



# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

## Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Estudio de la densidad de energía y estado inicial en colisiones  
 $p$ - $p$  y  $p$ - $Pb$  a energías del LHC

tesis presentada a:

**Posgrado en Física Aplicada  
de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

como requisito parcial para obtener el grado de:

**Maestro en Ciencias (Física Aplicada)**

presenta:

**Jesús Ricardo Alvarado García**

Asesores:

Dr. Irais Bautista Guzmán (FCFM-BUAP, México),  
Dr. Arturo Fernández Téllez (FCFM-BUAP, México)

Puebla Pue.

Julio de 2019

**Título:** Estudio de la densidad de energía y estado inicial en colisiones  $p-p$  y  $p-Pb$  a energías del LHC

**Autor:** Jesús Ricardo Alvarado García.

**Comité**

*Presidente:*

*Vocal*

---

Dr. Gilberto Tavares Velasco  
FCFM-BUAP  
*Secretario:*

---

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz  
FCFM-BUAP  
*Suplente*

---

Dr. Héctor Novales Sánchez  
FCFM-BUAP

---

Dr. Martin Hentschinski  
UDLAP

*Asesores:*

---

Dr. Arturo Fernández Téllez  
FCFM-BUAP

---

Dra. Irais Bautista Guzmán  
FCFM-BUAP  
Cátedra CONACYT

# Contenido

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>   | <b>v</b>   |
| <b>Resumen</b>  | <b>vii</b> |
| <b>1 Fundamentos Teóricos</b>                                     | <b>1</b>   |
| 1.1 Modelo Estándar . . . . .                                     | 1          |
| 1.1.1 Simetría de Norma ( <i>Gauge</i> ) . . . . .                | 3          |
| 1.2 Cromodinámica Cuántica (QCD) . . . . .                        | 3          |
| 1.2.1 Libertad asintótica y confinamiento . . . . .               | 4          |
| 1.2.2 Simetrías en QCD . . . . .                                  | 6          |
| <b>2 Motivación</b>   | <b>9</b>   |
| 2.1 Lattice QCD y diagrama de fase . . . . .                      | 10         |
| 2.2 Señales de QGP en colisiones nucleares . . . . .              | 11         |
| 2.2.1 Termalización y Flujo Elíptico . . . . .                    | 12         |
| 2.2.2 Supresión de partículas con alto momento . . . . .          | 14         |
| 2.3 Saturación de partones y Condensados de Color (CGC) . . . . . | 16         |
| 2.3.1 Modelos de Cuerdas . . . . .                                | 18         |
| <b>3 Modelo de Percolación de Cuerdas de Color</b>                | <b>21</b>  |
| 3.1 Descripción geométrica del sistema . . . . .                  | 21         |
| 3.2 Parámetros del modelo . . . . .                               | 22         |
| 3.2.1 Determinación de los parámetros del modelo . . . . .        | 24         |
| <b>4 Termodinámica</b>  | <b>29</b>  |
| 4.1 Temperatura local del sistema . . . . .                       | 29         |
| 4.2 Densidad de energía . . . . .                                 | 30         |
| 4.3 Viscosidad de Corte ( <i>Shear Viscosity</i> ) . . . . .      | 31         |
| 4.4 Anomalía de la Traza . . . . .                                | 32         |
| 4.5 Presión y Entropía . . . . .                                  | 34         |
| <b>5 Resultados</b>   | <b>35</b>  |
| 5.1 Velocidad del sonido . . . . .                                | 35         |
| 5.2 Viscosidad de Bulto ( <i>Bulk Viscosity</i> ) . . . . .       | 38         |
| <b>Conclusiones</b>   | <b>41</b>  |

Antes de iniciar, agradezco profundamente a CONACYT por otorgarme una beca de estudios, con la cual pude enfocarme completamente en las actividades académicas correspondientes al posgrado. Asimismo, agradezco a mi familia, a Cristal, a mis asesores, a mis compañeros y a mis profesores, todos me apoyaron de distintas formas y sin ellos no podría haber alcanzado este logro.

# Introducción

Actualmente la física de altas energías busca, a través de los más grandes experimentos del mundo, la confirmación de las teorías propuestas tales como la física del modelo estándar.

Un problema abierto de la física en la actualidad es mecanismo mediante el cual los hadrones adquieren masa, al estudiar este fenómeno nos encontramos con las primeras etapas del universo donde aparece un estado de desconfinamiento conocido como Plasma de Quarks y Gluones (QGP).

Desde los años ochentas, las colisiones protón-protón de sesgo mínimo fueron usadas como la base de comparación, donde se suponía la ausencia del QGP, para el entendimiento de los sistemas creados en colisiones nucleares; recientemente el análisis de colisiones protón-protón como función de la multiplicidad del evento ha revelado nuevos fenómenos de colectividad. Este hecho ha dado lugar a nuevas discusiones y propone un cambio en el paradigma de iones pesados, para esta comunidad es crucial entender el origen de las similitudes entre los sistemas creados en colisiones  $p$ - $p$ ,  $p$ - $A$  y  $A$ - $A$ .

Para introducir el problema en concreto, es necesario revisar la teoría que hay detrás; como mencioné hace un momento, el Modelo Estándar de partículas elementales es de las motivaciones más importantes para los experimentos. Por otro lado, la física que hay detrás de los aceleradores de partículas es necesaria para la propuesta de modelos efectivos que describan las propiedades de estos sistemas, ya que deben estar basados en las mediciones directas de los experimentos, esto incluye el entendimiento de los espectros de momento transversal y multiplicidad, la abundancia de partículas así como las correlaciones entre las observables. Las mediciones en colisiones protón-protón son requeridas por todos los experimentos y sirven como referencia para la correcta interpretación de los resultados provenientes de colisiones entre iones pesados. Ésta es la razón por la cual es necesario entender profundamente las señales medidas en este tipo de colisiones.



# Resumen

Las señales medidas en RHIC y LHC indican que en colisiones de iones pesados a energías ultra-relativistas se produce un medio no hadrónico fuertemente interactuante que se comporta como un líquido casi perfecto conocido como Plasma de Quarks y Gluones. El estudio de este sistema es de suma importancia para entender las condiciones iniciales del universo y lo que ocurrió algunos microsegundo después del *Big-Bang*. Estos fenómenos ocurren en la región no perturbativa de la Cromodinámica Cuántica. En esta tesis se realiza un estudio de los sistemas pequeños (colisiones  $p-p$  y  $p-Pb$ ) tomando en cuenta las pruebas de física suave y se determinan las condiciones iniciales que, posteriormente, dan paso a la evolución dinámica de dichos sistemas.



# Capítulo 1

## Fundamentos Teóricos

### 1.1 Modelo Estándar

El Modelo Estándar de partículas elementales e interacciones fundamentales describe en su mayoría lo conocido de la fenomenología de la física de partículas y es la teoría cuántica-relativista, efectiva y renormalizable de las interacciones fuerte, débil y electromagnética, se construye en base a la simetría de norma del grupo  $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$  el cual unifica estas 3 interacciones[1, 2] El grupo de norma del Modelo Estándar se divide en tres subgrupos:

1. Para  $SU_C(3)$  se le asocian ocho campos gluónicos  $G_\mu^a$ .
2. Para  $SU_L(2)$  se le asocian tres campos electrodébiles  $W_\mu^i$ .
3. Para  $U_Y(1)$  se le asocia uno, el campo de hipercarga  $B_\mu$ .

Se identifica conjuntamente al grupo de simetría  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ , o grupo electrodébil compuesto por el grupo de matrices especiales unitarias de  $2 \times 2$  de isoespín (L) y el grupo de hipercarga (Y) que define las interacciones electrodébiles, este grupo de simetría unifica las interacciones electromagnéticas<sup>1</sup>, y nucleares débiles. El grupo de color, formado por las matrices especiales unitarias  $3 \times 3$ ,  $SU_c(3)$  es el objeto de estudio de la cromodinámica cuántica que caracteriza las interacciones fuertes. Mientras que la interacción fuerte es mediada por los gluones, la interacción débil resulta del intercambio de los bosones de norma (luego de un cambio de base) masivos  $W_\mu^\pm$  y  $Z_\mu^0$ , mientras que la interacción electromagnética es mediada por el campo del fotón  $A_\mu$ . Las partículas elementales son de dos tipos: fermiones y bosones.

#### Fermiones

Siendo estos los constituyentes básicos de la materia, conocidas como partículas materiales de espín 1/2, descritas en el sector fermiónico

- *Leptones*: son partículas etimológicamente ligeras, las cuales clasificamos en:
  - Cargados: el electrón, el muón y el tau ( $e, \mu, \tau$ ), todos ellos con carga  $-e$ <sup>2</sup>.
  - Neutros: los correspondientes neutrinos del electrón, del muón y del tau ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ), que son eléctricamente neutros.
- *Quarks*: clasificados también en dos tipos y diferenciándolos por su familia (sabor) :

---

<sup>1</sup>La teoría que describe estas interacciones es la Electrodinámica Cuántica (QED).

<sup>2</sup>En unidades de SI la carga eléctrica fundamental  $e = 1,602176 \times 10^{-19}$ C, en unidades naturales  $e = 1$ .

- Tipo *up*: los quarks *up* (*u*), *charm* (*c*), *top* (*t*), con carga  $2e/3$ .
- Tipo *down*: estos son los quarks *down* (*d*), *strange* (*s*), *bottom* (*b*), con carga  $-e/3$ .

A los estados ligados estables de quarks (partículas compuestas de quarks) se les denomina hadrones los cuales pueden clasificarse en mesones y bariones dependiendo si se agrupan en pares quark antiquark ( $q\bar{q}$ ) para los mesones, o si son formados por tres quarks ( $qqq$ ).

Los fermiones respetan el principio de exclusión de Pauli y son descritos por la estadística de Fermi y la regla de cuantización dada por la regla de anticonmutación:

$$\{\psi(\mathbf{r}), \Pi(\mathbf{r}')\} = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.1)$$

donde  $\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}$  es su momento conjugado.

## Modelo Estándar de Partículas Elementales

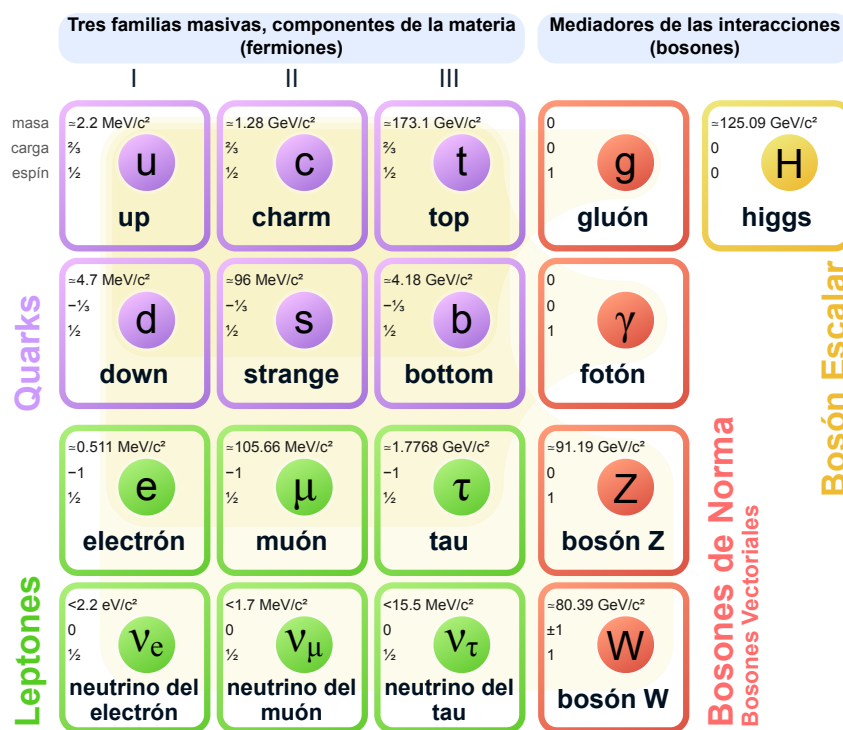


Figura 1.1: Partículas fundamentales de acuerdo al Modelo Estándar.

### Bosones

Conocidas como partículas intermediarias de las interacciones (figura 1.1). Éstos son dadas de acuerdo al intercambio en la correspondiente interacción, así como, a la cuantización del campo respectivo, se dividen en los bosones de norma (vectoriales) y hay un bosón escalar:

- Para la interacción electromagnética, la cual es de rango infinito producida por la carga eléctrica, se le asocia un campo bosónico cuyo bosón es el fotón, con espín 1.
- Para la interacción nuclear débil, la cual es de rango de  $10^{-18}$ m producida por la *carga débil*, se le asocian tres campos bosónicos cuyos bosones son el  $W^+$ , el  $W^-$  y el  $Z^0$ ; todos con espín 1.

- Para la interacción nuclear fuerte, la cual es de rango  $\leq 10^{-15}$  m producida por la *carga de color*, se le asocian 8 campos gluónicos cuyos bosones son 8 gluones con espín 1.
- El bosón de Higgs, que es de naturaleza escalar, requiere de una descripción más detallada.

Los bosones no respetan el principio de exclusión de Pauli y son descritos por la estadística de Bose-Einstein y la regla de cuantización dada por:

$$[\phi(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r}')] = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.2)$$

donde  $\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$  es su momento conjugado.

### 1.1.1 Simetría de Norma (*Gauge*)

Como se mencionó hace un momento, la invarianza de norma nos permite construir la teoría. Un ejemplo introductorio es considerar el Lagrangiano cuántico-relativista de una partícula de Dirac libre:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (1.3)$$

si  $\psi$  describe el campo de un electrón libre, la transformación de norma que consideramos es

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp[iq\alpha(x)]\psi, \quad (1.4)$$

donde  $\alpha(x)$  es una función,  $q$  es la carga del electrón asociada al grupo de norma  $U(1)$ . Luego se considera un campo vectorial  $A_\mu$  asociado al fotón, que se transforma:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.5)$$

Para que el Lagrangiano de la ecuación 1.3 sea invariante bajo estas transformaciones se introduce  $D_\mu$  definida:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (1.6)$$

de donde el lagrangiano del electrón en QED queda como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi, \quad (1.7)$$

que es el Lagrangiano libre más una interacción

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - j^\mu A_\mu, \quad j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (1.8)$$

Esto sugiere que la simetría de norma determina la interacción. Para obtener el Lagrangiano completo de QED se introduce el término invariante que describe al campo electromagnético libre:

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.9)$$

el término de masa  $m_\gamma^2 A^\mu A_\mu/2$  rompe la invarianza de grupo, por lo que se considera la masa del fotón  $m_\gamma = 0$ . Entonces el Lagrangiano de QED completo es:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (1.10)$$

## 1.2 Cromodinámica Cuántica (QCD)

En 1953 los físicos Murray Gell-Mann y Kazuhiko Nishijima clasificaban a las partículas no solo por su carga e isoespín si no también por su extrañeza[3, 4, 5], posteriormente en 1961 Gell-Mann y Yuval Neeman clasifican a los hadrones en grupos con propiedades similares y masas usando “octupletes” [6], dos años mas tarde; en 1963, el mismo Gell-Mann y George Zweig (además de Petermann, publicado unos años más tarde) propusieron que

la estructura de los grupos podría ser explicada por la existencia de tres sabores de partículas pequeñas dentro de los hadrones: los quarks[7, 8, 9].

Aún con esta teoría, la partícula  $\Delta^{++}$  permanecía como un misterio en el prematuro modelo de quarks, pues se compone de tres quarks up con espín paralelo, esto es inaceptable por el principio de exclusión de Pauli. En 1965 este problema fue resuelto cuando Oscar Greenberg sugirió que los quarks poseen un grado de libertad más, posteriormente llamado carga de color y que los quarks interactúan vía un octeto de bosones de norma vectoriales, los gluones; que es la teoría que se usa en la actualidad[10, 11, 12].

QCD asigna un estado color a cada quark, el cual debe de conservarse durante interacciones fuertes, los estados para quarks son (rojo, azul, verde), mientras que para anti-quarks son (anti-rojo, anti-azul, anti-verde). Los hadrones no deben poseer carga de color, lo cual se consigue con las combinación de los colores de los quarks que lo componen, por ejemplo un mesón puede contener quarks rojo y anti-rojo para dar como resultado el color neutro, o un barión típicamente se conforma por los tres quarks en sus estados rojo, azul y verde, cuya suma vectorial total también forma el color neutro[13].

La dinámica de los quarks y gluones está controlada por el Lagrangiano de QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{\psi}_j^{(f)} (i(\gamma^\mu D_\mu)_{jk} - m_f \delta_{jk}) \psi_k^{(f)} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \quad (1.11)$$

donde  $\psi(x)^{(f)}$ , son espinores de tres componentes y representan a los campos de los diferentes sabores de quarks ( $f = u, d, s, c, t, b$ ), en la representación fundamental del grupo de norma  $SU(3)$ , las componentes corresponden a las direcciones independientes en el espacio de color, que vienen indexadas por  $j, k$ ;  $D_\mu$  es la derivada covariante del grupo;  $\gamma^\mu$  son matrices de Dirac que conectan la representación espinorial con la representación vectorial del grupo de Lorentz. Análogo al tensor de intensidad de campo electromagnético,  $F_{\mu\nu}$ , el símbolo  $G_{\mu\nu}^a$  representa el tensor de intensidad del campo gluónico, que viene dado por[14]

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c, \quad (1.12)$$

donde  $\mathcal{A}_\mu^a(x)$  son los ocho campos asociados a cada gluón, en la representación adjunta del grupo  $SU(3)$ , indexado por  $a, b, \dots$ ; y  $f^{abc}$  son las constantes de estructura de  $SU(3)$ . Las reglas para subir o bajar los índices de color  $a, b, c$  son triviales  $(+, \dots, +)$ , de modo que  $f^{abc} = f_{abc} = f_{bc}^a$ , mientras que para los índices  $\mu$  o  $\nu$  se tienen las reglas relativistas correspondientes a la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski  $(+, -, -, -)$ . Las variables  $m_i, j$  y  $g$  corresponden a las masas de los quarks y a la constante de acoplamiento de la teoría, respectivamente, que están sujetas a renormalización.

Las transformaciones de norma de estos objetos son:

$$\psi_j^{(f)} \rightarrow \psi' = \exp[ig_s \alpha_a(x) T_a] \psi_j^{(f)}, \quad (1.13)$$

$$\mathcal{A}_\mu^a \rightarrow \mathcal{A}'_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\mu\nu}^a - \partial_\mu \alpha(x) - g_s f_{abc} \alpha_b(x) \mathcal{A}_\mu^c,$$

junto con la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s T_a \mathcal{A}_\mu^a, \quad (1.14)$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento de la interacción fuerte y  $T_a$  son los generadores de  $SU(3)$ , matrices  $3 \times 3$  de traza nula que cumple el álgebra de Lie  $[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$ . A este nivel, la diferencia más relevante entre QCD y QED es que el grupo de norma  $SU(3)$  es no abeliano, a diferencia de  $U(1)$ , hecho que se refleja en la construcción de los tensores  $G_{\mu\nu}^a$  y  $F_{\mu\nu}$ , esta diferencia es crucial para describir teóricamente el comportamiento de las constantes de acoplamiento.

### 1.2.1 Libertad asintótica y confinamiento

La libertad asintótica es una propiedad fundamental en las teorías de norma no abelianas, donde las interacciones entre las partículas se vuelvan asintóticamente más débiles a medida que aumenta la escala de energía y disminuye la escala de longitud correspondiente.

La libertad asintótica en QCD fue descubierta en 1973 por David Gross y Frank Wilczek[15], e independientemente por David Politzer en el mismo año[16]. Este fenómeno implica que en dispersiones de alta energía los quarks se mueven dentro de los hadrones esencialmente como partículas libres, que no interactúan. Los quarks interactúan débilmente a altas energías, por lo que los cálculos perturbativos son útiles en esta escala; sin embargo, el confinamiento de quarks y gluones dentro de los hadrones es un fenómeno que se da a bajas energías, por lo que su estudio implica herramientas de QCD no perturbativa.

La variación de un acoplamiento<sup>3</sup> bajo cambios de escala, puede entenderse cualitativamente como la acción del campo sobre partículas virtuales portadoras de carga. En la vecindad de una carga, el vacío se polariza: partículas virtuales de carga opuesta son atraídas a la carga, y partículas virtuales de carga semejante son rechazadas, de esta forma el campo se anula parcialmente a cualquier distancia finita. El efecto del vacío disminuye y aumenta la carga eficaz a medida que nos acercamos a la fuente. En QCD, aparecen pares virtuales quark-antiquark, que tienden a apantallar la carga de color (clásicamente la energía potencial efectiva de este efecto es el potencial de Yukawa y es dado por:  $V(r) = -\frac{g_s}{4\pi r} e^{-\frac{m_{qr}r}{\hbar}}$ ). Sin embargo, existe un hecho adicional que no existe en QED: las partículas portadoras de la fuerza, los gluones, tienen carga de color. Cada gluon lleva una carga del color y una carga de anti-color (de un color distinto). El efecto neto de la polarización de gluones virtuales en el vacío no es apantallar el campo, sino aumentarlo y afectar su color. Acercarse a un quark disminuye el efecto de *antiapantallamiento* de los gluones virtuales circundantes; por lo tanto, la contribución de este efecto es debilitar la carga eficaz de color de un quark con una disminución de distancia.

Puesto que los quarks virtuales y los gluones virtuales contribuyen con efectos opuestos, los efectos que prevalecen depende del número del número de sabores de quarks. Debido a que se tienen 3 familias conocidas de quarks (y no más de 8, lo que facilitaría el emparejamiento de estas contribuciones), el antiapantallamiento prevalece y la teoría es asintóticamente libre.

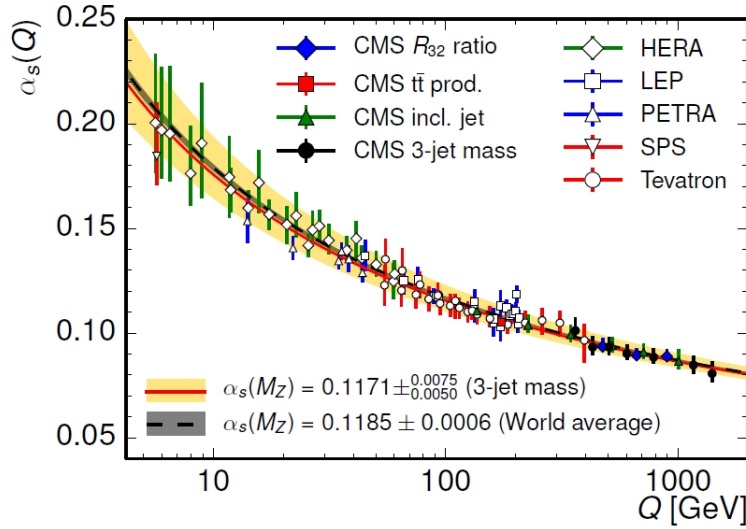


Figura 1.2: Comportamiento de la constante de acoplamiento fuerte de acuerdo a la medición de la sección eficaz inclusiva en producción de 3-jet en colisiones  $pp$  a 7TeV[17].

Una constante de acoplamiento  $g$ , es un número que determina la intensidad de una interacción. En teoría cuántica de campos, una función beta,  $\beta(g)$  lleva la variación de una constante de acoplamiento y esta definida por la relación:

$$\beta(g) = \mu \frac{\delta g}{\delta \mu}, \quad (1.15)$$

<sup>3</sup>La forma en que se mide la intensidad de las interacciones.

donde  $\mu$  es la escala de energía de un proceso físico dado. Como un resultado, la constante de acoplamiento de QCD decrece logarítmicamente a altas energías, lo cual se puede observar de:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}, \quad (1.16)$$

donde  $\Lambda_{QCD}$  (ver figura 1.2) es la escala de energía a la que el acoplamiento QCD diverge. En términos de la constante de estructura fina  $\alpha_0 = g^2/4\pi$ , el número de colores  $N_c = 3$  y de quarks  $n_f = 6$  a primer orden la función beta es

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{12\pi} (11N_c - 2n_f). \quad (1.17)$$

El comportamiento (variatio) del acoplamiento QCD es principalmente debido a la presencia de auto interacciones de los bosones de norma. El parámetro  $\Lambda_{QCD}$  depende del esquema de normalización y del número de sabores activos (número de quarks con masa  $m_q < Q$ ), su valor fue determinado experimentalmente y es aproximadamente de 218 MeV. Por tanto, la aproximación perturbativa falla en escalas comparables con las masas de los hadrones ligeros ( $Q \sim 1$  GeV/c). Este comportamiento de la constante de acoplamiento implica las dos propiedades de QCD más importantes. Uno puede darse cuenta que a altos valores de  $Q^2$ , la constante de acoplamiento se hace pequeña, esto da la propiedad de libertad asintótica. A baja  $Q^2$ , la constante de acoplamiento diverge. Esta propiedad es conocida como “confinamiento de color” y es la razón por la cual nunca podemos observar quarks y gluones libres en la naturaleza, en lugar de esto, ellos forman “singletes” de color conocidos como hadrones. Como esta característica no se entiende completamente desde el punto de vista analítico, existen diferentes métodos que describen distintos dominios de QCD. A pequeñas distancias (altos valores de  $Q^2$ ) pueden ser aplicados los métodos perturbativos de QCD (pQCD), mientras que los modelos fenomenológicos son usados a largas distancias ( $Q^2$  pequeña). Un ejemplo en QCD no perturbativa son los cálculos numéricos en Lattice QCD, que permitieron conocer la masa de los hadrones[18], donde se muestra que más del 95% de la masa de un hadrón se debe a la interacción fuerte y no a las masas de los quarks que los constituyen.

### 1.2.2 Simetrías en QCD

Además de la ya mencionada simetría de norma, existen diversas simetrías en QCD que dan lugar a fenómenos relevantes dentro del área de iones pesados.

#### Simetría de Isoespín

Al considerar el Lagrangiano de QCD para los quarks ligeros  $u$  y  $d$ , vemos que, si las masa de los dos quarks fuesen iguales,  $m_u = m_d$ , el Lagrangiano de QCD sería invariante frente a las transformaciones

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \alpha u + \beta d, \\ d &\rightarrow \gamma u + \delta d, \end{aligned} \quad \text{Det} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \text{Det} V = 1, \quad (1.18)$$

es decir,  $V \in SU(2)$ .  $u$  y  $d$  forman un doblete de isoespín (el resto de los quarks  $s, c, b, t$  son singletes de isoespín). En realidad  $m_u < m_d$  y el grupo de isoespín es solamente una simetría aproximada. La pieza del Lagrangiano que rompe la simetría es el término de masa, que podemos escribir

$$m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d = \frac{1}{2}(m_u + m_d)(\bar{u}u + \bar{d}d) + \frac{1}{2}(m_d - m_u)(\bar{d}d - \bar{u}u) \quad (1.19)$$

El primer término del miembro de la derecha de 1.19 es invariante bajo  $SU(2)$ , pero el segundo rompe la simetría. La diferencia de masas  $m_d - m_u$  juega el papel de parámetro de rotura de la simetría. La existencia de multipletes de isoespín casi degenerados implica que el segundo término es una pequeña perturbación y, por lo tanto, la diferencia  $m_d - m_u$  es pequeña. La invariancia de las interacciones fuertes frente al isoespín en QCD, se explica con el hecho de que la diferencia entre las masas de los quarks  $u$  y  $d$  es casi nula.

### Simetría Quiral

Al considerar el caso en que  $m_u = m_d = 0$ , no solo se obtiene una invariancia frente a la simetría de isoespín, sino también respecto a las transformaciones quirales[19], es decir, rotaciones independientes de isoespín de las componentes de helicidad positiva (right) y negativa (left) de  $u$  y  $d$ .

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \rightarrow V_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \rightarrow V_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad V_R, V_L \in SU(2). \quad (1.20)$$

El grupo de simetría correspondiente es el producto directo de los dos grupos de isoespín  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . Los generadores del grupo son los tres operadores de isoespín ordinario  $\vec{I}$  más los tres operadores del isoespín quiral  $\vec{I}_5$ . Tanto las componentes de  $\vec{I}(I^+, I^-, I^3)$  como las de  $\vec{I}_5(I_5^+, I_5^-, I_5^3)$  se conservan. Dentro de este contexto se verifica que:

1. Los niveles de energía forman multipletes degenerados y por ellos aparecen multipletes de hadrones de igual masa.
2. Los operadores  $\vec{I}$  generan transiciones dentro de los multipletes, por ejemplo un neutrón  $|n\rangle$  es transformado en un protón  $|p\rangle$  por  $I^+$ ,  $I^+|n\rangle = |p\rangle$ .
3. El estado fundamental  $|\Omega^-\rangle$  ( $\Omega^-$  está compuesto por tres quarks  $s$ ) es un singlete de isoespín,  $\vec{I}|\Omega^-\rangle = 0$ .

Si se respeta la simetría quiral, los estados se deben agrupar en multipletes degenerados del grupo  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . Como los operadores  $\vec{I}_5$  llevan paridad negativa, los multipletes deberían contener miembros con paridad opuesta, pero no existe evidencia de que esto suceda en la naturaleza. En general, si una transformación  $S$  de un grupo deja invariante el vacío, es decir  $S|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ ,

$$S|\Omega\rangle = e^{i\epsilon Q}|\Omega\rangle \simeq (1 + i\epsilon Q)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle, \quad (1.21)$$

y por tanto  $Q|\Omega\rangle = 0$ . Pero en nuestro caso  $\vec{I}|\Omega\rangle = 0$  y  $\vec{I}_5|\Omega\rangle \neq 0$ , por lo que decimos que el vacío rompe la simetría, o que la simetría se encuentra espontáneamente rota. Luego, como el Hamiltoniano de QCD conmuta con los generadores  $\vec{I}_5$ , los tres estados  $\vec{I}_5|\Omega\rangle$  tienen la misma energía que el vacío,  $\vec{I}_5$  no lleva momento y  $|\Omega\rangle$  tiene momento nulo, entonces, debe haber tres partículas con masa nula, que es un hecho debido al teorema de Goldstone[20] que dice que, en general, la ruptura espontánea de la simetría da lugar al mismo número de partículas no masivas (bosones de Goldstone) que generadores del grupo de la simetría rota. Los números cuánticos de  $\vec{I}_5|\Omega\rangle$  serán espín cero, paridad negativa e  $I = 1$ , que coincide con el set  $(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ , por lo que es natural identificar

$$I_5^+|\Omega\rangle = |\pi^+\rangle, \quad (1.22a)$$

$$I_5^3|\Omega\rangle = |\pi^0\rangle, \quad (1.22b)$$

$$I_5^-|\Omega\rangle = |\pi^-\rangle. \quad (1.22c)$$

Dado que  $m_u, m_d \neq 0$ , la simetría quiral del Lagrangiano de QCD está rota, de manera que el Hamiltoniano se puede escribir como una parte invariante  $H_0$  y el término con masas que rompe la simetría:

$$H = H_0 + H_{sb}, \quad H_{sb} = \int d^3x (m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d), \quad (1.23)$$

$$\text{donde} \quad [H_0, \vec{I}] = 0 = [H_0, \vec{I}_5],$$

ya que la simetría quiral solo involucra a los quarks  $u$  y  $d$ , el resto de los quarks son singletes y sus términos de masa correspondientes se encuentran en  $H_0$ .

### Simetría de Escala

Al considerar la transformación

$$x \rightarrow \lambda x, \quad \psi_j^{(f)} \rightarrow \lambda^{3/2} \psi_j^{(f)}, \quad \mathcal{A}_\mu^a \rightarrow \lambda \mathcal{A}_\mu^a, \quad (1.24)$$

encontramos que el Lagrangiano de QCD es invariante excepto únicamente por el término de masa de los quarks. Esta simetría de escala se respeta a nivel clásico, pero se rompe debido a correcciones cuánticas, ya que el proceso de renormalización implica una escala. La corriente asociada a esta transformación de escala es  $s^\mu = T^{\mu\nu} x_\nu$ , donde  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento de QCD:

$$\partial_\mu s^\mu = T_\mu^\mu = \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + [1 + \gamma(g_s)] m_{ij} \bar{\psi}_i \psi_j, \quad (1.25)$$

donde  $\gamma(g_s)$  es la dimensión anómala adquirida por la masa de los quarks en el proceso de renormalización, y la función  $\beta(g_s)$

$$\beta(g_s) = -\frac{g_s^3}{3(4\pi)^2} (11N_c - 2n_f) \quad (1.26)$$

de la ecuación (1.15), que indica cómo varía la constante de acoplamiento. La traza del tensor de energía momento de la materia,  $T_\mu^\mu$ , juega un papel muy importante a temperatura finita, cerca de la transición de fase de QCD, dado que

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \varepsilon - 3P, \quad (1.27)$$

con  $\varepsilon$  la densidad de energía y  $P$  la presión. El comportamiento de esta cantidad muestra un máximo en la región de temperatura crítica, lo cual se discutirá con más detalle posteriormente, por lo que se trata de una cantidad muy sensible a la transición de fase entre la materia hadrónica y el desconfinamiento.

## Capítulo 2

# Motivación

En 1974, T. D. Lee y G. Wick propusieron la posibilidad de hallar nueva física distribuyendo la densidad de materia nuclear o de energía en un volumen finito, de esta manera sería posible restaurar simetrías rotas del vacío físico y crear nuevos estados anormales de materia nuclear densa[21]. Se encontró que la libertad asintótica en QCD implica la existencia de una forma de materia nuclear muy densa formada por quarks y gluones desconfiados[22, 23, 24], que posteriormente se llamó Plasma de Quarks y Gluones (QGP)[25]. Se puede entender la transición de fase entre la materia nuclear ordinaria y un “gas” de quarks y gluones libres como un cambio en el número de grados de libertad, entre un gas de hadrones libres (HG) para  $T \ll T_c$  y un gas de quarks y gluones libres para  $T \gg T_c$ :

$$\varepsilon_{\text{HG}} = \frac{\pi^2}{30} 3T^4 \simeq T^4$$

↓

(2.1)

$$\varepsilon_{\text{QGP}} = \frac{\pi^2}{30} \left[ 2 \times 8 + \frac{7}{8} \times 2(3) \times 2 \times 2 \times 3 \right] T^4 = \frac{\pi^2}{30} [16 + 21(31.5)] T^4.$$

Para la densidad de energía de un gas de Hadrones ( $\varepsilon_{\text{HG}}$ ) se consideró la estadística de Bose-Einstein, donde el factor 3 corresponde a los tres estados de los piones ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ) despreciando sus masas. Por otro lado, en la densidad de energía del QGP ( $\varepsilon_{\text{QGP}}$ ) se consideraron los 8 estados de color de los gluones, cada uno de ellos con 2 posibles estados de helicidad, y 2(3) clases de quarks y antiquarks, cada uno de ellos con dos estados de espín y 3 colores. El factor 7/8 se debe al carácter fermiónico de quarks y antiquarks.

Estimaciones aproximadas de la densidad de energía alcanzada en colisiones centrales (con parámetro de impacto  $b = 0$ ) núcleo-núcleo ( $A$ - $A$ ), usando la fórmula de Bjorken[26]

$$\varepsilon = \frac{\langle p_T \rangle \frac{dN}{dy} \Big|_{\eta=0}}{\tau_0 \pi R_p^2 A^{2/3}},$$
(2.2)

para un tiempo  $\tau_0 = 1\text{fm}/c$  después de la colisión, a las energías más altas estudiadas en el Supersincrotrón de Protones (SPS) del CERN y en el Acelerador Relativista de Iones Pesados (RHIC) de BNL, para colisiones  $Pb$ - $Pb$  y  $Au$ - $Au$  respectivamente, encuentran valores por encima de la densidad de energía crítica para la transición de fase obtenida en Lattice QCD

$$\varepsilon_c \approx 0.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3.$$
(2.3)

## 2.1 Lattice QCD y diagrama de fase

En la red de temperatura finita de QCD (Lattice QCD), el parámetro de orden de desconfinamiento es proporcionado por el valor de expectación de vacío del *loop* de Polyakov  $L(\vec{x})$  definido en el espacio euclidiano

$$L(\vec{x}) = \text{Tr} \prod_{t=1}^{N_t} A_4(\vec{x}, t), \quad (2.4)$$

$L(\vec{x})$  es el producto ordenado de las variables de norma temporales de  $SU(3)$ ,  $A_4(\vec{x}, t)$ , en una posición espacial fija, donde  $N_t$ , es el número de puntos de la red en la dirección del tiempo y  $\text{Tr}$  denota la traza sobre los índices de color. El *loop* de Polyakov corresponde a una fuente estática de quarks y su valor de expectación de vacío está relacionado con la energía libre  $F_q$  de un solo quark

$$L(\vec{x}) \sim \exp(-F_q/T). \quad (2.5)$$

Por debajo de la temperatura crítica,  $T_c$ , los quarks de están confinados y  $F_q$  es infinito, lo que implica  $\langle L(\vec{x}) \rangle = 0$ . En un medio desconfinado  $F_q$  se vuelve finito, por lo tanto para  $T > T_c$ ,  $\langle L(\vec{x}) \rangle \neq 0$ . La ruptura de la simetría quiral se controla mediante el condensado quiral  $X(T) \equiv \langle \bar{\psi}\psi \rangle \sim M_q$  que mide las masas de los quarks constituyentes obtenidas de un lagrangiano con quarks sin masa. A alta temperatura esta masa se “derrite”, por lo tanto

$$\begin{aligned} X(T) &= 0, & T < T_x, \\ X(T) &\neq 0, & T > T_x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$T_x$  define otra temperatura crítica. Las derivadas correspondientes con respecto a  $T$  de  $\langle L \rangle$  y  $X$ , las susceptibilidades, se han estudiado en Lattice a temperatura finita en un número de bariónico bajo, mostrando un pico agudo que define respectivamente  $T_c$  y  $T_x$ , que, dentro de los errores, coinciden. El valor reportado de  $T_c$  es  $154 \pm 9 \text{MeV}$ [27, 28, 29].

Una transición de fase en el sentido estricto de Mecánica Estadística requiere una discontinuidad en la densidad de energía o en una de sus derivadas, en el límite de volumen infinito. Según los cálculos en Lattice QCD, la transición de fase hacia el QGP parece ser un *cross-over*, es decir, un cambio rápido sin discontinuidad, aunque esta conclusión tiene una fuerte dependencia en el número de sabores introducidos y el valor de las masas. La densidad de energía ha sido estudiada en detalle en Lattice, con 2 y 3 sabores ligeros, o en el caso más realista 2 + 1 sabores, dos ligeros y uno pesado. Estos resultados muestran que la densidad de energía crece rápidamente desde un estado inicial con baja densidad hasta alcanzar una saturación en una región de densidad elevada, como se esperaría en una transición de fase de este tipo[30]. Como veremos en capítulos posteriores, Lattice predice valores de densidad de energía por debajo de los de la ecuación 2.1, para  $T/T_c = 1/3$ , esto indica que solamente a temperaturas mucho más altas que la temperatura crítica se obtendrá el QGP casi libre que predice la libertad asintótica de QCD, para temperaturas moderadas, Lattice QCD apunta a un QGP con fuertes interacciones residuales (denominado sQGP). Muchas de las propiedades del sistema, determinadas por la ecuación de estado, tienen un comportamiento similar al que ocurriría en una transición de fase estricta. En particular, en la transición de fase la presión muestra un incremento continuo sin cambio abrupto, aumentando lentamente en una región en donde la densidad de energía aumenta un orden de magnitud. La velocidad del sonido,  $c_s^2 = dP/d\varepsilon$ , es muy pequeña en esa región (tal y como lo veremos más adelante). Este hecho, el “suavizamiento” de la ecuación de estado, alrededor de la transición de fase, es un hecho clave para estudiar cuándo se produce un flujo colectivo del sistema al expandirse el Plasma.

Los cálculos en Lattice QCD apuntan a que QCD podría tener una transición de fase de primer orden para altas densidades de bariones  $\mu_B$  y baja temperatura, mientras que a alta temperatura y baja densidad bariónica, se trataría del *cross-over* ya mencionado. Por lo tanto, debe existir un punto crítico tal y como se indica en la figura 2.1. En esta región de QCD se pueden desprestigiar las masas de los quarks ( $u, d, s$ ) y el sistema posee la simetría quiral, a pesar de que tanto los quarks como los gluones adquieren unas masas colectivas,  $m \sim g_s T$ . A temperaturas por debajo de la temperatura crítica, los quarks y los gluones no solamente están

confinados en los hadrones, sino que la simetría quiral de QCD se rompe espontáneamente. De esta manera, la búsqueda del QGP[31] es importante no sólo porque es la forma de la materia de QCD a alta temperatura o alta densidad bariónica que estuvo presente durante los primeros microsegundos tras el *Big-Bang* y que puede existir en estrellas de neutrones, sino porque nos proporciona información sobre el origen de la mayor parte de la masa ordinaria y sobre el confinamiento de quarks y gluones.

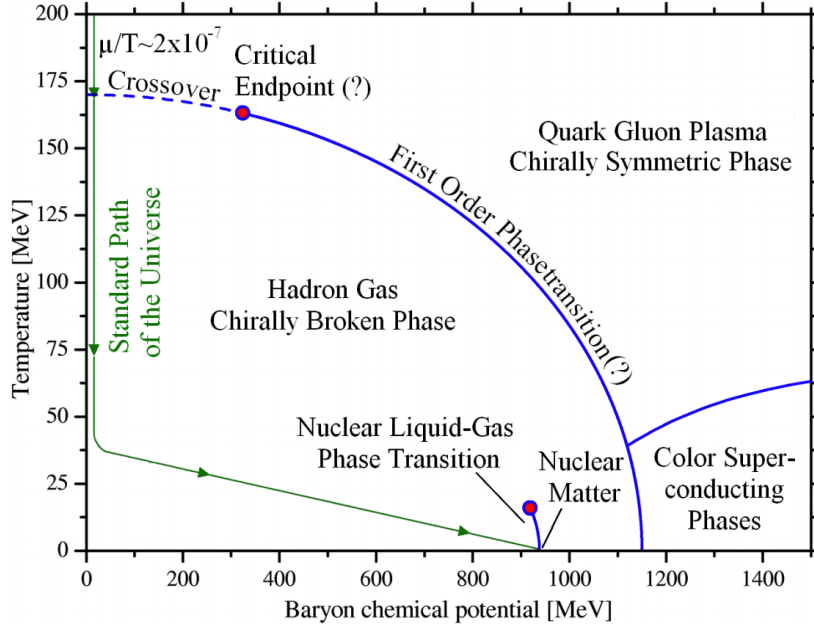


Figura 2.1: Esquema del posible diagrama de fase en QCD de [32].

Actualmente se busca la mejor descripción del sistema, lo que implica tener un diagrama de fase en QCD lo más detallado posible. La figura 2.1 expone las ideas fundamentales de manera esquemática, se ilustran las regiones exploradas por los experimentos y lo descrito por las simulaciones en Lattice QCD; se debe mencionar que para las fechas en que se presenta este trabajo, el punto crítico aún no se ha encontrado.

## 2.2 Señales de QGP en colisiones nucleares

En las últimas décadas se han realizado muchos experimentos orientados a la creación del QGP en laboratorio. Comenzando por los experimentos ISR en CERN y AGS en BNL, más tarde en SPS y RHIC que alcanzó energías de  $\sqrt{s} = 200\text{GeV}$ . En 2010 el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN alcanzó las energías de  $\sqrt{s} = 2.76\text{TeV}$  para colisiones Plomo-Plomo. Los datos de RHIC muestran una supresión muy fuerte de partículas con alto momento transversal en colisiones *Au-Au* con respecto al número esperado, dado por el producto del número de colisiones nucleón-nucleón con la producción en protón-protón que es lo que se esperaría de la aplicación del teorema de factorización.

Además, los datos de colisiones centrales *Au-Au* muestran que cuando se observa un *jet* en una dirección dada, hay una supresión del *jet* que se espera en la dirección opuesta, al contrario de lo que se observa en colisiones *p-p* donde ambos jets son claramente visibles. Por otra parte, se ha observado una fuerte supresión del número de partículas producidas que conduce a una saturación de la multiplicidad por nucleón participante en la colisión, y un flujo elíptico cuyo comportamiento y dependencia con la masa de las partículas es consistente

con cálculos hidrodinámicos que asumen que el sistema creado en la colisión se isotropiza muy rápidamente[33, 34, 35, 36]. Todos estos resultados apuntan a la creación de materia de alta densidad, con grados de libertad partónicos[37]. El estado inicial de la colisión podría describirse por modelos de saturación de partones como el denominado *Color Glass Condensate* (CGC), descrito hidrodinámicamente como un fluido casi perfecto (de muy baja viscosidad). Debido a la existencia de este medio constituido por un fluido partónico casi perfecto de muy alta densidad, la propagación de partículas con momento transversal alto se modifica fuertemente respecto a su propagación en el vacío.

### 2.2.1 Termalización y Flujo Elíptico

Se cree que la materia producida en colisiones entre iones ultrarrelativistas en RHIC está termalizada, y dicho equilibrio termodinámico se alcanza muy pronto. Esto se deduce de la abundancia de las distintas clases de hadrones, la distribución de las partículas producidas a bajo momento transversal, y el flujo elíptico.

La producción de partículas extrañas nos permite verificar si se ha alcanzado la termalización. En colisiones  $e^-e^+$  y  $p\bar{p}$ , la abundancias de los distintos tipos de hadrones se describen razonablemente bien mediante modelos estadísticos[38, 39]. Debido al pequeño tamaño del sistema, en estos casos la producción de extrañeza está suprimida. El grado de equilibrio se puede cuantificar por el factor de supresión de extrañeza,  $\gamma_s = 2(s + \bar{s})/(u + \bar{u} + d + \bar{d})$ , que describe la razón entre el número de partículas con el quark  $s$  o el antiquark  $\bar{s}$  y el número de partículas no extrañas con quarks y antiquarks  $u, \bar{u}, d, \bar{d}$ ,  $\gamma_s = 1$  indica un equilibrio completo. Los datos experimentales sobre colisiones  $Au-Au$  a  $\sqrt{s} = 200\text{GeV}$  por nucleón muestran que las razones  $K^+/\pi^+$ ,  $K^-/\pi^-$ ,  $p/\pi^+$ ,  $\bar{p}/\pi^-$  aumentan rápidamente en colisiones periféricas hasta saturarse en colisiones semi-centrales y centrales. Las comparaciones con el modelo estadístico gran canónico obtienen un valor de  $\gamma_s$  muy próximo a 1, por lo tanto la extrañeza está equilibrada a energías de RHIC, lo que es consistente con que el equilibrio químico se obtenga antes de la hadronización[40].

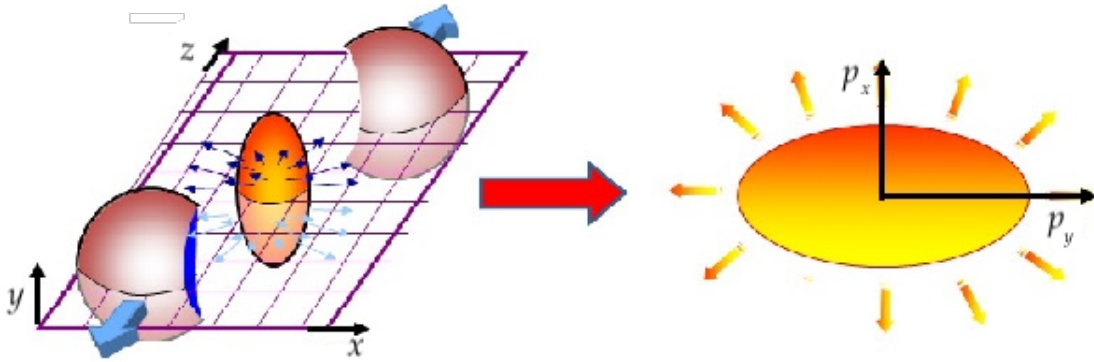


Figura 2.2: Solapamiento de dos núcleos en el plano perpendicular al eje de colisión  $z$ , y asimetrías espaciales y de momentos en la colisión[41].

Cuando colisionan dos núcleos que inciden uno sobre otro en la dirección  $z$ , la distribución espacial del traslape es un elipsoide. Cualquier interacción fuerte en este estado inicial de la colisión convierte esta anisotropía espacial en una anisotropía en los momentos, que se observa como un flujo elíptico de las partículas producidas. Como el gradiente de presión es más grande en el eje más pequeño del elipsoide, eje  $x$ , la asimetría espacial desaparece rápidamente, dado que los momentos más altos de las partículas producidas estarán en la dirección del gradiente, a no ser que en el estado inicial de la colisión haya una interacción muy fuerte entre las partículas producidas. Esta interacción podría ser partónica o hadrónica, aunque los datos experimentales apuntan a una interacción partónica fuerte.

El flujo colectivo se cuantifica en términos de los primeros coeficientes de la expansión en serie de Fourier de la distribución en ángulo azimutal[42]. La sección eficaz inclusiva de producción de la partícula  $k$  con rapidez  $y^1$  momento transverso  $p_T$  y ángulo azimutal  $\phi$  (medido a partir de un ángulo fijo  $\phi_R$ ) viene dada por

$$\frac{dN_k}{dydp_t^2d\phi} = \frac{dN_k}{dydp_t^2} \frac{1}{2\pi} [1 + 2v_1 \cos(\phi - \phi_R) + 2v_2 \cos 2(\phi - \phi_R) + \dots], \quad (2.7)$$

siendo  $v_1$  el flujo radial y  $v_2$  el flujo elíptico,

$$v_1 = \langle \cos(\phi - \phi_R) \rangle = \left\langle \frac{p_x}{p_T} \right\rangle, \quad v_2 = \langle \cos 2(\phi - \phi_R) \rangle = \left\langle \frac{p_x^2 - p_y^2}{p_T^2} \right\rangle, \quad (2.8)$$

que dependen de la partícula detectada  $k$ , de su rapidez y su momento transverso, así como del grado de centralidad de la colisión. Si el flujo elíptico refleja una anisotropía espacial inicial expresada mediante la excentricidad (escrita en términos de las coordenadas  $x$  y  $y$ ):

$$\epsilon = \left\langle \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} \right\rangle \quad (2.9)$$

que requiere, para que no desaparezca, una interacción entre la materia formada, se esperaría que  $v_2$  fuese proporcional a la excentricidad y a la densidad de interacciones. Esta última será proporcional a la densidad de partículas cargadas producidas por unidad de rapidez  $y$ , es decir,

$$v_2 \sim \frac{\epsilon}{S} \frac{dN_{ch}}{dy}, \quad (2.10)$$

donde  $S$  es el área transversa del elipsoide formado en la colisión. La proporcionalidad dada por la ecuación 2.10 ha sido verificada para energías de AGS, SPS y RHIC, y para una gama muy amplia de proyectiles y blancos. A energías más bajas que las de AGS de 11.8 GeV por nucleón,  $v_2$  ya no verifica la ecuación 2.10 e incluso es negativa. La razón para ello es que a baja energía los nucleones no participantes (llamados espectadores) impiden la “salida” de la materia interaccionante por el eje más corto del elipsoide, con lo que hay una mayor producción de partículas a lo largo del eje más largo, donde no hay nucleones. También, se ha visto experimentalmente que el flujo es mayor para partículas ligeras[37].

Las predicciones de los modelos hidrodinámicos concuerdan con las mediciones experimentales[43]. Se propone la existencia de un campo de velocidades del flujo colectivo asimétrico, común para todas las partículas: piones, kaones, protones, lambdas, etc. El acuerdo se obtiene solamente cuando se introduce una ecuación de estado “blanda”, es decir, con velocidad del sonido  $c_s^2$  muy pequeña, tal y como muestra el resultado de Lattice QCD cerca de la temperatura crítica  $T_c$  mencionado anteriormente.

Existe una ley de escala que se ha verificado con muy buena aproximación,  $v_2/n$  en función de  $KE_T/n = (\sqrt{p_T^2 + m^2} - m)/n$ , con  $n$  el número de quarks o antiquarks de la partícula. Esta ley fue predicha por diversos modelos que suponen un medio formado por partones[44].

En dinámica de fluidos, se clasifican las distintas características de los flujos mediante números adimensionales. Así, fluidos pocos viscosos están caracterizados por un número de Reynolds grande,  $Re = \varepsilon L v_f / \eta_s$ , donde  $\varepsilon$ ,  $v_f$  y  $\eta_s$  son respectivamente la densidad de energía, la velocidad y la viscosidad de corte (*shear viscosity*), mientras que  $L$  es la escala longitudinal del sistema. Análogamente, el número de Mach  $Ma = v_f / c_s$  cuantifica la diferencia entre fluidos incompresibles,  $Ma \ll 1$ , y compresibles,  $Ma \sim 1$ . Finalmente, el número de Knudsen,  $K_n = \lambda / L$ , donde  $\lambda$  es el camino libre medio, marca la diferencia entre sistemas con bajo número de colisiones por partícula del medio, es decir, grandes  $Kn$  como en el caso de gases fluyendo libremente, y sistemas tipo líquido donde hay muchas colisiones por partícula,  $Kn \ll 1$ . Estos tres números están relacionados puesto que  $\eta_s = \varepsilon c_s \lambda$  y, por tanto,  $Ma = Re \times Kn$ . Como la materia formada en colisiones entre iones pesados se

---

<sup>1</sup>La rapidez habitualmente se denota con la misma letra que una de las coordenadas espaciales,  $y$ .

expande, el flujo correspondiente es compresible y  $Ma \sim 1$ . Así,  $Re \simeq 1/Kn$ , implicando que si  $Kn$  es pequeño, la viscosidad es pequeña.

En función del inverso del número de Knudsen,  $Kn^{-1}$ , la dependencia esperada del flujo elíptico es la representada en la figura 2.3. En efecto, es natural esperar que el flujo elíptico aumente con el número de interacciones, y que desaparezca en ausencia de éstas. El caso opuesto, es el límite del fluido ideal en el que  $v_2$  es finita. Para valores más grandes de  $Kn^{-1}$ ,  $v_2$  se mantiene constante de acuerdo con la invariancia de escala en la descripción de fluido ideal. Este comportamiento significa que si tenemos un fluido ideal, termalizado y con baja viscosidad, debe aparecer una curvatura que haga que el comportamiento creciente del flujo elíptico contra la multiplicidad[45] lleve a la saturación esperada.

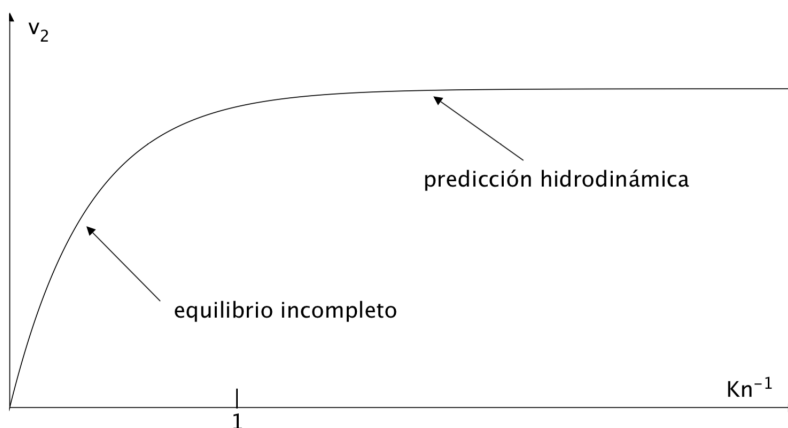


Figura 2.3: Comportamiento del coeficiente de flujo elíptico  $v_2$  contra el inverso del número de Knudsen  $Kn^{-1}$

La posibilidad de que la materia partónica formada sea un líquido ideal de baja viscosidad ha sido de interés para los físicos en teoría de cuerdas. La correspondencia Anti de Sitter en teoría de campos conformes (AdS/CFT) permite calcular las propiedades de una teoría de Yang-Mills supersimétrica con  $\mathcal{N} = 4$  en términos de la gravedad en un espacio curvo. El límite de acoplamiento fuerte (gran constante de 't Hooft,  $g^2 N_c \rightarrow \infty$ ) corresponde a acoplamiento débil de la gravedad. En la teoría de Yang-Mills supersimétrica con  $\mathcal{N} = 4$  la razón entre la viscosidad y la densidad de entropía satisface  $\eta_s/s \geq 1/4\pi$ , aproximándose al límite de la cota cuando el acoplamiento se hace infinito[46]. Aunque teorías supersimétricas con  $\mathcal{N} = 4$  no corresponden al mundo físico, se ha argumentado que esta cota podría ser una consecuencia del acoplamiento fuerte en QCD. El límite se alcanza cuando el recorrido libre medio de una partícula se iguala a su longitud de onda de de Broglie. Por debajo de este límite el “esparcimiento”<sup>2</sup> se halla suprimido por coherencia cuántica.

### 2.2.2 Supresión de partículas con alto momento

La supresión de partículas con alto momento transversal (*Jets*) por efecto de la pérdida de energía debida a la interacción con un medio denso, es una predicción debida a Bjorken en 1982[47]. También fue predicha la desaparición de los *jets* en direcciones opuestas cuando uno de ellos escapara atravesando una pequeña distancia en el medio y el otro fuese absorbido por recorrer una gran distancia en él. La observable con la que se mide dicha

---

<sup>2</sup>Scattering

supresión, se conoce como *jet quenching*, el factor de supresión nuclear en colisiones  $A$ - $B$  para una partícula  $k$ :

$$R_{AB}^k(y, p_T) = \frac{\frac{dN_{AB}^k}{dydp_T}}{\langle N_{coll} \rangle \frac{dN_{pp}^k}{dydp_T}}. \quad (2.11)$$

El numerador en esta expresión es la cantidad medida en la colisión nuclear. El denominador es la cantidad que se esperaría si no hubiese ningún efecto nuclear: la tasa de producción en colisiones protón-protón multiplicada por el número de colisiones nucleón-nucleón para una determinada centralidad de la colisión nuclear,  $\langle N_{coll} \rangle$ . Esta última cantidad se calcula por el modelo de Glauber que contiene información sobre la geometría nuclear. Así, en ausencia de efectos nucleares  $R_{AB}^k = 1$ . Existen efectos de estado inicial, es decir, no debidos a la creación de un medio tras la colisión sino al hecho de que las densidades partónicas en los nucleones de los núcleos que colisionan son diferentes a aquellas en un protón, por razones tanto de isospín como de efectos genuinamente nucleares[48]. Dichos efectos podrían hacer que  $R_{AB}^k \neq 1$  incluso en ausencia de un medio. Experimentos de control, y el estudio de partículas cuya propagación no se ve afectada por el medio, como fotones no procedentes de desintegraciones de otras partículas (fotones directos), como se ve en la figura 2.4, han permitido concluir con que la supresión, de aproximadamente un factor 5 para  $p_T > 7\text{GeV}/c$ , es debido a la creación de un medio en la colisión entre iones pesados. Esto se repite para otras partículas con interacción fuerte, como protones que, sin embargo, muestran un comportamiento diferente a menor momento transverso[33, 34, 35, 36].

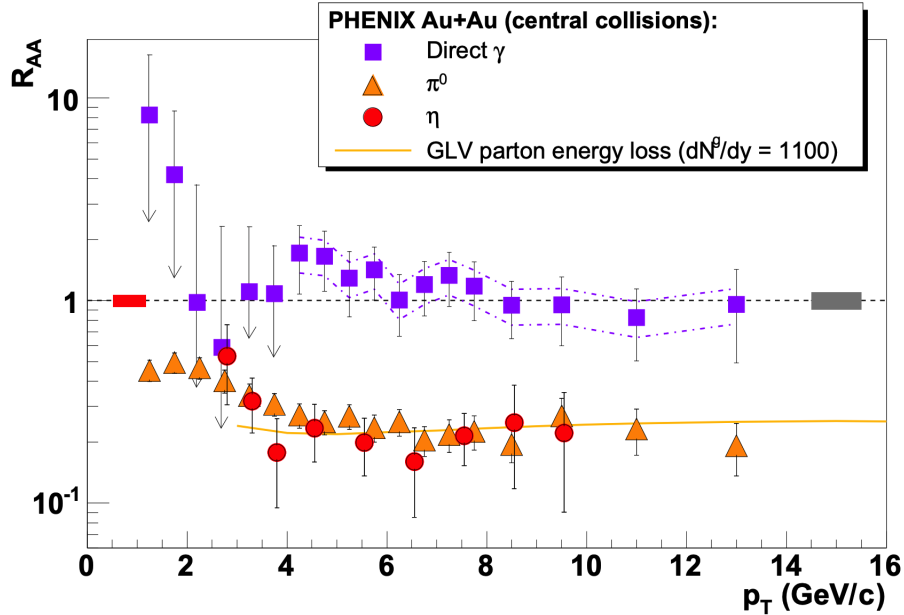


Figura 2.4: Factor de supresión nuclear a rapidez central, medido en colisiones  $Au$ - $Au$  centrales a 200 GeV por nucleón, para fotones directos,  $\pi^0$  y  $\eta$ [49].

La ausencia de supresión en los fotones directos y la gran supresión para otras partículas, además de la supresión de las correlaciones entre partículas en una dirección y partículas en dirección opuesta, muestran que el medio creado en la colisión es muy opaco y denso. El hecho de que dos partículas cuya fragmentación es tan distinta como  $\pi^0$  o  $\eta$  muestren la misma supresión, y su persistencia hasta los mayores momentos transversos medidos, apunta a que este fenómeno se debe a algo que sucede antes de la fragmentación, es decir, a nivel partónico, mientras que la proyección de los partones sobre hadrones finales tiene lugar fuera del medio. De

aquí la conclusión extraída en RHIC de que se produce un medio partónico denso que dura lo suficiente como para perturbar muy fuertemente la propagación de las partículas que lo atraviesan.

Otra evidencia encontrada en RHIC aparece al estudiar las correlaciones azimutales a rapidez central  $y = 0$ , entre las partículas producidas respecto a una de alto momento transverso. Considerando que la partícula de más alto  $p_T$  del suceso establece el *trigger* y marca el ángulo azimutal 0, se esperaría observar un pico a 180 grados por compensación de momento transverso, como sí se observa en colisiones  $p$ - $p$ . Lo que se mide es que si se estudia una partícula *trigger* de muy alto momento y partículas asociadas de alto momento, el pico que se esperaría a 180 grados desaparece. Por otra parte, si se estudian partículas asociadas de bajo momento, aparece una estructura plana o incluso con una depresión a 180 grados que aún no se comprende, pudiendo estar asociada a la energía perdida del *jet* o a la perturbación del medio al ser atravesado por una partícula muy energética.

La explicación usual a este fenómeno son las pérdidas por radiación inducida en un medio[50, 51, 52], aunque otros mecanismos colisionales o a nivel hadrónico no pueden ser excluidos para la supresión de partículas conteniendo quarks pesados  $c$  y  $b$ . La radiación de gluones inducida se presenta debido al autoacoplamiento de los mismos en QCD. El estudio de esta radiación junto con los fenómenos de longitud de coherencia finita (efecto Landau-Pomeranchuk-Migdal) lleva al siguiente resultado para la pérdida de energía  $\Delta E$  de un partón muy energético:

$$\Delta E \sim \alpha_s \hat{q} C_R L^2 \quad (2.12)$$

con  $L$  la longitud del medio y  $C_R$  la carga de color del partón que radia. Es decir, la pérdida de energía es independiente de la energía del partón, proporcional a su carga de color, y proporcional al cuadrado de la longitud del medio. Esta última característica es peculiar de QCD y no aparece en QED. Por último, la pérdida energética es proporcional a un coeficiente de transporte del medio,  $\hat{q}$ , que es proporcional a su vez a la densidad del medio por la sección eficaz de *scattering* entre el medio y el partón que lo atraviesa.

Los experimentos de LHC han extendido el estudio de flujo a los demás armónicos, confirmando que el medio formado en colisiones nucleares interactúa fuertemente[53, 54, 55, 56, 57]. Actualmente los resultados de LHC apuntan a la creación de un medio fuertemente interactuante incluso en colisiones  $p$ - $Pb$  y  $p$ - $p$ [58, 59, 60, 61].

## 2.3 Saturación de partones y Condensados de Color (CGC)

Hay razones para pensar que el estado inicial de la materia formada en la colisión, tiene su origen en la saturación de partones, formándose en los núcleos que colisionan condensados de color (*Color-Glass Condensate*)[62, 63]. Dichos condensados, tras cruzarse, desarrollan campos de color longitudinales. Estos campos de color actúan coherentemente, formando el denominado “glasma”, dentro de los modelos de cuerdas, de la formación de un *cluster* formado por el traslape de cuerdas cuando éstas alcanzan una densidad crítica (percolación de cuerdas). Este tipo de modelos permiten entender tanto el comportamiento de las multiplicidades con la energía y la cantidad de materia nuclear involucrada en la colisión, y ofrecen un marco en el que calcular la distribución de partículas y su dinámica previa a la termalización.

Al considerar un proyectil que interacciona con un núcleo  $A$  a altas energías, a pequeños valores de  $x$  (la fracción de momento del hadrón que lleva un partón<sup>3</sup>, que corresponde a la región de QCD de altas energías), debido al principio de incertidumbre, la interacción se desarrolla sobre grandes distancias longitudinales  $z \sim (mx)^{-1}$ , donde  $m$  es la masa del nucleón. Para  $z$  mayor que el tamaño nuclear, el proyectil no puede distinguir entre nucleones situados adelante y atrás en el núcleo, y todos los partones dentro de un área transversa  $\sim 1/Q^2$  ( $Q$  es el momento transverso transferido) participan en la interacción coherentemente. La densidad de partones en el plano transversal es

$$\rho_A \simeq \frac{sG_A(x, Q^2)}{\pi R_A^2} \sim A^{1/3}. \quad (2.13)$$

El proyectil interacciona con los partones del núcleo con una sección eficaz  $\sigma \simeq \alpha(Q^2)/Q^2$ . Dependiendo de  $A$ ,  $Q$  y  $x$  existen dos regiones:

---

<sup>3</sup>A partir de aquí  $x$  y  $y$  no tendrán que ver con las coordenadas cartesianas.

- a)  $\sigma\rho_A \ll 1$ , el régimen usual de partones diluidos e interacción incoherente.
- b)  $\sigma\rho_A \gg 1$ , régimen denso donde la interacción es coherente.

La frontera entre ambos regímenes, dada por la condición  $\sigma\rho_A = 1$ , determina la denominada escala de saturación  $Q_s$ :

$$1 \simeq \frac{\alpha_s(Q_s^2) xG_A(x, Q_s^2)}{Q_s^2 \pi R_A^2}. \quad (2.14)$$

Observemos que la densidad de gluones  $xG_A$  resulta, de esta ecuación, inversamente proporcional a  $\alpha_s$ , que es el comportamiento típico de un condensado.

En la figura 2.5 se muestran las regiones de baja y alta densidad, así como el comportamiento de la distribución de gluones en función de  $x$  a varios valores de la resolución  $Q$  (equivalente al tamaño de los gluones  $1/Q$ ). Tal y como se indica en la figura, hay un aumento del número de gluones al aumentar la energía y hacer cinemáticamente accesibles valores más pequeños de  $x$  y más grandes de  $Q$ . Este crecimiento es debido al efecto multiplicativo lineal en QCD, los gluones generan más gluones produciendo un crecimiento exponencial. Sin embargo, para gluones medidos a una resolución fija se produce un efecto de saturación que limita su crecimiento. Los gluones están empaquetados unos muy próximos a los otros, formando un estado altamente coherente, el CGC. Dado que la separación típica de los gluones es muy pequeña,  $Q_s$  es grande y  $\alpha_s(Q_s^2) \ll 1$ . Aunque la constante de acoplamiento es pequeña, como el sistema actúa coherentemente (de la misma manera que la interacción gravitatoria es débil pero existe una superposición de las fuerzas gravitatorias de las partículas individuales), los campos resultantes son muy grandes. Un *glass* es un sistema desordenado pero que evoluciona muy lentamente en comparación con las escalas de tiempo naturales. En este caso, los gluones de alto momento (alto valor de  $x$ ) radian gluones de bajo momento, y ésta es la escala de evolución natural. En la saturación, los gluones de bajo momento se encuentran desordenados, produciendo un campo clásico que evoluciona muy lentamente relativo a los tiempos de radiación de los gluones de alto momento.

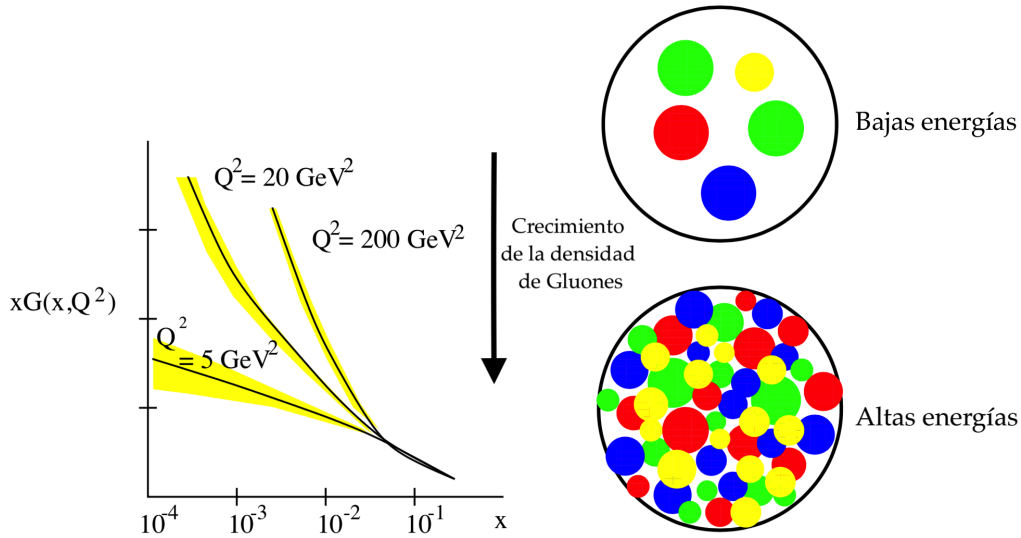


Figura 2.5: Comportamiento de la densidad de gluones dentro de un hadrón a distintas escalas de energía[37].

La densidad adimensional de gluones  $\rho$  (el número de gluones por unidad de espacio de fase) puede caracterizarse por el número de partículas producidas con una rapidez  $y$  y un momento transverso  $p_T$ , normalizado

al área de una colisión (central)  $\pi R_A^2$ . Esta densidad está saturada en el valor  $1/\alpha_s(Q_s^2)$ , es decir:

$$\rho \simeq \frac{1}{\pi R_A^2} \frac{d^3 N}{dy d^2 p_T} \sim \frac{1}{\alpha_s(Q_s^2)}, \quad (2.15)$$

la escala de saturación  $Q_s(x, A)$  controla el número de ocupación de gluones  $1/\alpha_s(Q_s^2)$ , que al ser alto permite el uso de métodos semiclásicos. El comportamiento de la densidad descrito en la ecuación 2.15 solamente es válido para  $p_T < Q_s$ . Para longitudes de onda  $1/p_T$  más pequeñas que  $1/Q_s$  estamos fuera de la región de saturación, y dado que la constante de acoplamiento es aún más pequeña, podemos usar los métodos perturbativos usuales.

La ecuación 2.15 indica que el número de partículas producidas en colisiones  $A$ - $A$  por unidad de área, o equivalentemente por par de nucleones participantes, apenas depende de la centralidad de la colisión, es decir, del número de nucleones participantes[64]. La única dependencia de la ecuación 2.15 en este número viene a través de la dependencia de  $\alpha_s$  en  $Q_s$ , y de ésta en el tamaño nuclear  $A$ . Esta dependencia origina sólo un comportamiento logarítmico con el número de participantes que está de acuerdo con los datos experimentales[33, 34, 35, 36]. El CGC también ha obtenido éxito en la descripción de datos experimentales como la ley de escala observada en *scattering* electrón-hadrón[65, 66].

En el CGC, una colisión entre dos núcleos se puede considerar como la colisión entre dos discos de CGC. En el centro de masas de la colisión, aparecen como discos delgados a energías ultrarelativistas debido a la contracción de Lorentz. Debido al gran número de gluones, éstos se pueden tratar como campos clásicos que están en el plano perpendicular al eje de la colisión. Se puede demostrar que los campos cambian rápidamente de transversos a longitudinales, debido a que la colisión genera cargas cromoelectromagnéticas opuestas en los dos discos. Estos campos longitudinales coherentes forman el denominado *glasma*[67], debido al traslape de las cuerdas formadas por los campos de color que unen los partones del proyectil y del blanco, una vez que se supera la densidad crítica de cuerdas (que está relacionada con la escala de saturación).

### 2.3.1 Modelos de Cuerdas

La mayor parte de los modelos de cuerdas coinciden en la dependencia de la energía con la centralidad dada por el modelo de Glauber-Gribov, luego viene una diferencia que clasifica los modelos de cuerdas en aquellos con intercambio de color entre los partones de los proyectiles o blancos fijos, entre estos modelos destacan *Dual Parton Model* (DPM)[68, 69, 70], *Quark Gluon String Model* (QGSM)[71], VENUS[70], EPOS[72] y DPMJET[73]. Por otro lado, existen modelos sin intercambio de color tales como HIJING[74], PYTHIA[75], AMPT[76], HSP y URQMD[77]. Para este trabajo se considera el intercambio de color, se toma como motivación el DPM que se basa en la expansión  $1/N_c$  de QCD que va de acuerdo a los cálculos de Gribov Reggeon.

Una aproximación válida para estudiar la transición de fase y los fenómenos de colectividad en QCD es la percolación de cuerdas, que es el tema central de esta tesis. La percolación no se obtiene directamente de QCD, sino que se inspira en los modelos de cuerdas antes mencionados. En percolación de cuerdas, la producción de partículas se describe en términos de cuerdas de color estiradas a lo largo de la línea que une a los partones de los proyectiles y los blancos en colisiones de iones pesados, estas cuerdas decaen en pares  $q\bar{q}$  y  $qq\bar{q}\bar{q}$  para después hadronizar, produciendo los hadrones observados[78, 79, 80, 81, 82].

Debido al confinamiento, el color de estas cuerdas está confinado a una pequeña región del plano transversal  $S_0 = \pi r_0^2$ , con  $r_0 = 0.2\text{fm}$ . Con el incremento de la energía o del tamaño del sistema<sup>4</sup>, el número de cuerdas aumenta y éstas se aglomeran formando los denominados *clusters*, muy similar a la percolación de discos 2-dimensional. Dada una densidad crítica, un *cluster* macroscópico aparece cruzando el área total de la colisión, esto marca la transición de fase geométrica que define la percolación[83].

Los elementos básicos de la percolación son la cuerdas, por lo que, para tener una completa descripción del sistema, es necesario saber su número total, su extensión en la coordenada de rapidez, cómo se fragmentan y su distribución espacial. Todo esto requiere modelación y simulación, al igual que muchos de los modelos inspirados en QCD, que proporcionan resultados consistentes con las predicciones teóricas independientes de modelos, además de ir de acuerdo con las mediciones experimentales.

<sup>4</sup>En colisiones nucleares esto se determina por la centralidad del evento.

La percolación de cuerdas y la imagen de *Glasma* están relacionadas[84], en el límite de alta densidad existe una correspondencia entre las cantidades físicas que se estiman en ambas partes. El número de tubos de flujo de color en la imagen de *Glasma*,  $Q_s^2 R^2$ , tiene la misma dependencia en la energía y la centralidad de la colisión que el número efectivo de *clusters* de cuerdas en percolación. En ambas aproximaciones se obtiene una distribución binomial negativa, donde el parámetro  $k$ , que controla la anchura, tiene la misma dependencia de energía y centralidad. El papel del número de ocupación  $1/\alpha_s$  en CGC juega como la fracción de la superficie total disponible cubierta por las cuerdas formadas en la colisión. La anisotropía del campo de color en el CGC da lugar a una reducción de la multiplicidad esperada. Del mismo modo la anisotropía del campo de color de las  $n$  cuerdas del grupo estipula que la fuerza del campo resultante no es  $n$  veces la fuerza del campo de color individual sino  $\sqrt{n}$ . Esta reducción también implica una reducción de la multiplicidad de partículas producidas en la colisión. Debido a todas estas similitudes en ambos enfoques, las predicciones para diferentes observables físicas son muy similares. La percolación de cuerdas es capaz de explorar también la región donde no se ha alcanzado el límite de alta densidad.



## Capítulo 3

# Modelo de Percolación de Cuerdas de Color

### 3.1 Descripción geométrica del sistema

Para estudiar la percolación de cuerdas, se considera un sistema continuo bidimensional que consta de pequeños discos de área  $\pi r_0^2$ , dichos discos se distribuyen aleatoriamente sobre una superficie  $S$  que permite el solapamiento entre ellos. A medida que aumenta la cantidad de discos, comienzan a formarse grupos de discos superpuestos, lo que llamaremos *clusters*. Dados  $N$  discos, la densidad de discos sobre la superficie es  $\rho = N/S$ . El tamaño promedio de los *clusters* aumenta con  $\rho$  y para un cierto valor crítico  $\rho_c$  se forma un *cluster* que cubre toda la superficie como se muestra en la figura 3.1[83].

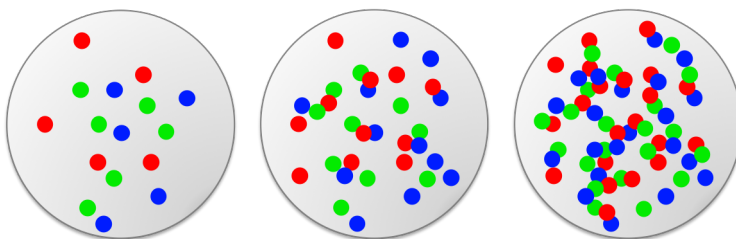


Figura 3.1: Se representan distintos casos de distribución del sistema, partiendo de una densidad baja, donde es probable encontrar a los discos aislados, pasando por una densidad media en donde es probable la formación de *clusters*, hasta una densidad alrededor de la densidad crítica, donde es probable encontrar un *cluster* cuyo tamaño sea equiparable al tamaño del sistema, es decir, el caso donde se alcanza la percolación.

La densidad crítica para el inicio de la percolación continua se ha determinado mediante simulaciones numéricas y de Monte-Carlo para diferentes sistemas, que en casos bidimensionales dan

$$\rho_c = \frac{1.13}{\pi r_0^2}. \quad (3.1)$$

En el límite termodinámico correspondiente a  $N \rightarrow \infty$ , manteniendo  $\rho$  fija, la distribución de los traslapes de los discos es tipo Poisson con valor medio, adimensional,  $\xi = \rho\pi r_0^2$ :

$$P_n = \frac{\xi^n}{n!} \exp(-\xi), \quad (3.2)$$

en este caso, la fracción del área total cubierta por los discos es  $1 - \exp(-\xi)$ [81]. Para el valor crítico de  $\xi_c = 1.13$ , alrededor de  $2/3$  del área está cubierta por discos, dicho valor crítico se obtiene para el caso de un perfil de distribución homogéneo[83]. En los casos de perfiles superficiales no homogéneos, este factor cambia, para el caso de superficies circulares con perfiles gaussianos o tipo *Wood-Saxon*, la densidad crítica se alcanza al rededor de  $\xi_c \simeq 1.5$ [85].

### 3.2 Parámetros del modelo

El siguiente paso describir cómo cambian las observables medidas experimentalmente a partir de la combinación de los campos de color de las cuerdas del modelo. Para ello consideramos una cuerda que une un par quark-antiquark, cuya area transversa es  $S_0$ , la distribución de momento de los partones emitidos por esta cuerda viene dada por

$$I_0(y, p_T) = \frac{4\pi d\sigma}{dy d^2 p_T} = C \exp\left(-\frac{m^2 + p_T^2}{t_0}\right), \quad (3.3)$$

donde  $t_0$  es la tensión de la cuerda,  $m$  la masa y  $p_T$  el momento transverso del partón emitido. Se consideran a los piones como los partones con mayor probabilidad de ser emitidos y se toma  $m \sim 0$ . De acuerdo con el mecanismo de Schwinger para la emisión de partícula, suponemos que la tensión de la cuerda  $t_0$  es proporcional al cuadrado de la carga de color de la interacción  $Q_0^2$ [86, 87], de acuerdo a esta distribución (ecuación 3.3), la tensión de una cuerda viene dada por el valor medio  $t_0 = \langle p_i^2 \rangle_0$ .

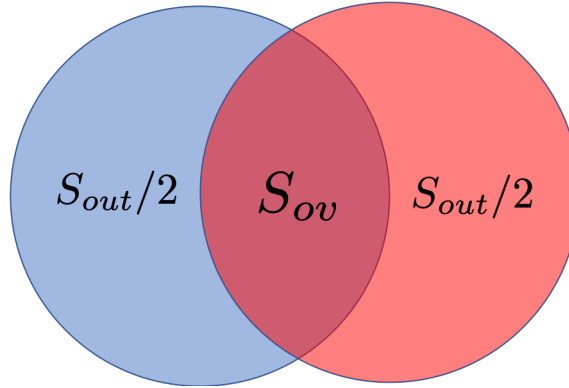


Figura 3.2: Representación de las áreas transversales de dos cuerdas, la región de traslape tiene un área  $S_{ov}$  mientras que la región restante tiene un área total  $S_{out}$ .

Si ahora se consideran dos cuerdas con la misma área transversa  $S_0 = \pi r_0^2$ , con  $r_0 = 0.25\text{fm}$ [88], y la misma magnitud de carga de color, que se traslapan formando una área de traslape  $S_{ov}$  como se muestra en la figura 3.2, la carga de color promedio en el área de traslape será proporcional a la suma vectorial de los campos de cada cuerda  $Q_{ov}^2 = (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)^2 = 2Q_0^2$ , los términos  $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$  y  $\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$  en promedio son cero debido a que los campos en general estarán orientados arbitrariamente, de esta forma

$$\frac{Q_{ov}}{S_{ov}} = \frac{\sqrt{2}Q_0}{S_0}, \quad (3.4)$$

es decir, a diferencia de lo que sucede en la región fuera del traslape, en cuyo caso  $Q_{out} = Q_0(2S_0 - S_{ov})/S_0 = Q_0 S_{out}/S_0$ , la magnitud del campo de color es mayor en el área de traslape, como es de esperar; sin embargo, dicha magnitud es menor a la suma aritmética de las magnitudes de los campos ( $1 < \sqrt{2} < 2$ ), este comportamiento fue descrito por primera vez para las cuerdas de color en [86]. La multiplicidad  $\mu \equiv dN/dy$  se relaciona

**CAPÍTULO 3. MODELO DE PERCOLACIÓN DE CUERDAS DE COLOR**  
**3.2. PARÁMETROS DEL MODELO**

---

directamente con el campo de color del área de traslape  $\mu/\mu_0 = \sqrt{2}S_{ov}/S_0$ , donde  $\mu_0$  es la multiplicidad de una cuerda (proporcional a  $Q_0$ ). Se puede generalizar este resultado para  $M$  *clusters*, los cuales están formados por el traslape de  $n_i$  cuerdas y tienen un área de traslape  $S_{ov}^{(i)}$ :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sum_i^M \frac{\sqrt{n_i} S_{ov}^{(i)}}{S_0}. \quad (3.5)$$

Por otro lado, se relaciona  $\langle p_T^2 \rangle$  con el número de cuerdas entre la multiplicidad total, de forma que

$$\frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_0} = N, \quad \frac{\langle p_T^2 \rangle}{\langle p_T^2 \rangle_0} = N \cdot \left( \sum_i^M \frac{\sqrt{n_i} S_{ov}^{(i)}}{S_0} \right)^{-1}, \quad (3.6)$$

dichas relaciones representan una ley de conservación del momento. Al tomar un número de cuerdas muy grande, la suma sobre los términos del tipo  $n_i$  y  $S^{(i)}$  puede ser sustituida por una suma sobre los términos  $n$  y  $S_n$ [81], donde  $S_n$  es el área promedio de un *cluster*, de forma que

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \sum_{n=1}^M \frac{\sqrt{n} S_n}{S_0}. \quad (3.7)$$

Ahora bien, puede introducirse el parámetro adimensional correspondiente a la fracción del área total  $S$  que cubren las  $N$  cuerdas  $\xi^t = NS_0/S$ , que es, efectivamente, el parámetro de densidad de cuerdas introducido en la distribución 3.2:

$$F(\xi^t) \equiv \frac{\mu}{N\mu_0} = \sum_{n=1}^M \frac{\sqrt{n} S_n}{NS_0} = \sum_{n=1}^M \frac{\sqrt{n} S_n}{S \xi^t} \rightarrow \sqrt{\left\langle \frac{n S_n}{S_0} \right\rangle} \quad (3.8)$$

donde se introduce una función  $F(\xi^t)$  que representa la supresión que tiene la multiplicidad dado un número inicial de cuerdas, que es útil para los cálculos debido a su relación con el término de la derecha en el límite termodinámico. Para el sistema con la geometría descrita anteriormente se tiene una expresión analítica del factor de reducción de color[81]:

$$F(\xi^t) = \sqrt{\frac{1 - e^{-\xi^t}}{\xi^t}}. \quad (3.9)$$

La dependencia de la multiplicidad con la energía del centro de masa de una colisión  $\sqrt{s}$ , viene a través del número promedio de cuerdas, que para relacionarlo con las mediciones experimentales toma una nueva notación  $N \rightarrow \bar{N}^s$ , de modo que a partir de ahora nos fijaremos en el parámetro de densidad de cuerdas promedio

$$\xi^t = \bar{N}^s \frac{S_0}{S}. \quad (3.10)$$

Para colisiones  $p$ - $p$  a baja energía es aproximadamente igual a 2, el número mínimo de cuerdas requeridas para el traslape, a partir de este valor mínimo el promedio de cuerdas crece con la energía como  $(\sqrt{s}/m_p)^{2\lambda}$ :

$$\bar{N}^s = 2 + 4 \frac{S_0}{S} \left( \frac{\sqrt{s}}{m_p} \right)^{2\lambda}, \quad (3.11)$$

donde  $m_p = 938.3\text{MeV}$  es la masa del protón y la potencia  $\lambda$  describe el aumento de la multiplicidad con la energía en colisiones  $p$ - $p$  y  $A$ - $A$ [88]. Para determinar  $\mu_0$  y  $\lambda$  se usa la ecuación 3.8 con datos experimentales de multiplicidad:

$$\mu = \mu_0 \bar{N}^s F(\xi^t), \quad (3.12)$$

introduciendo la dependencia en la energía del centro de masa de las colisiones a través de las ecuaciones 3.9, 3.10, 3.11. Un primer ajuste con  $S = \pi R_p^2$ , donde  $R_p = 1\text{fm}$  es el radio del protón, proporcionó los valores de 0.63 y 0.201 para  $\mu_0$  y  $\lambda$  respectivamente[88].

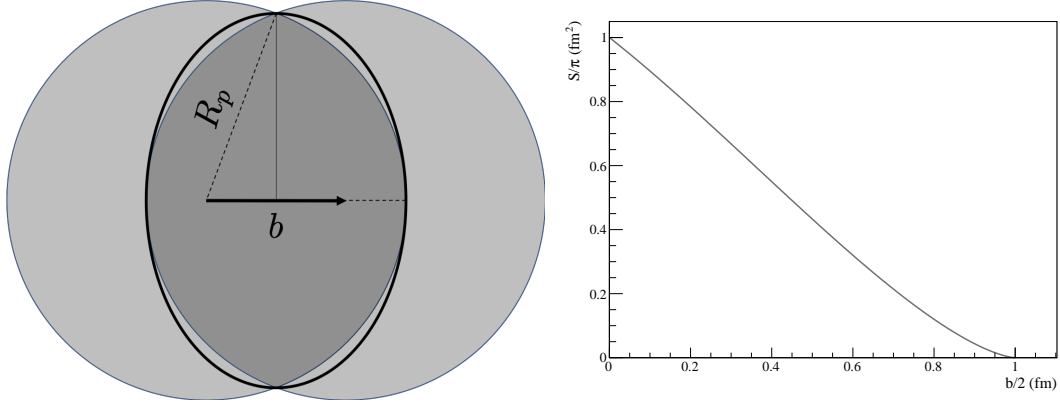


Figura 3.3: A la izquierda se muestra el área de interacción elíptica en una colisión  $p$ - $p$  con parámetro de impacto  $\vec{b}$  distinto de cero, parametrizada por  $D = \sqrt{R_p^2 - (b/2)^2}$  y  $d = R_p - b/2$ , a la izquierda se muestra cómo el área decrece a medida que aumenta el parámetro de impacto.

Para este trabajo se hizo un nuevo ajuste considerando una variación en el área de interacción  $S$ . En este caso se considera un parámetro de impacto distinto de cero  $\vec{b}$ , de forma que el área de interacción al momento de la colisión  $p$ - $p$  forme una elipse, tal y como muestra la figura 3.3, cuya área es descrita por la ecuación:

$$S = \pi(R_p - b/2)\sqrt{R_p^2 - (b/2)^2}, \quad (3.13)$$

el ajuste de esta nueva parametrización se muestra en la figura 3.4, el cual es útil para calcular los parámetros de sesgo mínimo de la tabla 3.1.

| $\sqrt{s}(\text{TeV})$ | $\bar{N}^s$ | $\xi^t$     | $F(\xi^t)$  |
|------------------------|-------------|-------------|-------------|
| 13                     | 15.30325924 | 1.457206934 | 0.725553409 |
| 7                      | 12.56297595 | 1.196271681 | 0.763683588 |
| 5.02                   | 11.33221996 | 1.079076635 | 0.782124125 |
| 2.76                   | 9.467676316 | 0.901531063 | 0.811749464 |
| 0.9                    | 6.918736077 | 0.658815878 | 0.855821043 |

Tabla 3.1: Valores promedio de sesgo mínimo del número de cuerdas, el parámetro de densidad de cuerdas y el factor de reducción de color para las energías de 0.9, 2.76, 5.02, 7 y 13 TeV.

### 3.2.1 Determinación de los parámetros del modelo

#### Distribuciones de sesgo mínimo

Para determinar los parámetros del modelo se usa el espectro de momento transversal invariante, cuyo comportamiento es descrito por la ley de potencias:

$$\frac{1}{N} \frac{d^2 N}{dp_T^2} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2\pi p_0^2} \frac{p_0^\alpha}{[p_0 + p_T]^\alpha}, \quad (3.14)$$

para la cual  $p_0$  y  $\alpha$  son parámetros dependientes de la energía y el tipo de sistema.

Dependencia de la multiplicidad con  $\sqrt{s}$

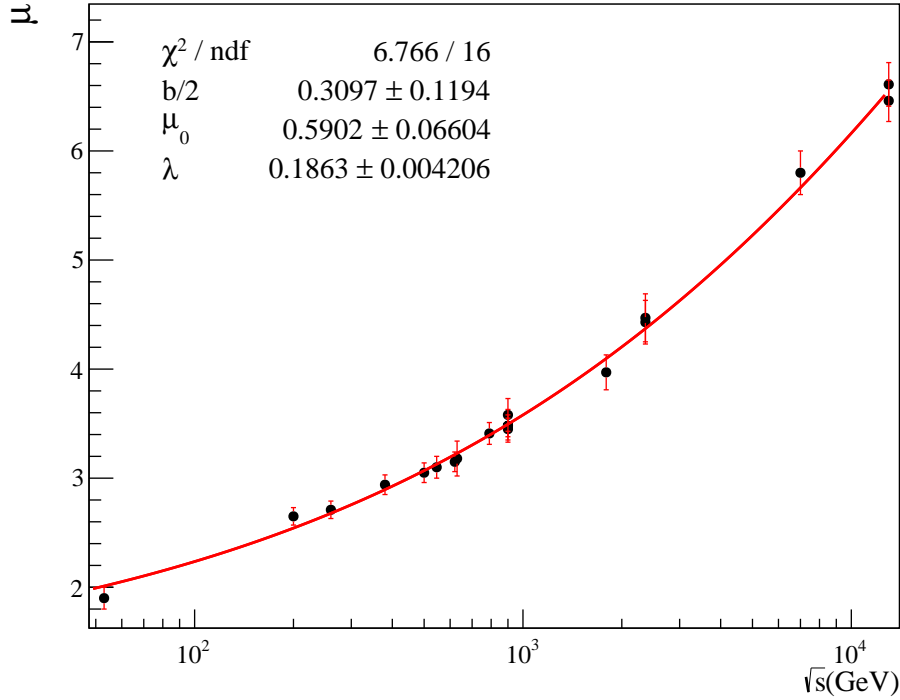


Figura 3.4: La gráfica muestra el ajuste a datos experimentales de la multiplicidad en colisiones  $p$ - $p$ [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97] como función de la energía, dicho ajuste es descrito por las ecuaciones dependientes del modelo 3.9, 3.10, 3.11, 3.12.

De la ecuación 3.14 se integra

$$\frac{1}{N} \frac{d^2 N}{d\eta dp_T} = \frac{ap_0^{\alpha-2}}{[p_0 + p_T]^{\alpha-1}}, \quad (3.15)$$

que describe el comportamiento de las distribuciones de momento transversal de sesgo mínimo en una región específica de bajo momento transversal. La ecuación 3.15 se usa para ajustar datos experimentales a las energías de la tabla 3.1, dicho ajuste se muestra en la figura 3.5<sup>1</sup> obteniendo los valores reportados en la tabla 3.2.

|            | $\sqrt{s}$ (TeV) | $a$              | $p_0$ (GeV)       | $\alpha$          |
|------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $p$ - $Pb$ | 5.02             | $85 \pm 3.40$    | $2.780 \pm 0.171$ | $9.937 \pm 1.716$ |
|            | 13               | $30.77 \pm 1.23$ | $2.478 \pm 1.862$ | $9.980 \pm 0.297$ |
| $p$ - $p$  | 7                | $33 \pm 1.32$    | $2.305 \pm 0.079$ | $9.752 \pm 0.140$ |
|            | 2.76             | $27 \pm 1.08$    | $2.032 \pm 0.074$ | $9.448 \pm 0.147$ |
|            | 0.9              | $23 \pm 0.92$    | $1.785 \pm 0.071$ | $9.287 \pm 0.165$ |

Tabla 3.2: Valores de los parámetros  $a$ ,  $p_0$  y  $\alpha$  obtenidos en los ajustes a los datos experimentales, figura 3.5.

---

<sup>1</sup>Los valores de 13TeV están multiplicados por un factor de 1.3 para su mejor apreciación.

Distribuciones de momento transverso

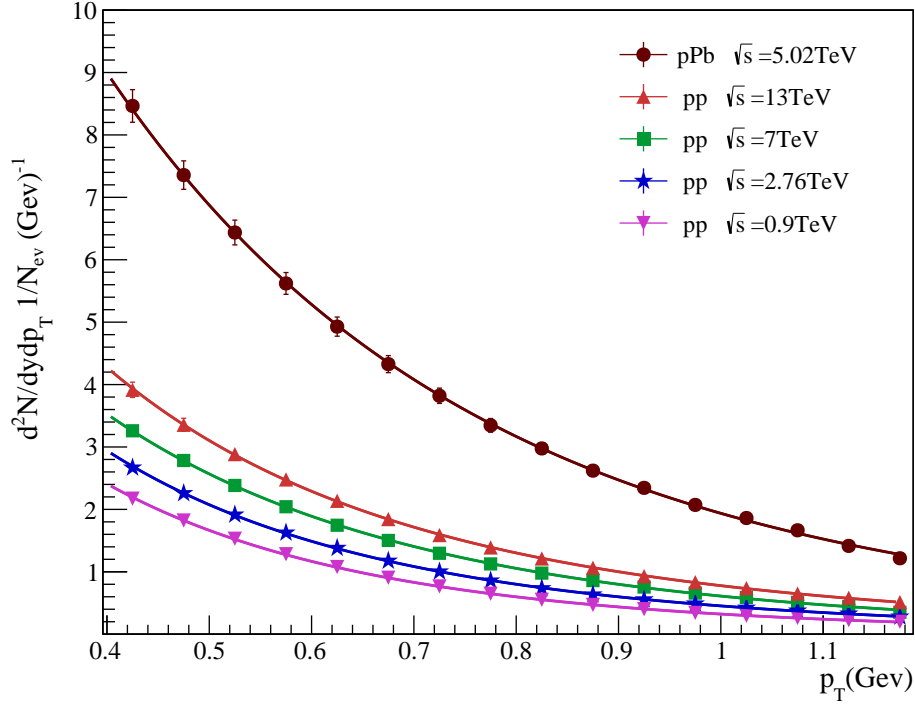


Figura 3.5: Se muestra el ajuste de la ecuación 3.15 a las distribuciones de momento transverso de piones cargados en colisiones  $p$ - $p$  a energías de 0.9, 2.76, 7 y 13 TeV y colisiones  $p$ - $Pb$  a 5.02 TeV, en la región  $0.4 < p_T < 1.175$ , datos de la colaboración CMS[98, 99, 100].

### Eventos de alta multiplicidad

Para las distintas clases de multiplicidad ( $HM$ ) se considera la desviación de  $p_0 \rightarrow p_0\beta$  con respecto a los valores de sesgo mínimo ( $mb$ ):

$$\beta = \left( \frac{\langle nS_0/S_n \rangle_{HM}}{\langle nS_0/S_n \rangle_{mb}} \right)^{1/4}, \quad (3.16)$$

Al considerar que los eventos de alta multiplicidad se acercan al límite termodinámico, de la ecuación 3.8 la parametrización 3.15 toma la forma:

$$\frac{1}{N} \frac{d^2N}{d\eta dp_T} = \frac{a (p_0\beta)^{\alpha-2}}{(p_0\beta + p_T)^{\alpha-1}}, \quad \text{donde } \beta \rightarrow \sqrt{\frac{F(\xi_{pp}^t)}{F(\xi_{HM}^t)}}, \quad (3.17)$$

la cual describe el comportamiento de las distribuciones de momento para las distintas clases de multiplicidad, los ajustes se muestran en la figura 3.6, luego se usan los valores de la tabla 3.1 para calcular los distintos valores del factor de reducción de color, los cuales varían hasta un 3% dependiendo de la geometría del sistema. Debido a la definición del factor de reducción de color, ecuación 3.9, éste debe ser menor que 1, por lo que los eventos de baja multiplicidad han sido descartados. Por otro lado, las ecuaciones que consideramos toman en cuenta una aproximación que tiene mayor validez cerca del límite termodinámico. A partir de ahora nos centraremos en la descripción de fenómenos en la región de alta temperatura y densidad; los valores tomados en cuenta junto con el error que proporciona cada ajuste, que se reporta en el eje vertical de la gráfica, se muestran en la figura 3.7.

**CAPÍTULO 3. MODELO DE PERCOLACIÓN DE CUERDAS DE COLOR**  
**3.2. PARÁMETROS DEL MODELO**

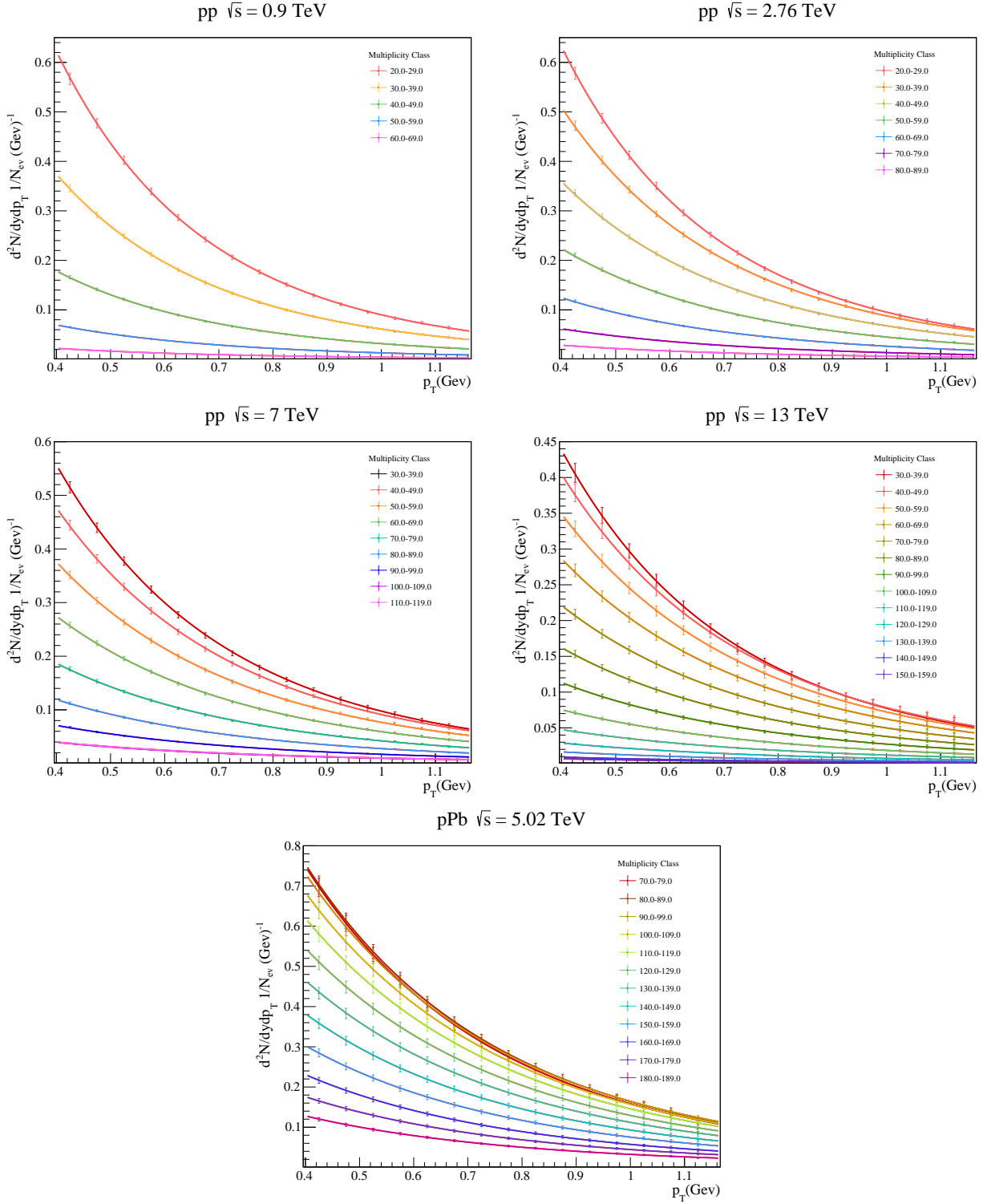


Figura 3.6: Se muestran los ajustes de la ecuación 3.17 sobre las distribuciones de momento transverso para distintas clases de multiplicidad, etiquetadas como número de trazas reconstruidas, en colisiones  $p-p$  a energías de 0.9, 2.76, 7 y 13 TeV y colisiones  $p-Pb$  a 5.02 TeV, en la región  $0.4 < p_T < 1.175$ , CMS [98, 99, 100].

*Color Reduction Factor*

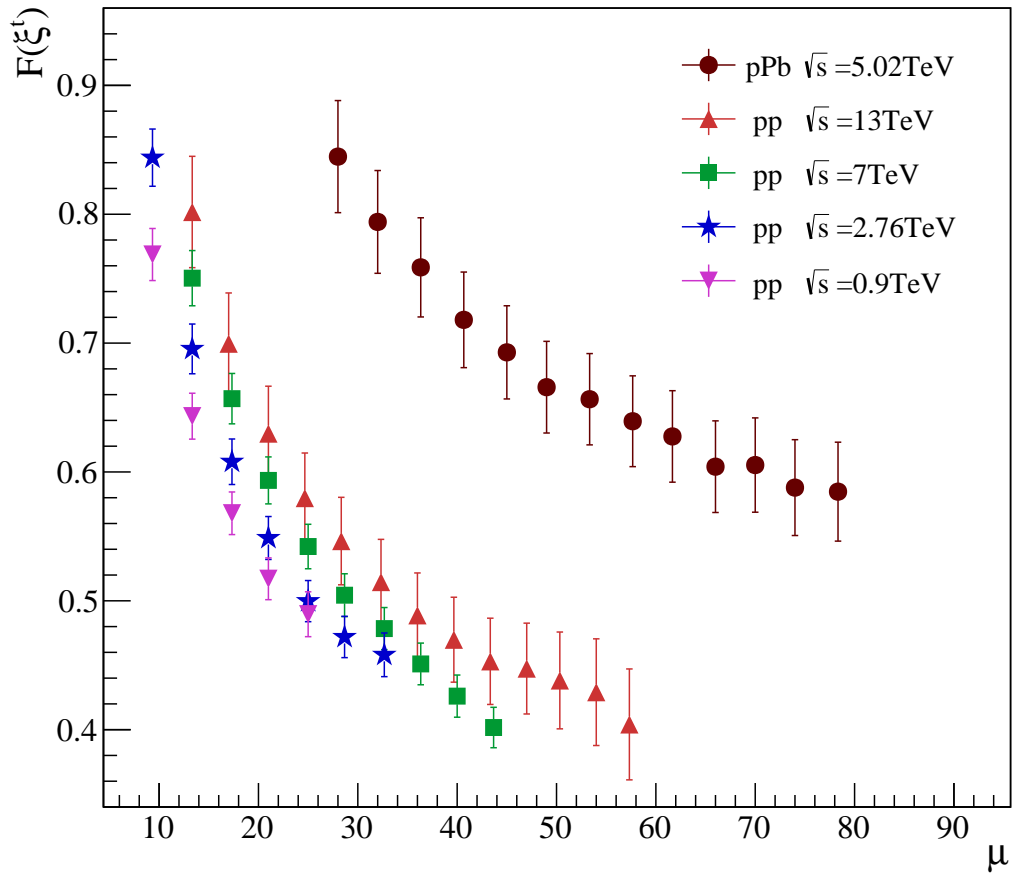


Figura 3.7: La gráfica muestra el comportamiento del factor de reducción de color para distintos valores de multiplicidad a distintas energías del centro de masa en colisiones  $p$ - $p$  y  $p$ - $Pb$ .

# Capítulo 4

## Termodinámica

### 4.1 Temperatura local del sistema

De la ecuación 3.3, el mecanismo de Schwinger describe la producción de partículas con masa despreciable en términos de  $p_T^2$ [101]:

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim \exp(-p_T^2/t_0). \quad (4.1)$$

La tensión de los cúmulos macroscópicos de cuerdas fluctúa alrededor su valor medio debido a las fluctuaciones del campo cromo-eléctrico provenientes de la naturaleza del vacío cuántico en QCD[102]. Estas fluctuaciones determinan una distribución Gaussiana en términos del factor de reducción de color que se relaciona con una distribución termal[103]

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim \exp\left(-p_T \sqrt{\frac{2F(\xi^t)}{\langle p_T^2 \rangle_0}}\right). \quad (4.2)$$

La temperatura promedio del sistema es proporcional al momento promedio de las partículas producidas, de esta forma se define una temperatura local, incluso en sistemas pequeños, que en términos del modelo se expresa como[104, 105]:

$$T(\xi^t) = \sqrt{\frac{\langle p_T^2 \rangle_0}{2F(\xi^t)}}, \quad (4.3)$$

donde  $\sqrt{\langle p_T^2 \rangle_0} = 190.25$  MeV, obtenido a partir del resultado de la colaboración HotLQCD para la temperatura crítica mencionado en el capítulo anterior a  $\xi_c^t = 1.2$ [28, 106, 107]. Los resultados de la figura 4.1 muestran la relación entre una gran producción de partículas y eventos que alcanzan una gran temperatura en colisiones  $p$ - $p$ . Los valores más bajos de temperatura en colisiones  $p$ - $Pb$  pueden explicarse por la supresión de partículas con alto momento que sucede en sistemas más grandes como se explicó en la sección 2.2.2. Por otro lado, se ha sugerido que la rápida termalización de los sistemas en colisiones nucleares ocurre por la existencia de un horizonte de sucesos que implica una rápida desaceleración de los núcleos, debido al efecto Hawking-Unruh[108, 109, 110], en el caso de sistemas pequeños no se observa el mismo comportamiento, por lo que los coeficientes de transporte y las propiedades de “bulto” (*bulk properties*) van a cambiar.

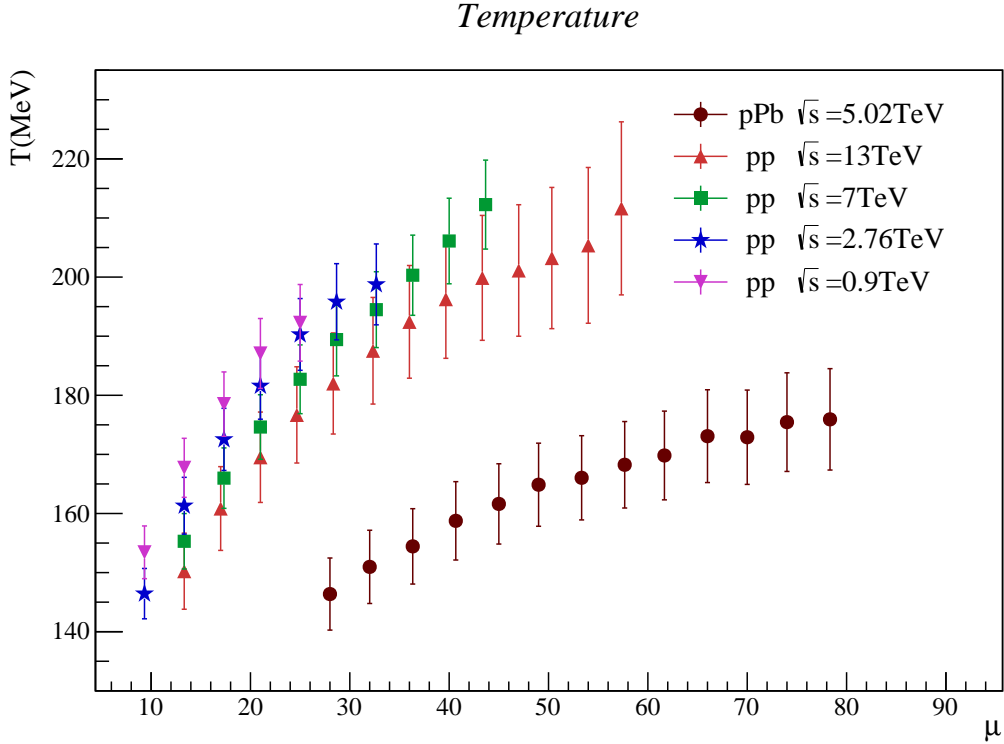


Figura 4.1: Temperatura promedio local para cada clase de multiplicidad en los distintos sistemas.

## 4.2 Densidad de energía

Una fase es un estado caracterizado por las variables macroscópicas de un sistema homogéneo y localmente en equilibrio. Una transición de fase se define a través de un cambio cualitativo característico en una o más variables del sistema, dichas variables son llamadas parámetros de orden dado que las transiciones de fase a menudo involucran cambios abruptos en las propiedades de simetría del sistema.

En este caso, el parámetro de densidad de cuerdas,  $\xi^t$ , sirve como un parámetro de orden local y determina la transición de fase geométrica del sistema, ya que existe una densidad crítica,  $\xi_c^t$ , por debajo de la cual la aparición de los *clusters* no es usual y por arriba de la cual los *clusters* son más frecuentes. En el caso de la transición de fase en QCD, el parámetro de orden local es la densidad de energía  $\varepsilon$  descrita en el capítulo 2, para la cual también existe un valor crítico  $\varepsilon_0$ , la propuesta es que la relación entre ambos parámetros de orden sea directamente proporcional:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{\xi^t}{\xi_c^t}. \quad (4.4)$$

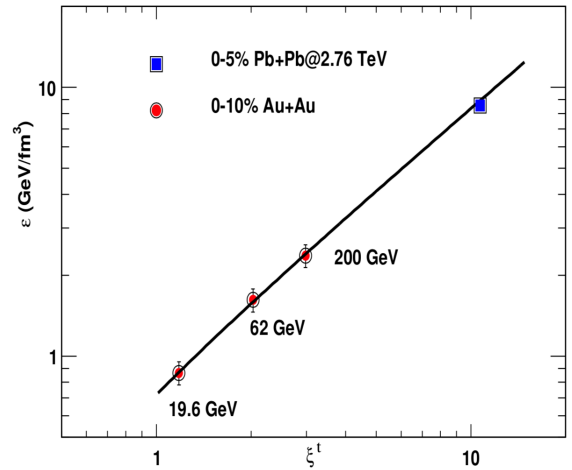


Figura 4.2: Densidad de energía  $\varepsilon$  como función del parámetro de densidad de cuerdas  $\xi^t$ .

Usando la fórmula de Bjorken (ecuación 2.2) en datos de RHIC, se determinó que el cociente  $\varsigma = \varepsilon_c/\xi_c^t$  tiene un valor  $\varsigma = 0.56010039 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ , como se muestra en la figura 4.2[112]. Al usar el valor de densidad de cuerdas crítica  $\xi_c^t$  de la ecuación 3.1 se obtiene una densidad de energía crítica  $\varepsilon_c = 0.632913441 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ , que está por encima del valor calculado en Lattice QCD (ecuación 2.3).

Al usar la relación  $\varepsilon = \varsigma \xi^t$ , para los valores de alta multiplicidad en colisiones  $p-p$  y  $p-Pb$  obtenidos en la sección 3.2, se obtienen los valores de densidad de energía de la figura 4.3, donde se aprecia un comportamiento similar al obtenido en Lattice QCD para la región de alta temperatura, con el detalle de que dichos valores quedan ligeramente por encima de los predichos por LQCD, por lo comentado en el párrafo anterior.

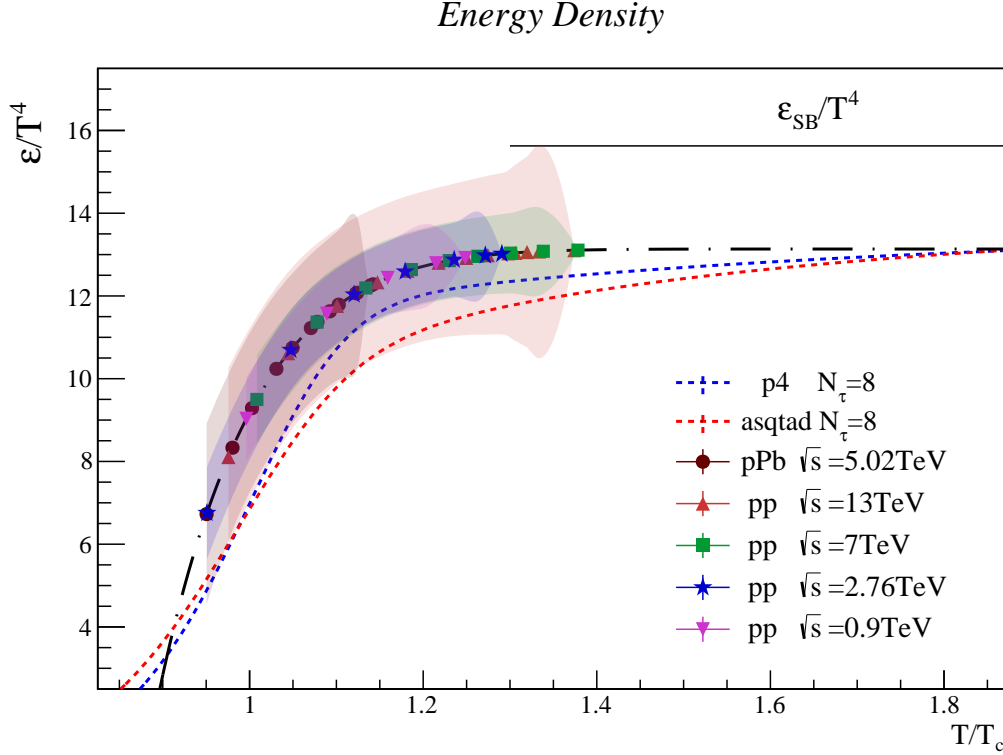


Figura 4.3: Comportamiento de  $\varepsilon/T^4$  como función de  $T/T_c$  comparada con las predicciones de Lattice QCD para 2+1 sabores (dos ligeros y uno pesado) usando 8 retículas con las acciones  $p4$  en azul y  $asqtad$  en rojo[111], la curva teórica del modelo se representa con la línea negra discontinua.

### 4.3 Viscosidad de Corte (*Shear Viscosity*)

El comportamiento de la observable de flujo elíptico en colisiones de Iones Pesados descrito en la sección 2.2.1, sugiere que la materia creada en esos sistemas se comporta como un fluido casi perfecto, con una contribución pequeña de viscosidad[33, 34, 35, 36]. Para colisiones nucleares se propuso la medición indirecta de la *Shear Viscosity* sobre densidad de entropía  $\eta_s/s$  como una medida de la fluidez del medio[113, 114, 115, 116].

La teoría cinética relativista para el cociente de viscosidad sobre entropía establece la relación

$$\frac{\eta_s}{s} \simeq \frac{\lambda_{\text{mfp}} T}{5}, \quad (4.5)$$

donde  $T$  es la temperatura y  $\lambda_{\text{mfp}}$  es el camino libre medio, que es inversamente proporcional a la densidad de partículas  $n$  por la sección eficaz de transporte  $\sigma_{tr}$ ,  $\lambda_{\text{mfp}} \sim 1/(n\sigma_{tr})$ .

En el modelo,  $n$  viene dado por el número efectivo de fuentes de color  $N_{\text{sour}}$ , que en general es menor que el número promedio de cuerdas  $\bar{N}^s$ , dividido por la unidad de volumen  $S_n L$ [117]:

$$n = \frac{N_{\text{sour}}}{S_n L}, \quad (4.6)$$

donde  $L$  es la extensión longitudinal de una cuerda  $\sim 1$  fm[104]. El área que ocupan las cuerdas se relaciona con el parámetro de densidad de cuerdas  $\xi^t$ , a través de la relación  $(1 - e^{-\xi^t})S_n$ . De esta forma, el número efectivo fuentes viene dado por el área de ocupación de las cuerdas dividido ente el área de una cuerda por la supresión de color  $S_0 F(\xi^t)$ :

$$N_{\text{sour}} = \frac{(1 - e^{-\xi^t})S_n}{S_0 F(\xi^t)}, \quad (4.7)$$

entonces

$$n = \frac{1 - e^{-\xi^t}}{F(\xi^t)S_0 L} = \frac{1 - e^{-\xi^t}}{\sigma_{tr} L} \implies \lambda_{\text{mfp}} = \frac{1}{\sigma_{tr} n} = \frac{L}{1 - e^{-\xi^t}}, \quad (4.8)$$

donde se ha considerado a la sección eficaz de transporte como el área transversa efectiva de una cuerda por el factor de reducción de color, de forma que  $\sigma_{tr}$  sea inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura, de acuerdo con la dependencia estimada de  $\sigma_{tr}$  con  $T$ [118, 119]. De la ecuación 4.5, la *shear viscosity* sobre densidad de entropía queda en términos del modelo como:

$$\frac{\eta_s}{s} = \frac{TL}{5(1 - e^{-\xi^t})}. \quad (4.9)$$

Debido a su comportamiento, el camino libre medio se acerca asintóticamente a un valor constante a grandes temperaturas, de esta forma, la viscosidad de corte crece sutilmente una vez alcanzada la temperatura crítica, donde se espera que más de dos terceras partes del área de interacción sean cubiertas por las cuerdas. Por otro lado, para valores por debajo de la temperatura crítica, la viscosidad decrece vertiginosamente debido a que el área de interacción, vacía en un principio, es cubierta rápidamente por las cuerdas de color. El cociente  $\eta_s/s$  es, de hecho, una medida de cómo se transporta el momento de las partículas a través del sistema en expansión.

## 4.4 Anomalía de la Traza

La anomalía de la traza es el valor esperado de la traza del tensor de energía-momento en QCD, introducido en la sección 1.2.2. Esta observable mide la desviación con respecto al comportamiento conforme e identifica las interacciones residuales en el medio[120]. Es de esperar que esta observable se relacione con las propiedades de viscosidad del medio, cualitativamente se ha verificado que el comportamiento de esta observable es inversamente proporcional al cociente  $\eta_s/s$ , explícitamente[121, 122]

$$\Delta \equiv \frac{\varepsilon - 3P}{T^4} \simeq \frac{s}{\eta_s}. \quad (4.10)$$

En la figura 4.4, se muestran los resultados de la ecuación 4.9 para la viscosidad en los sistemas considerados, además de comparar el inverso multiplicativo de esta cantidad con los datos de Lattice para la anomalía de la traza.

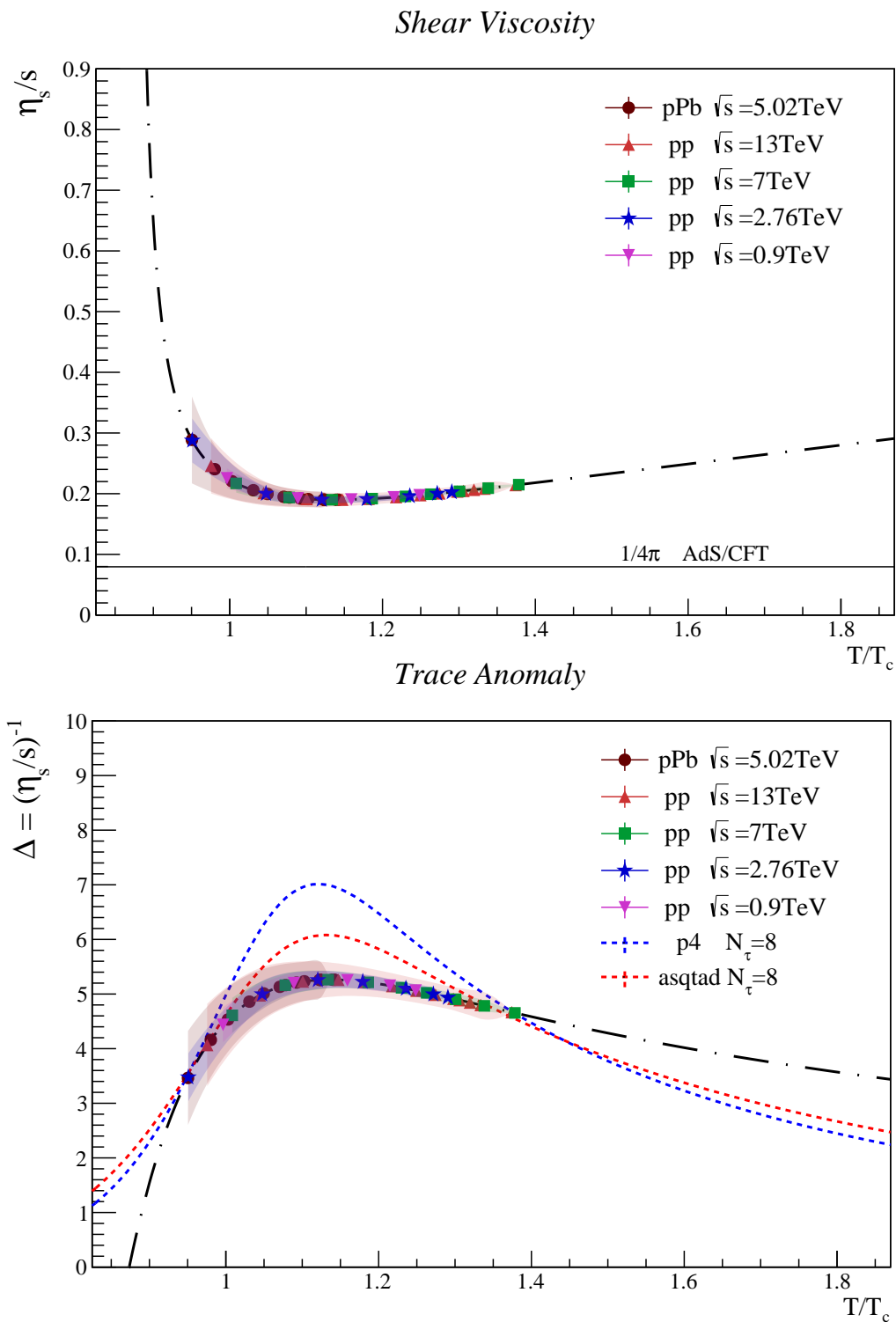


Figura 4.4: La gráfica superior muestra el comportamiento de la viscosidad de corte, que permanece por encima de la cota inferior de AdS/CFT[46]. La gráfica inferior muestra el comportamiento de la anomalía de la traza aproximando el inverso de  $\eta_s/s$ , comparado con los resultados de LQCD[111].

## 4.5 Presión y Entropía

Utilizando la ecuación 4.10, es posible obtener la presión en términos de parámetros del modelo de acuerdo con:

$$P = \frac{1}{3}(\varepsilon - T^4\Delta), \quad (4.11)$$

luego, se usa la relación fundamental  $Ts = \varepsilon + P$ , de forma que la densidad de entropía es trivialmente

$$s = \frac{\varepsilon + P}{T}, \quad (4.12)$$

el comportamiento de estas cantidades, comparadas con resultados de LQCD, se reporta en la figura 4.5.

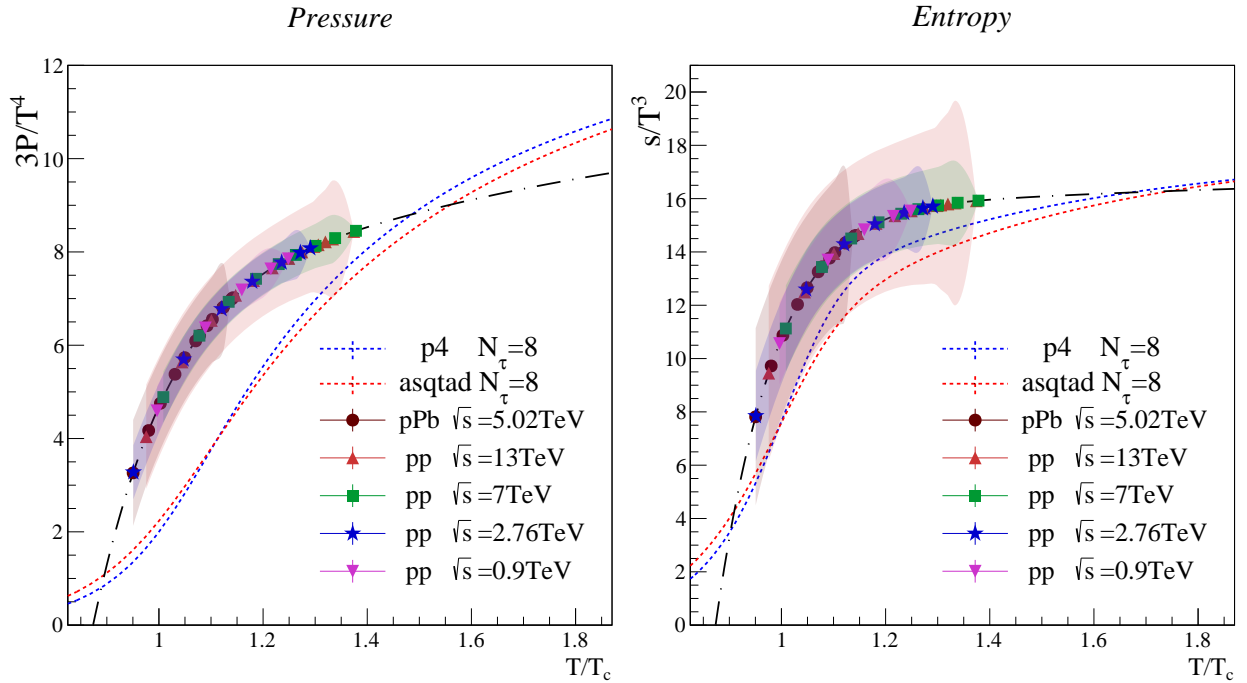


Figura 4.5: La gráfica izquierda muestra el comportamiento de la presión sobre la cuarta potencia de la temperatura, esta observable comienza a saturarse luego de alcanzar seis veces la temperatura crítica. La gráfica derecha muestra la densidad de entropía sobre la temperatura al cubo. En ambas gráficas se aprecia la misma tendencia y un comportamiento muy similar al reportado en Lattice QCD[111], sin embargo, los resultados del modelo siguen sobreestimando los valores de las variables termodinámicas en el rango de temperaturas menores que  $1.5T_c$ .

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1 Velocidad del sonido

En los capítulos anteriores se ha hablado de los cálculos en Lattice QCD, donde comúnmente se obtienen las variables termodinámicas a partir de la función de partición  $\mathcal{Z}(V, T)$  en QCD, para la cual se establece un volumen y temperatura finitos, en particular la densidad de energía y la presión[123]:

$$\varepsilon = \frac{T^2}{V} \left( \frac{\partial \ln \mathcal{Z}(V, T)}{\partial T} \right)_V, \quad y \quad P = T \left( \frac{\partial \ln \mathcal{Z}(V, T)}{\partial V} \right)_T. \quad (5.1)$$

Las derivadas de segundo orden de la función de partición describen fluctuaciones. Para un gas relativista, donde se pueden crear y destruir partículas solo hay una segunda derivada en ausencia de potenciales químicos, el calor específico a volumen constante:

$$C_v = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V. \quad (5.2)$$

Una cantidad como la compresibilidad no se define en ausencia de un potencial químico, ya que un gas puede adaptarse a un cambio en el volumen sin un cambio en la presión. Sin embargo, la velocidad del sonido es una cantidad bien definida, usando identidades termodinámicas se puede escribir de la siguiente manera

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right)_s = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right)_V = s \left( \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right)_V, \quad (5.3)$$

donde se usó la identidad

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = s. \quad (5.4)$$

De acuerdo al modelo, la temperatura depende de la densidad de energía de acuerdo a las ecuaciones 4.4, 4.3 y 3.9, de modo que

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right)_V = \frac{1}{\varsigma} \frac{\partial T}{\partial \xi^t} = \frac{1}{\varsigma} \frac{\partial}{\partial \xi^t} \left( \sqrt{\frac{\langle p_T^2 \rangle_0}{2F(\xi^t)}} \right) = -\frac{T}{2\varsigma F(\xi^t)} \frac{\partial F(\xi^t)}{\partial \xi^t}, \quad (5.5)$$

$$= \frac{T}{2\varsigma F(\xi^t)} \left( \frac{F(\xi^t)^2 - e^{-\xi^t}}{2\xi^t F(\xi^t)} \right) = \frac{T}{4\varepsilon} \left( 1 - \frac{e^{-\xi^t}}{F(\xi^t)^2} \right), \quad (5.6)$$

de donde se obtiene, como primer resultado, una expresión para calcular la velocidad del sonido adiabática:

$$c_s^2 = \frac{sT}{4\varepsilon} \left( 1 - \frac{e^{-\xi^t}}{F(\xi^t)^2} \right). \quad (5.7)$$

*Adiabatic Speed of Sound*

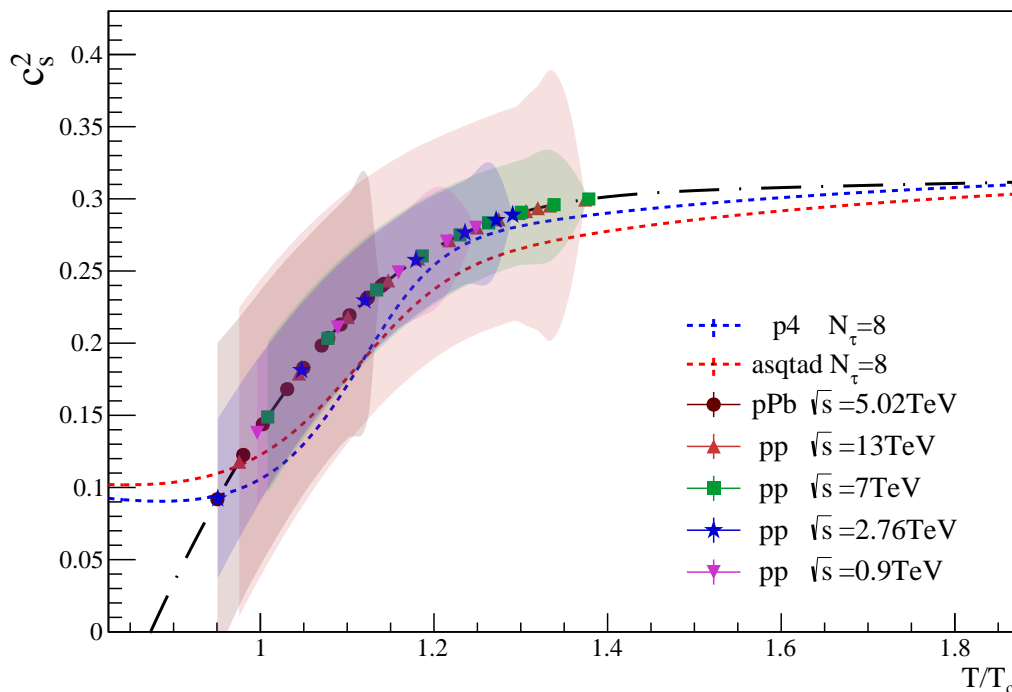


Figura 5.1: Velocidad del sonido adiabática comparada con resultados de Lattice[111].

La velocidad del sonido de la ecuación 5.7 tiene un comportamiento bastante similar a lo obtenido en los cálculos de Lattice, como se muestra en la figura 5.1. Sin embargo, existen razones por las cuales la compresibilidad aparece como un concepto bien definido, por la aparición de un potencial químico por ejemplo, en este caso la velocidad del sonido puede verse afectada por esta nueva física, por lo que es necesario ampliar nuestra definición de velocidad del sonido a medio disipativos. Los fluidos perfectos en equilibrio generan un tipo de calor específico sin aumento en la entropía, lo que es común en procesos reversibles, este tipo de sistemas son de utilidad para describir la expansión hidrodinámica de los sistemas en colisiones de iones pesados, donde después de un tiempo de relajación  $\tau_0$  después de la colisión, el sistema se termaliza. Sin embargo, para este trabajo consideramos que la expansión hidrodinámica del fluido relativista en colisiones de sistemas pequeños puede presentar propiedades disipativas, por esa razón es necesario introducir propiedades de “no equilibrio”.

Como primera aproximación se considera una velocidad del sonido con entropía creciente, se tiene una expansión cilíndrica con una de las dimensiones longitudinales fijas,  $L$ , usando la ecuación 4.11 y la aproximación de la ecuación 4.10:

$$c_{sL}^2 = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{3} \left[ 1 - T^4 \frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon} - 4T^3 \Delta \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right], \quad (5.8)$$

con

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon} = \frac{5\xi^t}{\varepsilon} \cdot \frac{5e^{-\xi^t} - F(\xi^t)^2}{4TL}. \quad (5.9)$$

Después de calcular las derivadas y simplificar la expresión 5.8, se obtiene la siguiente dependencia en las variables termodinámicas:

$$c_{sL}^2 = \frac{P}{\varepsilon} + \frac{T^3 \Delta}{3s} c_s^2. \quad (5.10)$$

La velocidad del sonido de la ecuación 5.10 tiene un comportamiento adecuado para el cálculo de las siguientes cantidades, ya que su saturación se alcanza a temperaturas mucho mayores que las que se requieren para que la velocidad del sonido adiabática se sature, dicho comportamiento es el esperado para un sistema que no alcanza la termalización. El comportamiento de esta cantidad se presenta en la figura 5.2.

*Speed of Sound*

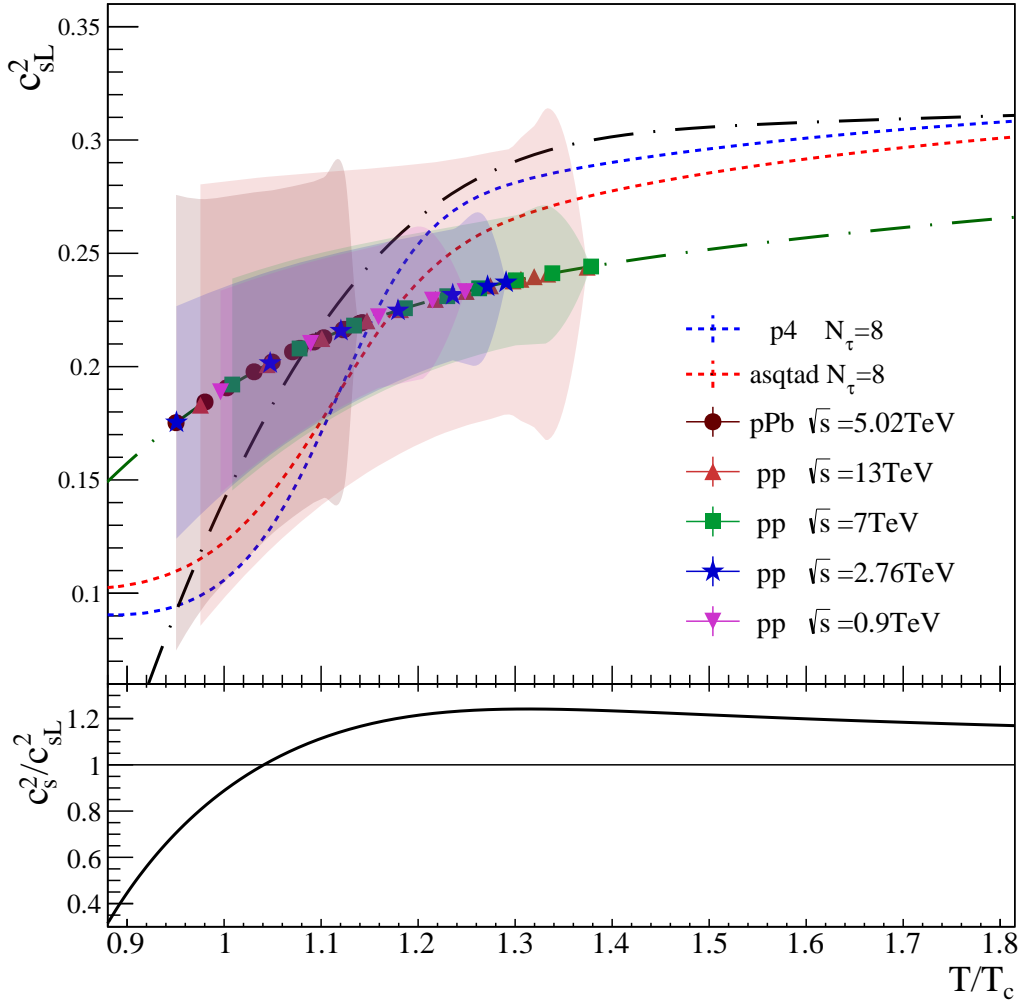


Figura 5.2: La gráfica muestra la aproximación del comportamiento de la velocidad del sonido en un medio disipativo, cuya curva teórica se muestra con línea verde punteada. La gráfica inferior muestra la comparación entre los dos velocidades calculadas, notando que la igualdad se da a muy altas temperaturas.

## 5.2 Viscosidad de Bulto (*Bulk Viscosity*)

La formulación de la hidrodinámica relativista es absolutamente no trivial, ya que la implementación inadecuada de fórmulas disipativas viola la causalidad relativista y conduce a conductas inconsistentes en la propiedad de la estabilidad[124, 125, 126]. Se han estudiado enfoques distintos para construir una hidrodinámica relativista consistente, para las teorías causales disipativas relativistas fluido-dinámicas (CDRF<sup>1</sup>), lo común es que las observables que se construyen a partir de los tensores de tensión y de presión de bulto<sup>2</sup> se traten como variables dinámicas además de las variables habituales (temperatura, densidad de energía, etc.) y la evolución de estas cantidades sigue una ecuación disipativa caracterizada por las viscosidades y sus tiempos de relajación correspondientes, [127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137].

En hidrodinámica, los coeficientes de transporte deben determinarse a partir de una teoría o experimentos microscópicos: para la teoría de Navier-Stokes, los coeficientes de transporte pueden calcularse desde el punto de vista cinético basado en la ecuación de Boltzmann, o desde el enfoque microscópico a través de la fórmula de Green-Kubo-Nakano (GKN). La aplicabilidad de la ecuación de Boltzmann es bastante limitada, por otro lado la fórmula GKN es más general, pero ambos enfoques llevan a los mismos resultados en el límite de un gas diluido clásico[138].

Para el cálculo de la viscosidad de bulto se consideró el enfoque del operador de proyección para derivar las fórmulas microscópicas para los coeficientes de transporte en CDRF que pueden verse como una generalización de las fórmulas GKN para los fluidos newtonianos (Navier-Stokes). Se ha confirmado la consistencia de este enfoque comparando con los resultados obtenidos de la ecuación de Boltzmann. Además, se verifica que la fórmula satisface el resultado exacto obtenido de la regla de f-suma cuando se aplica al proceso de difusión (generalizado)[139, 140, 141, 142, 143, 144].

La fórmula para calcular la viscosidad de bulto (*Bulk Viscosity*) para un fluido hidrodinámico relativista disipativo causal se obtiene a temperatura y potencial químico finitos utilizando el método del operador de proyección. Se considera una perturbación en un fluido infinito en equilibrio térmico que posee simetría plana, entonces, todas las cantidades asociadas con la dinámica del fluido varían espacialmente solo a lo largo de la dirección perpendicular al plano de simetría. Si la velocidad del fluido apunta en la dirección  $x$ ,  $T^{0x}$  y  $\Pi$  se eligen como variables, usando el operador de proyección de Mori, tal y como se hace en las referencias [139, 140, 141, 142, 143, 144]:

$$PO = \frac{(O, T^{0x}(-k^x))}{(T^{0x}(k^x), T^{0x}(-k^x))} T^{0x}(k^x) + \frac{(O, \Pi(-k^x))}{(\Pi(k^x), \Pi(-k^x))} \Pi(k^x), \quad (5.11)$$

donde el operador de presión de bulto  $\Pi$  se define a través de las fluctuaciones de la presión en equilibrio, en el caso de un potencial químico que tiende a cero:

$$\Pi = (T^{ii} - \langle T^{ii} \rangle) - \frac{dP}{d\varepsilon} (T^{00} - \langle T^{00} \rangle), \quad (5.12)$$

en el caso de un potencial químico finito, el operador de densidad numérica  $n$  se conserva, conmuta con el Hamiltoniano, y la definición de  $\Pi$  se puede modificar como

$$\Pi = (T^{ii} - \langle T^{ii} \rangle) - \frac{dP}{d\varepsilon} (T^{00} - \langle T^{00} \rangle) - \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_\varepsilon (n - \langle n \rangle), \quad (5.13)$$

donde el último término se desvanece en el límite cuando se desprecia la masa de los quarks. Esta nueva definición no viola la propiedad conforme del operador de presión. La ecuación de evolución temporal, para un operador vectorial  $\mathbf{A}(t)$ , formado por las observables hidrodinámicas, se reescribe en el método del operador de proyección de acuerdo a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t) = i\mathbb{M}\mathbf{A}(t) - \int_0^t d\tau \Xi(\tau) \mathbf{A}(t - \tau) + \zeta(t), \quad (5.14)$$

<sup>1</sup> Causal dissipative relativistic fluid-dynamics

<sup>2</sup> The shear stress tensor  $\mathcal{E}$  & the bulk viscous pressure

donde  $\mathbb{M}$  y  $\Xi$  son matrices  $n \times n$  y  $\zeta$  es un  $n$ -vector compuesto por operadores:

$$i\mathbb{M}_{ij} = \sum_k (iLA_i, A_k^\dagger)(\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger)_{kj}^{-1}, \quad (5.15a)$$

$$\Xi_{ij}(t) = -\theta(t) \sum_k (iL\zeta_i(t)A_i, A_k^\dagger)(\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger)_{kj}^{-1}, \quad (5.15b)$$

$$\zeta_i(t) = Qe^{iLQt}iLA_i. \quad (5.15c)$$

donde  $Q \equiv 1 - P$  y  $L$  es el operador de Liouville. Al aplicar este formalismo al operador de proyección se obtiene:

$$\partial_t T^{0k}(k^x, t) = -ik^x \Pi(k^x, t), \quad (5.16a)$$

$$\partial_t \Pi(k^x, t) = -ik^x R_{k^x}^\Pi T^{0x}(k^x, t) - \int_0^t d\tau \Xi^\Pi(k^x, t) \Pi(k^x, t - \tau), \quad (5.16b)$$

donde

$$R_{k^x}^\Pi = \frac{(\Pi(k^x), \Pi(-k^x))}{(T^{0x}(k^x), T^{0x}(-k^x))}. \quad (5.17)$$

Por otro lado, se considera la ecuación dinámica fenomenológica del operador de presión de bulto:

$$\tau_\Pi \partial_t \Pi(k^x) + \Pi(k^x) = \eta_b (ik^x) u^x(k^x), \quad (5.18)$$

donde  $\eta_b$  y  $\tau_\Pi$  son la viscosidad de bulto y su correspondiente tiempo de relajación. A continuación se comparan las ecuaciones de evolución del operador de presión y al aplicar el resultado a un fluido compuesto por bosones escalares cargados no interactuantes se obtiene[145]:

$$\frac{\eta_b}{\tau_\Pi} = \left( \frac{1}{3} - c_s^2 \right) (\varepsilon + P) - \frac{2}{9} (\varepsilon - 3P), \quad (5.19)$$

de donde

$$\frac{\eta_b}{s} = \left( \frac{1}{3} - c_s^2 \right) \tau_\Pi T - \frac{2T^4 \tau_\Pi \Delta}{9s}, \quad (5.20)$$

para graficar se considera un valor fijo para el tiempo de relajación que es global para todos los sistemas pequeños,  $\tau_\Pi = 1\text{fm}$ . En la ecuación 5.19 se nota la importancia de tener una velocidad del sonido que alcance la saturación luego de que la presión alcance una tercera parte del valor de densidad de energía, ya que una viscosidad de bulto negativa no es algo apropiado para causalidad, por lo que se utiliza la velocidad del sonido de la ecuación 5.10, la gráfica se muestra en la figura 5.3. Un comentario importante es que, en muchas ocasiones, los coeficientes de viscosidad de orden superior, tal como la viscosidad de bulto, son despreciados, en este caso, aunque es muy pequeña la contribución, es diferente de cero.

La figura 5.3 muestra el comportamiento de la viscosidad de bulto sobre densidad de entropía, que se lleva bien con causalidad usando la modificación para la velocidad del sonido. El resultado interesante se encuentra en la segunda gráfica, donde se muestra el cociente entre las dos viscosidades, el cual presenta un cambio en la pendiente abrupto que sugiere una transición de fase de segundo orden para estos sistemas, el cociente se encuentra por debajo de la curva teórica, representada por la línea verde punteada, basada en holografía dual, donde se especula que  $\eta_b/\eta_s \geq 2(1/3 - c_s^2)$ [146].

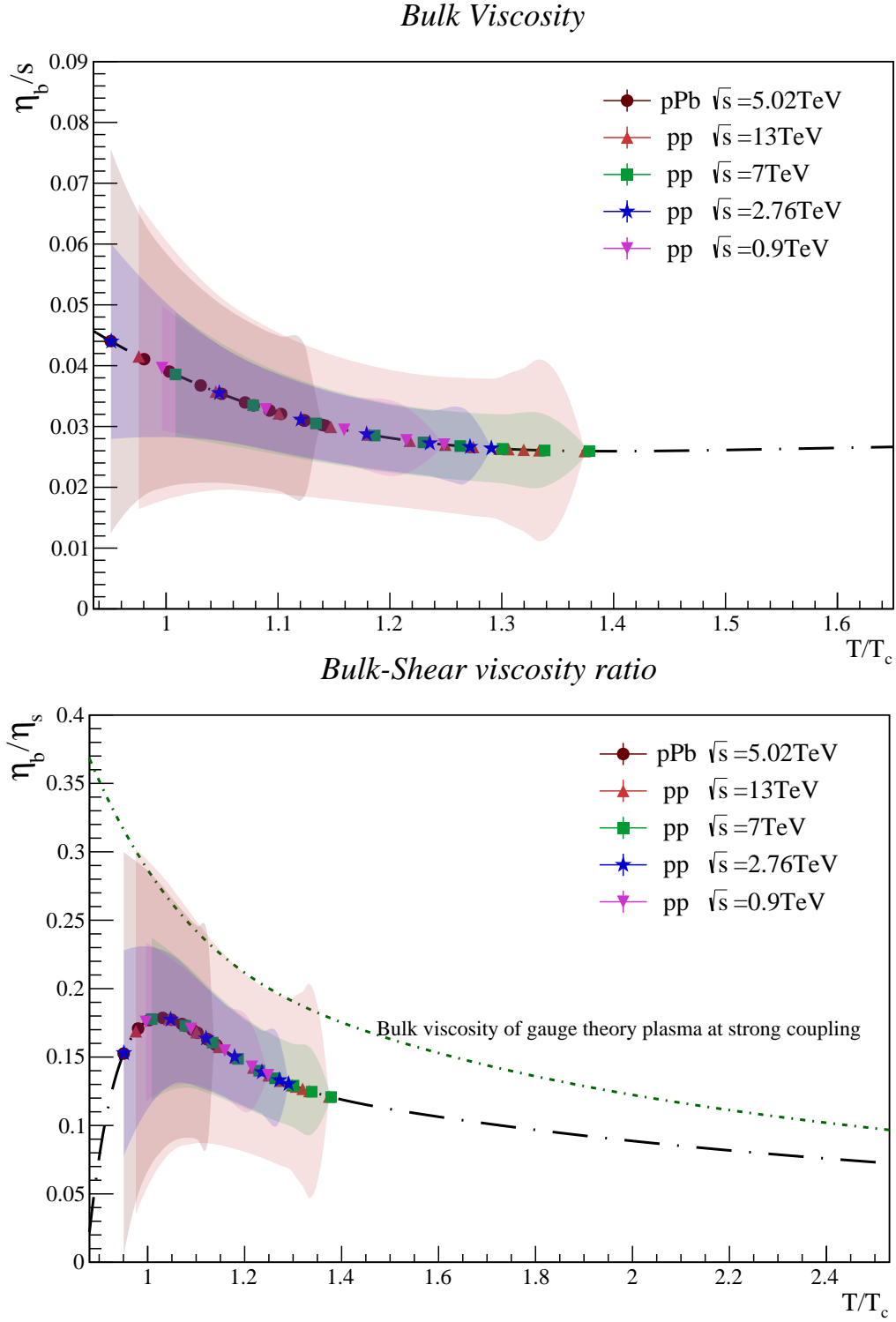


Figura 5.3: La figura muestra los resultados más relevantes de este trabajo.

# Conclusiones

Uno de los descubrimientos más intrigantes que se han confirmado en las últimas décadas gracias a los colisionadores de iones pesados RHIC y LHC, es el comportamiento colectivo del sistema formado en colisiones nucleares, que presenta las características de un líquido casi perfecto[33, 34, 35, 36, 40, 43, 44, 53, 54, 55, 56, 57], donde la razón de la viscosidad sobre la entropía del sistema es cercana al límite de la conjetura  $1/4\pi$ . Sin embargo, no es posible medir esta cantidad directamente y su nivel de certidumbre depende de la certidumbre de las propiedades de transporte por las que se induce. Un estimado más directo, se obtiene de comprar el espectro de momento y el flujo elíptico con simulaciones hidrodinámicas que describen las condiciones que generan estos estados medidos[147, 148], sin embargo, este método tiene varias incertidumbres sistemáticas, que dependen de condiciones iniciales, detalles en la precisión de la ecuación de estado, etc.

La viscosidad del sistema, como se mencionó en las secciones 2.2, 4.3, 5.2, tiene contribuciones de primer y segundo orden, que corresponden a la viscosidad de corte y bulto, sabemos que esta última no contribuye en los límites no relativistas ni en el límite relativista de un gas donde el número de partículas se conserva. Sin embargo, los sistemas pequeños (colisiones protón-protón y protón-plomo) no están dentro de estos límites y por tanto poseen una contribución relevante de la viscosidad de bulto, por lo que es importante conocer su contribución para entender cómo se ven afectadas las observables hadrónicas como el espectro de momento transversal y el flujo elíptico.

En las figuras 4.4 y 5.3 se muestran los resultados de las contribuciones de primer y segundo orden de la viscosidad para sistemas pequeños, obtenidas en el marco del modelo de percolación de cuerdas, el comportamiento que se obtiene en la viscosidad de corte es consistente con los resultados de hidrodinámica en colisiones de iones pesados:

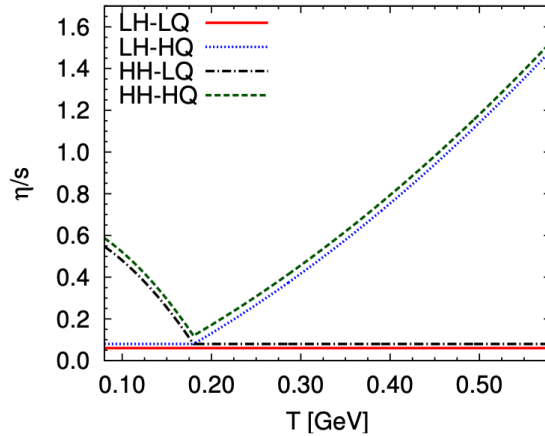


Figura 5.4: Diferentes parametrizaciones hidrodinámicas de la viscosidad de corte sobre densidad de entropía  $\eta/s$  como función de la temperatura,  $T$ [148].

En la figura 5.3 se presentó el cálculo de la contribución de la viscosidad de bulto en el modelo de percolación de cuerdas de color. Dicha contribución es despreciada habitualmente en colisiones de iones pesados, sin embargo, en este trabajo se muestra que en el caso de sistemas pequeños, existe una contribución importante de la viscosidad de bulto, lo que implica que el sistema se expande y la densidad del sistema cae, esta refiere a que el sistema tiene una presión que se aleja del equilibrio, lo que indica que el sistema tiene una diferencia importante con respecto al equilibrio térmico y por ello las contribuciones de las fluctuaciones juegan un papel esencial en estos sistemas, así como en las contribuciones de flujo elíptico. El comportamiento que se obtiene para la viscosidad de bulto es consistente con un resultado de hidrodinámica, donde se toma en cuenta la teoría hidro-cinética de fluctuaciones termales aplicada a un fluido relativista no conforme[149]:

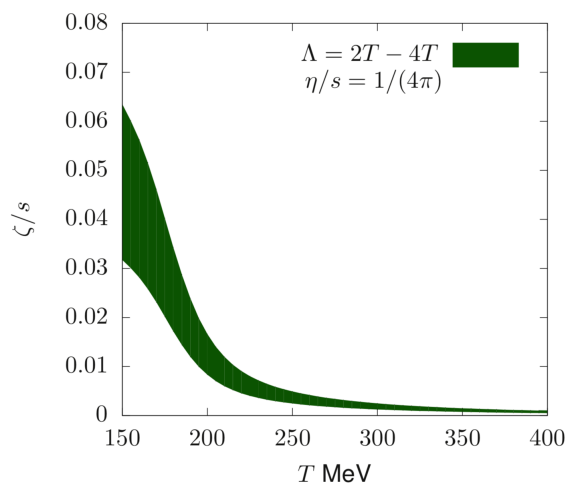


Figura 5.5: Viscosidad de bulto inducida por un cálculo de fluctuaciones hidrodinámicas, se usa la parametrización de Lattice de la ecuación de estado de QCD y la viscosidad de corte sobre la entropía  $\eta/s = 1/4\pi$ [150]. El límite Ultra-Violeta de las fluctuaciones hidrodinámicas,  $\Lambda$ , varía entre  $2T$  y  $4T$ .

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Partículas fundamentales de acuerdo al Modelo Estándar. . . . .   | 2  |
| 1.2 | Comportamiento de la constante de acoplamiento fuerte de acuerdo a la medición de la sección eficaz inclusiva en producción de $3\text{-jet}$ en colisiones $pp$ a $7\text{TeV}$ [17]. . . . .  | 5  |
| 2.1 | Esquema del posible diagrama de fase en QCD de [32]. . . . .  | 11 |
| 2.2 | Solapamiento de dos núcleos en el plano perpendicular al eje de colisión $z$ , y asimetrías espaciales y de momentos en la colisión[41]. . . . .  | 12 |
| 2.3 | Comportamiento del coeficiente de flujo elíptico $v_2$ contra el inverso del número de Knudsen $Kn^{-1}$  | 14 |
| 2.4 | Factor de supresión nuclear a rapidez central, medido en colisiones $Au\text{-}Au$ centrales a $200\text{ GeV}$ por nucleón, para fotones directos, $\pi^0$ y $\eta$ [49]. . . . .  | 15 |
| 2.5 | Comportamiento de la densidad de gluones dentro de un hadrón a distintas escalas de energía[37].  | 17 |
| 3.1 | Se representan distintos casos de distribución del sistema, partiendo de una densidad baja, donde es probable encontrar a los discos aislados, pasando por una densidad media en donde es probable la formación de <i>clusters</i> , hasta una densidad alrededor de la densidad crítica, donde es probable encontrar un <i>cluster</i> cuyo tamaño sea equiparable al tamaño del sistema, es decir, el caso donde se alcanza la percolación. . . . . | 21 |
| 3.2 | Representación de las áreas transversales de dos cuerdas, la región de traslape tiene un área $S_{ov}$ mientras que la región restante tiene un área total $S_{out}$ . . . . .  | 22 |
| 3.3 | A la izquierda se muestra el área de interacción elíptica en una colisión $p\text{-}p$ con parámetro de impacto $\vec{b}$ distinto de cero, parametrizada por $D = \sqrt{R_p^2 - (b/2)^2}$ y $d = R_p - b/2$ , a la izquierda se muestra cómo el área decrece a medida que aumenta el parámetro de impacto. . . . .   | 24 |
| 3.4 | La gráfica muestra el ajuste a datos experimentales de la multiplicidad en colisiones $p\text{-}p$ [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97] como función de la energía, dicho ajuste es descrito por las ecuaciones dependientes del modelo 3.9, 3.10, 3.11, 3.12. . . . .  | 25 |
| 3.5 | Se muestra el ajuste de la ecuación 3.15 a las distribuciones de momento transversal de piones cargados en colisiones $p\text{-}p$ a energías de 0.9, 2.76, 7 y 13 TeV y colisiones $p\text{-}Pb$ a 5.02 TeV, en la región $0.4 < p_T < 1.175$ , datos de la colaboración CMS[98, 99, 100]. . . . .   | 26 |
| 3.6 | Se muestran los ajustes de la ecuación 3.17 sobre las distribuciones de momento transversal para distintas clases de multiplicidad, etiquetadas como número de trazas reconstruidas, en colisiones $p\text{-}p$ a energías de 0.9, 2.76, 7 y 13 TeV y colisiones $p\text{-}Pb$ a 5.02 TeV, en la región $0.4 < p_T < 1.175$ , CMS [98, 99, 100]. . . . .  | 27 |
| 3.7 | La gráfica muestra el comportamiento del factor de reducción de color para distintos valores de multiplicidad a distintas energías del centro de masa en colisiones $p\text{-}p$ y $p\text{-}Pb$ . . . . .  | 28 |
| 4.1 | Temperatura promedio local para cada clase de multiplicidad en los distintos sistemas. . . . .  | 30 |
| 4.2 | Densidad de energía $\varepsilon$ como función del parámetro de densidad de cuerdas $\xi^t$ . . . . .   | 30 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.3 | Comportamiento de $\varepsilon/T^4$ como función de $T/T_c$ comparada con las predicciones de Lattice QCD para $2 + 1$ sabores (dos ligeros y uno pesado) usando 8 retículas con las acciones $p4$ en azul y $asqtad$ en rojo[111], la curva teórica del modelo se representa con la línea negra discontinua. . . . .   | 31 |
| 4.4 | La gráfica superior muestra el comportamiento de la viscosidad de corte, que permanece por encima de la cota inferior de AdS/CFT[46]. La gráfica inferior muestra el comportamiento de la anomalía de la traza aproximando el inverso de $\eta_s/s$ , comparado con los resultados de LQCD[111].  | 33 |
| 4.5 | La gráfica izquierda muestra el comportamiento de la presión sobre la cuarta potencia de la temperatura, esta observable comienza a saturarse luego de alcanzar seis veces la temperatura crítica. La gráfica derecha muestra la densidad de entropía sobre la temperatura al cubo. En ambas gráficas se aprecia la misma tendencia y un comportamiento muy similar al reportado en Lattice QCD[111], sin embargo, los resultados del modelo siguen sobreestimando los valores de las variables termodinámicas en el rango de temperaturas menores que $1.5T_c$ . . . . . | 34 |
| 5.1 | Velocidad del sonido adiabática comparada con resultados de Lattice[111]. . . . .   | 36 |
| 5.2 | La gráfica muestra la aproximación del comportamiento de la velocidad del sonido en un medio disipativo, cuya curva teórica se muestra con línea verde punteada. La gráfica inferior muestra la comparación entre los dos velocidades calculadas, notando que la igualdad se da a muy altas temperaturas. . . . .   | 37 |
| 5.3 | La figura muestra los resultados más relevantes de este trabajo. . . . .  | 40 |
| 5.4 | Diferentes parametrizaciones hidrodinámicas de la viscosidad de corte sobre densidad de entropía $\eta/s$ como función de la temperatura, $T$ [148]. . . . .  | 41 |
| 5.5 | Viscosidad de bulto inducida por un cálculo de fluctuaciones hidrodinámicas, se usa la parametrización de Lattice de la ecuación de estado de QCD y la viscosidad de corte sobre la entropía $\eta/s = 1/4\pi$ [150]. El límite Ultra-Violeta de las fluctuaciones hidrodinámicas, $\Lambda$ , varía entre $2T$ y $4T$ . . . . .  | 42 |

# Lista de Tablas

- 3.1 Valores promedio de sesgo mínimo del número de cuerdas, el parámetro de densidad de cuerdas y el factor de reducción de color para las energías de 0.9, 2.76, 5.02, 7 y 13 TeV. . . . . 24
- 3.2 Valores de los parámetros  $a$ ,  $p_0$  y  $\alpha$  obtenidos en los ajustes a los datos experimentales, figura 3.5. 25



# Bibliografía

- [1] M. Herrero; NATO Sci. Ser. C **534** (1999) 1, doi:10.1007/978-94-011-4689-0\_1 arXiv:hep-ph/9812242
- [2] Donald H. Perkins, *An introduction to High Energy Physics*, Cambridge, 4th edition.
- [3] Tadao Nakano, Kazuhiko Nishijima; Progr. Theor. Exp. Phys, **10**, (1953), doi: 10.1143/PTP.10.581
- [4] Kazuhiko Nishijima; Progr. Theor. Exp. Phys, **13**, (1955), doi: 10.1143/PTP.13.285
- [5] Gell-Mann; Il Nuovo Cimento. **4**, (1956), doi: 10.1007/BF02748000
- [6] Gell-Mann, M. Wed, CTSL-20. (1961), doi:10.2172/4008239.
- [7] Gell-Mann; Physics Letters, **8**, (1964), 214 doi: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3
- [8] G. Zweig, (1964), CERN-TH-401.
- [9] A. Petermann, Nuclear Physics, **63**, (1965) 2, doi: 10.1016/0029-5582(65)90348-2
- [10] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964). 10.1103/PhysRevLett.13.598
- [11] W. A. Bardeen, H. Fritzsch and M. Gell-Mann, (1973) hep-ph/0211388.
- [12] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, Physics Letters B, **47**, (1973), doi:10.1016/0370-2693(73)90625-4
- [13] S. Eidelman et al, Physics Letters B **592**, (2004), Particle data group: the quark model
- [14] M. Eidemuller, H. G. Dosch and M. Jamin, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **86**, 421 (2000), doi:10.1016/S0920-5632(00)00598-3
- [15] David J. Gross and Frank Wilczek Phys. Rev. Lett. **30**, (1973), doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- [16] H. David Politzer Phys. Rev. Lett. **30**, (1973), doi:10.1103/PhysRevLett.30.1346
- [17] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], Eur. Phys. J. C **75** (2015) no.5, 186 doi:10.1140/epjc/s10052-015-3376-y [arXiv:1412.1633 [hep-ex]].
- [18] S. Durr *et al.*, Phys. Lett. B **701** (2011) 265 doi:10.1016/j.physletb.2011.05.053 [arXiv:1011.2403 [hep-lat]].
- [19] A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A. L. Maroto y J. P. Peláez, *Effective Lagrangians For The Standard Model*, Springer-Verlag 1997.
- [20] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19** (1961) 154. doi:10.1007/BF02812722
- [21] T. D. Lee and G. C. Wick, Phys. Rev. D **9** (1974) 2291. doi:10.1103/PhysRevD.9.2291
- [22] J. C. Collins and M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 1353. doi:10.1103/PhysRevLett.34.1353

- [23] W. Scheid, H. Muller and W. Greiner, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 741. doi:10.1103/PhysRevLett.32.741
- [24] B. A. Freedman and L. D. McLerran, Phys. Rev. D **16** (1977) 1130. doi:10.1103/PhysRevD.16.1130
- [25] E. V. Shuryak, Phys. Lett. **78B**, 150 (1978) [Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 408 (1978)] [Yad. Fiz. **28**, 796 (1978)]. doi:10.1016/0370-2693(78)90370-2
- [26] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983). doi:10.1103/PhysRevD.27.140
- [27] S. Borsanyi *et al.* [Wuppertal-Budapest Collaboration], JHEP **1009**, 073 (2010) doi:10.1007/JHEP09(2010)073 [arXiv:1005.3508 [hep-lat]].
- [28] A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. D **85** (2012) 054503 doi:10.1103/PhysRevD.85.054503 [arXiv:1111.1710 [hep-lat]].
- [29] P. Petreczky, J. Phys. G **39** (2012) 093002 doi:10.1088/0954-3899/39/9/093002 [arXiv:1203.5320 [hep-lat]].
- [30] F. Karsch, Lect. Notes Phys. **583** (2002) 209 doi:10.1007/3-540-45792-5-6 [hep-lat/0106019].
- [31] C. P. Singh, Phys. Rept. **236** (1993) 147. doi:10.1016/0370-1573(93)90172-A
- [32] T. Boeckel and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **85** (2012) 103506 doi:10.1103/PhysRevD.85.103506 [arXiv:1105.0832 [astro-ph.CO]].
- [33] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 184 doi:10.1016/j.nuclphysa.2005.03.086 [nucl-ex/0410003].
- [34] B. B. Back *et al.*, Nucl. Phys. A **757** (2005) 28 doi:10.1016/j.nuclphysa.2005.03.084 [nucl-ex/0410022].
- [35] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 1 doi:10.1016/j.nuclphysa.2005.02.130 [nucl-ex/0410020].
- [36] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 102 doi:10.1016/j.nuclphysa.2005.03.085 [nucl-ex/0501009].
- [37] M. Gyulassy and L. McLerran, Nucl. Phys. A **750** (2005) 30 doi:10.1016/j.nuclphysa.2004.10.034 [nucl-th/0405013].
- [38] F. Becattini, Z. Phys. C **69** (1996) no.3, 485. doi:10.1007/BF02907431
- [39] F. Becattini, J. Phys. G **28** (2002) 1553 doi:10.1088/0954-3899/28/7/305 [hep-ph/0202071].
- [40] J. Cleymans, B. Kampfer, M. Kaneta, S. Wheaton and N. Xu, Phys. Rev. C **71** (2005) 054901 doi:10.1103/PhysRevC.71.054901 [hep-ph/0409071].
- [41] G. Y. Qin, Int. J. Mod. Phys. E **24** (2015) no.02, 1530001 doi:10.1142/S0218301315300015 [arXiv:1502.02554 [hep-ph]].
- [42] J. Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **46** (1992) 229. doi:10.1103/PhysRevD.46.229
- [43] T. Hirano and Y. Nara, Phys. Rev. C **68** (2003) 064902 doi:10.1103/PhysRevC.68.064902 [nucl-th/0307087].
- [44] D. Molnar and S. A. Voloshin, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 092301 doi:10.1103/PhysRevLett.91.092301 [nucl-th/0302014].
- [45] C. Alt *et al.* [NA49 Collaboration], Phys. Rev. C **68** (2003) 034903 doi:10.1103/PhysRevC.68.034903 [nucl-ex/0303001].

- [46] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 081601 doi:10.1103/PhysRevLett.87.081601 [hep-th/0104066].
- [47] J. D. Bjorken, (1982), FERMILAB-PUB-82-059-THY, FERMILAB-PUB-82-059-T.
- [48] N. Armesto, J. Phys. G **32** (2006) R367 doi:10.1088/0954-3899/32/11/R01 [hep-ph/0604108].
- [49] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. C **75** (2007) 024909 doi:10.1103/PhysRevC.75.024909 [nucl-ex/0611006].
- [50] R. Baier, D. Schiff and B. G. Zakharov, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50** (2000) 37 doi:10.1146/annurev.nucl.50.1.37 [hep-ph/0002198].
- [51] M. Gyulassy, I. Vitev, X. N. Wang and B. W. Zhang, In \*Hwa, R.C. (ed.) et al.: Quark gluon plasma\* 123-191 doi:10.1142/9789812795533\_0003 [nucl-th/0302077].
- [52] A. Kovner and U. A. Wiedemann, In \*Hwa, R.C. (ed.) et al.: Quark gluon plasma\* 192-248, (2004), doi:10.1142/9789812795533\_0004 [hep-ph/0304151].
- [53] K. Aamodt *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 252302 doi:10.1103/PhysRevLett.105.252302 [arXiv:1011.3914 [nucl-ex]].
- [54] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Rev. C **87** (2013) no.1, 014902 doi:10.1103/PhysRevC.87.014902 [arXiv:1204.1409 [nucl-ex]].
- [55] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **707** (2012) 330 doi:10.1016/j.physletb.2011.12.056 [arXiv:1108.6018 [hep-ex]].
- [56] K. Aamodt *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 032301 doi:10.1103/PhysRevLett.107.032301 [arXiv:1105.3865 [nucl-ex]].
- [57] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], JHEP **1402** (2014) 088 doi:10.1007/JHEP02(2014)088 [arXiv:1312.1845 [nucl-ex]].
- [58] B. Abelev *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Lett. B **719** (2013) 29 doi:10.1016/j.physletb.2013.01.012 [arXiv:1212.2001 [nucl-ex]].
- [59] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **718** (2013) 795 doi:10.1016/j.physletb.2012.11.025 [arXiv:1210.5482 [nucl-ex]].
- [60] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **724** (2013) 213 doi:10.1016/j.physletb.2013.06.028 [arXiv:1305.0609 [nucl-ex]].
- [61] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], JHEP **1009** (2010) 091 doi:10.1007/JHEP09(2010)091 [arXiv:1009.4122 [hep-ex]].
- [62] L. D. McLerran and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **49** (1994) 2233 doi:10.1103/PhysRevD.49.2233 [hep-ph/9309289].
- [63] A. L. Ayala, M. B. Gay Ducati and E. M. Levin, Nucl. Phys. B **493** (1997) 305 doi:10.1016/S0550-3213(97)00002-3 [hep-ph/9604383].
- [64] D. Kharzeev and M. Nardi, Phys. Lett. B **507** (2001) 121 doi:10.1016/S0370-2693(01)00457-9 [nucl-th/0012025].
- [65] A. M. Stasto, K. J. Golec-Biernat and J. Kwiecinski, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 596 doi:10.1103/PhysRevLett.86.596 [hep-ph/0007192].

- [66] N. Armesto, C. A. Salgado and U. A. Wiedemann, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 022002 doi:10.1103/PhysRevLett.94.022002 [hep-ph/0407018].
- [67] T. Lappi and L. McLerran, Nucl. Phys. A **772** (2006) 200 doi:10.1016/j.nuclphysa.2006.04.001 [hep-ph/0602189].
- [68] A. Capella, U. Sukhatme, C. I. Tan and J. Tran Thanh Van, Phys. Rept. **236** (1994) 225. doi:10.1016/0370-1573(94)90064-7
- [69] A. Capella, U. Sukhatme, C. I. Tan and J. Tran Thanh Van, Phys. Lett. **81B** (1979) 68. doi:10.1016/0370-2693(79)90718-4
- [70] K. Werner, Phys. Rept. **232** (1993) 87. doi:10.1016/0370-1573(93)90078-R
- [71] A. B. Kaidalov and K. A. Ter-Martirosian, Phys. Lett. **117B** (1982) 247. doi:10.1016/0370-2693(82)90556-1
- [72] K. Werner, T. Hirano, I. Karpenko, T. Pierog, S. Porteboeuf, M. Bleicher and S. Haussler, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **196** (2009) 36. doi:10.1016/j.nuclphysbps.2009.09.006
- [73] F. W. Bopp, J. Ranft, R. Engel and S. Roesler, Acta Phys. Polon. B **35** (2004) 303. XXXIII ISDM
- [74] X. N. Wang and M. Gyulassy, Phys. Rev. D **44** (1991) 3501. doi:10.1103/PhysRevD.44.3501
- [75] T. Sjostrand, S. Mrenna and P. Z. Skands, Comput. Phys. Commun. **178** (2008) 852 doi:10.1016/j.cpc.2008.01.036 [arXiv:0710.3820 [hep-ph]].
- [76] Z. W. Lin, C. M. Ko, B. A. Li, B. Zhang and S. Pal, Phys. Rev. C **72** (2005) 064901 doi:10.1103/PhysRevC.72.064901 [nucl-th/0411110].
- [77] M. Bleicher *et al.*, J. Phys. G **25** (1999) 1859 doi:10.1088/0954-3899/25/9/308 [hep-ph/9909407].
- [78] N. Armesto, M. A. Braun, E. G. Ferreira and C. Pajares, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3736 doi:10.1103/PhysRevLett.77.3736 [hep-ph/9607239].
- [79] M. Nardi and H. Satz, Phys. Lett. B **442** (1998) 14 doi:10.1016/S0370-2693(98)01234-9 [hep-ph/9805247].
- [80] M. A. Braun, C. Pajares and J. Ranft, Int. J. Mod. Phys. A **14** (1999) 2689 doi:10.1142/S0217751X99001354 [hep-ph/9707363].
- [81] M. A. Braun and C. Pajares, Eur. Phys. J. C **16** (2000) 349 doi:10.1007/s100520050027 [hep-ph/9907332].
- [82] M. A. Braun and C. Pajares, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 4864 doi:10.1103/PhysRevLett.85.4864 [hep-ph/0007201].
- [83] M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 961. doi:10.1103/RevModPhys.64.961
- [84] J. Dias de Deus and C. Pajares, Phys. Lett. B **695** (2011) 211 doi:10.1016/j.physletb.2010.11.017 [arXiv:1011.1099 [hep-ph]].
- [85] A. Rodrigues, R. Ugoccioni and J. Dias de Deus, Phys. Lett. B **458** (1999) 402 doi:10.1016/S0370-2693(99)00626-7 [hep-ph/9812364].
- [86] T. S. Biro, H. B. Nielsen and J. Knoll, Nucl. Phys. B **245** (1984) 449. doi:10.1016/0550-3213(84)90441-3
- [87] A. Bialas and W. Czyz, Nucl. Phys. B **267** (1986) 242. doi:10.1016/0550-3213(86)90153-7
- [88] I. Bautista, J. G. Milhano, C. Pajares and J. Dias de Deus, Phys. Lett. B **715** (2012) 230 doi:10.1016/j.physletb.2012.07.029 [arXiv:1204.1457 [nucl-th]].

- 
- [89] C. Albajar *et al.* [UA1 Collaboration], Nucl. Phys. B **335** (1990) 261. doi:10.1016/0550-3213(90)90493-W
- [90] G. J. Alner *et al.* [UA5 Collaboration], Phys. Rept. **154** (1987) 247. doi:10.1016/0370-1573(87)90130-X
- [91] B. I. Abelev *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. C **79** (2009) 034909 doi:10.1103/PhysRevC.79.034909 [arXiv:0808.2041 [nucl-ex]].
- [92] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. D **41** (1990) 2330. doi:10.1103/PhysRevD.41.2330
- [93] K. Aamodt *et al.* [ALICE Collaboration], Eur. Phys. J. C **68** (2010) 89 doi:10.1140/epjc/s10052-010-1339-x [arXiv:1004.3034 [hep-ex]].
- [94] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], JHEP **1002** (2010) 041 doi:10.1007/JHEP02(2010)041 [arXiv:1002.0621 [hep-ex]].
- [95] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 022002 doi:10.1103/PhysRevLett.105.022002 [arXiv:1005.3299 [hep-ex]].
- [96] J. Adam *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Lett. B **753** (2016) 319 doi:10.1016/j.physletb.2015.12.030 [arXiv:1509.08734 [nucl-ex]].
- [97] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **751** (2015) 143 doi:10.1016/j.physletb.2015.10.004 [arXiv:1507.05915 [hep-ex]].
- [98] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Eur. Phys. J. C **72** (2012) 2164 doi:10.1140/epjc/s10052-012-2164-1 [arXiv:1207.4724 [hep-ex]].
- [99] A. M. Sirunyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Rev. D **96** (2017) no.11, 112003 doi:10.1103/PhysRevD.96.112003 [arXiv:1706.10194 [hep-ex]].
- [100] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Eur. Phys. J. C **74** (2014) no.6, 2847 doi:10.1140/epjc/s10052-014-2847-x [arXiv:1307.3442 [hep-ex]].
- [101] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **128** (1962) 2425. doi:10.1103/PhysRev.128.2425
- [102] H. G. Dosch, Phys. Lett. B **190** (1987) 177. doi:10.1016/0370-2693(87)90863-X
- [103] A. Bialas, Phys. Lett. B **466** (1999) 301 doi:10.1016/S0370-2693(99)01159-4 [hep-ph/9909417].
- [104] J. Dias de Deus and C. Pajares, Phys. Lett. B **642** (2006) 455 doi:10.1016/j.physletb.2006.10.018 [hep-ph/0607101].
- [105] R. P. Scharenberg, B. K. Srivastava and A. S. Hirsch, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1510 doi:10.1140/epjc/s10052-010-1510-4 [arXiv:1006.3260 [nucl-ex]].
- [106] P. Braun-Munzinger, J. Stachel and C. Wetterich, Phys. Lett. B **596** (2004) 61 doi:10.1016/j.physletb.2004.05.081 [nucl-th/0311005].
- [107] I. Bautista, A. F. Téllez and P. Ghosh, Phys. Rev. D **92** (2015) no.7, 071504 doi:10.1103/PhysRevD.92.071504 [arXiv:1509.02278 [nucl-th]].
- [108] D. Kharzeev, E. Levin and K. Tuchin, Phys. Rev. C **75** (2007) 044903 doi:10.1103/PhysRevC.75.044903 [hep-ph/0602063].
- [109] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199 Erratum: [Commun. Math. Phys. **46** (1976) 206]. doi:10.1007/BF02345020, 10.1007/BF01608497
- [110] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14** (1976) 870. doi:10.1103/PhysRevD.14.870
-

- [111] A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. D **80** (2009) 014504 doi:10.1103/PhysRevD.80.014504 [arXiv:0903.4379 [hep-lat]].
- [112] J. Dias de Deus, A. S. Hirsch, C. Pajares, R. P. Scharenberg and B. K. Srivastava, Eur. Phys. J. C **72** (2012) 2123. doi:10.1140/epjc/s10052-012-2123-x
- [113] D. Teaney, Phys. Rev. C **68** (2003) 034913 doi:10.1103/PhysRevC.68.034913 [nucl-th/0301099].
- [114] T. Schfer and D. Teaney, Rept. Prog. Phys. **72** (2009) 126001 doi:10.1088/0034-4885/72/12/126001 [arXiv:0904.3107 [hep-ph]].
- [115] R. A. Lacey *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 092301 doi:10.1103/PhysRevLett.98.092301 [nucl-ex/0609025].
- [116] P. Romatschke and U. Romatschke, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 172301 doi:10.1103/PhysRevLett.99.172301 [arXiv:0706.1522 [nucl-th]].
- [117] I. Bautista, J. D. de Deus and C. Pajares, Eur. Phys. J. C **72** (2012) 2038 doi:10.1140/epjc/s10052-012-2038-6 [arXiv:1102.3837 [hep-ph]].
- [118] P. Danielewicz and M. Gyulassy, Phys. Rev. D **31** (1985) 53. doi:10.1103/PhysRevD.31.53
- [119] V. Greco, M. Colonna, M. Di Toro and G. Ferini, Prog. Part. Nucl. Phys. **62** (2009) 562 doi:10.1016/j.ppnp.2008.12.029 [arXiv:0811.3170 [hep-ph]].
- [120] M. Cheng *et al.*, Phys. Rev. D **81** (2010) 054504 doi:10.1103/PhysRevD.81.054504 [arXiv:0911.2215 [hep-lat]].
- [121] R. P. Scharenberg, PoS CPOD **2013** (2013) 017. doi:10.22323/1.185.0017
- [122] B. K. Srivastava, Nucl. Phys. A **926** (2014) 142 doi:10.1016/j.nuclphysa.2014.04.029 [arXiv:1402.2306 [nucl-ex]].
- [123] R. V. Gavai, S. Gupta and S. Mukherjee, Phys. Rev. D **71** (2005) 074013 doi:10.1103/PhysRevD.71.074013 [hep-lat/0412036].
- [124] T. Koide, AIP Conf. Proc. **1312** (2010) no.1, 27 doi:10.1063/1.3533203 [arXiv:1009.4643 [hep-ph]].
- [125] G. S. Denicol, T. Kodama, T. Koide and P. Mota, J. Phys. G **35** (2008) 115102 doi:10.1088/0954-3899/35/11/115102 [arXiv:0807.3120 [hep-ph]].
- [126] S. Pu, T. Koide and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **81**, 114039 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.81.114039 [arXiv:0907.3906 [hep-ph]].
- [127] L. Herrera and D. Pavon, Phys. Rev. D **64** (2001) 088503 doi:10.1103/PhysRevD.64.088503 [gr-qc/0102026].
- [128] L. Herrera and D. Pavon, Physica A **307** (2002) 121 doi:10.1016/S0378-4371(01)00614-8 [gr-qc/0111112].
- [129] T. Koide, G. S. Denicol, P. Mota and T. Kodama, Phys. Rev. C **75** (2007) 034909 doi:10.1103/PhysRevC.75.034909 [hep-ph/0609117].
- [130] G. S. Denicol, T. Kodama, T. Koide and P. Mota, J. Phys. G **36** (2009) 035103 doi:10.1088/0954-3899/36/3/035103 [arXiv:0808.3170 [hep-ph]].
- [131] S. Pratt, Phys. Rev. C **77** (2008) 024910 doi:10.1103/PhysRevC.77.024910 [arXiv:0711.3911 [nucl-th]].
- [132] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets and M. A. Stephanov, JHEP **0804** (2008) 100 doi:10.1088/1126-6708/2008/04/100 [arXiv:0712.2451 [hep-th]].

- [133] M. Natsuume and T. Okamura, Phys. Rev. D **77** (2008) 066014 Erratum: [Phys. Rev. D **78** (2008) 089902] doi:10.1103/PhysRevD.78.089902 , 10.1103/PhysRevD.77.066014 [arXiv:0712.2916 [hep-th]].
- [134] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta, Phys. Rev. D **80** (2009) 126002 doi:10.1103/PhysRevD.80.126002 [arXiv:0908.2646 [hep-ph]].
- [135] W. Israel and J. M. Stewart, Annals Phys. **118** (1979) 341. doi:10.1016/0003-4916(79)90130-1
- [136] G. S. Denicol, T. Koide and D. H. Rischke, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 162501 doi:10.1103/PhysRevLett.105.162501 [arXiv:1004.5013 [nucl-th]].
- [137] T. Osada, Phys. Rev. C **81** (2010) 024907 doi:10.1103/PhysRevC.81.024907 [arXiv:0911.2303 [nucl-th]].
- [138] Y. Hidaka and T. Kunihiro, Phys. Rev. D **83** (2011) 076004 doi:10.1103/PhysRevD.83.076004 [arXiv:1009.5154 [hep-ph]].
- [139] T. Koide, Phys. Rev. E **75** (2007) 060103 doi:10.1103/PhysRevE.75.060103 [nucl-th/0703038].
- [140] T. Koide and T. Kodama, Phys. Rev. E **78** (2008) 051107 doi:10.1103/PhysRevE.78.051107 [arXiv:0806.3725 [cond-mat.stat-mech]].
- [141] T. Koide, E. Nakano and T. Kodama, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 052301 doi:10.1103/PhysRevLett.103.052301 [arXiv:0901.3707 [hep-th]].
- [142] X. G. Huang, T. Kodama, T. Koide and D. H. Rischke, Phys. Rev. C **83** (2011) 024906 doi:10.1103/PhysRevC.83.024906 [arXiv:1010.4359 [nucl-th]].
- [143] G. S. Denicol, X. G. Huang, T. Koide and D. H. Rischke, Phys. Lett. B **708** (2012) 174 doi:10.1016/j.physletb.2012.01.018 [arXiv:1003.0780 [hep-th]].
- [144] T. Koide, Phys. Rev. E **72**, 026135 (2005) doi:10.1103/PhysRevE.72.026135 [cond-mat/0501696].
- [145] X. G. Huang and T. Koide, Nucl. Phys. A **889** (2012) 73 doi:10.1016/j.nuclphysa.2012.07.005 [arXiv:1105.2483 [hep-th]].
- [146] A. Buchel, Phys. Lett. B **663** (2008) 286 doi:10.1016/j.physletb.2008.03.069 [arXiv:0708.3459 [hep-th]].
- [147] P. Huovinen, J. Phys. Conf. Ser. **798** (2017) no.1, 012063. doi:10.1088/1742-6596/798/1/012063
- [148] J. Casalderrey-Solana, Gioi Publishers (2010) Conference: C10-03-13, p.347-350
- [149] Y. Akamatsu, A. Mazeliauskas and D. Teaney, Phys. Rev. C **97** (2018) no.2, 024902 doi:10.1103/PhysRevC.97.024902 [arXiv:1708.05657 [nucl-th]].
- [150] S. Borsanyi *et al.*, Nature **539** (2016) no.7627, 69 doi:10.1038/nature20115 [arXiv:1606.07494 [hep-lat]].