Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

La relación de L-equivalencia de espacios topológicos

Tesis

Que para obtener el Título de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta
Rodrigo Hidalgo Linares

Director de Tesis
Dr. Oleg Okunev

Puebla, Puebla Septiembre 2023

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

RODRIGO HIDALGO LINARES

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 24 de agosto de 2023, con la tesis titulada:

"LA RELACIÓN DE L-EQUIVALENCIA DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 24 de agosto de 2023

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

D*REC/mtrv

A mi madre

Agradecimientos

> "Como resultado del espíritu valerosamente crítico que poseemos, hemos superado la noción de que las verdades matemáticas tienen una existencia independiente y separada de nuestras propias mentes. Todavía nos resulta extraño que semejante noción haya existido alguna vez. Sin embargo, esto es lo que Pitágoras debe haber pensado, al igual que Descartes y centenares de otros grandes matemáticos anteriores al siglo XIX. Hoy las matemáticas son ilimitadas: han roto sus cadenas. Cualquiera que sea su esencia, reconocemos que ésta es tan libre como la mente y tan penetrante como la imaginación... La matemática ahora puede ser considerada como una guía desastrosamente incompleta, aunque enormemente útil, de un país que en su mayor parte permanece inexplorado. Se han fijado algunas señales. La vasta red de caminos es parcialmente comprensible; hay señales para el perplejo viajero... Sin embargo, finalmente, las matemáticas alcanzan pináculos tan elevados como los logrados por la imaginación de sus mas osados exploradores. Y esto encierra, quizá, la última paradoja de la ciencia, puesto que en su prosaico tráfago, tanto la lógica como las matemáticas dejan atrás, frecuentemente, a su avanzada y muestran que el mundo de la razón pura es más extraño aún que el mundo de la fantasía pura."
>
> Edward Kasner y James Newman (Mathematics and the Imagination).

Debe existir un punto en el que los agradecimientos y dedicatorias no puedan encontrar destinatarios específicos, ya que resulta imposible reconocer a todos y a todo lo que nos ha traído hasta este momento. Sin embargo, por lo que a mi respecta, no tengo más que un sincero respeto y una gratitud inmensa para todos y cada uno de los que han aportado algo para la realización de este trabajo, que indudablemente contiene una pequeña o gran parte de nuestras interacciones. Así pues, confío en que su lectura brinde una ventana a esta travesía por una región casi desconocida de la topología general que, de ser explorada un poco más, se nos revelará como una nueva maravilla de las matemáticas.

Introducción

Las relaciones de A-, V-, L- y ℓ-equivalencia de espacios topológicos[1] derivan de la construcción de objetos algebraico-topológicos libres como los grupos abelianos topológicos libres $A(X)$, los espacios vectoriales topológicos libres $V(X)$, los espacios localmente convexos libres $L(X)$ y los espacios vectoriales topológicos débiles libres $L_p(X)$. Este trabajo examina los fundamentos de la relación de L-equivalencia de espacios topológicos, así como la conexión que posee con las otras relaciones de equivalencia algebraico-topológicas libres con el objetivo de clarificar la situación actual de estos entes matemáticos que, a pesar de sus notables similitudes entre sí, parecen diferenciarse lo suficiente como para considerarlos objetos separados en la investigación actual.

La idea central de la tesis es extender y generalizar los métodos ya existentes en el estudio de las relaciones de A- y ℓ-equivalencia para atacar problemas característicos de la relación de L-equivalencia. Un ejemplo es la exploración de la posición que posee la relación de L-equivalencia respecto de las demás y averiguar si dicha relación es equivalente a alguna de las otras relaciones ya mencionadas, lo que también permitirá situar a la relación de V-equivalencia respecto de sus semejantes.

Los métodos creados en esta tesis se aplican en la búsqueda de invariantes topológicos que se preservan mediante éstas relaciones de equivalencia y, dada la reciente aparición y el creciente interés en la investigación de los espacios vectoriales topológicos libres, también se emplean en el análisis de las diferencias y semejanzas entre las estructuras topológicas de $V(X)$ y $L(X)$ mediante el estudio del comportamiento de sus subconjuntos compactos.

Por otro lado, la relación de L-equivalencia sigue siendo relativamente desconocida, sinceramente desconozco las razones, pero creo que tienen que ver con su historia: nos situaremos en 1941 con una nota de A. A. Markov donde mencionaba y esbozaba la prueba de la existencia y unicidad de tres estructuras algebraico-topológicas libres asociadas a un

[1]También existen las relaciones de A-, V-, L- y ℓ-equivalencia de funciones continuas entre espacios topológicos.

espacio de Tychonoff X: **el grupo topológico libre** $F(X)$, **el grupo abeliano topológico libre** $A(X)$ y **el espacio localmente convexo libre** $L(X)$, por alguna razón, que a día de hoy es desconocida, cuando el artículo [21] apreció en 1945 no incluía material alguno sobre el espacio localmente convexo libre y el interés de los matemáticos de la época se volcó sobre los grupos topológicos libres y los grupos abelianos topológicos libres.

Este interés llevaría a modificar la complicada prueba de Markov y dar nuevos acercamientos que permiten la construcción de los grupos (abelianos) topológicos libres. De estos nuevos enfoques destaca el realizado por M. I. Graev en [15] quién además solucionó uno de los problemas propuestos por Markov:

> ¿Los grupos (abelianos) topológicos libres de dos espacios de Tychonoff son topológicamente isomorfos si y sólo si estos espacios son homeomorfos?

Graev mostró que la respuesta es un contundente **NO**, pues creó un ejemplo de dos espacios de Tychonoff X y Y, no homeomorfos, de modo que sus grupos topológicos libres $F(X)$ y $F(Y)$ son isomorfos topológicamente. Dos espacios X y Y se dicen M-equivalentes si sus grupos topológicos libres $F(X)$ y $F(Y)$ son isomorfos topológicamente[2]. Dicho ejemplo pondría de manifiesto dos cosas fundamentales en el estudio de estas relaciones de equivalencia:

1. Existen propiedades topológicas que no se preservan mediante las relaciones de A- y M-equivalencia. Decimos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es un M-invariante o que se preserva mediante la relación de M-equivalencia[3], si dados dos espacios topológicos X y Y que son M-equivalentes, entonces X tiene la propiedad topológica $\mathcal{P}$ si y sólo si Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

2. La necesidad de encontrar a aquellas propiedades topológicas que sean M-invariantes.

Si bien, todo lo anterior se puede extender al estudio de los espacios localmente convexos libres, a la investigación de la relación de L-equivalencia y a la búsqueda de L-invariantes, la investigación de estos temas no sucedió así: la prueba de la existencia y unicidad del espacio localmente convexo libre no llegarías hasta 1964 con los trabajos de D. A. Raĭkov[4]. Aunque el trabajo de Raĭkov es bastante bueno nadie siguió

[2] Las nociones de espacios A-, V-, L- y ℓ-equivalentes se definen de forma análoga.

[3] Las propiedades A-, V-, L- y ℓ-invariantes se definen de una manera completamente similar.

[4] Y con algunas apariciones implícitas en los trabajos de R. Arens y J. Eells (1956) y E. Michael (1963).

está línea de investigación y el estudio de la estructura topológica de los espacios localmente convexos libres se volvería un tópico central sólo hasta la década de los años 80 con los trabajos de V. V. Uspenskii [33] y J. Flood [12], incluso cabe mencionar que éstos trabajos se centran en cuestiones que surgen del análisis funcional y no en cuestiones propias de su topología, como muestra tenemos que Uspenskii se centró en estudiar la completación (en el sentido de uniformidades) del espacio $L(X)$, dicha completación se corresponde con el espacio de medidas de Radón $M(\mu X)$ sobre la completación de Dieudonné μX del espacio X, y Flood se centró en asentar las bases de una teoría elemental de integración en el espacio $M(X)$. Obviamente ambos produjeron resultados interesantísimos, por ejemplo: Uspenskii probó que la relación de L-equivalencia es más fuerte[5] que la relación de ℓ-equivalencia e incluso mostró que existen espacios ℓ-equivalentes que no son L-equivalentes, por su lado, Flood atacó el problema de la construcción de los espacios localmente convexos libres mediante métodos categóricos, simplificando, de este modo, todas las construcciones anteriores de las estructuras algebraico-topológicas libres.

En cambio, resultan bastante curiosos los inicios de la relación de L-equivalencia, pues su estudio no surge como un análogo a la investigación de las relaciones de A- o M-equivalencia, sino que emergen del estudio de la relación de ℓ-equivalencia [32]. Incluso se sabe que la relación de ℓ-equivalencia se vinculó primero al análisis de las relaciones de A- y M-equivalencia, y es sorprendente que este vinculo no se realizara mediante los espacios $L_p(X)$ sino mediante los espacios $C_p(X)$[6].

Habiéndose establecido la relación de L-equivalencia como un objeto de estudio para la comunidad matemática aparecieron varias cuestiones que son el objeto de esta tesis:

1. ¿La relación de A-equivalencia es más fuerte, más débil o equivalente a la relación de L-equivalencia?

2. La búsqueda de propiedades invariantes bajo éstas relaciones de equivalencia y, en especial, la demostración de que ciertas propiedades no lo son, condujo a la invención de métodos de creación de ejemplos de espacios equivalentes, el primero en surgir fue el de Graev [15] (espacios M- y A-equivalentes), pero sin duda los métodos de Okunev [24] (espacios M- y A-equivalentes) y de Arhangel'skii [2] (espacios ℓ-equivalentes) son los más fructíferos hasta

[5] Dadas dos relaciones como la M-, A-, V-, L- o ℓ-equivalencia, diremos que una relación es más fuerte que otra si dados dos espacios equivalentes bajo la primer relación, entonces también son equivalentes bajo la segunda.

[6] Este vínculo es válido dado que los espacios $L_p(X)$ y $C_p(X)$ están en dualidad, es decir, el dual topológico del espacio $L_p(X)$ es topológicamente isomorfo a $C_p(X)$ y viceversa. El espacio $C_p(X)$ es el espacio de funciones continuas de valores reales sobre el espacio X dotado de la topología de la convergencia puntual.

el momento. Aunque los métodos de Graev y de Okunev también brindan ejemplos de espacios L-equivalentes no son los idóneos para generar ejemplos de espacios L-equivalentes ya que usan nociones muy restrictivas como la de retracto, por otro lado, el método de Arhangel'skii usa la noción de conjunto ℓ-encajado y este concepto no congenia muy bien con los espacios localmente convexos libres[7]. Por lo tanto, existe la necesidad de obtener un método de creación de ejemplos de espacios L-equivalentes que use nociones propias conectadas con los espacios localmente convexos libres.

3. La aparición de los espacios vectoriales topológicos libres en 2017 con los trabajos de S. A. Morris y S. S. Gabriyelyan [14] pone de manifiesto que las estructuras de los espacios $V(X)$ y $L(X)$ son similares en ciertos aspectos, sin embargo, parece que el comportamiento de los subconjuntos compactos en $V(X)$ se asemeja más al comportamiento de los subconjuntos compactos en $A(X)$ que a su comportamientos en $L(X)$. Dado lo anterior, resulta de interés investigar esta situación y posicionar a la relación de V-equivalencia respecto de las demás.

4. S. A. Morris propuso el estudio de los grupos topológicos libres sobre variedades en [23], este enfoque generaliza los enfoques anteriores y, por ejemplo, muestra que el grupo abeliano topológico libre no es más que el grupo topológico libre en la variedad de los grupos abelianos topológicos. De modo similar puede verse que el espacio $L_p(X)$ es el espacio localmente convexo libre en la variedad de los espacios vectoriales dotados de su topología débil. Luego, podemos utilizar lo anterior para analizar la relación de L-equivalencia con resultados obtenidos previamente para la relación de ℓ-equivalencia y viceversa.

Finalmente, debemos mencionar que la investigación en ésta área está lejos de ser predecible o trivial pues tiene un gran vínculo con las equivalencias funcionales[8], además, existe un gran limbo donde abundan propiedades no multiplicativas y para las cuales aún no hay un camino claro que nos ayude a determinar si son L-invariantes o no.

[7] Esta afirmación cobrará sentido cuando se trate el estudio de los L-retractos y de los conjuntos L-encajados.

[8] Las equivalencias funcionales como la ℓ-, u- o t-equivalencia son relaciones de equivalencia que surgen del análisis de los espacios de funciones y sus diferentes tipos de homeomorfismos: homeomorfismos lineales para la relación de ℓ-equivalencia, homeomorfismos uniformes para la relación de u-equivalencia y homeomorfismos topológicos para la relación de t-equivalencia.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El lector interesado en este trabajo debe considerar que se necesitan conocimientos básicos sobre la teoría de los espacios vectoriales topológicos, en particular, necesita conocer aspectos esenciales sobre los espacios localmente convexos, para una excelente introducción se puede consultar el libro “Topological Vector Spaces” de H. Schaefer [28]. Cualquier espacio vectorial topológico se toma como un espacio definido sobre el campo de los números reales. Por lo demás, conocer el Teorema del funtor adjunto (de Freyd), así como las nociones básicas de la teoría de categorías no está demás, sin embargo, emplearemos la construcción del espacio localmente convexo libre que J. Flood siguió en su tesis doctoral “Free Topological Vector Spaces” [12].

Todos los espacios topológicos considerados serán espacios de Tychonoff, es decir, espacios completamente regulares y de Hausdorff. Tomaremos en consideración que el conjunto $\mathbb{N}$ está formado por todos los enteros positivos mientras que ω denotará al primer ordinal infinito, por otro lado, $\mathbb{R}$ representa tanto al campo de los números reales como a la línea real con su topología usual. En cuanto a la notación, ésta sigue las mismas lineas que el gran libro “General Topology” de R. Engelking [11], sin embargo y de ser necesario, si $Y \subset X$, entonces $[Y]_X$ denota a la cerradura del conjunto Y en el espacio X.

1.1. Espacios algebraico-topológicos libres

Siguiendo la definición moderna, diremos que el **espacio localmente convexo libre sobre el espacio topológico** X es un pareja formada por un espacio localmente convexo $L(X)$ y una función continua $\delta_X : X \to L(X)$ tal que cada función continua $f : X \to E$ hacia un espacio localmente convexo E se puede extender a una función lineal y continua $f_{\#}\colon L(X) \to E$ de modo que $f = f_{\#} \circ \delta_X$, es decir, de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
L(X) \arrow[dr, dashed, "f_{\#}"] & \\
X \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[r, "f"'] & E
\end{tikzcd}$$

El espacio localmente convexo libre siempre existe y es esencialmente único (salvo isomorfismo topológico), por otro lado, el mapeo continuo δ_X usualmente recibe el nombre de **encaje de Dirac** [12] ya que es un encaje topológico que toma al espacio topológico X y lo sitúa como un subconjunto cerrado de $L(X)$ y a la vez como una base de Hamel del espacio vectorial $L(X)$. Es común identificar a cada elemento de X con su imagen en $L(X)$ [12, 33], de hecho, en la literatura [2, 3] es frecuente establecer que todo elemento de $L(X)$ es una **suma formal** (o **combinación lineal**) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Las restantes estructuras algebraico-topológicas libres como el **grupo topológico libre** $F(X)$, el **grupo abeliano topológico libre** $A(X)$, el **espacio vectorial topológico libre** $V(X)$ y el **espacio vectorial topológico débil libre** $L_p(X)$ sobre el espacio topológico X se definen de forma completamente similar, sólo nos debemos restringir a las categorías adecuadas. Incluso se tiene que el encaje de Dirac convierte a X en un subespacio cerrado de dichas estructuras, y lo mantiene como un conjunto generador o base de Hamel, según sea el caso. Además, dichas estructuras siempre existen y son únicas salvo isomorfismo topológico.

Los espacios X y Y se dicen **M-equivalentes** (respectivamente **A-equivalentes**, **V-equivalentes**, **L-equivalentes** y **ℓ-equivalentes**) si sus grupos topológicos libres (respectivamente sus grupos abelianos topológicos libres, sus espacios vectoriales topológicos libres, sus espacios localmente convexos libres y sus espacios vectoriales topológicos débiles libres) son isomorfos topológicamente. Lo anterior será denotado por $X \overset{M}{\sim} Y$ (respectivamente $X \overset{A}{\sim} Y$, $X \overset{V}{\sim} Y$, $X \overset{L}{\sim} Y$ y $X \overset{\ell}{\sim} Y$).

Debemos mencionar que la notación que se usa en la investigación sobre los diferentes espacios vectoriales topológicos libres difiere en ocasiones de la notación utilizada en la investigación sobre los grupos topológicos libres, por esta razón, este trabajo también cumple la función de unificar la notación de textos clásicos como [1, 3, 5, 14, 15]. Para lo anterior hemos convenido en agregar unas cuantas definiciones más.

En lo que sigue se supondrá que toda combinación lineal se encuentra en su **forma reducida**, esto es, si $\alpha = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \in L(X)\backslash\{0\}$, entonces $\lambda_i \neq 0$ y $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, el conjunto de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ se conoce como el **conjunto soporte** de α y se denotará por $supp(\alpha)$, de forma similar, para $A \subset L(X)$ tendremos que $supp(A) = \bigcup\{supp(\alpha) : \alpha \in A\}$, y diremos que la **longitud de una combinación lineal** es n si la cardinalidad del conjunto soporte de dicha combinación lineal es n.

También definimos una norma $\|\cdot\|$ en $L(X)$ como $\| \alpha \| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$, donde $\alpha = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, el Lema 6.3 de [14] establece el hecho de que esta norma convierte conjuntos compactos de $L(X)$ en subconjuntos acotados de la línea real.

Lo anterior permite definir a los conjuntos $L_n(X)$ ($A_n(X)$, $V_n(X)$), $n \in \omega$, como los subespacios de $L(X)$ ($A(X)$, $V(X)$) formados por todas las combinaciones lineales de longitud a lo más n. Claramente, el elemento cero está formado por la combinación lineal nula, tiene longitud cero y $L_0(X) = \{0\}$ ($A_0(X) = \{0\}$, $V_0(X) = \{0\}$). En este sentido diremos que los espacios X y Y son **fuertemente L-equivalentes** (**fuertemente A-equivalentes**, **fuertemente V-equivalentes**) si existe un isomorfismo topológico $\psi \colon L(X) \to L(Y)$ tal que $\psi(X) \subset L_m(Y)$ and $\psi^{-1}(Y) \subset L_n(X)$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$. Éstas equivalencias en sentido fuerte se denotan por $X \overset{L}{\approx} Y$, $X \overset{A}{\approx} Y$ y $X \overset{V}{\approx} Y$.

Como mencionamos antes, deseamos uniformizar la notación usada, para esto definimos los mapeos:

$$\begin{gathered} \phi_n^A \colon X^n \times \mathbb{Z}^n \to A_n(X), \\ \phi_n^A(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} \phi_n^V \colon X^n \times \mathbb{R}^n \to V_n(X), \\ \phi_n^V(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \phi_n^L \colon X^n \times \mathbb{R}^n \to L_n(X), \\ \phi_n^L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Declaramos que una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es un **M-invariante** o que se preserva mediante la relación de M-equivalencia, si dados dos espacios topológicos X y Y que son M-equivalentes, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$. De este modo, cualquier propiedad topológica que se preserve por medio de las relaciones de A-, V-, L- o ℓ-equivalencia será un **A-**, **V-**, **L-** o **ℓ-invariante**. Así mismo, las propiedades que se preserven mediante las relaciones de A-, V- o L-equivalencia en sentido fuerte se denominarán **A-**, **V-** o **L-invariantes en sentido fuerte**.

1.2. La topología de $L(X)$

A continuación describiremos de manera breve cómo es la topología de $L(X)$ y las relaciones que podemos establecer entre las diferentes nociones de espacio vectorial topológico libre.

La topología de $L(X)$ es localmente convexa y, por lo tanto, se puede identificar con la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos del dual topológico de $L(X)$ [28, p. 127]. Afortunadamente, podemos identificar al dual topológico de $L(X)$ con el conjunto $C(X)$ formado por todas las funciones continuas de valores reales definidas sobre X [12]. Más aún, la topología de $L(X)$ se define como la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos equicontinuos y acotados puntualmente de $C(X)$ [33]. Para poder describir esta topología únicamente necesitamos conocer cómo son los abiertos básicos al rededor de cero, estos abiertos básicos siempre están dados en términos de un número $\varepsilon > 0$ y un subconjunto equicontinuo acotado puntualmente $F \subset C(X)$:

$$V[0,F,\varepsilon] = \{\alpha \in L(X) : |\alpha(f)| = |f_{\#}(\alpha)| < \varepsilon, f \in F\}.$$

Al conjunto $C(X)$ dotado de la topología de la convergencia puntual se le denota por $C_p(X)$ y es frecuente identificar al dual topológico débil de $L(X)$ con el espacio $C_p(X)$ [33]. Por otro lado, se puede verificar que el dual topológico de $C_p(X)$ coincide con el espacio $L_p(X)$ y es normal encajar a $L_p(X)$ como un subespacio cerrado de $C_p(C_p(X))$ [3], incluso, se puede comprobar que el espacio $L(X)$ dotado de su topología débil se puede identificar con $L_p(X)$ [33].

Dadas las definiciones de los espacios $V(X)$, $L(X)$ y $L_p(X)$ se puede ver que las identidades $\mathrm{id}\colon X \to L_p(X)$ y $\mathrm{id}\colon X \to L(X)$ se pueden extender de manera lineal y continua a $\mathrm{id}_{\#}\colon L(X) \to L_p(X)$ y $\mathrm{id}_{\#}\colon V(X) \to L(X)$, respectivamente, de este modo queda probado que el conjunto subyacente a las tres estructuras $V(X)$, $L(X)$ y $L_p(X)$ es el mismo. Para una descripción detallada de la topología de $L_p(X)$ el lector interesado puede consultar la sublime monografía "Topological Function Spaces" de A. V. Arhangels'kii [3] y para consultar detalles sobre la topología de $V(X)$ el lector puede asesorarse con el reciente artículo "Free Topological Vector Spaces" de S. S. Gabriyelyan y S. A. Morris [14].

Capítulo 2

L-retractos

Las relaciones de L- y ℓ-equivalencia son muy similares, sin embargo, como ya hemos mencionado, también tienen disonancias que enriquecen la teoría, una de estas disonancias tiene que ver con la conexión entre el concepto de conjunto ℓ-encajado y el concepto de retracto, si bien los conjuntos ℓ-encajados surgen como una generalización de los retractos usuales, su estudio sólo ha mostrado tener un lugar privilegiado en el estudio de la relación de ℓ-equivalencia y en el estudio de la C_p-theory (estudio de los espacios de funciones dotados de su topología débil). El objetivo de este capítulo es analizar el concepto de conjunto ℓ-encajado y obtener una generalización del concepto de retracto que se pueda utilizar en el estudio de la relación de L-equivalencia, y de ser posible, en el estudio de las relaciones de A- y V-equivalencia.

Sea X un espacio topológico y Y un subconjunto de él, un **extensor de funciones** es un mapeo $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ tal que $\phi(f)|Y = f$ para cada $f \in C_p(Y)$. Dada la estructura lineal de los espacios C_p, tenemos que los extensores de funciones (o simplemente extensores) pueden ser lineales o no, sin embargo, lo que debe interesarnos es si dichos extensores son continuos o no. Bajo las hipótesis anteriores, si existe un extensor continuo $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ diremos que Y es un **subconjunto t-encajado** de X, o que Y está t-encajado en X, si dicho extensor es lineal y continuo, entonces declaramos que Y es un **subconjunto ℓ-encajado** de X, o que Y está ℓ-encajado en X. Un hecho básico es que todo conjunto ℓ-encajado es un conjunto t-encajado, y que todo conjunto t-encajado debe ser cerrado [2].

A partir del esquema de definición que se hizo al momento de introducir los espacios localmente convexos libres, y del hecho de que los espacios $L_p(X)$ y $C_p(X)$ estén en dualidad, podemos ver que todo espacio topológico X está ℓ-encajado en $L_p(X)$, el extensor lineal y continuo que buscamos es $\phi\colon C_p(X) \to C_p(L_p(X))$ definido por $\phi(f) = f_{\#}$. Por otro lado, si Y está ℓ-encajado en X, entonces todo extensor lineal y continuo $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ puede ser transformado en una función lineal y continua $r\colon L_p(X) \to L_p(Y)$ por medio de un mapeo dual con la fórmula $r(\alpha) = \alpha \circ \phi$ [3], esto es, si Y es un conjunto ℓ-encajado en X, entonces $L_p(Y)$ es un retracto de $L_p(X)$. La discusión anterior puede utilizarse para probar las siguientes afirmaciones:

Proposición 2.1. Sea Y un subespacio de X. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Y es un subconjunto ℓ-encajado de X;
2. Existe una retracción lineal y continua $r\colon L_p(X) \to L_p(Y)$;
3. Existe una función continua $f\colon X \to L_p(Y)$ tal que $f|Y = \delta_Y\colon Y \to L_p(Y)$ (el encaje de Dirac de Y en $L_p(Y)$);
4. Toda función continua de Y en un espacio vectorial topológico débil E se puede extender a un mapeo continuo de X en E.

La dualidad entre los espacios $L_p(X)$ y $C_p(X)$ es tal que la definición de la relación de ℓ-equivalencia se puede re-formular como sigue: dos espacios X y Y se dicen ℓ-equivalentes si sus espacios de funciones $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son isomorfos topológicamente. Como ya mencionamos, el espacio $L_p(X)$ no es más que el espacio localmente convexo libre sobre X pero dotado de su topología débil, luego, podemos afirmar que si dos espacios son L-equivalentes, entonces son ℓ-equivalentes. Por otro lado, no todos los espacios que son ℓ-equivalentes son L-equivalentes, el primer ejemplo de espacios con estas cualidades fue mostrado por Uspenskii en [33], este ejemplo se estableció mediante el método de creación de ejemplos de espacios ℓ-equivalentes de Arhangel'skii, y de hecho, una de las intenciones que tenemos al diseñar un método de creación de ejemplos de espacios L-equivalentes es encontrar espacios L-equivalentes que no sean A-equivalentes ni V-equivalentes.

Así pues, nuestro método seguirá las directrices ya establecidas anteriormente por métodos similares como los de Okunev [24] y de Arhangel'skii [2], para esto nos basaremos en una observación de carácter muy general pero que promete ser de utilidad para el estudio de otras relaciones como la A- y la V-equivalencia.

Observación 2.2. Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos y consideremos un funtor $\mathbf{B}\colon \mathbf{Tych} \to \mathcal{C}$ que parte de la clase de los espacios de Tychonoff hacia la clase $\mathcal{C}$ y que a cada espacio $X \in \mathbf{Tych}$ le asigna un espacio $B(X) \in \mathcal{C}$ de modo que $B(X)$ contiene una copia cerrada de X (existe un encaje topológico $i\colon X \to B(X)$ tal que $i(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$) y de modo que toda función continua $f\colon X \to E$,

$E \in \mathcal{C}$, se extiende mediante un morfismo continuo $f_\# \colon B(X) \to E$ que satisface $f = f_\# \circ i$.

Si $Y \subset X$ es un subespacio tal que la estructura $B(Y)$ se encaja como un subespacio de $B(X)$ diremos que Y está **B-encajado** en X, más aún, si toda función continua $f \colon Y \to E$, donde $E \in \mathcal{C}$, posee una extensión continua $\tilde{f} \colon X \to E$, diremos que Y es un **retracto B-valuado** (o **B-retracto**) de X. De este modo, una función continua $r \colon X \to B(Y)$ será una **B-retracción** si la restricción de r a Y coincide con el encaje de Y en $B(Y)$ y además existe un morfismo continuo $r_\# \colon B(X) \to B(Y)$ que extiende a r.

En particular, cuando $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios localmente convexos, diremos que un conjunto $Y \subset X$ está **L-encajado** en X si existe un encaje topológico $j \colon L(Y) \to L(X)$, debemos notar que, en general, este tipo de inclusiones sólo son continuas por lo que surge la necesidad de caracterizar a los conjunto L-encajados. Por otro lado, Y se dirá un **L-retracto** de X si Y está L-encajado en X y el subespacio $L(Y)$ es un retracto lineal de $L(X)$.

La Observación 2.2 también muestra que, cuando $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios vectoriales topológicos dotados de su topología débil, los conjuntos ℓ-encajados coinciden con los L_p-retractos, sin embargo, para no multiplicar la notación usaremos el nombre de conjuntos ℓ-encajados.

Para caracterizar a los conjuntos L-encajados y a los L-retractos necesitamos una definición auxiliar. Sea $Y \subset X$, decimos que Y está **P-encajado** en X si toda pseudométrica continua en Y puede extenderse a una pseudométrica continua en X. La caracterización de los conjuntos L-encajados es muy sencilla y se desprende de los resultados de [34, 35]:

Proposición 2.3. Sea Y un subespacio de X. Los siguientes enunciados son equivalentes.

- Y está L-encajado en X;
- Todo subconjunto equicontinuo acotado puntualmente de $C(Y)$ se puede extender a un subconjunto equicontinuo acotado puntualmente de $C(X)$;
- Y está P-encajado en X.

Para mostrar la diferencia entre L-retractos y conjuntos ℓ-encajados examinaremos un par de ejemplos:

Ejemplo 2.4. *Los conjuntos L-encajados no necesitan ser ℓ-encajados, en particular, no todos los conjuntos L-encajados son cerrados.*

Consideremos el espacio $X = \omega_1 + 1$ dotado de la topología del orden, y sea Y el subespacio denso ω_1. Sabemos que Y es un subespacio pseudocompacto cuya compactación de Stone-Čech es X, más aún,

$X \times X = \beta(Y \times Y)$, por ende Y está P-encajado en X, es decir, Y es un conjunto L-encajado de X, pero puesto que Y no es cerrado en X se tiene que Y no está ℓ-encajado en X.

Ejemplo 2.5. *Los conjuntos ℓ-encajados no necesitan ser L-encajados.*

Sea Y un espacio discreto no numerable y tomemos $X = L_p(Y)$. Entonces Y está ℓ-encajado en X, y X tiene la propiedad de Souslin. Debido a [18, Teorema 1.2] se observa que Y no puede ser un conjunto P-encajado de X, y por lo tanto Y no está L-encajado en X.

Otra de las razones para estudiar a los L-retractos es que los conjuntos ℓ-encajados no poseen una relación directa con los espacios localmente convexos libres, sin embargo, como veremos, los L-retractos mantienen muchas propiedades de los conjuntos ℓ-encajados y L-encajados.

Proposición 2.6. Todo L-retracto es tanto un conjunto L-encajado como ℓ-encajado. En particular, todo L-retracto es un conjunto cerrado.

Debemos admitir que desconocemos si todo conjunto L-encajado y ℓ-encajado es un L-retracto, pero sí podemos garantizar la siguiente afirmación.

Teorema 2.7. Sea Y un subespacio de X. Y es un L-retracto de X si y sólo si existe un extensor lineal y continuo $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ tal que si $B \subset C(Y)$ es un subconjunto equicontinuo y acotado puntualmente, entonces $\phi(B)$ también es un subconjunto equicontinuo acotado puntualmente de $C(X)$.

Demostración. Antes de iniciar la prueba es necesario enunciar una afirmación sobre la equicontinuidad de funciones lineales y continuas definidas en espacios vectoriales topológicos:

Teorema 2.8. [28, p. 83] Sea F un espacio vectorial topológico cuyo dual topológico es F'. Un conjunto de funciones $E \subset F'$ se dice equicontinuo si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\bigcap_{f\in E} f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ es una vecindad de cero.

Supongamos que Y es un L-retracto de X, entonces existe una L-retracción $r\colon X \to L(Y)$. Definimos $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ por medio de $\phi(f) = f_\# \circ r$, resulta que este mapeo es un extensor lineal y continuo, donde $f_\#\colon L(Y) \to \mathbb{R}$ es la extensión lineal y continua de $f \in C(Y)$ en $L(Y)$. Ahora tomemos un conjunto $B \subset C(Y)$ que sea equicontinuo y acotado puntualmente, mediante la definición de equicontinuidad de funciones lineales continuas en espacios vectoriales topológicos, es fácil notar que, dado un número $\varepsilon > 0$, el conjunto:

$$\bigcap_{g\in\phi(B)} g_\#^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = \bigcap_{f\in B} (f_\# \circ r)^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = r^{-1}\left(\bigcap_{f\in B} f_\#^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)\right)$$

es una vecindad de cero. Así, $\phi(B)$ es un subconjunto equicontinuo acotado puntualmente de $C(X)$.

Ahora sólo resta probar que si tal extensor lineal y continuo ϕ existe, entonces Y es un L-retracto de X. Recordemos que si $x \in X$, entonces el elemento $x \in L(X)$ define una función $x\colon C_p(X) \to \mathbb{R}$ que es lineal, continua y tal que $x(f) = f(x)$.

Definimos $q\colon X \to L(Y)$ mediante $q(x) = x \circ \phi$ y tomemos $r\colon L(X) \to L(Y)$ la extensión lineal y continua de q. Notemos que q está bien definida y que $r|Y$ coincide con el encaje de Dirac de Y en $L(Y)$, es decir, q es una L-retracción. Sólo falta verificar que q sea continua.

Sea $U = U[0, A, \varepsilon]$ una vecindad de cero en $L(Y)$, donde $A \subset C(Y)$ es un subconjunto equicontinuo acotado puntualmente y $\varepsilon > 0$. Como $\phi(A)$ es un subconjunto equicontinuo acotado puntualmente de $C(X)$, tenemos que el conjunto $V = V[0, \phi(A), \varepsilon]$ es una vecindad de cero en $L(X)$ tal que $r(V) \subset U$. Puesto que r es lineal y continua, podemos concluir que $r \circ \delta_X = q$ es continua y que Y es un L-retracto de X. ■

Si $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ es un extensor lineal y continuo que transforma subconjunto equicontinuos acotados puntualmente de $C(Y)$ en subconjuntos equicontinuos acotados puntualmente de $C(X)$, diremos que ϕ preserva los subconjuntos equicontinuos acotados puntualmente.

Corolario 2.9. Los espacios X y Y son L-equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo topológico $\varphi\colon C_p(X) \to C_p(Y)$ de modo que tanto φ como φ^{-1} preservan a los subconjuntos equicontinuos acotados puntualmente.

Demostración. Primero supongamos que los espacios X y Y son L-equivalentes, es decir, existe un isomorfismo topológico $\psi\colon L(X) \to L(Y)$. Consideremos el mapeo $\varphi\colon C_p(X) \to C_p(Y)$ cuya regla de correspondencia es $\varphi(f) = f_\# \circ \psi^{-1} \circ \delta_Y$. Es claro que φ es lineal, continua y que tiene por función inversa a $\varphi^{-1}(g) = g_\# \circ \psi \circ \delta_X$. Sólo hace falta probar que tanto φ como φ^{-1} preservan a los subconjuntos equicontinuos acotados puntualmente, para esto consideremos un subconjunto $A \subset C(X)$ que es equicontinuo, acotado puntualmente y tomemos un número $\varepsilon > 0$, entonces el conjunto:

$$\bigcap_{g \in \varphi(A)} g_\#^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = \bigcap_{f \in A} \left(f_\# \circ \psi^{-1}\right)^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = \psi\left(\bigcap_{f \in A} f_\#^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)\right)$$

es una vecindad de cero, esto es, $\varphi(A)$ es un subconjunto equicontinuo acotado puntualmente, con lo cual φ preserva a los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente, la prueba de que φ^{-1} tiene la misma propiedad es completamente similar.

De manera inversa, si existe un isomorfismo topológico $\varphi\colon C_p(X) \to C_p(Y)$ de modo que tanto φ como φ^{-1} preservan a los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente, podemos tomar el mapeo $\psi\colon L(X) \to L(Y)$ definido como $\psi(\alpha) = \alpha \circ \varphi^{-1}$. Claramente, la función ψ tiene una función inversa dada por $\psi^{-1}(\beta) = \beta \circ \varphi$. Puesto que φ y φ^{-1} preservan a los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente, entonces podemos concluir que tanto ψ como ψ^{-1} son continuos. ■

Ejemplo 2.10. El ejemplo de espacios ℓ-equivalentes no L-equivalentes de Uspenskii muestra que si X es un espacio discreto no numerable, entonces los espacios $L_p(X)$ y $L_p(X) \oplus X$ son ℓ-equivalentes y no son L-equivalentes, esto es, no existe ningún isomorfismo topológico entre $C_p(L_p(X))$ y $C_p(L_p(X) \oplus X)$ que preserve a los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente.

Regresando a las consecuencias del Teorema 2.7 tenemos las siguientes afirmaciones.

Corolario 2.11. Sean X y Y dos espacios compactos ℓ-equivalente, entonces cada isomorfismo topológico $\varphi\colon C_p(X) \to C_p(Y)$ preserva a los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente.

Corolario 2.12. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Y es un L-retracto de X;
2. Existe una retracción lineal y continua $r\colon L(X) \to L(Y)$;
3. Existe un extensor lineal y continuo $\varphi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ tal que φ preserva a los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente;
4. Toda función continua de Y en un espacio localmente convexo E se extiende a una función continua de X en E.

A partir de esta proposición podemos enunciar de manera inmediata que, del mismo modo en que X está ℓ-encajado en $L_p(X)$, X es un L-retracto de $L(X)$. Además, a partir del Ejemplo 2.5 se puede deducir que X no siempre es un L-retracto de $L_p(X)$. Para continuar mencionaremos una vez más que tenemos la necesidad de caracterizar a los L-retractos pues éstos serán la base sobre la que crearemos un método de generación de espacios L-equivalentes. En principio usaremos el célebre Teorema de Extensión de Dugundji [10] para caracterizar a los L-retractos en la clase de los espacios métricos.

Teorema 2.13. Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Y es un subconjunto cerrado de X;

- Y es un L-retracto de X;
- Y está ℓ-encajado en X.

Demostración. Sea Y un subconjunto cerrado de un espacio métrico X y $\delta_Y : Y \to L(Y)$ el encaje de Dirac de Y en $L(Y)$. El Teorema de Extensión de Dugundji [10] nos da una extensión continua $f : X \to L(Y)$ tal que $f|Y = \delta_Y$, entonces Y es un L-retracto de X. Las otras implicaciones son evidentes. ■

El Teorema de Extensión de Dugundji ha sido generalizado de varias maneras, específicamente hablando, C. Borges lo generalizo hacia los espacios estratificables (stratifiable spaces), también I. Stares lo generalizó a los (G) espacios decrecientes (en el sentido de [9]). Por otro lado, notemos que los espacios stratificables son (G) espacios decrecientes y, éstos a su vez, son hereditariamente paracompactos, así que podemos preguntarnos si en la clase de los espacios hereditariamente paracompactos todos los conjuntos cerrados son L-retractos. La respuesta es que NO tal y como lo pone en evidencia el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14. *Existe un espacio hereditariamente paracompacto X y un subconjunto cerrado Y que no es un L-retracto de X.*

Sea X la linea de Michael [11, Example 5.1.32]. Sabemos que en este espacio el conjunto Y de números racionales es cerrado y está P-encajado. Por otro lado, sea $\mathbb{P}$ el conjunto de números irracionales con la topología que hereda de $\mathbb{R}$ y consideremos el espacio $C_k(\mathbb{P})$ formado por todas las funciones continuas de valores reales dotado de la topología compacto-abierta. En [29] se expone una función $f : Y \to C_k(\mathbb{P})$ que no posee extensión continua a todo el espacio X, a saber, la función es $f(x)(y) = \frac{1}{x-y}$, donde $x \in Y$ y $y \in \mathbb{P}$. Esto verifica que Y no es un L-retracto.

El ejemplo anterior muestra que debemos imponer condiciones más fuertes sobre los subespacios Y para segurar que éstos sean L-retractos, de hecho, la situación en que Y es un conjunto P-encajado no es suficiente, y en algunos casos debemos añadir hipótesis relacionadas con la metrizabilidad.

Un conjunto $Y \subset X$ se dice **fuertemente discreto** si existe una familia discreta $\{U_y : y \in Y\}$ de subconjuntos abiertos disjuntos en X tales que $y \in U_y$ para cada $y \in Y$. Tomando en cuenta las afirmaciones finales de [20, 22] podemos obtener lo siguiente.

Corolario 2.15. Sea Y un subespacio de X. Entonces:

1. Si X es un espacio pseudométrico y Y es un subespacio cerrado, entonces Y es un L-retracto de X;

2. Si X es un espacio paracompacto y Y es un subespacio cerrado y metrizable, entonces Y es un L-retracto de X;
3. Si X es un espacio normal por colecciones y Y es un subespacio cerrado, metrizable y de tipo G_δ (estos conjuntos resultan de la intersección numerable de conjuntos abiertos), entonces Y es un L-retracto de X;
4. Si X es un espacio normal y Y es un subespacio cerrado, metrizable y separable, entonces Y es un L-retracto de X;
5. Si X es un espacio de Tychonoff y Y es un subespacio compacto y metrizable, entonces Y es un L-retracto de X;
6. Si X es un espacio de Tychonoff y Y es un subespacio fuertemente discreto, entonces Y es un L-retracto de X.

Demostración. Los primeros 5 enunciados son fáciles de comprobar debido a las observaciones finales de [20, 22]. En [4, p. 136] se muestra que si Y es un subespacio fuertemente discreto de X, entonces Y está ℓ-encajado en X. Reproduciremos la prueba original haciendo hincapié en la preservación de los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente.

Sea $\mathcal{U} = \{U_y : y \in Y\}$ una familia discreta de conjuntos abiertos y disjuntos en X tal que $y \in U_y$ par todo $y \in Y$. Ahora, para cada $y \in Y$ consideremos la función $h_y \in C(X)$ que satisface $h_y(X) \subset [0,1]$, $h_y(y) = 1$ y $h_y(X \setminus U_y) \subset \{0\}$. Definimos la función $\psi(x) = \sum_{y\in Y} h_y(x)$ y como la familia $\mathcal{U}$ es discreta, tenemos que ψ está bien definida y es continua. Por lo tanto, el extensor $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ definido como $\phi(f) = \sum_{y\in Y} f(y)\cdot h_y$ es continuo y lineal.

Ahora sólo probaremos que ϕ preserva a los conjuntos equicontinuos acotados puntualmente. Tomemos un conjunto $F \subset C_p(Y)$ equicontinuo y acotado puntualmente; para cada $y \in Y$ consideremos el número $M_y \in \mathbb{R}$ tal que $\{f(y) : f \in F\} \subset [-M_y, M_y]$. Dado un número $\varepsilon > 0$ y un elemento $x \in X$, tenemos dos opciones: si x tiene a todas sus vecindades disjuntas de $\bigcup\mathcal{U}$ llegamos a que $\phi(f)(x) = 0$ para cada $f \in C_p(Y)$; en caso contrario, existe una vecindad U de x de modo que $U \cap U_y \neq \emptyset$ para un único $y \in Y$; pongamos $V = h_y^{-1}(h_y(x) - \varepsilon/M_y, h_y(x) + \varepsilon/M_y)$ y $W = U \cap V$, entonces W es una vecindad abierta de X y para cada $z \in W$ y $f \in F$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
|\phi(f)(x) - \phi(f)(z)| = |f(y)\,(h_y(x) - h_y(z))| \leq \\
\leq M_y\,|h_y(x) - h_y(z)| < M_y \cdot \tfrac{\varepsilon}{M_y} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

esto es, $\phi(F)$ es un conjunto equicontinuo acotado puntualmente, y el conjunto Y, al ser un subespacio fuertemente discreto, es un L-retracto de X. ■

Debemos aclarar que si bien los L-retractos coinciden con los conjuntos ℓ-encajados en la clase de los espacios métricos en general esto es falso. También debemos notar que incluso condiciones muy fuertes como la compacidad no son suficientes para garantizar que un subconjunto sea un L-retracto.

Ejemplos 2.16.

1. Sea Y un espacio discreto de cardinalidad ω_1 y tomemos $X = L_p(Y)$. Es claro que Y es un subconjunto ℓ-encajado de X, sin embargo, la función $\delta_Y : Y \to L(Y)$ no posee extensión continua hacia el espacio X, de lo contrario Y sería un L-retracto de X y esto es falso. En este caso, a pesar de que Y está ℓ-encajado y es un subconjunto cerrado de X no se cumple que Y sea un L-retracto pues Y no está P-encajado en X.

2. Sea $X = \beta\mathbb{N}$ y consideremos el subespacio cerrado (compacto) $Y = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces Y no es un L-retracto, pues de hecho, Y ni siquiera es un conjunto t-encajado en X, esto es, no existe ningún mapeo continuo $\varphi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ [4, p. 133]. En este caso, a pesar de la compacidad (tanto de X como de Y) no se cumple que Y sea un L-retracto (aunque Y si está P-encajado en X), de hecho, Y ni siquiera es un conjunto ℓ-encajado.

Capítulo 3

Método de construcción de espacios $*$-equivalentes

En este capítulo desarrollaremos un método para construir ejemplos de espacios L-equivalentes mediante (una variación de) el concepto de L-retracto. Sean K_1 y K_2 dos L-retractos de X, decimos que K_1 y K_2 son **L-retractos paralelos** si existen retracciones lineales y continuas $r_1\colon L(X) \to L(K_1)$ y $r_2\colon L(X) \to L(K_2)$ tales que $r_1 \circ r_2 = r_1$ y $r_2 \circ r_1 = r_2$, éstas retracciones tomarán el nombre de **L-retracciones paralelas**. Los L-retractos paralelos se pueden caracterizar de una forma sencilla en base a sus L-retracciones paralelas.

Proposición 3.1. *K_1 y K_2 son L-retractos paralelos de X si y sólo si existe un retracción lineal y continua $r_1\colon L(X) \to L(K_1)$ tal que la restricción $r_1|L(K_2)$ es un isomorfismo topológico. En particular, K_1 es L-equivalente a K_2.*

Demostración. Supongamos que K_1 y K_2 son L-retractos paralelos de X, y sean $r_1\colon L(X) \to L(K_1)$ y $r_2\colon L(X) \to L(K_2)$ un par de L-retracciones paralelas. Entonces $i = r_1|L(K_2)$ es un isomorfismo topológico cuya función inversa es $j = r_2|L(K_1)$.

Recíprocamente, si existe una retracción lineal y continua $r_1\colon L(X) \to L(K_1)$ tal que la restricción $i = r_1|L(K_2)$ es un isomorfismo topológico, entonces consideramos la función $j = i^{-1}$ y hacemos $r_2 = j \circ r_1$, de este modo r_2 es una retracción lineal y continua de $L(X)$ en $L(K_2)$ y $r_1 \circ r_2 = r_1$ y $r_2 \circ r_1 = r_2$. ■

Existe una clase de funciones que está muy ligada a las L-retracciones paralelas: las funciones $\mathbb{R}$-cocientes. Una función continua $p\colon X \to Y$ se dice **$\mathbb{R}$-cociente** si $p(X) = Y$ y cuando f es una función de valores reales definida sobre Y tal que la composición $f \circ p \colon X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es una función continua [19]. El comportamiento de las funciones $\mathbb{R}$-cocientes es similar al de los mapeos cocientes, sólo que este nuevo concepto es una relativización del concepto de función cociente en la clase de los espacios completamente regulares.

Proposición 3.2. [24, Proposición 1.1] Si $p \colon X \to Y$ es una función $\mathbb{R}$-cociente, Z es un espacio completamente regular y $f \colon Y \to Z$ es una función tal que la composición $f \circ p$ es continua, entonces f es continua.

Proposición 3.3. Una función $p \colon X \to Y$ es $\mathbb{R}$-cociente si y sólo si su extensión lineal y continua $p_\# \colon L(X) \to L(Y)$ es abierta.

Demostración. Supongamos que $p_\#$ es abierta, y sea $f \colon Y \to \mathbb{R}$ una función de modo que $f \circ p$ es continua. Dado que $p_\# \colon L(X) \to L(Y)$ y $f_\# \colon L(Y) \to \mathbb{R}$ son las extensiones lineales y continuas de p y f, llegamos a que $f_\# \circ p_\# = (f \circ p)_\#$ es continua, y puesto que $p_\#$ es abierta tenemos que $f_\#$ es continua, por ende $f = f_\# | Y$ es continua y $p \colon X \to Y$ es $\mathbb{R}$-cociente.

De manera inversa, si $p \colon X \to Y$ es $\mathbb{R}$-cociente, entonces el subespacio $H = \ker p_\#$ es cerrado, y, dado que $L = L(X)/H$ es localmente convexo y de Hausdorff, obtenemos que L es un espacio de Tychonoff. Más aún, existe una biyección continua $i \colon L \to L(Y)$ tal que $p_\# = i \circ \pi$, donde $\pi \colon L(X) \to L$ es la proyección natural. Ahora sólo resta verificar que $j = i^{-1} \colon L(Y) \to L$ es continua y para esto basta comprobar que $f = j|Y$ es continua. Sabemos que $f \circ p = (j \circ p_\#)|X = \pi|X$, así que $f \circ p$ es continua, y como p es una función $\mathbb{R}$-cociente se sigue que f es continua. Entonces j es continua, i es un isomorfismo topológico y $p_\#$ es una función abierta ya que π es abierta. ■

Siguiendo las ideas propuestas en [24] podemos extender la relación de L-equivalencia de espacios topológicos a las funciones continuas definidas entre ellos. Decimos que dos funciones continuas $f \colon X \to Y$ y $g \colon Z \to T$ son **L-equivalentes** ($f \overset{L}{\sim} g$) si existen isomorfismos topológicos $\varphi \colon L(X) \to L(Z)$ y $\psi \colon L(Y) \to L(T)$ tales que $\psi \circ f_\# = g_\# \circ \varphi$. Es claro que ésta es una relación de equivalencia , y del mismo modo que sucede con las propiedades L-invariantes, cualquier propiedad de las funciones continuas que sea preservada mediante ésta relación de equivalencia se dirá una propiedad **L-invariante**.

Éstas distintas definiciones de L-equivalencia poseen una conexión: la relación de L-equivalencia de las funciones continuas $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ y $\mathrm{id}_Y \colon Y \to Y$ es equivalente a la relación de L-equivalencia de los espacios X y Y, es decir, siempre que una afirmación es verdadera la otra también lo es. Las funciones L-equivalentes son fáciles de caracterizar, al menos para las funciones que son $\mathbb{R}$-cocientes.

Proposición 3.4. Dos funciones $\mathbb{R}$-cocientes $f\colon X \to Y$ y $g\colon Z \to T$ son L-equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo topológico $i\colon L(X) \to L(Z)$ tal que $i(\ker f_\#) = \ker g_\#$.

Demostración. Si f y g son L-equivalentes, entonces existen isomorfismos topológicos $\varphi\colon L(X) \to L(Z)$ y $\psi\colon L(Y) \to L(T)$ tales que $\psi \circ f_\# = g_\# \circ \varphi$. Sean $A = \ker f_\#$ y $B = \ker g_\#$. Entonces $j \circ f_\#(A) = \{0\}$, y por la igualdad $j \circ f_\# = g_\# \circ i$ llegamos a que $\{0\} = g_\# \circ i(A) = g_\#(i(A))$, esto es, $i(A) \subset B$. Para $g_\# = j \circ f_\# \circ i^{-1}$, tenemos $\{0\} = g_\#(B) = j \circ f_\# \circ i^{-1}(B)$, considerando que j es biyectiva se desprende que $f_\# \circ i^{-1}(B) = 0$, por lo tanto, $i^{-1}(B) \subset A$, y esto es suficiente para establecer la igualdad.

De forma recírpoca, si existe un isomorfismo topológico $i\colon L(X) \to L(Z)$ tal que $i(\ker f_\#) = \ker g_\#$, entonces existe un isomorfismo (algebraico) $j\colon L(Y) = L(X)/\ker f_\# \to L(T) = L(Z)/\ker g_\#$ tal que $j \circ f_\# = g_\# \circ i$. Como $g_\#$ y i son continuas y $f_\#$ es abierta, se llega a que j es continua. Similarmente, $j^{-1} \circ g_\# = f_\# \circ i^{-1}$, puesto que $f_\#$ y i^{-1} son continuas y $g_\#$ es abierta, se tiene que j^{-1} es continua. De esta forma, i y j son isomorfismos topológicos y las funciones f y g son L-equivalentes. ■

Las funciones $\mathbb{R}$-cocientes definen a una clase de espacios topológicos que son muy importantes para poder describir nuestro método de generación de ejemplos de espacios L-equivalentes. Sea $p\colon X \to Y$ una función definida entre el espacio topológico X y el conjunto (sin topología) Y, es muy conocido el hecho de que existe una única topología completamente regular sobre el conjunto Y de modo que p es una función $\mathbb{R}$-cociente[1] [24], esta topología es llamada la **topología $\mathbb{R}$-cociente con respecto del mapeo p** (o simplemente la topología $\mathbb{R}$-cociente si el mapeo p queda claro en el contexto). En esta situación decimos que p es el **mapeo natural**.

Ahora, si X es un espacio topológico y K es un subconjunto cerrado, denotaremos por X/K al espacio $(X \setminus K) \cup \{K\}$ que resulta de contraer el subespacio K a un singulete por medio de la función $p\colon X \to X/K$ definida como $p(x) = x$ para $x \in X \setminus K$ y $p(x) = K$ para cada $x \in K$. Dotando a X/K de la topología $\mathbb{R}$-cociente respecto de la cual p es el mapeo natural, obtenemos que X/K es un espacio de Tychonoff, además, la restricción $p|(X \setminus K)\colon X \setminus K \to X/K \setminus p(K)$ es un homeomorfismo [24, Corolario 1.7].

Por otro lado, consideremos la función $e_X\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $e_X(x) = 1$ para todo $x \in X$, y sea $(e_X)_\#\colon L(X) \to \mathbb{R}$ el (único) mapeo lineal y continuo que extiende a e_X, al kernel de $(e_X)_\#$ lo simbolizaremos por

[1] Esta topología se puede describir como la topología más débil respecto de la cual todas las funciones de valores reales definidas sobre Y y cuya composición con p son continuas.

medio de $L^0(X)$, es fácil notar que:

$$L^0(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in X, 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \right\}.$$

Diremos que un isomorfismo topológico $\varphi\colon L(X) \to L(Y)$ es **especial** si la composición $(e_Y)_\# \circ \varphi\colon L(X) \to \mathbb{R}$ es constante sobre X. Como se muestra en [25] si los espacios X y Y son L-equivalentes, entonces siempre existe un isomorfismo topológico especial entre $L(X)$ y $L(Y)$. La siguiente afirmación es un pequeño corolario que se desprende de lo anterior.

Proposición 3.5. Dado un isomorfismo topológico $\psi\colon L(X) \to L(Y)$, siempre existe un isomorfismo topológico $\varphi\colon L(X) \to L(Y)$ tal que $(e_Y)_\# \circ \varphi = (e_X)_\#$.

Corolario 3.6. Sean X y Y dos espacios topológicos L-equivalentes, entonces $L^0(X)$ es isomorfo topológicamente a $L^0(Y)$.

Con esto finalmente es posible establecer nuestro método de generación de ejemplos de espacios L-equivalentes.

Teorema 3.7. Si K_1 y K_2 son L-retractos paralelos de X, entonces los mapeos $\mathbb{R}$-cocientes $p_1\colon X \to X/K_1$ y $p_2\colon X \to X/K_2$ son L-equivalentes. En particular, los espacios X/K_1 y X/K_2 son L-equivalentes.

Demostración. Sean $r_1\colon L(X) \to L(K_1)$ y $r_2\colon L(X) \to L(K_2)$ dos L-retracciones paralelas. Definimos la función $i\colon L(X) \to L(X)$ mediante $i(\alpha) = r_1(\alpha) + r_2(\alpha) - \alpha$ para toda $\alpha \in L(X)$. Claramente, i es lineal y continua. Más aún, $i \circ i(\alpha) = \alpha$, esto es, i es su propia función inversa, así que es un isomorfismo topológico. Pongamos $s_2 = r_2|L(K_1)$, entonces s_2 es un isomorfismo topológico tal que $s_2 \circ r_1 = r_2 \circ i$. De aquí se sigue que $i(L(K_1)) = L(K_2)$ y $i(\ker r_1) = \ker r_2$.

Es claro que $\ker(p_i)_\# = L^0(K_i) = \ker(e_{K_i})_\#$, $i = 1, 2$. Puesto que K_1 y K_2 son L-equivalentes, existe un isomorfismo topológico especial $k\colon L(K_1) \to L(K_2)$ tal que $(e_{K_2})_\# \circ k = (e_{K_1})_\#$. Sea $g = k \times j$ donde $j = i|\ker r_1$. Si $\alpha \in L(X)$, entonces los mapeos $\eta_i\colon L(X) \to L(K_i) \times \ker r_i$, $i = 1, 2$, definidos por $\eta_i(\alpha) = (r_i(\alpha), \alpha - r_i(\alpha))$ son isomorfismos topológicos cuyas funciones inversas son $\xi_i\colon L(K_i) \times \ker r_i \to L(X)$, donde $\xi_i(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, $i = 1, 2$. Definimos la función ψ como:

$$\begin{gathered}\psi(\alpha) = \zeta_2 \circ g \circ \eta_1(\alpha) = \zeta_2 \circ g(r_1(\alpha), \alpha - r_1(\alpha)) = \\ = \zeta_2(k(r_1(\alpha)), j(\alpha - r_1(\alpha))) = k(r_1(\alpha)) + j(\alpha) - j(r_1(\alpha)),\end{gathered}$$

y así obtenemos un isomorfismo topológico $\psi\colon L(X) \to L(X)$ tal que $\psi(L^0(K_1)) = L^0(K_2)$. De este modo, debido a la Proposición 3.4, p_1 es L-equivalente a p_2 y los espacios X/K_1 y X/K_2 son L-equivalentes. ■

Corolario 3.8. Sean X un espacio topológico y $K \subset X$ un L-retracto. Entonces los espacios X^+ (X más un punto aislado que no pertenece a él) y $X/K \oplus K$ son L-equivalentes.

Demostración. Supongamos que $\varphi\colon K \to K'$ es un homeomorfismo entre K y K' de modo que K' es disjunto de X. Pongamos $Z = X \oplus K'$, de este modo $L(Z)$ isomorfo topológicamente a $L(X) \oplus L(K')$ (ver el Corolario 3.11). Sea $r\colon L(X) \to L(K)$ una L-retracción, definimos $r_1\colon L(Z) \to L(K)$ mediante $r_1|L(X) = r$ y $r_1|L(K') = \varphi_{\#}^{-1}$; también definimos $r_2\colon L(Z) \to L(K')$ como $r_2|L(X) = \varphi_{\#} \circ r$ y $r_2|L(K') = \mathrm{id}_{L(K')}$. es fácil ver que r_1 y r_2 son L-retracciones paralelas.

Por medio de el Teorema 3.7 obtenemos que los espacios Z/K y Z/K' son L-equivalentes. Sin embargo, Z/K es homeomorfo a $X/K \oplus K$ y Z/K' es homeomorfo a X^+. ■

Para terminar este capítulo y justificar el resto de proposiciones, debemos hacer uso de las estructuras algebraico-topológicas libres en el sentido de Graev [15]. En estas estructuras se toma en cuenta que todo espacio vectorial topológico (localmente convexo) es un espacio topológico con un punto que se distingue de los demás: el cero.

Observación 3.9. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto cualquiera pero fijo. El **espacio localmente convexo libre sobre el espacio topológico con un punto distinguido** (X, x_0) es un pareja formada por un espacio localmente convexo $GL(X, x_0)$ y una función continua $\delta_X\colon (X, x_0) \to GL(X, x_0)$, con $\delta_X(x_0) = 0$, tal que cada función continua $f\colon (X, x_0) \to E$ hacia un espacio localmente convexo E, donde $f(x_0) = 0$, se puede extender a una función lineal y continua $f_{\#}\colon GL(X, x_0) \to E$ de modo que $f = f_{\#} \circ \delta_X$, es decir, de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
GL(X,x_0) \arrow[dr, dashed, "f_{\#}"] & \\
(X,x_0) \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[r, "f \text{ con } f(x_0)=0"'] & E
\end{tikzcd}$$

El espacio localmente convexo libre sobre el espacio topológico con un punto distinguido (X, x_0) siempre existe y es esencialmente único (salvo isomorfismo topológico), el encaje de Dirac es un encaje topológico que toma al espacio topológico (X, x_0) y lo sitúa como un subconjunto cerrado de $GL(X, x_0)$ y a la vez sitúa a $X \setminus \{x_0\}$ como una base de Hamel del espacio vectorial $GL(X, x_0)$.

La siguiente afirmación se sigue fácilmente de [25, Teorema 3.7]:

Proposición 3.10. Sea x_0 un punto del espacio topológico X. Los espacios $GL(X, x_0)$ y $L^0(X)$ son isomorfos topológicamente.

Las proposición anterior captura el hecho de que el espacio localmente convexo libre sobre el espacio topológico con un punto distinguido (X, x_0) no depende del punto x_0 que se distinga, por esta razón, en lo que sigue diremos que $GL(X, x_0)$ es el **espacio localmente convexo libre en el sentido de Graev sobre el espacio topológico** X y lo denotaremos por $GL(X)$. Las otras estructuras topológico-algebraicas libres también están definidas en el sentido de Graev, de hecho, existe una forma de relacionar las estructuras de Markov con las de Graev por medio del contenido de [23].

Corolario 3.11. Sean $\mathbf{P}$ el funtor que a cada espacio topológico X le asigna el espacio topológico X^+, $\mathbf{L}$ el funtor que a cada espacio topológico X le asigna su espacio localmente convexo libre $L(X)$ y $\mathbf{GL}$ el funtor que a cada espacio topológico X le asigna su espacio localmente convexo libre en el sentido de Graev $GL(X)$. Entonces los funtores $\mathbf{L}$ y $\mathbf{GL} \circ \mathbf{P}$ son naturalmente isomorfos, más aún, ambos funtores preservan coproductos finitos.

Corolario 3.12. Sean X y Y dos espacios topológicos y $X \oplus Y$ su suma topológica. Entonces $GL(X \oplus Y)$ es isomorfo topológicamente tanto a $GL(X) \oplus L(Y)$ como a $L(X) \oplus GL(Y)$.

Corolario 3.13. Sean X y Y dos espacios topológicos. Los espacios $L(X)$ y $L(Y)$ son isomorfos topológicamente si y sólo si los espacios $GL(X)$ y $GL(Y)$ son isomorfos topológicamente.

Debemos notar que la relación de L-equivalencia también puede ser definida para las estructuras algebraico-topológicas libres en el sentido de Graev, sin embargo, la proposición anterior nos dice que esto no es necesario y que dos espacios L-equivalentes en el sentido de Markov lo son en el sentido de Graev y viceversa. Regresando a las funciones L-equivalentes tenemos lo siguiente.

Proposición 3.14. Sea $r\colon L(X) \to L(K)$ una retracción lineal y continua. El espacio $L(X)$ es isomorfo topológicamente a $L(K) \oplus GL(X/K)$ y también a $GL(K) \oplus L(X/K)$. Más aún, si $p\colon X \to X/K$ es el mapeo natural, entonces $\ker r$ es isomorfo topológicamente a $GL(X/K)$ y $\ker p_\#$ es isomorfo topológicamente a $GL(K)$.

Corolario 3.15. Sean K_1 y K_2 dos L-retractos de X, y $p_1\colon X \to X/K_1$, $p_2\colon X \to X/K_2$ los correspondientes mapeos naturales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. p_1 y p_2 son L-equivalentes;

2. K_1 es L-equivalente a K_2 y X/K_1 es L-equivalente a X/K_2.

Demostración. Primero supongamos que las funciones p_1 y p_2 son L-equivalentes, entonces de forma trivial se tiene que X/K_1 es L-equivalente a X/K_2, y además, por la Proposición 3.4 tenemos que $\ker(p_1)_\#$ es isomorfo topológicamente a $\ker(p_1)_\#$, esto es, K_1 es L-equivalente a K_2 por el Corolario 3.13 y la Proposición 3.14.

Recíprocamente, si K_1 es L-equivalente a K_2 y X/K_1 es L-equivalente a X/K_2, entonces existen isomorfismos topológicos $k\colon L(K_1) \to L(K_2)$ y $j\colon \ker r_1 \to \ker r_2$ que podemos modificar como en la prueba del Teorema 3.7 para obtener que p_1 es L-equivalente a p_2. ■

Corolario 3.16. Sean $r_1\colon X \to K_1$ y $r_2\colon X \to K_2$ un par de retracciones, y $p_1\colon X \to X/K_1$, $p_2\colon X \to X/K_2$ sus respectivos mapeos naturales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. r_1 es L-equivalente a r_2;

2. p_1 es L-equivalente a p_2;

3. K_1 es L-equivalente a K_2 y X/K_1 es L-equivalente a X/K_2.

Corolario 3.17. Dos retracciones sobre el mismo retracto son funciones L-equivalentes.

Corolario 3.18. Sean X y Y dos espacios L-equivalentes, K_1 y K_2 dos retractos, respectivamente, de X y Y que son L-equivalentes y tales que X/K_1 es L-equivalente a Y/K_2. Entonces cualesquiera dos retracciones $X \to K_1$ y $Y \to K_2$ son L-equivalentes, más aún, los correspondientes mapeos naturales también son L-equivalentes.

Ejemplo 3.19. Consideremos las retracciones $r_1, r_2\colon [0,1] \to [0,1/2]$ definidas como:

$$r_1(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Estas retracciones son L-equivalentes pero r_1 es perfecta y abierta mientras que r_2 también es perfecta pero no es abierta.

Corolario 3.20. La propiedad de ser una función abierta no es un L-invariante de funciones continuas, incluso dentro de la clase de las retracciones perfectas.

Ejemplo 3.21. Sea X el producto topológico de dos copias disjuntas de $\mathbb{Z}$. Consideremos el conjunto $K = (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \{0\}$ y las retracciones $r_1, r_2 \to X \to K$ definidas como $r_1(n, m) = (\text{máx}\{|n|, |m|\}, 0)$, and $r_2(n, m) = (|n + m|, 0)$. Estas retracciones son L-equivalentes por el Corolario 3.17 y además se tiene que r_1 es perfecta y finito-a-uno, mientras que r_2 es cerrada aunque no es perfecta (r_2 no tiene fibras compactas) y tampoco es finito-a-uno.

Corolario 3.22. La propiedad de ser una función perfecta no es un L-invariante de funciones continuas, incluso dentro de la clase de las retracciones. En particular, la propiedad de ser una función con fibras compactas no es un L-invariante de funciones continuas.

Corolario 3.23. La propiedad de ser una función finito-a-uno no es un L-invariante de funciones continuas, incluso dentro de la clase de las retracciones.

Observaciones 3.24.

1. Todas las definiciones y proposiciones de este capítulo pueden ser modificadas para ser válidas cuando se consideren los grupos abelianos topológicos libres y los espacios vectoriales topológicos libres, esto es, el contenido de este capitulo se puede usar para elaborar un método de creación de ejemplos de espacios A- y V-equivalentes, sin embargo, hace falta encontrar caracterizaciones de los A- y V-retractos.

2. El ejemplo 3.21 puede ser modificado para mostrar que la propiedad de ser una función perfecta no es preservada por medio de la relación de M-equivalencia (relación que deriva de la construcción del grupo topológico libre $F(X)$), en particular, la propiedad de ser una función con fibras compactas tampoco es un M-invariante. Aunque N. M. Pyrch ya había mostrado algo similar, su prueba es incorrecta ya que se basa en una proposición previa ([27], Ejemplo 4.4) y ésta declaración está mal adaptada porque una de las funciones consideradas en el ejemplo no es una retracción (la función g que él considera no es una retracción). En cualquier caso, el Ejemplo 3.21 brinda una solución a la pregunta 3.25 de [24].

3. En vista del Corolario 3.20 y del Ejemplo 3.21, surge la siguiente pregunta: ¿La propiedad de ser una función cerrada se preserva a través de alguna de éstas relaciones de equivalencia algebraico-topológicas?

Capítulo 4

Compacidad y relaciones de equivalencia fuertes

Iniciaré este capítulo con una pequeña comparación entre $L(\mathbb{R})$ y $V(\mathbb{R})$ para resaltar el hecho de que, aún para espacios muy ricos en propiedades topológicas, los espacios localmente convexos libres y los espacios vectoriales topológicos libres tienen muchas similitudes (y diferencias):

- $L(\mathbb{R})$:

    1. Puesto que $\mathbb{R}$ es σ-compacto tenemos que $L(\mathbb{R})$ también es σ-compacto.
    2. Puesto que $\mathbb{R}$ es metrizable tenemos que $L(\mathbb{R})$ es Dieudonné-completo (de hecho es realcompacto).
    3. Puesto que $\mathbb{R}$ es un espacio de Lindelöf (así como todas sus potencias finitas) tenemos que $L(\mathbb{R})$ también es un espacio de Lindelöf (de aquí se desprende que $L(\mathbb{R})$ es paracompacto, normal por colecciones, ...).
    4. Puesto que $\mathbb{R}$ es separable tenemos que $L(\mathbb{R})$ también es separable (por ende posee la propiedad de Souslin).
    5. Puesto que $\mathbb{R}$ es metrizable, por el Teorema de extensión de Dugundji, tenemos que todo subconjunto cerrado es un L-retracto.
    6. A pesar de que $\mathbb{R}$ es un k_ω-espacio tenemos que $L(\mathbb{R})$ ni si quiera es un k-espacio.
    7. A pesar de que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo tenemos que $L(\mathbb{R})$ no es un espacio completo (en el sentido de unifor-

midades) pues $\mathbb{R}$ contiene subconjuntos compactos infinitos (incluso algunos son no numerables).

- $V(\mathbb{R})$:

  1. El espacio $V(\mathbb{R})$ satisface los items (1-4) anteriores, es decir, $V(\mathbb{R})$ también es σ-compacto, realcompacto, de Lindelöf, separable, etc...
  2. Puesto que $\mathbb{R}$ es un k_ω-espacio tenemos que $V(\mathbb{R})$ también es un k_ω-espacio.
  3. Por el item anterior tenemos que $V(\mathbb{R})$ es un espacio completo (en el sentido de uniformidades).
  4. Puesto que $\mathbb{R}$ es un k_ω-espacio tenemos que todo subconjunto cerrado está V-encajado [14, Corolario 3.11], no sabemos si son V-retractos o no.

El resto de este capítulo se enfocará en hacer una comparativa entre $L(X)$ y $V(X)$ para espacios topológicos más generales, de hecho, muchas de las afirmaciones que siguen se inspiran por propiedades que son verdaderas en los espacios $L_p(X)$. Como un pequeño adelanto podemos señalar que la principal diferencia que encontraremos será respecto al comportamiento de los subconjuntos compactos de éstas estructuras algebraico-topológicas libres.

4.1. Subconjuntos compactos de $A(X)$, $V(X)$ y $L(X)$

Tal vez en la comparativa inicial debí incluir al grupo abeliano topológico libre $A(\mathbb{R})$ pues la diferencia más destacable respecto de $L(\mathbb{R})$ es que todos los subconjuntos compactos de $A(\mathbb{R})$ quedan capturados por los conjuntos $A_n(\mathbb{R})$ (lo mismo sucede con los subconjuntos compactos de $V(\mathbb{R})$, éstos quedan atrapados dentro de los conjuntos $V_n(\mathbb{R})$), sin embargo, para desarrollar un ejemplo que muestre que no todos los subconjuntos compactos de $L(\mathbb{R})$ quedan atrapados por los conjuntos $L_n(\mathbb{R})$ hay que demostrar primero algunas proposiciones valiosas.

Debemos recordar que la notación que se seguirá de aquí en adelante no corresponde con la notación tradicional usada en textos ya clásicos como [1, 5, 15], sin embargo, basados en dichas fuentes trataremos de adecuarla a los espacios vectoriales topológicos (localmente convexos) libres. Recordemos las definiciones de los mapeos ϕ_n:

$$\begin{gathered}\phi_n^A\colon X^n \times \mathbb{Z}^n \to A_n(X),\\ \phi_n^A(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\phi_n^V\colon X^n \times \mathbb{R}^n \to V_n(X),\\ \phi_n^V(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\phi_n^L\colon X^n \times \mathbb{R}^n \to L_n(X),\\ \phi_n^L(x_1,\dots,x_n;\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Proposición 4.1. Para todo $n \in \omega$, los conjuntos $A_n(X)$, $V_n(X)$ y $L_n(X)$ son cerrados en $A(X)$, $V(X)$ y $L(X)$, respectivamente. Más aún, se tiene que $A(X) = \bigcup\{A_n(X) : n \in \omega\}$, $V(X) = \bigcup\{V_n(X) : n \in \omega\}$, $L(X) = \bigcup\{L_n(X) : n \in \omega\}$ y los mapeos ϕ_n^A, ϕ_n^V, ϕ_n^L son sobreyectivos y continuos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Debido a la Proposición 0.5.16 de [3] se tiene que $L_n(X)$ es cerrado en $L(X)$. Puesto que la función identidad $\mathrm{id}_X\colon X \to X \subset L(X)$ se extiende de forma lineal y continua a $(\mathrm{id}_X)_\#\colon V(X) \to L(X)$, tenemos que $V_n(X) = (\mathrm{id}_X)_\#^{-1}(L_n(X))$ es un conjunto cerrado en $V(X)$. Finalmente, dado que $A(X)$ se encaja como un subgrupo aditivo cerrado en $V(X)$ se llega a que $A_n(X) = V_n(X) \cap A(X)$ es un subconjunto cerrado de $A(X)$.

Las últimas afirmaciones son claras en vista de que las operaciones de suma y multiplicación por un escalar son continuas tanto en $A(X)$, como en $V(X)$ y $L(X)$. ■

Cuando X es un espacio compacto los mapeos ϕ_n^A y ϕ_n^V tienen propiedades adicionales.

Proposición 4.2. Sea X un espacio compacto, entonces $\phi_n^A\colon X^n \times \mathbb{Z}^n \to A_n(X)$ y $\phi_n^V\colon X^n \times \mathbb{R}^n \to V_n(X)$ son mapeos perfectos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La prueba para el caso del espacio $V(X)$ es exactamente la misma que para el caso de $A(X)$. Cuando X es compacto podemos ver que $A(X)$ ($V(X)$) es un k_ω-espacio [15] ([14, Teorema 3.1]), en particular, $A_n(X)$ ($V_n(X)$) es un k-espacio para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, dado $n \in \mathbb{N}$, y siguiendo a [11, Teorema 3.7.18] se puede ver que ϕ_n^A es una función perfecta si y sólo si para cada subconjunto compacto $K \subset A_n(X)$ la imagen inversa $(\phi_n^A)^{-1}(K)$ es un conjunto compacto. Dado que $A(X)$ es un subgrupo aditivo cerrado de $L(X)$ [30] podemos ver que K es un subconjunto compacto de $L(X)$ y por ende $\| K \| = \{\| \alpha \|\colon \alpha \in K\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ [14, Lema 6.3], sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\| K \| \subset [-m, m]$ para algún $m \in \mathbb{N}$. De esta forma tenemos que $(\phi_n^A)^{-1}(K)$ es un subconjunto cerrado de $([supp(K)]_X)^n \times ([-m, m] \cap \mathbb{Z})^n \cup X^n \times \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{0}$ es el cero de $\mathbb{Z}^n$, y ϕ_n^A es un mapeo perfecto. ■

La razón por la que el argumento anterior es inválido para los mapeos ϕ_n^L es que $L(X)$ es un k-espacio si y sólo si X es un espacio discreto a lo más numerable [13, Teorema 1.2], el mejor resultado que podemos obtener en este sentido es el siguiente.

Proposición 4.3. Sea X un espacio localmente compacto. Los mapeos $\phi_n^L\colon X^n \times \mathbb{R}^n \to L_n(X)$ son perfectos para cada $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si X es un espacio finito.

Demostración. Supongamos que los mapeos $\phi_n^L\colon X^n \times \mathbb{R}^n \to L_n(X)$ son perfectos para cada $n \in \mathbb{N}$ y que por lo tanto los espacios $L_n(X)$ son localmente compactos para cada $n \in \mathbb{N}$. A continuación veremos que X es un espacio que no contiene subconjuntos compactos infinitos, pues si por el contrario existe $K \subset X$ compacto e infinito, entonces K está P-encajado en X y por lo tanto $L(K)$ es un subespacio cerrado de $L(X)$ [34], además $L_n(K)$ será un subespacio localmente compacto de $L_n(X)$. Como K es infinito, entonces K contiene a un subconjunto infinito numerable y discreto J. En $L(K)$ podemos considerar al subespacio cerrado $V = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}x : x \in J\}$, y ver que V es homeomorfo al ω-abanico de Fréchet–Urysohn $V(\omega)$, sin embargo, este espacio no es localmente compacto y llegamos a una contradicción. Luego, el espacio X debe ser discreto. Pero si X es un espacio discreto infinito, entonces $V(\omega)$ se encaja como un subespacio cerrado de $L_1(X)$ y este espacio no es localmente compacto llegando así a una contradicción. Finalmente X debe ser un espacio finito.

El recíproco es claro. ■

Los problemas anteriores tienen una solución, al menos para el caso compacto. Par cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las funciones $\psi_n^L\colon X^n \times [-n, n]^n \to L_n(X)$ mediante $\psi_n^L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, para ser más específicos consideramos que $\psi_n^L(X^n \times [-n, n]^n) = sp_n^L(X) \subset L_n(X)$. Es claro que $L(X) = \{0\} \cup \bigcup\{sp_n^L(X) : n \in \mathbb{N}\}$, y si X es compacto (compacto y metrizable), entonces $sp_n^L(X)$ es un subespacio compacto (compacto y metrizable) de $L(X)$.

Corolario 4.4. Si X es compacto, entonces los mapeos $\psi_n^L\colon X^n \times [-n, n]^n \to sp_n^L(X)$ son perfectos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Es claro que las funciones $\psi_n^A\colon X^n \times ([-n, n] \cap \mathbb{Z})^n \to sp_n^A(X) \subset A_n(X)$ y $\psi_n^V\colon X^n \times [-n, n]^n \to sp_n^V(X) \subset V_n(X)$ se definen de forma similar, incluso son perfectas cuando X es un espacio compacto. En este sentido, la compacidad tiene una fuerte conexión con los subespacios $sp_n^A(X)$ y $sp_n^V(X)$ ya que ellos capturan a todos los conjuntos compactos de $A(X)$ y $V(X)$, respectivamente.

Proposición 4.5. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio (pseudo)compacto en $A(X)$ o en $V(X)$, entonces existe un número natural n tal que $Y \subset sp_n^A(X)$ o $Y \subset sp_n^V(X)$, respectivamente.

Demostración. La demostración es la misma para ambos casos, por ende sólo consideraremos el caso de $V(X)$ y el caso donde Y es un subespacio pseudocompacto.

Consideremos la extensión lineal y continua $\beta_\#\colon V(X) \to V(\beta X)$ del encaje topológico $\beta\colon X \hookrightarrow \beta X$ de X en su compactación de Stone-Čech βX. Es fácil ver que $\beta_\#$ es una función inyectiva, que $\beta_\#(Y) \subset V(\beta X)$ es pseudocompacto y que $V(\beta X)$ es σ-compacto.

Puesto que la cerradura de $\beta_\#(Y)$ en el espacio $V(\beta X)$ es un conjunto σ-compacto y pseudocompacto tendremos que de hecho es un espacio compacto. El Corolario 3.4 de [14] nos dice que existe un número entero positivo n tal que $sp_n^V(\beta X)$ contiene a $[\beta_\#(Y)]_{V(\beta X)}$, puesto que $\beta_\#$ es un mapeo inyectivo se concluye que $Y \subset sp_n^V(X)$. ■

Corolario 4.6. Si los espacios X y Y son A-equivalentes (V-equivalentes) y (pseudo-)compactos, entonces son fuertemente A-equivalentes (fuertemente V-equivalentes).

El siguiente ejemplo muestra que lo anterior no es válido para los conjuntos $L_n(X)$.

Ejemplo 4.7. Sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ una sucesión convergente cuyo punto límite es x_0. Definimos el conjunto $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\} \subset L(X)$ donde:

$$y_n = x_0 + \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n^2}.$$

Sabemos que la topología de $L(X)$ está dada por una familia de semi-normas continuas $\mathscr{P}$ [12], por lo tanto, $\rho(X)$ es un subespacio compacto de $\mathbb{R}$ para cada $\rho \in \mathscr{P}$, en particular $\rho(X)$ es acotado en $\mathbb{R}$, esto es, $\rho(X) \subset [-M, M]$ para algún $M > 0$, más aún, para cada $\rho \in \mathscr{P}$ tenemos que:

$$\rho(y_n) \leq \rho(x_0) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_n) \leq \rho(x_0) + \frac{M}{n}.$$

La familia de semi-normas $\mathscr{P}$ también separa a los puntos de $L(X)$, en este sentido se pude ver que si $\rho \in \mathscr{P}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n) = \rho(x_0)$, y por ende x_0 es el único punto límite de Y, así Y es homeomorfo a X.

Por otro lado, $Y \cap L_n(X) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, en particular $Y \cap sp_n^L(X) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que Y tiene varias propiedades, por ejemplo, es metrizable y como subconjunto de un espacio vectorial es linealmente independiente, incluso el espacio base también posee buenas propiedades, es compacto, metrizable, numerable, etc. Esto también implica que si consideramos a Y como un subconjunto de $V(X)$, entonces x_0 no es un punto límite de Y, y de hecho Y será un subespacio cerrado, linealmente independiente y discreto en $V(X)$.

Además, como los espacios X y Y son homeomorfos, entonces son fuertemente L-equivalentes, de hecho, si $\Theta\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $\Theta_{\#}\colon L(X) \to L(Y)$ es un isomorfismo topológico con la cualidad de que $\Theta_{\#}(X) \subset L_1(Y)$ y $(\Theta_{\#})^{-1}(Y) \subset L_1(X)$. Con esto queremos decir que cuando dos espacios X y Y son L-equivalentes, entonces podemos considerar que tanto X como Y son bases de Hamel del espacio vectorial $L(X)$, y el hecho de que la representación de los elementos de X, como combinaciones lineales respecto de la base Y, no tenga longitud acotada, no implica que los espacios X y Y no sean fuertemente L-equivalentes.

Observación 4.8. Este ejemplo muestra que el Fact 5.4 de [14] es incorrecto. Las pruebas de la Proposición 5.5 y el Teorema 5.7 (que dependen de Fact 5.4) del artículo [14] también son incorrectas. Sin embargo, el contenido de esas afirmaciones es verdadero. La Proposición 5.5 es válida debido a la Proposición 10.12.1 de [6], y el Teorema 5.7 es verdadero puesto que si dos espacios son V-equivalentes, entonces son L-equivalentes (véase la expresión (4.4) más adelante).

El ejemplo anterior no es muy alentador, pero podemos rescatar lo siguiente:

Proposición 4.9. Sean X un espacio topológico y K un subconjunto compacto de $L(X)$. Si $K \subset L_n(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset sp_m^L(X)$.

Demostración. Debido a [14, Lema 6.3] obtenemos un número $j \in \mathbb{N}$ tal que $\| K \| \subset [-j, j]$, si tomamos $m = \text{máx}\{j, n\}$, entonces $K \subset sp_m^L(X)$. ■

Decimos que Y es un **conjunto funcionalmente acotado** si para cada función continua de valores reales $f\colon X \to \mathbb{R}$ el conjunto $f(Y)$ es acotado en $\mathbb{R}$. Un **μ-espacio** es un espacio topológico donde todo subconjunto cerrado y funcionalmente acotado es compacto, si no hay problema con el contexto sólo nos referiremos a ellos como conjuntos acotados.

Proposición 4.10. Sea X un μ-espacio en el cual todo conjunto compacto es finito. Si $K \subset L(X)$ es compacto y linealmente independiente, entonces K es finito, en particular, $K \subset L_n(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $K \subset L(X)$ un conjunto compacto, entonces $supp(K)$ es un conjunto acotado de X [6, Lemma 10.11.3], como además $J = [supp(K)]_X$ es un subconjunto compacto de X debe tenerse que J es finito. Entonces K es un subconjunto de la envolvente lineal de un conjunto finito, y como K es linealmente independiente debe tenerse que K es un conjunto finito. La segunda afirmación es trivial. ■

El resultado anterior mejora un resultado muy conocido sobre la completez de $L(X)$ [33].

Teorema 4.11. X es Dieudonné-completo y todo subconjunto compacto de X es finito si y sólo si $L(X)$ es un espacio completo (en el sentido de uniformidades) y todo subconjunto compacto y linealmente independiente de $L(X)$ es finito.

Demostración. Como todo espacio Dieudonné-completo es un μ-espacio, basta con aplicar la Proposición 4.10 y el Corolario final de [34]. ■

Ejemplo 4.12. Debemos aclarar que existen espacios topológicos con la propiedad de ser μ-espacios y no ser Dieudonné-completos pero cuyos subconjuntos compactos son finitos [8, Example 4.7], entonces $L(X)$ será un espacio en el que todo subconjunto compacto y linealmente independiente es finito pero $L(X)$ no será un espacio completo.

Un espacio topológico X tiene una **topología débilmente metrizable** si existe un espacio métrico Y y una **condensación** (biyección continua) $f\colon X \to Y$, también se dice que X se condensa sobre un espacio métrico.

Lema 4.13. Sea X un espacio débilmente metrizable, entonces $L(X)$ y $V(X)$ son espacios débilmente metrizables.

Demostración. Para ver que $L(X)$ es débilmente metrizable basta con analizar la prueba de V.332 de [31], por otra parte, para hacer notar que $V(X)$ es débilmente metrizable es suficiente considerar la función $(\mathrm{id}_X)_\#\colon V(X) \to L(X)$ y la solución de V.332 ([31]). ■

Los espacios débilmente metrizables tienen muchas bondades, por ejemplo son Dieudonné-completos además, en general, añaden buenas propiedades a los conjuntos compactos en $L(X)$ (y en $V(X)$) y permiten descubrir nuevas propiedades de los espacios $L(X)$ y $V(X)$.

Proposición 4.14. Sea X un espacio topológico con una topología débilmente metrizable, entonces todo subconjunto acotado $K \subset L(X)$ es metrizable y tiene cerradura compacta.

Demostración. Debido al Lema 4.13 tenemos que $L(X)$ es débilmente metrizable. Puesto que $L(X)$ es Dieudonné-completo podemos afirmar que $\overline{K}$ es un subconjunto compacto de $L(X)$. Sea $f\colon L(X) \to M$ una condensación, donde M es un espacio métrico, entonces $f|\overline{K}\colon \overline{K} \to f(\overline{K})$ es una condensación y por ende un homeomorfismo, así $\overline{K}$ y K son metrizables. ■

Corolario 4.15. Sea X un espacio débilmente metrizable y separable, entonces $L(X)$ es realcompacto.

Demostración. Nuevamente tenemos el caso en el que $L(X)$ es Dieudonné-completo, pero como X es separable, entonces $L(X)$ es separable y tiene la propiedad de Souslin, por lo que finalmente, $L(X)$ debe ser realcompacto. ■

Es claro que lo anterior también es válido para el espacio $V(X)$, pero para el espacios $A(X)$ las condiciones pueden ser menos exigentes:

Proposición 4.16. Sea X un espacio Dieudonné-completo y separable, entonces $A(X)$ es realcompacto.

Demostración. Sabemos que X es Dieudonné-completo si y sólo si $A(X)$ es Raĭkov-completo, en particular, $A(X)$ es Dieudonné-completo. Si a lo anterior le añadimos la separabilidad entonces podemos concluir que $A(X)$ es realcompacto. ■

Las propiedades de ser débilmente metrizable o de ser Dieudonné-completo son esenciales en las afirmaciones anteriores.

Ejemplo 4.17. J. Novák creo un espacio pseudocompacto $\mathbb{N} \subset X \subset \beta\mathbb{N}$ tal que $|X| \leq \mathfrak{c}$ y con la cualidad de no ser compacto. Este espacio no es débilmente metrizable y mucho menos es Dieudonné-completo (de lo contrario X sería compacto), por esta misma razón tenemos que ni $A(X)$, ni $V(X)$, ni $L(X)$ son realcompactos (ni siquiera son Dieudonné-completos), aunque estos espacios si son separables.

Quedan abiertas ciertas cuestiones como:

1. ¿$L(X)$ es realcompacto si y sólo si X lo es?

2. ¿$V(X)$ es Dieudonné-completo si y sólo si X lo es?

3. ¿Si X es Dieudonné-completo, entonces $V(X)$ es completo?

4.2. Conexión entre las diferentes relaciones de equivalencia

Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se dice b**-continua** si para cada conjunto $B \subset X$ que es funcionalmente acotado existe una función $g \in C(X)$ tal que $g|B = f$. Un espacio topológico es un b_f**-espacio** si toda función b-continua es continua. Notemos que si X es pseudocompacto, entonces X es un b_f-espacio. Por otro lado, la relación de ℓ-equivalencia coincide con la relación de L-equivalencia en la clase de los b_f-espacios [33], esto es, si dos b_f-espacios X y Y son ℓ-equivalentes, entonces son L-equivalentes.

Como se mencionó en la parte introductoria de este trabajo, existen muchos problemas abiertos sobre la preservación de ciertas propiedades topológicas a través de la relación de L-equivalencia, en particular tenemos lo siguientes:

1. Puesto que la compacidad y la pseudocompacidad son ℓ-invariantes, Arhangel'skii se preguntó si la compacidad numerable y la compacidad secuencial también se preservan a través de la relación de ℓ-equivalencia. Aunque hasta el momento no existe una respuesta satisfactoria, existen algunos avances para la relación de A-equivalencia [16].

2. En [26] aparece el siguiente problema: sean X y Y espacios compactos ℓ-equivalentes. ¿Es verdad, en ZFC, que la secuencialidad de X implica la secuencialidad de Y? En lo que sigue trataremos de probar que bajo ciertas condiciones adicionales se puede solucionar este problema sin recurrir a hipótesis conjuntistas adicionales.

3. Para mostrar la conexión entre las distintas relaciones algebraico-topológicas libres probaremos que la siguiente cadena de implicaciones es (casi) irreversible:

$$X \overset{A}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{V}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{L}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{\ell}{\sim} Y \tag{4.4}$$

   Por el momento debe quedar claro que las implicaciones son verdaderas y se debe a lo siguiente:

   a) Si X y Y son A-equivalente, y como $A(Y)$ se encaja en $V(Y)$ como un subgrupo aditivo cerrado, entonces todo isomorfismo topológico $\phi\colon A(X) \to A(Y)$ se extiende a un isomorfismo topológico $\Phi\colon V(X) \to V(Y)$, con $\Phi|A(X) = \phi$. En efecto, Φ es la extensión lineal y continua de $\phi|X\colon X \to A(Y) \subset V(Y)$.

   b) Si X y Y son V-equivalentes, entonces aplicando el funtor de modificación localmente convexa [14, Section 5] obtenemos que X y Y son L-equivalentes.

c) Es claro que los espacios L-equivalentes son ℓ-equivalentes.

Notemos que si una propiedad topológica no es A-invariante, entonces no será V-, L- o ℓ-invariante, y si una propiedad topológica es ℓ-invariante, entonces será L-, V- y A- invariante. Por otro lado, si una propiedad topológica es un A-invariante, entonces no se tendrá, necesariamente, que dicha propiedad topológica sea V-, L- o ℓ-invariante, y de la misma forma, si una propiedad topológica no es ℓ-invariante, entonces no se tendrá, necesariamente, que dicha propiedad topológica no sea L-, V- o A-invariante.

Respecto a la compacidad numerable y a la compacidad secuencial tenemos lo siguiente:

Teorema 4.18. Sea X un espacio numerablemente compacto (secuencialmente compacto) tal que X^n es numerablemente compacto (secuencialmente compacto) para cada $n \in \mathbb{N}$. Si Y es V-equivalente a X, enotnces Y es numerablemente compacto (secuencialmente compacto) y Y^n es numerablemente compacto (secuencialmente compacto) para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como X es numerablemente compacto (secuencialmente compacto) tenemos que X es pseudocompacto, consecuentemente Y es pseudocompacto y ambos espacios son fuertemente V-equivalentes, incluso, debido a la Proposición 4.5 podemos ver que Y es un subconjunto cerrado de $sp_n^V(X)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $sp_n^V(X)$ es numerablemente compacto (secuencialmente compacto), entonces Y es numerablemente compacto (secuencialmente compacto). Recordemos que $A(X)$ contiene encajada una copia cerrada de X^m para cada $m \in \mathbb{N}$ [5, Corolario 7.1.16]. Este encaje está dado por la función $f\colon X^m \to A(X)$ con $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1+2x_2+\cdots+2^{m-1}x_m$, por lo tanto, si $Y \subset sp_n^V(X)$, entonces Y^m es un subconjunto cerrado de $sp_{mn}^V(X)$ que es un espacio numerablemente compacto (secuencialmente compacto). ■

Corolario 4.19. La propiedad de ser un espacio cuyas potencias finitas son numerablemente compactas (secuencialmente compactas) es una propiedad V-invariante.

Proposición 4.20. Los espacios (pseudo-)compactos y V-equivalentes son fuertemente L-equivalentes.

Corolario 4.21. La propiedad de ser un espacio cuyas potencias finitas son numerablemente compactas (secuencialmente compactas) es una propiedad fuertemente L-invariante y fuertemente ℓ-invariante.

La secuencialidad es una propiedad topológica que no es A-invariante, por lo tanto no se preserva por medio de las relaciones de V-, L- o ℓ-equivalencia, sin embargo, adicionando el hecho de que $2^{\mathfrak{t}} > \mathfrak{c}$, entonces la secuencialidad es un ℓ-invariante en la clase de los espacios compactos. La siguiente proposición muestra que la hipótesis anterior no es necesaria en el caso de la relación de A- y V-equivalencia.

Teorema 4.22. Sean X y Y dos espacios compactos y A-equivalentes. Si Y es secuencial, entonces X es secuencial. Esto es, en la clase de los espacios compactos, la propiedad de ser un espacio secuencial es un A-invariante.

Demostración. Como $X \overset{A}{\sim} Y$ y ambos espacios son compactos tenemos que $X \overset{A}{\approx} Y$, esto es, existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que X está encajado como un subespacio cerrado en $A_m(Y)$. Por otro lado, si Y es compacto y secuencial, entonces $Y^n \times \mathbb{Z}^n$ es un espacio secuencial para cada $n \in \mathbb{N}$, y en vista de la Proposición 4.2 tenemos que $A_n(X)$ es un espacio secuencial para cada $n \in \mathbb{N}$, así X es un espacio secuencial. ■

Corolario 4.23. Sean X y Y dos espacios compactos y V-equivalentes. Si Y es secuencial, entonces X es secuencial. Esto es, en la clase de los espacios compactos, la propiedad de ser un espacio secuencial es un V-invariante.

Corolario 4.24. Sean X y Y dos espacios compactos que son fuertemente L-equivalentes. Si Y es secuencial, entonces X es secuencial. Esto es, en la clase de los espacios compactos, la propiedad de ser un espacio secuencial es un L-invariante en sentido fuerte.

El hecho de que una propiedad topológica no sea un $*$-invariante no significa que no pueda ser un $*$-invariante en sentido fuerte, aquí $*$ denota a cualquiera de las letras A, V, L o ℓ. Obviamente, todo $*$-invariante es un $*$-invariante en sentido fuerte. También, el hecho de que una propiedad no sea un $*$-invariante no significa que no pueda ser un $*$-invariante en cierta clase de espacios topológicos.

En la Observación 2.2, cuando $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios vectoriales topológicos obtenemos la definición de los **conjuntos V-encajados** y los **V-retractos**, en secciones anteriores ya hemos caracterizado a los L-retractos en la clase de los espacios métricos, pero para el caso de los V-retractos, en la clase de los espacios métricos, tenemos que para caracterizar aquellos conjuntos que son V-retractos, debemos considerar que R. Cauty construyó un espacio topológico, metrizable y σ-compact [7] que no es un extensor absoluto para la clase de los espacios métricos. Esto es, no todo subconjunto cerrado de un espacio métrico será un V-retracto, incluso si el espacio es compacto. Con todo y nuestras opciones limitadas, podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 4.25. Sea X un espacio de Tychonoff, si K es un subconjunto fuertemente discreto y a lo más numerable de X, entonces K es un V-retracto.

Demostración. Para los conjuntos contables y fuertemente discretos $K \subset X$, tenemos que $L(K) = V(K)$ (en este sentido tenemos que $L(K) = \mathbb{R}^n$ o $L(K) = \varphi = L(\mathbb{N})$ es el límite inductivo de los espacios $\mathbb{R}^n$). Puesto que K es un L-retracto de X (Corolario 2.15) debe existir una retracción lineal y continua $s\colon L(X) \to L(K) = V(K)$, de modo que $r = s \circ (\mathrm{id}_X)_\#$ es una retracción lineal y continua que es evidencia suficiente para ver que K es un V-retracto de X. ■

Los $*$-retractos son esenciales para construir ejemplos de espacios $*$-equivalentes ($*$ denota, en ambos casos, a cualquiera de las letras A, V, L o ℓ), por esto, debemos recalcar, una vez más, la gran necesidad de caracterizarlos. El siguiente Teorema es una adaptación del Corolario 3.8 a las diferentes relaciones de $*$-equivalencia.

Teorema 4.26. Sean X un espacio topológico y $K \subset X$ un $*$-retracto. Entonces los espacios X^+ (X más un punto aislado que no pertenece a él) y $X/K \oplus K$ son $*$-equivalentes.

Para mostrar que la cadena de implicaciones (4.4) es (casi) irreversible tenemos que mostrar algunos ejemplos que verifiquen nuestras afirmaciones.

Ejemplo 4.27. Si en la Observación 2.2 tomamos a $\mathcal{C}$ como la clase de los espacios vectoriales topológicos débiles obtenemos la definición de los L_p-retractos o conjuntos ℓ-encajados. El ejemplo final de [33] muestra que, si X es un espacio discreto no numerable, los espacios $L_p(X)$ y $X \oplus L_p(X)$ son ℓ-equivalentes y no L-equivalentes. Para mantener la exposición de manera auto-contenida probaremos esto basándonos en la Proposición 3.14.

Puesto que X está ℓ-encajado en $L_p(X)$ existe una retracción lineal y continua $r\colon L_p(L_p(X)) \to L_p(X)$ tal que $L_p(L_p(X))$ es isomorfo topológicamente a $L_p(X) \oplus \ker r$. Si X es un espacio discreto no numerable se tiene que X es homeomorfo a $X \oplus X$, y por ende[1], $L_p(X) \oplus \ker r$ es isomorfo topológicamente a $L_p(X) \oplus L_p(X) \oplus \ker r$, este último espacio es isomorfo topológicamente a $L_p(X) \oplus L_p(L_p(X))$, y por lo tanto, $L_p(X)$ es ℓ-equivalente a $X \oplus L_p(X)$. También se tiene que la celularidad de $L(L_p(X))$ es numerable, mientras que la celularidad de $L(X \oplus L_p(X))$ es no numerable [31, V.331], así, los espacios $L_p(X)$ y $L(X \oplus L_p(X))$ no son L-equivalentes.

Corolario 4.28. Existen espacios ℓ-equivalentes y no L-equivalentes.

Ejemplo 4.29. Sea X un espacio compacto de celularidad no numerable y tomemos al conjunto ω dotado de la topología discreta, entonces los

[1] Estamos considerando que el funtor L_p, que a cada espacio topológico le asigna su espacios vectorial topológico débil libre, respeta co-productos.

espacios $X \times \omega$ y $(X \times \omega) \oplus X$ son homeomorfos y σ-compactos. Dado que $L(X \times \omega)$ es σ-compacto y es un retracto de $L(L(X \times \omega))$ podemos realizar la descomposición de $L(L(X \times \omega))$ como $L(X \times \omega) \oplus \ker r$, donde r es la retracción lineal y continua asociada al hecho de que $X \times \omega$ es un L-retracto de $L(X \times \omega)$. Pero $L(X \times \omega) \oplus \ker r$ es isomorfo topológicamente a $L((X \times \omega) \oplus X) \oplus \ker r = L(X) \oplus L(X \times \omega) \oplus \ker r$, es decir, $L(X \times \omega)$ y $L(X \times \omega) \oplus X$ son L-equivalentes.

Por un lado sabemos que la celularidad es un L-invariante en sentido fuerte, y por otro tenemos que todo grupo topológico σ-compacto posee la propiedad de Souslin, entonces $L(X \times \omega)$ tiene la propiedad de Souslin, pero $L(X \times \omega) \oplus X$ no la tiene, es decir, estos espacios no son L-equivalentes en sentido fuerte.

Corolario 4.30. Existen espacios que son L-equivalentes y no son fuertemente L-equivalentes.

Corolario 4.31. Existen espacios que son V-equivalentes y no son fuertemente V-equivalentes.

Demostración. El Ejemplo 4.29 puede modificarse haciendo que $X \times \omega$ sea un V-retracto de $V(X \times \omega)$. ■

Ejemplo 4.32. Sean $X = [0, 1]$ y $K = \{0, 1\}$, entonces K es un V-retracto de X (Teorema 4.25) y X^+ es V-equivalente a $X/K \oplus K$, sin embargo, dando paso a los espacios vectoriales topológicos libres en el sentido de Graev tenemos que $V([0, 1])$ es isomorfo topológicamente a $V((S^1)^+)$, donde X/K es homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1. El intervalo unitario $[0, 1]$ es conexo, pero $(S^1)^+$ no lo es, de aquí que estos espacios no sean A-equivalentes.

Corolario 4.33. Existen espacios compactos y metrizables V-equivalentes que no son A-equivalentes.

Corolario 4.34. Existen espacios compactos y metrizables fuertemente L-equivalentes que no son A-equivalentes.

Corolario 4.35. La conexidad no es una propiedad V-invariante (ni fuertemente L-invariante), incluso en la clase de los espacios compactos metrizables.

Finalizamos este capítulo y el presente trabajo con una par de cuestiones interesantes: ¿Todos los espacios compactos y L-equivalentes son fuertemente L-equivalentes? o por el contrario, ¿existe un par de espacios compactos L-equivalentes y no fuertemente L-equivalentes?

Conclusión

Como se mencionó en la introducción de este trabajo, uno de los objetivos de esta tesis es exhibir las semejanzas y diferencias de las distintas relaciones algebraico-topológicas libres presentadas, sin embargo, y más importante todavía, se ha hecho un esbozo de una metodología de trabajo que todavía está incompleta: es claro que muchos de los Teoremas anteriores y que se relacionan con los espacios localmente convexos libres tienen un símil en la teoría de los espacios vectoriales topológicos libres, como muestra tenemos el método de construcción de espacios V-equivalentes; a pesar de ello, la incompletitud a la que me refiero está dada por algunos "pormenores" que imposibilitan una total analogía, en este sentido encontramos dificultades para encontrar caracterizaciones de los V-retractos, aún en clases de espacios topológicas que son "generosas" como la clase de los espacios métricos.

La incompletitud anterior también presenta áreas de oportunidad que se pueden explotar, a saber:

1. La completez de $L(X)$ ha sido caracterizados hace ya algunas décadas: $L(X)$ es completo si y sólo si X es completo en el sentido de Dieudonné y todo subconjunto compacto de X es finito; inclusive, en la última sección de este trabajo se mostró que la condición de "ser un espacio Dieudonné-completo con la propiedad de que todo conjunto compacto sea finito" no sólo deriva en la completez de $L(X)$, sino que además nos brinda la propiedad extra de que sus subconjuntos compactos y linealmente independientes deban ser finitos; no obstante, a día de hoy no hay un camino claro que permita caracterizar a los espacios vectoriales topológicos libres completos, se cree que ser Dieudonné-completo debe ser suficiente y necesario, pero la vía para llegar a este resultado no es clara.

2. Pensaba que los V-retractos, en la clase de los espacios métricos, son todos los subconjuntos cerrados. Pero esto es algo que ha quedado descartado totalmente debido a los resultados de R. Cauty, aún así, no tengo idea alguna de cómo caracterizarlos aún en clases "bondadosas" de espacios topológicos.

3. Se debe encontrar una pareja de espacios L-equivalentes que no sean V-equivalentes, de hecho, tengo la sospecha (y la ilusión) de que este par puede estar conformada por espacios compactos.

4. En el trabajo anterior no queda resuelta la cuestión de que si todos los conjuntos compactos y L-equivalentes son o no fuertemente L-equivalentes.

5. En los Teoremas relacionados con la preservación de la compacidad numerable (y la compacidad secuencial), ¿se puede omitir la hipótesis de que todas las potencias finitas cumplan la misma propiedad?

A lo largo de la tesis se han mostrado aún más interrogantes, pero a fin de terminar esto con un buen sabor de boca listaré los logros más notables de este trabajo:

1. Se ha clarificado la posición de la relación de L-equivalencia respecto de sus semejantes, lo mismo que con la relación de V-equivalencia.

2. Se elaboró un método de construcción de espacios L-equivalentes (y V-equivalentes) con nociones directamente relacionadas a los espacios localmente convexos libres (espacios vectoriales topológicos libres) como los L-retractos y cuyo resultado más importante reside en la caracterización de ciertas funciones L-equivalentes, en particular, ahora sabemos que ser una función abierta, perfecta o finto-a-uno no es una propiedad que se preserve por medio de la relación de L-equivalencia.

3. Cabe mencionar que se logró caracterizar a los L-retractos en la clase de los espacios métricos y también se dieron condiciones que son suficientes para localizar L-retractos en clases más generales de espacios.

4. Se mostró que no todos los subconjuntos compactos de $L(X)$ quedan atrapados en los conjuntos $L_n(X)$.

5. Se encontraron ciertos V-invariantes y L-invariantes en sentido fuerte así como propiedades que no son V-invariantes.

6. Este trabajo muestra los primeros ejemplos de espacios L-equivalentes y no fuertemente L-equivalentes así como de espacios V-equivalentes y no A-equivalentes.

Finalmente, le dejo un mensaje al lector:

¡Aún hay mucho por trabajo por hacer!

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'ski, O. Okunev, V. G. Pestov, "Free topological groups over metrizable spaces", *Topology and its Applications*, **33**:1 (1989), 63–76.

[2] A. V. Arhangel'skii, "C_p-theory", p. 1–56 in: M. Hušek and J. van Mill, Eds., "Recent Progress in General Topology", North-Holland, Amsterdam-London-New-York, 1992.

[3] A. V. Arhangel'skii, "Topological Function Spaces", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[4] A. V. Arhangel'skii, "General Topology III: Paracompactness, Function Spaces, Descriptive Theory", *Ency. of Math. Sci.* **51**, Springer, 1995.

[5] A. V. Arhangel'skii, M. Tkachenko, "Topological Groups and Related Structures, An Introduction to Topological Algebra (Vol. 1)", Springer Science & Business Media, 2008.

[6] T. Banakh, "Fans and their applications in general topology, functional analysis and topological algebra", arXiv:1602.04857 (2016).

[7] R. Cauty, "Un espace métrique linéaire qui nést pas un rétracte absolu", *Fundamenta Mathematicae* **146**:1 (1994) 85–99.

[8] M. M. Choban, D. N. Afanas, "Spaces and sequences", *Mathematica Balkanica*, **New Series Vol. 20** (2006) 333–350.

[9] P. J. Collins, A. W. Roscoe, "Criteria for metrizability", *Proc. Amer. Math. Soc.* **90**:4 (1984) 631–640.

[10] J. Dugundji, "An extension of Tietze's theorem", *Pacific J. Math.* **1**:3 (1951) 353–367.

[11] R. Engelking, "General Topology", Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[12] J. Flood, “Free Topological Vector Spaces”, *Dissertaciones Math.*, **221** (1984).

[13] S. S. Gabriyelyan, “Free locally convex spaces and the k-space property”, *Canad. Math. Bull.* **57**:4 (2014) 803–809. k-space Property

[14] S. S. Gabriyelyan, S. A. Morris, “Free topological vector spaces”, *Topology Appl.* **223** (2017) 30–49.

[15] M. I. Graev, “Free topological groups”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **12**:3 (1948) 279–324.

[16] H. D. Hernández-Ramírez, O. Okunev, “Linear homeomorphisms of function spaces and properties close to countable compactness”, *Topology Proceedings.* **41** (2013), 1–8.

[17] R. Hidalgo-Linares, O. Okunev, “L-retracts”, arXiv:2006.12814 (2020).

[18] T. Hoshina, K. Yamazaki, “Weak C-embedding and P-embedding, and product spaces”, *Topology Appl.* **125**:2 (2002) 233–247.

[19] S.M. Karnik, S. Willard, “Natural covers and R-quotient maps”, *Canadian Math. Bull.* **25**:4 (1982), 456–461.

[20] D. Lutzer, H. Martin, “A note on the Dugundji extension theorem”, *Proceedings of the American Mathematical Society* **45**:1 (1974) 137–139.

[21] A. A. Markov, “On free topological groups”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **9**:1 (1945), 3–64.

[22] E. Michael, “Some extension theorems for continuous functions”, *Pacific J. Math.* **3**:4 (1953) 789–806.

[23] S. A. Morris, “Varieties of topological groups and left adjoint functors”, *Journal of the Australian Mathematical Society* **16**:2 (1973) 220–227.

[24] O. Okunev, “A method for constructing examples of M-equivalent spaces”, *Topology Appl.* **36**:2 (1990) 157–171.

[25] O. Okunev, “M-equivalence of products”, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **56** (1995), 192–205.

[26] O. Okunev, “Tightness of compact spaces is preserved by the t-equivalence relation”, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* **43**:2 (2002), 335–342.

[27] N. M. Pyrch, "On M-equivalence of mappings", *Matematichni Studii* **24** (2005), 21–30.

[28] H. H. Schaefer, "Topological Vector Spaces", *Graduate Texts in Mathematics* **3**, Springer, 1971.

[29] L. I. Sennott, "A necessary condition for a Dugundji extension property", *Topology Proc.* **2** (1977) 265–280.

[30] M. G. Tkachenko, "On completeness of free abelian topological groups", *Sov. Math. Dokl.* **27** (1983), 341–345.

[31] V. V. Tkachuk, "A C_p-theory Problem Book. Functional Equivalencies", Springer, New York, 2016.

[32] V. V. Uspenskii, "A characterization of compactness in terms of uniform structure of a function space", *Russian Math. Surveys*, **37**:4 (1982), 143–144.

[33] V. V. Uspenskii, "On the topology of a free locally convex space", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **270**:1 (1983) 1334–1337.

[34] V. V. Uspenskii, "Free topological groups of metrizable spaces", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **54**:6 (1990), 1295–1319; *Math. USSR-Izv.* **37**:3 (1991), 657–680.

[35] K. Yamazaki, "Extending pointwise bounded equicontinuous collections of functions", *Tsukuba J. Math.* **29**:1 (2005) 197–213.

Índice alfabético