BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

POSGRADO EN MATEMÁTICAS

ENCAJES EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Israel Molina Lara

DIRECCIÓN DE LA TESIS

DIRECTOR: Oleg Okunev

PUEBLA, PUEBLA. **MAYO, 2011**

Agradecimientos

Agradezco:

Al Doctor Oleg Okunev, por su tiempo y paciencia.

A la Doctora Esperanza Guzman Ovando por su dedicación y constancia en el desarrollo de la ciencia en México.

Al CONACYT por el apoyo recibido para la realización de mis estudios de postgrado.

Índice general

Agradecimientos **1**

Introducción **5**

1. Preliminares **7**
1.1. Terminología, Notación y Hechos Básicos 7
1.2. Espacios de Funciones 10
1.3. Mapeos Multivaluados 11
1.4. Lindelöf Σ-espacios 16
1.5. Compactos de Eberlein, Gul'ko y Corson 22
1.6. El Duplicado de Alexandroff 25

2. $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios **29**
2.1. Espacios de Funciones de Duplicados de Alexandroff 29
2.2. Compactos de Gul'ko de tamaño $\mathfrak{c}$ son $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios . . . 34

Conclusiones **39**

Bibliografía **41**

Introducción

Esta tesis está dedicada a la investigación de espacios de funciones continuas con la topología de convergencia puntual de los espacios de funciones y sus subespacios, con énfasis en el estudio de subespacios compactos.

Los espacios de funciones continuas con la topología de convergencia puntual son un objeto clásico de estudio desde el principio de la Topología General. En 1970s el estudio de los espacios de este tipo tuvo un nuevo periodo iniciado por A. V. Arhangel'skii y su escuela la cual incluye a M. M. Choban, V.V. Uspenskii, V.G. Pestov, V.V. Tkachuk, O. G. Okunev y otros estudiantes de A.V. Arhangel'skii. La abundancia de resultados obtenidos, la naturaleza del objeto estudiado y las conexiones descubiertas con varias áreas de Topología y Análisis Funcional causó mucho interes entre matemáticos de varios paises; las investigaciones de espacios de funciones se continuaron en Rusia, EEUU, Polonia, Holanda, Japón, República Checa, y en México.

Uno de los temas centrales en el estudio de los espacios de funciones es el problema de clasificación de subespacios compactos de los espacios $C_p(X)$ para los espacios X los cuales pertenecen a varias clases de espacios topológicos. En este camino aparecieron los conceptos de varios tipos de espacios compactos y se encontraron conexiones profundas con espacios compactos los cuales se encuentran en Análisis Funcional.

Consideramos la clase de los $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios, un concepto que ha aparecido en 2006 en [3] en relación con varios tipos especiales de los subespacios compactos de espacios de funciones. La motivación para esta investigación era el resultado de V.V. Tkachuk que afirma que todo compacto de Eberlein de tamaño $\mathfrak{c}$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio. En esta tesis demostramos que todo compacto de Gul'ko de tamaño $\mathfrak{c}$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio. La clase de los compactos de Gul'ko es una clase de compactos relativamente nueva introducida por S. P. Gul'ko en [7]. Esta clase ocupa la posición intermedia entre las clases bien conocidas de los compactos de Eberlein y de los compactos de Corson. Se sabe que los compactos de Corson de tamaño $\mathfrak{c}$ no siempre son $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios [3]. En el camino al resultado principal se demuestran hechos sobre la estructura de los espacios de funciones continuas de unos espacios importantes, tales como los espacios con un sólo punto no aislado y los duplicados de Alexandroff de espacios métricos separables.

Las investigaciones en este trabajo de tesis se desarrollan a lo largo de dos capítulos. En el primero de ellos se estudian los conceptos y resultados conocidos que se utizan para la demostración de los resultados principales de esta tesis. Aquí consideramos tales conceptos como las funciones cardinales de espacios topológicos, propiedades básicas de la topología de la convergencia puntual en los espacios de funciones y de mapeos asociados; mapeos multivaluados superiormente semicontinuos, los cuales son una herramienta importante de investigación de propiedades de tipo compacidad; las propiedades de las clases de los Lindelöf Σ–espacios y de $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios. Una sección de este capítulo está dedicada al estudio de la construcción importante del duplicado de Alexandroff de un espacio topológico. Finalmente en este capítulo revisamos las propiedades básicas de varios tipos de espacios compactos que se realizan como subespacios de espacios de funciones continuas.

En el segundo capítulo de la tesis exponemos los resultados, los cuales son nuevos obtenidos por el autor de la tesis. El Teorema principal de esta parte es que el espacio $C_p(AD(X))$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio para todo espacio segundo numerable X. Los resultados de G. A. Sokolov se utilizan para deducir de esta afirmación que todo compacto de Gul'ko de cardinalidad a los más $\mathfrak{c}$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio. Aquí se discuten problemas abiertos y posibles líneas de investigación en esta dirección. Los resultados obtenidos y presentados en esta tesis están publicados en [8].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Terminología, Notación y Hechos Básicos

Todos los espacios que consideramos en esta tesis son de Tychonoff (completamente regulares y de Hausdorff). Usaremos la misma terminología que en [5].

Una *vecindad* de un conjunto en un espacio será un conjunto abierto que contiene al conjunto. El símbolo $\varkappa$ siempre denotará un cardinal finito, o infinito. El símbolo ω denotará el conjunto de todos los números enteros no negativos (siempre considerado con la topología discreta), $\mathbb{N}^+ = \omega \setminus \{0\}$, $\mathfrak{c}$ denotara la cardinalidad de 2^ω. Para un conjunto X, $|X|$ denotará su cardinalidad.

El *peso* $w(X)$ de un espacio topológico X es la cardinalidad mínima de una base en X. La *densidad* $d(X)$ es la cardinalidad mínima de un conjunto denso en X. El *peso de red* $nw(X)$ de X es la mínima cardinalidad de una red en X. El peso de red no aumenta en subespacios e imagenes continuas. Además, el peso de red es multiplicativo y aditivo en el siguiente sentido (ver [5]).

Teorema 1.1.1. $nw\left(\prod\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}\right) \le \sup\{\, |A|, nw(X_\alpha) : \alpha \in A \,\}$.

Teorema 1.1.2. *Si* $X = \bigcup\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$*, entonces* $nw(X) \le \sup\{\, |A|, nw(X_\alpha) : \alpha \in A \,\}$.

Si X es un espacio compacto, entonces $nw(X) = w(X)$ (Teorema 3.1.19 en [5]).

La *estrechez* $t(X)$ de X es el cardinal más pequeño infinito $\varkappa$ tal que para todo subconjunto $A \subset X$ y todo punto $x \in \overline{A}$ existe $B \subset A$ para el cual $|B| \leq \varkappa$ y $x \in \overline{B}$. El *número de Lindelöf* $l(X)$ de X es el cardinal más pequeño infinito $\varkappa$ tal que toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta de cardinalidad menor o igual a $\varkappa$. Un espacio topológico X es llamado de *Fréchet*, si para cada $A \subset X$ y todo punto en $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $\{ x_n \in A : n \in \mathbb{N}^+ \}$ que converge a x.

Un espacio X es llamado *$\varkappa$-monolítico*, si $nw(\overline{A}) \leq \varkappa$ para todo $A \subset X$ tal que $|A| \leq \varkappa$. Un espacio X es llamado *monolítico*, si X es $\varkappa$-monolítico para todo cardinal $\varkappa$, i.e. si para todo $Y \subset X$ tenemos $d(X) = nw(Y)$ [1]

Sea X un conjunto, $\{ Y_\alpha \colon \alpha \in A \}$ una familia de espacios topológicos y $\{ f_\alpha \colon X \to Y_\alpha : \alpha \in a \}$ una familia de funciones. La topología en X generada por la familia $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ (topología *proyectica*), es la topología más débil en X respecto a la cual todas las funciones f_α son continuas. Es fácil ver que la topología proyectiva siempre existe, y la familia de todos los conjuntos de forma $f_\alpha^{-1}(U)$ con $\alpha \in A$ y U abierto en Y_α es una subase para esta topología.

Proposición 1.1.3. (1.4.9 en [5])*Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones que genera la topología de X, Z un espacio, y $g \colon Z \to X$ una función. Entonces g es continua si y sólo si para todo $f \in \mathcal{F}$ la composición $f \circ g$ es continua.*

Teorema 1.1.4. *Si $Y \subset X$ y la topología de X es generada por una familia de mapeos $\mathcal{F}$, entonces la topología de Y es generada por $\{f|Y : f \in \mathcal{F}\}$.*

Demostración. La familia de todos los conjuntos de forma $(f_\alpha|Y)^{-1}(U)$ donde $\alpha \in A$ y U es abierto en Y_α es una subase de la topología proyectiva en Y generada por las restricciones $f|Y$. Pero $(f|Y)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap Y$, y la familia de todos los conjuntos de esta forma es una subase de la topología de subsespacio de X. Pues las intersecciones con el subsespacio de elementos de una subase de topología de X forman una subase de la topología del subespacio.

$\square$

Proposición 1.1.5. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ una familia de funciones. Si X es compacto, $\mathcal{F}$ genera la topología de X si sólo si $\mathcal{F}$ separa puntos.*

Demostración. Supongamos que existen $x, y \in X$ tal que $f(x) = f(y)$, para toda $f \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ genera la topología, las vecindades básicas de x son de la forma $f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2) \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$ donde $f_i \in \mathcal{F}$, U_i abierto y $f(x) \in U_i$

para todo $1 \leq i \leq n$. Pero $f(x) = f(y)$ entonces $f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2) \cdots \cap f_n^{-1}(U_n)$ es también una vecindad de y, lo cual es una contradicción pues X es Tychonoff.

Por otra parte. Sea $\mathcal{O}_1$ la topología de X. Sea $\mathcal{O}_2$ la topología generada por la familia $\mathcal{F}$, $\mathcal{O}_2$ es la topología más gruesa que hace continuas a todas las funciones de la familia $\mathcal{F}$. De esta manera $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, luego por 3.1.14 en [5] $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

□

De la demostración de la Proposición 1.1.5, tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 1.1.6. *Toda familia de funciones $\mathcal{F}$ que genera la topología de un espacio T_1, separa puntos.*

Definición 1.1.7. Sea $\{ f_\alpha \colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A \}$, una familia de funciones. El *producto diagonal* es la función.

$$F = \Delta\{ f_\alpha : \alpha \in A \} \colon X \to \prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$$

tal que $\pi_\alpha \circ F = f_\alpha$, para toda $\alpha \in A$, donde π_α es el mapeo proyección del producto $\prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$.

.

Proposición 1.1.8. *El producto diagonal de una familia de funciones en X es encaje, si esta familia genera la topología de X.*

Demostración. sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia que genera la topología de X, y sea F el producto diagonal de $\mathcal{F}$. Entonces F es inyectiva porque $\mathcal{F}$ separa puntos y es continua (Teorema 2.3.20 en [5]). Sea $G \colon F(X) \to X$ la función inversa de F. Para verificar que G es continua basta verificar que sus composiciones con las funciones f_α, $\alpha \in A$, son continuas. De la relación $\pi_\alpha \circ F = f_\alpha$ donde π_α son las proyecciones del producto $\prod\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ se sigue que $f_\alpha \circ G = \pi_\alpha$. Entonces, G es continua. Hemos demostrado que F es un homeomorfismo de X a $F(X)$. □

$D(\varkappa)$ es el espacio discreto de cardinalidad $\varkappa$. $A(\varkappa)$ es la *supersucesión de longitud* $\varkappa$, la cual es obtenida a partir de $D(\varkappa)$ agregando el punto ∞, declarando los puntos de $D(\varkappa)$ aislados y las vecindades de ∞ como $\{p\} \cup U$

donde $U \subset X$ y $|D(\varkappa) \setminus U| < \omega$. $\lambda D(\varkappa)$ es llamada la *lindelificación a un punto de* $D(\varkappa)$, la cual es obtenida a partir de $D(\varkappa)$ agregando el punto ∞, declarando los puntos de $D(\varkappa)$ aislados y las vecindades de ∞ como $\{p\} \cup U$ donde $U \subset X$ y $|D(\varkappa) \setminus U| = \omega$.

Proposición 1.1.9. *La supersucesión* $A(\varkappa)$ *es un espacio compacto.*

Proposición 1.1.10. $\lambda D(\varkappa)$ *es un espacio de Lindelöf.*

Teorema 1.1.11. (IV.2.9 en [2])*Para* $\varkappa > \omega$ *el espacio* $(\lambda D(\varkappa))^\omega$ *es de Lindelöf.*

1.2. Espacios de Funciones

$C_p(X, Z)$ denota el espacio de todas las funciones continuas de X a Z con la topología de la convergencia puntual, es decir con la topología de subespacio del producto Z^X dotado con la topología producto de Tychonoff; $C_p(X, \mathbb{R})$ es denotado por $C_p(X)$. De la definición de la topología de la convergencia puntual se sigue que la familia de todos los conjuntos

$$O(x_1, \ldots x_n; U_1, \ldots, U_n) = \{\, f \in C_p(X) : f(x_1) \in U_1, \ldots, f(x_n) \in U_n \,\},$$

con $n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en $\mathbb{R}$, es una base de la topología de $C_p(X)$. La familia de todos los conjuntos de forma $O(x_1, \ldots x_n; U_1, \ldots, U_n)$ donde $U_1, \ldots, U_n$ son elementos de una base de $\mathbb{R}$, sigue siendo una base de $C_p(X)$.

Dado una función $f \in C_p(X)$, la familia de todos los conjuntos de forma

$$\{\, g \in C_p(X) : |g(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon, \ldots, |g(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon \,\},$$

$n \in \omega$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\varepsilon > 0$, es una base de vecindades de f en $C_p(X)$.

Es obvio que $C_p(X)$ es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^X$. Entonces $C_p(X)$ es un espacio topológico lineal localmente convexo. En particular, $C_p(X)$ es un espacio topológico homogeneo.

Sea $x \in X$. Definimos el *mapeo de evaluación* $\hat{x} \colon C_p(X) \to \mathbb{R}$ por $\hat{x}(f) = f(x)$. Las funciones $\hat{x}$, con $x \in X$, son continuas pues ellas coinciden con las restricciones a $C_p(X)$ de las proyecciones del producto $\mathbb{R}^X$. De que la topología del producto $\mathbb{R}^X$ es generada por la familia de todas las proyecciones y del Teorema 1.1.4 se sigue que la familia de todas $\hat{x}$, $x \in X$, genera la topología de $C_p(X)$.

Dado un mapeo continuo $p\colon X \to Y$, el *mapeo dual* $p^*\colon C(Y,Z) \to C_p(X,Z)$ es el mapeo definido por la regla $p^*(g) = g \circ p$ para todo $g \in C_p(Y,Z)$. Para todo mapeo continuo $p\colon X \to Y$, el mapeo dual es continuo. El mapeo p^* es un encaje de $C_p(Y)$ en $C_p(X)$ si y sólo si p es continuo y sobreyectivo, y es un encaje cerrado si y sólo si el mapeo p es cociente (ver [2]). En particular, p^* es un encaje cerrado siempre y cuando X es compacto.

En el caso cuando p es un encaje de un subespacio Y en un espacio X, el mapeo dual $p^*\colon C_p(X) \to C_p(Y)$ es llamado *el mapeo de restricción* pues su valor en toda función f es la restricción de f al subespacio Y.

Dado los subespacios $A \subset X$ y $B \subset C_p(X)$, definamos el *mapeo de reflexión* $\Phi_{AB}\colon A \to C_p(B)$ por la regla:

$$\Phi_{AB}(x)(f) = f(x) \quad \text{para todo } x \in A \text{ y } f \in B.$$

El mapeo Φ_{AB} coincide con el producto diagonal de las restricciones de funciones elementos de B al subespacio A. Se sigue que Φ_{AB} es un encaje si las restricciones de elementos de B sobre A generan la topología de A. En particular, si A es compacto, Φ_{AB} es un encaje de A en $C_p(B)$ si y sólo si la familia de funciones B separa puntos de A.

Una exposición amplia de propiedades de los espacios $C_p(X,Z)$ y sus mapeos relacionados se encuentra en el libro [2].

En este trabajo nosotros usamos los siguientes hechos básicos de los espacios $C_p(X)$.

Teorema 1.2.1. *Para todo espacio X, $w(C_p(X)) = w(C_p(X,[-1,1])) = |X|$. Si X es cero dimensional, entonces $w(C_p(X,2)) = w(C_p(X,2^\omega)) = |X|$.*

Teorema 1.2.2. *Para todo espacio X, $nw(C_p(X)) = nw(C_p(X,[-1,1])) = nw(X)$. Si X es cero dimensional, entonces $nw(C_p(X,2)) = nw(C_p(X,2^\omega)) = nw(X)$.*

Teorema 1.2.3. *Para todos espacios X y Z y todo cardinal $\varkappa$, los espacios $C_p(X \times D(\varkappa), Z)$, $C_p(X, Z^\varkappa)$ y $C_p(X,Z)^\varkappa$ son homeomorfos.*

1.3. Mapeos Multivaluados

Definición 1.3.1. Sean X y Y dos conjuntos. Un *mapeo multivaluado* de X a Y es un mapeo que asigna a todo punto de X un subconjunto de Y (no necesarimente diferente del conjunto vacío).

Para un mapeo multivaluado $p\colon X \to Y$ y $A \subset Y$, la *imagen* de A bajo p es el conjunto

$$p(A) = \bigcup\{p(x) : x \in A\}.$$

Un mapeo multivualuado $p\colon X \to Y$ es *sobre* Y si $p(X) = Y$.

Si $p\colon X \to Y$ y $q\colon Y \to Z$ son mapeos multivaluados, entonces la *composición* de p y q es el mapeo multivaluado $q \circ p\colon X \to Z$ tal que $(q \circ p)(x) = q(p(x))$ para todo $x \in X$.

Definición 1.3.2. Un mapeo multivaluado $p\colon X \to Y$ es llamado *superiormente semicontinuo* (*ssc*), si para todo conjunto abierto $V \subset Y$ el conjunto $\{\, x \in X : p(x) \subset V \,\}$ es abierto en X.

Proposición 1.3.3. *Sea $p\colon X \to Y$ un mapeo multivaluado. p es ssc si y sólo si para todo $F \subset Y$ cerrado, el conjunto $\{\, x \in X : p(x) \cap F \neq \emptyset \,\}$ es cerrado.*

Demostración. Observemos que

$$X \setminus \{\, x \in X : p(x) \cap F \neq \emptyset \,\} = \{\, x \in X : p(x) \subset Y \setminus F \,\}$$

y

$$X \setminus \{\, x \in X : p(x) \subset V \,\} = \{\, x \in X : p(x) \cap Y \setminus V \neq \emptyset \,\}.$$

□

Definición 1.3.4. Sean $p\colon X \to Y$ un mapeo multivaluado y $x_0 \in X$. Decimos que p es *superiormente semicontinuo en x_0*, si para toda vecindad V de $p(x_0)$ en Y, existe una vecindad U de x_0 en X tal que $p(U) \subset V$.

Proposición 1.3.5. *Sea $p\colon X \to Y$ un mapeo multivaluado. p es ssc si y sólo si p es ssc en todo punto de X.*

Demostración. Si p es ssc, $x_0 \in X$ y V es una vecindad abierta en Y de $p(x_0)$, entonces $U = \{\, x \in X : p(x) \subset V \,\}$ es una vecindad de x_0 tal que $p(U) \subset V$. Eso demuestra que p es ssc en el punto x_0.

Por otra parte. Supongamos que p es ssc en todo punto de X. Si V es un conjunto abierto en Y y $x_0 \in \{\, x \in X : p(x) \subset V \,\}$, entonces V es una vecindad de $p(x_0)$, y por la continuidad superior de p en x_0, existe una vecindad U de x_0 tal que $p(U) \subset V$. Hemos demostrado que $\{\, x \in X : p(x) \subset V \,\}$ contiene una vecindad abierta para cualquiera de sus puntos, de donde sigue que este conjunto es abierto. □

Definición 1.3.6. Un mapeo multivaluado $p\colon X \to Y$ es llamado *compacto valuado* (*cv*), si para todo $x \in X$, $p(x)$ es compacto.

Proposición 1.3.7. *Sean $K \subset X$ compacto y $p\colon X \to Y$ compacto valuado superiormente semicontinuo. Entonces $p(K)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta en Y de $p(K)$; sea

$$\mathcal{U}' = \{\, V \subset Y : V \quad \text{es unión finita de elementos de} \quad \mathcal{U}\,\}.$$

Es obvio que la cubierta $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita de $p(K)$ si y sólo si $\mathcal{U}'$ tiene una subcubierta finita de $p(K)$.

Para todo $x \in K$, $p(x)$ es compacto, así existe $V_x \in \mathcal{U}'$ tal que $p(x) \subset V_x$. Sea

$$W_x = \{\, z \in X : p(z) \subset V_x \,\}.$$

Para todo $x \in X$, W_x es abierto en X pues p es ssc, y $x \in W_x$. Como $\{\, W_x : x \in K \,\}$ es una cubierta abierta de K, existe una subcubierta finita $\{\, W_{x_i} : 1 \le i \le n \,\}$ de esta cubierta de K, de esta manera $\{\, V_{x_i} : 1 \le i \le n \,\}$ es una subcubierta finita de $p(K)$ contenida en $\mathcal{U}'$. $\square$

Un argumento similar demuestra la siguiente afirmación.

Proposición 1.3.8. *Si $p\colon X \to Y$ es cvssc y $p(X) = Y$, entonces $l(Y) \le l(X)$.*

Demostración. Sean $l(X) = \varkappa$ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Sea

$$\mathcal{U}' = \{\, V \subset Y : V \quad \text{es unión finita de elementos de} \, \mathcal{U}' \,\}.$$

Es obvio que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta de cardinalidad $\le \varkappa$ si $\mathcal{U}'$ tiene una subcubierta de cardinalidad $\le \varkappa$.

Para todo $x \in K$, $p(x)$ es compacto, así existe $V_x \in \mathcal{U}'$ tal que $p(x) \subset V_x$. Por otra parte, sea

$$W_x = \{\, z \in X : p(z) \subset V_x \,\},$$

para todo $x \in X$. W_x es abierto en X pues p es ssc, y $x \in W_x$. Entonces $\{\, W_x : x \in X \,\}$ es una cubierta abierta de X, y existe una subcubierta $\{\, W_{x_\alpha} : \alpha \in A \,\}$ de esta cubierta con $|A| \le \varkappa$. De esta manera $\{\, V_{x_\alpha} : \alpha \in A \,\}$ es una subcubierta de cardinalidad a lo más $\varkappa$ de la cubierta $\mathcal{U}'$. $\square$

Corolario 1.3.9. *Las imagenes de espacios de Lindelöf bajo mapeos cvssc son de Lindelöf.*

A partir de una función $f\colon X \to Y$ podemos definir un mapeo uno valuado asignando a cada $x \in X$ el singulete $\{ f(x) \}$. Aclarado esto en adelante y sin causar confusión, consideramos una función $f\colon X \to Y$ como un mapeo uno valuado, que asigna a cada $x \in X$ el singulete $f(x)$.

Proposición 1.3.10. *Si $f\colon X \to Y$ es continua, entonces f es cvssc.*

Demostración. Como $f(x)$ es un singulete, es compacto. Por otra parte, para todo $V \subset Y$ abierto, $\{ x \in X : p(x) \subset V \} = p^{-1}(V)$ es abierto por la continuidad de f. □

Proposición 1.3.11. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. $f^{-1}\colon Y \to X$ es cvssc si y sólo si f es perfecta.*

Demostración. Observemos que f^{-1} es cv si y sólo si las fibras de f son compactas. La parte de ssc se sigue de la Proposición 1.3.3 y de que

$$f(F) = \{ y \in Y : f^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset \}$$

□

Proposición 1.3.12. *Sean $p\colon X \to Y$ y $q\colon Y \to Z$ cvssc, entonces $q \circ p\colon X \to Z$ es cvssc.*

Demostración. Veamos que $q \circ p$ es ssc. Sea $V \subset Z$ abierto en Z, definimos $W = \{ y \in Y : q(y) \subset V \}$. Como q es ssc, W es abierto en Y. Así $\{ x \in X : p(x) \subset W \}$ es abierto en X pues p es ssc. Más aún,

$$\{ x \in X : p(x) \subset W \} = \{ x \in X : q \circ p(x) \subset V \}.$$

De esta manera, $q \circ p$ es ssc.

Por otra parte, si p es cv, entonces $p(x)$ es compacto para todo $x \in X$, más aún como q es cvssc, por la Proposición 1.3.7, $q \circ p(x)$ es compacto. □

Proposición 1.3.13. *Si $p\colon X \to Y$ y $q\colon Z \to T$ son cvssc entonces $(p \times q)\colon X \times Z \to Y \times T$ con $(p \times q)(x, z) = p(x) \times q(z)$ es cvssc.*

Demostración. Como $p(x)$ y $q(z)$ son compactos, $p(x) \times q(z)$ es compacto, y entonces $p \times q$ es cv. Por otra parte. Sean V abierto en $Y \times T$ y $(x_0, z_0) \in W = \{ (x, z) \in X \times Z : p(x) \times q(z) \subset V \}$. Como $(p \times q)(x_0, y_0)$ es compacto y contenido en V, por Teorema de Wallace 3.2.10 en [5] existen abiertos $U_Y \subset Y$ y $U_T \subset T$ tales que $(p \times q)(x_0, z_0) \subset U_Y \times U_T \subset V$. Ahora como p y q son ssc, los conjuntos $U_X = \{ x \in X : p(x) \subset U_Y \}$ y $U_Z = \{ z \in Z : q(z) \subset U_T \}$ son abiertos. Así $U_X \times U_Z$ es una vecindad abierta de (x_0, z_0) contenida en W. Luego entonces W es abierto, y $p \times q$ ssc. $\square$

Proposición 1.3.14. *Sea $X \subset Y$ y sea $i \colon X \hookrightarrow Y$ un encaje. El mapeo multivaluado i^{-1} es ssc si y sólo si X es cerrado en Y.*

Demostración. Observemos que para todo $F \subset X$,

$$\{ y \in Y : i^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset \} = F.$$

Si i^{-1} es ssc, como X es cerrado en X, por la Proposición 1.3.3 tenemos que $\{ y \in Y : i^{-1}(y) \cap X \neq \emptyset \}$ es cerrado en Y.

Por otra parte, si X es cerrado en Y, todo $F \subset X$ cerrado en X es cerrado en Y, así $\{ y \in Y : i^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset \}$ es cerrado en Y. Por Proposición 1.3.3 i^{-1} es ssc. $\square$

Corolario 1.3.15. *Sean $p \colon M \to X$ un mapeo multivaluado y Y un subespacio de X.*

(*i*) *Si $p \colon M \to X$ es cvscc y Y es cerrado entonces el mapeo $q \colon M \to Y$ con $q(x) = i^{-1} \circ p(x)$ para todo $x \in M$ es cvscc.*

(*ii*) *Si $q \colon M \to Y$ es cvssc entonces el mapeo $p \colon M \to X$ con $p(x) = q(x)$ para todo $x \in M$ es cvscc.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.14, tenemos que $i^{-1} \colon X \to Y$ es cvssc. De esta manera $q = i^{-1} \circ p$ es cvscc pues es composición de mapeos cvssc. Similarmente, en (ii), $p = i \circ q$ es la composición de mapeos cvssc. $\square$

Lema 1.3.16. *Si $p \colon X \to Y$ es un mapeo cvssc, entonces la gráfica de p es cerrada en $X \times \beta Y$.*

Demostración. Denotemos como Γ a la gráfica de p, así $\Gamma = \{ (x, y) : y \in p(x) \}$. Sea $(x_0, y_0) \notin \Gamma$, es decir $y_0 \notin p(x_0)$. Sean W y V dos abiertos en βY tales que $p(x_0) \subset W$, $y_0 \in V$ y $W \cap V = \emptyset$, (ver Teoremas 3.1.6 y 3.1.9 en [5]). Definamos $U = \{ x \in X : p(x) \subset W \}$, como p es ssc, U es abierto en X y contiene a x_0, así $U \times V$ es una vecindad de (x_0, y_0). Ahora si $(x, y) \in U \times V$ entonces $p(x) \subset W$, pero $W \cap V = \emptyset$, de donde $y \notin p(x)$, y $(x, y) \notin \Gamma$. $\square$

Teorema 1.3.17. *Sea $p\colon X \to Y$ un mapeo multivaluado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) p es cvssc.

(ii) p es la composición del inverso de un mapeo perfecto sobre un subespacio cerrado de X y de una función continua.

(iii) Existen un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $X \times K$ y una función continua $f\colon F \to Y$ tales que $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_X^{-1}$, donde $\pi_X\colon X \times K \to X$ es la función proyección y $i_F\colon F \to X \times K$ es un encaje.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (iii). Definamos K$=\beta Y$, y sea F la gráfica de p. Por el Lema 1.3.16 F, es cerrado. Sea f el mapeo definido como la restricción a F del mapeo $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ la proyección en Y, con lo cual f es continuo. Veamos la siguiente composición.

$$f \circ i^{-1} \circ \pi_X^{-1}(x) = f \circ i^{-1}(\{\, x \,\} \times \beta Y) = f(\{x\} \times p(x)) = p(x).$$

Así $p = f \circ i^{-1} \circ \pi_X^{-1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Veamos que $\pi_X\colon X \times K \to X$ es un mapeo perfecto. Por Lema de Kuratowski (Teorema 3.1.6 en [5]) es cerrado, más aún $\pi_X^{-1}(x) = \{\, x \,\} \times K$ es compacto, luego entonces π_X es perfecto. Sea $g = \pi_x \restriction F$, veamos que es perfecto. Sea $C \subset F$, como F es cerrado entonces C es cerrado en $X \times K$, de esta manera $g(C) = \pi_X(C)$ es cerrado. Por otra parte, $g^{-1}(x) = (\{x\} \times K) \cap F$, es decir es la intersección de dos cerrados. Así g^{-1} es compacto en $X \times K$. Finalmente tenemos que $g = \pi_x \circ i_F$. De esta manera $f \circ g^{-1} = p$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Por las Proposiciones 1.3.10 y 1.3.11, el inverso de un mapeo perfecto y una función continua son cvssc, finalmente por la Proposición 1.3.12 la composición de ellas es cvssc. □

1.4. Lindelöf Σ-espacios

Definición 1.4.1. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una cubierta de X. Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X es llamada una *red módulo* $\mathcal{C}$ si para todo elemento K de $\mathcal{C}$ y toda vecindad U de K, existe un elemento N de $\mathcal{N}$ tal que $K \subset N \subset U$.

Definición 1.4.2. Un espacio topológico X es llamado *Lindelöf Σ-espacio* si existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una familia numerable $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X la cual es una red módulo $\mathcal{C}$.

La siguiente proposición reune varias caracterizaciones muy conocidas de los Lindelöf Σ-espacios.

Proposición 1.4.3. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *X es un Lindelöf Σ-espacio.*

(ii) *Existen un espacio segundo numerable M y un mapeo cvssc $p\colon M \to X$ tales que $p(M) = X$.*

(iii) *Existen un espacio segundo numerable M, un espacio L y mapeos $g\colon L \to M$ y $f\colon L \to X$ tales que g es perfecto y f es continuo y sobre.*

(iv) *Existen un espacio segundo numerable M, un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y un mapeo continuo $f\colon F \to X$ tales que $f(F) = X$.*

Demostración. (ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que $X = p(M)$, donde $p\colon M \to X$ es un mapeo multivaluado cvssc y M un espacio segundo numerable. Como p es cv, la familia $\mathcal{C} = \{\, p(m) : m \in M \,\}$ es una cubierta compacta de X. Ahora seleccionemos una base numerable $\mathcal{B}$ en M y definamos $\mathcal{N} = \{\, p(V) : V \in \mathcal{B} \,\}$, esta es la red numerable módulo $\mathcal{C}$ que buscamos. En efecto, sea U una vecindad de $K \in \mathcal{C}$. Como p es scc, el conjunto $\{\, m \in M : p(m) \subset U \,\}$ es abierto en M, y así podemos encontrar $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset \{\, m \in M : p(m) \subset U \,\}$ con lo que $p(x) \subset p(V) \subset U$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sean X un espacio topológico, $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X, y $\mathcal{N} = \{\, N_k : k \in \omega \,\}$ una red módulo $\mathcal{C}$. Definimos $M = \{\, (n_0, n_1, \dots, n_k, \dots) \in \omega^\omega : \bigcap_{i\in\omega} N_{n_i} \in \mathcal{C}$ y para todo $N \in \mathcal{N}$ con $\bigcap_{i\in\omega} N_{n_i} \subset N$ existe k con $N = N_{n_k} \,\}$. Observamos que este conjunto no es vacío, ya que por ser el espacio T_1, cada compacto en X se puede ver como la intersección de todas las vecindades que lo contienen, más aún como la intersección de todos los elementos de la red que lo contienen. Definamos $p\colon M \to X$, con $p((n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)) = \bigcap_{i\in\omega} N_{n_i}$. Por definición $p((n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)) = \bigcap_{i\in\omega} N_{n_i} \in \mathcal{C}$, así p es cv, más aún sobreyectiva, pues $\bigcup_{x\in M} p(x) = \bigcup \mathcal{C}$. Veamos que p es ssc. Sea $V \subset X$ un conjunto abierto, demostraremos que $W = \{\, m \in M : p(m) \subset V \,\}$

es abierto. Sea $m_0 \in W$, tenemos que $p(m_0) \subset V$, pero $\mathcal{N}$ es una red módulo $\mathcal{C}$, entonces existe $N \in \mathcal{N}$ con $p(m_0) \subset N \subset V$. Ahora por la definición de M existe $k \in \omega$ tal que $N = N_{n_k}$. Sea $\pi_n \colon \omega^\omega \to \omega$ la proyección n-ésima. Definimos $U = \{ m \in M : \pi_k(m) = n_k \}$. Este conjunto es abierto en M, y $p(U) \subset W$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Por (ii) existe $p\colon M \to X$ cvssc con $p(M) = X$ y M segundo numerable. Ahora por el Teorema 1.3.17 existen $g\colon L \to M$ perfecto y $f\colon L \to X$ continua con $p = f \circ g^{-1}$. De esta manera $p(M) = f(g^{-1}(M)) = f(L)$, así f es sobreyectiva en X.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Por (iii), existen M segundo numerable, $g\colon L \to M$ perfecto y $f\colon L \to X$ continua y sobreyectiva, definamos $p = f \circ g^{-1}$, por ser f sobre tenemos que $p(M) = f \circ g(M) = f(L) = X$, otra vez por el Teorema 1.3.17 existen un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y una función continua $f\colon F \to X$ tales que $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}$, donde $\pi_M\colon M \times K \to X$ es la función proyección y $i_F\colon F \to M \times K$ es un encaje. Por otra parte, tenemos que $f(F) = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}(M) = p(M)$. De esta manera f es sobre.

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Por (iv), existen un espacio segundo numerable M, un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y un mapeo continuo $f\colon F \to X$ tales que $f(F) = X$. Definimos $p = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}$, por el Teorema 1.3.17 tenemos que p es cvssc, más aún $p(M) = f \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}(M) = f(F) = X$. □

Corolario 1.4.4. *Todo Lindelöf Σ-espacio es de Lindelöf.*

Usaremos la definición de clase perfecta que usa Sokolov en [14].

Definición 1.4.5. Una clase $\mathcal{P}$ de espacios topológicos es llamada *perfecta* si ella satisface cada una de las siguientes condiciones

(*i*) $\mathcal{P}$ contiene todos los compactos y el discreto numerable ω.

(*ii*) Si $X \in \mathcal{P}$ y Y es imagen continua de X o subconjunto cerrado de X entonces $Y \in \mathcal{P}$.

(*iii*) Si $X_n \in \mathcal{P}$ para todo $n \in \omega$, entonces $\prod_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{P}$.

Proposición 1.4.6. *Si $\mathcal{P}$ es una clase perfecta, entonces $\mathcal{P}$ contiene cualquier unión numerable e intersección numerable de sus elementos.*

Demostración. Sea X la unión de sus subespacios X_n con $X_n \in \mathcal{P}$, $n \in \omega$. Entonces X es imagen continua de la suma discreta $Y = \bigoplus_{n\in\omega} X_n$, además Y es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\prod_{n\in\omega} X_n \times \omega$, así por (i) y (ii) de la definición de clase perfecta, $X \in \mathcal{P}$.

Por otra parte. Supongamos que $X = \bigcap_{n\in\omega} X_n$. Entonces X es naturalmente homeomorfo a la diagonal en $\prod_{n\in\omega} X_n$ que es un subespacio cerrado del producto, de esta manera por (ii) y (iii) de la definición, $X \in \mathcal{P}$.

$\square$

Proposición 1.4.7. *La clase de Lindelöf Σ-espacios es perfecta.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.5 en [5] todo espacio compacto X de peso $m \geq \aleph_0$ se encaja en un cubo de Tychonoff I^m, más aún X es cerrado en I^m. De esta manera por la Proposición 1.3.14, existe un mapeo cvssc de un I^m a X, así X es un Lindëlof Σ-espacio. De la definición 1.4.2 tenemos que todo espacio con una red numerable es un Lindëlof Σ-espacio, por lo cual ω también lo es.

Ahora por las Proposiciones 1.3.12 y 1.4.3 tenemos que la clase de los Lindëlof Σ-espacios es cerrada bajo mapeos cvssc. Así se cumple (ii) de la definición 1.4.5 por las Proposiciones 1.3.7 y 1.3.14.

Por otra parte. Sean X_n espacios unos Lindëlof Σ-espacios para todo $n \in \omega$. Sean $\mathcal{C}_n$ una cubierta compacta de X_n y $\mathcal{N}_n$ una red numerable módulo $\mathcal{C}_n$. Tenemos que la familia $\mathcal{C}$ de los conjuntos $\prod_{n\in\omega} C_n$ donde $C_n \in \mathcal{C}_n$ es una cubierta compacta del producto cartesiano $\prod_{n\in\omega} X_n$ y la familia de conjuntos $\prod_{n\in\omega} N_n$ donde $N_n \in \mathcal{N}_n$ y $N_n \neq X_n$ sólo para un número finito de $n \in \omega$, es una red módulo $\mathcal{C}$. $\square$

Lema 1.4.8. *Todo espacio σ-compacto es Lindelof Σ. Todo espacio $K_{\sigma\delta}$ es Lindelöf Σ.*

Eso se sigue de las Proposiciones 1.4.7 y 1.4.6

Definición 1.4.9. [3] Un espacio X es un $L\Sigma(\leq \omega)$-*espacio* si existen un espacio segundo numerable M y un mapeo cvssc $p\colon M \to X$ tales que $p(M) = X$ y $p(m)$ es un compacto segundo numerable para todo $m \in M$.

Un espacio X es un $L\Sigma(\leq 2)$-*espacio* si existen un espacio segundo numerable M y un mapeo cvssc $p\colon M \to X$ tal que $p(M) = X$ y $p(m)$ tiene a lo más dos puntos para todo $m \in M$.

Es obvio que todo $L\Sigma(\leq 2)$-espacio es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.

Un razonamiento similar al usado en la demostración de la equivalencia entre (i) y (ii) en la Proposición 1.4.3, da la siguiente afirmación.

Proposición 1.4.10. *Un espacio X es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio si y sólo si existen una cubierta $\mathcal{C}$ de X tal que todo elemento de $\mathcal{C}$ es un compacto metrizable y una red numerable módulo $\mathcal{C}$.*

El siguiente teorema suma unos resultados de [3].

Teorema 1.4.11. *La clase de todos los $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios es cerrada respecto a subespacios cerrados, imagenes continuas, uniones, intersecciones y productos numerables.*

Teorema 1.4.12. *La clase de todos los $L\Sigma(\leq 2)$-espacios es cerrada respecto a subespacios cerrados, imagenes continuas, y uniones numerables.*

Proposición 1.4.13. *Todo $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio tiene peso de red menor o igual a $\mathfrak{c}$ y la cardinalidad menor igual a $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Sean X un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio, M un espacio segundo numerable y $p\colon M \to X$ un mapeo cvssc tales que $p(M) = X$ y para todo $m \in M$, $p(m)$ es un compacto segundo numerable. Entonces $X = \bigcup\{\, p(m) : m \in M \,\}$, y entonces X es la unión de a lo más $\mathfrak{c}$ de subespacios de peso a lo más numerable, de donde $nw(X) \leq \mathfrak{c}$.

Todo compacto segundo numerable tiene cardinalidad menor o igual a $\mathfrak{c}$. Se sigue que X tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. $\square$

Definición 1.4.14. Sean $p_1\colon M_1 \to X$ y $p_2\colon M_2 \to X$ unos mapeos multivaluados. La *intersección* de p_1 y p_2 es el mapeo multivaluado $(p_1 \cap p_2)\colon M_1 \times M_2 \to X$ tal que $(p_1 \cap p_2)(m_1, m_2) = p_1(m_1) \cap p_2(m_2)$ para todo $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$.

Lema 1.4.15. *Sean $p_1\colon M_1 \to X$, $p_2\colon M_2 \to X$ mapeos cvssc y $q\colon M_1 \times M_2 \to X$ el mapeo intersección de p_1 y p_2. Entonces q es cvssc.*

Demostración. Como todos nuestros espacios los consideramos Tychonoff, $p_1(m_1) \cap p_2(m_2)$ es compacto (ver la Proposición 3.1.2 y el Teorema 3.1.8 en [5]). Por otra parte, sean $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, $F = q(m_1, m_2) = p_1(m_1) \cap p_2(m_2)$, y V una vecindad abierta de F. Por la Proposición 1.3.5, necesitamos encontrar una vecindad U_1 de m_1 en M_1 y U_2 de m_2 en M_2 tal que $q(U_1 \times U_2) \subset V$.

Definamos $F_1 = p_1(m_1) \setminus V$ y $F_2 = p_2(m_2) \setminus V$. Entonces F_1 y F_2 son compactos ajenos en Y. Fijemos vecindades abiertas ajenas V_1 y V_2 de F_1 y F_2 respectivamente. Entonces $W_1 = V \cup V_1$ y $W_2 = V \cup V_2$ son conjuntos abiertos tales que $p_1(m_1) \subset W_1$, $p_2(m_2) \subset W_2$, y $W_1 \cap W_2 = V$. Los conjuntos

$$U_1 = \{\, m \in M_1 : p_1(m) \subset W_1 \,\}$$

y

$$U_2 = \{\, m \in M_2 : p_2(m) \subset W_2 \,\}$$

son los que necesitamos.

□

Teorema 1.4.16. ([8]) *Si X es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio, y Y es un Lindelöf Σ-subespacio de X, entonces Y es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.*

Demostración. Sean $p_1\colon M_1 \to X$, $p_2\colon M_2 \to Y$ mapeos cvssc de M_1 y M_2 espacios segundo numerables a X y Y respectivamente tal que las imagenes de puntos bajo p_1 tienen peso a lo más ω. Definamos el mapeo p_2' como en el inciso (i) del Corolario 1.3.15. Entonces el mapeo $q = p_1 \cap p_2'$ es cvssc, mapea el espacio segundo numerable $M_1 \times M_2$ sobre X, y todas las imagenes q son segundo numerables. Definamos ahora el mapeo q' como en el inciso (ii) de el Corolario 1.3.15, es cvssc, mapea el espacio segundo numerable $M_1 \times M_2$ sobre Y, y todas las imagenes q' son segundo numerables. □

Teorema 1.4.17. ([8]) *Sea X un Lindelöf Σ-espacio, Y un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio, e $i\colon X \to Y$ una función continua uno a uno. Entonces X es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio.*

Demostración. La imagen $i(X)$ es un Lindelöf Σ-subespacio de Y, así por Corolario 1.4.16, ella es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio. Así, podemos asumir que i es sobreyectiva.

Por la Proposición 1.4.3, X es la imagen continua de una preimagen perfecta de algún espacio segundo numerable M. Por un lema de Arhangel'skii

(Lema II.6.22 en [2]), X es imagen continua de un subespacio cerrado de $M \times Y$. Como la propiedad de ser $L\Sigma(\leq 2)$-espacio es estable respecto a productos con espacios segundo numerables, subespacios cerrados e imagenes continuas, X es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio. $\square$

1.5. Compactos de Eberlein, Gul'ko y Corson

Definición 1.5.1. Sea $\varkappa$ un cardinal infinito. El espacio $\Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$ es el subespacio del producto $\mathbb{R}^{\varkappa}$ que consiste de todas las funciones de $f\colon \varkappa \to \mathbb{R}$ que son iguales a cero excepto en un conjunto a lo más numerable. El espacio $\Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}$ es el subespacio del producto $\mathbb{R}^{\varkappa}$ que consiste de todas las funciones tales que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in \varkappa : |f(x)| > \varepsilon\}$ es finito.

Proposición 1.5.2. *El espacio $\Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}$ es homeomorfo a $C_p(A(\varkappa))$.*

Demostración. Sea $i\colon C_p(A(\varkappa)) \to \mathbb{R} \times \Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}$ definida por

$$i(f)(\alpha) = (f(\infty), f(\alpha) - f(\infty)) \text{ para toda } \alpha \in \varkappa.$$

Entonces i es continua porque la primera coordenada de i es $\hat{\infty}$, y la segunda coordenada es la composición del mapeo continuo lineal $\hat{\alpha} - \hat{\infty}$ y el mapeo de restricción de $A(\varkappa)$ a $D(\varkappa)$. Verifiquemos que el mapeo i está bien definido, es decir, que $i(C_p(A(\varkappa))) \subset \mathbb{R} \times \Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}$.

Sean $f \in C_p(A(\varkappa))$ y $\varepsilon > 0$. Entonces el conjunto de los puntos $\alpha \in \varkappa$ tales que $|f(\alpha) - f(\infty)| \geq \varepsilon$ es un conjunto cerrado en $A(\varkappa)$ que no contiene el punto ∞, y por lo tanto es finito. Se sigue que $i(f) \in \mathbb{R} \times \Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}$.

Definimos $j\colon \mathbb{R} \times \Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa} \to C_p(A(\varkappa))$ por

$$j(r, g)(\alpha) = r + g(\alpha) \text{ para todo } \alpha \in \varkappa.$$

y

$$j(r, g)(\infty) = r.$$

Entonces $j \circ i = \mathrm{Id}_{C_p(A(\varkappa))}$ y $i \circ j = \mathrm{Id}_{\mathbb{R} \times \Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}}$, e i es un homeomorfismo.

Para concluir la demostración queda observar que $\mathbb{R} \times \Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}$ es homeomorfo a $\Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa}$.

$\square$

Proposición 1.5.3. *El espacio $\Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$ es homeomorfo a $C_p(\lambda D(\varkappa))$.*

Demostración. Sea $i\colon C_p(\lambda D(\varkappa)) \to \mathbb{R} \times \Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$ definida por

$$i(f)(\alpha) = (f(\infty), f(\alpha) - f(\infty)) \text{ para toda } \alpha \in \varkappa.$$

Entonces i es continua porque la primera coordenada de i es $\hat{\infty}$, y la segunda coordenada es la composición del mapeo continuo lineal $\hat{\alpha} - \hat{\infty}$ y el mapeo de restricción de $\lambda D(\varkappa)$ a $D(\varkappa)$. Verifiquemos que el mapeo i está bien definido, es decir, que $i(C_p(\lambda D(\varkappa))) \subset \mathbb{R} \times \Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$.

Sea $f \in C_p(\lambda D(\varkappa))$. Entonces el conjunto P de los puntos $\alpha \in \varkappa$ tales que $f(\alpha) \neq f(\infty)$ es la unión de los conjuntos $F_n = \{\, \alpha \in \varkappa : |f(\alpha) - f(\infty)| \geq 1/(n{+}1) \,\}$, $n \in \omega$. Los conjuntos F_n son cerrados por la continuidad de f y no contienen el punto ∞. Por lo tanto los conjuntos F_n son a lo más numerables, y entonces P es a lo más numerable. Se sigue que $i(f) \in \mathbb{R} \times \Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$.

Definimos $j\colon \mathbb{R} \times \Sigma\mathbb{R}^{\varkappa} \to C_p(\lambda D(\varkappa))$ por

$$j(r,g)(\alpha) = r + g(\alpha) \text{ para todo } \alpha \in \varkappa.$$

y

$$j(r,g)(\infty) = r.$$

Entonces $j \circ i = \mathrm{Id}_{C_p(\lambda D(\varkappa))}$ y $i \circ j = \mathrm{Id}_{\mathbb{R} \times \Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}}$, e i es un homeomorfismo.

Para concluir la demostración queda observar que $\mathbb{R} \times \Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$ es homeomorfo a $\Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$.

□

Definición 1.5.4. Un espacio compacto X es un *compacto de Eberlein* si X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(K)$ para algún espacio compacto K.

Definición 1.5.5. Un espacio compacto X es un *compacto de Corson* si X es homeomorfo a un subespacio de $\Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$ para algún cardinal $\varkappa$.

Definición 1.5.6. Un espacio compacto X es un *compacto de Gul'ko* si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ.

Teorema 1.5.7. ([4]) *Sea X un compacto de Eberlein. Entonces X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(A(\varkappa))$ para algún cardinal infinito $\varkappa$.*

Corolario 1.5.8. *Todo compacto de Eberlein es un compacto de Corson.*

Eso se sigue de que $\Sigma_*\mathbb{R}^{\varkappa} \subset \Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$.

La siguiente afirmación fue demostrada en [4] vea también IV.2.5 en [2].

Teorema 1.5.9. *Si X es un compacto de Eberlein, entonces $C_p(X)$ es un espacio $K_{\sigma\delta}$.*

Corolario 1.5.10. *Todo compacto de Eberlein es un compacto de Gul'ko.*

Teorema 1.5.11. ([7]) *Todo compacto de Gulko es un compacto de Corson.*

Existen compactos de Gul'ko que no son compactos de Eberlein y compactos de Corson que no son de Gul'ko ([7]).

Teorema 1.5.12. (IV.4.12 en [2]) *Todo compacto de Corson es monolítico.*

Proposición 1.5.13. *Todo compacto de Corson tiene estrechez numerable.*

Demostración. Como $\lambda D(\varkappa)$ es un Lindelöf P-espacio, entonces para todo $n \in \mathbb{N}^+$, $(\lambda D(\varkappa))^n$ es de Lindelöf (o ver el Teorema 1.1.11). Por el Teorema de Arkhangel'skii-Pytkeev (II.1.1 en [2]), $t(C_p(\lambda D(\varkappa)) \leq \omega$. Por la Proposición 1.5.3, $\Sigma\mathbb{R}^{\varkappa}$ es homeomorfo a $C_p(\lambda D(\varkappa))$, y la demostración está completa. $\square$

Corolario 1.5.14. *Todo compacto de Corson es de Fréchet.*

Demostración. Sean X un compacto de Corson, $A \subset X$, y $a \in \overline{A}$. De que X tiene estrechez numerable, se sigue que existe un subconjunto numerable B de A tal que $a \in \overline{B}$. El compacto de Corson X es monolítico, entonces el subespacio $\overline{B}$ tiene peso de red numerable. Como B es compacto, el peso de B es numerable. Así B es un compacto metrizable. Entonces existe una sucesión en B que converge a a. $\square$

Proposición 1.5.15. *Sea X un compacto de Corson. Entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$ si y sólo si $w(X) \leq \mathfrak{c}$.*

Demostración. Si $|X| \leq \mathfrak{c}$ entonces $w(X) = nw(X) \leq |X| \leq \mathfrak{c}$ (ver).

Si $w(X) \leq \mathfrak{c}$, entonces X tiene un subconjunto denso S de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Por el Corolario 1.5.14, para todo punto de X existe una sucesión en S que converge a este punto. Se sigue que la cardinalidad de X no puede exceder la cardinalidad del conjunto de todas las sucesiones en S, la cual es igual a $\mathfrak{c}^{\omega} = \mathfrak{c}$. $\square$

El siguiente teorema se sigue inmediatamente del Teorema IV.2.4 en [2].

Teorema 1.5.16. *Sea X un subespacio compacto de $C_p(Y)$, y $\mathcal{P}$ una clase perfecta. Si $Y \in \mathcal{P}$, entonces $C_p(X) \in \mathcal{P}$.*

Corolario 1.5.17. *Si X es compacto y existe un Lindelöf Σ-espacio Y tal que X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(Y)$, entonces X es un compacto de Gul'ko.*

Teorema 1.5.18. (Okunev [9]) *Si X es un Lindelöf Σ-espacio y existe un Lindelöf Σ-espacio Y tal que X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(Y)$, entonces $C_p(X)$ es un Lindelöf Σ-espacio.*

Teorema 1.5.19. (Okunev [9]) *Si X es un espacio realcompacto y $C_p(X)$ es un Lindelöf Σ-espacio, entonces X es un Lindelöf Σ-espacio.*

1.6. El Duplicado de Alexandroff

Sea X un espacio topológico y los conjuntos $X_0 = X \times \{0\}$ y $X_1 = X \times \{1\}$. Definimos al conjunto $AD(X) = X_0 \cup X_1$. Denotemos al punto $(x,i) \in AD(X)$ por x_i, para $0 \leq i \leq 1$. En el conjunto $AD(X)$ generaremos una topología definiendo un sistema de vecindades para cada punto en $AD(X)$. Los conjuntos de la forma $(U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{x_1\})$ donde U es una vecindad de $x \in X$, serán vecindades de $x_0 \in AD(X)$, los puntos $x_1 \in AD(X)$ los declaramos aislados. El conjunto $AD(X)$ con la topología generada por este sistema de vecindades se llama el Duplicado de Alexandroff ([6]).

Proposición 1.6.1. ([6])*Si X es un espacio topológico metrizable, el Duplicado de Alexandroff es primero numerable.*

Demostración. Para los puntos $x_1 \in AD(X)$, el conjunto $\{x_1\}$ forma una base de vecindades pues los puntos $x_1$son aislados.

Para cada punto $x \in X$ las bolas de radio $\frac{1}{n}$ con centro en x, $B(x, \frac{1}{n})$ forman una base numerable de vecindades en el punto. De esta manera los conjuntos $(B(x, \frac{1}{n}) \times \{0\}) \cup (B(x, \frac{1}{n}) \times \{1\} \setminus \{x_1\})$ forman una base de vecindades numerable para todo punto $x_0 \in AD(X)$. $\square$

Proposición 1.6.2. *El duplicado de Alexadroff de un espacio topológico Hausdorff es Hausdorff.*

Demostración. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Tenemos varios casos. Si $x_1, y_1 \in AD(X)$, con $x_1 \neq y_1$, entonces $\{x_1\}$ y $\{y_1\}$ son abiertos ajenos que contienen a x_1 y y_1 respectivamente. Si $x_0, x_1 \in AD(X)$, $\{x_1\}$ y $(U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{x_1\})$ son abiertos ajenos que contienen a x_0 y x_1 respectivamente para cualquier abierto en U en X que contenga a x. Si $x_0, y_1 \in AD(X)$ con $x \neq y$, $\{y_1\}$ y $(U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{y_1\})$ son abiertos ajenos que contienen a x_0 y y_1 respectivamente para cualquier abierto U que contiene a x, pero no contiene y. Finalmente, si $x_0, y_0 \in AD(X)$ con $x_0 \neq y_0$, $(U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{y_1\})$ y $(V \times \{0\}) \cup (V \times \{1\} \setminus \{y_1\})$ son los abiertos que buscamos con la condición de que U y V son abiertos ajenos que contienen a x y y en X.

□

Proposición 1.6.3. ([6]) *El duplicado de Alexadroff de un compacto es compacto.*

Demostración. Sea X compacto. Basta demostrar que toda cubierta de $AD(X)$ que consiste de conjuntos abiertos básicos tiene una subcubierta finita.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $AD(X)$ cuyos elementos son singuletes en $X \times \{1\}$ o son de forma $(U \times \{0, 1\}) \setminus \{x, 1)$. Denotamos $\mathcal{U}_0$ la subfamilia de $\mathcal{U}$ que consiste de los conjuntos de la segunda forma. Entonces $\mathcal{U}_0$ es una familia de conjuntos abiertos que cubre $X \times \{0\}$. Como $X \times \{0\}$ es homeomorfo a X, entonces es compacto, así la familia $\mathcal{U}_0$ tiene una subfamilia finita $\mathcal{U}'$ que cubre a $X \times \{0\}$. Sea $\mathcal{U}' = \{\, U_1 \times \{0, 1\}) \setminus \{x_1, 1), \ldots, U_n \times \{0, 1\}) \setminus \{x_n, 1)\,\}$. Entonces $AD(X) \setminus \bigcup \mathcal{U}' \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ es finito, y basta adicionar a $\mathcal{U}'$ una subfamilia finita de $\mathcal{U}$ que cubre los puntos $x_1, \ldots, x_n$ para obtener una subcubierta finita de $\mathcal{U}$.

□

Lema 1.6.4. *Sea X un espacio topológico. Si Y es un subespacio de X entonces la topologia de $AD(Y)$ como subespacio de $AD(X)$ coincide con la topologia del duplicado de Alexandroff de Y.*

Demostración. Demostraremos esto, comparando los sistemas de vecindades en cada punto.

Para los puntos y_1 no hay problema, pues son aislados en ambas topologías.

Las vecindades en el duplicado de Alexandroff $AD(Y)$ para un para un punto y_0 son de la forma $W = (V \times \{0\}) \cup (V \times \{1\} \setminus \{y_1\})$, donde V es una abierto en Y. De esta manera tenemos que $W = ((U \cap Y) \times \{0\}) \cup ((U \cap Y) \times \{1\} \setminus \{x_1\})$, donde U es un abierto en Y. De lo anterior tenemos $W = [(U \times \{0\}) \cap (Y \times \{0\})] \cup [(U \times \{1\}) \cap (Y \times \{1\}) \setminus y_1]$.

Ahora en $AD(Y)$ como subespacio de $AD(X)$, las vecindades de y_0 son de la forma $W = [(U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{y_1\})] \cap AD(Y)$ donde U es un abierto en X. Así $W = [(U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{y_1\})] \cap [Y \times \{0\} \cup Y \times \{1\}] = [U \times \{0\} \cap (Y \times \{0\} \cup Y \times \{1\})] \cup [U \times \{1\} \setminus \{y_1\} \cap (Y \times \{0\} \cup Y \times \{1\})] = [(U \times \{0\} \cap Y \times \{0\}) \cup (U \times \{0\} \cap Y \times \{1\})] \cup [(U \times \{1\} \setminus \{y_1\} \cap Y \times \{0\}) \cup (U \times \{1\} \setminus \{y_1\} \cap Y \times \{1\})] = [(U \times \{0\}) \cap (Y \times \{0\})] \cup [(U \times \{1\}) \cap (Y \times \{1\}) \setminus y_1]$.

Por lo tanto los sistemas de vecindades en cada punto coinciden y por lo tanto las topologías también.

□

Proposición 1.6.5. ([6]) *El duplicado de Alexadroff de un espacio topológico Tychonoff es también Tychonoff.*

Demostración. Si X es espacio topológico de Tychonoff tiene una compactación Y Hausdorff, por Proposiciones 1.6.2 y 1.6.3 $AD(Y)$ es compacto y Hausdorff. Pero el duplicado de Alexadroff de X es subespacio del duplicado de Alexadroff de Y, así duplicado de Alexadroff de X es Tychonoff.

□

Proposición 1.6.6. *La proyección $p\colon AD(X) \to X$ con $p(x_i) = x$ es un mapeo perfecto.*

Demostración. Sea bX una compactación de X. Entonces el espacio $AD(bX)$ es compacto, y entonces la proyección $p_{bX}\colon AD(bX) \to bX$ es perfecta. Podemos considerar $AD(X)$ como un subespacio de $AD(bX)$. Entonces la proyección $p\colon AD(X) \to X$ coincide con la restricción de p_{bX} a $AD(X) = p_{bX}^{-1}(X)$. Entonces, p es perfecta como la restricción de un mapeo perfecto a una preimagen completa.

□

Corolario 1.6.7. *Si X es segundo numerable, entonces $AD(X)$ es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio.*

Demostración. La proyección $p\colon AD(X) \to X$ es perfecta y cada fibra de p tiene exactamente dos puntos. Se sigue que el mapeo inverso p^{-1} es ssc (Proposición 1.3.11), y la imagen de todo punto de X tiene exactamente dos puntos. □

Corolario 1.6.8. *El espacio $A(\mathfrak{c})$ es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio.*

Demostración. $A(\mathfrak{c})$ es la imagen de $AD([0,1])$ bajo el mapeo continuo cociente el cual corresponde a la partición de $AD([0,1])$ en $[0,1]\times\{0\}$ y los singuletes $(r,1)$, $r\in[0,1]$. $\square$

Corolario 1.6.9. ([8]) *Todo Lindelöf Σ-espacio de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ con un punto no aislado es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio.*

Demostración. Todo espacio de este tipo admite un mapeo continuo inyectivo en $A(\mathfrak{c})$, el cual es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio. Por el Teorema 1.4.17 X es un $L\Sigma(\leq 2)$-espacio. $\square$

Teorema 1.6.10. ([8]) *Sea X un Lindelöf Σ–espacio de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ con un punto no aislado. Entonces X es la imagen de $AD(M)$ para algún espacio segundo numerable M.*

Demostración. Sean T un espacio segundo numerable y p un mapeo ssc 2-valuado de T sobre X. Sea ∞ el punto no aislado de X, y T_0 el conjunto de todos los puntos $t\in T$ tales que $\infty\notin p(t)$. Entonces $X_0=p(T_0)$ es un subespacio de Lindelöf de $X\setminus\infty$, por lo tanto es a lo más numerable. Elegimos un mapeo arbitrario g del espacio discreto $AD(\omega)$ sobre $X_0\cup\{\infty\}$. Sean $X_1=X\setminus X_0$ y $T_1=T\setminus T_0$. Entonces $X_1\subset p(T_1)$.

Definimos un mapeo $f\colon AD(T_1)\to X$ de la siguiente manera. Ponemos $f(t,0)=\infty$ para todo $t\in T_1$. Si $p(t)=\{\infty,x\}$ para algún $x\in X$, entonces ponemos $f(t,1)=x$.

Es obvio que $X_1\subset f(AD(T_1))$, y $f(U\times\{0,1\})=p(U)$ para todo $U\subset T_1$.

Verifiquemos que f es continua. Sea $t\in T_1$. La función f es continua en $(t,1)$ por que $(t,1)$ es aislado en $AD(T_1)$. Para ver la continuidad de f en el punto $(t,0)$, primero notemos que $f(t,0)=\infty$. Sea U una vecindad de ∞ en X. Entonces $f(s,1)\in U$ si y sólo si $p(s)\subset U$. Se sigue que $f^{-1}(U)$ contiene el conjunto $V=(T_1\times\{0\})\cup\{\,(s,1)\in AD(T_1):p(s)\subset U\,\}$. Por la semicontinuidad superior de p, y por la definición de la topología de $AD(T_1)$, V es una vecindad de $(t,0)$ en el espacio $AD(T_1)$.

Ahora $h=g\oplus f$ es una función continua de $AD(M)$ sobre X donde $M=\omega\oplus T_1$. $\square$

Capítulo 2

$L\Sigma(\leq \omega)$-espacios

2.1. Espacios de Funciones de Duplicados de Alexandroff

V. Tkachuk demostró en [15] que todo compacto de Eberlein de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio (según su terminología, un espacio *débilmente metrizablemente fibrado*). Nosotros demostramos una generalización de este resultado.

Teorema 2.1.1. *Sea K un compacto de Eberlein tal que $|K| \leq \mathfrak{c}$. Entonces $C_p(K)$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.*

Demostración. Todo compacto de Eberlein de cardinalidad menor o igual a $\mathfrak{c}$ tiene peso menor o igual a $\mathfrak{c}$ (Proposición 1.5.15). Es un hecho muy conocido (probablemente publicado por primera vez en la demostración del Teorema 15 en [13]) que todo compacto de Eberlein es una imagen continua de un compacto cero dimensional de Eberlein del mismo peso.

Sea K_0 un compacto cero dimensional de Eberlein de peso $\leq \mathfrak{c}$ tal que K es una imagen continua de K_0. Entonces $C_p(K)$ se encaja como un subespacio cerrado en $C_p(K_0)$ por el mapeo dual. Entonces es suficiente demostrar la afirmación del teorema suponiendo que K es cero dimensional.

Entonces sea K un compacto cero dimensional de Eberlein de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$. Entonces $C_p(K, 2)$ tiene peso de red a lo maś $\mathfrak{c}$ y es σ-compacto (ver Lema 2.7 en [12]). Por el resultado citado de V. Tkachuk y la σ-aditividad de la propiedad de ser $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio, $C_p(K, 2)$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio. Se sigue que $C_p(K, 2^\omega) = C_p(K, 2)^\omega$, también es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio. Por el Lema IV.3.7 en [2], el espacio $C_p(K,[-1,1])$ es una imagen continua de $C_p(K,2^\omega)$, entonces $C_p(K,[-1,1])$ también es un $L\Sigma(\leq\omega)$-espacio. Tenemos que

$$C_p(K)=\bigcup\{\,C_p(X,[-n,n]):n\in\omega\,\},$$

y los espacios $C_p(X,[-n,n])$ son todos homeomorfos a $C_p(X,[-1,1])$. De esta manera $C_p(K)$ es unión numerable de unos $L\Sigma(\leq\omega)$-espacios, y por lo tanto es un $L\Sigma(\leq\omega)$-espacio. □

El Teorema 2.1.1 es una generalización del resultado de V. Tkachuk por la siguiente observación.

Proposición 2.1.2. *Si K es un compacto de Eberlein de peso $\leq\mathfrak{c}$, entonces existe un compacto de Eberlein X de peso $\leq\mathfrak{c}$ tal que K es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$.*

Demostración. Sea X_0 un espacio compacto tal que K es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X_0)$. Sea $\Phi=\Phi_{X_0K}\colon X_0\to C_p(K)$ el mapeo de reflexión, y sea $X=\Phi(X_0)$. Entonces X es un compacto de Eberlein, y el mapeo de reflexión $\Phi_{KX}\colon K\to C_p(X)$ es un encaje de K en $C_p(X)$. □

Teorema 2.1.3. *Sea T un espacio de peso red numerable. Entonces $C_p(AD(T))$ es un $L\Sigma(\leq\omega)$-espacio.*

Demostración. Verifiquemos primero que $C_p(AD(T),I)$ es un $L\Sigma(\leq\omega)$-espacio donde $I=[-1,1]$.

Para todo $f\colon T\to I$ sea $\bar{f}$ una función en $AD(T)$ tal que $\bar{f}(t,0)=\bar{f}(t,1)=f(t)$ para todo $t\in T$. Es obvio que $\bar{f}$ es continua si f es continua.

Notese que $A\times\{1\}$ en $AD(T)$ es cerrado si y sólo si A es cerrado y discreto en T, porque si t_0 es un punto límite de A en T, entonces $(t_0,0)$ es un punto límite para $A\times\{1\}$ en $AD(T)$. En particular, todo subconjunto $A\times\{1\}$ cerrado en $AD(T)$ es a lo más numerable.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sucesiones de subconjuntos disjuntos de $T\times\{1\}$ cerrrados en $AD(T)$. Para cada $D=\{D(n)\}_{n\in\omega}\in\mathcal{S}$ definimos $E(D)=\bigcup\{D(n):n\in\omega\}$.

Para $f \in C_p(T, I)$ y $D \in \mathcal{S}$ sea

$$C(f,D) = \{\, g \in I^{AD(T)} : |g(x) - \bar{f}(x)| \leq \frac{2}{n+1} \text{ para todo } x \in D(n),\ n \in \omega, \\ \text{y } g(x) = \bar{f}(x) \text{ para todo } x \in AD(T) \setminus E(D) \,\}.$$

Así,

$$C(f,D) = \{h\} \times \prod_{n \in \omega} K(f, D, n)$$

donde h es la restricción de $\bar{f}$ a $AD(T) \setminus E(D)$ y $K(f, D, n)$ es el conjunto de todas las funciones g en $I^{D(n)}$ tal que $|g(x) - \bar{f}(x)| \leq 2/(n+1)$ para todo $x \in D(n)$. Obviamente, los conjuntos $C(f, D)$ son cerrados en $I^{AD(T)}$, de esta manera compactos, y desde que los conjuntos $D(n)$ son a lo más numerables, los conjuntos $C(f, D)$ son compactos metrizables.

Verifiquemos que $C_p(AD(T), I) = \bigcup \{\, C(f, D) : f \in C_p(T, I), D \in \mathcal{S} \,\}$.

Supongamos que $g \in C(f, D)$ para algún $f \in C_p(T, I)$ y $D \in \mathcal{S}$. Sea $t_0 \in T$; Verificaremos la continuidad de g en $(t_0, 0)$ (el punto $(t_0, 1)$ es aislado en $AD(T)$, así no es necesaria la verificación). Por la definición de $C(f, D)$, $g(t, 0) = \bar{f}(t, 0)$. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $n \in \omega$ tal que $2/n < \varepsilon$. Puesto que $g \in C(f, D)$, el conjunto de todos los puntos de $AD(T)$ donde g difiere en más de ε de la función $\bar{f}$ es contenido en la unión de los primeros n miembros de la sucesión D, esto es, en un subconjunto cerrabierto discreto de $AD(T)$. Se sigue entonces que las preimagenes bajo g y $\bar{f}$ de $(g(t_0, 0) - \varepsilon, g(t_0, 0) + \varepsilon)$ difieren por un conjunto cerrabierto discreto que no contiene a $(t_0, 0)$, así la preimagen bajo g es una vecindad de $(t_0, 0)$. Por lo tanto, g es continua en $(t_0, 0)$. Hemos probado la inclusión $\bigcup \{\, C(f, D) : f \in C_p(T, I), D \in \mathcal{S} \,\} \subset C_p(AD(T), I)$.

Para verificar la inclusión inversa, supongamos $g \in C_p(AD(T), I)$. Sea para todo $t \in T$, $f(t) = g(t, 0)$, entonces $f \in C_p(T, I)$. La función $g - \bar{f}$ es continua y es igual a cero en $T \times \{0\}$. De esta manera, para todo $n \in \omega$, el conjunto $F_n = \{\, x \in AD(T) : |g(x) - \bar{f}(x)| > 2/(n+2) \,\}$ está contenido en $T \times \{1\}$ y es cerrado en $AD(T)$. Definimos $D(0) = F_0$ y $D(n) = F_n \setminus F_{n-1}$ para $n \geq 1$. Entonces $D \in \mathcal{S}$ y $|g(x) - \bar{f}(x)| \leq 2/(n+1)$ para todo $x \in D(n)$, así $g \in C(f, D)$.

Por lo tanto, la familia

$$\mathcal{C} = \{\, C(f, D) : f \in C_p(T, I), D \in \mathcal{S} \,\}$$

es una cubierta de $C_p(AD(T), I)$ que consiste de conjuntos compactos metrizables.

Fijemos una red numerable $\mathcal{R}$ para T, y sea $\mathcal{B}$ una base cerrada con respecto a uniones finitas para I. Para cada $R \in \mathcal{R}$ y $B \in \mathcal{B}$ definamos $N_0(R, B) = \{ g \in C_p(AD(T), I) : g(R \times \{0\}) \subset B \}$ y $N_1(R, B) = \{ g \in C_p(AD(T), I) : g(R \times \{1\}) \subset B \}$. Sea $\mathcal{N}$ la familia de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $N_i(R, B)$, $R \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{B}$, $i = 0, 1$. Obviamente, la familia $\mathcal{N}$ es numerable.

AFIRMACIÓN. *La familia $\mathcal{N}$ es una red módulo $\mathcal{C}$.*

Sea U una vecindad abierta en $C_p(AD(T), I)$ de $C(f, D)$ para algún $f \in C_p(T, I)$ y $D \in \mathcal{S}$. Fijamos un conjunto abierto U_1 en $I^{AD(T)}$ tal que $U = U_1 \cap C_p(AD(T), I)$. Definimos

$$\begin{aligned} C'(f, D) = \{ g \in \mathbb{R}^{AD(T)} : |g(x) - \bar{f}(x)| \leq \frac{2}{n+1} \text{ para todo } x \in D(n),\ n \in \omega, \\ \text{y } g(x) = \bar{f}(x) \text{ para todo } x \in AD(T) \setminus E(D) \}. \end{aligned}$$

Entonces $C(f, D) = C'(f, D) \cap I^{AD(T)}$. Sea $U' = U_1 \cup (\mathbb{R}^{AD(T)} \setminus I^{AD(T)})$. Entonces U' es una vecindad de $C'(f, D)$ en $\mathbb{R}^{AD(T)}$ tal que $U' \cap C_p(AD(T), I) = U$.

Tenemos

$$C'(f, D) = \bar{f} + C'(0, D) = \bar{f} + \{h_0\} \times \prod_{n \in \omega} \left[-\frac{2}{(n+1)}, \frac{2}{(n+1)} \right]^{D(n)}$$

donde h_0 es la función cero en $AD(T) \setminus E(D)$, así $U' - \bar{f}$ es una vecindad en $\mathbb{R}^{AD(T)}$ de el producto $\{h_0\} \times \prod_{n \in \omega} [-2/(n+1), 2/(n+1)]^{D(n)}$. Por el Teorema de Wallace, existen $n \in \omega$, conjuntos finitos $F_k \subset D(k)$, $k \leq n$, $F \subset AD(T) \setminus E(D)$, y $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$\begin{aligned} W_0 = \{ g \in \mathbb{R}^{AD(T)} : g(F) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ y} \\ g(F_k) \subset (-2/(k+1) - \varepsilon, 2/(k+1) + \varepsilon) \text{ para todo } k \leq n \} \end{aligned}$$

es una vecindad de $C'(0, D)$ contenida en $U' - \bar{f}$. Por lo tanto, el conjunto

$$\begin{aligned} W &= (W_0 + \bar{f}) \cap C_p(AD(T), I) \\ &= \{ g \in C_p(AD(T), I) : (g - \bar{f})(F) \subset (-\varepsilon, \varepsilon), \\ &\quad (g - \bar{f})(F_k) \subset \big(-2/(k+1) - \varepsilon, 2/(k+1) + \varepsilon\big) \text{ para todo } k \leq n \} \end{aligned}$$

es una vecindad de $C(f,D)$ en $C_p(AD(T),I)$ contenida en U, y sólo falta encontrar un elemento de $\mathcal{N}$ que contiene $C(f,D)$ y está contenido en W.

Para cada $t \in F$ encontramos $B_t \in \mathcal{B}$ y $R_t \in \mathcal{R}$ tales que $f(t) \in B_t \subset (f(t)-\varepsilon, f(t)+\varepsilon)$, $t \in R_t$ y $R_t \subset f^{-1}(B_t)$.

Para $x = (t,1) \in F_k$, $k \leq n$, encontramos un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $I \cap \big[f(t) - 2/(k+1), f(t) + 2/(k+1)\big] \subset B_x \subset \big(f(t) - 2/(k+1) - \varepsilon, f(t) + 2/(k+1) + \varepsilon\big)$ (esto es posible porque $\mathcal{B}$ es una base de I cerrada con respecto a las uniones finitas). Entonces para algún $\delta_x > 0$, $I \cap \big(f(t) - 2/(k+1) - \delta_x, f(t) + 2/(k+1) + \delta_x\big) \subset B_x$. Fijamos un elemento R_x de $\mathcal{R}$ tal que $t \in R_x$, $f(R_x) \subset (f(t) - \delta_x, f(t) + \delta_x)$ y $R_x \times \{1\}$ es disjunto con todos los $D(i)$ tales que $i < k$ (esto es posible porque los conjuntos $D(i)$ son cerrados en $AD(T)$). Definamos

$$N = \bigcap \{\, N_0(R_t, B_t) : t \in F \,\} \cap \bigcap \{\, N_1(R_x, B_x) : x \in F_0 \cup \cdots \cup F_n \,\}.$$

Entonces N es un elemento de $\mathcal{N}$; la inclusión $N \subset W$ es trivial. Para verificar $C(f,D) \subset N$, sea $g \in C(f,D)$. Entonces $g(R_t \times \{0\}) = f(R_t \times \{0\}) \subset B_t$ para todo $t \in F$, así $g \in \bigcap \{\, N_0(R_t, B_t) : t \in F \,\}$.

Si $x = (t,1) \in F_k$, $k \leq n$, y $y \in R_x \times \{1\}$, entonces $y \notin \bigcup_{i<k} D(i)$, de donde $|g(y) - \bar{f}(y)| \leq 2/(k+1)$, así $g(y) \in I \cap \big[\bar{f}(y) - 2/(k+1), \bar{f}(y) + 2/(k+1)\big] \subset I \cap \big(f(t) - 2/(k+1) - \delta_x, f(t) + 2/(k+1) + \delta_x\big) \subset B_x$. De esto, $g \in N_1(R_x, B_x)$. Por lo tanto, $g \in N$, y la prueba de que $C_p(AD(T),I)$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio queda completa.

La afirmación que $C_p(AD(T))$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio ahora se sigue de que $C_p(AD(T))$ es homeomorfo a $C_p(AD(T),(-1,1))$, un subespacio de $C_p(AD(T),I)$, Teorema 1.4.16, y el siguiente Lema:

Lema 2.1.4. *Si el peso de red de T es numerable, entonces $C_p(AD(T))$ es un Lindelöf Σ-espacio.*

Para probar eso primero observemos que $AD(T)$ es una preimagen perfecta de T, esto por el mapeo perfecto $j : (t,i) \mapsto t$, $i = 0,1$. De esta manera, $AD(T)$ es un Lindelöf Σ-espacio. Sea $A = \{\, \bar{f} : f \in C_p(T) \,\} \cup \{\, \chi_{(t,1)} : t \in T \,\} \cup \{0\}$ donde $\chi_{(t,1)}$ es la función caracteristica del punto $(t,1)$. Entonces A es un subconjunto de $C_p(AD(T))$ que genera la topología de $AD(T)$ (en el sentido de que la topología de $AD(T)$ es la más débil topología con respecto al cual todas las funciones en A son continuas). Se sigue entonces que el mapeo reflexión $\Psi_{AD(T)\,A}$ es un encaje de $AD(T)$ en $C_p(A)$. El conjunto A es la unión de los conjuntos $A_1 = j^*(C_p(T))$ (donde $j^*\colon C_p(T) \to C_p(AD(T))$ es mapeo dual) y el conjunto compacto $A_2 = \{\, \chi_{(t,1)} : t \in T \,\} \cup \{0\}$ (este conjunto es compacto porque toda vecindad de 0 contiene todos los puntos de A excepto en un conjunto finito de A_2). El espacio A_1 tiene peso de red numerable, porque $nw(C_p(T)) = nw(T) = \omega$. Así, $AD(T)$ es un Lindelöf Σ-espacio de $C_p(A)$ y A es un Lindelöf Σ-subespacio. Por Corolario 2.11 en [10], $C_p(AD(T))$ es un Lindelöf Σ-espacio.

□

Corolario 2.1.5. *Sea X un Lindelöf Σ-espacio con un punto no aislado tal que $|X| \leq \mathfrak{c}$ y $C_p(X,2)$ es un Lindelöf Σ-espacio. Entonces $C_p(X)$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.*

Esto se sigue del Teorema 1.6.10, Lema 2.1.4, Teorema 1.4.16, Corolario 2.11 en[10], y las observaciones de que si X es cero dimensional, entonces X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(C_p(X,2))$ y que un mapeo continuo de $AD(M)$ sobre X induce un encaje de $C_p(X)$ en $C_p(AD(M))$.

No sabemos si la condición "$C_p(X,2)$ es un Lindelöf Σ-espacio" en el último corolario puede ser omitida:

Problema 2.1.6. *¿Será cierto que $C_p(X,2)$ es un Lindelöf Σ-espacio para todo Lindelöf Σ-espacio de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$ con un punto no aislado?*

En particular,

Problema 2.1.7. *¿Será cierto que todo Lindelöf Σ-espacio de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$ con un punto no aislado es la imagen de $AD(T)$ bajo un mapeo cociente, para algún espacio T con $nw(T) \leq \omega$?*

2.2. Compactos de Gul'ko de tamaño $\mathfrak{c}$ son $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios

La siguiente afirmación es el Teorema 3 en [14].

Teorema 2.2.1. *Sea K un compacto de Corson. Entonces existen subespacios cerrados S_n, $n \in \omega$, de $C_p(K)$ tal que para todo $n \in \omega$, $S_n \setminus \{0\}$ es discreto, y es conjunto $S = \bigcup\{\, S_n : n \in \omega \,\}$ separa puntos de K.*

Dos espacios X y Y son llamados *M-equivalentes* si los grupos topológicos libres en el sentido de Markov sobre X y Y son topológicamente isomorfos, y *t-equivalentes* si $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son homeomorfos. La M-equivalencia de dos espacios implica su t-equivalencia; el siguiente hecho fue probado en [9].

Teorema 2.2.2. *Sea R un retracto de el espacio X. Entonces los espacios X^+ y $(X/R) \oplus R$ son M-equivalentes.*

Aquí X^+ es el espacio obtenido adicionando a X un punto aislado, y X/R es la partición de X en R y los singuletes de $X \setminus R$ dotada con la topología real-cociente. Esta última coincide con la topología cociente si la topología cociente es completamente regular [9].

Teorema 2.2.3. *Sea K un compacto de Gul'ko de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$. Entonces K es homeomorfo a un subespacio de $C_p(AD(M))$ para algún espacio segundo numerable M.*

Demostración. Desde que todo compacto de Gul'ko es de Corson, podemos elegir subespacios S y S_n de $C_p(K)$ como en el Teorema 2.2.1. Desde que $nw(C_p(K)) = nw(K) \leq \mathfrak{c}$ (Teorema I.1.3 in [2]), la cardinalidad de S es a lo más $\mathfrak{c}$. Por el mapeo de reflexión, K es homeomorfo a un subespacio de $C_p(S)$. Más aún los conjuntos S_n son cerrados en $C_p(X)$, así cada uno de ellos es un Lindelöf Σ-espacio.

Sean $T = \bigoplus\{ S_n : n \in \omega \}$ y $h\colon T \to S$ la suma directa de los encajes $S_n \hookrightarrow S$. Entonces h mapea T sobre S; obviamente, T^+ también tiene un mapeo continuo sobre S. El mapeo dual encaja $C_p(S)$ en $C_p(T^+)$, así K es homeomorfo a un subespacio de $C_p(T^+)$.

El conjunto R de todos los puntos no aislados de T es numerable, discreto, y es un retracto de T. Por el Teorema 2.2.2, T^+ es t-equivalente al subespacio $Z = (T/R) \oplus R$. El espacio Z tiene a lo más un punto no aislado, y los espacios T, T^+ y Z son Lindelöf Σ-espacios de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Desde que los espacios $C_p(T^+)$ y $C_p(Z)$ son t-equivalentes, K es homeomorfo a un subespacio de $C_p(Z)$. Por el Teorema 1.6.10, Z es imagen continua del espacios $AD(M)$ para algún espacio segundo numerable M. El mapeo dual encaja $C_p(Z)$ en $C_p(AD(M))$, así K es homeoformo a un subespacio de $C_p(AD(M))$. $\square$

Del Teorema 2.2.3 y Lema 2.1.4 se sigue

Teorema 2.2.4. *Todo compacto de Gul'ko de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.*

Una pregunta natural que surge en relación con el Teorema 2.1.1 es

Problema 2.2.5. *Sea K un compacto de Gul'ko de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$. ¿Será $C_p(K)$ un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio?*

Una respuesta positiva a esta pregunta daría un criterio de cuando $C_p(K)$ es $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio para K un espacio compacto. Moviendonos en la dirección de un criterio para espacios cualesquiera, encontramos los siguientes problemas:

Problema 2.2.6. *Sea X un Lindelöf Σ-espacio de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$ tal que $C_p(X)$ es un Lindelöf Σ-espacio. ¿Debe X ser un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio?*

Por el Corolario 2.11 en [10], esta pregunta es lo mismo que preguntar si en la misma condiciones el espacio $C_p(X)$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.

Es posible que el criterio requiere fuertes condiciones sobre el espacio X.

Problema 2.2.7. *Supongamos que X es un Lindelöf $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio (o un $L\Sigma(\leq n)$-espacio para algún $n \in \omega$, $n \geq 2$), y Y un Lindelöf Σ-subespacio de $C_p(X)$. ¿Debe Y ser un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio?*

Problema 2.2.8. *Supongamos que X es un Lindelöf Σ-espacio tal que $C_p(X)$ es un Lindelöf $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio. ¿Debe X ser un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio?*

G. A. Sokolov probó en [14] (Corolario 2) la siguiente afirmación interesante:

Teorema 2.2.9. *Sea K un compacto de Gul'ko. Entonces existe una familia numerable $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados de K tal que para todo $x \in K$, $\bigcap\{ C \in \mathcal{C} : x \in C \}$ es un compacto de Eberlein.*

Es fácil ver que en "$L\Sigma$-terminos" este teorema dice que todo compacto de Gul'ko es un $L\Sigma(\mathcal{E})$-espacio, donde $\mathcal{E}$ es la clase de todos los compactos de Eberlein (Llamamos a un espacio X un $L\Sigma(\mathcal{E})$*-espacio* si existen un espacio segundo numerable M y un mapeo cvssc $p\colon M \to X$ tal que $p(m) = X$ y $p(m) \in \mathcal{E}$ para todo $m \in M$). Desafortunadamente, esto no permite obtener una demostración del Teorema 2.2.4, porque la siguiente pregunta queda abierta.

Problema 2.2.10. *¿Es $L\Sigma(L\Sigma(\leq \omega)) = L\Sigma(\leq \omega)$?* En otras palabras, *?¿Si existe un mapeo cvssc p de un espacio metrizable separable sobre un espacio X tal que las imagenes de puntos bajo p son $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios, debe X ser un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio?*

Problema 2.2.11. *¿Es todo $L\Sigma(L\Sigma(\leq \omega))$-espacio compacto un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio?*

Problema 2.2.12. *Sea X un compacto de Corson $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio. ¿Debe X ser un compacto de Gul'ko?*

Problema 2.2.13. *Sea X un compacto de Corson $L\Sigma(\mathcal{E})$-espacio.¿ Debe X ser un compacto de Gul'ko?*

Problema 2.2.14. *Sea X un compacto de Corson $L\Sigma(\mathcal{G})$-espacio, donde $\mathcal{G}$ es la clase de todo los compactos de Gul'ko. ¿Debe X ser un compacto de Gul'ko?*

Conclusiones

En esta tesis consideramos los espacios de funciones y conjuntos compactos de funciones que son $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios. Los resultados principales son el Teorema 2.1.1, Teorema 2.1.3, y el Teorema 2.2.4.

Teorema 2.1.1. *Sea K un compacto de Eberlein tal que $|K| \leq \mathfrak{c}$. Entonces $C_p(K)$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.*

Este teorema generaliza un teorema de V. Tkachuk [15], de que todo compacto de Eberlein de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio; este teorema era el punto de origen de la investigación presentada.

Teorema 2.1.3 *Sea T un espacio de peso red numerable. Entonces $C_p(AD(T))$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.*

Este teorema es un paso importante en la demostración de la pertenencia a la clase de $L\Sigma(\leq \omega)$-espacios de todos los compactos de Gul'ko de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$ mediante un encaje de dichos compactos a los espacios de forma $C_p(AD(T))$.

Teorema 2.2.4. *Todo compacto de Gul'ko de cardinalidad $\leq \mathfrak{c}$ es un $L\Sigma(\leq \omega)$-espacio.*

Este teorema se demuestra usando los resultados anteriores, junto con los teoremas de A. G. Sokolov [14] y de O. Okunev [11] y la siguiente afirmación.

Teorema 1.6.10. Sea X un Lindelöf Σ–espacio de cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$ con un punto no aislado. Entonces X es la imagen de $AD(M)$ para algún espacio segundo numerable M.

Al fin de la tesis consideramos problemas abiertos y direcciones de investigación relacionados a los resultados presentados.

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii,*Continuos maps, factorization theorems, and function spaces*, Trudy Moskovsk. Mat. Obshch. **47** (1984), 3-21.

[2] A. V. Arhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[3] W. Kubiš, O. Okunev, P. J. Szeptycki, *On some classes of Lindelöf Σ-spaces,* Topology and its Appl. **153**:14 (2006), 2574–2590.

[4] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Annals of Math., **88**:1 (1968), 35–46

[5] R. Engelking, *General Topology*, Verlag Helderman, 1989.

[6] R. Engelking, *On the double circumference of Alexandroff*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Astron. Math. Phys. **16**:8 (1968), 629–634.

[7] S. P. Gulko, *On the structure of spaces of continuous functions and their complete paracompactness*, Uspekhi Mat. Nauk **34** (1979), 33–40 (en ruso); traducci'on a ingles: Russian Math. Surveys **34** (1979), 36–44.

[8] I. Molina Lara, O. Okunev, *$L\Sigma(\leq \omega)$-spaces and spaces of continuos functions*, Central European J. Math. **8**:4 (2010), 754–762.

[9] O. Okunev, *On Lindelöf Σ-spaces of continuous functions in the pointwise topology*, Topology and its Appl. **(**49)(1993) 149–166.

[10] O. Okunev, *On Lindelöf Σ-spaces of continuous functions in the pointwise topology*, Topology and its Appl. (49)(1993) 149–166.

[11] O. Okunev, *A method for constructing examples of M-equivalent spaces*, Topology and its Appl. **36** (1990) 157–171; *Correction:* Topology and its Appl. **49** (1993) 191–192.

[12] O. Okunev, K. Tamano, *Lindelöf powers and products of functions spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**:9 (1996) 2905–2916.

[13] P. Simon, *On continuous image of Eberlein compacts*, Comment. Math. Univ. Carolinae **17**:1 (1976) 179–194.

[14] G. A. Sokolov, *On some classes of compact spaces lying in Σ-products*, Comment. Math. Univ. Carolinae **25**:2 (1984), 219–231.

[15] V. V. Tkachuk, *A glance at compact spaces which map "nicely" onto the metrizable ones*, Topology Proc. **19** (1994), 321–334.