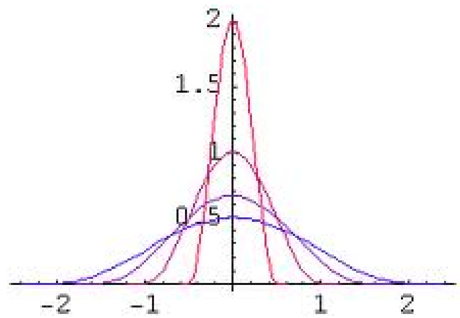

Figura 2.1: Sucesión de funciones que aproximan a la delta de Dirac.

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2-1}) & \text{para } |x| < 1 \\ 0 & \text{para } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Al espacio $\mathcal{D}$ algunos autores lo llaman *espacio prueba (o espacio base)*[2]. Para definir las funcionales continuas sobre el espacio base, es necesario definir la topología con la que se está considerando al espacio $\mathcal{D}$. Tal topología requiere de todos los elementos necesarios para hablar del concepto de límite inductivo. El tema de la topología del espacio $\mathcal{D}$ es muy amplio pero afortunadamente podemos evitarlo considerando una definición equivalente a la convergencia de sucesiones en esa topología.

Definición 2.1. *Decimos que una sucesión $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}$ converge a $\phi \in \mathcal{D}$ si y solo si existe un compacto K tal que todo ϕ_n tiene soporte en K y para cada entero $m \geq 0$, la sucesión de derivadas $\phi_n^{(m)}$ converge a $\phi^{(m)}$ uniformemente en K.*

Ahora podemos definir el concepto de distribución.

Definición 2.2. *El espacio de las distribuciones se define como*

$$\mathcal{D}' = \{T : \mathcal{D} \to \mathbb{R} |\ T \textit{ es lineal y continua } \}.$$

[2]Se le llama espacio base porque a partir de él se definen las distribuciones. O espacio prueba porque se puede cambiar por otros espacios para dar lugar a otro tipo de distribuciones. Por ejemplo, se puede cambiar a $\mathcal{D}$ por el conjunto $\mathcal{S}$, de las funciones infinitamente diferenciable y de decrecimiento rápido, para obtener las distribuciones temperadas. Incluso en esta tesis (en el Capitulo 3) cambiaremos al espacio base, $\mathcal{D}$, por un espacio más grande. Y ya que al espacio $\mathcal{D}$ se le llama espacio prueba, a los elemento $\phi \in \mathcal{D}$ algunos textos las llaman *funciones prueba*.

1. Notación: Para cada $\phi \in \mathcal{D}$, $\langle T, \phi \rangle$ denotará la acción de la distribución T.

2. T es continua sobre $\mathcal{D}$ si y sólo si $\langle T, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle$ en $\mathbb{R}$, siempre que $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}$.

Al espacio $\mathcal{D}'$ también se le llama el dual del espacio $\mathcal{D}$. A los elementos de $\mathcal{D}'$ se les llama distribuciones.

Se debe notar que en el inciso 2 de la definición anterior la continuidad del funcional está en términos de "continuidad por sucesiones" que, aunque en general, la continuidad por sucesiones no es equivalente a la continuidad, en el caso de las distribuciones afortunadamente sí lo es debido a las propiedades del espacio base.

Se dice que una función medible f es *localmente integrable*, si $(L)\int_K |f| < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$. Las integrales están tomadas con respecto a la medida de Lebesgue. $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ simboliza el conjunto de las funciones localmente integrables.

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entonces podemos definir una distribución $T_f : D \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera: $\langle T_f, \phi \rangle = (L)\int_{-\infty}^{\infty} f\phi$. Obsérvese que la definición anterior es correcta ya que para toda función localmente integrable f y toda función $\phi \in \mathcal{D}$, la integral $(L)\int_{-\infty}^{\infty} f\phi$ existe.

2.3. *Nota*. *Se dice que T_f es generada o determinada por la función f. De hecho es costumbre identificar T_f con f y decir que tales distribuciones "son" funciones. El lector puede observar que si se define la aplicación $\Psi : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'$ por $\Psi(f) = T_f$, está aplicación es inyectiva (pero no sobreyectiva, como veremos después), se asume que los elementos de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ son clases de equivalencia. Y en este sentido $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ está contenido en $\mathcal{D}'$. De ahí la razón de que también se les llame a los elementos de $\mathcal{D}'$ "**funciones generalizadas**".*

Es natural preguntarse si además de que $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ esté contenido en $\mathcal{D}'$ también su estructura algebraica se preserva, es decir, si por ejemplo $\Psi(f_1+f_2) = \Psi(f_1)+\Psi(f_2)$, o si en el caso en que $f_1 \cdot f_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\Psi(f_1 f_2) = \Psi(f_1)\Psi(f_2)$.

Podemos preguntarnos también si es posible definir, en este espacio más general, conceptos como la derivada pero de tal manera que el nuevo concepto coincida con el concepto clásico de derivada. Incluso nos podemos preguntar si al tener una sucesión $\{f_n\} \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ¿qué tipos de convergencia de la sucesion implican que $\Psi(f_n) \to \Psi(f)$? El resto de nuestra exposición sigue este mismo orden de ideas. Veremos que la suma se puede extender a todo $\mathcal{D}'$ de tal manera que al restringir esta suma a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ "coincide" con la suma usual de funciones, mientras que en el caso del producto no es posible definirlo en general para todo $\mathcal{D}'$, de tal manera que coincida con el producto usual de funciones. Veremos después, que es posible definir la derivada para las distribuciones, y que tal concepto coincide con el que se tiene para funciones clásicas. El último tema que abordamos es la convergencia de distribuciones.

En cuanto al término "distribución" podemos citar el ejemplo en la introducción de este capítulo, en donde se emplea a la función delta ($\delta \in \mathcal{D}'$) para modelar la "distribución" de masa de un cable.

De aquí en adelante emplearemos cualquiera de las dos expresiones, "funciones generalizadas" o "distribuciones", para referirnos a los elemento de $\mathcal{D}'$.

Análogamente al caso anterior, si μ es una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{R}$, o si μ es una medida positiva en $\mathbb{R}$ tal que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, la ecuación

$$\langle T_\mu, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu, \quad \phi \in \mathcal{D}$$

define una distribución T_μ en $\mathbb{R}$, que también es considerada idéntica a la medida μ. Si la medida μ, además de ser finita en compactos, es interiormente regular entonces se le llama medida de Radon, e igualmente genera una distribución.

A las distribuciones generadas por una función localmente integrable se les llama **regulares**. Cualquier otra distribución es llamada **singular**.

Un ejemplo de una distribución que no está dada por una función es la delta de Dirac. Para definirla tomemos $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo. La funcional $\delta_{x_0} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, definida por $\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle := \phi(x_0)$, es una distribución y es llamada la delta de

Dirac con masa en x_0. También se suele emplear la notación $\delta(x - x_0)$ en lugar de δ_{x_0}. De aquí en adelante usaremos cualquiera de las dos notaciones. Para el caso en que $x = 0$ se escribirá simplemente δ.

Observación 2.4. *La definición de la función delta en la introducción de los textos varia de acuerdo al autor que se esté consultando. Las que aparecen a continuación son formas equivalentes de definir la misma función:*

a) $\delta(x) = H'(x)$, *donde* H *es la función de Heaviside (ver Ejemplo 2.8).*

b) $\delta(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *para una sucesión adecuada* $\{f_n\}$.

c) $\delta(x) = 0$ *para* $x \neq 0$ *y* $\int_{-\infty}^{\infty} \delta = 1$.

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$ *o* $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$.

El lector puede observar que d) es la más parecida a la definición funcional que dimos en un principio.

Las distribuciones generadas por el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ son, en principio, el conjunto de distribuciones regulares. Sin embargo este concepto de distribución regular se puede extender si se emplea una integral más general como es la integral de Henstock-Kurzweil. Este conjunto de funciones contiene propiamente a las Lebesgue integrables, por lo que algunas distribuciones que en principio no eran regulares (al emplear la integral de Lebesgue), lo serán ahora (en el sentido de la Definición 2.5) al introducir el uso de la integral de Henstock-Kurzweil.

Se dice que una función medible f es *localmente Henstock-Kurzweil integrable* si $(HK) \int_K f < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$. $HK_{loc}\mathbb{R}$ simboliza el conjunto de las funciones localmente Henstock-Kurzweil integrables.

La terminología que emplearemos a continuación no es común.

Definición 2.5 (Distribuciones HK-regulares). *Si* $f \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ *entonces* $\langle T_f, \phi \rangle = (HK) \int_{-\infty}^{\infty} f\phi$ *define una distribución. A las distribuciones* T_f, *generadas por una función localmente Henstock-Kurzweil integrable, les llamaremos distribuciones* HK*-regulares o distribuciones regulares en el sentido de Henstock-Kurzweil.*

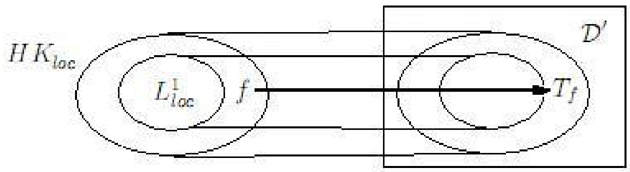

Figura 2.2: Distribuciones regulares y HK-regulares.

Antes de introducir las operaciones sobre $\mathcal{D}'$, hablaremos de una de las razones para elegir a $\mathcal{D}$ como el espacio adecuado para definir a las distribuciones. La razón de la que hablamos es que $\mathcal{D}$ contiene suficientes funciones, en el sentido de que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ está unívocamente determinada (excepto en un conjunto de medida cero) por las integrales $(L)\int_{-\infty}^{\infty} f\phi$. (En efecto, la adherencia de $\mathcal{D}$ en la topología de la convergencia uniforme contiene a toda función continua de soporte compacto.)

La siguiente proposición es consecuencia de la idea anterior.

Proposición 2.6. *Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $(L)\int_{-\infty}^{\infty} F\phi' = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$. Entonces F es una función constante.*

Operaciones en las distribuciones

Como ya hemos dicho, los elemento de $\mathcal{D}'$ son funcionales lineales sobre $\mathcal{D}$. Para estos funcionales se pueden definir las operaciones de adición y multiplicación por escalares. Sean T_1 y T_2 dos funcionales lineales definidas sobre $\mathcal{D}$. La suma de ellas $T_1 + T_2$ es la funcional lineal

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

El producto kT_1 de la funcional T_1 por el escalar k es la funcional

$$\langle T, \phi \rangle = k\langle T_1, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Está claro que la suma $T_1 + T_2$ y el producto kT_1 representan funcionales lineales. Además, de la continuidad de las funcionales lineales T_1 y T_2 se deduce que $T_1 + T_2$ y kT_1 son también funcionales continuas sobre $\mathcal{D}$.

Las operaciones que acabamos de mencionar hacen del espacio de las distribuciones, un espacio vectorial.

Otra operación que podemos definir es la multiplicación por una función infinitamente diferenciable.

Definición 2.7. *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\psi \in C^\infty$, definimos el producto de T con ψ como la distribución $\psi T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\langle \psi T, \phi \rangle := \langle T, \psi\phi \rangle.$$

Obsérvese que es preciso manejar con cuidado la notación: Si $\psi \in \mathcal{D}$, entonces $T\psi$ es un número, mientras que ψT es una distribución.

Debemos notar también que si $\phi \in \mathcal{D}$ y $\psi \in C^\infty$, entonces $\psi\phi \in \mathcal{D}$, y por lo tanto $\langle T, \psi\phi \rangle$ está bien definida. Si ψ no es de clase C^∞ entonces $\psi\phi$ tampoco lo es y por consiguiente $\psi\phi$ no pertenece a $\mathcal{D}$, luego no se puede aplicar la Definición 2.7. Esto quiere decir que no podemos definir el producto de una distribución con una función que tiene discontinuidades o tiene derivada discontinua. Las distribuciones en general no se pueden multiplicar. La dificultad de ello se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. *La función de Heaviside*[3] *H es definida por*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

y una función casi idéntica H_1 se define mediante

$$H_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{para } x = 0, \\ 1 & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

H y H_1 son localmente integrables, y ellas generan la misma distribución regular $T_H : \phi \mapsto \int_0^\infty \phi(x)dx$. No hay diferencia entre T_H y T_{H_1} en la teoría de distribuciones, lo que refleja el hecho de que desde el punto de vista físico la distinción entre ambas es artificial: uno nunca podía distinguir entre T_H y T_{H_1} de forma experimental. Si la Definición 2.7 se extendiera a las funciones discontinuas, tendríamos $\langle T_{H_1}\delta, \phi \rangle = 0$ y $\langle T_H\delta, \phi \rangle = \frac{1}{2}\phi(0)$. Ahora, cualquier definición del producto de dos distribuciones tendría que estar de acuerdo con

[3]También llamada función "salto unitario"

la Definición 2.7 en el caso cuando una de las distribuciones fuese regular. Ya que H_1 y H generan la misma distribución[4] *T_H, tendriamos dos valores diferentes para $\langle T_H\delta, \phi\rangle$, y así una inconsistencia teórica. Esto muestra que es imposible definir el producto de δ con una función discontinua.*

En el Capítulo 3 veremos que si consideramos un subespacio propio de las distribuciones es posible generalizar la Definición 2.7 y obtener una multiplicación por funciones de una clase más amplia que C^∞.

La Definición 2.7 tiene la propiedad de que si T es una distribución regular generada por la función f, y $\psi \in C^\infty$, entonces la distribución ψT es la misma que la distribución generada por la función localmente integrable ψf, ambas se dan por la regla $\phi \mapsto \int \psi(x)f(x)\phi(x)dx$. En otras palabras, la definición de producto de una función generalizada por una función infinitamente diferenciable es consistente con la regla ordinaria de multiplicación de funciones.

Dejamos al lector la tarea de verificar que las reglas algebraicas usuales (ley distributiva, etc.) se cumplen para nuestra definición de multiplicación.

Ahora haremos las siguientes definiciones.

Definición 2.9 (Traslación). *Sean $T \in \mathcal{D}'$ y $a \in \mathbb{R}$. Definimos la distribución T_{+a} por*

$$\langle T_{+a}, \phi\rangle = \langle T, \phi(x-a)\rangle.$$

Llamaremos a T_{+a} la traslación de T determinada por a.

Definición 2.10 (Cambio de Variable). *Sean $T \in \mathcal{D}'$ y $a \neq 0$. Definimos la distribución $T_{\cdot a}$ por*

$$\langle T_{\cdot a}, \phi\rangle = \langle T, \phi(x/a)\rangle/|a|.$$

La derivada distribucional

Para motivar la forma de la definición de derivada distribucional se puede considerar el caso para una distribución regular T_f y suponer que f tiene derivada continua, en tal caso podemos aplicar el teorema de integración por partes (y tomando en cuenta que ϕ se anula en el infinito) para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'\phi = -\int_{-\infty}^{\infty} f\phi'. \tag{2.1}$$

[4]En general, si dos funciones $f_1, f_2 \in HK_{loc}$ son iguales casi donde quiera, entonces generan la misma distribución, es decir, $T_{f_1} = T_{f_2}$.

Con lo cual, $\langle T_{f'}, \phi\rangle = -\langle T_f, \phi'\rangle$. Obsérvese que la integral del segundo miembro en (2.11) tiene sentido, sin importar que f sea, o no, diferenciable.

Imitando este compartamiento, definimos la derivada de una distribución de la siguiente manera

Definición 2.11. *Para toda $T \in \mathcal{D}'$ definimos la derivada distribucional T' mediante la fórmula*

$$\langle T', \phi\rangle = -\langle T, \phi'\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Observación 2.12. *Está claro que la funcional definida mediante esta fórmula es lineal y continua, es decir, representa una función generalizada. Luego, con esta definición,* ***las distribuciones tienen derivadas de todos los ordenes*** *y cada derivada es una distribución.*

El siguiente teorema es sumamente interesante ya que hace evidente que estamos trabajando con una teoría más general, pues afirma que el concepto usual de derivada que conocemos para funciones clásicas coincide con la definición de derivada que acabamos de dar para las funciones generalizadas.

Teorema 2.13. *Siendo f una función clásica cuya derivada existe y es continua, la derivada de ella, como de función generalizada, coincide con su derivada en el sentido corriente. En otras palabras, se cumple la siguiente igualdad,*

$$T_f' = T_{f'}.$$

Este teorema tiene una generalización inmediata, pues para que el mismo resultado se cumpla es suficiente con que la derivada sea continua a trozos. Este último resultado lo emplearemos en los siguientes ejercicios. Tal resultado no es el más general. El resultado más general es de gran interés para nosotros y lo discutiremos en la Sección 3.2.2.

Ejemplo 2.14. *Veamos los siguientes ejemplos.*

1. *Consideremos nuevamente la función de Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta función define la funcional lineal

$$\langle T_H, \varphi\rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx.$$

De acuerdo con la definición de la derivada de una función generalizada, tenemos

$$\langle T'_H, \varphi\rangle = -\langle T_H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0)$$

(puesto que φ es igual a cero en el infinito). Por consiguiente, la derivada de la "función salto unidad", H, es la δ-función.

2. *La derivada de la función delta está definida por $\langle \delta', \phi\rangle = -\langle \delta, \phi'\rangle = -\phi'(0)$. Similarmente, la n-sima derivada de δ está dada por $\langle \delta^{(n)}, \phi\rangle = (-1)^n\phi^{(n)}(0)$.*

3. *$|x|$ es una función localmente integrable, diferenciable para toda $x \neq 0$, pero ciertamente no diferenciable en cero. La derivada distribucional es calculada como sigue. Para cualquier $\phi \in \mathcal{D}$,*

$$\begin{aligned}\langle |x|', \phi\rangle &= -\langle |x|, \phi'\rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)dx - \int_0^\infty x\phi'(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \phi'(x)dx + \int_0^\infty \phi(x)dx,\end{aligned}$$

integrando por partes y usando el hecho de que ϕ se anula en el infinito. Definimos una función $sgn(x)$ por

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & para\ x < 0, \\ 1 & para\ x > 0. \end{cases}$$

Es innecesario para nuestros propósitos especificar el valor $sgn(0)$, ya que cualquier elección de $sgn(0)$ genera la misma distribución T_{sgn}. De lo anterior obtenemos que

$$\langle |x|', \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} sgn(x)\phi(x)dx \tag{2.2}$$

$$= \langle T_{sgn}, \phi\rangle, \tag{2.3}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}$, así $T'_{|x|} = T_{sgn}$. Notese que, ya que la derivada generalizada es una distribución, no podemos hablar de su valor en un *punto, solo sobre un intervalo. Así no cabe la pregunta incómoda ¿cuál es el valor en $x = 0$ de la derivada de $T_{|x|}$? ya que no tiene sentido en nuestra teoría.*

Observación 2.15. *Del Teorema 2.13 y del inciso 1 del Ejemplo 2.14 se ve claramente que si f es una función que en los puntos $x_1, x_2, \ldots$ tiene saltos iguales a $h_1, h_2, \ldots$ respectivamente y es diferenciable en los demás puntos (en el sentido clásico), su derivada (como de una función generalizada) representa la suma de la derivada corriente f' (en los puntos donde ésta existe) más la suma de tipo*

$$\sum_i h_i \delta(x - x_i).$$

Algunos comentarios acerca del producto

Es fácil mostrar que la derivada de una suma de funciones generalizadas es igual a la suma de las derivadas. La regla para derivar un producto necesita un poco más de cuidado. Si ψ es infinitamente diferenciable y T es una distribución, el producto está dado por la Definición 2.7. Tenemos para cualquier $\phi \in \mathcal{D}$ que

$$\begin{aligned}
\langle (\varphi T)', \phi \rangle &= -\langle \varphi T, \phi' \rangle \\
&= -\langle T, \varphi \phi' \rangle \quad \text{por la Definición 2.7} \\
&= -\langle T, (\varphi \phi)' - \varphi' \phi \rangle \\
&= \langle T', \varphi \phi \rangle + \langle T, \varphi' \phi \rangle \quad \text{por la Definición 2.11} \\
&= \langle \varphi T', \phi \rangle + \langle \varphi' T, \phi \rangle \quad \text{por la Definición 2.7,}
\end{aligned}$$

con lo cual probamos que

$$(\varphi T)' = \varphi T' + \varphi' T. \tag{2.4}$$

Es decir, se cumple la fórmula de Leibniz para la derivada del producto dado por la Definición 2.7. Además, como mencionamos después del Ejemplo 2.8, la definición de producto de una función generalizada por una función infinitamente diferenciable es consistente con la regla ordinaria de multiplicación de funciones. Sin embargo, no es posible definir, en general, un producto de distribuciones de tal forma que al considerar distribuciones regulares este producto coincida con la multiplicación de funciones en el sentido clásico.

Esta imposibilidad del producto fue probada por L. Schwartz [25] en 1954: la “imposibilidad de la multiplicación de distribuciones”. Él probó la inexistencia de un álgebra diferencial A (de cualquier tipo de funciones generalizadas sobre $\mathbb{R}$) que contenga el álgebra $C(\mathbb{R})$ (de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$) como una subálgebra, preservando la diferenciación de funciones de clase C^1 (es decir, la diferenciación en A coincide con la diferenciación clásica) y que preserve algunas otras propiedades naturales (la fórmula de Leibniz para la diferenciación del producto, que la función constante 1 sea el elemento neutro en A para la multiplicación, que A contenga alguna versión de la función delta de Dirac), véase [8, pág. 1].

Ahora tenemos construida el álgebra básica y el cálculo diferencial de distribuciones. En la siguiente sección consideraremos la convergencia de distribuciones.

2.1.1. Convergencia de distribuciones

En el cálculo clásico es común empezar con la idea de límite de una función y después usar esto para definir la derivada. Hemos sido capaces de desarrollar el *cálculo de distribuciones* sin la idea de límite para funciones generalizadas; esto se debe a que tenemos definida la convergencia de funciones prueba en $\mathcal{D}$ (y en la base de la diferenciación de distribuciones están, precisamente, estas propiedades del espacio $\mathcal{D}$). Sin embargo, es útil también definir la idea de convergencia para distribuciones. Al igual que para la continuidad, no podemos hacer uso de una definición en términos de ε y δ; por lo tanto definiremos la convergencia de distribuciones en términos de su acción sobre los elementos del espacio base $\mathcal{D}$.

Definición 2.16. *Diremos que la sucesión $\{T_n\} \subset \mathcal{D}'$* ***converge*** *a la distribución T, si $\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$. En tal caso diremos que la sucesión $\{T_n\}$ converge a T en el sentido de las distribuciones y escribiremos $T_n \to T$.*

El lector puede observar que estamos tomando a $\mathcal{D}'$ con la convergencia débil estrella.

En caso de que la sucesión esté formada por distribuciones regulares, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.17 (Convergencia en distribuciones). *Si $F, f_1, f_2, \ldots$ son funciones localmente integrables tales que $f_n \to F$ uniformemente en cada intervalo acotado, entonces $T_{f_n} \to T_F$ como distribuciones.*

En general no es verdad que si $f_n \to F$, donde f_n y F son funciones localmente integrables, entonces $T_{f_n} \to T_F$; la convergencia debe ser uniforme, como en el Teorema (2.17) (o se debe satisfacer alguna otra condición). Esto se ilustrará en el Ejemplo (2.19). Pero primero debemos considerar un ejemplo más sencillo.

Ejemplo 2.18. *$T_{d_n} \to \delta$ cuando $n \to \infty$, donde $d_n(x) = n/\pi(1+n^2x^2)$. Esta afirmación usualmente se escribe de la siguiente forma*

$$\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \to \delta \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.5}$$

Para probar esto, debemos mostrar que $\int d_n(x)\phi(x)dx \to \phi(0)$ cuando $n \to \infty$, para cada $\phi \in \mathcal{D}$. Usando el hecho de que $\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)dx = 1$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)\phi(x)dx - \phi(0)\Big| &= \Big|\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)[\phi(x)-\phi(0)]dx\Big| \\
&\leq \Big|\phi(0)\int_{-\infty}^{a} d_n(x)dx\Big| + \Big|\int_a^b d_n(x)[\phi(x)-\phi(0)]dx\Big| \\
&+ \Big|\phi(0)\int_b^{\infty} d_n(x)dx\Big|
\end{aligned}$$

donde (a,b) es un intervalo que contiene a supp ϕ, y $a < 0 < b$. Por medio de la sustitución $nx = y$, es fácil mostrar que la primera y tercera integrales (después de la desigualdad) de la ecuación anterior tienden a cero cuando $n \to \infty$. En el segundo, se usa el teorema del valor medio para escribir $|\phi(x)-\phi(0)| \leq M|x|$, donde $M = \max|\phi'(x)|$; la integral es entonces menor o igual que $M\int_a^b |xd_n(x)|dx$, que es fácil de evaluar con exactitud, y mostrar que tiende a cero cuando $n \to \infty$. Esto completa la demostración de (2.5).

Ejemplo 2.19. *Tenemos que $d_n'(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{n^3x}{(1+n^2x^2)^2}$. Se afirma lo siguiente,*

$$T_{d_n}' \to \delta'(x) \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.6}$$

Esto es fácil deducir de (2.5): $\langle T_{d_n}', \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d_n'\phi dx = -\int_{-\infty}^{\infty} d_n\phi' dx$ (integrando por partes), $\to -\phi'(0) = \langle \delta', \phi\rangle$, debido a (2.5). Nótese que $d_n'(x) \to 0$

puntualmente cuando $n \to \infty$ para toda x. Así, si una sucesión de funciones localmente integrables converge a otra función localmente integrable, en el sentido de la convergencia puntual ordinaria, no implica que converja en el sentido distribucional a la correspondiente función generalizada. Esta no debe ser considerada una debilidad de la teoría de distribuciones. Por el contrario, si el lector dibuja las gráficas de las funciones d'_1, d'_2, d'_3, verá que aunque $d'_n \to 0$ es una afirmación verdadera, esto no muestra la verdadera situación tan claramente como (2.6) lo hace.

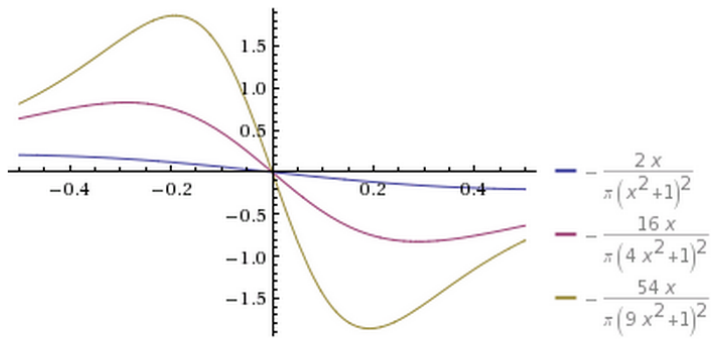

Figura 2.3: Gráficas de d'_1, d'_2 y d'_3.

La ecuación (2.6) es un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 2.20 (Diferenciación término a término). *Si $T, T_1, T_2, \ldots$ son distribuciones tales que $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces $T'_n \to T'$.*

Usando el Teorema (2.20), (2.6) se obtiene inmediatamente a partir de (2.5). Observe cómo es mucho más simple este teorema que el resultado correspondiente para funciones ordinarias: en dicho caso, $\{f_n\}$ debe converger de manera uniforme y también se debe probar que la sucesión de derivadas, $\{f'_n\}$, converge de manera uniforme, para poder garantizar que $f'_n \to F'$. En la teoría de distribuciones, cualquier sucesión convergente puede derivarse sin reparos. Similarmente, una serie infinita convergente (que se define en forma habitual como la sucesión de sumas parciales) puede derivarse término a término. Este es uno de los beneficios que se obtienen de las condiciones más estrictas que definen el espacio $\mathcal{D}$ y la convergencia en $\mathcal{D}$.

Esencialmente todos los resultados del calculo clásico se mantienen en la teoría generalizada (de distribuciones); por ejemplo, uno puede probar que el límite de un producto (suma) es el producto (suma) de los límites, etcétera.

2.1.2. Series de Fourier

La teoría de distribuciones puede usarse para dar un significado a ciertas integrales divergentes, la idea subyacente es integrar por partes, formalmente, un cierto número de veces para convertir la integral divergente en una convergente (véase [15, pág. 28]). Métodos similares se pueden emplear para dar un valor a ciertas series divergentes. En particular, *Series de Fourier* divergentes, a menudo se pueden hacer convergentes por integración.

Ejemplo 2.21. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) \tag{2.7}$$

diverge cuando x es un entero, oscila cuando x es la mitad de un entero impar, y no converge cuando x es racional. Sin embargo, es la serie obtenida al derivar

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(2n\pi x)]/2n\pi = f(x) \tag{2.8}$$

término a término (una operación no permitida en análisis clásico ya que la serie no converge de manera uniforme). Esta es la serie de Fourier de la función f la cual es periódica con período 1 y definida para $0 < x < 1$ por $f(x) = (1 - 2x)/4$; véase la figura 2.4. Por lo tanto, la serie (2.8) converge puntualmente pero no uniformemente. Para obtener una serie uniformemente convergente, integramos nuevamente, esto es, notemos que (2.8) es obtenida al derivar

$$-\sum_{n=1}^{\infty} [\cos(2n\pi x)]/(2n\pi)^2\pi = F(x) \tag{2.9}$$

término a término. Esta serie converge uniformemente para toda x (como consecuencia de la M-prueba), y las sumas parciales son continuas y por lo tanto localmente integrables; de aquí se sigue, por el Teorema 2.17, que esta serie converge en el sentido de las distribuciones. En otras palabras, la serie de distribuciones $-\sum_1^{\infty}(2n\pi)^{-2}T_{\cos(2n\pi x)}$ converge a la distribución T_F generada por la suma ordinaria, $F(x)$, de la serie (2.9). Ahora, una serie

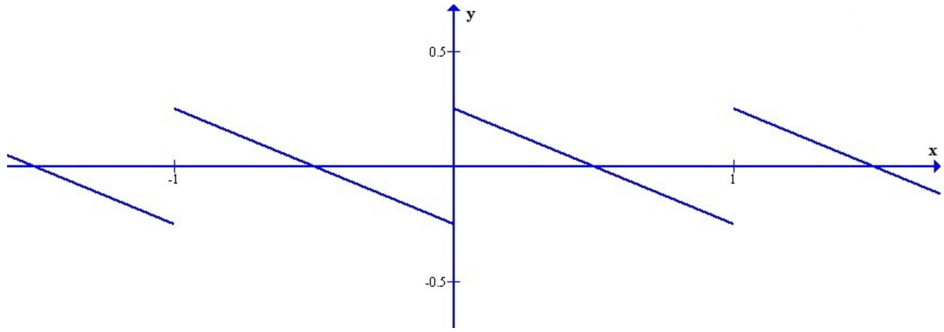

Figura 2.4: Gráfica de la función f.

de Fourier puede ser integrada término a término incluso si no converge uniformemente (para la demostración se puede consultar Titchmarsh (1939)). Aplicando este teorema a (2.8) se demuestra que $F' = f$. *Ahora se sigue del Teorema 2.20 que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{-1}[T_{\sin(2n\pi x)}] = T_{f(x)}, \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_{\cos(2n\pi x)} = T'_{f(x)}. \tag{2.10}$$

A partir de la gráfica de f *se puede ver que* $f'(x) = -\frac{1}{2}$ *para toda* x *excepto en los enteros, y* f *tiene un salto de discontinuidad de* $\frac{1}{2}$ *en cada entero. Cada discontinuidad de* f *contribuye con una función delta a* T'_f*, así finalmente tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{\cos(2n\pi x)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k). \tag{2.11}$$

Obsérvese que hemos dado un significado a la serie divergente $\sum_1^{\infty}\cos(2n\pi x)$. *Por consiguiente, el concepto de distribución permite dar un sentido completamente determinado a la suma de una serie que en el sentido corriente diverge. Lo mismo se refiere a muchas integrales divergentes. Con situaciones de este tipo se tropieza frecuentemente en la teoría cuántica del campo y en otras varias ramas de la Física Teórica.*

Observación 2.22. *De paso tomemos nota de que (2.11) da la siguiente representación útil de la función delta, que se obtiene a partir de la ecuación*

(2.11):

$$\delta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) \textit{ para } -1 < x < 1, \tag{2.12}$$

todas menos una de las funciones delta en (2.11) son cero en $(-1, 1)$.

El Ejemplo 2.21 también es conocido como la *traza de onda* y está relacionada con la ecuación de calor, además nos será muy útil para ilustrar el concepto de integral distribucional.

Capítulo 3

La integral distribucional de Denjoy

La idea de integral distribucional está en la obra de Laurent Schwartz "Teoría de las distribuciones". Él define la integral sólo para distribuciones, T, con soporte compacto, véase [24, pág. 88]. Por otra parte, en los textos actuales (que abordan el tema de distribuciones) es común que consideren el problema de encontrar la solución de la ecuación

$$T' = u,$$

donde T y u son distribuciones.

Es claro que encontrar la solución, en el sentido distribucional, se puede comparar con la idea de encontrar la primitiva de una función en el sentido clásico. Véase por ejemplo [15, pág. 37] o [12, pág. 225]. Sin embargo, considerar a la "primitiva" de la distribución como su integral, no deja muy claro qué interpretación se le podría dar a la integral definida en un intervalo $[a, b]$. La integral definida es una idea que no se puede evitar al tratar el tema de la integral.

En el 2008 Talvila retoma la idea de P. Mikusiński y K. Ostaszewski (véase [21]) y considera un subconjunto muy particular de las distribuciones, aquellas que son la derivada, en el sentido distribucional, de funciones continuas. Definir este tipo de espacios empleando primitivas "continuas" (tales primitivas en realidad son distribuciones regulares generadas por funciones continuas) hace muy sencillo hablar de la integral definida sobre un intervalo compacto en la recta real.

Un hecho interesante es que la definición que encontramos en el artículo de Talvila coincide, como veremos en la Sección 3.1.5., con la definición dada por Laurent Schwartz [24, pág. 88].

En este capítulo daremos la definición de integral distribucional, hablaremos de sus propiedades básicas, algunos resultados clásicos y propiedades del espacio de distribuciones integrables.

Al final del capítulo haremos algunos comentarios a cerca de las distintas direcciones que se pueden tomar en el tema de la integral distribucional para tener una idea de lo amplio que es el tema actualmente.

3.1. Distribuciones integrables.

En esta primera mitad del capítulo, daremos los elementos que nos permitirán hablar de aquellas propiedades de la integral a las que estamos habituados. Abordaremos los teoremas típicos, como: el Teorema Fundamental del Cálculo, las fórmulas de Cambio de Variable y de Integración por Partes, el Teorema de Hake y el segundo Teorema del Valor Medio. Además, incluimos algunos ejemplos interesantes que nos dan una mejor idea del conjunto de las distribuciones integrables.

3.1.1. La integral distribucional

Comencemos haciendo las siguientes definiciones: si $\widehat{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua sobre todo $\mathbb{R}$, tal que $\lim_{x\to\pm\infty}\widehat{F}(x)$ existen en $\mathbb{R}$, entonces $\widehat{F}$ se puede extender a todo $\overline{\mathbb{R}}$ como sigue.

Se define $F:\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ por $F(x):=\widehat{F}(x)$ si $x\in\mathbb{R}$, y $F(\pm\infty):=\lim_{x\to\pm\infty}\widehat{F}(x)$. Definimos

$$C(\overline{\mathbb{R}}):=\{F:\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}|F \text{ es continua }\}.$$

Ahora consideremos el siguiente subespacio de $C(\overline{\mathbb{R}})$.

$$\mathcal{B}_C:=\{F\in C(\overline{\mathbb{R}})|F(-\infty)=0\}.$$

Obsérvese que $\mathcal{B}_C$ es un espacio de Banach con la norma uniforme $||F||_\infty:=\sup_{x\in\mathbb{R}}\{|F(x)|\}=\max_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\{|F(x)|\}$.

Ahora podemos dar el siguiente concepto.

Definición 3.1. *Definimos el espacio de las distribuciones integrables de la siguiente manera:*

$$\mathcal{A}_C = \{f \in \mathcal{D}' | f = T'_F \text{ para alguna } F \in \mathcal{B}_C\}.$$

En esta definición T_F representa la distribución regular determinada por $F \in \mathcal{B}_C$, luego, una distribución es integrable si es la derivada distribucional de una función continua que se anula en $-\infty$. A la función F le llamaremos: ***primitiva*** de f.

Observación 3.2. *Podemos notar que cualquier función $F \in C(\overline{\mathbb{R}})$ es acotada y por lo tanto, es de crecimiento suave* [1]. *Así, en virtud de [10, Proposición 7.8. pág. 120], concluimos entonces que todas las distribuciones en $\mathcal{A}_C$ son* ***temperadas*** *(véase [23, pág. 181]).*

Definición 3.4. *La integral de una distribución $f \in \mathcal{A}_C$ se define como*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f := F(\infty) = F(\infty) - F(-\infty),$$

donde F es primitiva de f. Definimos además $\int_{-\infty}^{x} f := F(x)$ para cualquier $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Observe que esta definición depende de la primitiva, F, por lo que garantizar que dicha función es única, para cada $f \in \mathcal{A}_C$, nos permitirá afirmar que el valor de la integral es único y por lo tanto la integral distribucional está bien definida.

Para ello notemos primero que cada $f \in \mathcal{A}_C$ tiene una infinidad de primitivas en $C(\overline{\mathbb{R}})$, pero tiene una única primitiva en $\mathcal{B}_C$, como veremos enseguida.

Supongamos que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_C$ tales que

$$\langle T'_{F_1}, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle = \langle T'_{F_2}, \phi \rangle \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}.$$

[1] En [10, pág. 87] se puede encontrar el siguiente concepto

Definición 3.3. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice que crece suavemente sobre $\mathbb{R}$, si existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que la función*

$$x \to \frac{f(x)}{(1+ \| x \|^2)^l}$$

es acotada. Se dice que f es de clase C^∞ con crecimiento suave si esta es de clase C^∞ y crece suavemente así como sus derivadas de cualquier orden.

De lo anterior $\langle T'_{F_1}, \phi\rangle - \langle T'_{F_2}, \phi\rangle = 0$ y por la linealidad de la derivada distribucional se tiene que

$$\begin{aligned}\langle T'_{F_1}, \phi\rangle - \langle T'_{F_2}, \phi\rangle &= \langle T'_{F_1-F_2}, \phi\rangle \\ &= -(L)\int_{-\infty}^{\infty}(F_1 - F_2)\phi' \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la última integral es igual a cero para toda $\phi \in \mathcal{D}$. La Proposición 2.6 nos garantiza que $F_1 - F_2 = k$, donde k es una constante y ya que $F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$, entonces $k = 0$. Por lo tanto $F_1 = F_2$.

Lo anterior nos dice que *la infinidad de primitivas de f en $C(\overline{\mathbb{R}})$ difieren entre sí por una constante y que en B_C su primitiva es única.*

Ejemplo 3.5. *Analicemos las distribuciones del Ejemplo 2.14. De acuerdo al Teorema 2.13 la función de Heaviside (H), como distribución, es la derivada distribucional de la función*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x \leq 0, \\ x, & si \;\; x > 0. \end{cases}$$

Es decir, $T_H = T'_F$. Y ya que $F \in \mathcal{B}_C$, entonces $T_H \in \mathcal{A}_C$. Sin embargo, H no pertenece a $\mathcal{B}_C$, y por lo tanto $T'_H = \delta$ no es un elemento de $\mathcal{A}_C$, como tampoco lo serán las subsecuentes derivadas de la función δ.

Por otro lado, el Ejemplo 2.14 también nos dice que $T'_{|x|} = T_{sgn}$. Y aunque $|x| \in C(\mathbb{R})$, no existe el límite de la función en $\pm\infty$, y por lo tanto $|x|$ no pertenece a $C(\overline{\mathbb{R}})$. Así que T_{sgn} no es una distribución integrable.

3.1.2. Integración sobre intervalos

Para la siguiente definición tomaremos $f \in \mathcal{A}_C$, con primitiva $F \in \mathcal{B}_C$. Se puede definir la integral sobre cualquier intervalo de la forma $[a, b]$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ y $a < b$, mediante la expresión

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Sin embargo aquí formularemos otra definición equivalente a esta, y que es análoga a la forma como definimos la integral sobre $\overline{\mathbb{R}}$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y consideremos $I = (a, b)$, luego

$$\mathcal{D}(I) = \{\phi : I \to \mathbb{R} |\ \phi \in C^{\infty}(I) \text{ y } \phi \text{ tiene soporte compacto en } I\}.$$

Entonces $\mathcal{D}'(I)$ representa el dual del espacio $\mathcal{D}(I)$. Denotamos mediante $C(\overline{I})$ el espacio de funciones continuas sobre $\overline{I} = [a, b]$.

Lo anterior nos permite hacer la definición que deseamos como sigue:

Definición 3.6. *Diremos que $f \in D'(I)$ es integrable sobre $\overline{I}$ si existe $F \in C(\overline{I})$ tal que $T'_F = f$ (en $D(I)$). Además, $\int_{\overline{I}} f := F(b) - F(a)$.*[2]

También se usará la notación $\int_a^b f$ en lugar de $\int_{\overline{I}} f$. Denotamos por $\mathcal{A}_C(\overline{I})$ a las distribuciones, $f \in \mathcal{D}'(I)$, que son integrables en $\overline{I}$.

Observación 3.7. *Es conveniente hacer los siguientes comentarios.*

1. *Observe la analogía entre las definiciones que hemos dado. Si cambiamos I por $\mathbb{R}$ en la Definición 3.6 conseguimos la misma definición que se hizo para $\mathcal{A}_C$.*

2. *Ya que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ es claro que $\int_a^a f = F(a) - F(a) = 0$ tal como es usual. (Aunque parece un hecho trivial el lector puede consultar [31], un artículo que habla de una integral distribucional más general, y en donde se exhibe una distribución integrable f con la caracteriztica de que $\int_a^a f \neq 0$.)*

3. *Llama la atención que en esta definición la primitiva es un elemento de $C(\overline{I})$, y no un elemento del espacio de las continuas que se desvanecen en el extremo izquierdo del intervalo. Y aunque la primitiva en $C(\overline{I})$ no es única, el valor de la integral no cambia. Ya que no depende de la elección de la primitiva, pues todas ellas difieren en una constante, y al considerar la diferencia $F(b) - F(a)$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, la constante*

[2] El lector debe notar que para el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(I)$ usamos el intervalo abierto I, mientras que para el conjunto de las continuas $C(\overline{I})$ usamos el intervalo cerrado $\overline{I}$. Aunque esta observación es muy sutil el cambio es verdaderamente sustancial. Ya que si quisieramos tomar a F continua en el abierto I, podríamos hablar de la distribución asociada a ella e incluso de su derivada distribucional pero, en general, no se podría evaluar a F en los puntos extremos de I, ni siquiera se podría definir como el límite de la función en estos puntos porque precisamente, nada garantiza que dichos límites existan. Por lo tanto, no se podría calcular $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

se anula. Lo anterior también es cierto para el caso $I = \mathbb{R}$. Pareciera que la elección de $\mathcal{B}_C$ no es necesaria para definir la integral de las distribuciones en $\mathcal{A}_C$. Sin embargo, nos sirve para notar que es suficiente trabajar con una subespacio de las continuas (ya que todo elemento de $C(\overline{I})$ se puede escribir como suma de un elemento en $\mathcal{B}_C$ más una función constante).

4. *En general si $T \in \mathcal{D}'(I)$, no siempre se puede extender T a todo $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Por ejemplo, si $\mathfrak{f} \in L^1_{loc}(a,b)$ pero no es integrable en $[a,b]$ entonces $T_\mathfrak{f} \in \mathcal{D}'(a,b)$ pero no se podrá extender a $\mathcal{D}$.*

   En particular, si

$$\mathfrak{f}(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{x} & \textit{para } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

   Entonces $\mathfrak{f} \in L^1_{loc}(0,1)$ pero $\mathfrak{f}$ no está en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, y por lo tanto, $T_\mathfrak{f} \in \mathcal{D}'(a,b)$ pero no existe $T^* \in \mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $T^* = T_\mathfrak{f}$ en $\mathcal{D}(0,1)$.

   Aunque cabe señalar que no estamos trabajando con todo el conjunto de las distribuciones, sino con un subconjunto (propio) cuyos elementos tienen la siguiente característica. Si $I = (a,b)$ y f es integrable sobre $\overline{I}$ entonces existe $F \in C(\overline{I})$ tal que $T'_F = f$ en $\mathcal{D}(I)$. Gracias a ello nos es posible definir $G(x) := 0$ para $x \in (-\infty, a]$, $G(x) := F(x) - F(a)$ si $x \in I$, y $G(x) := F(b) - F(a)$ cuando $x \in [b, \infty)$. Entonces $G \in \mathcal{B}_C$, $T'_G = f$ en $\mathcal{D}(I)$, y $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. Lo cual quiere decir que: ***toda distribución** $f \in \mathcal{A}_C(I)$ **se puede extender a todo** $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

La traza de onda es un ejemplo interesante en la teoría de distribuciones porque le da significado a una serie divergente. Ahora veremos que esta distribución es integrable.

Ejemplo 3.8 (**Traza de onda**). *Como vimos en el Capítulo 2 la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \tag{3.1}$$

es convergente y su suma representa una función de período 1 que en el intervalo $(0,1)$ se define por $F(x) = (1 - 2x)/4$. Como también sabemos, la *derivada generalizada de tal función es*

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k), \tag{3.2}$$

la cual representa una función generalizada (que al aplicarla a cualquier función $\phi \in \mathcal{D}$ siempre obtenemos sólo un número finito de sumandos diferentes de cero). La función F es continua en todo intervalo de la forma $(k, k+1)$, para cualquier entero k. Y si $[a,b] \subset (k, k+1)$ entonces F también es continua en $[a,b]$, y por lo tanto T'_F es integrable, es decir, $T'_F \in \mathcal{A}_C([a,b])$. Más aun, si aplicamos el Teorema 2.20 y derivamos término a término la serie 3.1, obtenemos la serie divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n\pi x) \tag{3.3}$$

Y como esta serie converge (no en el sentido clásico pero sí en el sentido de las distribuciones) a la expresión (3.2), tendriamos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n\pi x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k) = T'_F.$$

Y entonces,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n\pi x) = \int_a^b T'_F = F(b) - F(a).$$

*Es importante observar que la serie 3.3 diverge, en particular, en el intervalo $[a,b] \subset (k, k+1)$ y esto significa que como distribución **no es regular**, pero si es integrable.*

Desde luego hemos cometido algunos abusos de notación, pero al lector le puede ser útil consultar la sección de "Series de Fourier" en el Capítulo 2 para aclarar el uso de la notación que acabamos de hacer.

Observación 3.9. *Con respecto al Ejemplo 3.8 señalaremos lo siguiente:*

1. *Por supuesto para ser formales y coherentes con la Definición 3.6, no es suficiente con una función que sólo sea continua en un intervalo*

acotado, es necesaria una función continua en todo $\overline{\mathbb{R}}$ y ello se puede lograr con la extensión que se menciona en la Observación 3.7, aunque dicha extensión modifica en una constante el valor de la función no modifica el valor de la integral (véase también la Observación 3.7). Aunque de hecho hay, por supuesto, varias formas de extender de forma continua una función como esta y con algunas de estas extensiones no se modifica a la función en el intervalo $[a,b] \subset (k,k+1)$. Por ejemplo, dada $F \in C([a,b])$, hacemos $G(x) := F(a)e^{x-a}$. Notese que G es continua en $(-\infty,a]$, $G(a) = F(a)$ y que $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$. Por lo tanto, si definimos la nueva función

$$H(x) = \begin{cases} G(x), & x < a, \\ F(x), & a \le x \le b, \\ F(b), & x > b. \end{cases}$$

tendremos que $H \in \mathcal{B}_C$, es la extensión que buscábamos.

2. *Como se puede ver T_F' es integrable sólo en $[a,b]$ y no en todo $\overline{\mathbb{R}}$. Aunque por supuesto se puede emplear la extensión mencionada en el inciso anterior para obtener una distribución integrable en todo $\overline{\mathbb{R}}$. Pero tal extensión no representaría la distribución asociada a la traza de onda, sino sólo en el intervalo $[a,b]$. Y no hay forma de obtener una extensión continua que represente la traza de onda en todos los reales extendidos.*

3.1.3. Propiedades Básicas

En el siguiente teorema presentamos las propiedades básicas de la integral distribucional. Una combinación lineal en $\mathcal{A}_C$ se define por $\langle k_1 f + k_2 g, \phi\rangle := \langle k_1 T_F' + k_2 T_G', \phi\rangle$ para $\phi \in \mathcal{D}$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$; $f, g \in \mathcal{A}_C$ con primitivas $F, G \in \mathcal{B}_C$, respectivamente.

Teorema 3.10 (Propiedades Básicas). *Sean $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(a) Linealidad. Si $f, g \in \mathcal{A}_C$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ entonces $k_1 f + k_2 g \in \mathcal{A}_C$ y $\int_a^b (k_1 f + k_2 g) = k_1 \int_a^b f + k_2 \int_a^b g$.

(b) Aditividad respecto a intervalos. Si $f \in \mathcal{A}_C$, entonces para toda $c \in (a,b)$ tenemos que $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

(c) *Integrabilidad en subintervalos. Sea $J=(c,d)$, donde $a \leq c < d \leq b$. Si f es integrable sobre $\overline{I}$, con $I=(a,b)$. Entonces f es integrable sobre cualquier subintervalo cerrado $\overline{J} \subset \overline{I}$.*

Demostración. (a) Como $f = T'_F$ y $g = T'_G$, entonces $k_1 f + k_2 g = (k_1 T_F + k_2 T_G)'$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b (k_1 f + k_2 g) &= (k_1 F + k_2 G)(b) - (k_1 F + k_2 G)(a) \\ &= k_1 F(b) - k_1 F(a) + k_2 G(b) - k_2 G(a) \\ &= k_1 \int_a^b f + k_2 \int_a^b g.\end{aligned}$$

(b) $\int_a^c f + \int_c^b f = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$.

(c) Si f es integrable sobre $\overline{I}$ entonces f es la derivada distribucional de alguna $F \in C(\overline{I})$. Y si F es continua en $\overline{I}$ entonces es continua en $\overline{J} \subset \overline{I}$, es decir $F_{|_{\overline{J}}} \in C(\overline{J})$ y por consiguiente $f = T'_{F_{|_{\overline{J}}}}$ en $\mathcal{D}(J)$. En otras palabras, f es integrable en $\overline{J}$.

□

3.11. *Convención*. *Vamos a establecer que para $a < b$*

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Como parte de las propiedades básicas algunos textos incluyen la invariancia bajo traslaciones. Esta propiedad se puede obtener fácilmente para la integral que hemos definido, si tomamos como definición de traslación la siguiente: $\tau_c f := T'_{F(x-c)}$. (Desde luego esta no es la definición usual de traslación que se conoce para distribuciones en general, véase la Definición 2.9). Otra propiedad es la relacionada con la dilatación o contracción del intervalo de integración, la cual presentamos en la Sección 3.1.4 como una aplicación de la *Fórmula de Cambio de Variable*, que veremos más adelante.

Otras propiedades que por lo general se presentan como básicas también requieren más elementos que desarrollaremos a continuación.

Es común hablar de la relación entre la integral de f y la integral de $|f|$ o la relación que existe entre las integrales de dos funciones f y g cuando $f \leq g$. Algunas de estas propiedades se pueden trasladar a la integral distribucional y otras no, al menos no exactamente. Esto se debe a que no existe, por ejemplo, un *orden total* para las distribuciones, pero sí se puede hablar de un *orden parcial*. Para hablar de dicho orden parcial notemos primero que en $\mathcal{B}_C$ se puede definir un orden parcial de la siguiente manera:

Definición 3.12. *Sean $F, G \in \mathcal{B}_C$. Diremos que $F \leq G$ si y sólo si $F(x) \leq G(x)$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Es sencillo comprobar que este orden es reflexivo ($F \leq F$), antisimétrico ($F \leq G$ y $G \leq F$ implica que $F = G$) y transitivo ($F \leq G$ y $G \leq H$ entonces $F \leq H$).*

Con base en lo anterior vamos a establecer un **orden parcial** en $\mathcal{A}_C$ como sigue:

Definición 3.13. *Sean $f, g \in \mathcal{A}_C$. Diremos que $f \leq g$ si y sólo si $F \leq G$, con el orden en $\mathcal{B}_C$. (Por supuesto F y G son las primitivas de f y g, respectivamente.)*

Ahora podemos probar todas las propiedades a las que estamos acostumbrados, y todas ellas son consecuencia directa de la definición.

Teorema 3.14. *Sean $f, g \in \mathcal{A}_C$.*

(a) Si $f \leq g$, entonces $F(x) \leq G(x)$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\int_{-\infty}^{x} f \leq \int_{-\infty}^{x} g$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si $f \leq g$.

Demostración. Tomemos $f, g \in \mathcal{A}_C$.

(a) Por la definición de orden en $\mathcal{A}_C$: $f \leq g$ si y sólo si $F \leq G$. Y por la definición de orden an $\mathcal{B}_C$: $F \leq G$ si y sólo si $F(x) \leq G(x)$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ y $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g$ y por hipótesis $F(x) \leq G(x)$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$. De manera similar a la prueba anterior, la definición de orden parcial para $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{A}_C$ implican que $f \leq g$.

$\square$

Observación 3.15. *Notese que la definición de orden nos permite integrar ambos lados de la desigualdad* $f \leq g$ *en* $\mathcal{A}_C$ *para obtener* $F \leq G$ *en* $\mathcal{B}_C$*. La correspondencia entre las distribuciones integrables y sus primitivas nos permite derivar ambos lados de* $F \leq G$ *(*$F, G \in \mathcal{B}_C$*), para obtener* $T'_F \leq T'_G$ *en* $\mathcal{A}_C$*.*

Ahora podemos hablar del **valor absoluto de una distribución integrable**.

En $\mathcal{B}_C$ se define $F^+ = F \vee 0$, $F^- = F \wedge 0$ y $|F| = F \vee (-F)$. Entonces $F = F^+ - F^-$ y $|F| = F^+ + F^-$. Debemos señalar que F^+, F^- y $|F|$ nuevamente son elementos de $\mathcal{B}_C$ (ya que $F \in \mathcal{B}_C$), y por lo tanto, podemos dar el siguiente concepto.

Definición 3.16. *Sea* $f \in \mathcal{A}_C$*, y* $F \in \mathcal{B}_C$ *su primitiva. Entonces definimos:* $f^+ := T'_{F^+}$*,* $f^- := T'_{F^-}$ *y* $|f| := T'_{|F|}$*.*

Para la función $f(t) = \sin(t)/t$ cuando $t > 0$ y $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, tenemos: $f^+ = |f| = f$ y $f^- = 0$.

El orden en $\mathcal{A}_C$ nos da elementos para definir la integral de $|f|$. Como F es continua, también $|F|$ es continua, y entonces la integrabilidad de f garantiza la integrabilidad de $|f|$. Tal como lo establece el siguiente

Teorema 3.17. *Si* $f \in \mathcal{A}_C$ *entonces* $|f| \in \mathcal{A}_C$ *y*

$$\Big| \int_{-\infty}^{x} f \Big| \leq \int_{-\infty}^{x} |f| \text{ para toda } x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Demostración. Como $|F| \in \mathcal{B}_C$ y $|f| := T'_{|F|}$, entonces $|f| \in \mathcal{A}_C$. Luego, para $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\int_{-\infty}^{x} |f| = |F|(x) = |F(x)|$ y como $\Big| \int_{-\infty}^{x} f \Big| = |F(x)|$, entonces

$$\Big| \int_{-\infty}^{x} f \Big| \leq \int_{-\infty}^{x} |f|.$$

□

Observación 3.18. *Más adelante veremos que el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables está contenido en* $\mathcal{A}_C$*. Pero si una función es Henstock-Kurzweil integrable, no necesariamente su valor absoluto es Henstock-Kurzweil integrable. Lo cual contradice el resultado que acabamos de probar. Tal hecho significa que la definición, que hemos dado, de valor absoluto de una distribución, no puede coincidir con la definición de una función en el sentido clásico.*

3.1.4. Teorema Fundamental del Cálculo

Por definición, todo elemento en $\mathcal{A}_C$ es la derivada distribucional de una función continua que se anula en $-\infty$, es decir, $f = T_F'$ para alguna $F \in \mathcal{B}_C$. Esta función continua F es el análogo a lo que en el cálculo clásico se le llama la *primitiva* o *integral indefinida* de f. Aquí también le hemos llamado *primitiva*. La primera parte del teorema que enunciaremos a continuación nos dice como construir una primitiva a partir de una distribución f. Además recordemos que también la definición de integral de $f = T_F'$ nos dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f = F(b) - F(a)$, es decir, la integral de la "derivada" de F se calcula a partir de F (primitiva de su propia "derivada"), algo que no ocurre con la integral de Lebesgue.

Además, como vimos al inicio del capítulo, f tiene una primitiva única en $\mathcal{B}_C$ y una infinidad de primitivas en $C(\overline{\mathbb{R}})$, aunque todas ellas difieren en una constante. De esto nos habla en su segundo inciso el

3.19. Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).

(a) Si $f \in \mathcal{A}_C$ y $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ entonces $\Phi \in \mathcal{B}_C$ y $T_\Phi' = f$.

(b) $F \in C(\overline{\mathbb{R}})$. Entonces $\int_{-\infty}^{x} T_F' = F(x) - F(-\infty)$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Demostración. Tomemos $f, g \in \mathcal{A}_C$.

(a) $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f = F(x)$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Por lo tanto F y Φ son la misma función (y pertenecen a $\mathcal{B}_C$) y por ello sus derivadas distribucionales coinciden, y son iguales a f.

(b) Observe que si $c = \lim_{x\to-\infty} F(x)$ entonces $c \in \mathbb{R}$ y además $F + c \in \mathcal{B}_C$, así $T_F' = T_{F+c}' \in \mathcal{A}_C$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} T_F' &= \int_{-\infty}^{x} T_{F+c}' \\ &= (F+c)(x) - (F+c)(-\infty) \\ &= F(x) + c - F(-\infty) - c \\ &= F(x) - F(-\infty)\end{aligned}$$

para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

□

3.1.5. Fórmula de Cambio de Variable

Para la integral de Riemann la fórmula de cambio de variable es muy útil porque con frecuencia nos permite simplificar las operaciones cuando deseamos calcular el valor de la integral de una función específica. Aquí damos una versión de esta fórmula para la integral distribucional.

Empecemos por dar la definición de la composición de una distribución en $\mathcal{A}_C$ con una función.

Definición 3.20. *Si $F, G \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y $f = T'_F$, se define $(f \circ G)G' := T'_{F \circ G}$, es decir, $\langle (f \circ G)G', \phi \rangle := \langle T'_{F\circ G}, \phi \rangle = -\langle T_{F \circ G}, \phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} (F \circ G)(t)\phi'(t)dt$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$.*

Existe otra definición de composición de una distribución con una función suave, obtenida a partir de una fórmula de cambio de variable. El lector puede consultar [13, Sección 7.1].

La fórmula de cambio de variable queda expresada de la siguiente manera.

Teorema 3.21 (Fórmula de Cambio de Variable). *Supongase que $f \in \mathcal{A}_C$ y $T'_F = f$, donde $F \in C(\overline{\mathbb{R}})$. Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Si $G \in C([a, b])$ entonces*

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b (f \circ G)G' = (F \circ G)(b) - (F \circ G)(a).$$

Demostración. Aplicando el inciso (b) del Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos $\int_{G(a)}^{G(b)} f = F(G(b)) - F(G(a)) = (F \circ G)(b) - (F \circ G)(a)$. De igual forma se consigue la segunda igualdad ya que $F \circ G$ es la primitiva de $(f \circ G)G'$ en $C(\overline{\mathbb{R}})$.

(Por supuesto hay un cambio de signo para el caso en que G sea decreciente.) $\square$

Observación 3.22. *Acerca de la Fórmula de Cambio de Variable comentamos lo siguiente.*

1. *Obsérvese que la primera igualdad que probamos en la demostración, $\int_{G(a)}^{G(b)} f = (F \circ G)(b) - (F \circ G)(a)$, es una igualdad que se cumple para cualquier $G \in C([a, b])$ y cualquier $f \in \mathcal{A}_C$. En esta parte de la demostración no es necesaria la Definición 3.20.*

2. Si $G \in C((a,b))$ y $\lim_{t\to a^+} G(t) = -\infty$ y $\lim_{t\to b^-} G(t) = \infty$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_a^b (f \circ G)G' = F(\infty) - F(-\infty).$$

En seguida presentamos una aplicación de la fórmula de *cambio de variable*, enunciada como un corolario.

Corolario 3.23 (**Dilatación o contracción del intervalo de integración**). *Tomemos $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Si $f \in \mathcal{A}_C$, con $T'_F = f$ y $F \in C(\overline{\mathbb{R}})$, entonces para cada número real $k \neq 0$ se tiene*

$$\int_a^b f = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\Big(\frac{x}{k}\Big)$$

Demostración. Para el caso $k > 0$, la función $G(x) = \frac{x}{k}$ es continua en $[ka, kb]$, con $G'(x) = \frac{1}{k}$, y como $\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) = \int_{ka}^{kb}\left(f\left(\frac{x}{k}\right)\right)\frac{1}{k} = \int_{ka}^{kb}(f\circ G)G'$, entonces podemos aplicar la fórmula de cambio de variable para escribir

$$\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\Big(\frac{x}{k}\Big) = \int_{ka}^{kb}(f\circ G)G' = \int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f.$$

El caso en que $k < 0$ es completamente análogo. $\square$

Se puede notar que la Definición 3.20 trata de imitar el comportamiento de la derivada de una composición usual de funciones, y aunque puede parecer artificial, veremos en seguida como la norma de Alexiewicz muestra que ambos conceptos son compatibles, lo cual justifica la forma de definir la composición de una distribución con una función (Definición 3.20). Veamos esto.

Supongamos que $F, G \in C(\overline{\mathbb{R}})$. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ de tal manera que si $|x-y| < \delta$ entonces $|F(x) - F(y)| < \epsilon/2$. Esto es posible ya que F es uniformemente continua en $\overline{\mathbb{R}}$. Existen funciones p y q en C^1 tales que $||F-p||_\infty < \epsilon/2$ y $||G-q||_\infty < \delta$. Note que $F\circ G \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y así $T'_{(F\circ G)} \in \mathcal{A}_C$. Además, $(p\circ q)'(t) = (p'\circ q)(t)q'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned}
||T'_{(F\circ G)} - T_{(p'\circ q)q}|| &= ||F\circ G - p\circ q||_\infty \\
&\leq ||F\circ G - F\circ q||_\infty + ||(F\circ q - p\circ q||_\infty \\
&= ||F\circ G - F\circ q||_\infty + ||(F-p)\circ q||_\infty \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2.
\end{aligned}$$

El primer sumando es menor que $\epsilon/2$ como resultado de la forma en que se eligieron q y δ.

3.1.6. Integración por Partes

En el esquema que hemos trazado para desarrolar el tema de la integral, tiene lugar ahora el Teorema de Integración por Partes. Este teorema es de gran importancia para nosotros, ya que de él se desprenden algunos resultados que desarrollaremos en las Secciones 3.2.3 y 3.2.5.

La fórmula de Integración por Partes para la integral de Riemann, por ejemplo, sólo requiere del TFC y del hecho de que el producto de funciones integrables es integrable. Pero en el caso de las distribuciones, la multiplicación presenta ciertas dificultades. Como mencionamos en el Capítulo 2, L. Schwartz [25] demostró que si se tiene una multiplicación asociativa, y con la cual se cumpla la fórmula de Leibniz para la derivada de un producto, se está obligado a abandonar alguno de los siguientes conceptos: el de derivación de funciones de clase C^1 ó el concepto usual de multiplicación de funciones continuas ([7, pág. 96]). Notemos que no hay problema en relación con las funciones de clase C^∞.

En nuestro caso nos restringimos al subespacio de las distribuciones integrables, $\mathcal{A}_C$, esto hace posible definir el producto de una distribución integrable por una función de variación acotada. Y con esto podemos dar una versión de la fórmula de Integración por Partes para la integral distribucional.

Daremos ahora la definición de funciones de variación acotada y de variación acotada normalizada. También emplearemos el concepto de integral de Riemann-Stieljes. Para revisar los elementos de esta integral recomendamos la referencia [3] en el cual el lector encontrará un desarrollo muy completo y accesible de este tema.

Definición 3.24. *Si $g : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, su* variación *se define por*

$$Vg := \sup \sum_n |g(x_n) - g(y_n)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las colecciones finitas $\{(x_n, y_n)|1 \leq$

$n \leq N\}$, con $N \in \mathbb{N}$, de intervalos disjuntos, y tales que $x_n, y_n \in \overline{\mathbb{R}}$. El conjunto de las funciones de variación acotada lo denotaremos por BV.

Observación 3.25. *Con respecto a las funciones de variación acotada señalaremos lo siguiente.*

1. *Se sabe que las funciones de variación acotada son acotadas y que tienen límites laterales (derecho e izquierdo) en cada punto (por la derecha para $-\infty$ y por la izquierda para ∞). Así, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $\mathbb{R}$, entonces los límites $\lim_{-\infty} g$ y $\lim_{\infty} g$ existen. Usaremos esto para extender el dominio de g a $\overline{\mathbb{R}}$.*

2. *Si $g \in BV$ entonces se puede cambiar a g en un conjunto numerable y así, obtener una función, $\overline{g}$, continua por la derecha sobre $[-\infty, \infty)$ y continua por la izquierda en ∞, es decir, $\lim_{x \to a^+} g(x) = \overline{g}(a)$ para toda $a \in [-\infty, \infty)$, y $\lim_{x \to \infty} g(x) = \overline{g}(\infty)$. Diremos que tales funciones son de* variación acotada normalizada. *A tal espacio de funciones lo denotaremos por NBV.*

3. *El espacio BV es un espacio de Banach con la norma $||g||_{BV} = |g(-\infty)| + Vg$.*

Para definir la Integración por Partes necesitamos probar la siguiente

Proposición 3.26. *Sea $f \in \mathcal{A}_C$ y $g \in BV$. Definimos $H(x) = F(x)g(x) - \int_{-\infty}^{x} F(t)dg(t)$. Entonces $H \in \mathcal{B}_C$.*

Demostración. Ya que g es de variación acotada, g es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $y \geq x$. Ya que $\int_x^y dg = g(y) - g(x)$, podemos escribir $H(x) - H(y) = [F(x) - F(y)]g(x) + \int_x^y [F(t) - F(y)]dg(t)$. Ahora,

$$|H(x) - H(y)| \leq |F(x) - F(y)|M + \max_{x \leq t \leq y} |F(t) - F(y)|Vg \tag{3.4}$$

$$\to 0 \text{ cuando } y \to x, \text{ ya que } F \text{ es uniformemente continua.}$$

Similarmente si $y \leq x$. Por consiguiente, $H \in C(\mathbb{R})$. Para probar que $H \in \mathcal{B}_C$, sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $|H(x)| \leq |F(x)|M + ||F\chi_{(-\infty,x]}||_\infty Vg \to 0$ cuando $x \to -\infty$. De (3.4), la sucesión $\{H(n)\}$ es de Cauchy y por consiguiente, tiene límite conforme $n \to \infty$. Así, $H \in \mathcal{B}_C$. □

Ahora presentamos la fórmula de Integración por Partes como una definición que se obtiene a partir de la proposición anterior.

Definición 3.27 (**Integración por Partes**). *Sean* $f \in \mathcal{A}_C$ *y* $g \in BV$*. Definimos* $fg = T'_H$*, donde* $H(x) = F(x)g(x) - \int_{-\infty}^{x} Fdg$*. Entonces* $fg \in \mathcal{A}_C$ *y* $\int_{-\infty}^{\infty} fg = F(\infty)g(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} Fdg$*.*

Observación 3.28. *Es importante señalar lo siguiente:*

1. *Veamos si la definición de producto entre una función de variación acotada y una distribución en* $\mathcal{A}_C$ *(hecha en esta sección) coincide con la Definición 2.7, en donde se habla del producto de una distribución* $T \in \mathcal{D}'$ *por una función de clase* C^∞*.*

   Para ello necesitamos realizar los siguientes cálculos.

   Si multiplicamos $f \in \mathcal{A}_C$ *por una función* $g \in BV \cap C^\infty$*, la definición anterior nos dice que* $fg = T'_H$*, donde* $H(x) = F(x)g(x) - \int_{-\infty}^{x} F(t)dg(t)$*. Luego*

$$\begin{aligned}
\langle fg, \phi\rangle &= \langle H', \phi\rangle = -\langle H, \phi'\rangle \\
&= -(L)\int_{-\infty}^{\infty} \Big[F(x)g(x) - \int_{-\infty}^{x} F(t)dg(t)\Big]\phi'(x)dx \\
&= -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)\phi'(x)dx \\
&+ (L)\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{x} F(t)dg(t)\Big]\phi'(x)dx \\
&= -\langle T_{Fg}, \phi'\rangle + (L)\int_{-\infty}^{\infty} \Big[(L)\int_{-\infty}^{x} F(t)g'(t)dt\Big]\phi'(x)dx \\
&= \langle T'_{Fg}, \phi\rangle + (L)\int_{-\infty}^{\infty} \Big[(L)\int_{-\infty}^{x} F(t)g'(t)\phi'(x)dt\Big]dx
\end{aligned}$$

   En la penúltima igualdad hemos usado el hecho de que g *es absolutamente continua ya que* g *es de variación acotada y de clase* C^∞*. Recordemos que una función absolutamente continua es diferenciable casi dondequiera y en este sentido se debe interpretar* g' *en los cálculos a lo largo de este inciso.*

Aplicando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración en el plano xt, se observa que la región de integración es la parte del plano que queda debajo de la recta $t = x$. Así, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& \langle T'_{Fg}, \phi\rangle + (L)\int_{-\infty}^{\infty}\Big[(L)\int_{-\infty}^{x} F(t)g'(t)\phi'(x)dt\Big]dx = \\
= \;& \langle T'_{Fg}, \phi\rangle + (L)\int_{-\infty}^{\infty}\Big[(L)\int_{t}^{\infty} F(t)g'(t)\phi'(x)dx\Big]dt \\
= \;& \langle T'_{Fg}, \phi\rangle + (L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)g'(t)[\phi(\infty) - \phi(x)]dt \\
= \;& \langle T'_{Fg}, \phi\rangle - (L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)g'(t)\phi(x)dt.
\end{aligned}
$$

Esto concuerda con la definición usual cuando g es de clase C^{∞}. Pues para $\phi \in \mathcal{D}$, tenemos $g\phi \in BV \cap C^{\infty}$[3] y así, $\langle fg, \phi\rangle := \langle f, g\phi\rangle = \langle T'_F, g\phi\rangle = -\langle T_F, (g\phi)'\rangle = -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\Big(g(t)\phi(t)\Big)'dt$. El resto de las operaciones muestran que

$$
\begin{aligned}
& -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\Big(g(t)\phi(t)\Big)'dt = \\
= \;& -(L)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(F(t)\phi(t)g'(t) + F(t)g(t)\phi'(t)\Big)dt \\
= \;& -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\phi(t)g'(t)dt - (L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)\phi'(t)dt \\
= \;& -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\phi(t)g'(t)dt - \langle T_{Fg}, \phi'\rangle \\
= \;& \langle T'_{Fg}, \phi\rangle - (L)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\phi(t)g(t)dt.
\end{aligned}
$$

Con lo cual comprobamos la coincidencia de las definiciones.

2. *Lo anterior nos dice que al restringirnos a un subespacio de las distribuciones, en este caso a $\mathcal{A}_C$, hemos podido **ampliar** el espacio base $\mathcal{D}$ al espacio de las funciones de variación acotada BV ($\mathcal{D} \subset BV$). Con lo cual hemos **generalizado**, en este sentido, la noción usual de producto de una distribución por una función.*

[3] Obsérvese que esta intersección es diferente del vacio ya que $\mathcal{D} \subset BV \cap C^{\infty}$

Ahora estamos en condiciones de hablar de $\int_I f$ cuando $I = [a,b],\ [a,b),\ (a,b]$ o (a,b).

Observación 3.29. *Note que para $(a,b) \subset \mathbb{R}$ tenemos $\int_a^b fg = F(b)g(a) - F(a)g(a) - \int_a^b F dg$, donde $F' = f$ y $F \in C(a,b)$. Una consecuencia es que si $f \in \mathcal{A}_C$ entonces f es integrable sobre cualquier subintervalo de la recta real. Para cualquier intervalo compacto $[a,b]$,*

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f &= \int_{-\infty}^{\infty} f\chi_{[a,b]} \\
&= F(\infty)\chi_{[a,b]}(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} F d\chi_{[a,b]} \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}
$$

Tenemos también que $\int_I f = F(b) - F(a)$ cuando $I = [a,b],\ [a,b),\ (a,b]$ o (a,b). Esto se puede comprobar haciendo $g = \chi_I$ e integrando por partes.

La observación anterior está relacionada con el tema de la **integral impropia**. Concepto que está asociado, a su vez, con el Teorema de Hake, el cual trataremos en la siguiente sección.

3.30. Nota. *La fórmula de integración por partes muestra que la integral distribucional que hemos definido es compatible con la definición de integral (también para distribuciones) dada por Schwartz [24, pág. 12]. Si $f \in \mathcal{D}'$ es tal que $f(1)$ está definido, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f := f(1)$. Ya que la función $1 \in BV$, la integración por partes nos da, $f(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{\infty} f1 = F(\infty)1 - \int_{-\infty}^{\infty} f d1 = F(\infty)$.*

Una aplicación de la Fórmula de Integración por Partes es el siguiente teorema

Teorema 3.31 (**Segundo Teorema del Valor Medio**)**.** *Sea $f \in \mathcal{A}_C$ y sea $g : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ monótona. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} fg = g(-\infty)\int_{-\infty}^{\xi} f + \int_{\xi}^{\infty} f$ para alguna $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Usando Integración por Partes y el Teorema del Valor Medio para la integral de Riemann-Stieltjes ([3, pág. 32]):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} fg &= F(\infty)g(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} F dg \\ &= F(\infty)g(\infty) - F(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} dg \\ &= F(\infty)g(\infty) - F(\xi)[g(\infty) - g(-\infty)] \\ &= g(-\infty)F(\xi) + g(\infty)[F(\infty) - F(\xi)].\end{aligned}$$

□

3.1.7. Teorema de Hake

En la teoría clásica del cálculo integral está presente el concepto de *integral impropia*. Si f es continua en $[a, b]$, excepto en $x = a$, entonces para cada $c \in (a, b)$ la integral $\int_c^b f(x)dx$ existe. Podemos entonces inquirir acerca de la existencia del $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$. Si este límite existe se dice que define la **integral impropia** de f desde a hasta b. La notación es la misma que para una integral propia u ordinaria. En forma semejante, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ se define como $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$ si el límite existe. Si una integral impropia existe se dice que **converge**.

El siguiente resultado fue probado por Heinrich Hake (matemático alemán) para la integral de Perron en 1921. Y es un resultado que distingue a la integral de Henstock-Kurzweil, ya que no se cumple para la integral de Riemann y Lebesgue. Este teorema se sigue cumpliendo para la integral distribucional.

Teorema 3.32 (**Teorema de Hake**). *Supongamos que $f \in \mathcal{D}'$ y $f = T_F'$ para alguna $F \in C(\mathbb{R})$. Si $\lim_{x \to \infty} F(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ existen en $\mathbb{R}$, entonces $f \in \mathcal{A}_C$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f \ + \ \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 f$.*

Demostración. Se define $\overline{F}(x) = F(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, $\overline{F}(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x)$, $\overline{F}(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$. Entonces $\overline{F} \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y $T_{\overline{F}}' = f$. Por consiguiente,

$f \in \mathcal{A}_C$ y, por el TFC se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f &= \overline{F}(\infty) - \overline{F}(-\infty) \\
&= \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) \\
&= \lim_{x\to\infty} [F(x) - F(0)] + \lim_{x\to-\infty} [F(0) - F(x)] \\
&= \lim_{x\to\infty} \int_0^x f \; + \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f.
\end{aligned}$$

□

También hay versiones similares con intervalos compactos e intervalos no acotados. El resultado correspondiente es falso para la integral de Lebesgue. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \sin(t^2)dt = \sqrt{\pi}/(2^{\frac{3}{2}})$, pero la función $t \mapsto \sin(t^2)$ no está en L^1. La integral es llamada la integral de $Cauchy - Lebesgue$ y, en este caso, es también una integral impropia de Riemann. El Teorema de Hake es válido para la integral de Henstock-Kurzweil y la integral de Perron, pero la prueba no es tan breve como la que acabamos de presentar. Ver el Teorema 9.21 y el Teorema 8.18. en [14].

3.2. El espacio $\mathcal{A}_C$

Ahora hablaremos de $\mathcal{A}_C$ no sólo como conjunto sino como espacio vectorial en el que se puede definir una norma que lo convierte en espacio de Banach. Además veremos que $\mathcal{A}_C$ contiene dos espacios importantes de funciones integrables: el espacio de las Lebesgue integrables (que no es completo con la norma que hereda de $\mathcal{A}_C$) y el espacio de las Henstock-Kurzweil integrables (cuya norma coincide con la norma que hereda de $\mathcal{A}_C$). Espacios que son densos en $\mathcal{A}_C$. Con lo cual se prueba que $\mathcal{A}_C$ es homeomorfo a la completación de HK. Hecho que motivó, principalmente, nuestro interés por estudiar la integral distribucional. También estudiaremos la relación entre la topología de $\mathcal{A}_C$ dada por la norma y la topología que este espacio hereda del espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$. Cerramos este capítulo con el concepto de *orden* de una distribución integrable.

3.2.1. $\mathcal{A}_C$ como espacio de Banach

Al inicio de este capítulo se revisaron las propiedades básicas de la integral distribucional (Teorema 3.10), en donde la linealidad de la derivada distribucional se utilizó fuertemente para la demostración. Estas propiedades básicas de la integral distribucional hacen de $\mathcal{A}_C$ un espacio vectorial.

Para definir una norma en $\mathcal{A}_C$, presentamos primero la siguiente proposición, que es consecuencia del Teorema 3.10 y de la definición de $\mathcal{A}_C$ y $\mathcal{B}_C$.

Proposición 3.33. *La aplicación $\mathcal{F}$, definida por*

$$\mathcal{F}(f) = F, \text{ para } f \in \mathcal{A}_C, \text{ donde } F \in \mathcal{B}_C \text{ es la primitiva de } f,$$

es un isomorfismo lineal de $\mathcal{A}_C$ en $\mathcal{B}_C$.

A traves del isomorfismo $\mathcal{F}$ definimos la **norma de Alexiewicz** sobre $\mathcal{A}_C$ mediante

$$\| f \| := \| \mathcal{F}(f) \|_\infty .$$

Con lo anterior podemos probar de forma sencilla el importante resultado que aparece como corolario del siguiente

Teorema 3.34. *$\mathcal{A}_C$ y $\mathcal{B}_C$ son isometricamente isomorfos. La integral es una isometría lineal.*

Corolario 3.35. *Con la norma de Alexewicz, $\mathcal{A}_C$ es un espacio de Banach.*

La norma de Alexiewicz resulta invariante bajo traslaciones, y se pueden definir otras normas equivalentes a ella, pero no desarrollaremos aquí estos resultados. El lector los puede consultar en [30, pág. 30].

Para probar que $\mathcal{A}_C$ es la completación de HK es conveniente desarrollar antes el tema de las distribuciones regulares en $\mathcal{A}_C$.

3.2.2. Distribuciones regulares en $\mathcal{A}_C$

Ya hemos hablado en la primera mitad de este capítulo sobre las propiedades básicas de la integral distribucional y también hemos comentado que los elementos de $\mathcal{A}_C$ como distribuciones, poseen la característica de tener una infinidad de primitivas y que toda distribución integrable sobre $\mathcal{D}(I)$ se puede extender a todo $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. El objetivo de esta sección es hablar de otra propiedad que como distribución pueden tener algunos elementos de $\mathcal{A}_C$.

Comencemos recordando que, en general, la derivada de una distribución $T \in \mathcal{D}'$ se define como:

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle.$$

Por definición todo elemento de $f \in \mathcal{A}_C$ es la derivada distribucional de una función continua $F \in \mathcal{B}_C$, es decir, $\langle f, \phi \rangle = \langle T'_F, \phi \rangle$, para cada $\phi \in \mathcal{D}$.

Sabemos, por el Teorema 2.13 que si F es derivable y F' es continua entonces $T'_F = T_{F'}$. Pero este resultado se puede generalizar. Así, estamos interesados en saber que tanto se pueden debilitar las hipótesis de este teorema. Que debe cumplir $F \in \mathcal{B}_C$ para que

$$\langle T'_F, \phi \rangle = \langle T_{F'}, \phi \rangle. \tag{3.5}$$

El resultado más general es el que presenta W. Rudin [23, pág. 148] y hace uso de las funciones absolutamente continua. Recordemos que toda función absolutamente continua es derivable casi donde quiera, y en este sentido se debe entender F', en el siguiente resultado.

Teorema 3.36. *Para $F \in \mathcal{B}_C$ se cumple que:*

$$T'_F = T_{F'} \textit{ si y sólo si } F \in AC.$$

Esto quiere decir que si $F \in AC$, entonces f es regular y $f = T_{F'}$, más aun, cualquier distribución regular en $\mathcal{A}_C$ es generada por la derivada de alguna función absolutamente continua.

A partir de este resultado podemos afirmar que si $F \in \mathcal{B}_C - AC$ entonces la Ecuación 3.5 no se satisface. Sin embargo, **sí es posible generalizar el Teorema 3.36** si se sustituye la integral de Lebesgue, empleada para definir las distribuciones regulares, por la integral de Henstock-Kurzweil.

Recordemos el siguiente concepto.

Definición 3.37 (Distribuciones HK-regulares). *Si $f \in HK_{loc}\mathbb{R}$ entonces $\langle T_f, \phi \rangle = (HK) \int_{-\infty}^{\infty} f\phi$ define una distribución. A las distribuciones T_f, generadas por una función localmente Henstock-Kurzweil integrable, les llamaremos distribuciones HK-regulares o distribuciones regulares en el sentido de Henstock-Kurzweil.*

Teorema 3.38. *Sea $f = T_F'$, con $F \in B_C$. Si $F \in ACG_\delta$ entonces*

$$\langle f, \phi \rangle = \langle T_{\mathfrak{f}}, \phi \rangle = (HK) \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}\phi.$$

Es decir, f es regular. Más aun, $F(x) = (HK) \int_{-\infty}^{x} \mathfrak{f}$.

Demostración. El razonamiento es como sigue:

El Teorema de Integración por Partes (Teorema 1.23) nos dice que la derivada distribucional de una función continua F será regular, es decir

$$-\int F\phi' = \int \mathfrak{f}\phi$$

si y sólo si F es la integral indefinida de una función HK-integrable.

Por la Observación 1.22, sabemos que el hecho de que F sea la integral indefinida de una función HK-integrable es equivalente a que F sea una función ACG_δ. Con lo que concluye la demostración. $\square$

Observación 3.39. *En resumen, los Teoremas 3.36 y 3.38 nos dicen lo siguiente:*

1. *Si $F \in AC$, entonces f es regular, y $f = T_{\mathfrak{f}}$, para alguna $\mathfrak{f} \in L^1$.*

2. *Si $F \in ACG_\delta$, entonces f es regular, en el sentido de la Definición 2.5, y $f = T_{\mathfrak{f}}$, para alguna $\mathfrak{f} \in HK$.*

3. *Lo anterior nos hace ver que existen distribuciones en $\mathcal{A}_C$ que no satisfacen la Ecuación 3.5. El ejemplo se puede obtener tomando una función continua, pero que no es diferenciable en todo punto (Observe que tal función no puede ser ACG_δ ya que a estas se les puede derivar excepto, posiblemente, en un conjunto de medida cero[4]. Otra distribución a considerar es la generada por la función de Cantor-Lebesgue Λ (véase [4, pág. 410]), pues esta función es continua pero no es ACG_δ, y por esta razón no se le puede aplicar el Teorema 3.38.*

Entonces a cada $\mathfrak{h} \in L^1$ se le puede asociar una distribución $T_{\mathfrak{h}} \in \mathcal{A}_C$, y a cada $\mathfrak{f} \in HK$ también se le puede asociar una distribución $T_{\mathfrak{f}} \in \mathcal{A}_C$, y en este sentido diremos que L^1 y HK están contenidos en $\mathcal{A}_C$. Así que podemos definir los siguientes espacios.

[4] Aquí estamos considerando a los conjuntos de medida cero con respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 3.40. *Sean*

$$L_C := \{f \in \mathcal{A}_C \big| f = T_{\mathfrak{f}},\ \textit{para alguna}\ \mathfrak{f} \in \mathcal{L}^1\},$$

$$HK_C := \{f \in \mathcal{A}_C \big| f = T_{\mathfrak{f}},\ \textit{para alguna}\ \mathfrak{f} \in \mathcal{HK}\}.$$

y definimos también la aplicación $\mathfrak{F} : \mathcal{HK} \to \mathcal{A}_C$ *como* $\mathfrak{F}(\mathfrak{f}) = T_{\mathfrak{f}}$.

Con ello tenemos una descripción bastante interesante (pues está en términos de objetos conocidos) de un subconjunto, de $\mathcal{A}_C$, bastante amplio. El siguiente teorema nos da una importante propiedad de estos subconjunto de distribuciones regulares en $\mathcal{A}_C$.

Otra cosa que se debe notar es que estos resultados nos dan una aplicación de las diversas definiciones de integral que existen, pues las distribuciones regulares en cualquier texto se definen en términos de la integral de Lebesgue y al introducir la integral de Henstock-Kurzweil, el espacio de distribuciones regulares se amplia, es decir, algunas de las distribuciones singulares se pueden expresar ahora, en términos de la integral HK, como distribuciones regulares. Esto nos permite considerar la idea de emplear otras integrales cuyo espacio sea más amplio que HK, para darle una nueva interpretación a otras distribuciones singulares.

Observación 3.41. *Como ya hemos visto, la integral distribucional es un concepto más general que la integral* HK*, así que nos podemos preguntar si podemos utilizar esta integral para expresar las distribuciones en términos de la integral distribucional. En realidad sí es posible hacerlo y podemos dar una nueva interpretacion de la acción de* $f \in \mathcal{A}$ *como una distribución, y su justificación la da la Integración por Partes que vimos en la Definición 3.27.*

Sea $\phi \in \mathcal{D}$. *Como* $\phi \in C^1 \subset BV$*, entonces*

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi \rangle &= \langle T_F', \phi \rangle = -\langle F, \phi' \rangle = -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F\phi' \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} F d\phi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\phi \right) - F(\infty)\phi(\infty) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\phi.
\end{aligned}$$

Así, la acción de f *sobre la función prueba* ϕ *es interpretada como la integral del producto* $f\phi$*, una situación análoga al caso en que* f *es regular y está generada por una función localmente integrable.*

Un ejemplo importante

Todos los elementos que hemos reunido hasta ahora nos permitiran aclarar con facilidad y contundencia el siguiente ejemplo que presenta Talvila en [30]. Un ejemplo muy confuso e inquietante.

Ejemplo 3.42. *Sea F una función singular, creciente y continua sobre $[0,1]$ tal como la función de Cantor-Lebesgue. Entonces $F'(x) = 0$ para casi toda $x \in [0,1]$. Ya que F es de variación acotada (véase la sección 5), su derivada es integrable en el sentido de Lebesgue y $\int_0^x F'(t)dt = 0$ para toda $x \in [0,1]$. Pero, $F' \in \mathcal{A}_C$ y la integral distribucional es $\int_0^x F' = F(x) - F(0)$ para toda $x \in [0,1]$.*

En otras palabras nos dice que **el valor de la integral distribucional y el valor de la integral de Lebesgue para una misma función no coinciden**, y por lo tanto es posible que nuestra definición de integral no coincida con el concepto clásico de esta, y con ello, la generalización que hemos hecho del concepto de integral no sea adecuada. Veremos que en realidad nuestra teoría es correcta ya que en el ejemplo anterior se comete un error en el razonamiento. La observación es sutil pero como podemos darnos cuenta cambia totalmente el resultado.

Solución. Primero que nad a señalaremos que en el artículo se emplea la notación F' para la derivada distribucional de la distribución regular asociada a F. Para la aclaración que vamos a hacer emplearemos la notación que emos venido empleando para reescribir el ejemplo.

En efecto $F \in C([0,1])$ y por lo tanto $T_F' \in \mathcal{A}_C([0,1])$, así que $\int_0^1 T_F' = F(1) - F(0) \neq 0$. Sin embargo el ejemplo considera por un lado la integral distribucional de T_F' y por otro la integral de Lebesgue de F'. Si deseamos que el concepto general coincida con el clásico, estamos pidiendo que para cualquier función $F \in L^1_{loc}$ se cumpla que $(L)\int F = \int T_F$, es decir que en nuestro ejemplo debería ser verdad que $\int F' = \int T_{F'}$ mientras que en el ejemplo se iguala $\int F'$ con $\int T_F'$. Y esto sólo sería cierto si

$$\int T_{F'} = \int T_F'. \tag{3.6}$$

Pero como hemos visto al inicio de esta sección esto sólo es verdad si y sólo si F es absolutamente continua (Teorema 3.36). Lo cual no ocurre con la función de Cantor-Lebesgue. Asi que la igualdad (3.6) no ocurre y por lo tanto $(L)\int F'$ y $\int T'_F$ no tienen por que ser iguales. De hecho no lo son. Así que esto no muestra ninguna inconsistencia en la teoría.

3.2.3. La topología de $\mathcal{A}_C$

La topología con la que consideraremos a $\mathcal{A}_C$ es la generada por su norma (la norma de Alexiewicz).

El propósito de esta sección es estudiar la relación entre la convergencia de las sucesiones en $\mathcal{A}_C$, y la convergencia de las mismas sucesiones, pero ahora, en las topologías (dadas por las normas respectivas) de los subespacios L^1, HK, y la convergencia en el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$.

Relación entre las normas de L^1, HK y $\mathcal{A}_C$

Ya que los elementos L_C y HK_C están unívocamente determinados por funciones Lebesgue y Henstock-Kurzweil integrables, respectivamente, se puede dotar a estos subespacios de $\mathcal{A}_C$ de una estructura de espacio normado, utilizando las normas usuales, la $L^1-norma$ de L^1 y la norma de Alexiewicz en HK. Pero para hablar de estas normas debemos comentar lo siguiente.

Al final de la Sección 3.1.3 dimos una definición de valor absoluto de una distribución integrable que hace a la integral distribucional una integral absoluta, sin embargo, como hemos visto, el espacio de la funciones Henstock-Kurzweil integrables está contedido en $\mathcal{A}_C$ y el valor de las integrales coincide, así que es contradictorio afirmar que la generalización de la integral HK sea absoluta. Por supuesto las definiciones hechas en la Sección 3.1.3 no coincide con la definición clásica de valor absoluto. Así que aquí definimos lo siguiente:

Definición 3.43. *Si $f \in \mathcal{A}_C$ es regular y $f = T_{\mathfrak{f}}$, con $\mathfrak{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, entonces definimos el valor absoluto de la distribución como $|f| := T_{|\mathfrak{f}|}$.*

$T_{|\mathfrak{f}|}$ define una distribución ya que si $\mathfrak{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entonces $|\mathfrak{f}| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Por supuesto esta definición coincide con la definición clásica de valor absoluto. Y nos permite definir las normas antes mencionadas. Es momento de comparar estas dos normas con la de $\mathcal{A}_C$.

Proposición 3.44. *Si $f = T_{\mathfrak{f}}$ y $\mathfrak{f} \in L^1$, entonces $||f|| \leq ||\ |f|\ ||$. Además, $||f|| \leq ||\mathfrak{f}||_1 \leq ||\ |f|\ ||$. Y si $\mathfrak{f} \in HK$ entonces $||f|| = ||\mathfrak{f}||_A$.*

Notese que de no ser por el valor absoluto la $L^1 - norma$ y la norma de $\mathcal{A}_C$ serían equivalentes, es decir, generarían la misma topología .

La proposición nos dice que si consideramos una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$ donde cada una de ella es regular, no prodremos afirmar que el límite lo sea si consederamos la norma en $\mathcal{A}_C$, asi es que nos preguntamos ¿qué debemos agregar para garantizar que el límite de regulares sea regular con la norma de $\mathcal{A}_C$?

La misma proposición nos da una respuesta para el caso más sencillo.

Corolario 3.45. *Si consideramos la sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$ tal que $f_n \in L_C$ para toda n, y $||\,|f_n - f|\,|| \to 0$ para alguna $f \in L_C$, entonces $||f_n - f|| \to 0$.*

Aunque en realidad se está pidiendo la convergencia con la L^1-norma, se debe notar que la hipótesis que exige la proposición anterior está en términos de la norma del espacio $\mathcal{A}_C$.

El siguiente teorema nos da una importante propiedad de los subespacios L_C y HK_C.

Teorema 3.46. *L^1 y $\mathcal{HK}$ son densos en $\mathcal{A}_C$. Además, $\mathcal{A}_C$ es separable.*

Demostración. Funciones, Φ, para las cuales existe un polinomio p y un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $p(a) = 0$, tales que $\Phi(x) = 0$ si $x \in (-\infty, a]$, $\Phi(x) = p(x)$ para $x \in [a, b]$, y $\Phi(x) = p(b)$ si $x \in [b, \infty)$, son densas en $\mathcal{B}_C$ con $||.||_\infty$. Pero tales funciones son absolutamente continuas. Lo que quiere decir, por el Teorema 3.36, que L^1 es denso en $\mathcal{A}_C$.

□

Observación 3.47. *Recordemos que L_C es completo con la L^1-norma pero no lo es con la norma de $\mathcal{A}_C$, pues de ser así $\mathcal{A}_C = \widehat{L}_C = L_C$, ya que L_C es denso en $\mathcal{A}_C$.*

Ahora podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 3.48. *$\mathcal{A}_C$ es la completación de HK.*

Demostración. Sabemos que HK no es completo. Así que $HK \neq \widehat{HK}$ y como HK es denso en $\mathcal{A}_C$, también $\widehat{HK}$ es denso en $\mathcal{A}_C$. Y como $\mathcal{A}_C$ es completo, entonces $\widehat{HK} = \mathcal{A}_C$. □

Relación entre las topologías de $\mathcal{A}_C$ y $\mathcal{D}'$

Al tomar una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$, cada término de la sucesión es una distribución en $\mathcal{D}'$, y por lo tanto $\{f_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}'$ que converge si cumple la Definición 2.16. Así que hablamos de dos definiciones distintas de convergencia para la misma sucesión. La convergencia en términos de la norma de Alexiewicz y en términos de la Definición 2.16. Discutiremos ahora la relación entre estos dos tipos de convergencia.

Definición 3.49. *Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$ converge fuertemente a $f \in \mathcal{A}_C$ si $||f_n - f|| \to 0$. Y converge débilmente en $\mathcal{D}$, si $\langle f_n - f, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(f_n - f)\phi \to 0$ para cada $\phi \in \mathcal{D}$.*

Teorema 3.50. *Convergencia fuerte implica convergencia débil en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Esto es consecuencia de la desigualdad de Hölder. Sea $f, f_n \in \mathcal{A}_C$ para $n \geq 1$. Ya que $\phi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{BV}$ entonces

$$|\langle f_n - f, \phi\rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n - f)\phi \right| \leq 2||f_n - f|| \cdot ||\phi||_{BV}.$$

Si $||f_n - f|| \to 0$ (convergencia fuerte), entonces $|\langle f_n - f, \phi\rangle| \to 0$ (convergencia débil). □

Observación 3.51. *A continuación presentamos otra demostración del teorema anterior. Si F_n converge uniformemente a F entonces $F_n\phi'$ converge uniformemente a $F\phi'$, en el soporte de ϕ', y por lo tanto $(L)\int_{-\infty}^{\infty} F_n\phi'$ converge a $(L)\int_{-\infty}^{\infty} F\phi'$, así*

$$\langle T'_{F_n}, \phi\rangle = -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F_n\phi' \to -(L)\int_{-\infty}^{\infty} F\phi' = \langle T'_F, \phi\rangle$$

Es decir f_n converge débilmente a f en $\mathcal{D}$. Esta demostración sólo requirió de la teoría clásica de la integral de Riemann, y no fue necesario ninguno de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, sin embargo se debe notar que en el artículo [30] se busca desarrollar la teoría de una forma secuencial que se asemeje a la forma clásica de desarrollar la teoría de integración en el orden que comunmente se espera.

Supongase que $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$. La convergencia fuerte $||f_n - f|| \to 0$ implica que $f \in \mathcal{A}_C$ ya que $\mathcal{A}_C$ es un espacio de Banach. Pero, si $f_n \to f$ débilmente en $\mathcal{D}$ entonces f no necesariamente está en $\mathcal{A}_C$.

Ejemplo 3.52. *Existe una sucesión* $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$ *que converge débilmente en* $\mathcal{D}$ *a* $f \in \mathcal{D}' \backslash \mathcal{A}_C$*. Sea* $f_n = \chi_{[-n,n]}$*. Entonces* $f_n \in \mathcal{A}_C$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Sea* $\phi \in \mathcal{D}$*. Por el teorema de la convergencia dominada (o prueba M de Weierstrass),* $\langle f_n, \phi \rangle = (L)\int_{supp\ (\phi)} \chi_{[-n,n]}\phi \to (L)\int_{-\infty}^{\infty} \phi = \langle 1, \phi \rangle$*. Por lo tanto,* f_n *converge débilmente en* $\mathcal{D}$ *a* $1 \in \mathcal{D}' \backslash \mathcal{A}_C$*.*

Ya que la convergencia débil no implica convergencia fuerte nos preguntamos a cerca de las hipótesis adicionales para obtener la implicación recíproca.

Note que la convergencia fuerte $||f_n - f|| \to 0$ es lo mismo como convergencia uniforme de $F_n \to F$ sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Si cada función $F_n \in \mathcal{B}_C$, entonces la convergencia uniforme de $F_n \to F$ garantiza que F es continua sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Ya que cada $F_n(-\infty) = 0$, también se tiene que $F(-\infty) = 0$, así $F \in \mathcal{B}_C$ y $\int_{-\infty}^{x} f_n \to \int_{-\infty}^{x} T_F'$ para cada $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Para responder a la pregunta planteada requerimos de los siguientes resultados, relacionados con el teorema de Arzelà-Ascoli.

Teorema 3.53. $(X_p, d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *representa una sucesión de espacios métricos, y, para cada* $p \in \mathbb{N}$*,* $(x_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* X_p*. Si para cada* $p \in \mathbb{N}$*, el conjunto* $\{x_{n,p} : n \in \mathbb{N}\}$ *es relativamente compacto en* X_p*, entonces existe una función estrictamente creciente* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que para cada* $p \in \mathbb{N}$ *la sucesión* $(x_{\varphi(n),p})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* X_p*.*

Recordemos que un subconjunto Y de un espacio métrico X se dice que es relativamente compacto en X si existe un compacto K de X tal que $Y \subset K$, o, equivalentemente, si la cerradura de Y en X es compacta. En términos de sucesiones, Y es relativamente compacto si y sólo si cada sucesión en Y tiene una subsucesión que converge en X (véase [17, pág. 12]).

Definición 3.54. *Una sucesión de funciones* $\{F_n\} \subset \mathcal{B}_C$ *es equicontinua en* $x \in \mathbb{R}$ *si para toda* $\epsilon > 0$ *existe una* $\delta > 0$ *tal que para toda* $n \geq 1$*, si* $y \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x-y| < \delta$ *entonces* $|F_n(x) - F_n(y)| < \epsilon$*. Podemos definir equicontinuidad en* ∞ *reemplazando la condición que involucra a* δ *con* $y > 1/\delta$*. Similarmente para* $-\infty$*. El punto es que una* δ *funciona para toda* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $\{F_n\}$ *es equicontinua en cada punto de* $\overline{\mathbb{R}}$ *diremos que esta sucesión es equicontinua sobre* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

En los siguientes resultados X representa un espacio métrico compacto y $C(X)$ denota el espacio de las funciones continuas con valores reales y con dominio X.

Proposición 3.55. *[17, Proposición 3.2, pág. 43] Si $\{F_n\}$ es una sucesión de funciones equicontinuas en $C(X)$ y sea D un subconjunto denso de X. Si para toda $x \in D$, la sucesión de números $\{F_n(x)\}$ converge, entonces la sucesión de funciones $\{F_n\}$ converge uniformemente a una función en $F \in C(X)$.*

Obsérvese que cuando tenemos una sucesión de funciones equicontinuas en un compacto, el acotamiento puntual (de la sucesión) es equivalente al acotamiento uniforme. Sin embargo, veremos en el siguiente lema que la hipótesis de acotamiento puntual se puede debilitar.

Lema 3.56. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $x_0 \in X$. Tomemos $\{F_n\} \subset C(X)$ equicontinua en X y tal que $|F_n(x_0)| = 0$, para toda $n \geq 1$. Entonces $\{F_n\}$ es uniformemente acotada.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Debido a la equicontinuidad de la sucesión, para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $y \in B_{\delta_x}(x)$ entonces $|F_n(x) - F_n(y)| < \varepsilon$.

Obsérvese que $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Por la compacidad de X existen $x_1, \ldots, x_N$ tales que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\delta_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=0}^{N} B_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

No es dificil comprobar (por inducción sobre el número de elementos de la cubierta) que si tomamos cualquier $B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ existen

$$B_{\delta_{x_{i_1}}}(x_{i_1}), B_{\delta_{x_{i_2}}}(x_{i_2}), \ldots, B_{\delta_{x_{i_k}}}(x_{i_k}) \tag{3.7}$$

tales que $B_{\delta_{x_{i_1}}}(x_{i_1}) \cap B_{\delta_{x_0}}(x_0) \neq \emptyset$, $B_{\delta_{x_{i_k}}}(x_{i_k}) \cap B_{\delta_{x_i}}(x_i) \neq \emptyset$ y $B_{\delta_{x_{i_j}}}(x_{i_j}) \cap B_{\delta_{x_{i_{j-1}}}}(x_{i_{j-1}}) \neq \emptyset$ para cada $j = 1, \ldots, k$. Observemos que $k \leq N$.

Tomemos $n \geq 1$ e $i \in \{1, \ldots, N\}$ fijos. Definimos $V(x_{i_0}) := B_{\delta_{x_0}}(x_0)$, $V(x_{i_{k+1}}) := B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ y $V(x_{i_j}) := B_{\delta_{x_{i_j}}}(x_{i_j})$ para $j = 1, \ldots, k$, donde los $B_{\delta_{x_{i_j}}}(x_{i_j})$ son los abiertos mencionados en la expresión 3.7.

Notemos que para algún $x_{i_1}^* \in V(x_{i_0}) \cap V(x_{i_1})$ se tiene que $|F_n(x_{i_1})| \leq |F_n(x_{i_1}) - F_n(x_{i_0})| + |F_n(x_{i_0})| \leq |F_n(x_{i_1}) - F_n(x_{i_1}^*)| + |F_n(x_{i_1}^*) - F_n(x_{i_0})| + |F_n(x_{i_0})| < 2\varepsilon$ (recordemos que $|F_n(x_0)| = 0$).

Para x_{i_2} tendríamos entonces que $|F_n(x_{i_2})| \leq |F_n(x_{i_2}) - F_n(x_{i_1})| + |F_n(x_{i_1})| \leq |F_n(x_{i_2}) - F_n(x_{i_2}^*)| + |F_n(x_{i_2}^*) - F_n(x_{i_1})| + |F_n(x_{i_1})| < 4\varepsilon$ para algún $x_{i_2}^* \in V(x_{i_1}) \cap V(x_{i_2})$ (pues de la ecuación anterior sabemos que $|F_n(x_{i_1})| < 2\varepsilon$).

Este razonamiento se puede aplicar de forma recursiva para obtener

$$\begin{aligned} |F_n(x_{i_j})| &\leq |F_n(x_{i_j}) - F_n(x_{i_{j-1}})| + |F_n(x_{i_{j-1}})| \\ &\leq |F_n(x_{i_j}) - F_n(x^*_{i_j})| + |F_n(x^*_{i_j}) - F_n(x_{i_{j-1}})| + |F_n(x_{i_{j-1}})| < 2j\varepsilon, \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, k+1$. Luego $|F_n(x_i)| \leq 2(k+1)\varepsilon \leq 2(N+1)\varepsilon$ (pues $x_i = x_{i_k}$), para toda $i = 1, \ldots, N$.

Para cada $x \in X$ existe $i \in \{0, \ldots, N\}$ tal que $x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. Por el razonamiento anterior

$$|F_n(x)| \leq |F_n(x) - F_n(x_i)| + |F_n(x_i)| < (2N+3)\varepsilon.$$

Ya que lo anterior fue para n arbitraria, entonces $|F_n(x)| \leq M$, con $x \in X$, para toda $n \geq 1$, donde $M := (2N+3)\varepsilon$. $\square$

Observación 3.57. *Observemos que la hipótesis de que $|F_n(x_0)| = 0$, para toda $n \geq 1$, se puede cambiar por la condición: $|F_n(x_0)| < \overline{M}$, para toda $n \geq 1$. Y el resultado se sigue cumpliendo. La demostración es análoga.*

Ahora tenemos los elementos para probar el siguiente.

Teorema 3.58. *Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$ tal que $f_n \to f$ débilmente en $\mathcal{D}$ para alguna $f \in \mathcal{D}'$. Supongamos que $\{F_n\}$ es equicontinua sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces $f \in \mathcal{A}_C$ y $||f_n - f|| \to 0$.*

Demostración. Primero observemos que $\overline{\mathbb{R}}$ es separable, ya que $D := \mathbb{Q} \cup \{\infty, -\infty\}$ es un subconjunto denso numerable en $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) $f \in \mathcal{A}_C$. Veamos esto. Como $\{F_n\}$ es equicontinua, sobre $\overline{\mathbb{R}}$, y $|F_n(-\infty)| = 0$ (pues $F_n \in \mathcal{B}_C$), para cada $n \geq 1$. Podemos aplicar el Lema 3.56 y con ello obtener que la sucesión $\{F_n(x)\}$ es acotada, para cada $x \in D$. Así, por el Teorema 3.53 existe una subsucesión $\{F_{n_k}\}$ tal que $\{F_{n_k}(x)\}$ converge para toda $x \in D$. Por la Proposición 3.55 la sucesión $\{F_{n_k}\}$ converge **uniformemente** a alguna $F \in \mathcal{B}_C$. Es decir, $||F_{n_k} - F||_\infty = ||f_{n_k} - T'_F|| \to 0$. Como convergencia fuerte implica convergencia débil, entonces $f_{n_k} \to T'_F$ débilmente en $\mathcal{D}$ y por hipótesis $f_{n_k} \to f$ débilmente en $\mathcal{D}$ (pues si la sucesión converge a f cualquier subsucesión también lo hará).

La unicidad del límite implica que $f = T'_F$, luego $f \in \mathcal{A}_C$.

(b) $||f_n - f|| \to 0$. Hemos visto que para cada $x \in D$, la sucesión $\{F_n(x)\}$ tiene una subsucesión convergente, de hecho, la sucesión es convergente para toda $x \in D$. La demostración será por contradicción. Supongamos que existe $x^* \in D$ tal que $\{F_n(x^*)\}$ no converge, y como $\{F_{n_k}(x^*)\}$ converge a $F(x^*)$, entonces existe otra subsucesión $\{F_{n_{s'}}(x^*)\}$ convergente, tal que $\lim F_{n_{s'}}(x^*) \neq F(x^*)$. Aplicando nuevamente el Teorema 3.53 existe una subsucesión $\{F_{n_s}\}$ tal que $\{F_{n_s}(x)\}$ converge para toda $x \in D$. Razonando como en el inciso anterior, la sucesión $\{F_{n_s}\}$ converge **uniformemente** a alguna $F^* \in \mathcal{B}_C$. Esto a su vez nos dice que $f_{n_s} \to T'_{F^*}$ débilmente en $\mathcal{D}$, pero por hipótesis $f_{n_s} \to f$ débilmente en $\mathcal{D}$, con lo que obtendriamos $T'_F = f = T'_{F^*}$, y por la unicidad de la primitiva continua en $\mathcal{B}_C$, $F = F^*$, pero estas funciones difieren en el punto x^* y por lo tanto $F \neq F^*$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, la sucesión $\{F_n(x)\}$ converge para toda $x \in D$. La Proposición 3.55 nos dice entonces que $\{F_n\}$ converge uniformemente a $F \in \mathcal{B}_C$, y por lo tanto $\{f_n\}$ converge fuertemente a $f \in \mathcal{A}_C$.

□

Este teorema no se puede aplicar a la sucesión del Ejemplo 3.52 ya que dicha sucesión no es equicontinua. El siguiente teorema muestra la gran ventaja de que $\mathcal{B}_C$ sea isométricamente isomorfo a $\mathcal{A}_C$, ya que los resultados que se conocen para el espacio de las continuas se pueden trasladar al espacio de las distribuciones integrables.

Teorema 3.59. *Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$. Si $\{F_n\}$ es equicontinua sobre $\overline{\mathbb{R}}$ y $\{F_n\}$ converge puntualmente a F. Entonces $f \in \mathcal{A}_C$ y $||f_n - f|| \to 0$.*

Demostración. La equicontinuidad y la convergencia puntual implican la convergencia uniforme de la sucesión $\{F_n\}$ a la función F. Y ya que $||F_n - F||_\infty = ||f_n - f||$, entonces la convergencia uniforme de $\{F_n\}$ implica la convergencia fuerte de $\{f_n\}$. □

Tal como comentamos en la Observación 3.28, después de la definición de Integración por Partes, al haber generalizado el producto de una distribución por una función, hemos cambiado el espacio base de las distribuciones en $\mathcal{A}_C$ y con ello se da origen a un nuevo conjunto de distribuciones (que siguen siendo integrables) que actuan sobre el espacio de las funciones de variación acotada, BV. A este espacio lo denotaremos por $\mathcal{A}_{BV}$ y definiremos en el la convergencia débil en términos de la acción de la integral distribucional.

Definición 3.60. *La sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_{BV}$ converge débilmente a $f \in \mathcal{A}_{BV}$ en BV si $\langle f_n - f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty}(f_n - f)g \to 0$ para cada $g \in BV$.*

Teorema 3.61. *Convergencia fuerte implica convergencia débil BV. Convergencia débil en BV no implica convergencia fuerte. Si $f_n \to f$ débilmente en BV entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f_n \to \int_{-\infty}^{\infty} f$.*

Demostración. Supongamos que $||f_n - f|| \to 0$. Entonces $||F_n - F||_\infty \to 0$. Sea $g \in BV$. Por la desigualdad de Hölder,

$$|\langle f_n - f, g\rangle| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty}(f_n - f)g\Big| \leq 2||F_n - F||_\infty ||g||_{\mathcal{BV}} \to 0.$$

Sea $f_n = \chi_{(n-1,n)} - \chi_{(n,n+1)}$. Entonces $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$. Para $g \in BV$, tenemos $\int_{-\infty}^{\infty} f_n g \to 0$ por la convergencia dominada ya que $||f_n||_\infty = 1$, g es acotada y $f_n \to 0$ puntualmente en $\mathbb{R}$. Como $||f_n|| = 1$, la convergencia débil en BV (y por consiguiente en $\mathcal{D}$) no implica convergencia fuerte.

Finalmente supongamos que $f_n \to f$ débilmente en BV. Ya que $1 \in BV$ tenemos $\int_{-\infty}^{\infty} f_n \to \int_{-\infty}^{\infty} f$. □

Observación 3.62.

1. *La convergencia débil en BV implica convergencia débil en $\mathcal{D}$, ya que $\mathcal{D} \subset BV$.*

2. *La convergencia débil en $\mathcal{D}$ no implica convergencia débil en BV. Para ver esto, sea $f_n = \chi_{(n,n+1)}$. Para $\phi \in \mathcal{D}$ tenemos $\int_{-\infty}^{\infty} f_n\phi = \int_n^{n+1} \phi \to 0$ pero si $g = 1$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f_n g = 1$ que no converge a cero.*

3.2.4. Orden de una distribución integrable

Para desarrollar el resultado de esta sección necesitamos dar la definición de orden de una distribución. Para ello, primero vamos a introducir una familia de seminormas sobre $\mathcal{D}$ de la siguiente manera:

$$||\varphi||_N = \sum_{n\leq N} ||\varphi^{(n)}||_\infty;$$

de hecho estas seminormas forman una sucesión creciente. Es natural definir entonces una topología localmente convexa sobre $\mathcal{D}$ con estas seminormas (véase [20, Ejercicio 9.3 pág. 259]); la topología resultante hace de $\mathcal{D}$ un espacio métrico que desafortunadamente no es completo.

Pero en este caso, las normas $||\varphi||_N$ son útiles para establecer el siguiente resultado.

Teorema 3.63. *Una funcional lineal T sobre $\mathcal{D}$ es una distribución si y sólo si para cada $K \subset \mathbb{R}$ compacto, existe una constante $C > 0$ y una $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C||\varphi||_N \tag{3.8}$$

para todas las funciones φ con soporte en K.

Definición 3.64. *Si el número N del teorema anterior, se puede elegir independientemente del compacto K, y N es el mínimo de tales enteros no negativos, se dice que la distribución es de* ***orden*** *N. Cuando ningún valor de N puede cumplir, para todo K, la Ecuación 3.8 se dice que T tiene orden infinito.*

Ejemplo 3.65. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto.*

(a) Sea λ una medida de Radon con signo sobre $\mathbb{R}$. La funcional

$$\langle T_\lambda, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda, \quad \phi \in \mathcal{D},$$

es una distribución de orden cero.

(b) La distribución δ_{x_0} tiene orden cero.

(c) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. La funcional

$$\langle T_f, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{D},$$

es una distribución de orden cero. En efecto,

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi \rangle| = \left| (L) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx \right| &\leq (L) \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x) f(x)| dx \\ &= (L) \int_{supp\ \phi} |\phi(x) f(x)| dx \\ &\leq \| \phi \|_\infty (L) \int_{supp\ \phi} |f(x)| dx \\ &= C \| \phi \|_0, \end{aligned}$$

con $C = (L) \int_{supp\ \phi} |f(x)|dx$.

En relación al resultado que daremos después consideramos conveniente establecer el siguiente teorema

Teorema 3.66. *T es una distribución de orden cero si y sólo si T es una medida de Radon con signo.*

En el siguiente teorema determinaremos el orden de las distribuciones en $\mathcal{A}_C$.

Teorema 3.67. *Toda distribución en $\mathcal{A}_C$ tiene, a lo más, orden uno.*

Demostración. Como $\mathcal{D} \subset \mathcal{BV}$, entonces $\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f\phi$ (véase la Observación 3.41). Por la desigualdad de Hölder obtenemos la siguiente inecuación

$$|\langle f, \phi \rangle| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f\phi \Big| \leq 2||f|| \cdot ||\phi||_{\mathcal{BV}}.$$

Veremos que $||\phi||_{\mathcal{BV}} \leq C'||\phi||_1$. Lo cual es consecuencia de que

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\varsigma)||y - x|, \text{ para algún } \varsigma \in (x, y), \tag{3.9}$$

debido al Teorema del Valor Medio.

Podemos suponer que existe un compacto K que contiene el soporte de ϕ. Si $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ es una partición de K, entonces por la ecuación (3.9)

$$\sum_{i=1}^{n} |\phi(a_i) - \phi(b_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\phi(\varsigma)||b_i - a_i| \leq ||\phi||_1 m(K),$$

donde m es la medida de Lebesgue. Por lo tanto, $V\phi \leq C'(K)||\phi||_1$, con $C'(K) = m(K)$. Y como $||\phi||_{\mathcal{BV}} := |\phi(\infty)| + V\phi = V\phi$, entonces $||\phi||_{\mathcal{BV}} \leq C'(K)||\phi||_1$, donde la constante $C'(K)$ depende de K, pero no el número natural "uno".

Por lo anterior

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq C||\phi||_1, \text{ con } C = 2||f||C'(K).$$

Si probáramos que el uno es el mínimo natural que cumple esto, entonces toda distribución en $\mathcal{A}_C$ tendría orden uno pero esto no es posible ya que las distribuciones regulares son densas en $\mathcal{A}_C$ (Teorema 3.38 y Teorema 3.48), y por lo tanto son de orden cero (Ejemplo 3.65). Así que la prueba concluye. $\square$

Como señalamos en el Teorema 3.46, los conjuntos L_C y HK_C, que son distribuciones regulares, son densos en $\mathcal{A}_C$, y como vimos en el Ejercicio 3.65, toda distribución regular tiene orden cero. Así, por el Teorema 3.66 todas las distribuciones regulares son medidas de Radon con signo.

Esto establece una relación entre las definiciones de distribuciones regulares (dadas al inico del Capítulo 2) generadas por una función localmente integrable (en el sentido de Lebesgue o de Henstock-Kurzweil) y las distribuciones generadas por una medida.

3.2.5. $\mathcal{A}_C$ como el dual de BV

En la Sección 3.1.5 estudiaremos la Fórmula de Integración por Partes. De tal fórmula se desprenden consecuencias importantes, como la desigualdad de Hölder, y que se pueda ver a los elementos de $\mathcal{A}_C$ como funcionales lineales y continuos sobre BV, como veremos a continuación.

Teorema 3.68 (**Desigualdad de Hölder**). *Sea $f \in \mathcal{A}_C$. Si $g \in NBV$ entonces $|\int_{-\infty}^{\infty} fg| \leq |\int_{-\infty}^{\infty} f| \operatorname{ínf}_{\mathbb{R}} |g| + 2||f||Vg$. Si $g \in BV$, entonces $|\int_{-\infty}^{\infty} fg| \leq 2||f||\ ||g||_{BV}$.*

La demostración es la misma que Talvila presenta en [29, Lema 24] para la integral de Henstock-Kurzweil.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $c \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $|g(c)| < \varepsilon + \operatorname{ínf}_{\overline{\mathbb{R}}} |g|$. Y definimos $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f$.

Aplicando integración por partes y algunas propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes podemos realizar los siguientes cálculos:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} fg &= F(\infty)g(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dg(x) \\
&= g(c)F(\infty) + F(\infty)g(\infty) - F(\infty)g(c) - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dg(x) \\
&= g(c)\int_{-\infty}^{\infty} f + F(\infty)\int_{c}^{\infty} dg(x) - \int_{-\infty}^{c} F(x)dg(x) - \int_{c}^{\infty} F(x)dg(x) \\
&= g(c)\int_{-\infty}^{\infty} f - \int_{-\infty}^{c} F(x)dg(x) + \int_{c}^{\infty} (F(\infty) - F(x))dg(x) \\
&= g(c)\int_{-\infty}^{\infty} f - \int_{-\infty}^{c} \Big(\int_{-\infty}^{x} f\Big)dg(x) + \int_{c}^{\infty} \Big(\int_{x}^{\infty} f\Big)dg(x).
\end{aligned}
$$

Para continuar necesitamos hacer la siguiente observación. Sean $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_{-\infty}^b f - \int_{-\infty}^a f\right| \leq \left|\int_{-\infty}^b f\right| + \left|\int_{-\infty}^a f\right| \leq 2||f||$$

Por lo tanto,

$$\sup_{[a,b]\subset\overline{\mathbb{R}}}\left|\int_a^b f\right| \leq 2||f||.$$

Por todo lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} fg\right| &< \left[\varepsilon + \inf_{\overline{\mathbb{R}}}|g|\right]\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\right| + \sup_{-\infty\leq x\leq c}\left|\int_{-\infty}^{x} f\right| V_{[-\infty,c]}g \\ &\quad + \sup_{c\leq x\leq\infty}\left|\int_{x}^{\infty} f\right| V_{[c,\infty]}g \\ &\leq \left[\varepsilon + \inf_{\overline{\mathbb{R}}}|g|\right]\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\right| + 2||f||(V_{[-\infty,c]}g + V_{[c,\infty]}g) \\ &= \left[\varepsilon + \inf_{\overline{\mathbb{R}}}|g|\right]\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\right| + 2||f||Vg.\end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad recordemos que $||g||_{BV} = |g(-\infty)| + Vg$. Así

$$\inf_{\overline{\mathbb{R}}}|g|\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\right| + 2||f||Vg \leq |g(-\infty)|\ 2||f|| + 2||f||Vg \leq 2||f||\ ||g||_{BV}.$$

□

La desigualdad de Hölder muestra que f es un funcional lineal continuo sobre BV.

Teorema 3.69. *$\mathcal{A}_C$ es el dual de BV.*

Demostración. (a) Linealidad. Para $a \in \mathbb{R}$; $g_1, g_2 \in BV$;

$$\begin{aligned}\langle f, ag_1 + g_2\rangle &= F(\infty)[ag_1 + g_2](\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} Fd(ag_1 + g_2) \\ &= aF(\infty)g_1(\infty) + F(\infty)g_2(\infty) - a\int_{-\infty}^{\infty} Fdg_1 - \int_{-\infty}^{\infty} Fdg_2 \\ &= a\langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle.\end{aligned}$$

(b) Continuidad. Supóngase $\{g_n\} \subset BV$ y $||g_n||_{BV} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces f es continua:

$$|\langle f, g_n \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f g_n \right| \leq 2||f|| \; ||g||_{BV} \to 0.$$

$\square$

Observación 3.70. *Aquí hemos modificado el conjunto de distribuciones $\mathcal{D}'$ y lo hemos restringido al de todas aquellas que son derivada distribucional de alguna contiua en $\mathcal{B}_C$. Pero aunque el espacio ahora es menor, el resultado anterior nos dice que esta restricción permite extender el espacio base $\mathcal{D}$ y cambiarlo por todo BV. Con lo cual damos lugar a otro tipo de distribuciones.*

Así, sabemos que el dual de BV contiene a $\mathcal{A}_C$, es decir, $\mathcal{A}_C \subset BV^*$. De hecho, BV^* es mucho más grande que $\mathcal{A}_C$ ya que este contiene medidas que no estan en $\mathcal{A}_C$ como por ejemplo la medida de Dirac.

3.2.6. El dual de $\mathcal{A}_C$

Teorema 3.71. *$\mathcal{A}_C^* = BV$.*

Demostración. Si $\{f_n\} \subset \mathcal{A}_C$ y $||f_n|| \to 0$ entonces para $g \in BV$ se sigue que $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n g \right| \leq 2||f_n|| \cdot ||g||_{BV} \to 0$ así $g \in \mathcal{A}_C^*$, ya que también tenemos linealidad $\langle af_1 + f_2, g \rangle = a\langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$. El Teorema de Representación de Riesz dice que si $[a, b]$ es un intervalo compacto entonces $C([a, b])^* = BV$. Ya que nuestros dos puntos de compactificación de la recta real hacen de $\mathcal{B}_C$ homeomorfo a las funciones continuas sobre $[a, b]$ que se desvanecen en a, es también verdad que $\mathcal{A}_C^* = BV$. Por consiguiente, las funciones de variación acotada son los multiplicadores para la integral distribucional ($g \in BV$ implica que $fg \in \mathcal{A}_C$ para toda $f \in \mathcal{A}_C$) y BV también forma el espacio dual (el conjunto de funcionales lineales sobre $\mathcal{A}_C$). $\square$

Observación 3.72. *El lector debe notar que el resultado anterior es algo que se esparaba, pues sabemos que el dual de HK es precisamente BV, y por el Corolario 3.48, $\mathcal{A}_C$ es la completación de HK. Por lo tanto $\mathcal{A}_C$ y HK tienen el mismo dual. Sin, embargo hemos dado una demostración distinta en el contexto de los resultados que se han desarrollado hasta ahora en este trabajo.*

En la siguiente definición C_c^1 representa el conjunto de funciones con primera derivada continua y con soporte compacto

Definición 3.73. *Sea $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. La* variación esencial *de g se define por*

$$essvar\ g = \sup\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g\phi' \,\Big|\phi \in C_c^1,\ ||\phi||_\infty \leq 1\right\}.$$

El conjunto de las funciones de variación esencialmente acotada lo denotaremos por EBV.

Observación 3.74.

1. *Cambiar a una función en exactamente un punto puede cambiar el valor de su variación, pero cambiando a una función en un conjunto numerable de puntos no afectará su variación esencial.*

2. *$BV \subset EBV$ propiamente, pero si a una función $g \in EBV$ se le modifica en un cierto conjunto de medida cero, se obtendrá una función $\overline{g} \in BV$ ($g = \overline{g}$ casi dondequiera).*

3. *El espacio EBV es un espacio de Banach con la norma $||g||_{EBV} = ||g||_\infty + essvar\ g$. Si $g \in NBV$ entonces su variación y su variación esencial tienen el mismo valor.*

Presentamos ahora el siguiente

Teorema 3.75. *Sea $f \in \mathcal{A}_C$ y sea $g \in EBV$. Sea $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}$ con $||f - T_{\phi_n}|| \to 0$. Definimos $\int_{-\infty}^{\infty} fg = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n g$. Sea $\overline{g}$ la única función en NBV tal que $g = \overline{g}$ casi dondequiera y $essvar\ g = V\overline{g}$. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} fg = \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{g}$.*

Demostración. (a) Note que una sucesión tal $\{\phi_n\}$ existe ya que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{A}_C$ (pues $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{D}'$). Para cada $n \in \mathbb{N}$, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n g$ existe como una integral de Lebesgue ya que ϕ_n es una función suave con soporte compacto y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Podemos cambiar g en un conjunto de medida cero para obtener $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n g = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n \overline{g} \to \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{g}$, usando un teorema para la integral de Henstock-Kurzweil [28, Corolario 3.3].

(b) La definición no depende de la elección de $\{\phi_n\}$ ya que si $\{\psi_n\} \subset \mathcal{D}$ con $||f - \psi_n|| \to 0$ entonces

$$\begin{aligned} \Big|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n g - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n g\Big| &= \Big|\int_{-\infty}^{\infty} (\phi_n - \psi_n)\overline{g}\Big| \\ &\leq 2||\phi_n - \psi_n||\ ||\overline{g}||_{BV} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto está jusficado el escribir $\int_{-\infty}^{\infty} fg = \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{g}$ para toda $f \in \mathcal{A}_C$.

$\square$

Corolario 3.76. $\mathcal{A}_C^* = EBV$

Conclusiones

Hemos referido al lector, a lo largo de la tesis, al artículo de Talvila [30], donde puede encontar todos los resultados que hemos presentado en la tesis. Lo que hemos hecho en este trabajo de tesis es, dar una lectura diferente (a la presentada por Talvila) de los resultados para la integral distribucional.

Se han aclarado y ampliado demostraciones, y se han redactado con mayor precisión teoremas que vienen en el artículo. Además de incluir observaciones, ejemplos y preguntas que surgen de manera natural, y que a lo largo del texto se van respondiendo. La Sección 3.2.2 es una contribución de la tesis, pues no forma parte del artículo. Todo esto para dar al lector un panorama de la teoría de distribuciones y de la teoría de la integral.

Interesarnos en las propiedades de espacio nos llevaron a revisar también otros artículos que abren una perspectiva muy amplia de las distintas direcciones que puede tomar nuestro trabajo para estudios posteriores, principalmente orientados a la investigación de este tema.

Bibliografía

[1] J. Alan Alewine, Eric Schechter, (2006). *Topologizing the Denjoy Space by Measuring Equiintegrability*. Real Analysis Exchange. 31:1. pág. 23.

[2] Alexiewicz, Andrzej, (1948). *Linear functionals on Denjoy-integrable functions*. Colloquium Math. 1, págs. 289-293.

[3] J. H. Arredondo, A. Wawrzyñczyk, (2010). *Medidas e Integrales*. UAM Unidad Iztapalapa. Primera edición.

[4] Bartle, G. Robert, (2001). *A Modern Theory of Integration*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 32, AMS. Providence, Rhode Island.

[5] Bombal, Fernando, (1991). *Los orígenes de la Teoría de Distribuciones.* Seminario de Historia de la Matemática I. Universidad Complutense, Madrid. págs. 211-244. http://www.mat.ucm.es/ bombal/Personal/Historia

[6] Challifour, John L., (1972). *Generalized Functions and Fourier Analysis.* W. A. Benjamin, Inc.

[7] J.F. Colombeau, (1983). *A multiplication of Distributions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 94, págs. 96-115.

[8] J.F. Colombeau, (1992). *Multiplication of Distributions.* Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.

[9] R. Davies, Z. Schuss, (1970). *A Proof that Henstock's Integral includes Lebesgue*. J. London Math. Soc. **2**, págs. 561-562.

[10] Abdellah El Kinani, Mohamed Oudadess, (2010). *Distribution Theory and applications.* World Scientific Publishing Co. PteLtd. Singapore.

[11] Folland, Gerald B., (1999). *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, Inc., Segunda Edición.

[12] S. V. Fomin, A. N. Kolmogorov, (1975). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Editorial MIR, Moscu.

[13] F.G. Friedlander, M. Joshi, (1999). *Introduction to the theory of distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.

[14] Gordon A. Russell, (1994). *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 4, AMS. Providence, Rhode Island.

[15] D. H. Griffel, (2002). *Applied Functional Analysis*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York.

[16] Seppo Heikkilä, Erik Talvila, (2013). *Distributions, their primitives and integrals with applications to differential equations*. Cornell University Library. New York. http://arxiv.org/abs/1301.0505

[17] F. Hirch, G. Lacombe, (1999). *Elements of Functional Analysis*. Springer-Verlag Inc. New York.

[18] Kristýna Kuncová, Jan Malý, (2013). *Non-absolutely convergent integrals in metric spaces*. Mathematical Analysis and Applications. Volume 401, Issue 2. págs. 578-600.

[19] Lax, Peter D., (2002). *Functional Analysis*. John Wiley and Sons, Inc.

[20] Leoni, Giovanni, (2009). *A First Course in Sobolev Spaces*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 105, AMS. Providence, Rhode Island.

[21] P. Mikusińksi, K. Ostaszewski, (1988-89). *Embedding Henstock integrable functions into the space of Schwartz distributions*. Real Anal. Exchange. 14, págs. 24-29.

[22] Morales Macías, María Guadalupe, (2013). *Algunos resultados alrededor del Lema de Riemann-Lebesgue*. Tesis de doctorado. BUAP.

[23] Rudin, Walter, (1979). *Análisis Funcional*. Editorial Reverté, S.A.

[24] Schwartz, Laurent, (1966). *Théorie des distributions*. Ed. Hermann. Paris.

[25] ____, (1954). *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions.* Comptes Rendus Ac. Sciences. 239, págs. 847-848.

[26] Swartz, Charles, (2001). *Introduction to Gauge Integrals*. World Scientific, Primera Edición.

[27] Swartz, Charles, (1994). *Measure, Integration and Function Spaces.* World Scientific Publ., Singapore.

[28] Talvila, Erik, (1999-2000). *Limits and Henstock integrals of products.* Real Anal. Exchange. 25, págs. 907-918.

[29] ____, (2002). *Henstock-Kurzweil Fourier transforms*. Illinois J. Math. 46, págs. 1207-1226.

[30] ____, (2008). *The distributional Denjoy integral*. Real Anal. Exchange. 33, págs. 51-82.

[31] ____, (2009). *The regulated primitive integral*. Illinois J. Math. 53, 4, págs. 1187-1219.

[32] Torres Juan, Amalia, (2008). *Una topología vectorial en el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables*. Tesis de maestría. BUAP.

[33] Vladimirov, V. S., (1971). *Equations of Mathematical Physics.* Marcel Dekker, Inc., New York.

[34] Vretblad, Anders, (2003). *Fourier Analysis and Its Applications.* Springer-Verlag Inc. New York.