

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

*“Procesos de decisión de Markov y algunos
problemas financieros”*

Tesis

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Lic. Octavio Paredes Pérez

Director de tesis:

Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara

Puebla Pue.
6 de julio del 2016

Dedicado a mi familia

“La caída de los imperios que aspiran al dominio universal, puede predecirse con probabilidad muy alta por cualquiera versado en el cálculo del azar.”

Pierre Simon de Laplace.

Agradecimientos

A mis padres por los ánimos que me dan continuamente, siempre me han mostrado su confianza y cariño, cada esfuerzo realizado a favor mío es apreciado en gran manera por ustedes.

A mis hermosos bebés Itayetzi y Dayami que con una sola sonrisa basta y sobra para sentirme el hombre más afortunado del mundo.

A mi hermana que gracias a ella pude conocer a mis preciadas niñas que son el motivo e inspiración del día a día, a su esposo Isai por cuidar de ella y de mis preciosos bebés, gracias.

Al Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara por su paciencia y ayuda durante éstos dos años de aprendizaje, gracias por su respaldo y atención.

Al jurado integrado por: Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, Dr. Francisco Tajonar Sanabria, Dr. Fernando Velasco Luna y Dra. Rosa María Flores Hernández, gracias a todos ustedes por sus grandes comentarios, sugerencias y observaciones los cuales han mejorado y enriquecido este trabajo.

A mis compañeros de la facultad, que en las buenas y en las malas siempre están ahí.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado para la realización de esta maestría.

Introducción

Los procesos de decisión de Markov (PDM), proporcionan un marco matemático para la toma de decisiones en situaciones en las que los resultados son en parte al azar y en parte bajo el control de un tomador de decisiones. Los PDM son útiles para el estudio de una amplia gama de problemas de optimización resueltos a través de la programación dinámica. Los PDM se conocían por lo menos desde la década de 1950. Se utilizan en varias disciplinas, incluyendo la robótica, control automático, la economía y la industria manufacturera [10, 14].

Más precisamente, un PDM es un proceso estocástico de control a tiempo discreto. En cada paso, el proceso está en un estado y el tomador de decisiones puede elegir cualquier acción que esté disponible en el estado. El proceso responde en la siguiente etapa de tiempo, moviéndose al azar a un nuevo estado y dando al tomador de decisiones una recompensa.

La probabilidad de que el proceso se mueva a un nuevo estado se ve influida por la acción elegida. Por lo tanto, el siguiente estado depende del estado actual y de la acción tomada.

Los procesos de decisión de Markov son una extensión de las cadenas de Markov, la diferencia es la adición de acciones y recompensas. Por el contrario, si sólo existe una acción para cada estado y todos los premios son los mismos, un proceso de decisión de Markov se reduce a una cadena de Markov.

El problema central de los PDM es encontrar una “política óptima”: una función que especifica la acción del observador. El objetivo es elegir una política que maximice una función acumulativa de las recompensas, por ejemplo la suma esperada. En este trabajo nos enfocaremos en la programación dinámica.

La programación dinámica es una técnica de optimización para resolver problemas de decisión multi-etapa, en los cuales en cada etapa se debe optimizar una variable. Algunas consideraciones adicionales son las siguientes:

- La programación dinámica es un algoritmo recursivo que liga los cálculos de las diferentes etapas y la solución final del problema se obtiene cuando se alcanza la última etapa.
- En cada etapa se toma una decisión (se realiza una acción).
- Una secuencia de decisiones es una Política.

- Cada etapa tiene uno o varios estados asociados a ella.
- Un estado representa una condición en la que puede estar el sistema, asociado con el problema, en alguna etapa.
- El efecto de una decisión en cierta etapa es cambiar de un estado relacionado con la etapa actual a algún estado relacionado con la siguiente etapa.

El matemático Richard Bellman desarrolló la programación dinámica en 1953 [24].

En los PDM a tiempo discreto, las decisiones se toman a intervalos de tiempo discretos. Sin embargo, para el proceso de decisión de Markov a tiempo continuo, se pueden tomar decisiones en cualquier instante. En comparación con el PDM a tiempo discreto, el PDM a tiempo continuo puede modelar mejor el proceso de elaboración de un sistema que tiene una dinámica continua, es decir, la dinámica del sistema se define por la ecuación diferencial estocástica.

Hay dos corrientes principales, la primera se centra en problemas de maximización en contextos como la economía, mientras que la segunda, se centra en problemas de minimización de la ingeniería y de la navegación [12].

En esta Tesis se consideran los siguientes problemas de interés:

- **El problema de riqueza terminal.** Supongamos que un inversionista puede invertir en alguno de d activos con riesgo y un bono sin riesgo. Además, que se cuenta con una función de utilidad. El inversionista tiene la opción de reacomodar su portafolio en determinados instantes. El objetivo es maximizar su ganancia final esperada a través de tales reacomodos.
- **El problema de consumo-inversión.** Un inversionista puede en cada uno de un número finito de instantes decidir qué parte de su riqueza invertir en el mercado y qué parte consumir. Dada una función de utilidad, el objetivo del inversionista es maximizar la suma de las utilidades esperadas.
- **Seguimiento de índices.** Vamos a ver que este tipo de problema se puede resolver por medio de los problemas lineales cuadráticos.
- **Subastas secuenciales en línea.** Un vendedor quiere vender una determinada cantidad de artículos en varias subastas secuenciales con un precio de reserva establecido en los artículos, el problema del vendedor es tomar la mejor decisión de cuantos artículos debe subastar por cada subasta para obtener el máximo beneficio de tales subastas.

La estructura del trabajo es la siguiente:

En el capítulo uno, se proporcionará la definición del modelo de decisión de Markov, en lo que respecta a políticas se mencionarán los tipos de políticas, la importancia de la ecuación de Bellman, la técnica de programación dinámica así como el supuesto de integrabilidad y estructura, además mencionaremos los distintos tipos de estructuras de los modelos de decisión de Markov, como son: semicontinuo, continuo, medible, monótono,

cóncavo, convexo y por último, hablaremos del modelo de decisión de Markov estacionario.

En el capítulo dos, nos enfocaremos en los mercados financieros, aquí se enunciará la definición de lo que es un mercado financiero, activos dinámicos, portafolios, oportunidad de arbitraje, caracterización de las oportunidades de arbitraje y funciones de utilidad.

En el capítulo tres, aplicaremos lo que hemos visto en capítulos anteriores a problemas de riqueza terminal, consumo e inversión, seguimiento de índices, siempre vamos a suponer que los inversores son pequeños y no pueden influir en el proceso de precios de los activos. También consideraremos el problema de un sistema de subastas secuenciales en línea donde trataremos de hacer una simulación para poder encontrar el máximo beneficio total esperado. Finalmente se presentarán las conclusiones del trabajo.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Teoría de los modelos de decisión de Markov con horizonte finito	1
1.1.1. Modelos de decisión de Markov	1
1.1.2. Tipos de políticas de control	4
1.1.3. Modelo de decisión de Markov con horizonte finito	5
1.1.4. La ecuación de Bellman	7
1.2. Estructura de un modelo de decisión de Markov	14
1.2.1. Modelos de decisión de Markov semicontinuos	16
1.2.2. Modelos de decisión de Markov continuos	18
1.2.3. Modelos de decisión de Markov medibles	19
1.2.4. Modelos de decisión de Markov monótonos y convexos	19
1.3. Modelos de decisión de Markov estacionarios	23
1.4. Modelo lineal cuadrático	26
1.4.1. Problemas estocásticos lineales-cuadráticos (LQ)	26
1.4.2. Problemas estocásticos lineales-cuadráticos con perturbaciones . .	30
2. Mercados financieros	35
2.1. Activos dinámicos y portafolios	35
2.2. Funciones de utilidad y utilidad esperada	41
3. Problemas de optimización financieros	45
3.1. Problemas de optimización de un periodo	45
3.2. Problemas de riqueza terminal	48
3.2.1. Función de utilidad potencia	53
3.2.2. Función de utilidad de aversión al riesgo absoluto hiperbólica (HARA) .	57
3.2.3. Función de utilidad logaritmo	60
3.2.4. Función de utilidad exponencial	63
3.3. Problema de consumo	66
3.4. Problemas de consumo e inversión	70
3.4.1. Función de utilidad potencia	72
3.4.2. Función de utilidad logaritmo	76
3.5. Seguimiento de índice	78
3.6. Asignación óptima de subastas secuenciales en línea	82
3.6.1. Problema y modelo	82
3.6.2. Análisis para el precio de reserva privado	83
3.6.3. Análisis para el precio de reserva anunciado	88
3.6.4. Propiedades de monotonía	89

3.6.5. Resultados numéricos	98
4. Conclusiones	105
A. Código del programa en matlab	107
B. Herramientas de análisis	109
B.1. Funciones semicontinuas	109
B.2. Mapeos del conjunto de valor y el Teorema de selección	113
B.3. Funciones supermodular y el Teorema del punto fijo	114
C. Herramientas de probabilidad	117
C.1. Teoría de probabilidad	117
C.2. Procesos estocásticos	118
C.3. Órdenes estocásticos	120
C.3.1. El orden usual estocástico	121
C.3.2. Razón de orden de verosimilitud	121
C.3.3. Orden convexo	122
C.3.4. Monotonía estocástica de procesos Markovianos	123
D. Herramientas de matemática financiera	125
D.1. Teoría de precios sin arbitraje	125

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se establecerá la teoría de los procesos de decisión de Markov con horizonte finito con espacio de estados y acciones generales. Los problemas de optimización de esta clase pueden ser resueltos por un algoritmo de inducción hacia atrás. Ya que los espacios de estados y acciones son arbitrarios, exponemos un supuesto de estructura con el fin de probar la validez de la inducción hacia atrás y la existencia de políticas óptimas [4].

1.1. Teoría de los modelos de decisión de Markov con horizonte finito

1.1.1. Modelos de decisión de Markov

Definición 1.1. *Un modelo de decisión de Markov no estacionario con horizonte $N \in \mathbb{N}$, consiste del conjunto $(E, A, D_n, Q_n, r_n, g_N)$ con $n = 0, 1, \dots, N - 1$, en donde*

- *E es un espacio de Borel, llamado espacio de estados, dotado con la σ -álgebra \mathfrak{E} . Los elementos son denotados por $x \in E$.*
- *A es un espacio de Borel, llamado espacio de acciones, dotado con la σ -álgebra \mathfrak{A} . Los elementos son denotados por $a \in A$.*
- *$D_n \subset E \times A$ es un subconjunto medible de $E \times A$ y denota el conjunto de las posibles combinaciones estado-acción en el tiempo n . Asumimos que D_n contiene la gráfica de un mapeo medible $f_n : E \rightarrow A$, i.e., $(x, f_n(x)) \in D_n$ para cualquier $x \in E$. Para $x \in E$, el conjunto $D_n(x) = \{a \in A \mid (x, a) \in D_n\}$ es el conjunto de acciones admisibles para el estado x en el tiempo n .*
- *Q_n es un kernel estocástico de transición de E a D_n , i.e., para un par fijo $(x, a) \in D_n$, el mapeo $B \mapsto Q_n(\cdot \mid x, a)$ es una medida de probabilidad en \mathfrak{E} y $(x, a) \mapsto Q_n(B \mid \cdot)$ es medible para cualquier $B \in \mathfrak{E}$. La medida $Q_n(B \mid x, a)$ da la probabilidad de que el estado en el tiempo $n + 1$ esté en B si el estado actual es x y la acción tomada en el tiempo n es a .*

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

- $r_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, r_n da la recompensa en una etapa del sistema en el tiempo n , si el estado actual es x y la acción tomada es a .
- $g_N : E \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo medible, $g_N(x)$ da la recompensa terminal del sistema en el tiempo N si el estado es x .

En la Figura 1.1 se muestra como cambia de un estado a otro bajo una acción, el modelo de decisión de Markov.

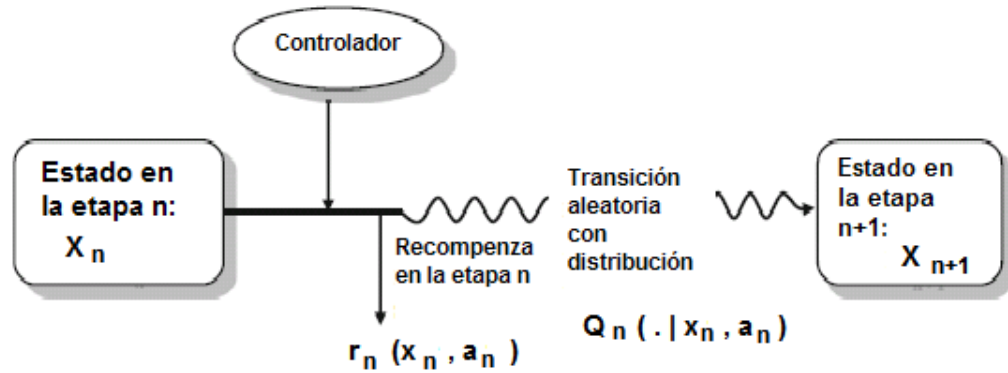


Figura 1.1: Evolución de un modelo de decisión de Markov.

- Observación 1.1.** a) En muchas aplicaciones los espacios de estados y acciones son subconjuntos Borelianos de espacios “Polacos” (i.e. métrico, separable y completo), finito o contable. Las σ -álgebras \mathfrak{E} y \mathfrak{A} están dadas por las σ -álgebras $B(E)$ y $B(A)$ para cualquier subconjunto de Borel de E y A , respectivamente. A menudo en aplicaciones, E y A son subconjuntos de \mathbb{R}^d o \mathbb{R}_+^d .
- b) Usualmente D_n , Q_n y r_n son independientes de n ; en este caso, el modelo de decisión de Markov es llamado estacionario [4].

La ley de transición estocástica de un Modelo de decisión de Markov está a menudo dada por una función de transición. Para hacer esto más preciso, supongamos que Z_0, Z_1, \dots, Z_{N-1} son variables aleatorias con valores en un espacio medible $(\mathcal{Z}, \mathfrak{Z})$. Estas variables aleatorias son llamadas perturbaciones. Z_{n+1} influye en la transición del estado del sistema en el tiempo n al estado en el tiempo $n+1$. La distribución Q_n^Z de Z_{n+1} puede depender del estado actual y de la acción en el tiempo n y es tal que $Q_n^Z(\cdot | x, a)$ es un kernel estocástico para $(x, a) \in D_n$. El nuevo estado del sistema en el tiempo $n+1$ ahora puede ser descrito por una función de transición $T_n : D_n \times \mathcal{Z} \rightarrow E$ tal que

$$x_{n+1} = T_n(x_n, a_n, z_{n+1}).$$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

Así, la ley de transición del modelo de decisión de Markov está determinado por T_n y Q_n^Z .

Teorema 1.1. *Un modelo de decisión de Markov que es equivalentemente descrito por el conjunto $(E, A, D_n, \mathcal{Z}, T_n, Q_n^Z, r_n, g_N)$, es como sigue:*

- E, A, D_n, r_n, g_N son como en la definición 1.1.
- \mathcal{Z} es el espacio de perturbaciones, dotado con la σ -álgebra \mathfrak{Z} .
- $Q_n^Z(B|x, a)$ es un kernel de transición estocástico para $B \in \mathfrak{Z}$ y $(x, a) \in D_n$, denota la probabilidad de que Z_{n+1} esté en B si el estado actual es x y la acción tomada es a .
- $T_n : D_n \times \mathcal{Z} \rightarrow E$ es una función medible y es llamada función de transición. $T_n(x, a, z)$ da el próximo estado del sistema en el tiempo $n + 1$ si en el tiempo n el sistema está en el estado x , la acción tomada es a y la perturbación z ocurre en el tiempo $n + 1$.

Demostración: Supongamos primero un modelo de decisión de Markov, dado como en la Definición 1.1. Obviamente podemos escoger $\mathcal{Z} := E$, $T_n(x, a, z) := z$ y $Q_n^z(B|x, a) := Q_n(B|x, a)$ para $B \in \mathfrak{E}$. Por otro lado, si el conjunto $(E, A, D_n, \mathcal{Z}, T_n, Q_n^Z, r_n, g_N)$ es dada por

$$\begin{aligned} Q_n(B|x, a) &= \mathbb{P}(x_{n+1} \in B | x_n = x, a_n = a) \\ &= \mathbb{P}(T_n(x, a, Z_n) \in B | x_n = x, a_n = a) \\ &= Q_n^z(\{z \in \mathcal{Z} | T_n(x, a, z) \in B\} | x, a), \quad B \in \mathfrak{E}, \end{aligned}$$

obtenemos el kernel estocástico del modelo de decisión de Markov ■

A continuación, asumiremos que existe un horizonte fijo $N \in \mathbb{N}$, i.e. N denota el número de etapas de decisión. Por supuesto cuando queremos controlar un modelo de decisión de Markov, debido a sus transiciones estocásticas, no es razonable determinar todas las acciones en todos los puntos al inicio. Es más adecuado reaccionar a los cambios aleatorios. Así, tenemos que elegir un control al inicio que tenga en cuenta los futuros puntos de tiempo y estados.

Definición 1.2. a) *Un mapeo medible $f_n : E \rightarrow A$, con la propiedad $f_n(x) \in D_n(x)$ para cualquier $x \in E$, es llamada regla de decisión en el tiempo n . Denotamos a F_n como el conjunto de todas las reglas de decisión en el tiempo n .*

b) *Una sucesión de reglas de decisión $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ con $f_n \in F_n$ es llamada una política o estrategia.*

Note que $F_n \neq \emptyset$ ya que por la Definición 1.1, D_n contiene la gráfica del mapeo medible $f_n : E \rightarrow A$.

1.1.2. Tipos de políticas de control

Definición 1.3. \mathbb{F} denota el conjunto de funciones medibles $f_n : E \rightarrow A$ tal que $f_n(x)$ está en $D_n(x)$, para cualquier $x \in E$ y $n = 0, \dots, N - 1$. Φ representa el conjunto de kérneles estocásticos δ en A dado E para los cuales $\delta(D_n(x)|x) = 1$, para cualquier $x \in E$. Las funciones en \mathbb{F} se denominan “funciones de decisión” o “selectores”.

Un selector $f_n \in \mathbb{F}$ puede ser identificado con el kernel estocástico $\delta \in \Phi$ en donde $\delta(\cdot|x)$ ó δ_x es la medida de Dirac en $f_n(x)$ para cualquier $x \in E$, es decir,

$$\delta_x = \begin{cases} 0, & x \notin E, \\ 1, & x \in E. \end{cases}$$

Tenemos que $\mathbb{F} \subset \Phi$, [11].

Como hemos mencionado antes, asumimos que \mathbb{F} es no vacío, o equivalentemente, que el conjunto $D_n(x)$ contiene la gráfica de una función medible de E en A . Esta suposición asegura que el conjunto de políticas de control es no vacío.

El conjunto de políticas de control es denotado por Π . Además, se dice que una política de control $\pi = \{\pi_t\}$ es:

- a) **Política Markoviana Aleatorizada** (Π_{RM}) si existe una sucesión $\{\delta_t\}$ de kérneles estocásticos $\delta_t \in \Phi$ tal que

$$\pi_t(\cdot|h_t) = \delta_t(\cdot|x_t), \text{ para cualquier } h_t \in H_t, \text{ con } t = 0, 1, \dots;$$

- b) **Política Estacionaria Aleatorizada** (Π_{RS}) si existe $\delta \in \Phi$ independiente de t , tal que,

$$\pi_t(\cdot|h_t) = \delta(\cdot|x_t), \text{ para cualquier } h_t \in H_t, \text{ con } t = 0, 1, \dots;$$

- c) **Política Determinista o Pura** (Π_D) si existe una sucesión $\{g_t\}$ de funciones medibles $g_t : H_t \rightarrow A$ tal que, para cada $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$, tenemos que $g_t(h_t) \in D_n(x_t)$ y $\pi_t(\cdot|h_t)$ es la medida de Dirac concentrada en $g_t(h_t)$;

- d) **Política Markoviana Determinista** (Π_{DM}) si existe una sucesión $\{f_t\}$ de selectores $f_t \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot|h_t)$ es la medida de Dirac en $f_t(x_t) \in D_n(x_t)$, para cualquier $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$;

- e) **Política Estacionaria Determinista** (Π_{DS}) si existe un selector $f \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot|h_t)$ es la medida de Dirac en $f(x_t) \in D(x_t)$, para cualquier $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$

Observación 1.2. Note que $\Pi_{RS} \subset \Pi_{RM} \subset \Pi$ y $\Pi_{DS} \subset \Pi_{DM} \subset \Pi_D \subset \Pi$.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

Observación 1.3. Una política de Markov aleatorizada $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ está dada si $f_n(B|x)$ es un kernel estocástico con $f_n(D_n(x)|x) = 1$ para cualquier $x \in E$. Con el fin de aplicar tal política tenemos que hacer un experimento aleatorio para determinar la acción.

Por el momento consideraremos sólo políticas Markovianas. Dado un modelo de decisión de Markov como un experimento aleatorio de N etapas, tenemos que definir el espacio de probabilidad fundamental en el que vamos a trabajar.

La construcción canónica es como sigue. Definimos un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) por

$$\Omega = E^{N+1}, \quad \mathcal{F} = \mathfrak{E} \otimes \dots \otimes \mathfrak{E} \text{ producto de } \sigma\text{-algebras.}$$

Sea $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in \Omega$. Las variables aleatorias X_0, X_1, \dots, X_{N-1} están definidas en el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) por

$$X_n(\omega) = X_n(x_0, x_1, \dots, x_N) = x_n,$$

la n -ésima proyección de ω . La variable aleatoria X_n representa el estado del sistema en el tiempo n y (X_n) es llamado *proceso de decisión de Markov*.

Supongamos ahora que $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ es una política fija y $x \in E$ es un estado inicial fijo. Conforme el Teorema de Ionescu-Tulcea [4], existe una única medida de probabilidad \mathbb{P}_x^π en (Ω, \mathcal{F}) con

- i) $\mathbb{P}_x^\pi(x_0 \in B) = \delta_x(B)$ para cualquier $B \in \mathfrak{E}$,
- ii) $\mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B | X_0, X_1, \dots, X_n) = \mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B | X_n) = Q_n(B | X_n, f_n(X_n))$.

La ecuación ii) es llamada *propiedad de Markov*, i.e. la sucesión de variables aleatorias X_0, X_1, \dots, X_n es un proceso de Markov no estacionario con respecto a \mathbb{P}_x^π . Por \mathbb{E}_x^π denotaremos a la esperanza con respecto a \mathbb{P}_x^π . Por otra parte, denotaremos por \mathbb{P}_{nx}^π la probabilidad condicional $\mathbb{P}_{nx}^\pi(\cdot) := \mathbb{P}^\pi(\cdot | X_n = x)$ y \mathbb{E}_{nx}^π es la esperanza correspondiente.

Definición 1.4. El proceso estocástico $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x^\pi), \{x_t\})$ con $x \in E$ y $t = 0, 1, \dots$, es llamado un proceso de decisión de Markov (PDM) o un proceso de control de Markov (PCM) a tiempo discreto.

Observación 1.4. Sea v una medida de probabilidad sobre E conocida como distribución inicial, entonces se puede escribir \mathbb{P}_v^π y \mathbb{E}_v^π como \mathbb{P}_x^π y \mathbb{E}_x^π .

1.1.3. Modelo de decisión de Markov con horizonte finito

Ahora tenemos que imponer un supuesto que garantice que cualquier esperanza que aparezca, esté bien definida. Denotaremos por $x^+ = \max\{0, x\}$ a la parte positiva de x .

Supuesto de Integrabilidad (\mathbf{A}_N): para $n = 0, 1, \dots, N$,

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

$$\delta_n^N(x) := \sup_{\pi} \mathbb{E}_{n,x}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^{N-1} r_k^+(X_k, f_k(X_k)) + g_N^+(X_N) \right] < \infty, \quad x \in E.$$

Asumimos que (A_n) se cumple para las N etapas del problema de decisión de Markov a lo largo del siguiente capítulo. Obviamente el supuesto (A_N) se satisface si cada r_n y g_N están acotadas superiormente.

Ahora podemos introducir la recompensa descontada esperada de una política y el problema de optimización de N etapas.

Para ello, consideremos $n = 0, 1, \dots, N - 1$ y una política Markoviana $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \in \prod$ y sea $V_{n\pi}(x)$ definida por

$$V_{n\pi}(x) := \mathbb{E}_{n,x}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^{N-1} r_k(X_k, f_k(X_k)) + g_N(X_N) \right], \quad x \in E.$$

$V_{n\pi}(x)$ es la recompensa total esperada desde n hasta N . La función de valor V_n está definida por

$$V_n(x) := \sup_{\pi \in \prod} V_{n\pi}(x), \quad x \in E$$

y $V_n(x)$ representa la máxima recompensa total esperada desde n hasta N . Las funciones $V_{n\pi}$ y V_n están bien definidas pues

$$V_{n\pi} \leq V_n \leq \delta_n^N(x) < \infty, \quad x \in E.$$

Note que $V_{N\pi}(x) = V_N(x) = g_N(x)$ y que $V_{n\pi}$ depende solo de (f_n, \dots, f_{N-1}) . Por otra parte, en general no es cierto que V_n sea medible. Esto provoca teóricamente inconvenientes, por lo que son necesarios algunos supuestos adicionales para implicar ésto.

Una política $\pi \in F_0 \times \dots \times F_{N-1}$ es llamada óptima, para las N etapas del modelo de decisión de Markov, si $V_{0\pi}(x) = V_0(x)$, para cualquier $x \in E$.

Uno podría preguntarse ¿por qué las reglas de decisión son solo funciones de los estados actuales y no dependen de la historia completa?. Introduzcamos ahora el conjunto de *historias* que es denotado por

$$\begin{aligned} H_0 &:= E, \\ H_n &:= H_{n-1} \times A \times E. \end{aligned}$$

Un elemento $h_n = (x_0, a_0, x_1, \dots, x_n) \in H_n$ es llamada historia hasta la etapa n .

Definición 1.5. a) Un mapeo medible $f_n : H_n \rightarrow A$ con la propiedad $f_n(h_n) \in D_n(x_n)$, para cualquier $h_n \in H_n$, es llamada regla de decisión histórico-dependiente en la etapa n .

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

b) Una sucesión $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, en donde f_n es una regla de decisión histórico-dependiente en la etapa n , es llamada una política o estrategia histórico-dependiente en la etapa n . Denotamos por \prod_N al conjunto de todas las políticas histórico-dependientes en la etapa N .

Sea $\pi \in \prod_N$ una política histórico-dependiente. Entonces $V_{n\pi}(h_n)$ es definida como la esperanza condicional de la recompensa total en $[n, N]$, dada la historia $h_n \in H_n$.

El siguiente Teorema establece que las políticas histórico-dependientes no mejoran la recompensa máxima esperada [13].

Teorema 1.2. Para $n = 0, \dots, N - 1$ se tiene:

$$V_n(x_n) = \sup_{\pi \in \prod_{N-1}} V_{n\pi}(h_n), \quad h_n = (x_0, a_0, x_1, \dots, x_n).$$

Aunque estemos en general satisfechos con la función de valor $V_0(x)$, resulta que en el camino a calcular $V_0(x)$, debemos también determinar la función de valor $V_n(x)$. Esta es una característica estándar de muchas técnicas de optimización de varias etapas y es explicado en la Sección 1.1.4.

1.1.4. La ecuación de Bellman

Para una política fija $\pi \in F_0 \times \dots \times F_{N-1}$ podemos calcular la recompensa esperada (descontada) en forma recursiva por la llamada iteración de recompensa. Pero primero introduciremos algunos operadores importantes que simplifican la notación. En lo que sigue denotaremos por:

$$\mathbb{M}(E) := \{v : E \rightarrow [-\infty, \infty) \mid v \text{ es medible}\}.$$

Debido a nuestro supuesto (A_N) tenemos $V_{n\pi} \in \mathbb{M}(E)$ para cualquier π y n .

Definición 1.6. Definimos los siguientes operadores para $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

a) Para $v \in \mathbb{M}(E)$ definimos

$$(L_n v)(x, a) := r_n(x, a) + \int v(x') Q_n(dx' | x, a), \quad (x, a) \in D_n,$$

siempre que la integral exista.

b) Para $v \in \mathbb{M}(E)$ y $f \in F_n$ definimos

$$(\tau_{nf} v)(x) := (L_n v)(x, f(x)), \quad x \in E.$$

c) Para $v \in \mathbb{M}(E)$ definimos

$$(\tau_n v)(x) := \sup_{a \in D_n(x)} (L_n v)(x, a), \quad x \in E.$$

τ_n es llamada el operador de recompensa máxima en el tiempo n .

Observación 1.5. a) Tenemos la siguiente relación entre los operadores

$$\tau_n v = \sup_{f \in \bar{F}_n} \tau_{nf} v.$$

b) Si un Modelo de Decisión de Markov con perturbaciones (Z_n) es dado como en el Teorema 1.1, entonces $L_n v$ puede ser escrita como

$$(L_n v)(x, a) = r_n(x, a) + \mathbb{E}[v(T_n(x, a, Z_{n+1}))].$$

Esta representación es a menudo más conveniente.

Notación: En lo que sigue se omitirán los paréntesis $(\tau_n v)(x)$ alrededor de los operadores y simplemente se escribirá $\tau_n v(x)$ a fin de facilitar la notación.

Los operadores tienen las siguientes propiedades importantes.

Lema 1.1. Los tres operadores son monótonos, i.e., para $v, w \in \mathbb{M}(E)$ con $v(x) \leq w(x)$ para cualquier $x \in E$ se cumple:

- a) $L_n v(x, a) \leq L_n w(x, a)$, para cualquier $(x, a) \in D_n$,
- b) $\tau_{nf} v(x) \leq \tau_{nf} w(x)$, para cualquier $x \in E$ y $f \in F_n$,
- c) $\tau_n v(x) \leq \tau_n w(x)$, para cualquier $x \in E$.

Demostración: Sea $v(x) \leq w(x)$ para cualquier $x \in E$, entonces

$$\int v(x') Q_n(dx'|x, a) \leq \int w(x') Q_n(dx'|x, a).$$

Así, $L_n v(x, a) \leq L_n w(x, a)$ lo que implica la primera y segunda afirmación. Tomando el supremo sobre toda $a \in D_n$, implicamos la tercera afirmación ■

Los operadores τ_{nf} ahora pueden ser usados para calcular el valor de una política de forma recursiva.

Teorema 1.3. (Iteración de recompensa).

Sea $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1})$ una política de N etapas. Para $n = 0, 1, \dots, N-1$ se cumple:

- a) $V_{N\pi} = g_N$ y $V_{n\pi} = \tau_{nf_n} V_{n+1\pi}$,
- b) $V_{n\pi} = \tau_{nf_n} \dots \tau_{n-1f_{n-1}} g_N$.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

Demostración:

a) De la Definición de $V_{n\pi}$ y teniendo $n = N$ se tiene que

$$\begin{aligned} V_{n\pi}(x) &= V_{N\pi}(x) = \mathbb{E}_{N\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=N}^{N-1} r(X_k, f_k(X_k)) + g_N(X_N) \right], \quad x \in E. \\ &= 0 + g_N(X_N) \end{aligned}$$

Ahora para la otra afirmación, sea $x \in E$, entonces

$$\begin{aligned} V_{n\pi}(x) &= \mathbb{E}_{n\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^{N-1} r_k(X_k, f_k(X_k)) + g_N(X_N) \right] \\ &= \mathbb{E}_{n\pi}^{\pi} [r_n(x, f_n(x))] + \mathbb{E}_{n\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=n+1}^{N-1} r_k(X_k, f_k(X_k)) + g_N(X_N) \right] \\ &= r_n(x, f_n(x)) + \mathbb{E}_{n\pi}^{\pi} \left[\mathbb{E}_{n\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=n+1}^{N-1} r_k(X_k, f_k(X_k)) + g_N(X_N) \mid X_{n+1} \right] \right] \\ &= r_n(x, f_n(x)) + \int \mathbb{E}_{n+1, x'}^{\pi} \left[\sum_{k=n+1}^{N-1} r_k(X_k, f_k(X_k)) + g_N(X_N) \right] \\ &\quad Q_n(dx' \mid x, f_n(x)) \\ &= r_n(x, f_n(x)) + \int V_{n+1, \pi}(x') Q_n(dx' \mid x, f_n(x)). \end{aligned}$$

b) Del inciso a) tenemos por inducción

$$\begin{aligned} V_{n\pi} &= \tau_{nf_n} V_{n+1\pi} \\ &= \tau_{nf_n} \tau_{n+1f_{n+1}} V_{n+2\pi} \\ &= \tau_{nf_n} \tau_{n+1f_{n+1}} \tau_{n+2f_{n+2}} V_{n+3\pi} \\ &\quad \vdots \\ &= \tau_{nf_n} \tau_{n+1f_{n+1}} \cdots \tau_{N-1f_{N-1}} V_{N\pi} \\ &= \tau_{nf_n} \tau_{n+1f_{n+1}} \cdots \tau_{N-1f_{N-1}} g_N. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La próxima definición será crucial para la solución de los problemas de decisión de Markov.

Definición 1.7. Sea $v \in \mathbb{M}(E)$. Una regla de decisión $f \in F_n$ es llamada un maximizador de v , en el tiempo n , si $\tau_{nf}v = \tau_nv$, i.e., para cualquier $x \in E$, $f(x)$ es un punto máximo del mapeo $a \mapsto L_nv(x, a)$, $a \in D_n(x)$.

El Teorema 1.5 nos proporciona un método de solución para los problemas de decisión de Markov. Pueden ser resueltos por aplicación sucesiva de los τ_n – operadores.

$$V_N = g_N,$$

$$V_n = \tau_n V_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

El próximo Teorema nos muestra que cuando una solución de la ecuación de Bellman existe junto con una sucesión de maximizadores, entonces es la solución del problema de optimización.

Teorema 1.4. (*Teorema de Verificación*) Sea $(v_n) \subset \mathbb{M}(E)$ una solución de la ecuación de Bellman. Entonces se cumple:

- a) $v_n \geq V_n$ para $n = 0, 1, \dots, N - 1$.
- b) Si f_n^* es un maximizador de v_{n+1} para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, entonces $v_n = V_n$ y la política $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es óptima para las N etapas del problema de decisión de Markov.

Demostración:

- a) Para $n = N$ tenemos que $v_N = g_N = V_N$. Supongamos que $v_{n+1} \geq V_{n+1}$, entonces para cualquier $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$

$$v_n = \tau_n v_{n+1} \geq \tau_n V_{n+1} \geq \tau_{n, f_n} V_{n+1, \pi} = V_{n\pi}.$$

Tomando el supremo sobre todas las políticas π tenemos que $v_n \geq V_n$.

- b) Mostramos recursivamente que $v_n = V_n = V_{n\pi^*}$. Para $n = N$ esto es obvio. Supongamos que la declaración es verdadera para $n + 1$, entonces

$$V_n \leq v_n = \tau_{n, f_n^*} v_{n+1} = \tau_{n, f_n^*} V_{n+1} = V_{n\pi^*} \leq V_n. \blacksquare$$

El Teorema de verificación es similar a las declaraciones que por lo general se usan para problemas de control estocástico de tiempo continuo. Es suficiente para las aplicaciones en donde una solución de la ecuación de Bellman es obvia y la existencia de maximizadores es simple (por ejemplo, si el espacio de estados y acciones son finitos). En general la existencia de una política óptima no está garantizada. Tenemos que hacer suposiciones adicionales acerca de la estructura del problema para asegurar ésto. También, tengamos en cuenta que el valor de un problema de optimización es siempre único, mientras que una política óptima puede no serlo.

Supuesto de Estructura (SA_N): Existen conjuntos $\mathbb{M}_n \subset \mathbb{M}(E)$ y $\Delta_n \subset F_n$ tales que para cualquier $n = 0, 1, \dots, N$:

- (i) $g_N \in \mathbb{M}_N$.
- (ii) Si $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ entonces $\tau_n v$ está bien definida y $\tau_n v \in \mathbb{M}_n$.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

(iii) Para cualquier $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ existe un maximizador f_n de v con $f_n \in \Delta_n$.

Con frecuencia \mathbb{M}_n es independiente de n y es posible elegir $\Delta_n = F_n \cap \Delta$ para un conjunto $\Delta \subset \{f : E \rightarrow A \text{ medible}\}$, es decir, cualquier función de valor y cualquier maximizador tienen las mismas propiedades estructurales.

Teorema 1.5. (*Teorema de Estructura*). Si (SA_N) se satisface, entonces se cumple:

a) $V_n \in \mathbb{M}_n$ y la sucesión (V_n) satisface la ecuación de Bellman, i.e., para $n = 0, 1, \dots, N-1$

$$V_N(x) = g_N(x),$$

$$V_n(x) = \sup_{a \in D_n(x)} \left\{ r_n(x, a) + \int V_{n+1}(x') Q_n(dx' | x, a) \right\}, \quad x \in E.$$

b) $V_n = \tau_n \tau_{n+1} \dots \tau_{N-1} g_N$.

c) Para $n = 0, 1, \dots, N-1$ existen maximizadores f_n de V_{n+1} con $f_n \in \Delta_n$ y cada sucesión de maximizadores f_n^* de V_{n+1} define una política óptima $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$ para las N etapas del problema de decisión de Markov.

Demostración: Para probar b) seguimos directamente de a), entonces es suficiente probar a) y c), mostraremos por inducción en $n = N-1, \dots, 0$ que $V_n \in \mathbb{M}_n$ y que

$$V_{n\pi^*} = \tau_n V_{n+1} = V_n$$

donde $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es la política generada por los maximizadores de V_1, \dots, V_N y $f_n^* \in \Delta_n$. Sabemos que $V_N = g_N \in \mathbb{M}_N$ por (SA_N) (i). Ahora, supongamos que se cumple para $N-1, \dots, n+1$. Como $V_k \in \mathbb{M}_k$ para $k = N, \dots, n+1$, los maximizadores f_n^*, \dots, f_{N-1}^* existen y son obtenidos con la recompensa iterada y la hipótesis de inducción se tiene que

$$V_{n\pi^*} = \tau_n f_n^* V_{n+1, \pi^*} = \tau_n f_n^* V_{n+1} = \tau_n V_{n+1}.$$

Por lo tanto, $V_n \geq \tau_n V_{n+1}$. Por otra parte, para una política arbitraria π

$$V_{n\pi} = \tau_n f_n V_{n+1, \pi} \leq \tau_n f_n V_{n+1} \leq \tau_n V_{n+1}$$

donde hemos utilizado la propiedad que preserva el orden de $\tau_n f_n$. Tomando el supremo sobre todas las políticas $V_n \leq \tau_n V_{n+1}$. En conjunto seguimos que

$$V_{n\pi^*} = \tau_n V_{n+1} = V_n$$

y en vista de (SA_n) , $V_n \in \mathbb{M}_n$. ■

De este resultado concluimos directamente el siguiente Corolario.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

Corolario 1.1. *Si (SA_N) se satisface y $n \leq m \leq N$ entonces se cumple:*

$$V_n(x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}_{n,x}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^{m-1} r_k(X_k, f_k(X_k)) + V_m(X_m) \right], \quad x \in E.$$

El Teorema 1.5 implica el siguiente algoritmo recursivo para resolver los problemas de decisión de Markov.

Algoritmo de inducción hacia atrás.

1. Sea $k := N$ y para $x \in E$, definimos:

$$V_N(x) := g_N(x).$$

2. Para $k := n - 1$ y $x \in E$, calculamos

$$V_k(x) = \sup_{a \in D_n(x)} \left\{ r_k(x, a) + \int V_{k+1}(x') Q_n(dx' | x, a) \right\},$$

y determinamos un maximizador f_k^* de V_{k+1} .

3. Si $k = 0$, entonces la función valor V_0 es calculada y la política óptima π^* es dada por $\pi^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$. De otra manera ir al paso 2.

Nota: Con el fin de obtener una buena suposición de como se ven los conjuntos \mathbb{M}_n y Δ_n parece que es razonable calcular los primeros pasos del algoritmo de inducción hacia atrás e investigar la estructura de las funciones de valor.

El Teorema 1.5 nos dice que los maximizadores producen una estrategia o política óptima. Sin embargo, la declaración inversa no es verdadera [4]: las políticas óptimas no necesariamente contienen sólo maximizadores. Esto es mostrado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. *Sea $N = 2$ el horizonte, mientras que el espacio de estados y acciones son $E = \{0, 1\} = A = D_n(x)$, para cualquier $x \in E$. La probabilidad de transición está dada por $Q_n(\{x'\} | x, a) = 1$ si $a = x'$ y cero en otro caso (ver Figura 1.2). La función de recompensa está dada por $r_n(x, a) = a$, para $(x, a) \in D_n$ y $g_2(x) = x$. La política óptima es fácil de calcular y es $\pi^* = (f_0^*, f_1^*)$ con $f_0^* = 1$ y $f_1^* = 1$ para cualquier $x \in E$. Sin embargo, no es difícil ver que $\pi = (f_0, f_1)$ con $f_0(x) \equiv 1$, y $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$ producen la misma recompensa total esperada y es por lo tanto también óptima. Obviamente la razón es que bajo la política óptima el estado 0 no será visitado después del estado 1.*

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.1. TEORÍA DE LOS MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV CON HORIZONTE FINITO

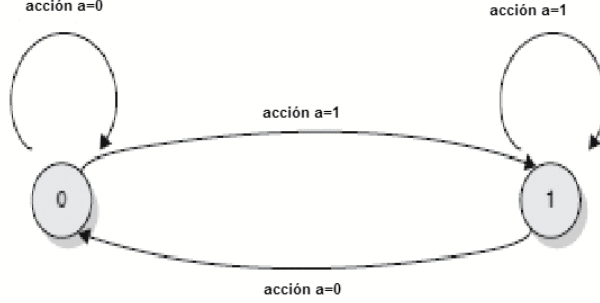


Figura 1.2: Ejemplo de probabilidades de transición.

El método de solución en el Teorema 1.5 confía en una muy simple pero general observación que es llamada el “*Principio de Programación Dinámica*”. Informalmente se dice que siempre que tenemos una política óptima π^* sobre cierto horizonte N y consideramos el proceso ahora sólo en un subintervalo de $[0, N]$, entonces la correspondiente política que es obtenida, restringiendo π^* a este subintervalo es de nuevo óptima. Esto puede ser formalizado como sigue.

Teorema 1.6. (*Principio de Programación Dinámica*). Si (SA_N) se satisface, entonces se cumple para $n \leq m \leq N$:

$$V_{n\pi^*}(x) = V_n(x) \Rightarrow V_{m\pi^*} = V_m \mathbb{P}_{nx}^{\pi^*} - a.s.$$

i.e., si $(f_n^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es óptima para el periodo de tiempo $[n, N]$ entonces $(f_m^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es óptima para $[m, N]$.

Demostración: Si seguimos del Teorema de iteración de recompensa 1.3 y la definición de V_m tenemos que

$$\begin{aligned}
 V_n(x) &= V_{n\pi^*}(x) = \tau_n f_n^* \dots \tau_{m-1, f_{m-1}^*} V_{m\pi^*}(x) \\
 &= \mathbb{E}_{nx}^{\pi^*} \left[\sum_{k=n}^{m-1} r_k(X_k, f_k^*(X_k)) + V_{m\pi^*}(X_m) \right] \\
 &\leq \mathbb{E}_{nx}^{\pi^*} \left[\sum_{k=n}^{m-1} r_k(X_k, f_k^*(X_k)) + V_m(X_m) \right] \leq V_n(x)
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Corolario 1.1 para la última desigualdad. Esto implica que tenemos la igualdad y que $\mathbb{E}_{nx}^{\pi^*} [V_m(X_m) - V_{m\pi^*}(X_m)] = 0$, lo que significa que $V_{m\pi^*} = V_m \mathbb{P}_{nx}^{\pi^*} - a.s.$ ■

Observación 1.6. a) Las declaraciones en el Teorema 1.5 siguen siendo válidas cuando reemplazamos el supuesto (A_N) por la siguiente suposición más débil: asumimos que para $n = 0, 1, \dots, N - 1$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

$$\sum_{k=n}^{N-1} r_k^+(X_k, f_k(X_k)) + g_N^+(X_N)$$

es P_{nx}^π -integrable para cualquier π y $x \in E$. Sin embargo, en este caso podríamos tener $V_n(X) = +\infty$ para algún $x \in E$ [4].

- b) Se sabe que la ecuación de Bellman se mantiene bajo supuestos más débiles que en los Teoremas 1.3 y 14.4 de [13]. En particular, si la función de recompensa r_n y g_N son no negativas (y sin ningún tipo de suposiciones adicionales), la función valor V_n satisface la ecuación de Bellman.

Observación 1.7. (Minimizar el costo)

En algunos problemas la recompensa de una etapa r_n y la recompensa terminal g_N , están dados como el costo en una etapa c_n y el costo terminal h_N . En este caso queremos minimizar

$$\mathbb{E}_{nx}^\pi \left[\sum_{k=n}^{N-1} c_k(X_k, f_k(X_k)) + h_N(X_N) \right], \quad x \in E,$$

para $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1})$. Pero este problema puede ser transformado en un problema de maximización de recompensa haciendo $r_n(x, a) := -c_n(x, a)$, $g_N(x) := -h_N(x)$. Así, todas las afirmaciones hasta el momento siguen siendo válidas. Usaremos la misma notación $V_{n\pi}$ y V_n para las funciones de costo bajo la política π y la función de costo mínima. Además, el operador de costo mínimo τ_n tiene la forma

$$(\tau_n v)(x) = \inf_{a \in D_n(x)} \left\{ c_n(x, a) + \int v(x') Q_n(dx' | x, a) \right\}.$$

En este caso V_n es también llamada función de costo.

1.2. Estructura de un modelo de decisión de Markov

En esta sección daremos condiciones suficientes en la que los supuestos (A_N) y (SA_N) de la sección anterior se cumplen y así implicar la validez de la ecuación de Bellman y la existencia de políticas óptimas. Para (SA_N) vamos a identificar las condiciones que implican que los conjuntos especiales M_n y Δ_n pueden ser elegidos. Por supuesto, es interesante poder elegir los conjuntos M_n y Δ_n lo más pequeños posibles, entre más pequeños sean los conjuntos, más información tenemos sobre las funciones de valor y las políticas óptimas. Consideremos primero el supuesto de integrabilidad (A_N) .

Definición 1.8. Una función medible $b : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ es llamada una función acotada superiormente para el modelo de decisión de Markov si existen $c_r, c_g, \alpha_b \in \mathbb{R}_+$ tal que para cualquier $n = 0, 1, \dots, N-1$:

- i) $r_n^+(x, a) \leq c_r b(x)$ para cualquier $(x, a) \in D_n$,
- ii) $g_N^+ \leq c_g b(x)$ para cualquier $x \in E$,

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

iii) $\int b(x')Q_n(dx'|x, a) \leq \alpha_b b(x)$ para cualquier $(x, a) \in D_n$.

Si r_n y g_N están acotados superiormente, entonces obviamente $b \equiv 1$ es una función acotada superiormente [4].

Sea b una función acotada superiormente para el modelo de decisión de Markov. Para $v \in \mathbb{M}(E)$ denotamos la norma del *supremo ponderado* por

$$\|v\|_b := \sup_{x \in E} \frac{|v(x)|}{b(x)}$$

(con la convención $\frac{0}{0} := 0$) y definimos el conjunto

$$\mathbb{B}_b := \{v \in \mathbb{M}(E) \mid \|v\|_b < \infty\}.$$

Equivalentemente \mathbb{B}_b puede ser escrito como

$$\mathbb{B}_b := \{v \in \mathbb{M}(E) \mid v(x) \leq cb(x) \text{ para cualquier } x \in E \text{ y para algún } c \in \mathbb{R}_+\}.$$

El concepto de funciones acotadas superiormente es de particular interés para los modelos de decisión de Markov con horizonte a tiempo infinito. El próximo resultado es fundamental para muchas aplicaciones.

Proposición 1.1. *Si el modelo de decisión de Markov tiene una función acotada superiormente b , entonces $\delta_n^N \in \mathbb{B}_b$ y el supuesto de integrabilidad (A_N) se satisface.*

Demostración: Como $\delta_n^N \geq 0$ tenemos que demostrar que $\delta_n^N(x) \leq cb(x)$ para algún $c \in \mathbb{R}_+$. De las propiedades de una función acotada superiormente se sigue que

$$\mathbb{E}_x^\pi [r_k^+(X_k, f_k(X_k)) \mid X_{k-1}] = \int r_k^+(x', f_k(x'))Q_k(dx' \mid X_{k-1}, f_{k-1}(X_{k-1})) \leq c_r \alpha_b b(X_{k-1})$$

y por iteración tenemos

$$\mathbb{E}_x^\pi [r_k^+(X_k, f_k(X_k))] \leq c_r \alpha_b^k b(x), \quad x \in E.$$

Análogamente obtenemos

$$\mathbb{E}_x^\pi [g_N^+(X_N)] \leq c_g \alpha_b^N b(x), \quad x \in E. \quad \blacksquare$$

Consideremos que nuestro modelo de decisión de Markov tiene una función acotada superiormente b y definimos el conjunto

$$\mathbb{B}_b^+ := \{v \in \mathbb{M}(E) \mid v^+ \|b < \infty\}.$$

Equivalentemente \mathbb{B}_b^+ puede ser escrito como

$$\mathbb{B}_b^+ := \{v \in \mathbb{M}(E) \mid v^+(x) \leq cb(x) \text{ para cualquier } x \in E \text{ y para algún } c \in \mathbb{R}_+\}.$$

1.2.1. Modelos de decisión de Markov semicontinuos

En los llamados modelos de decisión de Markov semicontinuos, el supuesto de estructura (A_N) se cumple con \mathbb{M}_n un subconjunto de funciones semicontinuas superior. Esta es una consecuencia del siguiente resultado (para la definición de semicontinua superior y propiedades de funciones conjunto de valor ver el Apéndice B.2).

Proposición 1.2. *Sea $v \in \mathbb{B}_b^+$ semicontinua superior. Supongamos que la siguiente suposición se satisface:*

- i) $D_n(x)$ es compacto para cualquier $x \in E$ y $x \mapsto D_n(x)$ es semicontinua superior,*
- ii) $(x, a) \mapsto L_nv(x, a)$ es semicontinua superior en D_n .*

Entonces τ_nv es semicontinua superior y existen maximizadores f_n de v .

Observación 1.8. *La condición i) en la Proposición 1.2 puede ser reemplazada por la siguiente condición: para cualquier $x \in E$ los conjuntos de nivel $\{a \in D_n(x) | L_nv(x, a) \geq c\}$ son compactos para cualquier $c \in \mathbb{R}$ y el mapeo del conjunto de valor*

$$x \mapsto \{a \in D_n(x) | L_nv(x, a) = \tau_nv(x)\} \tag{1.1}$$

es semicontinua superior.

Demostración: Para facilitar la notación definamos

$$w(x, a) := L_nv(x, a), \quad w^*(x) := \tau_nv(x)$$

y $D(x) := D_n(x)$. Para $x_0 \in E$ seleccionamos una sucesión $(x_n) \subset E$ que converge a x_0 tal que el límite de $w^*(x_n)$ existe (1.1). Tenemos que mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w^*(x_n) \leq w^*(x_0).$$

Como $a \mapsto w(x, a)$ es semicontinua superior en el conjunto compacto $D(x)$, alcanza su supremo en $D(x)$ (ver Teorema B.1). Sea $a_n \in D(x_n)$ es un punto máximo de $a \mapsto w(x_n, a)$ en $D(x_n)$. Por la semicontinuidad superior de $x \mapsto D(x)$ existe una subsucesión (a_{nk}) de (a_n) convergente a algún $a_0 \in D(x_0)$. La semicontinuidad superior de w implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w^*(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} w(x_{nk}, a_{nk}) \leq w(x_0, a_0) \leq w^*(x_0),$$

es decir, w^* es semicontinua superior. Además, dado que w y w^* son medibles, tenemos que

$$D^* := \{(x, a) \in D | w(x, a) = w^*(x)\}$$

es un subconjunto de Borel de $E \times A$ y cada $D^*(x)$ es compacto ya que

$$D^*(x) := \{a \in D(x) | w(x, a) \geq w^*(x)\}.$$

Entonces aplicando el Teorema de selección de Kuratowski y Ryll-Nardzewski (ver apéndice, teorema B.4), obtenemos un selector f de Borel medible para D^* . Este es el maximizador deseado de v . ■

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

Observación 1.9. Si $A \subset \mathbb{R}$ entonces existe un maximizador mínimo y un maximizador máximo respectivamente para $v \in \mathbb{B}_b^+$. Note que si el conjunto

$$D_n^* := \{a \in D_n(x) \mid L_n v(x, a) = \tau_n v(x)\}$$

es compacto para $x \in E$, entonces el $\max D_n^*(x)$ y el $\min D_n^*(x)$ son maximizadores de v por el Teorema de selección (B.4).

La prueba de la siguiente proposición es inmediata de la Proposición 1.2.

Teorema 1.7. consideremos que el Modelo de Decisión de Markov tiene una función acotada superiormente b y para cualquier $n = 0, 1, \dots, N-1$, satisface que:

- i) $D_n(x)$ es compacto para cualquier $x \in E$ y $x \mapsto D_n(x)$ es semicontinua superior,
- ii) $(x, a) \mapsto \int v(x')Q_n(dx'|x, a)$ es semicontinua superior para cualquier función semicontinua superior $v \in \mathbb{B}_b^+$,
- iii) $(x, a) \mapsto r_n(x, a)$ es semicontinua superior,
- iv) $x \mapsto g_N(x)$ es semicontinua superior,

entonces los conjuntos $\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^+ \mid v \text{ es semicontinua por arriba}\}$ y $\Delta_n := F_n$ satisfacen el supuesto de estructura (SA_N) . En particular, si $V_n \in \mathbb{M}_n$, entonces existe un maximizador $f_n^* \in F_n$ de V_{n+1} . La política $(f_0^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es óptima.

En lugar de probar la condición ii) del Teorema 1.7 directamente, podemos utilizar el siguiente Lema:

Lema 1.2. Sea b una función continua acotada superiormente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $(x, a) \mapsto \int v(x')Q(dx'|x, a)$ es semicontinua superior para cualquier función semicontinua superior $v \in \mathbb{B}_b^+$.
- ii) $(x, a) \mapsto \int b(x')Q(dx'|x, a)$ es continua y $(x, a) \mapsto \int v(x')Q(dx'|x, a)$ es continua y acotada para cualquier v continua y acotada en E .

Un kernel estocástico Q con la última propiedad es llamado débilmente continuo.

Demostración: La prueba de que ii) implica i) es como sigue: sea $v \in \mathbb{B}_b^+$ semicontinua superior. Entonces tenemos $v - cb \leq 0$ para algún $c \in \mathbb{R}_+$ y $x \mapsto v(x) - cb(x)$ es semicontinua superior. Conforme el Lema B.1 esto implica la existencia de una sucesión (\tilde{v}_k) de funciones continuas y acotadas tal que $\tilde{v}_k \downarrow v - cb$. Debido a nuestra suposición, la función $(x, a) \mapsto \int \tilde{v}_k(x')Q(dx'|x, a)$ es ahora continua y acotada. Además, es monótona por lo tanto converge:

$$\int \tilde{v}_k(x')Q(dx'|x, a) \downarrow \int (v - cb)(x')Q(dx'|x, a), \text{ para } k \rightarrow \infty.$$

Así, podemos concluir nuevamente por Lema B.1 que el límite es semicontinua superior. Sin embargo en vista de nuestra suposición, ésto implica que $(x, a) \mapsto \int v(x')Q(dx'|x, a)$ es semicontinua superior.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

Ahora probaremos que *i*) implica *ii*): como b y $-b$ están en \mathbb{B}_b^+ , obtenemos

$$(x, a) \mapsto \int b(x')Q(dx'|x, a)$$

es continua. Si v es continua y acotada, entonces las funciones $v - \|v\|$ y $-v - \|v\|$ pertenecen a \mathbb{B}_b^+ y son semicontinuas superior. Por lo tanto, la función $(x, a) \mapsto \int v(x')Q(dx'|x, a)$ es continua. ■

1.2.2. Modelos de decisión de Markov continuos

Ahora, veremos cuando el supuesto de estructura de integrabilidad (SA_N) se cumple cuando \mathbb{M}_n pertenece a un subconjunto de funciones continuas.

Proposición 1.3. *Sea $v \in \mathbb{B}_b^+$ continua. Supongamos que se cumple:*

- i) $D_n(x)$ es compacto para cualquier $x \in E$ y $x \mapsto D_n(x)$ es continuo,*
- ii) $(x, a) \mapsto L_nv(x, a)$ es continua en D_n ,*

entonces τ_nv es continua y existe un maximizador $f_n \in F_n$ de v . Si v tiene un único maximizador $f_n \in F_n$ al tiempo n , entonces f_n es continua.

Demostración: Usemos la misma notación que la Proposición 1.2. Vemos que de la Proposición 1.2 es suficiente mostrar que w^* es semicontinua inferior, i.e., que $w^*(x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w^*(x_n)$ para cada sucesión (x_n) que converge a $x_0 \in E$ y para cada $\lim_{n \rightarrow \infty} w^*(x_n)$ existe. Sabemos por suposición que $w^*(x_0) = w(x_0, a_0)$ para algún $a_0 \in D(x_0)$. Como $x \mapsto D(x)$ es continua, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y una sucesión de puntos $a_{n_k} \in D(x_{n_k})$ que convergen a a_0 . Por lo tanto, tenemos $(x_{n_k}, a_{n_k}) \rightarrow (x_0, a_0)$. Seguimos de la continuidad de w que

$$w^*(x_0) = w(x_0, a_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} w(x_{n_k}, a_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} w^*(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} w^*(x_n).$$

Ya que $x \mapsto D(x)$ es semicontinua superior, D es cerrado y seguimos que

$$D^* := \{(x, a) \in D \mid w(x, a) = w^*(x)\}$$

es un subconjunto cerrado de D . Entonces obtenemos que $x \mapsto D^*(x)$ es también semicontinua superior. Así, si v tiene un único maximizador f_n , i.e., $D_n^*(x) = \{f_n(x)\}$ para cualquier $x \in E$, entonces f_n debe ser continua. ■

Utilizando la Proposición 1.3 puede verse que (SA_N) se cumple y que el Teorema 1.5 es válido.

Teorema 1.8. *Consideremos un modelo de decisión de Markov con una función continua acotada superiormente b dada. Si para cualquier $n = 0, 1, \dots, N-1$ se cumple lo siguiente:*

- i) $D_n(x)$ es compacto para cualquier $x \in E$ y $x \mapsto D_n(x)$ es continua,*
- ii) $(x, a) \mapsto \int v(x')Q_x(dx'|x, a)$ es continua para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^+$ continua,*
- iii) $(x, a) \mapsto r_n(x, a)$ es continua,*

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

iv) $x \mapsto g_N(x)$ es continua,

entonces el conjunto $\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^* | v \text{ es continua}\}$ y $\Delta_n := F_n$ satisfacen la suposición de estructura (SA_N) . Si el maximizador de V_n es único, entonces Δ_n puede ser elegido como el conjunto de funciones continuas.

1.2.3. Modelos de decisión de Markov medibles

Algunas veces la suposición de estructura (SA_N) puede ser cumplida con $\mathbb{M}_n = \mathbb{B}_b^*$. Para este caso es útil el siguiente resultado.

Proposición 1.4. Sea $v \in \mathbb{B}_b^*$ y supongamos que las siguientes declaraciones se cumplen:

- i) $D_n(x)$ es compacto para cualquier $x \in E$.
- ii) $a \mapsto L_n v(x, a)$ es semicontinua superior en $D_n(x)$ para cualquier $x \in E$,

entonces $\tau_n v$ es medible y existe un maximizador $f_n \in F_n$ de v .

El siguiente Teorema se obtiene directamente de la Proposición 1.4. En particular el resultado principal (Teorema 1.2) se cumple bajo las suposiciones del Teorema 1.9

Teorema 1.9. Consideremos un modelo de decisión de Markov con función acotada superiormente b dada. Si para cualquier $n = 0, 1, \dots, N - 1$ se cumple lo siguiente:

- i) $D_n(x)$ es compacto para cualquier $x \in E$,
- ii) $a \mapsto \int v(x') Q_n(dx' | x, a)$ es semicontinua superior para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^+$ y para cualquier $x \in E$,
- iii) $a \mapsto r_n(x, a)$ es semicontinua superior para cualquier $x \in E$,

entonces el conjunto $\mathbb{M}_n := \mathbb{B}_b^+$ y $\Delta_n := F_n$ satisfacen el supuesto de estructura (SA_N) .

En un marco más general, se puede elegir \mathbb{M}_n como el conjunto de funciones semianalíticas superior [5]. Pero por supuesto uno quiere elegir \mathbb{M}_n y Δ_n tan pequeños como sea posible.

1.2.4. Modelos de decisión de Markov monótonos y convexos

Las propiedades de estructura (e.g. monotonía, concavidad y convexidad) para las funciones de valor y también para los maximizadores son importantes para aplicaciones. Resultados como estos también simplifican soluciones numéricas. Para facilitar lo dicho, suponemos ahora que $E \subset \mathbb{R}^d$ y $A \subset \mathbb{R}^m$ dotado del preorden usual \leq de comparación componente a componente i.e., $x \leq y$, para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^d$, si $x_k \leq y_k$ para $k = 1, \dots, d$.

Teorema 1.10. Consideremos un modelo de decisión de Markov con función acotada b dada. Si para cualquier $n = 0, 1, \dots, N - 1$ se cumple lo siguiente:

- i) $D_n(\cdot)$ es creciente, i.e., $x \leq x'$ implica que $D_n(x) \subset D_n(x')$,

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

ii) Los kérneles estocásticos $Q_n(\cdot|x, a)$ son monótonamente estocásticos para cualquier $a \in D_n(x)$, i.e. el mapeo $x \mapsto \int v(x')Q_n(dx'|x, a)$ es creciente para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^+$ creciente y para cualquier $a \in D_n(x)$,

iii) $x \mapsto r_n(x, a)$ es creciente para cualquier a ,

iv) para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^+$ creciente, existe un maximizador $f_n \in \Delta_n$ de v ,

v) g_N es creciente en E ,

entonces el conjunto $\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^+ | v \text{ es creciente}\}$ y Δ_n satisfacen el supuesto de estructura (SA_N) .

Demostración: Obviamente, la condición iv) muestra que $g_N \in \mathbb{M}_N$. Sea ahora $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces la condición ii) y iii) implican que $x \mapsto L_nv(x, a)$ es creciente para cualquier a . En vista de i) obtenemos $\tau_nv \in \mathbb{M}_n$. La condición v) es equivalente a la condición iii) de (SA_N) . Así, el Teorema es mostrado. ■

Es más complicado identificar situaciones en las que los maximizadores son crecientes. Para esta propiedad es que necesitamos la siguiente Definición.

Definición 1.9. Un conjunto $D \subset E \times A$ es llamado completamente monótono si para cualesquiera puntos $(x, a'), (x', a) \in D$ con $x \leq x'$ y $a \leq a'$ se sigue que $(x, a), (x', a') \in D$.

Un caso especial en donde D es completamente monótono es si $D(x)$ es independiente de x . Si $A = \mathbb{R}$ y $D(x) = [\underline{d}(x), \bar{d}(x)]$, entonces D es completamente monótona si y sólo si $\underline{d} : E \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{d} : E \rightarrow \mathbb{R}$ son crecientes.

Proposición 1.5. Sea $v \in \mathbb{B}_b^+$ y $D_n^*(x) := \{a \in D_n(x) | L_nv(x, a) = \tau_nv(x)\}$ para $x \in E$. Si

i) D_n es completamente monótona,

ii) L_nv es supermodular en D_n ,

iii) existe un maximizador más grande f_n^* de v , i.e., para cualquier $x \in E$ se cumple:
 $f_n^*(x) \geq a$ para cualquier $a \in D_n^*(x)$ comparable con $f_n^*(x)$,

entonces f_n^* es débilmente creciente, i.e., $x \geq x'$ implica que $f_n^*(x) \geq f_n^*(x')$, siempre que $f_n^*(x)$ y $f_n^*(x')$ son comparables.

Demostración: Supongamos que f_n^* no es creciente, i.e. existe $x, x' \in E$ con $x \leq x'$ y $f_n^*(x) := a \geq a' := f_n^*(x')$. Debido a las suposiciones i) y ii) sabemos que $(x, a'), (x', a) \in D_n$ y

$$(L_nv(x, a') - L_nv(x, a)) + (L_nv(x', a) - L_nv(x', a')) \geq 0.$$

Como a es un punto máximo de $b \mapsto L_nv(x, b)$ y a' es un punto máximo de $b \mapsto L_nv(x', b)$ la expresión en paréntesis no es positiva. Así, debemos tener que $L_nv(x', a') = L_nv(x', a)$ lo que significa que en particular a es también un punto máximo de $b \mapsto L_nv(x', b)$. Pero esto contradice la definición de f_n^* como el más grande maximizador de v . ■

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

Observación 1.10. a) *Un resultado similar se cumple para el maximizador más pequeño de v .*

b) *Si revertimos la relación en el espacio de estados o en el espacio de acciones, obtenemos condiciones para maximizadores débilmente decrecientes.*

Si un modelo de decisión de Markov cumple todas la suposiciones del Teorema 1.10 y la Proposición 1.5, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_n &:= \{v \in \mathbb{B}_b^* | v \text{ es creciente}\} \\ \Delta_n &:= \{f \in F_n | f \text{ es débilmente creciente}\}\end{aligned}$$

satisfacen el supuesto de estructura (SA_N) . De particular interés son las funciones de valor cóncavas o convexas.

Proposición 1.6. *Sea $v \in \mathbb{B}_b^+$ y supongamos lo siguiente:*

- i) D_n es convexa en $E \times A$,
- ii) $L_n v(x, a)$ es cóncava en D_n ,

entonces $\tau_n v$ es cóncava en E .

Demostración: Primero note que $\tau_n v(x) < \infty$ para cualquier $x \in E$ y que E es convexa. Sea $x, x' \in E$ y $\alpha \in (0, 1)$. Para $\varepsilon > 0$ existe $a \in D_n(x)$ y $a' \in D_n(x')$ con

$$\begin{aligned}L_n v(x, a) &\geq \tau_n v(x) - \varepsilon, \\ L_n v(x', a') &\geq \tau_n v(x') - \varepsilon.\end{aligned}$$

La convexidad de D_n implica

$$\alpha(x, a) + (1 - \alpha)(x', a') \in D_n$$

significa que $\alpha a + (1 - \alpha)a' \in D_n(\alpha x + (1 - \alpha)x')$. Por ii)

$$\begin{aligned}\tau_n v(\alpha x + (1 - \alpha)x') &\geq L_n v(\alpha x + (1 - \alpha)x', \alpha a + (1 - \alpha)a') \\ &\geq \alpha L_n v(x, a) + (1 - \alpha)L_n v(x', a') \\ &\geq \alpha \tau_n v(x) + (1 - \alpha)\tau_n v(x') - \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$. ■

La Proposición 1.6 implica que (SA_N) se cumple, por lo tanto, el conjunto \mathbb{M}_n pertenece a un subconjunto de funciones cóncavas.

Teorema 1.11. *Consideremos un modelo de decisión de Markov con función acotada superiormente b que para cualquier $n = 0, 1, \dots, N - 1$ cumple lo siguiente:*

- i) D_n es convexa en $E \times A$,
- ii) el mapeo $(x, a) \mapsto \int v(x')Q_n(dx'|x, a)$ es cóncava para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^*$ cóncava,
- iii) $(x, a) \mapsto r_n(x, a)$ es cóncava,

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.2. ESTRUCTURA DE UN MODELO DE DECISIÓN DE MARKOV

iv) g_N es cóncava en E ,

v) para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^+$ cóncava, existe un maximizador $f_n \in \Delta_n$ de v .

Entonces el conjunto $\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^+ | v \text{ es cóncavo}\}$ y Δ_n satisfacen la suposición de estructura (SA_N) .

Observación 1.11. Si $A = \mathbb{R}$ y $D(x) = [\underline{d}(x), \bar{d}(x)]$ entonces D es convexa en $E \times A$ si y sólo si E es convexa, $\bar{d}: E \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y $\underline{d}: E \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava.

Proposición 1.7. Sea $v \in \mathbb{B}_b^+$ y supongamos que se cumple:

i) E es convexa y $D_n := E \times A$,

ii) $x \mapsto L_n v(x, a)$ es convexa para cualquier $a \in A$,

entonces $\tau_n v$ es convexa en E . Si además A es un politopo (el análogo en dimensión arbitraria de un polígono o poliedro) y $a \mapsto L_n v(x, a)$ es convexa para cualquier $x \in E$, entonces existe a , llamada maximizador bang-bang, f_n^* de v a tiempo n , i.e. $f_n^*(x)$ es un vértice de A para cualquier $x \in E$.

Demostración: La primera afirmación se sigue del hecho que el supremo de un número arbitrario de funciones convexas es también convexa (porque $\tau_n v < \infty$). Ahora, si A es un politopo, la función convexa $a \mapsto L_n v(x, a)$ alcanza su supremo en un vértice y el conjunto de todos los puntos máximos de $a \mapsto L_n v(x, a)$ que son vértices, es finito para cualquier $x \in E$. Entonces aplicando el Teorema de selección B.4, obtenemos la segunda declaración. ■

La Proposición 1.7 implica directamente que las siguientes condiciones en los datos del modelo de decisión de Markov garantizan que (SA_N) se satisface con el conjunto \mathbb{M}_n perteneciente a un subconjunto de funciones convexas.

Teorema 1.12. Consideremos un modelo de decisión de Markov con función acotada superiormente b que para cualquier $n = 0, 1, \dots, N - 1$ cumple lo siguiente:

i) E es convexa y $D_n := E \times A$,

ii) para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^+$ convexa, $x \mapsto \int v(x') Q_n(dx' | x, a)$ es convexa para cualquier $a \in A$,

iii) $x \mapsto r_n(x, a)$ es convexa para cualquier $a \in A$,

iv) g_N es convexa,

v) para cualquier $v \in \mathbb{B}_b^+$ convexa, existe un maximizador $f_n \in \Delta_n$ de v ,

entonces el conjunto $\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^+ | v \text{ es convexo}\}$ y Δ_n satisfacen la suposición de estructura (SA_N) .

1.3. Modelos de decisión de Markov estacionarios

En esta sección consideraremos modelos de decisión de Markov estacionarios, es decir los componentes del modelo no dependen de n y está dado por (E, A, Q, r, g_N) .

Denotamos por F el conjunto de todas las reglas de decisión $f : E \rightarrow A$ con $f(x) \in D(x)$, para $x \in E$. Entonces F^N es el conjunto de todas las políticas de las N etapas $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1})$.

La recompensa esperada descontada sobre las N etapas bajo una política $\pi \in F^N$ y $\beta \in (0, 1]$ es dada por

$$J_{n\pi}(x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} \beta^k r(X_k, f_k(X_k)) + \beta^N g(X_N) \right], \quad x \in E,$$

cuando el sistema empieza en el estado $x \in E$. La máxima recompensa esperada descontada sobre las N etapas es definida por

$$J_0(x) := g(x)$$

$$J_n(x) := \sup_{\pi \in F^n} J_{n\pi}(x), \quad x \in E, \quad 1 \leq n \leq N.$$

A fin de obtener una buena definición del problema de optimización estocástica, necesitamos la siguiente suposición de integrabilidad (como en la Sección 1.1.2):

Supuesto de Integrabilidad (I_N): para $x \in E$,

$$\delta_N(x) := \sup_{\pi} \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} \beta^k r^+(X_k, f_k(X_k)) + \beta^N g^+(X_N) \right] < \infty.$$

Observación 1.12. Como $\delta_0 := g^+ \leq \delta_{n-1} \leq \delta_n \leq \delta_N$ y

$$\delta_n^N = \beta^n \delta_{N-n}, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

la suposición de integrabilidad (I_N) es equivalente al supuesto de integrabilidad de la Sección 1.1.2 cuando tenemos un modelo de decisión de Markov estacionario.

Como explicamos en la Sección 1.2, es conveniente mostrar que (I_N) se cumple para probar la existencia de una función acotada superiormente. La definición de una función acotada superiormente para un modelo de decisión de Markov estacionario es como sigue.

Definición 1.10. Un mapeo medible $b : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ es llamado una **función acotada superiormente**, para el modelo de decisión de Markov estacionario, si existe $c_r, c_g, \alpha_b \in \mathbb{R}_+$ tal que:

- i) $r^+(x, a) \leq c_r b(x)$, para cualquier $(x, a) \in D$,
- ii) $g^+(x) \leq c_g b(x)$, para cualquier $x \in E$,
- iii) $\int b(x') Q(dx'|x, a) \leq \alpha_b b(x)$, para cualquier $(x, a) \in D$.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.3. MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV ESTACIONARIOS

Si el modelo de decisión de Markov tiene una función acotada superiormente b , entonces tenemos que $\delta_N \in \mathbb{B}_b$ y el supuesto de integrabilidad (I_N) se satisface (c.f., Proposición 1.1). Obviamente cada modelo estacionario es un modelo especial no estacionario y existe la siguiente relación entre la función de valor J_n y V_n :

$$V_n(x) = \beta^n J_{N-n}(x), \quad x \in E, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Pero, por otro lado, cada modelo de decisión de Markov no estacionario puede ser formulado como un estacionario [4]. La idea es extender el espacio de estados incluyendo el parámetro del tiempo.

Como en la Definición 1.6, introducimos ahora los siguientes operadores para $v \in \mathbb{M}(E)$:

$$\begin{aligned} Lv(x, a) &:= r(x, a) + \beta \int v(x')Q(dx'|x, a), \quad (x, a) \in D, \\ \tau_f v(x) &:= Lv(x, f(x)), \quad x \in E, \\ \tau v(x) &:= \sup_{a \in D(x)} Lv(x, a), \quad x \in E. \end{aligned}$$

τ es llamado el operador de recompensa máxima. La iteración de recompensa es ahora como sigue.

Teorema 1.13. (Iteración de Recompensa). Para $\pi = (f_0, \dots, f_{n-1})$ se cumple:

$$J_{n\pi} = \tau_{f_0} \dots \tau_{f_{n-1}} g.$$

El supuesto de estructura (SI_N) para un modelo de decisión de Markov estacionario es dado por,

Supuesto de Estructura (SI_N): Existen conjuntos $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}(E)$ y $\Delta \subset F$ tal que:

- (i) $g \in \mathbb{M}$.
- (ii) Si $v \in \mathbb{M}$ entonces $\tau v(x)$ está bien definida y $\tau v \in \mathbb{M}$.
- (iii) Para cualquier $v \in \mathbb{M}$ existe un maximizador $f \in \Delta$ de v , i.e.

$$\tau_f v(x) = \tau v(x), \quad x \in E.$$

El Teorema principal 1.5 acerca del cálculo recursivo de la función de valor óptima tiene ahora la siguiente forma.

Teorema 1.14. (Teorema de Estructura). Si (SI_N) se satisface, entonces se cumple lo siguiente:

- a) $J_n \in \mathbb{M}$ y la ecuación de Bellman $J_n = \tau J_{n-1}$ se cumple, i.e.

$$\begin{aligned} J_0(x) &= g(x), \\ J_n(x) &= \sup_{a \in D(x)} \left\{ r(x, a) + \beta \int J_{n-1}(x')Q(dx'|x, a) \right\}, \quad x \in E. \end{aligned}$$

Además, $J_n = \tau^n g$.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

1.3. MODELOS DE DECISIÓN DE MARKOV ESTACIONARIOS

b) Para $n = 1, \dots, N$ existen maximizadores f_n^* de J_{n-1} con $f_n^* \in \Delta$ y cada sucesión de maximizadores $\{f_n^*\}_{n=1}^N$ de J_{n-1} define una política óptima (f_N^*, \dots, f_1^*) para las N etapas del modelo de decisión de Markov estacionario.

En muchos ejemplos vemos que el supuesto de estructura se cumple naturalmente. Para algunas condiciones que implican (SA_N) (ver Sección 1.2). Los casos más simples surgen cuando ambos espacios E y A son finitos. Aquí el supuesto de estructura (SI_N) se satisface cuando $\mathbb{M} := \{v : E \rightarrow \mathbb{R}\}$ porque cada función es medible y existen los maximizadores. Además, el kernel de transición tiene una densidad discreta y la denotamos como

$$q(x'|x, a) := Q(\{x'\}|x, a),$$

para $x, x' \in E$ y $a \in D(x)$.

Análogamente, para el caso estacionario, el Teorema 1.14 da un algoritmo recursivo para resolver problemas de decisión de Markov.

Algoritmo de inducción hacia adelante.

1. Sea $k := 0$ y para $x \in E$:

$$J_0(x) := g_N(x).$$

2. Sea $k := n + 1$ y calculamos para $x \in E$

$$J_k(x) = \sup_{a \in D(x)} \left\{ r(x, a) + \int J_{k-1}(x') Q(dx'|x, a) \right\}.$$

y un maximizador f_k^* de J_{k-1} .

3. Si $k = N$, entonces la función valor J_N es calculada y la política óptima π^* es dada por $\pi^* = (f_N^*, \dots, f_1^*)$. De otra manera ir al paso 2.

El algoritmo de inducción hacia adelante calcula la función de valor de N etapas y las reglas de decisión óptimas, de forma recursiva sobre las etapas, comenzando con la función recompensa terminal.

El siguiente modelo de decisión de Markov con descuento aleatorio tiene importancia en las aplicaciones de finanzas y seguros.

Ejemplo 1.2. (Modelo de decisión de Markov con descuento aleatorio). Consideremos un modelo de Markov estacionario $(E, A, D, Q, \beta^n r, \beta^N g)$. Algunas veces los factores de descuento para los estados varían aleatoriamente. Asumimos que la sucesión de factores de descuento (no negativos) (β_n) , forman un proceso de Markov dado por el kernel de transición $Q^\beta(B|y)$ y β_0 es dado. Supongamos que (β_n) es independiente del proceso de estados. (El caso más general donde (β_n) depende del proceso de estados puede ser tratado [4]). Entonces, estamos interesados en encontrar la recompensa máxima esperada descontada sobre todas las políticas $\pi \in F^N$, i.e., queremos maximizar la expresión

$$\mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \beta_k \right) r(X_n, f_n(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})) + \left(\prod_{k=0}^{N-1} \beta_k \right) g(X_N) \right], \quad x \in E.$$

Por supuesto asumimos que el proceso de Markov (β_n) puede ser observado por el que toma las decisiones y así se permite que las reglas de decisión dependan de él. Este problema puede ser resuelto vía un modelo de decisión estándar. Para extender el espacio de estados E definimos:

- $\tilde{E} := E \times [0, \infty) \times [0, \infty)$ donde $(x, \beta, \delta) \in \tilde{E}$ denota el estado x , el nuevo factor de descuento β y el producto δ de los factores de descuento,
- $\tilde{A} = A$,
- $\tilde{D}(x, \beta, \delta) = D(x)$, para cualquier $(x, \beta, \delta) \in \tilde{E}$,
- $\tilde{Q}(B \times B_1 \times B_2 \mid x, \beta, \delta, a) = Q(B \mid x, a) \otimes Q^\beta(B_1 \mid \beta) \otimes 1_{B_2}(\delta \cdot \beta)$ para cualquier $(x, \beta, \delta) \in \tilde{E}$ y conjuntos medibles adecuados B, B_1, B_2 ,
- $\tilde{r}((x, \beta, \delta), a) = \delta r(x, a)$ para cualquier $(x, \beta, \delta) \in \tilde{E}$,
- $\tilde{g}(x, \beta, \delta) = \delta g(x)$

y el operador de recompensa máximo para $v \in \mathbb{M}(E)$ está dado por

$$\tau v(x, \beta, \delta) = \sup_{a \in D(x)} \left\{ \delta r(x, a) + \int Q(dx' \mid x, a) \int Q^\beta(dy' \mid \beta) v(x', y', \delta \beta) \right\}$$

la solución del problema anterior con descuento aleatorio es dado por la función de valor

$$J_N(x, \beta_0, 1) = \tau^N \tilde{g}(x, \beta_0, 1).$$

Note que la regla de decisión óptima a tiempo n depende de x_n, β_n y del producto de factores de descuento $\delta_n = \prod_{k=0}^{n-1} \beta_k$.

1.4. Modelo lineal cuadrático

1.4.1. Problemas estocásticos lineales-cuadráticos (LQ)

Una clase famosa de problemas con varias aplicaciones son los problemas lineales-cuadráticos (LQ). El nombre se deriva de las funciones lineales de transición de estado y las funciones cuadráticas de costo. Supongamos que $E := \mathbb{R}^m$ es el espacio de estados del sistema y $D_n(x) := A := \mathbb{R}^d$, i.e., todas las acciones son admisibles. Las funciones de transición son lineales en el espacio de estados y acciones con matrices con coeficientes aleatorios $A_0, B_0, \dots, A_{N-1}, B_{N-1}$ donde la dimensión de A_i es $m \times m$ y para B_i la dimensión es $m \times d$ con $i = 0, \dots, N-1$, el sistema de funciones de transición está dado por

$$T_n(x, a, A_{n+1}, B_{n+1}) := A_{n+1}x + B_{n+1}a.$$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES
1.4. MODELO LINEAL CUADRÁTICO

Así, la perturbación en $[n, n+1)$ está dada por $Z_{n+1} := (A_{n+1}, B_{n+1})$. La distribución de Z_{n+1} no es influenciada por el estado ni por la acción, se supone que las matrices aleatorias Z_1, Z_2, \dots son independientes pero no necesariamente idénticamente distribuidas, tienen esperanza y covarianza finita. Además, asumimos que $\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]$ es definida positiva para cualquier Q simétrica definida positiva. Obviamente obtenemos un problema no estacionario. La recompensa de una etapa es una función de costo negativa

$$r_n(x, a) := -x^T Q_n x$$

y la recompensa terminal es

$$g_N(x, a) := -x^T Q_N x$$

donde Q_0, Q_1, \dots, Q_{N-1} son matrices deterministas, simétricas y definidas positivas. El objetivo es minimizar

$$\mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} X_k^T Q_k X_k \right]$$

sobre todas las políticas de N etapas. Así, el objetivo es mantener el estado del sistema cerca de cero. Asumiremos los datos del sistema del modelo de decisión de Markov con perturbaciones (Z_n) como sigue.

- $E := \mathbb{R}^m$, donde $x \in E$ denota el estado del sistema,
- $A := \mathbb{R}^d = D_n(x)$, donde $a \in A$ denota la acción,
- $\mathcal{Z} := \mathbb{R}^{(m,m)} \times \mathbb{R}^{(m,d)}$ donde $Z = (A, B)$ con valores en \mathcal{Z} denota los coeficientes aleatorios de transición del sistema lineal,
- $T_n(x, a, A_{n+1}, B_{n+1}) := A_{n+1}x + B_{n+1}a$ es la función de transición,
- $Q^Z(\cdot | x, a) :=$ distribución de $Z_{n+1} := (A_{n+1}, B_{n+1})$ (independiente de (x, a)),
- $r_n(x, a) := -x^T Q_n x$,
- $g_N(x, a) := -x^T Q_N x$,
- $\beta := 1$.

Sea $r \leq 0$ y $b \equiv 1$ una función acotada superiormente. Así, (A_N) se cumple. Trataremos este problema como un problema de minimización de costo, i.e., suponemos que V_n es el costo mínimo en el periodo $[n, N]$. Para los cálculos posteriores asumimos que la esperanza existe. Existen varias aplicaciones de este problema de regulación en ingeniería, este tipo de problemas son importantes. El operador de costo mínimo está dado por

$$\tau_n v(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}v(A_{n+1}x + B_{n+1}a)\}.$$

Para saber que forma deben tener los conjuntos \mathbb{M}_n y Δ_n , es necesario realizar los primeros cálculos del algoritmo de inducción hacia atrás e investigar la estructura de la función de valor.

Comprobaremos la suposición de estructura (SA_N) . Es razonable asumir que \mathbb{M}_n está dado por (1.2)

$$\mathbb{M}_n := \{v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+ | v(x) = x^T Q x \text{ con } Q \text{ simétrica y definida positiva}\}. \quad (1.2)$$

También resultará que los conjuntos $\Delta_n := \Delta \cap F_n$ pueden ser elegidos como los conjuntos de todas las funciones lineales, i.e.

$$\Delta := \{f : E \rightarrow A | f(x) = Cx \text{ para algún } C \in \mathbb{R}^{(d,m)}\}.$$

Empezaremos con (SA_N) i): obviamente $x^T Q_N x \in \mathbb{M}_N$. Ahora sea $v(x) = x^T Q x \in \mathbb{M}_{n+1}$. Intentaremos resolver el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \tau_n v(x) &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}v(A_{n+1}x + B_{n+1}a)\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}[(A_{n+1}x + B_{n+1}a)^T Q (A_{n+1}x + B_{n+1}a)]\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + x^t \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}]x + a^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}]x + x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}]a \\ &\quad + a^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]a\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}]x + 2x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}]a \\ &\quad + a^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]a\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Como Q es simétrica y definida positiva, vemos que $\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]$ también es simétrica y definida positiva,

$$\begin{aligned} \{\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]\}^T &= \mathbb{E}[(Q B_{n+1})^T B_{n+1}] \\ &= \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}], \end{aligned}$$

por lo tanto, regular, es decir, existe su inversa, además la función entre las llaves es convexa en a (para $x \in E$ fija), esto lo vemos cuando derivamos dos veces con respecto de a y vemos que $\frac{\partial^2 \tau_n v(x)}{\partial a^2} > 0$. Derivando con respecto de a e igualando a cero, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_n v(x)}{\partial a} &= 0 \\ a &= -\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]^{-1} \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}]x. \end{aligned}$$

Vemos que existe un punto mínimo y además es convexa en ese punto, por lo tanto, tenemos que el único punto mínimo está dado por

$$f_n^*(x) = -(\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}])^{-1} \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}]x.$$

Substituyendo el punto mínimo en la Ecuación (1.3) obtenemos que

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES
1.4. MODELO LINEAL CUADRÁTICO

$$\begin{aligned}
\tau_n v(x) &= x^T Q_n x + x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}] x + 2x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}] [-\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]]^{-1} \\
&= x^T Q_n x + x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}] x - x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}] \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]^{-1} \\
&\quad \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}] x
\end{aligned}$$

entonces a $\tau_n v(x)$ se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\tau_n v(x) &= x^T \{Q_n + \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}] - \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}] (\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}])^{-1} \\
&\quad \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}]\} x \\
&= x^T \tilde{Q}_n x,
\end{aligned}$$

donde \tilde{Q}_n está definida como la expresión dentro de las llaves, vemos que es simétrica,

$$\begin{aligned}
&\{Q_n + \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}] - \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}] (\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}])^{-1} \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}]\}^T \\
&= Q_n^T + \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}]^T - [\mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}] (\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}])^{-1} \\
&\quad \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}]^T]^T \\
&= Q_n + \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}] - ((\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}])^{-1} \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}])^T \\
&\quad \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}]^T \\
&= Q_n + \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q A_{n+1}] - \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q B_{n+1}] (\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}])^{-1} \\
&\quad \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}],
\end{aligned}$$

por lo tanto, $x^T \tilde{Q}_n x = \tau_n v(x) \geq x^t Q_n x$, es también definida positiva. Así, $\tau v \in \mathbb{M}_n$ y el supuesto estructura (SA_N) se cumple para \mathbb{M}_n y $\Delta_n = \Delta \cap F_n$. Ahora podemos aplicar el Teorema 1.5 para resolver el problema estocástico LQ.

Teorema 1.15. a) Sean las matrices \tilde{Q}_n definidas de forma recursiva por

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_N &:= Q_N \\
\tilde{Q}_n &:= Q_n + \mathbb{E}[A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1}] - \mathbb{E}[A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1}] (\mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1}])^{-1} \\
&\quad \mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1}].
\end{aligned}$$

Entonces, \tilde{Q}_n es simétrica, semidefinida positiva y $V_n(x) = \tau_n v(x) = \tau_n V_{n+1} = x^T \tilde{Q}_n x$, para $x \in E$.

b) La política óptima $(f_0^*, \dots, f_{N-1}^*)$ está dada por

$$f_n^*(x) := - (\mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1}])^{-1} \mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1}] x.$$

1.4.2. Problemas estocásticos lineales-cuadráticos con perturbaciones

Consideremos el siguiente problema especial LQ ([5] sección 4.1 para más detalles): La función de transición está dada por

$$T_n(x, a, z) := A_{n+1}x + B_{n+1}a + z$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^d$ y A_n, B_n son matrices deterministas, la dimensión de A_n es $m \times m$ y la dimensión de B_n es $m \times d$. Las perturbaciones Z_0, Z_1, \dots, Z_{N-1} son independientes e idénticamente distribuidas con matriz de esperanza y covarianza finita. El costo

$$\mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} X_k^T Q_k X_k \right]$$

tiene que ser minimizado con Q_n definida positiva. Los datos del sistema del modelo de decisión de Markov con perturbaciones (Z_n) son como sigue.

- $E := \mathbb{R}^m$ donde $x \in E$ denota el estado del sistema,
- $A := \mathbb{R}^d = D_n(x)$ donde $a \in A$ denota la acción,
- $\mathcal{Z} := \mathbb{R}^{(m,m)} \times \mathbb{R}^{(m,d)}$ donde $Z = (A, B)$ con valores en \mathcal{Z} denota los coeficientes aleatorios de transición del sistema lineal,
- $T_n(x, a, z) := A_{n+1}x + B_{n+1}a + z$ es la función de transición,
- $Q^Z(\cdot|x, a) :=$ distribución de Z_{n+1} (independiente de (x, a)),
- $r_n(x, a) := -x^T Q_n x$,
- $g_N(x, a) := -x^T Q_N x$,
- $\beta := 1$.

Sea $r \leq 0$ y $b \equiv 1$ una función acotada superiormente. Así, (A_N) se cumple. Trataremos este problema como un problema de minimización de costo, i.e., suponemos que V_n es el costo mínimo en el periodo $[n, N]$. Para los cálculos posteriores asumimos que la esperanza existe. El operador de costo mínimo está dado por:

$$\tau_n v(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}v(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)\}.$$

Lo mismo que el problema anterior, para saber la forma de los conjuntos \mathbb{M}_n y Δ_n , es necesario realizar los primeros cálculos del algoritmo de inducción hacia atrás e investigar la estructura de la función de valor.

Comprobaremos la suposición de estructura (SA_N) . También, asumiremos como en el caso anterior que \mathbb{M}_n está dada por (1.4).

$$\mathbb{M}_n := \{v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+ | v(x) = x^T Q x + P \text{ con } P \in \mathbb{R}_+, \\ Q \text{ simétrica y definida positiva,}\}. \quad (1.4)$$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES
1.4. MODELO LINEAL CUADRÁTICO

Como los conjuntos $\Delta_n := \Delta \cap F_n$ pueden ser elegidos como los conjuntos de todas las funciones lineales, i.e.

$$\Delta := \{f : E \rightarrow A \mid f(x) = Cx + D \text{ para algún } C \in \mathbb{R}^{(d,m)} \text{ y } D \in \mathbb{R}^{(m,m)}\}.$$

Empezaremos con (SA_N) *i*): Obviamente $x^T Q_N x \in \mathbb{M}_N$. Ahora sea $v(x) = x^T Q x \in \mathbb{M}_{n+1}$. Intentaremos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \tau_n v(x) &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}v(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}[(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)^T Q (A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)]\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + x^t A_{n+1}^T Q A_{n+1} x + a^T B_{n+1}^T Q A_{n+1} x + x^T A_{n+1}^T Q B_{n+1} a \\ &\quad + a^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z] + \mathbb{E}[z^T Q B_{n+1}] a + \mathbb{E}[z^T Q A_{n+1}] x + x^T [A_{n+1} Q z] \\ &\quad + a^T B_{n+1}^T Q B_{n+1} a + \mathbb{E}[z^T Q z]\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + x^T A_{n+1}^T Q A_{n+1} x + 2x^T A_{n+1}^T Q B_{n+1} a + 2a^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z] \\ &\quad + 2x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q z] + a^T B_{n+1}^T Q_{n+1} B a + \mathbb{E}[z^T Q z]\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como Q es simétrica y definida positiva, tenemos que $\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}]$ también es simétrica y definida positiva, así es regular, por lo tanto existe la inversa, la función entre las llaves es convexa en a (para $x \in E$ fija), esto es porque $\frac{\partial^2 \tau_n v(x)}{\partial a^2} > 0$. Ahora, derivando con respecto de a e igualando a cero obtenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_n v(x)}{\partial a} &= 0 \\ a &= -(B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} (B_{n+1}^T Q A_{n+1} x + \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z]). \end{aligned}$$

Dado que existe un punto mínimo y además es convexa en el punto a , tenemos que el único punto mínimo está dado por

$$f_n^*(x) = -(B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} (B_{n+1}^T Q A_{n+1} x + \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z]),$$

substituyendo el punto mínimo en la Ecuación (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
\tau_n v(x) &= x^T Q_n x + x^T A_{n+1}^T Q A_{n+1} x + (- (B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} (B_{n+1}^T Q A_{n+1} x \\
&\quad + \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z])^T B_{n+1}^T Q B_{n+1} (- (B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} (B_{n+1}^T Q A_{n+1} x \\
&\quad + \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z])) + 2x^T A_{n+1}^T Q B_{n+1} (- (B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} (B_{n+1}^T Q A_{n+1} x \\
&\quad + \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z])) + 2(- (B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} (B_{n+1}^T Q A_{n+1} x \\
&\quad + \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z]))^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q z] + 2x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T Q z] + \mathbb{E}[z^T Q z] \\
&= x^T Q_n x + x^T A_{n+1}^T Q A_{n+1} x - x^T A_{n+1}^T Q B_{n+1} (B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} B_{n+1}^T Q A_{n+1} x \\
&\quad + \mathbb{E}[z^T Q z] \\
&= x^T (Q_n + A_{n+1}^T Q A_{n+1} - A_{n+1}^T Q B_{n+1} (B_{n+1}^T Q B_{n+1})^{-1} B_{n+1}^T Q A_{n+1}) x \\
&\quad + \mathbb{E}[z^T Q z] \\
&= x^T \tilde{Q}_n x + \mathbb{E}[z^T Q z].
\end{aligned}$$

dato que \tilde{Q}_n está definida como la expresión dentro de las llaves. Notemos que \tilde{Q}_n es simétrica y por lo tanto $x^T \tilde{Q}_n x + \mathbb{E}[z^T Q z] = \tau_n v(x) \geq x^T Q_n x$, es también positiva. Así $\tau v \in \mathbb{M}_n$ y el supuesto de estructura (SA_N) se cumple para \mathbb{M}_n y $\Delta_n = \Delta \cap F_n$.

Como en el Teorema anterior tenemos que $V_n(x) = x^T \tilde{Q}_n x$, para $x \in E$, porque $V_n(x) = \tau_n v(x) = \tau_n V_{n+1}(x) = \tau_n x^t \tilde{Q}_{n+1} x$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau_n v(x) &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}v[A_{n+1}x + B_{n+1}a + z]\} \\
&= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_n x + \mathbb{E}[(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)^T \tilde{Q}_{n+1} (A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)]\} \\
&= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T \tilde{Q}_n x + x^T A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x + 2x^T A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1} a \\
&\quad + 2a^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} z] + 2x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} z] + a^T B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1} a \\
&\quad + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{n+1} z]\}.
\end{aligned}$$

y por lo tanto la política óptima está dada por

$$f_n^*(x) := - (B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1})^{-1} (B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x + \mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} z]).$$

Al substituir nuevamente en $\tau_n v(x)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tau_n v(x) &= x^T Q_n x + x^T A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x + [-(B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1})^{-1} B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x]^T \\
&\quad B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1} [-(B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1})^{-1} B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x] \\
&\quad + 2x^T A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1} [-(B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1})^{-1} B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x] \\
&\quad + 2[- (B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1})^{-1} B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x]^T \mathbb{E}[B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} z] \\
&\quad + 2x^T \mathbb{E}[A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} z] + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{n+1} z] \\
&= x^T Q_n x + x^T A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x - x^T A_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1} (B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} B_{n+1})^{-1} \\
&\quad B_{n+1}^T \tilde{Q}_{n+1} A_{n+1} x + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{n+1} z] \\
&= x^T \tilde{Q}_n x + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{n+1} z].
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES
1.4. MODELO LINEAL CUADRÁTICO

Por consiguiente obtenemos que la función de costo está dada por,

$$V_n(x) = x^T \tilde{Q}_n x + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{n+1} z].$$

Aplicando inducción hacia atrás, obtenemos la función de costo mínimo,

$$V_N(x) = x^T \tilde{Q}_N x$$

$$V_{N-1}(x) = x^T \tilde{Q}_{N-1} x + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_N z]$$

$$\begin{aligned} V_{N-2}(x) &= \tau_{N-2} V_{N-1}(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_{N-2} x + \mathbb{E}[V_{N-1}(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)]\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_{N-2} x + \mathbb{E}[(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)^T \tilde{Q}_{N-1} (A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)] \\ &\quad + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_N z]\} \\ &= x^T \tilde{Q}_{N-2} x + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{N-1} z] + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_N z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{N-3}(x) &= \tau_{N-3} V_{N-2}(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_{N-3} x + \mathbb{E}[V_{N-2}(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)]\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{x^T Q_{N-3} x + \mathbb{E}[(A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)^T \tilde{Q}_{N-2} (A_{n+1}x + B_{n+1}a + z)] \\ &\quad + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{N-1} z] + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_N z]\} \\ &= x^T \tilde{Q}_{N-3} x + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{N-2} z] + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_{N-1} z] + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_N z] \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} V_0(x) &= x^T \tilde{Q}_0 x + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_1 z] + \dots + \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_N z] \\ &= x^T \tilde{Q}_0 x + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[z^T \tilde{Q}_k z]. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Mercados financieros

En este capítulo introduciremos los mercados financieros que aparecerán en nuestras aplicaciones. En la Sección 2.1 un mercado financiero es presentado a tiempo discreto. Definiremos un portafolio o estrategia y caracterizaremos la ausencia de arbitraje en estos mercados. En los capítulos posteriores a menudo se restringen los precios de los activos a procesos de Markov, con el fin de poder utilizar el marco de los procesos de decisión de Markov. En la Sección 2.2 daremos el concepto de funciones de utilidad y utilidad esperada.

2.1. Activos dinámicos y portafolios

Consideraremos que los precios de los activos son monitoreados a tiempo discreto. El índice bursátil Alemán (DAX) por ejemplo es calculado cada segundo. Así, suponemos que el tiempo es dividido en periodos de longitud Δt y $t_n = n\Delta t$. La forma más común del precio de un activo es un modelo multiplicativo, i.e. si S_n es el precio en el tiempo $t_n > 0$ entonces

$$S_{n+1} = S_n \tilde{R}_{n+1}.$$

La variable aleatoria positiva \tilde{R}_{n+1} define el *cambio de precio relativo* S_{n+1}/S_n entre el tiempo t_n y t_{n+1} . Para un bono sin riesgo el cambio de precio relativo S_{n+1}^0/S_n^0 es $1 + i_{n+1}$, donde $i_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ es una tasa de interés determinista.

Existen dos casos especiales importantes de modelos multiplicativos. El primero es el modelo binomial o modelo de Cox-Ross-Rubinstein. Asumimos que existe un bono con $i_{n+1} \equiv i$ y una acción con cambio de precio relativo que es independiente e idénticamente distribuida y puede tomar dos valores $\mathbf{u} > 0$ para subir o $\mathbf{d} < 0$ para bajar, donde asumimos que $\mathbf{d} < \mathbf{u}$. La probabilidad para subir o bajar son p y $1 - p$, respectivamente, i.e.

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_n = \mathbf{u}) = p, \quad \mathbb{P}(\tilde{R}_n = \mathbf{d}) = 1 - p.$$

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.1. ACTIVOS DINÁMICOS Y PORTAFOLIOS

La evolución del precio de acciones es mostrada en la Figura 2.1. Si queremos modelar d activos simultáneamente un modelo multinomial es adecuado, i.e., $(\tilde{R}_n^1, \tilde{R}_n^2, \dots, \tilde{R}_n^d)$, es el cambio de precio relativo con su respectivo activo riesgoso en el intervalo $[n-1, n)$, este puede tomar valores en $\{\mathbf{u}, \mathbf{d}\}^d$ y

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_n = z_k) = p_k, \quad k = 1, \dots, 2^d$$

donde $\sum_{k=1}^{2^d} p_k = 1$, con $p_k > 0$.

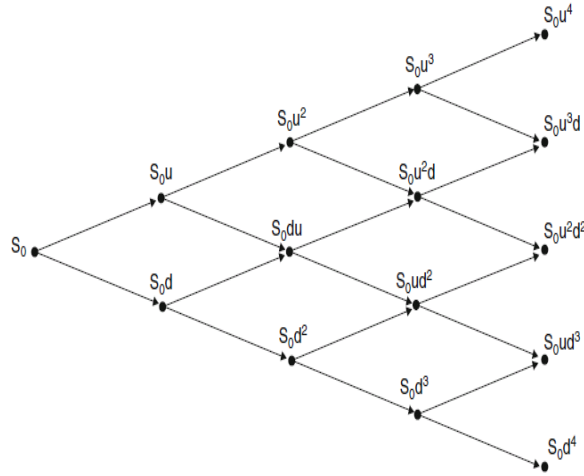


Figura 2.1: Evolución del precio de acción en el modelo binomial enrejado.

El segundo caso especial importante es una discretización del modelo Black-Scholes-Merton. En el mercado, el modelo estándar de Black-Scholes-Merton supone que los precios de las acciones evolucionan de acuerdo a

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

donde (W_t) es un proceso de Wiener, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son parámetros dados. Así, si tomamos un lapso de tiempo Δt obtenemos

$$S_{n+1} = S_n \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma W_{\Delta t}\right).$$

En este caso \tilde{R}_{n+1} tiene una *distribución lognormal* o $\log \tilde{R}_n$ es normalmente distribuida. La versión multivariada es $\log \tilde{R}_n \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$, i.e. $\log \tilde{R}_n$ (el log es tomado componente a componente) tiene una distribución normal multivariada. Note que en ambos casos especiales tenemos que $\tilde{R}_n > 0$, así, garantizamos que el precio de las acciones permanecerá positivo con probabilidad uno.

En lo que sigue consideramos un mercado financiero de N -periodos con d activos riesgosos y un bono sin riesgo. Asumimos que las variables aleatorias están definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con filtración (\mathcal{F}_n) y $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. El mercado financiero es dado por:

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.1. ACTIVOS DINÁMICOS Y PORTAFOLIOS

- Un bono sin riesgo con $S_0^0 \equiv 1$ y

$$S_{n+1}^0 := S_n^0(1 + i_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde i_{n+1} denota la tasa de interés determinista para el periodo $[n, n+1)$. Si la tasa de interés es constante, i.e., $i_n \equiv i$, entonces $S_n^0 = (1+i)^n$.

- Existen d activos riesgosos y el proceso de precios del activo k está dado por $S_0^k = s_0^k$ y

$$S_{n+1}^k = S_n^k \tilde{R}_{n+1}^k, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

El proceso (S_n^k) se supone que se adapta con respecto a la filtración (\mathcal{F}_n) para cualquier k . Además, suponemos que $\tilde{R}_{n+1}^k > 0$ \mathbb{P} -a.s. para cualquier k y n con s_0^k determinista. \tilde{R}_{n+1}^k es el cambio de precio relativo en el intervalo $[n, n+1)$ para el activo riesgoso k .

A continuación denotamos por $S_n := (S_n^1, \dots, S_n^d)$, $\tilde{R}_n := (\tilde{R}_n^1, \dots, \tilde{R}_n^d)$ y $\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, \dots, S_n)$. Como (S_n) es (\mathcal{F}_n) -adaptado se tiene: $\mathcal{F}_n^S \subset \mathcal{F}_n$ para $n = 0, 1, \dots, N$. En la mayoría de los casos asumiremos que los vectores aleatorios $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N$ son independientes, sin embargo, no imponemos ahora esta suposición restrictiva, porque también consideraremos algunos modelos donde el supuesto de independencia no se cumple. Supongamos ahora que somos capaces de invertir en este mercado financiero.

Definición 2.1. *Un portafolio o estrategia de comercio es un (\mathcal{F}_n) -proceso estocástico adaptado $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$ donde $\phi_n^0 \in \mathbb{R}$ y $\phi_n = (\phi_n^1, \dots, \phi_n^d) \in \mathbb{R}^d$ para $n = 0, 1, \dots, N-1$. La cantidad ϕ_n^k denota el monto de dinero que es invertido en k activos durante el intervalo de tiempo $[n, n+1)$.*

Observación 2.1. *Note que en general no hacemos restricción en el signo de ϕ_n^k . En particular, ϕ_n^k puede ser negativa, en caso de que $k = 0$ implicamos que un préstamo es tomado y la tasa de interés es la misma para endeudamiento y préstamo. En caso de que $\phi_n^k < 0$ para $k \neq 0$ esto corresponde a una baja venta de k activos.*

El vector (ϕ_0^0, ϕ_0) es llamado portafolio inicial del inversionista. El valor del portafolio inicial es dado por

$$X_0 := \sum_{k=0}^d \phi_0^k = \phi_0^0 + \phi_0 \cdot e$$

donde $x \cdot y = \sum_{k=1}^d x_k y_k$ denota el producto interior de los vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $e := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$.

Sea ϕ un portafolio y denotamos por X_{n-} al valor del portafolio a tiempo n antes negociado. Entonces

$$X_n := X_{n-} := \sum_{k=0}^d \phi_{n-1}^k \tilde{R}_n^k = \phi_n^0 + \phi_n = \phi_{n-1}^0 (1 + i_n) + \phi_{n-1} \tilde{R}_n.$$

El valor del portafolio a tiempo n después de comerciar es dado por

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.1. ACTIVOS DINÁMICOS Y PORTAFOLIOS

$$X_{n+} := \sum_{k=0}^d \phi_n^k = \phi_n^0 + \phi_n \cdot e.$$

A continuación escribiremos X_n^ϕ cuando queremos hacer explícita la dependencia en el portafolio ϕ .

Definición 2.2. *Un portafolio ϕ es llamado autofinanciado si*

$$X_{n-}^\phi = X_{n+}^\phi \quad \mathbb{P} - a.s.$$

para cualquier $n = 1, \dots, N - 1$, i.e., la riqueza actual es justamente reasignada a los activos.

En las secciones siguientes vamos a restringirnos a portafolios autofinanciados y vamos a asumir que siempre que consideremos un portafolio que es autofinanciado implica que la siguiente equivalencia se cumple para cualquier $n = 0, 1, \dots, N - 1$:

$$X_n = X_{n+} \Leftrightarrow \phi_n^0 + \phi_n \cdot e = \phi_{n-1}^0(1 + i_n) + \phi_{n-1} \cdot \tilde{R}_n.$$

Esta ecuación puede ser usada para derivar una importante fórmula recursiva para la evolución de la riqueza que usaremos a través del siguiente capítulo.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} (X_t - X_{t-1}) \\ &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} (\phi_t^0 + \phi_t \cdot e - (\phi_{t-1}^0 + \phi_{t-1} \cdot e)) \\ &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} (\phi_{t-1}^0(1 + i_n) + \phi_{t-1} \cdot \tilde{R}_t - (\phi_{t-1}^0 + \phi_{t-1} \cdot e)) \\ &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} (\phi_{t-1}^0 + \phi_{t-1}^0 i_n + \phi_{t-1} \cdot \tilde{R}_t - (\phi_{t-1}^0 + \phi_{t-1} \cdot e)) \\ &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} (\phi_{t-1}^0 i_n + \phi_{t-1} \cdot \tilde{R}_t - \phi_{t-1} \cdot e) \\ &= X_0 + \sum_{t=1}^{n+1} (\phi_{t-1}^0 i_n + \phi_{t-1} \cdot (\tilde{R}_t - e)). \end{aligned}$$

Como $\phi_n^0 = X_n - \phi_n \cdot e$, podemos eliminar ϕ_n^0 obteniendo

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.1. ACTIVOS DINÁMICOS Y PORTAFOLIOS

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n (\phi_n^0 i_{n+1} + \phi_n \cdot (\tilde{R}_{n+1} - e)) \\
&= X_n + ((X_n - \phi_n \cdot e) i_{n+1} + \phi_n \cdot (\tilde{R}_{n+1} - e)) \\
&= X_n + (X_n i_{n+1} - \phi_n \cdot e i_{n+1} + \phi_n \cdot \tilde{R}_{n+1} - \phi_n \cdot e) \\
&= X_n + X_n i_{n+1} - \phi_n \cdot e i_{n+1} + \phi_n \cdot \tilde{R}_{n+1} - \phi_n \cdot e \\
&= X_n (1 + i_{n+1}) + \phi_n \cdot (\tilde{R}_{n+1} - e - e i_{n+1}) \\
&= X_n (1 + i_{n+1}) + \sum_{k=1}^d \phi_n^k (\tilde{R}_{n+1} - 1 - i_{n+1}).
\end{aligned}$$

Cuando introducimos el llamado proceso relativo de riesgo (R_n) definido por $R_n := (R_n^1, \dots, R_n^d)$ y

$$R_n^k := \frac{\tilde{R}_n^k}{1 + i_n} - 1, \quad k = 1, \dots, d,$$

de esto obtenemos lo siguiente

$$R_n^k := \frac{\tilde{R}_n^k}{1 + i_n} - 1 = \frac{\tilde{R}_n^k - (1 + i_n)}{1 + i_n} \Rightarrow R_n^k (1 + i_n) = \tilde{R}_n^k - (1 + i_n).$$

Al substituir en X_{n+1} obtenemos una importante fórmula recursiva.

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n (1 + i_{n+1}) + \sum_{k=1}^d \phi_n^k (\tilde{R}_{n+1} - 1 - i_{n+1}) \\
&= X_n (1 + i_{n+1}) + \sum_{k=1}^d \phi_n^k R_{n+1}^k (1 + i_{n+1}) \\
&= X_n (1 + i_{n+1}) + \phi_n R_{n+1} (1 + i_{n+1}) \\
&= (1 + i_{n+1}) (X_n + \phi_n R_{n+1}).
\end{aligned}$$

La ventaja de la ecuación anterior es que solo la inversión en las poblaciones entra en la ecuación y (ϕ_n) puede ser completada por un portafolio autofinanciado. Esta fórmula será usada extensivamente a través del próximo capítulo. Como siempre tenemos que excluir las oportunidades de arbitraje en el mercado financiero. Una oportunidad de arbitraje es formalmente definida como:

Definición 2.3. Una oportunidad de arbitraje es un portafolio autofinanciado $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$ con la siguiente propiedad: $X_0^\phi = 0$ y

$$\mathbb{P}(X_N^\phi \geq 0) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(X_N^\phi > 0) > 0.$$

En términos generales, una oportunidad de arbitraje es una estrategia de inversión libre de riesgo con la posibilidad de una ganancia. En los mercados reales a veces existen tales oportunidades pero una vez detectada por los comerciantes, ésta pronto desaparecerá.

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.1. **ACTIVOS DINÁMICOS Y PORTAFOLIOS**

El siguiente teorema caracteriza la ausencia de oportunidades de arbitraje. Esto demuestra que el mercado está libre de las oportunidades de arbitraje si y sólo si existe localmente una oportunidad sin arbitraje. Esta propiedad es importante cuando reducimos problemas de optimización multiperiódicas a problemas de un periodo.

Teorema 2.1. *Consideremos un mercado financiero de N -periodos. Las siguientes declaraciones son equivalentes:*

- a) *No hay oportunidad de arbitraje.*
- b) *Para $n = 0, 1, \dots, N - 1$ y para cualquier \mathcal{F}_n -medible, $\phi_n \in \mathbb{R}^d$ se cumple:*

$$\phi_n \cdot R_{n+1} \geq 0 \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Rightarrow \quad \phi_n \cdot R_{n+1} = 0 \quad \mathbb{P} - a.s.$$

Demostración: a) \Rightarrow b)

Supongamos primero que existe una $n \in \{1, \dots, N\}$ y una \mathcal{F}_{n-1} medible con $\varphi \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\varphi \cdot R_n \geq 0, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad y \quad \mathbb{P}(\varphi \cdot R_n > 0).$$

Entonces un portafolio arbitrario ϕ puede ser construido como sigue:

Sea $X_0^\phi = 0$ y definimos el portafolio

$$\phi_k := \begin{cases} \varphi & \text{si } k = n - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $X_{n-1}^\phi = \phi_{n-1}^0 + \phi_{n-1} \cdot e = 0$ y $X_n^\phi = (1 + i_n)(\varphi \cdot R_n)$. Por lo tanto $\mathbb{P}(X_n^\phi \geq 0) = 1$ y $\mathbb{P}(X_n^\phi > 0) > 0$. Como $X_N^\phi = (1 + i_n) \cdots (1 + i_N) X_n^\phi$, el portafolio ϕ es un portafolio con arbitraje.

b) \Rightarrow a)

Supongamos que existe un portafolio con arbitraje $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$. Sea

$$m := \min\{n | \mathbb{P}(X_n^\phi \geq 0) = 1 \text{ y } \mathbb{P}(X_n^\phi > 0) > 0\}.$$

Entonces, $m \leq N$ por suposición. Definimos $\varphi := 1_{[X_{m-1}^\phi \leq 0]} \phi_{m-1}$. Entonces φ es \mathcal{F}_{m-1} -medible y podemos considerar el portafolio ψ con el mismo monto invertido que ϕ , del tiempo 0 a $m - 2$ y al tiempo $m - 1$ el monto φ en el activo riesgoso. Se cumple

$$X_m^\psi = (1 + i_m)(X_{m-1}^\psi + \varphi \cdot R_m).$$

Como $\mathbb{P}(X_m^\psi = 1)$ se sigue que $\varphi \cdot R_m \geq 0$, \mathbb{P} -a.s. Por definición de m tenemos $\mathbb{P}(X_{m-1}^\psi = 0) = 1$ ó $\mathbb{P}(\varphi \cdot R_m < 0) > 0$. En el primer caso obtenemos

$$\mathbb{P}(\varphi \cdot R_m > 0) = \mathbb{P}(X_m^\psi > 0) > 0$$

y en el segundo caso tenemos $\mathbb{P}(\varphi \cdot R_m > 0)$. En conjunto tenemos mostrado $\mathbb{P}(\varphi \cdot R_m \geq 0) = 1$ y $\mathbb{P}(\varphi \cdot R_m > 0) > 0$, lo que implica la afirmación. ■

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.2. FUNCIONES DE UTILIDAD Y UTILIDAD ESPERADA

Observación 2.2. Cuando las variables aleatorias R_1, \dots, R_N son independientes y $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, \dots, S_n) = \sigma(R_1, \dots, R_n)$ obtenemos la siguiente caracterización de ausencia de arbitraje más simple: para cualquier $n = 0, 1, \dots, N - 1$ y para cualquier $\phi \in \mathbb{R}^d$ se cumple:

$$\phi \cdot R_{n+1} \geq 0 \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Rightarrow \quad \phi \cdot R_{n+1} = 0 \quad \mathbb{P} - a.s. \quad (2.1)$$

Note que ϕ es determinista. No es difícil ver que la afirmación es equivalente al Teorema 2.1 parte b). La prueba es como sigue: por el Teorema 2.1 parte b) implicamos la declaración (2.1), porque cada $\phi \in \mathbb{R}^d$ es \mathcal{F}_n -medible. Ahora, suponemos que (2.2) se cumple y por lo tanto existe un \mathcal{F}_n -medible con $\phi_n \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\phi_n \cdot R_{n+1} \geq 0 \quad \mathbb{P} - a.s.$$

$\mathbb{P}(\phi_n \cdot R_{n+1} > 0) > 0$. Definimos $\tilde{\phi}_n := \mathbb{E}[\phi_n] \in \mathbb{R}^d$. Entonces obtenemos $\mathbb{E}[\phi_n \cdot R_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \tilde{\phi}_n \cdot R_{n+1} \geq 0$, \mathbb{P} -a.s. y $\mathbb{P}(\tilde{\phi}_n \cdot R_{n+1} > 0) > 0$ lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2.1. (Modelo Binomial ó Cox-Ross-Rubinstein). En el mercado financiero una condición necesaria y suficiente para la ausencia de oportunidades de arbitraje es que los parámetros del modelo satisfagan

$$\mathbf{d} < 1 + i < \mathbf{u}.$$

Esto puede se puede ver como sigue. Primero note que ϕR_1 pueden tomar dos valores

$$\phi \left(\frac{\mathbf{d}}{1+i} - 1 \right) \quad \text{y} \quad \phi \left(\frac{\mathbf{u}}{1+i} - 1 \right).$$

Así, si $\mathbf{d} < 1 + i < \mathbf{u}$, entonces $\phi R_1 \geq 0$ implica $\phi \equiv 0$ y por lo tanto, $\phi R_1 = 0$ se cumple. Si $\mathbf{u} > \mathbf{d} \geq 1 + i$ obtenemos para cualquier $\phi > 0$ que $\phi R_1 \geq 0$ y $\mathbb{P}(\phi R_1 > 0) > 0$. Similarmente, si $1 + i \geq \mathbf{u} > \mathbf{d}$ tenemos para cualquier $\phi < 0$ que $\phi R_1 \geq 0$ y $\mathbb{P}(\phi R_1 > 0) > 0$. Por lo tanto la afirmación es demostrada.

Observación 2.3. La ausencia de oportunidades de arbitraje es también equivalente a la existencia de al menos una medida de martingala equivalente. Esta caracterización es importante cuando los precios de los reclamos de contingencia pueden ser calculados (ver Apéndice D).

2.2. Funciones de utilidad y utilidad esperada

Existe una teoría axiomática bien establecida en las relaciones de preferencia en conjuntos inciertos de pagos o loterías. Bajo ciertas condiciones, estas preferencias pueden ser representadas por una función numérica que asigna un número real a cada lotería y así induce un orden completo en las loterías. De esta función numérica, está dada por una utilidad esperada. El enfoque axiomático fue iniciado por Von Neumann y Morgenstern [20]. En general una función de utilidad es un mapeo $U : \text{dom } U \rightarrow \mathbb{R}$ que se aplica a un resultado aleatorio de una inversión. En particular, si tenemos dos variables aleatorias X y Y , podemos compararlos por medio de $\mathbb{E}[U(X)]$ con $\mathbb{E}[U(Y)]$ donde el valor más grande se prefiere. Este concepto es cercanamente relativo a los ordenes estocásticos (Apéndice

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.2. FUNCIONES DE UTILIDAD Y UTILIDAD ESPERADA

C.3). La idea es que U es elegida por un individuo y debe en cierta forma extenderse, también reflejan su tolerancia al riesgo. Una U razonable debería ser creciente, lo que significa más dinero es mejor que menos. A menudo, también asumimos que U es cóncava, lo que significa que para un individuo la utilidad marginal de la riqueza es decreciente. Si U es cóncava en todas partes, entonces U o la persona que lo emplea, se dice que es adverso al riesgo. Esta interpretación se desprende de Von Neumann y Morgenstern, representación de la fundamental relación de preferencia. La desigualdad de Jensen implica en particular que $\mathbb{E}[U(X)] \leq U(\mathbb{E}[X])$ si $\mathbb{E}|X| \leq \infty$ lo que significa que una inversión segura con la misma expectativa es siempre preferida por un inversor que es adverso al riesgo.

Definición 2.4. Una función $U : \text{dom } U \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función de utilidad, si U es estrictamente creciente, cóncava y continua en el $\text{dom } U$.

Si el $\text{dom } U$ es un intervalo abierto, entonces la concavidad de U inmediatamente implica que U es también continua. Si $\text{dom } U = [0, \infty)$, entonces U es continua en $(0, \infty)$ y suponemos que U es también continua por la derecha en 0.

Si un inversor elige $U(x) = x$ (que no es una función de utilidad por definición, ya que no es cóncava), entonces se dice ser de riesgo neutral ya que no cuenta para el riesgo, de hecho. Los siguientes incisos son funciones de utilidad estándar.

- a) *Utilidad Logaritmo.* Aquí tenemos $U(x) = \log(x)$ y $\text{dom } U = (0, \infty)$. Tenga en cuenta que el logaritmo penaliza resultados cerca de cero.
- b) *Utilidad Potencia.* Aquí tenemos $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$ y el $\text{dom } U = [0, \infty)$ cuando $0 < \gamma < 1$. Si $\gamma < 0$ tenemos $\text{dom } U = (0, \infty)$.
- c) *Utilidad Exponencial.* Aquí tenemos $U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$ con $\gamma > 0$ y $\text{dom } U = \mathbb{R}$.
- d) *Utilidad Cuadrática.* Aquí tenemos $U(x) = x - \gamma x^2$ para $\gamma > 0$ y $\text{dom } U = (-\infty, (2\gamma)^{-1})$. Esta función es solo creciente para $x < (2\gamma)^{-1}$. \diamond

Experimentos empíricos y psicológicos han revelado que el comportamiento de muchos tomadores de decisiones está en contraste con la teoría de la utilidad esperada. En particular probabilidades pequeñas suelen sobreponderarse. Un ejemplo muy conocido es la paradoja de Allais donde los tomadores de decisiones tienen que elegir en dos experimentos entre dos loterías. Esto ha llevado a modificar la teoría de la utilidad esperada, conocida como utilidad esperada generalizada o teoría de la utilidad no esperada.

Sea U una función de utilidad y X es un resultado aleatorio con valores en el $\text{dom } U$. Debido al Teorema de valor intermedio, existe un número $ceq(X) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}[U(X)] = U(ceq(X))$. El valor $ceq(X)$ es llamado *certero equivalente* y $R(X) := \mathbb{E}[X] - ceq(X) > 0$ es llamada *prima de riesgo*. Si U es al menos dos veces continuamente diferenciable obtenemos con el desarrollo de la serie de Taylor:

$$U(ceq(X)) \approx U(\mathbb{E}[X]) + U'(\mathbb{E}[X])(ceq(X) - \mathbb{E}[X]),$$
$$U(X) \approx U(\mathbb{E}[X]) + U'(\mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X]) + \frac{1}{2}U''(\mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^2.$$

La última ecuación implica que

CAPÍTULO 2. MERCADOS FINANCIEROS
2.2. FUNCIONES DE UTILIDAD Y UTILIDAD ESPERADA

$$U(\text{ceq}(X)) = \mathbb{E}[U(X)] \approx U(\mathbb{E}[X]) + \frac{1}{2}U''(\mathbb{E}[X])\text{Var}(X).$$

Combinando esto con la primera aproximación y recordando la definición de prima de riesgo obtenemos

$$R(X) \approx -\frac{1}{2} \frac{U''(\mathbb{E}[X])}{U'(\mathbb{E}[X])} \text{Var}(X).$$

Por lo tanto, la prima de riesgo es igual a la varianza multiplicada por un coeficiente que depende de la función de utilidad. Este coeficiente determina el grado de aversión de riesgo.

Definición 2.5. Sea U es una función de utilidad dos veces diferenciable, entonces el coeficiente de aversión al riesgo absoluto Arrow-Pratt de U dado el nivel x es definido por

$$\alpha_{AP}(x) := -\frac{U''(x)}{U'(x)}, \quad x \in \text{dom } U.$$

La función $\alpha_{AP}(x)$ muestra como cambia la aversión al riesgo con el nivel de riqueza. Una suposición razonable es que $\alpha_{AP}(x)$ es decreciente, ya que más dinero incrementa la tendencia de tomar un riesgo. Las funciones de utilidad que hemos presentado hasta el momento pertenecen a ciertas clases de aversión al riesgo.

- a) *Aversión de Riesgo Absolutamente Constante* (CARA). Esta clase de funciones de utilidad son definidas por $\alpha_{AP}(x) \equiv \alpha_{AP} > 0$. Esto consiste de funciones de utilidad de la forma

$$U(x) = a - be^{-\alpha x}$$

para $a \in \mathbb{R}$, $b, \alpha > 0$ y $\text{dom } U = \mathbb{R}$.

- b) *Aversión de Riesgo Absolutamente Hiperbólica* (HARA). Esta clase de funciones de utilidad es definida por $\alpha_{AP}(x) = (cx + d)^{-1}$. Consiste de funciones de utilidad de la forma

$$U(x) = \frac{1}{\gamma}(ax + b)^\gamma$$

para $\gamma < 1$, $\gamma \neq 1$ y $a > 0$, $b \geq 0$. Si $0 < \gamma < 1$ entonces $\text{dom } U = [-\frac{a}{b}, \infty)$, en caso contrario $\text{dom } U = (-\frac{b}{a}, \infty)$. Todas las funciones de utilidad discutidos previamente pueden verse como casos especiales de la utilidad HARA al menos en un sentido limitante [16].

Capítulo 3

Problemas de optimización financieros

La teoría de los procesos de decisión de Markov, que ha sido presentado en el capítulo 1 ahora se aplicará en algunos problemas dinámicos de optimización financiera seleccionados. El modelo básico principal es el mercado financiero del capítulo 2. Siempre vamos a suponer que los inversores son pequeños y no pueden influir en el proceso de precios de los activos. Comenzamos en las dos primeras secciones con el problema clásico de maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal. En la Sección 3.1 se considera el modelo general de un solo período. Vemos que la existencia de una estrategia óptima del portafolio es equivalente a la ausencia de arbitraje en este mercado. Por otra parte, el problema de un período es el elemento clave para los problemas entre distintos períodos que se investigan en la Sección 3.2 y que puede ser resuelto con la teoría de los procesos de decisión de Markov. En esta sección también vamos a presentar algunos resultados de las funciones de utilidad especiales y la relación a los modelos de tiempo continuo se pone de relieve. En la Sección 3.3 vemos el problema del consumo e inversión son tratados y resueltos explícitamente con funciones especiales de utilidad. Para la sección 3.4 estudiaremos los problemas de índice de seguimiento por medio de los problemas lineales cuadráticos y por último veremos en la Sección 3.5 un problema de subastas secuenciales en línea.

3.1. Problemas de optimización de un periodo

En esta sección investigamos el problema de maximización de utilidad de un periodo. Para facilitar la notación omitimos el tiempo de índices en i_1 , \tilde{R}_1 y R_1 en esta Sección y escribimos i , \tilde{R} y R en su lugar. Veremos en la Sección 3.2 que los problemas de este tipo surgen cuando resolvemos el problema del portafolio multiperiodico. Suponemos que tenemos un inversor con función de utilidad $U : \text{dom } U \rightarrow \mathbb{R}$ con riqueza inicial $x > 0$. Es denotada por

$$\Delta(x) := \{(\phi^0, \phi) \in \mathbb{R}^{1+d} \mid \phi^0(1+i) + \phi \cdot \tilde{R} \in \text{dom } U, \mathbb{P} - a.s., \phi^0 + \phi \cdot e \leq x\},$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.1. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE UN PERIODO

el conjunto de estrategias admisibles de un periodo del portafolio. Una sencilla formulación del problema de máxima utilidad de un periodo es

$$\sup_{\phi \in \Delta(x)} \mathbb{E}[U(\phi^0(1+i) + \phi \cdot \tilde{R})]. \quad (3.1)$$

Por lo tanto, el inversor maximiza la utilidad esperada de su inversión bajo la restricción de que el regreso es en el dominio de la función utilidad con probabilidad uno y que el presupuesto restringido $\phi^0 + \phi \cdot e \leq x$ se cumple. Para tener una buena definición del modelo hacemos el siguiente supuesto de integrabilidad donde $\|x\| := |x_1| + \dots + |x_d|$ para $x \in \mathbb{R}^d$.

Supuesto de integrabilidad: $\mathbb{E}\|R\| < \infty$.

Obviamente $\mathbb{E}\|R\| < \infty$ es equivalente a $\mathbb{E}\|\tilde{R}\| < \infty$. Ya que U es cóncava, la función utilidad puede ser acotada superiormente por una función lineal $c_u(1+x)$ con $c_u \in \mathbb{R}_+$. Así, el supuesto implica que

$$\mathbb{E}[U(\phi^0(1+i) + \phi \cdot \tilde{R})] \leq c_u(1 + \phi^0(1+i) + \phi \cdot \mathbb{E}\|\tilde{R}\|) < \infty,$$

para cualquier $(\phi^0, \phi) \in \mathbb{R}^{1+d}$. La siguiente observación es simple, pero crucial: Supongamos que (ϕ^0, ϕ) es un portafolio con $\phi^0 + \phi \cdot e < x$. Entonces podemos construir un nuevo portafolio por medio de la inversión de la riqueza restante $x - \phi^0 - \phi \cdot e$ en el bono. Este nuevo portafolio es denotado por $(\varphi^0, \varphi) := (x - \phi^0 - \phi \cdot e, \phi)$. Como las funciones de utilidad son estrictamente crecientes obtenemos a la vez que

$$\mathbb{E}[U(\phi^0(1+i) + \phi \cdot \tilde{R})] > \mathbb{E}[U(\varphi^0(1+i) + \varphi \cdot \tilde{R})].$$

En vista de (3.1) podemos concluir sin pérdida de generalidad que el presupuesto restringido puede ser formulado como $\phi^0 + \phi \cdot e = x$ que permite eliminar el componente de bonos y obtener un problema sin restricciones. De nuestras anteriores consideraciones sabemos que podemos escribir

$$\phi^0(1+i) + \phi \cdot \tilde{R} = X_1^\phi = (1+i)(x + \phi \cdot R).$$

Por lo tanto, las inversiones admisibles de un periodo en el activo riesgoso es dado por

$$D(x) := \{a \in \mathbb{R}^d \mid (1+i)(x + a \cdot R) \in \text{dom } U \text{ } \mathbb{P} - a.s.\}.$$

Para $a \in D(x)$ la cantidad invertida en el bono es dada por $x - a \cdot e$. Por lo tanto, cuando definimos

$$u(x, a) := \mathbb{E}[U((1+i)(x + a \cdot R))]$$

una forma equivalente de (3.1) es

$$v(x) := \sup_{a \in D(x)} u(x, a). \quad (3.2)$$

El siguiente resultado muestra que la ausencia de oportunidad de arbitraje es equivalente a la existencia de una solución óptima para el problema (3.2).

Teorema 3.1. *Sea U una función de utilidad con $\text{dom } U = [0, \infty)$ o $\text{dom } U = (0, \infty)$. Entonces se cumple:*

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.1. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE UN PERIODO

a) No existe oportunidad de arbitraje si y sólo si existe una función medible $f^* : \text{dom } U \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$u(x, f^*(x)) = v(x), \quad x \in \text{dom } U.$$

b) La función $v(x)$ es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua en el $\text{dom } U$.

Observación 3.1. Si el $\text{dom } U = \mathbb{R}$ y U es acotada superiormente, entonces el Teorema 3.1 también es verdadero. Esto es mostrado en e.g Föllmer y Schied [10], Teorema 2.5. Esta situación cubre la función de utilidad exponencial. Si U no es acotada superiormente en $\text{dom } U = \mathbb{R}$ entonces el Teorema 3.1 es falso, ver ejemplo 7.3 en Rásonyi and Stettner [27]. $\text{dom } U = (0, \infty)$ puede ser aplicado al caso de la función de utilidad logaritmo o potencia con coeficiente negativo γ y $\text{dom } U [0, \infty)$ aplica el caso de una función de utilidad potencia con coeficiente positivo γ .

Demostración: Consideremos sólo el caso del $\text{dom } U = (0, \infty)$. El caso del $\text{dom } U = [0, \infty)$ es similar.

Primero probemos la parte a).

\Leftarrow) Supongamos que el mercado admite una oportunidad de arbitraje. Fijamos $x \in \text{dom } U$ y supongamos $f^*(x)$ es una solución óptima de (3.2). Entonces de acuerdo al Teorema 2.1 existe un portafolio $a \in \mathbb{R}^d$ con $a \cdot R \geq 0$, $\mathbb{P} - a.s.$ y $\mathbb{P}(a \cdot R > 0) > 0$. Así $f^*(x) + a \in D(x)$ y

$$v(x) = u(x, f^*(x)) < u(x, f^*(x) + a)$$

\Rightarrow) Ahora supongamos que no existe oportunidad de arbitraje. Sin pérdida de generalidad suponemos que $a \cdot R = 0$, $\mathbb{P} - a.s.$ necesariamente implicamos que $a = 0$. Esta propiedad es llamada sin redundancia. De otra manera existe al menos un activo que puede ser perfectamente reproducido por una combinación lineal de los otros activos. Por lo tanto, podemos eliminar del mercado sin perder un perfil de recompensa. Luego consideramos para una riqueza inicial fija x el conjunto de nivel es

$$L(b) := \{a \in D(x) | u(x, a) \geq b\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Como $a = 0$ es un elemento de $D(x)$ tenemos que al menos $L(u(x, 0)) \neq \emptyset$. Mostraremos que $L(b)$ es compacto. Primero supongamos que existe una sucesión $(a_n) \subset L(b)$. Elegimos una subsucesión convergente $(a_{n_k} / \|a_{n_k}\|)$ que converge a a^* . Obviamente $\|a^*\| = 1$ y como $a_{n_k} \in D(x)$ obtenemos

$$a^* \cdot R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k} \cdot R}{\|a_{n_k}\|} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-x}{\|a_{n_k}\|} = 0.$$

Además, debemos tener $\mathbb{P}(a^* \cdot R > 0) > 0$ debido a nuestra suposición de no redundancia, como $a^* \neq 0$. Así, a^* constituye una oportunidad de arbitraje, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $L(b)$ debe de ser acotado. Siguiendo la misma prueba es también posible mostrar que $D(x)$ es acotado.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

Ahora mostremos que el mapeo $a \mapsto u(x, a)$ es semicontinua superior. Como U es continua la declaración se sigue cuando aplicamos el Lema de Fatou, intercambiando el límite por la esperanza.

$$u(x, a) \leq c_u(1 + (1 + i)(x + a \cdot \mathbb{E}R)) \leq c_u(1 + (1 + i)(x + \overline{\max_{a \in D(x)} a \cdot \mathbb{E}R})) < \infty$$

es una cota superior integrable (donde $\overline{D(x)}$ es la cerradura de $D(x)$). Así, $a \mapsto u(x, a)$ es semicontinua superior y seguimos del Lema A.1 que $L(b)$ es cerrado. En conjunto tenemos mostrado que $L(b)$ es compacto. Por la Proposición 1.4 junto con la Observación 1.11 existe una función medible $f^* : \text{dom } U \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$u(x, f^*(x)) = v(x), \quad x \in \text{dom } U.$$

Ahora probemos la parte b).

Primero mostremos que v es estrictamente creciente. Obviamente $D(x) \subset D(x')$ si $x \leq x'$. Además, el mapeo $x \mapsto u(x, a)$ es estrictamente creciente por nuestras suposiciones. Por lo tanto, lo declarado sigue del Teorema 1.10. La concavidad estricta sigue de la Proposición 1.6 como el conjunto

$$\{(x, a) | a \in D(x), x > 0\}$$

es convexo y $(x, a) \mapsto u(x, a)$ es estrictamente cóncava. La continuidad se sigue de la Proposición 1.3 ■

Observación 3.2. *Note que la solución óptima en el Teorema 3.1 del problema de maximización de utilidad de un periodo es única si el mercado financiero es no redundante, i.e., no existe un activo que puede ser perfectamente reproducido por una combinación lineal de los otros activos.*

3.2. Problemas de riqueza terminal

Al inicio de esta Sección investigamos la extensión multiperiódico de la maximización de la utilidad del problema de la Sección 3.1. Supongamos que tenemos un inversor con función de utilidad $U : \text{dom } U \rightarrow \mathbb{R}$ con $\text{dom } U = [0, \infty)$ ó $\text{dom } U = (0, \infty)$ y con riqueza inicial $x > 0$. Un mercado financiero con d activos riesgosos y un bono sin riesgo es dado (para más detalles ver Sección 2.1). Aquí, asumimos que los vectores aleatorios R_1, \dots, R_N son independientes pero no necesariamente idénticamente distribuidos. Además, asumimos que (\mathcal{F}_n) es la filtración generada por el precio de las acciones, i.e. $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^S$. La siguiente suposición en el mercado financiero es usada a lo largo de esta Sección.

Supuesto (FM):

- i) No existen las oportunidades de arbitraje.
- ii) $\mathbb{E} \|R_n\| < \infty$ para cualquier $n = 1, \dots, N$.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

Nuestro agente tiene que invertir todo el dinero en este mercado, se le permite reordenar su portafolio sobre las N etapas. El objetivo es maximizar la utilidad esperada de su riqueza terminal. Recordemos que las funciones de utilidad son estrictamente crecientes, estrictamente cóncavas y continuas por definición. Conforme a (2.1) el proceso de la riqueza (X_n) evoluciona de acuerdo a:

$$X_{n+1} = (1 + i_{n+1})(X_n + \phi_n \cdot R_{n+1})$$

donde $\phi = (\phi_n)$ es un portafolio. El problema de optimización es entonces

$$\begin{cases} \mathbb{E}_x U(X_N^\phi) \rightarrow \text{máx} \\ \phi \text{ es un portafolio y } X_N^\phi \in \text{dom} U, \mathbb{P} - a.s. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ya que este problema tiene una estructura Markoviana se puede mostrar que el portafolio óptimo está entre el conjunto de todos los portafolios de Markov (ϕ_n) (ver Teorema 1.2). Además, ϕ_n depende solo de la riqueza X_n y no en el precio de activos S_n que puede verse a partir de la ecuación de riqueza. Así, el problema (3.3) puede resolverse por medio del modelo de decisión de Markov: El espacio de estados es $E := \text{dom} U$, donde $x \in E$ es la riqueza disponible. $A := \mathbb{R}^d$ es el espacio de acciones y

$$D_n(x) := \{a \in \mathbb{R}^d | (1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1}) \in \text{dom} U, \mathbb{P} - a.s.\} \quad (3.4)$$

es el conjunto de acciones admisibles. Esta restricción garantiza que un portafolio puede ser elegido para las etapas restantes tal que la riqueza final X_N es con probabilidad uno en E . Aunque es suficiente tener $X_n \in \text{dom} U, \mathbb{P}$ -a.s., la ausencia de arbitraje implica que tenemos que requerir $X_n \in \text{dom} U, \mathbb{P}$ -a.s. para cualquier etapa n . La función de transición es dada por

$$T_n(x, a, z) = (1 + i_{n+1})(x + a \cdot z) \quad (3.5)$$

donde $z \in [-1, \infty)^d$ denota el riesgo relativo en $[n, n + 1)$. Ya que no tenemos ninguna utilidad intertemporal elegimos $r_n \equiv 0$ y $g_N(x) = U(x)$. Los datos de nuestro modelo de decisión de Markov es dado como sigue:

- $E := \text{dom} U$ donde x denota la riqueza,
- $A := \mathbb{R}^d$ donde a es el monto de dinero invertido en el activo riesgoso,
- $D_n(x)$ es dado por (3.4),
- $\mathcal{Z} := [-1, \infty)^d$ donde z denota el riesgo relativo,
- $T_n(x, a, z)$ es dado por (3.5),
- $Q_n^Z(\cdot | x, a) :=$ distribución de R_{n+1} (independiente de (x, a)),

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

- $r_n \equiv 0$, y $g_N(x) := U(x)$.

El problema (3.3) puede resolverse ahora por medio del modelo de decisión de Markov. La función de valor es dada por

$$V_n(x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}_{n,x}^{\pi} U(X_N) \quad (3.6)$$

donde el supremo es tomado sobre todas las políticas π y $V_0(x)$ es el valor del problema (3.3). Debido a nuestra suposición, el modelo de decisión de Markov tiene una función acotada superiormente.

Proposición 3.1. *La función $b(x) := 1 + x$ es una función acotada superiormente para el modelo de decisión de Markov.*

Demostración: Tenemos que mostrar las condiciones *i) – iii)* de la Definición 1.8. Condición *i)* es obvia, porque $r_n \equiv 0$. Condición *ii)* se cumple ya que cualquier función cóncava puede ser acotada superiormente por una función lineal afín. Condición *iii)* se tiene que existen constantes $c, \alpha_b > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int b(x') Q_n(dx'|x, a) &= 1 + \mathbb{E}[(1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1})] \\ &= 1 + (1 + i_{n+1}) \mathbb{E}(x + a \cdot R_{n+1}) \\ &= 1 + (1 + i_{n+1})(x + a \cdot \mathbb{E}R_{n+1}) \\ &\leq 1 + (1 + i_{n+1})(x + cx) \leq \alpha_b(1 + x), \quad x \in E, \end{aligned}$$

para cualquier $a \in D_n(x)$. La prueba de que $a \cdot \mathbb{E}R_{n+1} \leq cx$ es como sigue: En vista del supuesto de no arbitraje el soporte de R_{n+1}^k contiene elementos $z_1^k \in (-1, 0)$ y $z_2^k \in (0, \infty)$. Por lo tanto, para cualquier $a \in D(x)$ tenemos

$$(1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1}) > 0 \text{ y } (1 + i_{n+1}) \in \mathbb{R}_+$$

$$(x + a \cdot R_{n+1}) > 0, \quad x \in E := \text{dom}U = (0, \infty)$$

$$(a \cdot R_{n+1}) < x \quad \wedge \quad -x < (a \cdot R_{n+1})$$

$$-x < a \cdot R_{n+1} < x, \quad a \in \mathbb{R}^d$$

$$-x < a^1 R_{n+1}^1 + a^2 R_{n+1}^2 + \dots + a^k R_{n+1}^k + \dots + a^d R_{n+1}^d < x$$

$$-x < a^k R_{n+1}^k < x$$

$$\frac{-x}{R_{n+1}^k} < a^k < \frac{x}{R_{n+1}^k}$$

tenemos que

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

$$R_{n+1}^k = \begin{cases} z_1^k \in (-1, 0), \\ z_2^k \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$-\frac{x}{z_2^k} < a^k < -\frac{x}{z_1^k}, \quad k = 1, \dots, d$$

$$a^k \mathbb{E}[R_{n+1}^k] < -\frac{x}{z_1^k} \mathbb{E}[R_{n+1}^k] = x \frac{\mathbb{E}[R_{n+1}^k]}{-z_1^k} = xc$$

lo que implica que $a \cdot \mathbb{E}R_{n+1} \leq cx$. Note que $\mathbb{E}R_{n+1} < \infty$ debido a nuestra suposición (FM)(ii). ■

Ahora podemos aplicar el Teorema 1.5 y obtenemos la siguiente declaración.

Teorema 3.2. *Para el problema de riqueza terminal multiperódico se cumple:*

- a) *La función de valor V_n es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua.*
- b) *La función de valor puede ser calculada recursivamente por la ecuación de Bellman:*

$$\begin{aligned} V_N(x) &= U(x), \\ V_n(x) &= \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}V_{n+1}((1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1})), \quad x \in E. \end{aligned}$$

- c) *Existen maximizadores f_n^* de V_{n+1} y el portafolio $(f_0^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es óptimo para las N etapas del problema de riqueza terminal.*

Demostración: Mostraremos que el supuesto de estructura (SA_N) se satisface con $\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^+ | v \text{ es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua}\}$ y $\Delta_n := F_n$, entonces seguimos inmediatamente del Teorema 1.5

- (i) $g_N = U \in \mathbb{M}_N$ se cumple por definición de función de utilidad.
- (ii) Ahora supongamos que $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Note que

$$\tau_n v(x) = \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}v((1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1})), \quad x \in E.$$

Como v satisface todas las propiedades de una función de utilidad con $\text{dom}v = E$ y ya que la ausencia de arbitraje es una propiedad local (ver Teorema 2.1) obtenemos $\tau_n v \in \mathbb{M}_n$ del Teorema 3.1.

- (iii) La existencia de maximizadores se cumple del Teorema 3.1 ■

Observación 3.3. *El Teorema 3.2 también puede ser formulado de manera similar cuando $\text{dom}U = \mathbb{R}$. En este caso $D_n(x) = \mathbb{R}$. Resolvemos el problema de riqueza terminal con una función de utilidad exponencial después en esta Sección.*

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

Por supuesto que no es problema incorporar las restricciones sobre el portafolio como las limitaciones o restricciones de venta en corto o restricciones en el riesgo de la estrategia. Lo único que cambia es el conjunto de acciones admisibles $D(x)$ que tiene que definirse en consecuencia.

Existe un caso particular especial donde el problema del portafolio (3.3) tiene una solución simple. Esta situación es formulada en el siguiente Teorema.

Teorema 3.3. *Sea $\mathbb{E}R_n = 0$ para $n = 1, \dots, N$. Entonces se cumple:*

a) *La función de valor es dada por*

$$V_n(x) = U \left(x \frac{S_N^0}{S_n^0} \right), \quad x \in E.$$

b) *El portafolio óptimo $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es dado por*

$$f_n^*(x) \equiv 0,$$

i.e., la estrategia “invierte todo el dinero en el bono” es óptima.

Demostración: Supongamos que $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \in \Pi$ es un portafolio de estrategia arbitrario. Es fácil verificar que procesos de riqueza descontado (X_n/S_n^0) es una martingala bajo las suposiciones de este Teorema (para la definición de martingala ver Sección C.2): Obviamente la esperanza está bien definida y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\pi \left[\frac{X_{n+1}}{S_{n+1}^0} \middle| \frac{X_n}{S_n^0} \right] &= \mathbb{E}^\pi \left[\frac{(1 + i_{n+1})(X_n + f_n(X_n) \cdot R_{n+1})}{(1 + i_{n+1})S_n^0} \middle| \frac{X_n}{S_n^0} \right] \\ &= \mathbb{E}^\pi \left[(S_n^0)^{-1} (X_n + f_n(X_n) \cdot R_{n+1}) \middle| \frac{X_n}{S_n^0} \right] = \frac{X_n}{S_n^0}. \end{aligned}$$

Así, usando la desigualdad de Jensen, se cumple que

$$V_{n\pi}(x) = \mathbb{E}_{n\pi}^\pi U(X_N) \leq U \left(\mathbb{E}_{n\pi}^\pi \left[\frac{X_N}{S_N^0} \right] S_N^0 \right) = U \left(x \frac{S_N^0}{S_n^0} \right)$$

lo que implica la declaración. ■

Observación 3.4. a) *Como $\frac{S_{n+1}^k}{S_{n+1}^0} = \frac{S_n^k}{S_n^0} (1 + R_{n+1}^k)$, la condición $\mathbb{E}R_n^k = 0$ para cualquier n significa que el proceso de precios de acciones descontado (S_n^k/S_n^0) es una martingala.*

b) *Si no se permite la venta en corto (i.e. $a \in \mathbb{R}_+^d$) entonces el portafolio $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$ con $f_n^*(x) \equiv 0$ es óptima si $\mathbb{E}R_n \leq 0$ para $n = 1, \dots, N$.*

Para algunas funciones de utilidad el problema de optimización del portafolio (3.6) puede ser resuelto más bien de forma explícita. Resumimos algunos de estos resultados. A través de suponer que (FM) es válido.

3.2.1. Función de utilidad potencia

Ahora, consideremos que la función de utilidad en el problema (3.6) está dada por

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad x \in [0, \infty)$$

con $0 < \gamma < 1$. Tenemos que $E = [0, \infty)$. Ya que será más conveniente trabajar con fracciones de dinero invertido en lugar de cantidades, definimos el conjunto de fracciones admisibles por

$$A_n := \{\alpha \in \mathbb{R}^d \mid 1 + \alpha \cdot R_{n+1} \geq 0, \mathbb{P} - a.s.\}$$

y el problema de optimización genérico de un periodo está dado por

$$v_n := \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E}(1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma. \quad (3.7)$$

Conforme al Teorema 3.1 este problema tiene una solución y denotamos la solución óptima por $\alpha_n^* \in \mathbb{R}^d$.

Teorema 3.4. *Sea U la función de utilidad potencia con $0 < \gamma < 1$. Entonces se cumple:*

a) *La función de valor está dada por*

$$V_n(x) = d_n x^\gamma, \quad x \geq 0$$

con

$$d_N = \frac{1}{\gamma} \quad y \quad d_n = \frac{1}{\gamma} \prod_{k=n}^{N-1} (1 + i_{k+1})^\gamma v_k.$$

b) *La cantidad óptima que es invertida en las acciones está dada por*

$$f_n^*(x) = \alpha_n^* x, \quad x \geq 0$$

donde $\alpha_n^* = \arg \max_{\alpha \in A_n} [\mathbb{E}(1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma]$. El portafolio óptimo es dado por $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$.

Note que el portafolio óptimo no va en el sentido de que la fracción óptima es invertida en las acciones al tiempo n , depende sólo de la distribución del riesgo relativo R_{n+1} . Además, es fácil ver que la sucesión d_n es decreciente en n .

Demostración: Para poder aplicar el Teorema 1.5 tenemos que encontrar los conjuntos \mathbb{M}_n y Δ_n que satisfacen el supuesto de estructura (SA_N) . Primero mostraremos que tales conjuntos pueden ser elegidos como

$$\mathbb{M}_n := \{v : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid v(x) = bx^\gamma \text{ para } b > 0\},$$

$$\Delta_n := \{f \in F_n \mid f(x) = \alpha x \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}^d\}.$$

Tenemos que verificar las siguientes condiciones:

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

- i) Obviamente $g_N = U \in \mathbb{M}_N$.
- ii) Sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}\tau_n v(x) &= \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}v((1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1})) \\ &= b(1 + i_{n+1})^\gamma \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}(x + a \cdot R_{n+1})^\gamma.\end{aligned}$$

Si $x = 0$ entonces sólo $a = 0$ es admisible. Por lo tanto, supongamos $x > 0$. Usamos la transformación $a = \alpha x$ obtenemos

$$\begin{aligned}\tau_n v(x) &= b(1 + i_{n+1})^\gamma x^\gamma \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E}(1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma \\ &= b(1 + i_{n+1})^\gamma x^\gamma v_n.\end{aligned}$$

Así, $\tau_n v(x) = \tilde{b}x^\gamma \in \mathbb{M}_n$ con $\tilde{b} := b(1 + i_{n+1})^\gamma v_n > 0$.

- iii) Para cualquier $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ existe un maximizador f_n^* de v con $f_n^* \in \Delta_n$. Esto es del Teorema 3.1 y de la forma de $a = \alpha x$ en ii).

Por lo tanto, tenemos mostrado que el supuesto estructura (SA_N) se cumple. De lo declarado hasta ahora se sigue del Teorema 1.5 y obtenemos que

$$\begin{aligned}V_n(x) &= \sup_{\alpha \in A_n} d_{n+1}(1 + i_{n+1})^\gamma x^\gamma \mathbb{E}(1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma \\ &= d_{n+1}(1 + i_{n+1})^\gamma v_n x^\gamma.\end{aligned}$$

Si definimos $d_n = d_{n+1}(1 + i_{n+1})^\gamma v_n > 0$ entonces la declaración en la parte a) se cumple y la parte b) puede ser concluida de las consideraciones de ii). ■

Si el cambio de precio relativo en las acciones $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \dots$ son idénticamente distribuidas y si además $i_n = i$ para cualquier n , entonces $\alpha_n^* \equiv \alpha^*$ es independiente de n . En este caso el modelo de decisión de Markov es estacionario. Si además asumimos que existe sólo una acción, entonces el portafolio óptimo puede ser caracterizado por una constante de acción óptima para la proporción de bonos (Merton-line) que es igual a $\frac{\alpha^*}{1 - \alpha^*}$. Si la acción actual para la proporción de bonos es grande, entonces la acción tiene a ser vendida y si es pequeña, entonces la acción tiene a ser comprada. Esto es ilustrado en la Figura 3.1.

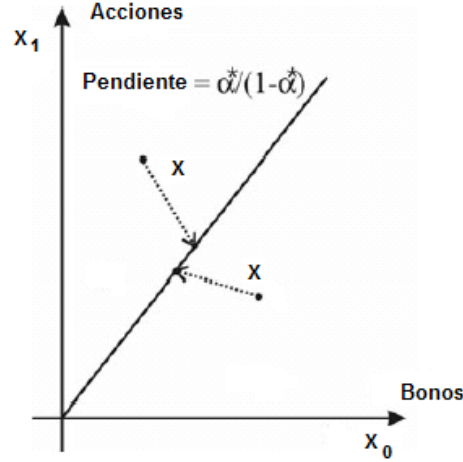


Figura 3.1: Acción óptima para la proporción de bonos (Merton-line).

Observación 3.5. En el caso de una función de utilidad potencia $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$ con $\gamma < 0$ podemos proceder casi de la misma manera. En este caso no necesitamos una condición de integrabilidad en el proceso de precios relativos, ya que la función utilidad es acotada superiormente por 0, además, en este caso $\text{dom}U = (0, \infty)$ y definimos

$$A_n := \{\alpha \in \mathbb{R}^d \mid 1 + \alpha \cdot R_{n+1} > 0, \mathbb{P} - a.s.\}.$$

El Teorema 3.4 puede ser declarado exactamente de la misma manera, la única diferencia es que v_n y α^* ahora son definidas como el valor y la solución óptima de

$$v_n := \inf_{\alpha \in A_n} \mathbb{E}(1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma. \quad (3.8)$$

Conforme al Teorema 3.1 éste problema tiene una solución.

Observación 3.6. Algunos autores también consideran al problema de la función de utilidad de potencia con parámetros $\gamma > 1$ que refleja un riesgo en busca de inversores. En este caso la función de valor es cóncava, es razonable restringirnos a un conjunto compacto para el portafolio admisible, e.g., mediante la exclusión de las ventas en corto. En este caso tenemos

$$D_n(x) = \{a \in \mathbb{R}_+^d \mid a \cdot e \leq x\}.$$

Ya que la función cóncava alcanza su máximo en el límite, es en este caso óptimo, para el inversor concentrar su inversión en un activo k , a saber, lo que maximiza $\mathbb{E}(1 + R_{n+1}^k)^\gamma$.

Imaginemos que tenemos una acción y el proceso de precios sigue un *modelo binomial* como lo describimos en la Sección 2.1. El problema de optimización (3.7) se reduce como sigue

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

$$\begin{aligned}
v_n &= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha-1} \mathbb{E}(1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma \\
&= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha-1} \mathbb{E}\left(1 + \alpha \cdot \frac{\tilde{R}_{n+1} - 1 - i}{1 + i}\right)^\gamma \\
&= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha-1} \mathbb{E}\left(\frac{1 + i}{1 + i} + \alpha \cdot \frac{\tilde{R}_{n+1} - 1 - i}{1 + i}\right)^\gamma \\
&= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha-1} (1 + i)^{-\gamma} (1 + i + \alpha(u - 1 - i))^\gamma p + (1 + i)^{-\gamma} (1 + i + \alpha(d - 1 - i))^\gamma \\
&\quad (1 - p)
\end{aligned}$$

quitamos la constante $(1 + i)^{-\gamma}$ delante del supremo, porque no influye para encontrar la solución.

$$\sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} (1 + i + \alpha(\mathbf{u} - 1 - i))^\gamma p + (1 + i + \alpha(\mathbf{d} - 1 - i))^\gamma (1 - p)$$

donde

$$\alpha_0 := \frac{1 + i}{1 + i - \mathbf{u}} < 0 \quad y \quad \alpha_1 := \frac{1 + i}{1 + i - \mathbf{d}} > 0.$$

Si definimos $\delta := (1 - \gamma)^{-1}$ y derivamos con respecto de γ e igualamos a cero obtenemos la solución óptima,

$$\gamma(1 + i + \alpha(u - 1 - i))^{\gamma-1} (u - 1 - i)p + \gamma(1 + i + \alpha(d - 1 - i))^{\gamma-1} (d - 1 - i)(1 - p) = 0$$

realizando los respectivos cálculo tenemos que

$$\begin{aligned}
(1 + i)(u - 1 - i)^\delta p^\delta - (1 + i)(1 + i - d)^\delta (1 - p)^\delta &= (1 + i - d)(u - 1 - i) \\
&\quad [\alpha(u - 1 - i)^{\delta\gamma} p^\delta \\
&\quad + \alpha(1 + i - d)^{\delta\gamma} (1 - p)^\delta]
\end{aligned}$$

despejando α obtenemos la política óptima

$$\alpha^* := \frac{1 + i}{(1 + i - \mathbf{d})(\mathbf{u} - 1 - i)} \cdot \frac{(\mathbf{u} - 1 - i)^\delta p^\delta - (1 + i - \mathbf{d})^\delta (1 - p)^\delta}{(\mathbf{u} - 1 - i)^{\delta\gamma} p^\delta + (1 + i - \mathbf{d})^{\delta\gamma} (1 - p)^\delta}. \quad (3.9)$$

Note que este número está en el intervalo $[\alpha_0, \alpha_1]$. En el caso $\gamma < 0$, obtenemos la misma expresión para α^* que es ahora un punto mínimo del problema (3.8). En el modelo binomial podemos discutir la probabilidad para un movimiento hacia arriba del precio de las acciones influye la fracción óptima que es invertida en la acción.

Lema 3.1. *Consideremos el modelo binomial con función de utilidad potencia y parámetro $\gamma < 1$, $\gamma \neq 0$.*

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

- a) La fracción óptima α^* que es invertida en la acción está dado en (3.9).
b) La función $\alpha^* = \alpha^*(p)$ es creciente en p .
c) Si $p = \frac{1+i-d}{u-d}$ entonces $\alpha^* = \alpha^*(p) = 0$.

Demostración: Supongamos primero que $0 < \gamma < 1$. Para nuestro propósito es conveniente discutir el punto máximo del mapeo:

$$h(\alpha) := (1 + i + \alpha(\mathbf{u} - 1 - i))^\gamma + \lambda(1 + i + \alpha(\mathbf{d} - 1 - i))^\gamma$$

donde $\lambda = \frac{1-p}{p}$. Derivando con respecto de α e igualando a cero. (Denotamos $\delta := (1 - \gamma)^{-1}$)

$$\gamma(1 + i + \alpha(u - 1 - i))^{\gamma-1}(u - 1 + i) + \gamma\lambda(1 + i + \alpha(d - 1 - i))^{\gamma-1}(d - 1 - i) = 0$$

realizando los respectivos cálculos tenemos que

$$\alpha(u - 1 - i)^{-\delta\gamma} + \alpha(d - 1 - i)^{-\delta\gamma}\lambda^{-\delta} = (1 + i)\lambda^{-\delta}(1 + i - d)^{-\delta} - (1 + i)(u - 1 - i)^{-\delta},$$

de aquí obtenemos que el punto máximo es alcanzado en

$$\alpha^*(\lambda) = (1 + i) \frac{\lambda^{-\delta}(1 + i - \mathbf{d})^{-\delta} - (\mathbf{u} - 1 - i)^{-\delta}}{(\mathbf{u} - 1 - i)^{-\delta\gamma} + (1 + i - \mathbf{d})^{-\delta\gamma}\lambda^{-\delta}}$$

mientras este punto está en el intervalo $[\alpha_0, \alpha_1]$. Reordenando términos terminamos con la fórmula (3.9). Como $h(\alpha)$ es cóncava, $\alpha^*(\lambda)$ es ciertamente un punto máximo. La función $\lambda = \lambda(p) = \frac{1-p}{p}$ es decreciente en p , así queda por determinar si $\alpha^*(\lambda)$ es creciente o decreciente en λ . Derivando $\alpha^*(\lambda)$ con respecto de λ obtenemos que $\frac{\partial}{\partial \lambda}\alpha^*(\lambda) \leq 0$ si y sólo si

$$(\mathbf{u} - 1 - r)^\gamma + (1 + r - \mathbf{d}) \geq 0$$

que es verdad. Así, $\alpha^*(p)$ es creciente en p . En particular, podemos verificar que ciertamente $\alpha^* \in [\alpha_0, \alpha_1]$ mediante la inserción de $p = 0$ y $p = 1$ en la Ecuación (3.9). Si $p = \frac{1+i-d}{u-d}$, entonces aplicando el Teorema 3.3 implicamos que $\mathbb{E}R_n = 0$, para cualquier n . ■

Como una consecuencia del Lema 3.1 que si $p < \frac{1+i-d}{u-d}$, es óptimo para vender las acciones, además, si $p > \frac{1+i-d}{u-d}$, es óptimo para comprar las acciones.

3.2.2. Función de utilidad de aversión al riesgo absoluto hiperbólica (HARA)

La función de utilidad HARA es definida en la Sección 2.2 y puede ser vista como una utilidad potencia. Así, no nos sorprendemos que maximizar una función de utilidad HARA,

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

puede ser reducida a maximizar una función de utilidad potencia. Ya que este caso es de cierta importancia y como algunas diferencias sutiles aparecen declaramos el respectivo Teorema. Supongamos por simplicidad que la función de utilidad en el problema (3.3) es dada por

$$U(x) = (x + b)^\gamma$$

donde $b \geq 0$ y $0 < \gamma < 1$. Con $domU = \{x \in \mathbb{R} | x + b \geq 0\}$. Note que si insertamos la riqueza X_1 en el estado 1 de acuerdo a la fórmula (2.1) obtenemos

$$EU(X_1) = (1 + i_1)^\gamma \mathbb{E} \left(x + \frac{b}{1 + i_1} + a \cdot R_1 \right)^\gamma.$$

Para obtener un problema de optimización bien definido y en vista del supuesto de no arbitraje debemos asumir que $x(1 + i_1) \geq -b$. Por inducción esto produce para el problema multiperíodico con función de utilidad HARA que la riqueza inicial x tiene a satisfacer $xS_N^0 \geq -b$. Definimos $E := domU$ como el espacio de estados del modelo de decisión de Markov. A continuación es conveniente denotar

$$E_n := \{x \in \mathbb{R} | xS_N^0/S_n^0 + b \geq 0\}.$$

El conjunto E_n consiste de todas las posibles riquezas en n etapas tal que la condición $X_N \in E$ se puede cumplir con probabilidad uno. Así, la inversión admisible en la etapa n es

$$\begin{aligned} D_n(x) &:= \{a \in \mathbb{R}^d | S_N^0/S_n^0(x + a \cdot R_{n+1}) \in E, \mathbb{P} - a.s.\} \\ &= \{a \in \mathbb{R}^d | (1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1}) \in E_{n+1}, \mathbb{P} - a.s.\}, x \in E_n. \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Sea $U(x) = (x + b)^\gamma$ la función de utilidad HARA con $b \geq 0$ y $0 < \gamma < 1$. Entonces se cumple:*

a) *La función de valor está dada por*

$$V_n(x) = d_n(xS_N^0/S_n^0 + b)^\gamma, \quad x \in E_n$$

con

$$d_N = 1 \quad \text{y} \quad d_n = \prod_{k=n}^{N-1} v_k,$$

y v_n es la Ecuación (3.7).

b) *La cantidad óptima que es invertida en las acciones está dada por*

$$f_n^*(x) = \alpha^* \left(x + \frac{bS_n^0}{S_N^0} \right), \quad x \in E_n$$

donde $\alpha_n^* = \arg \max_{\alpha \in A_n} [\mathbb{E}(1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma]$. El portafolio óptimo está dado por $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

Demostración: Procedemos de la misma forma que en la prueba del Teorema 3.4. Para poder aplicar el Teorema 1.5 elegimos

$$\mathbb{M}_n := \{v : E_n \rightarrow \mathbb{R}_+ | v(x) = c(xS_N^0/S_n^0 + b)^\gamma \text{ para } c > 0\},$$

$$\Delta_n := \{f : E_n \rightarrow \mathbb{R}^d | f(x) = c_0(x + c_1) \text{ para } c_0 \in \mathbb{R}^d \text{ y } c_1 > 0\} \cap F_n.$$

Ahora, tenemos que probar las tres condiciones del supuesto estructura (SA_N) :

- i) Obviamente $g_N = U \in \mathbb{M}_N$.
- ii) Sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} \tau_n v(x) &= c \left(\frac{S_N^0}{S_n^0} \right)^\gamma \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E} \left(x + \frac{bS_n^0}{S_N^0} + a \cdot R_{n+1} \right)^\gamma \\ &= c \left(\frac{S_N^0}{S_n^0} \right)^\gamma \left(x + \frac{bS_n^0}{S_N^0} \right)^\gamma \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E} (1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma \\ &= c \left(\frac{S_N^0}{S_n^0} \right)^\gamma \left(x + \frac{bS_n^0}{S_N^0} \right)^\gamma v_n. \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la transformación

$$\alpha \left(x + \frac{bS_n^0}{S_N^0} \right) := a$$

y

$$A_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^d | 1 + \alpha \cdot R_{n+1} \geq 0, \mathbb{P} - a.s.\}.$$

Si $x = -bS_n^0/S_N^0$, entonces solo $a = 0$ es admisible. Supongamos ahora que $x > -bS_n^0/S_N^0$. La variable α es la fracción de una nueva riqueza

$$\tilde{x} = x + \frac{bS_n^0}{S_N^0}$$

que tiene que ser invertida. El problema de optimización es ahora el mismo que en el caso de la función utilidad potencia y $\tau_n v \in \mathbb{M}_n$.

- iii) Para $v \in \mathbb{M}_{n+1}$, existe un maximizador $f_n^* \in \Delta_n$ de v . Esto se sigue del Teorema 3.1 y de la forma en que toma el valor de a en ii).

Por lo tanto, tenemos mostrado que el supuesto estructura (SA_N) se cumple. De lo declarado hasta ahora se sigue del Teorema 1.5 y obtenemos que

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \sup_{\alpha \in A_n} d_{n+1} \left(\frac{S_N^0}{S_n^0} \right)^\gamma \left(x + \frac{bS_n^0}{S_N^0} \right)^\gamma \mathbb{E} (1 + \alpha \cdot R_{n+1})^\gamma \\ &= d_{n+1} \left(\frac{S_N^0}{S_n^0} \right)^\gamma \left(x + \frac{bS_n^0}{S_N^0} \right)^\gamma v_n. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

Si definimos $d_n = d_{n+1} \left(\frac{S_N^0}{S_n^0} \right)^\gamma$ $v_n > 0$ entonces la declaración en la parte a) se cumple y la parte b) puede ser concluida de las consideraciones de ii). ■

3.2.3. Función de utilidad logaritmo

Consideremos que la función utilidad en el problema (3.3) es de la forma $U(x) = \log x$ con $\text{dom}U = (0, \infty)$. En este caso es conveniente considerar la fracción de riqueza que es invertida en las acciones. Así, definimos el conjunto

$$A_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^d | 1 + \alpha \cdot R_{n+1} > 0, \mathbb{P} - a.s.\}.$$

Notemos que necesitamos una desigualdad estricta esta vez. Ahora introducimos el siguiente problema de optimización genérico de un periodo

$$v_n := \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E} \log(1 + \alpha \cdot R_{n+1}). \quad (3.10)$$

De acuerdo al Teorema 3.1 este problema puede ser resuelto y denotamos la solución óptima por $\alpha^* \in \mathbb{R}^d$.

Teorema 3.6. *Sea U la función de utilidad logaritmo. Entonces se cumple:*

a) *La función de valor está dada por*

$$V_n(x) = \log x + d_n, \quad x > 0$$

donde

$$d_N = 0 \quad \text{y} \quad d_n = \sum_{k=n}^{N-1} (\log(1 + i_{k+1})) + v_k$$

y v_n es la Ecuación (3.11).

b) *La cantidad óptima que es invertida en las acciones está dada por*

$$f_n^*(x) = \alpha_n^* x, \quad x > 0$$

donde $\alpha_n^* = \arg \max_{\alpha \in A_n} [\mathbb{E} \log(1 + \alpha \cdot R_{n+1})]$. El portafolio óptimo está dado por $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$.

Demostración: Procedemos de la misma manera como en la prueba del Teorema 3.4. Para poder aplicar el Teorema 1.5 elegimos

$$\mathbb{M}_n := \{v : E \rightarrow \mathbb{R}_+ | v(x) = \log x + b, \quad x, b > 0\},$$

$$\Delta_n := \{f \in F_n | f(x) = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}^d\}.$$

Tenemos que probar las tres condiciones del supuesto estructura (SA_N) :

i) Obviamente $g_N = U \in \mathbb{M}_N$.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

ii) Sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
 \tau_n v(x) &= \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}v((1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1})) \\
 &= \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}[\log((1 + i_{n+1})(x + a \cdot R_{n+1})) + b] \\
 &= \sup_{a \in D_n(x)} \mathbb{E}[\log(1 + i_{n+1}) + \log(x + a \cdot R_{n+1}) + b] \\
 &= \sup_{a \in D_n(x)} [\log(1 + i_{n+1}) + \mathbb{E} \log(x + a \cdot R_{n+1}) + b].
 \end{aligned}$$

Si $x = 0$, entonces sólo $a = 0$ es admisible. Por lo tanto, supongamos $x > 0$. Usamos la transformación $a = \alpha x$ para obtener

$$\begin{aligned}
 \tau_n v(x) &= \sup_{\alpha \in A_n} [\log(1 + i_{n+1}) + \mathbb{E} \log(x + \alpha x \cdot R_{n+1}) + b] \\
 &= \sup_{\alpha \in A_n} [\log(1 + i_{n+1}) + \mathbb{E} \log(x(1 + \alpha \cdot R_{n+1})) + b] \\
 &= \sup_{\alpha \in A_n} [\log(1 + i_{n+1}) + \log x + \mathbb{E} \log(1 + \alpha \cdot R_{n+1}) + b] \\
 &= \log(1 + i_{n+1}) + \log x + b + \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E} \log(1 + \alpha \cdot R_{n+1}) \\
 &= \log(1 + i_{n+1}) + \log x + b + v_n \\
 &= \log x + \tilde{b}.
 \end{aligned}$$

Así, $\tau_n v(x) = \log x + \tilde{b} \in \mathbb{M}_n$ con $\tilde{b} := \log(1 + i_{n+1}) + b + v_n > 0$.

iii) Para cualquier $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ existe un maximizador f_n^* de v con $f_n^* \in \Delta_n$. Se sigue del Teorema 3.1 y de la forma de a en ii).

Por lo tanto, tenemos mostrado que el supuesto estructura (SA_N) se cumple. De lo declarado hasta ahora se sigue del Teorema 1.5 y obtenemos que

$$\begin{aligned}
 V_n(x) &= \sup_{\alpha \in A_n} d_{n+1} + \log(1 + i_{n+1}) + \log x + \mathbb{E} \log(1 + \alpha \cdot R_{n+1}) \\
 &= d_{n+1} + \log(1 + i_{n+1}) + \log x + v_n.
 \end{aligned}$$

Si definimos $d_n = d_{n+1} + \log(1 + i_{n+1}) + v_n > 0$ entonces la declaración en la parte a) se cumple y la parte b) puede ser concluida de las consideraciones de ii). ■

En caso de que tengamos una acción y proceso de precios, se sigue el modelo binomial como es descrito en la Sección 2.1, el problema de optimización en (3.11) se reduce a

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

$$\begin{aligned}
v_n &= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} \mathbb{E} \log(1 + \alpha \cdot R_{n+1}) \\
&= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} \mathbb{E} \log \left(1 + \alpha \cdot \frac{\tilde{R}_{n+1} - 1 - i}{1 + i} \right) \\
&= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} \mathbb{E} \log \left(\frac{1 + i}{1 + i} + \alpha \cdot \frac{\tilde{R}_{n+1} - 1 - i}{1 + i} \right) \\
&= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} \left\{ \log \left[\frac{1 + i + \alpha(u - 1 - i)}{1 + i} \right] p + \log \left[\frac{1 + i + \alpha(d - 1 - i)}{1 + i} \right] (1 - p) \right\} \\
&= \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} \{ \log(1 + i + \alpha(u - 1 - i))p - \log(1 + i)p + \log(1 + i + \alpha(d - 1 - i)) \\
&\quad (1 - p) - \log(1 + i)(1 - p) \}
\end{aligned}$$

quitamos la constante $\log(1 + i)$ del supremo, porque no influye en la selección del α óptimo, por lo tanto, trabajaremos con

$$\begin{aligned}
&\sup_{\alpha_0 < \alpha < \alpha_1} p \log(1 + i + \alpha(\mathbf{u} - 1 - i)) + (1 - p) \log(1 + i + \alpha(\mathbf{d} - 1 - i)) \\
&\alpha_0 := \frac{1 + i}{1 + i - \mathbf{u}} < 0 \quad y \quad \alpha_1 := \frac{1 + i}{1 + i - \mathbf{d}} > 0.
\end{aligned}$$

Así, la fracción óptima que es invertida en la acción se obtiene derivando con respecto de α e igualando a cero,

$$\frac{(u - 1 - i)p}{1 + i + \alpha(u - 1 - i)} + \frac{(d - 1 - i)(1 - p)}{1 + i + \alpha(d - 1 - i)} = 0$$

realizando los respectivos cálculos tenemos que

$$(1 + i)(u - 1 - i)p - (1 + i)(1 + i - d)(1 - p) = \alpha[(u - 1 - i)(1 + i - d)]$$

despejando α obtenemos la fracción óptima

$$\alpha^* := (1 + i) \left(\frac{p}{1 + i - \mathbf{d}} - \frac{1 - p}{\mathbf{u} - 1 - i} \right). \tag{3.11}$$

Note que $\alpha^* \in (\alpha_0, \alpha_1)$. Como en la prueba del Lema 3.1 podemos mostrar que $\alpha^* = \alpha^*(p)$ es creciente en p y $\alpha^*(p) = 0$ si $p = \frac{1+i-\mathbf{d}}{\mathbf{u}-\mathbf{d}}$.

Observación 3.7. *La función de utilidad logaritmo puede ser vista como un límite en el caso de que la función utilidad potencia con $\gamma \downarrow 0$. Así, si $\alpha_{pw}^*(\gamma)$ donde pw es la utilidad potencia por sus siglas en inglés, es la fracción óptima en el modelo binomial con función de utilidad potencia, entonces*

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \alpha_{pw}^*(\gamma) = \alpha_{\log}^*$$

donde $\alpha_{pw}^*(\gamma)$ y α_{\log}^* son dados como en (3.9) y (3.12) respectivamente.

3.2.4. Función de utilidad exponencial

Finalmente vemos el caso donde la función de utilidad en el problema (3.3) es de la forma $U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}$ con $\gamma > 0$ y $\text{dom}U = \mathbb{R}$. En este caso la función de utilidad es acotada superiormente y no necesitamos el supuesto de integrabilidad *ii*) de (FM). Es suficiente con que se cumpla la oportunidad de no arbitraje. Como el dominio de la función de utilidad exponencial es \mathbb{R} no tenemos restricciones en la decisión de inversión y obtenemos $D_n(x) = \mathbb{R}^d$. De nuevo introducimos un problema de optimización genérico de un periodo que tiene la siguiente forma:

$$v_n := \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E} \exp(-\gamma S_N^0 / S_n^0 a \cdot R_{n+1}). \quad (3.12)$$

De acuerdo a la observación 3.1 este problema puede resolverse y denotamos la solución óptima por $a_n^* \in \mathbb{R}^d$. La solución es de la forma $a_n^* = \frac{1}{\gamma} \frac{S_n^0}{S_n^0} \tilde{a}_n$ donde \tilde{a}_n es el punto mínimo de

$$a \mapsto \mathbb{E} \exp(-a \cdot R_{n+1}), \quad a \in \mathbb{R}^d. \quad (3.13)$$

Si los vectores aleatorios R_1, R_2, \dots son idénticamente distribuidos, entonces \tilde{a}_n es independiente de n .

Teorema 3.7. *Sea U la función de utilidad exponencial. Entonces se cumple:*

a) *La función de valor está dada por*

$$V_n(x) = d_n \exp(-\gamma S_N^0 / S_n^0 x), \quad x \in \mathbb{R}$$

donde

$$d_N = -\frac{1}{\gamma} \quad \text{y} \quad d_n = -\frac{1}{\gamma} \prod_{k=n}^{N-1} v_k$$

y v_n es la Ecuación (3.13).

b) *La cantidad óptima que es invertida en las acciones está dada por*

$$f_n^*(x) = a_n^*, \quad x \in \mathbb{R}$$

donde $a_n^* = \arg \min_{a \in \mathbb{R}^d} [\mathbb{E} \exp(-\gamma S_N^0 / S_n^0 a \cdot R_{n+1})]$. Y la política $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es óptima.

Note que la cantidad óptima que es invertida en el activo riesgoso depende sólo de la distribución del riesgo relativo R_n y no de la riqueza actual.

Demostración: Procedemos de la misma manera que la prueba del Teorema 3.4. Para poder aplicar el Teorema 1.5, elegimos

$$\mathbb{M}_n := \{v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid v(x) = -b_0 \exp(-b_1 x), \text{ para } b_0, b_1 > 0\},$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

$$\Delta_n := \{f \in F_n | f(x) \equiv c_0 \text{ for } c_0 \in \mathbb{R}^d\}.$$

Ahora, probaremos las tres condiciones del supuesto estructura (SA_N) :

- i) Obviamente $g_N = U \in \mathbb{M}_N$.
- ii) Sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces obtenemos el siguiente problema

$$\tau_n v(x) = -b_0 \exp(-b_1(1 + i_{n+1})x) \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E} \exp(-b_1(1 + i_{n+1})a \cdot R_{n+1}).$$

Este problema de optimización tiene solución de acuerdo a la Observación 3.1, por lo tanto $\tau_n v \in \mathbb{M}_n$.

- iii) Para $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ existe maximizadores $f_n(x) \in \Delta_n$ de v . Siguiendo la observación 3.1 y las consideraciones de la parte ii)

Por lo tanto, tenemos mostrado que el supuesto estructura (SA_N) se cumple. De lo declarado hasta ahora se sigue del Teorema 1.5 y obtenemos que

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \inf_{a \in \mathbb{R}^d} d_{n+1} \exp(-b_1(1 + i_{n+1})x) \mathbb{E} \exp(-b_1(1 + i_{n+1})a \cdot R_{n+1}) \\ &= d_{n+1} \exp(-b_1(1 + i_{n+1})x) v_n. \end{aligned}$$

Si definimos $d_n = d_{n+1} \exp(-b_1(1 + i_{n+1})x) v_n$, $x \in \mathbb{R}$ entonces la declaración en la parte a) se cumple y la parte b) puede ser concluida de las consideraciones de ii). ■

Observación 3.8. Denotemos por $M_n(x) := \mathbb{E} \exp(x \cdot R_{n+1})$ el momento de la función generadora $M_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de R_{n+1} y asumimos que $M_n(x) < \infty$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces el problema (3.14) es lo mismo que

$$\inf_{a \in \mathbb{R}^d} M_n(-a). \tag{3.14}$$

Como el momento de la función generadora es convexo y ya que la derivada de M_n existe (ver e.g., [6] Sección 21) podemos concluir que \tilde{a}_n es óptima si y sólo si la primera condición

$$\nabla_x M_n(-\tilde{a}_n) = 0$$

se cumple.

Observación 3.9. Para el modelo binomial es fácil mostrar que la solución de (3.14) tiene la forma

$$v_n := \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \exp(-\gamma S_N^0 / S_n^0 a \cdot R_{n+1}).$$

$$a \mapsto \mathbb{E} \exp(-a \cdot R_{n+1}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.2. PROBLEMAS DE RIQUEZA TERMINAL

$$\begin{aligned} \inf_{a \in \mathbb{R}} \{\mathbb{E} \exp(-a \cdot R_{n+1})\} &= \inf_{a \in \mathbb{R}} \left\{ \mathbb{E} \exp \left(-a \cdot \frac{\tilde{R}_{n+1} - 1 - i}{1 + i} \right) \right\} \\ &= \inf_{a \in \mathbb{R}} \left\{ \exp \left(\frac{-a(u - 1 - i)}{1 + i} \right) p \right. \\ &\quad \left. + \exp \left(\frac{-a(d - 1 - i)}{1 + i} \right) (1 - p) \right\} \end{aligned}$$

para obtener la política óptima derivamos con respecto de a e igualamos a cero.

$$-\frac{(u - 1 - i)}{1 + i} p \exp\left\{\frac{-a(u - 1 - i)}{1 + i}\right\} - \frac{(d - 1 - i)}{1 + i} (1 - p) \exp\left\{\frac{-a(d - 1 - i)}{1 + i}\right\} = 0$$

realizando los respectivos cálculos tenemos que

$$a \frac{(u - d)}{1 + i} = \log \left(\frac{1 - q}{1 - p} \right) - \log \left(\frac{q}{p} \right)$$

despejando a tenemos la política óptima

$$\tilde{a}_n = (1 + i) \left(\frac{\log \left(\frac{1 - q}{1 - p} \right) - \log \left(\frac{q}{p} \right)}{\mathbf{u} - \mathbf{d}} \right)$$

donde $q = \frac{1+i-d}{u-d}$. Aquí \tilde{a}_n es independiente de n . Obviamente $\tilde{a} > 0 \Leftrightarrow p > q$ y $\tilde{a} < 0 \Leftrightarrow p < q$ y a_n^* es creciente en n (decreciente en n) si $p > q$ ($p < q$).

Observación 3.10. Cuando tratamos con la función de utilidad exponencial, el problema de maximizar la recompensa total esperada es también bien definida en el caso de que la riqueza pueda ser negativa (que no está permitido en los casos anteriores). Así, podemos aproximar el riesgo relativo aleatorio en el periodo $[n - 1, n]$ por una distribución normal d -dimensional, i.e., $R_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \Sigma_n)$ y R_n toma valores por debajo de -1 . En particular obtenemos para $a \in \mathbb{R}^d$ que

$$a \cdot R_{n+1} \sim \mathcal{N}(a \cdot \mu_{n+1}, a^T \Sigma_{n+1} a).$$

Recordemos que para $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ obtenemos $\mathbb{E} e^{\theta Z} = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$. En nuestro caso esto produce

$$\mathbb{E} \exp(-a \cdot R_{n+1}) = \exp(-a \cdot \mu_{n+1} + \frac{1}{2} a^T \Sigma_{n+1} a).$$

$$v_n = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{e^{-a \cdot \mu_{n+1} + \frac{1}{2} a^T \Sigma_{n+1} a}\}$$

para encontrar el punto mínimo se sigue de,

$$\begin{aligned} -\mu_{n+1} + \frac{1}{2}(\Sigma_{n+1} + \Sigma_{n+1}^T)ae^{-a\cdot\mu_{n+1} + \frac{1}{2}a^T\Sigma_{n+1}a} &= 0 \\ -\mu_{n+1} + \frac{1}{2}(\Sigma_{n+1} + \Sigma_{n+1}^T)a &= 0 \\ a &= \Sigma_{n+1}^{-1}\mu_{n+1} \end{aligned}$$

El punto mínimo de esta expresión es alcanzado en

$$\tilde{a}_n := \Sigma_{n+1}^{-1}\mu_{n+1}$$

y

$$a_n^* = \frac{1}{\gamma} \frac{S_n^0}{S_N^0} \Sigma_{n+1}^{-1} \mu_{n+1}.$$

Esta expresión es similar a la proporción de Merton, cf., también a la Observación 3.7.

3.3. Problema de consumo

Supongamos que existe un inversor con capital inicial dado. Al comienzo de cada uno de los N periodos puede decidir cuánto del capital consumir y cuánto invertir en un activo riesgoso. El monto consumido es evaluado por una función de utilidad U , así como la riqueza terminal. El resto del capital se invierte en un activo riesgoso donde se supone que el inversor no es pequeño y por lo tanto es capaz de influir en los precios de los activos. ¿Cómo debería consumir ó invertir para maximizar la suma de la utilidad esperada?. El estado x del sistema es el capital disponible. La acción $a = f(x)$ es el monto del dinero que es consumido, donde es razonable suponer que $0 \leq a \leq x$. La recompensa es dada por $U(a)$ y la recompensa término por $U(x)$. Por lo tanto el objetivo es maximizar su ganancia

$$\mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} U(f_k(X_k)) + U(X_N) \right]$$

donde la maximización es sobre todas las políticas $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in \Pi$.

Consideremos el problema de consumo y denotemos por Z_{n+1} a las variables de retorno aleatorio de nuestro activo riesgoso sobre el periodo $[n, n+1)$. Además, suponemos que Z_1, \dots, Z_N son variables aleatorias independientes, no negativas y asumimos que el consumo es evaluado por una función de utilidad $U_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. El capital final es también evaluado por una función de utilidad U_N . Así, tenemos los siguientes datos, en consideración:

- $E := \mathbb{R}_+$ donde $x_n \in E$, denota a la riqueza del inversor al tiempo n ,
- $A := \mathbb{R}_+$ donde $a_n \in A$, denota a la riqueza que es consumida a tiempo n ,
- $D_n(x) := [0, x]$, para cualquier $x \in E$, i.e. no se nos permite pedir dinero prestado.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.3. PROBLEMA DE CONSUMO

- $\mathcal{Z} := \mathbb{R}_+$, donde z denota la variable de retorno del activo,
- $T_n(x_n, a_n, z_{n+1}) := (x_n - a_n)z_{n+1}$ es la función de transición,
- $Q_n^Z(\cdot|x, a) :=$ distribución de Z_{n+1} (independiente de (x, a)),
- $r_n(x, a) := U_n(a)$ es la recompensa del estado a tiempo n ,
- $g_N(x) := U_N(x)$.

En el problema de consumo, la suposición de integrabilidad (A_N) se satisface si asumimos que las funciones de utilidad son crecientes y cóncavas y $\mathbb{E}(Z_n) < \infty$ para cualquier n , porque entonces r_n y g_N pueden ser acotadas por una función lineal $c_1 + c_2x$ con $c_1, c_2 \geq 0$ y por tanto $X_n \leq xZ_1 \dots Z_n$ a.s. bajo cada política, la función δ_n^N satisface

$$\begin{aligned} \delta_n^N(x) &= \sup_{\pi} \mathbb{E}_{n,x}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^{N-1} U_k^+(f_k(X_k)) + U_N^+(X_N) \right] \\ &\leq Nc_1 + xc_2 \sum_{k=n}^N \mathbb{E}[Z_1] \dots \mathbb{E}[Z_k] < \infty, \quad x > 0 \end{aligned}$$

lo que implica (A_N) .

Primero note que para $f_n \in F_n$ el operador en este ejemplo es

$$\tau_n f_n v(x) = U_n(f_n(x)) + \mathbb{E}v((x - f_n(x))Z_{n+1}).$$

Ahora asumimos que $U_n(x) := \log x$ para cualquier n y $g_N(x) := \log x$. Además, asumimos que la distribución de retorno es independiente de n y tiene esperanza finita $\mathbb{E}[Z]$. Entonces (A_N) se cumple. Si elegimos una política de N -estados $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in \prod$ con $f_n(x) = cx$ y $c \in [0, 1]$, i.e., siempre se consume una fracción constante de la riqueza, entonces por el Teorema de iteración de recompensa 1.3 implicamos que

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.3. PROBLEMA DE CONSUMO

$$\begin{aligned}
V_{N\pi}(x) &= g_N(x) = \log x \\
V_{N-1\pi}(x) &= \tau_{N-1}f_{N-1}V_{N\pi}(x) \\
&= U_{N-1}(cx) + \mathbb{E}[V_N((x-cx)z)] \\
&= \log(cx) + \mathbb{E}[\log((x-cx)z)] \\
&= \log x + \log c + \mathbb{E}[\log x] + \mathbb{E}[\log(1-c)] + \mathbb{E}[\log z] \\
&= \log x + \log c + \log x + \log(1-c) + \mathbb{E}[\log z] \\
&= 2 \log x + \log c + \log(1-c) + \mathbb{E}[\log z] \\
V_{N-2\pi}(x) &= \tau_{N-2}f_{N-2}V_{N-1\pi}(x) \\
&= \log(cx) + \mathbb{E}[V_{N-1}((x-cx)z)] \\
&= \log x + \log c + \mathbb{E}[2 \log(x(1-c)z) \log c + \log(1-c) + \mathbb{E}[\log z]] \\
&= \log x + \log c + 2 \log x + 2 \log(1-c) + 2\mathbb{E}[\log z] + \log c + \log(1-c) + \mathbb{E}[\log z] \\
&= 3 \log x + 2 \log c + 3 \log(1-c) + 3\mathbb{E}[\log z] \\
&\vdots \\
V_{0\pi}(x) &= (N+1) \log x + N \log c + \frac{(N+1)N}{2} (\log(1-c) + \mathbb{E}[\log Z]).
\end{aligned}$$

Al derivar $V_{0\pi}$ con respecto de c e igualarlo a cero, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{N}{c} - \frac{(N+1)N}{2(1-c)} &= 0 \\
c &= \frac{-2N}{-(N+3)N} = \frac{2}{(N+3)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi^* = (f_0^*, \dots, f_{N-1}^*)$ con $f_n^*(x) = c^*x$ y $c^* = \frac{2}{N+3}$ maximiza la esperanza de la función utilidad \log (entre todas las políticas de consumo lineales).

Ahora resolveremos el problema de consumo. Primero, supongamos que el supuesto estructura (SA_N) se cumple y podemos aplicar el Teorema 1.5, Así, obtenemos

$$V_N(x) = \log x$$

$$\begin{aligned}
V_{N-1}(x) &= \tau_{N-1}V_N(x) = \sup_{a \in [0, x]} \{\log a + \mathbb{E}[\log(x-a)z]\} \\
&= \sup_{a \in [0, x]} \{\log a + \log(x-a) + \mathbb{E}[\log Z]\}
\end{aligned}$$

ahora, derivando con respecto de a e igualando a cero, para encontrar el máximo obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} - \frac{1}{x-a} &= 0 \\
a &= \frac{x}{2} = 0.5x
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.3. PROBLEMA DE CONSUMO

al substituir a en V_{N-1} nos produce

$$\begin{aligned} V_{N-1}(x) &= \log\left(\frac{x}{2}\right) + \log\left(x - \frac{x}{2}\right) + \mathbb{E}[\log z] \\ &= 2 \log x + 2 \log 0.5 + \mathbb{E}[\log Z] \end{aligned}$$

donde el maximizador es dado por $f_{N-1}^*(x) = 0.5x$. Repitiendo el proceso para $N - 2$ obtenemos,

$$\begin{aligned} V_{N-2}(x) &= \tau_{N-2} V_{N-1}(x) = \sup_{a \in [0, x]} \{V_{N-1}[(x-a)z]\} \\ &= \sup_{a \in [0, x]} \{\log a + \mathbb{E}[2 \log[(x-a)z] + 2 \log 0.5 + \mathbb{E}[\log z]]\} \\ &= \sup_{a \in [0, x]} \{\log a + 2 \log(x-a) + 2 \log 0.5 + 3\mathbb{E}[\log z]\} \end{aligned}$$

volviendo a derivar con respecto de a e igualando a cero obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{2}{x-a} &= 0 \\ a &= \frac{x}{3} \end{aligned}$$

al substituir a en V_{N-2} obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} V_{N-2}(x) &= \log\left(\frac{x}{3}\right) + 2 \log\left(x - \frac{x}{3}\right) + 2 \log 0.5 + 3\mathbb{E}[\log z] \\ &= \log x - \log 3 + 2 \log\left(\frac{2}{3}x\right) + 2 \log 0.5 + 3\mathbb{E}[\log z] \\ &= 3 \log x - \log 3 + 2 \log\left(\frac{2}{3}\right) + 2 \log 0.5 + 3\mathbb{E}[\log z] \end{aligned}$$

donde el maximizador es dado por $f_{N-1}^*(x) = 0.3333x$.

Repitiendo el proceso hasta n nos da el próximo resultado,

$$V_n(x) = (N - n + 1) \log x + d_n, \quad 0 \leq n \leq N$$

donde $d_N = 0$ y

$$d_n = d_{n+1} + (N - n)\mathbb{E} \log Z - \log(N - n + 1) + (N - n) \log\left(\frac{N - n}{N - n + 1}\right),$$

y obtenemos el maximizador $f_n^*(x) = \frac{1}{N-n+1}x$. Así, la fracción óptima que es consumida es independiente de la riqueza y creciente sobre el tiempo. Finalmente queda por demostrar que (SA_N) se cumple. Pero esto ahora puede ser fácilmente verificado por la elección

$$\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{M}(E) | v(x) = b \log x + d \text{ para constanes } b, d \in \mathbb{R}\}$$

$$\Delta_n := \{f \in F_n | f(x) = cx \text{ para } c \in \mathbb{R}\}.$$

De hecho, los cálculos necesarios son más o menos lo mismo que hemos realizado antes.

3.4. Problemas de consumo e inversión

Consideremos ahora la siguiente extensión del Problema 3.3. Nuestro inversor tiene una riqueza inicial $x > 0$ y al comienzo de cada uno de los N -periodos puede decidir que parte de la riqueza consumir y que parte invertir en el mercado financiero dado como en la sección 3.2. En particular $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}_n^S$. La cantidad c_n que es consumida en el tiempo n es evaluada por una función de utilidad $U_c(c_n)$. La riqueza restante es invertida en un activo riesgoso y el bono sin riesgo, la riqueza terminal X_N produce otra función de utilidad $U_p(X_N)$. ¿Cómo debería consumir e invertir el inversor, con el fin de maximizar la suma de sus utilidades esperadas?

Como en la Sección 3.2 asumimos la suposición (FM) en el mercado financiero. Además, asumimos que la función de utilidad U_c y U_p satisfacen que $\text{dom}U_c = \text{dom}U_p := [0, \infty)$. Análogamente a (2.1) el proceso de riqueza evoluciona como sigue

$$X_{n+1} = (1 + i_{n+1})(X_n - c_n + \phi_n \cdot R_{n+1})$$

donde $(c_n, \phi) = (c_n, \phi_n)$ es una estrategia de consumo e inversión, i.e., (ϕ_n) y (c_n) son \mathcal{F}_n adaptado y $0 \leq c_n \leq X_n$.

El problema de consumo e inversión está dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{N-1} U_c(c_n) + U_p(X_N^{c,\phi}) \right] \rightarrow \text{máx} \\ (c, \phi) \text{ es una estrategia de consumo e inversión con } X_N^{c,\phi} \in \text{dom}U_p, \mathbb{P} - a.s. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

El Problema (3.16) puede ser resuelto por el siguiente modelo de decisión de Markov (usando los mismos argumentos como en la Sección 3.2 para el problema de riqueza terminal):

- $E := [0, \infty)$, donde $x \in E$, denota la riqueza,
- $A := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, donde $a \in \mathbb{R}^d$, es la cantidad de dinero que es invertida en el activo riesgoso y $c \in \mathbb{R}_+$ la cantidad que es consumida,
- $D_n(x)$ está dado por

$$D_n(x) := \{(c, a) \in A \mid 0 \leq c \leq x \text{ y } (1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1}) \in E, \mathbb{P} - a.s.\},$$

- $\mathcal{Z} := [-1, \infty)^d$, donde $z \in \mathcal{Z}$, denota el riesgo relativo,
- $T_n(x, c, a, z) := (1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot z)$,
- $Q_n^Z(\cdot \mid x, c, a) :=$ distribución de R_{n+1} (independiente de (x, c, a)),
- $r_n(x, c, a) := U_c(c)$,

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.4. PROBLEMAS DE CONSUMO E INVERSIÓN

- $g_N(x) := U_p(x)$.

El problema de consumo e inversión dado en (3.16) puede ahora ser resuelto usando los resultados de la Sección 1.1.4. La función de valor está definida por

$$V_n(x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}_{n,x}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^{N-1} U_c(c_k(X_k)) + U_p(X_N) \right]$$

donde el supremo es tomado sobre todas las políticas $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1})$ con $f_n(x) = (c_n(x), a_n(x))$ y $V_0(x)$ es el valor del problema dado en (3.16). El modelo de decisión de Markov tiene una función acotada superiormente $b(x) := 1+x$ (c.f., Proposición 3.1). A fin de aplicar el Teorema 1.5 tenemos que observar en el siguiente problema de optimización de un periodo (c.f., Sección 3.1). Para $x \in \text{dom}U_p$ consideramos

$$D(x) := \{(c, a) \in A \mid 0 \leq c \leq x \text{ y } (1+i)(x - c + a \cdot R) \in \text{dom}U_p, \mathbb{P} - a.s.\},$$

$$u(x, c, a) := U_c(c) + \mathbb{E}U_p((1+i)(x - c + a \cdot R))$$

y sea

$$v(x) := \sup_{(c,a) \in D(x)} u(x, c, a).$$

Análogamente, al problema de inversión pura obtenemos:

Teorema 3.8. *Sea U_c y U_p las funciones de utilidad con $\text{dom}U_c = \text{dom}U_p = [0, \infty)$. Entonces se cumple:*

- a) *No existe oportunidad de arbitraje si y sólo si existe una función medible $f^* : \text{dom}U_p \rightarrow A$ tal que*

$$u(x, f^*(x)) = v(x), \quad x \in \text{dom}U_p.$$

- b) *$v(x)$ es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua en el $\text{dom}U_p$.*

Observación 3.11. *Si el $\text{dom}U_c = \text{dom}U_p = \mathbb{R}$ y U_c, U_p están acotadas superiormente, entonces el Teorema 3.8 también se cumple.*

La solución del problema de consumo e inversión se puede obtener por medio del siguiente Teorema.

Teorema 3.9. *Para el problema de consumo e inversión multiperiodico se cumple:*

- a) *La función de valor V_n es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua.*
b) *La función de valor puede ser calculada recursivamente por la ecuación de Bellman:*

$$V_N(x) = U_p(x),$$

$$V_n(x) = \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{U_c(c) + \mathbb{E}V_{n+1}((1+i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1}))\}.$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.4. PROBLEMAS DE CONSUMO E INVERSIÓN

c) Existen maximizadores f_n^* de V_{n+1} y la estrategia $(f_0^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es óptima para las N etapas del problema de consumo e inversión.

Demostración: Mostraremos que el supuesto de estructura (SA_N) se satisface con $\mathbb{M}_n := \{v \in \mathbb{B}_b^+ | v \text{ es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua}\}$ y $\Delta_n := F_n$, entonces seguimos inmediatamente del Teorema 1.5

- (i) $g_N = U_p \in \mathbb{M}_N$ se cumple, ya que U_p es una función de utilidad.
(ii) Ahora sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces

$$\tau_n v(x) = \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{U_c(c) + \mathbb{E}v((1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1}))\}, \quad x \in E$$

y por el Teorema 3.8 obtenemos $\tau_n v \in \mathbb{M}_n$.

- (iii) La existencia de maximizadores se cumple por el Teorema 3.8 ■

Observación 3.12. Los resultados del Teorema 3.9 también se cumplen si las funciones de utilidad U_c y U_p tienen $\text{dom}U_c = \text{dom}U_p = \mathbb{R}$ y U_c, U_p están acotadas superiormente (e.g., funciones de utilidad exponencial).

Teorema 3.10. Sea $\mathbb{E}R_n = 0$ para cualquier $n = 0, \dots, N - 1$. Entonces la estrategia óptima de consumo e inversión $(f_0^*, f_1^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es dada por

$$f_n^*(x) = (c_n^*(x), a_n^*(x)) \text{ con } a_n^*(x) \equiv 0,$$

i.e., la estrategia “invierte todo el dinero en el bono”, es la estrategia óptima de inversión.

Demostración: Como en la prueba del Teorema 3.3 consideramos para $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ el problema de optimización

$$\begin{aligned} \tau_n v(x) &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{U_c(c) + \mathbb{E}v(T_n(x, c, a, R_{n+1}))\} \\ &\leq \sup_{0 \leq c \leq x} \{U_c(c) + v((1 + i_{n+1})(x - c))\} \end{aligned}$$

mediante el uso de la desigualdad de Jensen y $\mathbb{E}R_{n+1} = 0$. Así $a_n^*(x) \equiv 0$. ■

3.4.1. Función de utilidad potencia

Consideremos que la función de utilidad está dada por

$$U_c(x) = U_p(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad x \in [0, \infty)$$

$0 < \gamma < 1$. Aquí obtenemos el siguiente resultado general para el Problema de consumo e inversión.

Teorema 3.11. Sea $U_c(x) = U_p(x)$ la utilidad potencia con $0 < \gamma < 1$. Entonces se cumple:

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.4. PROBLEMAS DE CONSUMO E INVERSIÓN

a) La función de valor está dada por

$$V_n(x) = d_n x^\gamma, \quad x \geq 0$$

donde (d_n) satisface la recursión

$$d_n^\delta = \gamma^{-\delta} + ((1 + i_{n+1})^\gamma v_n)^\delta d_{n+1}^\delta, \quad d_N = \frac{1}{\gamma}$$

con $\delta = (1 - \gamma)^{-1}$ y donde v_n es la Ecuación (3.7).

b) El consumo óptimo c_n^* está dado por

$$c_n^*(x) = x(\gamma d_n)^{-\delta}, \quad x \geq 0$$

y la cantidad óptima que es invertida en las acciones está dada por

$$a_n^*(x) = x \frac{(\gamma d_n)^\delta - 1}{(\gamma d_n)^\delta} \alpha_n^*, \quad x \geq 0$$

donde $\alpha_n^* = \arg \max v_n$. La estrategia óptima de consumo e inversión f_0^*, \dots, f_{N-1}^* está definida por $f_n^* := (c_n^*, a_n^*)$, $n = 0, \dots, N - 1$.

Note que la fracción óptima de consumo e inversión es independiente de la riqueza. Además, como $a_n^*(x) = \alpha_n^*(x - c_n^*(x))$, la fracción óptima de la riqueza restante después de consumirla que se invirtió en los activos es la misma como en la Ecuación (3.7) (esto es sin el consumo). Ya que $d_n \geq d_{n+1}$ el consumo óptimo satisface que $c_n^* \leq c_{n+1}^*$, en particular la fracción óptima de consumo es creciente en n .

Demostración: De nuevo tenemos que encontrar conjuntos \mathbb{M}_n y Δ_n que satisfacen el supuesto de estructura (SA_N) . Elegimos

$$\mathbb{M}_n := \{v : E \rightarrow \mathbb{R}_+ | v(x) = bx^\gamma, \text{ para } b > 0\}$$

$$\Delta_n := \{f \in F_n | f(x) = (\zeta x, \alpha x), \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}^d, \zeta \in \mathbb{R}_+\}.$$

Ahora probaremos las tres condiciones:

- i) Obviamente $g_N = U_p \in \mathbb{M}_N$
- ii) Sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \tau_n v(x) &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \left\{ \frac{1}{\gamma} c^\gamma + b \mathbb{E}(T_n(x, c, a, R_{n+1}))^\gamma \right\} \\ &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \left\{ \frac{1}{\gamma} c^\gamma + b \mathbb{E}((1 + i_{n+1})(x - c + a \cdot R_{n+1}))^\gamma \right\} \\ &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \left\{ \frac{1}{\gamma} c^\gamma + b(1 + i_{n+1})^\gamma \mathbb{E}(x - c + a \cdot R_{n+1})^\gamma \right\}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.4. PROBLEMAS DE CONSUMO E INVERSIÓN

Si $x = 0$ sólo entonces $(c, a) = (0, 0)$ es admisible. Por lo tanto supongamos que $x > 0$. Usamos la transformación de $c = \zeta x$ y $a = \alpha(x - c) = \alpha(1 - \zeta)x$ obtenemos

$$\begin{aligned}\tau_n v(x) &= \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} (\zeta x)^\gamma + b(1 + i_{n+1})^\gamma \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E}(x - (\zeta x) + (\alpha(1 - \zeta)x) \cdot R_{n+1})^\gamma \right\} \\ &= \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} (\zeta x)^\gamma + b(1 + i_{n+1})^\gamma \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E}(x(1 - \zeta) + (\alpha(1 - \zeta)x) \cdot R_{n+1})^\gamma \right\} \\ &= x^\gamma \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} \zeta^\gamma + b(1 + i_{n+1})^\gamma (1 - \zeta)^\gamma v_n \right\}\end{aligned}$$

v_n es la Ecuación (3.7). Así, $\tau_n v(x) = \tilde{b}x^\gamma \in \mathbb{M}_n$ con

$$\tilde{b} = \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} \zeta^\gamma + b(1 + i_{n+1})^\gamma (1 - \zeta)^\gamma v_n \right\}.$$

Note que $\tilde{b} > 0$.

- iii) Para $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ tenemos que probar la existencia de un maximizador en el conjunto Δ_n . Ya que el problema de optimización en *ii*) los separa, es suficiente resolver el problema de consumo

$$\sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} \zeta^\gamma + b(1 + i_{n+1})^\gamma (1 - \zeta)^\gamma v_n \right\}.$$

Para la solución de este problema recordemos el siguiente resultado general: El problema de optimización es

$$\sup_{0 \leq a \leq 1} g(a) \tag{3.16}$$

$g(a) := ba^\gamma + d(1 - a)^\gamma$ con $b > 0$, $d > 0$, $0 < \gamma < 1$, veamos si tiene solución óptima:

$$\frac{\partial g(a)}{\partial a} = \gamma ba^{\gamma-1} - \gamma d(1 - a)^{\gamma-1} = 0$$

entonces tenemos que

$$a = \frac{b^\delta}{b^\delta + d^\delta}.$$

Con lo cual, tiene una solución óptima, que la denotaremos de la siguiente forma

$$a^* = \frac{b^\delta}{b^\delta + d^\delta},$$

ahora substituyéndola en $g(a)$ tenemos que

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.4. PROBLEMAS DE CONSUMO E INVERSIÓN

$$\begin{aligned} g(a^*) &= b \left(\frac{b^\delta}{b^\delta + d^\delta} \right)^\gamma + d \left(1 - \frac{b^\delta}{b^\delta + d^\delta} \right)^\gamma \\ &= \frac{1}{(b^\delta + d^\delta)^{\gamma-1}} \\ &= (b^\delta + d^\delta)^{\frac{1}{\delta}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$g(a^*) = (b^\delta + d^\delta)^{1-\gamma} = (b^\delta + d^\delta)^{\frac{1}{\delta}},$$

con $\delta = (1-\gamma)^{-1}$. Note que a^* es único y $0 < a^* < 1$, ya que $g(a) := ba^\gamma + d(1-a)^\gamma$, $b > 0$, $d > 0$ y $a \in [0, 1]$, es creciente y además es convexa o cóncava hacia arriba en el intervalo $[0, 1]$. De (3.17) concluimos que el maximizador de $v \in \mathbb{M}_{n+1}$ existe en el conjunto Δ_n .

Ahora seguimos del teorema 1.5 por inducción. De las consideraciones anteriores obtenemos la recursión

$$d_n = \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} \zeta^\gamma + d_{n+1} (1 + i_{n+1})^\gamma (1 - \zeta)^\gamma v_n \right\}$$

de $g(a^*)$ junto con d_n , tenemos que

$$b = \frac{1}{\gamma}, \quad d = d_{n+1} (1 + i_{n+1})^\gamma v_n, \quad a = \zeta,$$

igualando d_n con $g(a^*)$ obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} d_n = g(a^*) &= \left(\frac{1}{\gamma^\delta} + (d_{n+1} (1 + i_{n+1})^\gamma v_n)^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma^\delta} + d_{n+1}^\delta ((1 + i_{n+1})^\gamma v_n)^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ d_n^\delta &= \frac{1}{\gamma^\delta} + d_{n+1}^\delta ((1 + i_{n+1})^\gamma v_n)^\delta \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos del problema (3.17) que

$$\begin{aligned} V_n(x) &= d_n x^\gamma \\ &= \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \left\{ \frac{1}{\gamma} \zeta^\gamma + d_{n+1} (1 + i_{n+1})^\gamma v_n (1 - \zeta)^\gamma \right\}. \end{aligned}$$

Si derivamos con respecto de ζ y lo igualamos a cero obtenemos la política óptima,

$$\frac{\gamma}{\gamma} x^\gamma \zeta^{\gamma-1} - \gamma d_{n+1} (1 + i_{n+1})^\gamma v_n (1 - \zeta)^{\gamma-1} x^\gamma = 0$$

realizando los cálculos correspondientes tenemos

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.4. PROBLEMAS DE CONSUMO E INVERSIÓN

$$x\zeta = x\gamma^{-\delta}d_n^{-\delta}.$$

Entonces obtenemos las políticas óptimas de consumo e inversión respectivamente,

$$c_n^*(x) = x(\gamma d_n)^{-\delta} \text{ y } a_n^*(x) = \alpha_n^*(x - c_n^*(x)) = \alpha_n^*(1 - (\gamma d_n)^{-\delta})x$$

con lo que queda concluida la prueba ■

3.4.2. Función de utilidad logaritmo

Consideremos que ambas funciones de utilidad son de la forma

$$U_c(x) = U_p(x) = \log x, \quad x > 0.$$

La prueba del siguiente resultado es similar a la prueba de la utilidad potencia.

Teorema 3.12. *Sea $U_c(x) = U_p(x)$ la función de utilidad logaritmo con $x > 0$. Entonces se cumple:*

a) *La función de valor está dada por*

$$\begin{aligned} V_n(x) &= (N - n + 1) \log x + d_n \\ d_n &= (N - n + 1) \log x + (N - n)(\log(N - n) + v_n + \log(1 + i_{n+1})) \\ &\quad - (N - n + 1) \log(N - n + 1) + d_{n+1}. \end{aligned}$$

donde v_n es la Ecuación (3.11) con $(d_n) \in \mathbb{R}$ y $x > 0$.

b) *El consumo óptimo c_n^* está dado por*

$$c_n^*(x) := \frac{x}{N - n + 1}, \quad x \geq 0$$

y la cantidad óptima que es invertida en las acciones está dada por

$$a_n^*(x) := x \frac{N - n}{N - n + 1} \alpha_n^*, \quad x \geq 0$$

donde $\alpha_n^* = \arg \max v_n$. La estrategia óptima de consumo e inversión f_0^*, \dots, f_{N-1}^* está definida por $f_n^* := (c_n^*, a_n^*)$, $n = 0, \dots, N - 1$.

Demostración: Para probar el supuesto de estructura SA_N , elegimos

$$\mathbb{M}_n := \{v : E \rightarrow \mathbb{R} | v(x) = (N - n + 1) \log x + b \text{ para } b \in \mathbb{R}\},$$

$$\Delta_n := \{f \in F_n | f(x) = (\zeta x, \alpha x) \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}^d, \zeta \in \mathbb{R}_+\}.$$

Tenemos que verificar las tres condiciones:

i) Obviamente $g_N = U_p \in \mathbb{M}_N$.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.4. PROBLEMAS DE CONSUMO E INVERSIÓN

ii) Sea $v \in \mathbb{M}_{n+1}$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
 \tau_n v(x) &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{ \log c + (N-n) \mathbb{E} \log(T_n(x, c, a, R_{n+1})) + b \} \\
 &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{ \log c + (N-n) \mathbb{E} \log((1+i_{n+1})(x-c+a \cdot R_{n+1})) + b \} \\
 &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{ \log c + (N-n) \mathbb{E} [\log(1+i_{n+1}) + \log(x-c+a \cdot R_{n+1})] + b \} \\
 &= \sup_{(c,a) \in D_n(x)} \{ \log c + (N-n) \log(1+i_{n+1}) + b \\
 &\quad + (N-n) \mathbb{E} \log(x-c+a \cdot R_{n+1}) \}.
 \end{aligned}$$

De nuevo usamos la transformación $c = \zeta x$ y $a = \alpha(x-c) = \alpha(1-\zeta)x$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \tau_n v(x) &= \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \{ \log(\zeta x) + (N-n) \log(1+i_{n+1}) + b + (N-n) \\
 &\quad \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E} \log(x - (\zeta x) + (\alpha(1-\zeta)x) \cdot R_{n+1}) \} \\
 &= \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \{ \log(\zeta x) + (N-n) \log(1+i_{n+1}) + b + (N-n) \\
 &\quad \sup_{\alpha \in A_n} \mathbb{E} \log(x(1-\zeta) + (\alpha(1-\zeta)x) \cdot R_{n+1}) \} \\
 &= \sup_{0 \leq \zeta \leq 1} \{ \log(\zeta x) + (N-n) \log(1+i_{n+1}) + b + (N-n) \log(x(1-\zeta)) \\
 &\quad + (N-n)v_n \}.
 \end{aligned}$$

Derivando con respecto de ζ e igualando a cero obtenemos un maximizador para $\tau_n v(x)$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_n v(x)}{\partial \zeta} &= 0 \\
 \zeta x &= \frac{x}{(N-n+1)}.
 \end{aligned}$$

Al substituir el valor de ζx en $\tau_n v(x)$ nos da lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 \tau_n v(x) &= \log\left(\frac{x}{N-n+1}\right) + (N-n) \log\left(x - \frac{x}{N-n+1}\right) + (N-n)v_n \\
 &\quad + (N-n) \log(1+i_{n+1}) + b \\
 &= (N-n+1) \log x + (N-n)(\log(N-n) + v_n + \log(1+i_{n+1})) \\
 &\quad - (N-n+1) \log(N-n+1) + b,
 \end{aligned}$$

donde v_n es la Ecuación (3.11). Así, $\tau_n v(x) = (N-n+1) \log x + \tilde{b} \in \mathbb{M}_n$ con

$$\tilde{b} = (N-n)(\log(N-n) + v_n + \log(1+i_{n+1})) - (N-n+1) \log(N-n+1) + b.$$

iii) La existencia de maximizadores en el conjunto Δ_n se obtiene de las consideraciones en *ii*), por la forma en que tomamos la transformación.

Ahora por el Teorema 1.5 por inducción obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} V_n(x) &= (N - n + 1) \log x + d_n \\ d_n &= (N - n + 1) \log x + (N - n)(\log(N - n) + v_n + \log(1 + i_{n+1})) \\ &\quad - (N - n + 1) \log(N - n + 1) + d_{n+1}. \end{aligned}$$

$$c_n^*(x) = \frac{x}{N - n + 1},$$

$$a_n^*(x) = \alpha_n^*(n)(x - c_n^*(x)) = x \frac{N - n}{N - n + 1} \alpha_n^*.$$

Y la prueba que concluida. ■

3.5. Seguimiento de índice

El problema de seguimiento de índice que es formulado a continuación, puede verse como una aplicación de cobertura de media y varianza en un mercado incompleto. Supongamos que tenemos un mercado financiero con un bono sin riesgo y d activos riesgosos como en la sección 2.1. Además de los activos negociables existe un activo no comerciable cuyo proceso de precios (\hat{S}_n) evoluciona conforme a

$$\hat{S}_{n+1} = \hat{S}_n \hat{R}_{n+1}.$$

La variable aleatoria positiva \hat{R}_{n+1} que es el cambio de precio relativo del activo no negociado puede ser correlacionado con R_{n+1} . Asumimos que los vectores aleatorios $(R_1, \hat{R}_1), (R_2, \hat{R}_2), \dots$ son independientes y la distribución conjunta de (R_n, \hat{R}_n) es dada. El objetivo ahora es rastrear el activo no negociado lo más cercanamente posible para invertir en el mercado financiero. El error de seguimiento es medido en términos de la distancia cuadrática de la riqueza del portafolio al proceso de precios (\hat{S}_n) , i.e. el problema de optimización es entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_{x\hat{s}} \left[\sum_{n=0}^N (X_n^\phi - \hat{S}_n)^2 \right] \rightarrow \text{mín} \\ \phi = (\phi_n) \text{ es un portafolio o estrategia} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

donde ϕ_n es $\mathcal{F}_n = \sigma(R_1, \dots, R_n, \hat{R}_1, \dots, \hat{R}_n)$ medible. Este problema puede ser formulado como un problema lineal cuadrático (ver 1.4.1). Es importante señalar que aquí, que el espacio de estados del modelo de decisión de Markov incluye (además de la riqueza) el precio del activo no negociado. Así el modelo de decisión es como sigue:

- $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, donde $(x, \hat{S}) \in E$ y x es la riqueza y \hat{s} el valor del activo no negociado,

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.5. SEGUIMIENTO DE ÍNDICE

- $A := \mathbb{R}^d$, donde $a \in A$ es la cantidad de dinero que es invertida en el activo riesgoso,
- $D(x, \hat{s}) := A$,
- $\mathcal{Z} := (-1, \infty)^d \times \mathbb{R}_+$ donde $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{Z}$ y z_1 es el riesgo relativo del activo negociado y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado.
- La función de transición está dada por

$$T_n((x, \hat{s}), a, (z_1, z_2)) := \begin{pmatrix} 1 + i_{n+1} & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 + i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} a,$$

- $Q_n^Z(\cdot | (x, \hat{s}), a) :=$ distribución conjunta de (R_{n+1}, \hat{R}_{n+1}) (independiente de $((x, \hat{s}), a)$),
- $r_n((x, \hat{s}), a) := -(x - s)^2$,
- $g_N(x, \hat{s}) := -(x - \hat{s})^2$.

El problema (3.18) puede ser resuelto por el modelo de decisión de Markov. La función de valor (función de costo) está dada por

$$V_n(x, \hat{s}) := \inf_{\pi} \mathbb{E}_{n,x,\hat{s}}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^N (X_k - \hat{S}_k)^2 \right], (x, \hat{s}) \in \mathbb{E}$$

y $V_0(x, \hat{s})$ es el mínimo valor del problema de la Ecuación (3.18). Cuando definimos

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

el problema es equivalente a minimizar

$$\mathbb{E}_{k=n}^{\pi} \left[\sum_{k=n}^N \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} X_k \\ \hat{S}_k \end{pmatrix} \right].$$

El problema lineal cuadrático de la sección 1.4.1 produce el siguiente resultado.

Teorema 3.13. a) La función de valor del problema (3.18) está dado por

$$V_n(x, \hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T Q_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}, (x, \hat{s}) \in E$$

donde las matrices Q_n pueden ser calculadas recursivamente como en el Teorema 1.16. En particular Q_n es simétrica y semidefinida positiva.

b) El portafolio óptimo $\pi^* = (f_0^*, \dots, f_{N-1}^*)$ es lineal y dado por

$$f_n^*(x, \hat{s}) = -(\mathbb{E}[R_{n+1}R_{n+1}^T])^{-1} \cdot \mathbb{E} \left[\left(R_{n+1}, \frac{q_{n+1}^{21}}{(1 + i_{n+1})q_{n+1}^{11}} \hat{R}_{n+1} R_{n+1} \right) \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}$$

donde los elementos de Q_{n+1} son denotados por q_{n+1}^{ij} .

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.5. SEGUIMIENTO DE ÍNDICE

Demostración: Comprobaremos la suposición de estructura (SA_N) . Es razonable asumir que M_n es dado por

$$M_n := \{v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+ | v(x, \hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \text{ con } Q \text{ simétrica, positiva}\}.$$

También resultará que los conjuntos $\Delta_n := \Delta \cap F_n$ pueden ser elegidos como los conjuntos de todas las funciones lineales, i.e.,

$$\Delta := \{f : E \rightarrow A | f(x, \hat{s}) = C(x, \hat{s}) \text{ para algún } C \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d\}.$$

Empezaremos con (SA_N) i): obviamente $\begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T Q_N \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in M_N$.

Ahora sea $v(x, \hat{s}) = \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T Q_{n+1} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in M_{n+1}$. Intentaremos resolver el siguiente problema de optimización,

$$\tau_n v(x) = \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \{(x, \hat{s}) Q_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \mathbb{E}v[T_n((x, \hat{s}), a, (z_1, z_2))]\},$$

pero poder resolver esto, haremos uso de lo que hicimos en el capítulo 1.4.1. En este capítulo definimos la función de transición como $T_n(x, a, A_{n+1}, B_{n+1}) := A_{n+1}x + B_{n+1}a$, con $Z_{n+1} := (A_{n+1}, B_{n+1})$, y la política óptima que obtuvimos es la siguiente,

$$f_n^*(x) = -(\mathbb{E}[B_{n+1}^T Q B_{n+1}])^{-1} \mathbb{E}[B_{n+1}^T Q A_{n+1}]x.$$

al sustituir los valores de nuestra función de transición $T_n((x, \hat{s}), a, (z_1, z_2))$, en la función de transición (LQ) y en la política óptima, tenemos lo siguiente

$$Ax = \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} = (1+i_{n+1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{z_2}{1+i_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}$$

$$Ba = \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} a = (1+i_{n+1}) \begin{pmatrix} z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} a$$

$$f_{n+1}^*(x, \hat{s}) = -\left(\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T Q_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right)^{-1}$$

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T Q_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}$$

$$= -(\mathbb{E}[z_1 z_1^T])^{-1} \mathbb{E}\left[z_1, \frac{q_{n+1}^{12}}{q_{n+1}^{11}(1+i_{n+1})} z_1 z_2\right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.$$

Sabemos que Q_{n+1} es simétrica y definida positiva, además de que z_1 es el riesgo relativo del activo negociado R y z_2 es el cambio de precio relativo del activo no negociado \hat{R} , entonces podemos escribir nuestra política óptima de la siguiente manera,

$$f_{n+1}^*(x, \hat{s}) = -(\mathbb{E}[RR^T])^{-1} \mathbb{E}\left[R, \frac{q_{n+1}^{21}}{q_{n+1}^{11}(1+i_{n+1})} R\hat{R}\right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.5. SEGUIMIENTO DE ÍNDICE

Tenemos que $\tau_n v(x)$ es de la siguiente forma por lo que vimos en el capítulo 1.4.1 junto con nuestros valores,

$$\begin{aligned} \tau_n v(x) = & \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \left\{ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T Q_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \\ & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \\ & + a^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] a \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Ahora si sustituimos la política en $\tau_n v(x)$ nos produce,

$$\begin{aligned} \tau_n v(x) = & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T Q_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \\ & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \left(-(\mathbb{E}[RR^T])^{-1} \mathbb{E} \left[R, \frac{q_{n+1}^{21}}{q_{n+1}^{11}(1+i_{n+1})} R\hat{R} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right) \\ & + \left(-(\mathbb{E}[RR^T])^{-1} \mathbb{E} \left[R, \frac{q_{n+1}^{21}}{q_{n+1}^{11}(1+i_{n+1})} R\hat{R} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right)^T \\ & \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \left(-(\mathbb{E}[RR^T])^{-1} \mathbb{E} \left[R, \frac{q_{n+1}^{21}}{q_{n+1}^{11}(1+i_{n+1})} R\hat{R} \right] \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \right) \\ = & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \left\{ Q_n + \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \right. \\ & - \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}^T Q_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix} \right] (\mathbb{E}[RR^T])^{-1} \\ & \left. \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (1+i_{n+1})z_1^T \\ 0 \end{pmatrix}^T Q_{n+1} \begin{pmatrix} (1+i_{n+1}) & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}^T \tilde{Q}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n \end{aligned}$$

Por lo tanto cumple con el supuesto de estructura y por los Teoremas 1.5 y 1.16 el problema puede ser resuelto recursivamente, por lo que tenemos usando inducción hacia atrás la siguiente fórmula recursiva.

$$V_n(x, \hat{s}) = (x, \hat{s}) \tilde{Q}_n \begin{pmatrix} x \\ \hat{s} \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Con esto queda concluida la demostración del teorema. ■

En vez de rastrear un índice, el problema puede ser modificado ligeramente tal que el inversor intenta rebasar el índice. Esto puede ser alcanzada si añadimos a \hat{S}_n una cantidad (determinista) adicional (b_n), y minimizamos

$$\mathbb{E}_{x\hat{s}} \left[\sum_{n=0}^N (X_n^\phi - \hat{S}_n - b_n)^2 \right]$$

sobre todo el portafolio ϕ . Este problema puede ser resuelto de la misma forma.

3.6. Asignación óptima de subastas secuenciales en línea

En esta sección, se considera un sistema de subastas secuenciales en internet, donde un vendedor quiere vender una determinada cantidad de artículos en varias subastas secuenciales con un precio de reserva establecido de antemano. Se presentan dos casos, uno es donde el precio de reserva es privado (conocido sólo por el vendedor), mientras que en el otro es público (conocido por todos). Los compradores arriban como una distribución Poisson. La suposición usual en las subastas es que los compradores valoran los artículos de forma independiente con distribución uniforme y honestamente ofertan esos valores para los artículos. El número de artículos asignados a cada subasta se determina al comienzo y es determinado por el precio de reserva y la llegada de ofertas por los compradores [26].

3.6.1. Problema y modelo

Un vendedor recibe los envíos de los artículos cada T días y cada envío contiene K artículos idénticos. El vendedor tiene la intención de vender estos artículos en W subastas dentro de T días. Por simplicidad, asumimos que la duración de cada subasta t_0 es la misma, por lo que $t_0 = T/W$. El vendedor tiene un precio de reserva v en cada artículo, lo que significa que va a vender el artículo sólo si el precio no es menor al precio de reserva.

Los compradores arriban como una distribución Poisson con tasa λ y cada comprador es neutral al riesgo (indiferencia al riesgo). Por otra parte, cada comprador desea ofertar al menos por un artículo y tiene una valoración de cada artículo. Esta valoración es privada y simétrica, es decir cada comprador conoce su propia valoración determinista, sin embargo, sólo conoce las valoraciones de otros licitantes como variables aleatorias que se comportan de forma independiente en la misma distribución $F(s)$. Llamamos a este tipo de valoración independiente y privada como (IPV), para abreviar. Además, se supone que $F(s)$ es la distribución uniforme en el intervalo $[\underline{v}, \bar{v}]$ y que los compradores ofertan con honestidad, por ejemplo. Al comienzo de cada subasta, el vendedor debe determinar el número de artículos a subastar, por ejemplo a artículos, que serán puestos en la subasta de los artículos restantes. Luego, cuando termina la subasta, cada uno de los a mejores compradores ganan un artículo si su oferta no es menor que el precio de reserva y paga el valor de su oferta. El beneficio total del vendedor en las subastas secuenciales es la suma de la ganancia obtenida en cada subasta. El objetivo del vendedor

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

es maximizar el beneficio total.

Supongamos que el costo de almacenamiento por artículo en un periodo de tiempo es h . Cuando el número de artículos asignados para cada subasta es excesivamente grande, más artículos pueden ser subastados y los costos futuros de almacenamiento se reducen. Pero el precio de los artículos subastados sería menor y los ingresos totales disminuirían. Cuando a es demasiado pequeño, cada artículo subastado puede tener un precio alto pero en el futuro, los costos de almacenamiento aumentarán y el número de artículos sería demasiado alto, lo que también puede disminuir los ingresos totales. Así que, es un verdadero problema para el vendedor escoger la cantidad óptima de artículos asignada a cada subasta para maximizar los ingresos totales.

La cantidad que se subastada es arbitraria en cada subasta, por lo que una serie de artículos que se ofrecen en cada subasta pueden permanecer. Por lo tanto la cantidad de artículos que quedan al comienzo de cada subasta puede ser arbitraria, por lo que se utiliza un proceso de decisión de Markov con horizonte finito para modelarlo.

Supongamos que $\beta \in (0, 1)$ es un factor de descuento. El índice de periodo n se conoce como el número de subastas restantes, $n = 0, 1, \dots, W$. El estado x en cada periodo indica la cantidad de artículos restantes al comienzo del periodo, $x = 0, 1, \dots, K$ y la acción $a = 0, 1, \dots, x$ expresa la cantidad de artículos asignada a cada subasta. Cuando la cantidad de artículos en el inicio de la subasta es x y el número de artículos asignados a cada subasta es a , entonces la probabilidad de que el número de artículos al final de la subasta sea j es denotado por $p_{xj}(a)$. La función de recompensa $r(x, a)$ es la ganancia total de los artículos subastados menos los costos totales en este periodo.

El precio de reserva fijado por el vendedor puede ser público o privado. Para estos dos casos, calculamos las expresiones de la probabilidad de transición de estado y la función de recompensa respectivamente en las secciones siguientes.

3.6.2. Análisis para el precio de reserva privado

En esta Sección asumimos que el precio de reserva es privado. La probabilidad para cualquier subasta fija es $P\{N(t) : t \geq 0\}$, donde N es el número de compradores que arriban en el intervalo $[0, t_0]$, sólo nos interesa saber cuantos compradores arriban durante cada periodo,

$$P\{N(t_0) = t\} = \frac{(\lambda t_0)^t e^{-\lambda t_0}}{t!}, \quad t \geq 0. \quad (3.18)$$

Si $N = t$, sea r_1, \dots, r_t las ofertas de los compradores que arriban. Entonces con la suposición de un IPV sabemos la probabilidad que r_1, \dots, r_t son independientes e idénticamente distribuidas uniformemente en el intervalo $[\underline{v}, \bar{v}]$, con función de distribución $F(s)$. Además $r_0 = 0$ indica la ausencia de compradores.

Sea $p_k(a)$ la probabilidad de que sólo k artículos sean subastados cuando el vendedor ofrece a artículos para la subasta.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Primero, consideremos el caso en que $k < a$. Esto pasa si y sólo si existen sólo k ofertas que no son menores que v y por otro lado tenemos que las $t - k$ ofertas son menores a v , cuando arriban t compradores. Debido a que la cantidad de artículos subastados debe ser menor o igual al número de los compradores que llegan obtenemos que:

$$p_k(a) = \sum_{t=k}^{\infty} P\{N(t_0) = t\} \cdot P\{\text{exactamente } k \text{ eventos en } \{r_1 \geq v\}, \dots, \{r_t \geq v\} \text{ ocurren} | N = t\}.$$

Conforme al supuesto de IPV, los eventos $\{r_i \geq v\}$, $i = 1, 2, \dots, t$ son independientes con probabilidad

$$\bar{F}(v) := 1 - F(v).$$

Así:

$$\begin{aligned} p_k(a) &= \sum_{t=k}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^t e^{-\lambda t_0}}{t!} \cdot \frac{t! \bar{F}(v)^k F(v)^{t-k}}{k!(t-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda_0} [\lambda t_0 \bar{F}(v)]^k}{k!} \sum_{t=k}^{\infty} \frac{[\lambda t_0 F(v)]^{t-k}}{(t-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda_0} [\lambda t_0 \bar{F}(v)]^k}{k!} e^{\lambda t_0 F(v)} \\ &= \frac{e^{-\lambda_0} [\lambda t_0 \bar{F}(v)]^k}{k!} e^{\lambda t_0 (1 - \bar{F}(v))} \\ &= e^{-\lambda t_0 \bar{F}(v)} \frac{[\lambda t_0 \bar{F}(v)]^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t_0 (\bar{v} - v) / (\bar{v} - v)} \frac{[\lambda t_0 \frac{\bar{v} - v}{\bar{v} - v}]^k}{k!} \quad 0 \leq k < a. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Consideremos ahora el caso en que $k = a$; es decir, los a artículos son vendidos en la subasta. Esto pasa si y sólo si el número de compradores que arriban es más grande ó igual que la cantidad de artículos subastados ($t \geq a$) y existen al menos a ofertas mayores o iguales que v . Así que la probabilidad de que k artículos sean vendidos es

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

$$\begin{aligned}
p_k(a) &= \sum_{t=a}^{\infty} P\{N(t_0) = t\} \\
&\quad \cdot P\{\text{al menos } a \text{ eventos } \{r_1 \geq v\}, \dots, \{r_t \geq v\} \text{ ocurren} | N = t\} \\
&= \sum_{t=a}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^t e^{-\lambda t_0}}{t!} \sum_{m=s}^t \frac{t! \bar{F}(v)^m F(v)^{t-m}}{m!(t-m)!} \\
&= e^{-\lambda t_0} \sum_{m=a}^{+\infty} \sum_{t=m}^{+\infty} \frac{[\lambda t_0 \bar{F}(v)]^m (\lambda t_0 F(v))^{t-m}}{m!(t-m)!} \quad (3.20) \\
&= e^{-\lambda t_0 \bar{F}(v)} \sum_{m=a}^{+\infty} \frac{[\lambda t_0 \bar{F}(v)]^m}{m!} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{a-1} p_k(a).
\end{aligned}$$

Para simplificar la notación, sean $\delta = \lambda t_0 / (\bar{v} - \underline{v})$ y

$$q_m = e^{-\delta(\bar{v}-v)} \frac{[\delta(\bar{v}-v)]^m}{m!}, \quad m \geq 0 \quad (3.21)$$

$$p_a = \sum_{m=a}^{\infty} q_m = 1 - \sum_{m=0}^{a-1} q_m, \quad (3.22)$$

en donde q_m es la probabilidad de que arriben exactamente m compradores cuyas ofertas son más grandes o iguales que v , p_a es la probabilidad de que el número de compradores sea mayor o igual que a , que es el número de artículos vendidos. Entonces la probabilidad de transición $p_{xj}(a)$ es:

$$p_{xj}(a) = \begin{cases} q_{x-j}, & x - a < j \leq x, \\ p_a, & j = x - a, \\ 0, & j < x - a, \text{ ó } j > x. \end{cases} \quad (3.23)$$

Ahora consideremos la función de recompensa $r(x, a)$. Denotamos por b_k a la k -ésima oferta más alta. Como es imposible que la cantidad de artículos subastados sea más grande que el número de compradores, definimos $b_k = 0$ cuando $t < k$, cuya probabilidad es

$$P\{b_k = 0\} = \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} (\lambda t_0)^t e^{-\lambda t_0}.$$

Si $t \geq k$, es obvio que $b_k \in [\underline{v}, \bar{v}]$. Usando fórmula de la probabilidad total, tenemos que

$$P(b_k \geq s) = \sum_{t=k}^{\infty} P(b_k \geq s | N(t_0) = t) P(N(t_0) = t)$$

para $\underline{v} \leq s \leq \bar{v}$. Similarmente a la ecuación 3.21, obtenemos que

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

$$\begin{aligned}
 P(b_k \geq s) &= \sum_{t=k}^{\infty} \frac{(\lambda t_0)^t e^{-\lambda t_0}}{t!} \sum_{m=k}^t \frac{t! \bar{F}(s)^m F(s)^{t-m}}{m!(t-m)!} \\
 &= e^{-\lambda t_0 \bar{F}(s)} \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda t_0 \bar{F}(s))^m}{m!} \\
 &= 1 - e^{-\delta(\bar{v}-s)} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{[\delta(\bar{v}-s)]^m}{m!}, \quad \underline{v} \leq s \leq \bar{v}, \quad k \geq 1.
 \end{aligned}$$

Así, si $k \geq 1$, entonces la k -ésima oferta más alta b_k es una variable aleatoria mixta. Además b_k tiene una masa de $\sum_{t=0}^{k-1} e^{-\lambda t_0} (\lambda t_0)^t / t!$ en cero y es continua en el intervalo $[\underline{v}, \bar{v}]$ con función de distribución

$$P(b_k \leq s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ e^{-\lambda t_0} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t_0)^m}{m!}, & 0 \leq s < \underline{v}, \\ e^{-\delta(\bar{v}-s)} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{[\delta(\bar{v}-s)]^m}{m!}, & \underline{v} \leq s < \bar{v}, \\ 1, & \bar{v} \leq s. \end{cases} \quad (3.24)$$

Debido a que el vendedor establece el precio de reserva v , sólo tenemos en cuenta el llamado “precio comercial” al que el artículo es negociado. Si $k \geq 1$, entonces el k -ésimo precio negociado más grande es denotado por \hat{b}_k , es la k -ésima oferta más alta b_k cuando $b_k \geq v$ y no existe cuando $b_k < v$. Así, el valor esperado del k -ésimo precio negociado más grande es

$$\begin{aligned}
 E[\hat{b}_k] &= P\{b_k \geq v\} \int_v^{\bar{v}} x dP(b_k \leq s | b_k \geq v) \\
 &= \int_v^{\bar{v}} s dP(b_k \leq s) \\
 &= (\bar{v} - v)P(b_k \leq v) - \int_v^{\bar{v}} P(b_k \leq s) ds.
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

De la Ecuación (3.25) tenemos que

$$\int_v^{\bar{v}} P(b_k \leq s) ds = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \int_v^{\bar{v}} e^{-\delta(\bar{v}-s)} [\delta(\bar{v}-s)]^m ds.$$

Sea $y = \delta(\bar{v} - s)$. Entonces $s = \bar{v} - (y/\delta)$, $ds = -(1/\delta)dy$, así, de la Ecuación anterior tenemos

$$\int_v^{\bar{v}} P(b_k \leq s) ds = \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \int_0^{\delta(\bar{v}-v)} e^{-y} y^m dy.$$

Además, para cualquier constante $c > 0$, podemos probar por el método de inducción en el entero $m \geq 1$ que

$$\int_0^c e^{-y} y^m dy = m! - e^{-c} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!} c^l, \quad m \geq 1.$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Así,

$$\begin{aligned}
 \int_v^{\bar{v}} P(b_k \geq s) ds &= \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{k-1} \left[1 - e^{-\delta(\bar{v}-v)} \sum_{l=0}^m \frac{[\delta(\bar{v}-v)]^l}{l!} \right] \\
 &= \frac{k}{\delta} - \frac{e^{-\delta(\bar{v}-v)}}{\delta} \sum_{m=0}^{k-1} (k-m) \frac{[\delta(\bar{v}-v)]^m}{m!} \\
 &= \frac{k}{\delta} - \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{k-1} (k-m) q_m,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

junto con la Ecuación (3.25) y (3.26) implicamos que

$$E[\hat{b}_k] = \bar{v} - \frac{k}{\delta} + \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{k-m}{\delta} - v \right) q_m. \tag{3.27}$$

Así, cuando a artículos son ofrecidos para alguna subasta, los ingresos obtenidos por el vendedor de la subasta (sin incluir a los costos de almacenamiento) es

$$\begin{aligned}
 r(a) &= \sum_{k=1}^a E[\hat{b}_k] \\
 &= \sum_{k=1}^a \left(\bar{v} - \frac{k}{\delta} + \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{k-m}{\delta} - v \right) q_m \right) \\
 &= a\bar{v} - \frac{a(a+1)}{2\delta} + \sum_{m=0}^{a-1} \left(\frac{a-m+1}{2\delta} - v \right) (a-m) q_m.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Así, el beneficio total esperado para una subasta es $r(x, a) = r(a) - xh$.

Definimos a la variable aleatoria ξ_a como el número de artículos subastados cuando a artículos son ofrecidos. Entonces para el periodo n con $a_n = a$, la distribución de probabilidad de ξ_a es $P\{\xi_a = k\} = q_k$ para $k < a$ y $P\{\xi_a = a\} = p_a$. Ciertamente, ξ_a depende de la variable a .

Tenemos que el modelo de decisión de Markov está dado por,

- $E := \{0, \dots, K\}$, es el número de artículos disponibles.
- $A := \{0, \dots, K\}$, es el número de artículos a subastar.
- $D_n(x) := \{0, \dots, x\}$, es el número de artículos asignado a cada subasta.
- $Q_n(B|x, a) := \sum_{j \in B} p_{xj}(a)$, es la probabilidad de que al terminar la subasta el número de artículos sea j dado que al iniciar la subasta el número de artículos es x y el número de artículos subastados es a .
- $r_n(x, a) := r(a) - hx$, es el beneficio esperado para la subasta menos el costo total de almacenamiento en este periodo.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

- $r_0(x, a) := 0$, es la beneficio esperado inicial.
- $\beta = 1$, es el factor de descuento.
- W es el número de subastas, i.e., los periodos para el modelo de decisión de Markov (horizonte).

Sea $V_n(x)$ el máximo beneficio esperado cuando existen n subastas restantes y x artículos en inventario. Así, la ecuación de optimalidad es

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \max_{a=0,1,\dots,x} \left\{ r(a) + \beta \sum_{k=0}^{a-1} q_k V_{n-1}(x-k) + \beta p_a V_{n-1}(x-a) \right\} - xh \\ &= \max_{a=0,1,\dots,x} \left\{ r(a) + \beta EV_{n-1}(x - \xi_a) \right\} - xh, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

con la condición límite $V_0(x) = 0$ para $x \in \{0, 1, \dots, K\}$.

Podemos ver que $V_n(0) = 0$ para $n \in \{1, 2, \dots, W\}$, lo que implica que si no hay artículos restantes, terminarán las subastas secuenciales, independientemente del número de subastas restantes.

3.6.3. Análisis para el precio de reserva anunciado

Cuando el vendedor anuncia el precio de reserva v , los compradores cuya oferta sea menor a la del precio de reserva v , abandonaran la subasta. Los compradores que entienden que el valor del artículo es mas alto que v , estarán dispuestos a hacer una oferta. Llamamos a los compradores que arriban y ofertan por arriba de v “compradores ofertantes”. La siguiente Proposición dice que los compradores ofertantes que arriban también lo hacen de acuerdo a un proceso de Poisson.

Proposición 3.2. *Cuando el precio de reserva es anunciado, tenemos que los compradores ofertantes arriban conforme a un proceso de Poisson con tasa $\lambda \bar{F}(v)$ y la valuación de los artículo son independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[v, \bar{v}]$.*

De la Proposición 3.2, observamos que podemos considerar el proceso de llegada como un caso en donde el precio de reserva del vendedor es cero con tasa de llegada de $\lambda \bar{F}(v)$. Para una subasta fija, si denotamos a N como el número de de compradores ofertantes que arriban, entonces la probabilidad $P\{N(t)\}$ es dada por

$$P\{N = t\} = \frac{1}{t!} (\lambda t_0 \bar{F}(v))^t e^{-\lambda t_0 \bar{F}(v)}, \quad t \geq 0.$$

Supongamos que a artículos están asignados para la subasta. Ahora consideremos la probabilidad $p_k(a)$ de que k artículos sean adquiridos en la subasta.

Primero consideremos el caso $k < a$. Esto significa que k de los a artículos son vendidos, esto ocurre si y sólo si existen exactamente k compradores ofertantes y cada uno adquiere un artículo. Tenemos que

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

$$p_k(a) = \frac{1}{k!} (\lambda t_0 \bar{F}(v))^k e^{-\lambda t_0 \bar{F}(v)} = q_k.$$

Entonces consideremos el caso final de $k = a$. Significa que el número de compradores ofertantes no es menor que a , así

$$p_a(a) = e^{-\lambda t_0 \bar{F}(v)} \sum_{t=s}^{\infty} \frac{1}{t!} (\lambda t_0 \bar{F}(v))^t = p_a.$$

Por lo tanto, la probabilidad de transición $p_{x_j}(a)$ es exactamente la probabilidad de transición de la Ecuación (3.24) para el caso del precio de reserva privado. Esto indica que si anunciamos el precio de reserva, no se afecta la cantidad de artículos subastados.

Ahora, consideremos el precio esperado negociado. Cuando el número de los compradores ofertantes es $t \geq 0$, sus ofertas r_1, \dots, r_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformemente en el intervalo $[v, \bar{v}]$ con función de distribución $F_v(s)$. Sea $r_0 = 0$ cuando no hay ofertas.

Sea b_k^0 el k -ésimo precio negociado más alto, es decir, la k -ésima oferta más grande. Si el número de compradores ofertantes t es menor que k , entonces $b_k^0 = 0$, cuya probabilidad es

$$P\{b_k^0 = 0\} = \sum_{t=0}^{k-1} e^{-\lambda t_0 \bar{F}(v)} \frac{[\lambda t_0 \bar{F}(v)]^t}{t!} = \sum_{t=0}^{k-1} q_t.$$

Si $t \geq k$, entonces $b_k^0 \in [v, \bar{v}]$. Similarmente a las Ecuaciones (3.21) y (3.25), deducimos que

$$P(b_k^0 \geq s) = \sum_{t=0}^{\infty} P(b_k^0 \geq s | N = t) P(N = t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} q_m,$$

para $v \leq s \leq \bar{v}$ y $k \geq 1$.

Así, b_k^0 es una variable aleatoria mixta y su función de distribución es exactamente dada como en la Ecuación (3.25), la función de distribución del k -ésimo precio negociado para el caso del precio de reserva privado. Por lo tanto, la función esperada de ingresos $r(a)$ es también la misma como en el caso del precio de reserva privado (3.29). Así, obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 3.14. *En la subasta secuencial vía internet, el vendedor obtendrá los mismos beneficios esperados si el precio de reserva es privado o público (anunciado). Además, el beneficio máximo esperado $V_n(x)$ para el vendedor satisface la Ecuación de optimalidad (3.30) con la correspondiente condición límite y cualquier política que alcanza su máximo en la Ecuación (3.30) es óptima.*

3.6.4. Propiedades de monotonía

A continuación estudiaremos algunas propiedades de monotonía de las políticas óptimas junto con el valor óptimo. Primero, tenemos la siguiente propiedad de la función de ingresos.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Proposición 3.3. *La función de ingresos $r(a)$ es estrictamente cóncava y creciente en a .*

Demostración: Sean

$$\Delta r(a) := r(a) - r(a-1), \quad \Delta^2 r(a) := \Delta r(a) - \Delta r(a-1), \quad a \geq 1,$$

las diferencias de primer y segundo orden de la función de ingresos. Entonces debido a la Ecuación (3.29),

$$\Delta r(s) = \bar{v} - \frac{a}{\delta} \sum_{m=a}^{\infty} q_m - v \sum_{m=0}^{a-1} q_m - \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{a-1} m q_m$$

y

$$\begin{aligned} \Delta^2 r(s) &= \bar{v} - \frac{a}{\delta} + \sum_{m=0}^{a-1} \left(\frac{a-m}{\delta} - v \right) q_m \\ &\quad - \bar{v} + \frac{a-1}{\delta} - \sum_{m=0}^{a-2} \left(\frac{a-1-m}{\delta} - v \right) q_m \\ &= -\frac{1}{\delta} - v q_{a-1} + \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{a-1} q_m \\ &= -\frac{1}{\delta} \left\{ 1 + \delta v q_{a-1} - \sum_{m=0}^{a-1} q_m \right\} \\ &= -\frac{1}{\delta} p_a - v q_{a-1} < 0. \end{aligned}$$

Así, $r(a)$ es estrictamente cóncavo en a . Además,

$$\begin{aligned} \Delta r(\infty) := \lim_{a \rightarrow \infty} \Delta r(a) &= \bar{v} - v - \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{\infty} m q_m \\ &= \bar{v} - v - \frac{1}{\delta} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\delta(\bar{v}-v)} \frac{[\delta(\bar{v}-v)]^m}{m!} m \\ &= \bar{v} - v - \frac{1}{\delta} e^{-\delta(\bar{v}-v)} \delta(\bar{v}-v) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\delta(\bar{v}-v)]^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \bar{v} - v - \frac{1}{\delta} e^{-\delta(\bar{v}-v)} \delta(\bar{v}-v) e^{\delta(\bar{v}-v)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

que junto con la concavidad de $r(a)$ implicamos que $\Delta r(a) > 0$ y por lo tanto $r(a)$ es estrictamente creciente en a ■

Sea

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

$$\begin{aligned} V_n(x, a) &:= r(a) - xh + \beta \sum_{k=0}^{a-1} q_k V_{n-1}(x - k) + \beta p_a V_{n-1}(x - a) \\ &= r(a) + \beta E[V_{n+1}(x - \xi_a)] - xh. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esto representa el beneficio total esperado descontado cuando x artículos están en inventario y quedan n subastas con a artículos ofrecidos para la subasta actual. Además, se cumple que

$$\begin{aligned} \Delta_x V_n(x, a) &= V_n(x, a) - V_n(x - 1, a), \\ \Delta_a V_n(x, a) &= V_n(x, a) - V_n(x, a - 1), \end{aligned}$$

representa la diferencia del primer orden de $V_n(x, a)$ en x y a , respectivamente. Entonces definimos

$$a_n^*(x) = \text{máx}\{a \mid \Delta_a V_n(x, a) \geq 0, \quad a = 1, 2, \dots, x\}. \quad (3.31)$$

Después mostramos que la política óptima es asignada a una cantidad de $a_n^*(x)$ para la n -ésima subasta cuando existen x artículos en el inventario. Es decir, la política óptima puede caracterizarse por $a_n^*(x)$.

Para alguna constante $\alpha > 0$, tenemos que

$$f(x, \lambda) = \sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \alpha \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Lema 3.2. $f(x, \lambda)$ es no negativa para cualquier $x = 0, 1, 2, \dots$ y $\lambda \geq 0$ si $e^\lambda - 1 - \alpha \geq 0$.

Demostración: Es fácil ver que $f'_\lambda(x + 1, \lambda) = f(x, \lambda)$ para $x \geq 0$. Ahora, dado que la condición $f(0, \lambda) = e^\lambda - 1 - \alpha \geq 0$ junto con la fórmula de arriba implicamos que $f'_\lambda(1, \lambda) = f(0, \lambda) \geq 0$. Así, $f(1, \lambda)$ es creciente en λ y $f(1, 0) = 0$. Por lo tanto, $f(1, \lambda) \geq 0$.

Volviendo hacer el proceso obtenemos que $f'_\lambda(2, \lambda) = f(1, \lambda) \geq 0$, así por lo que repitiendo el proceso obtenemos el lema. ■

La siguiente Proposición es acerca de la cota superior en el beneficio máximo cuando un artículo es agregado.

Proposición 3.4. $V_n(x) - V_n(x - 1) \leq \bar{v}$ para cualquier n, x .

Demostración: Supongamos que π^* es una política óptima para $V_n(x)$; es decir, el beneficio total esperado bajo la política π^* , denotamos por $V_n(\pi^*, x)$ igual a $V_n(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} V_n(x) - V_n(x - 1) &= V_n(\pi^*, x) - V_n(x - 1) \\ &\leq V_n(\pi^*, i) - V_n(\pi^*, x - 1). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Consideremos un escenario donde además del artículo $x - 1$, otro nuevo artículo es agregado. Entonces el mejor caso posible es que sin influir en la política original, este nuevo artículo es subastado en la primera subasta en el precio más grande \bar{v} sin incurrir en ningún costo de mantenimiento o descuento de su valor. Así $V_n(\pi^*, x) - V_n(\pi^*, x - 1) \leq \bar{v}$. ■

La Proposición anterior es intuitiva porque cada artículo puede ser subastado con el precio \bar{v} .

Proposición 3.5. $V_n(x, a)$ es cóncava en a si $V_{n-1}(x)$ es cóncava en x .

Demostración: Seguimos de la Ecuación (3.32) que

$$\begin{aligned} \Delta_a V_n(x, a) &= \Delta r(a) + \beta E[V_{n-1}(x - \xi_a) - V_{n-1}(x - \xi_{a-1})] \\ &= \Delta r(a) + \beta p_a \Delta_x V_{n-1}(x - a + 1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta_a^2 V_n(x, a) &:= \Delta_a V_n(x, a) - \Delta_a V_n(x, a - 1) \\ &= \Delta^2 r(a) - \beta p_a \Delta_x V_{n-1}(x - a + 1) \\ &\quad + \beta p_{a-1} \Delta_x V_{n-1}(x - a + 2) \\ &= \Delta^2 r(a) + \beta p_{a-1} \Delta^2 V_{n-1}(x - a + 2) \\ &\quad + \beta q_{a-1} \Delta_x V_{n-1}(x - a + 1). \end{aligned}$$

Debido a la condición dada en la Proposición, es suficiente mostrar que la suma del primer y tercer término del lado derecho de la parte de arriba es negativo. Porque $e^x \geq x + 1$ para cada $x \geq 0$, tenemos que

$$e^{\delta(\bar{v}-v)} \geq \delta(\bar{v} - v) + 1 \geq \delta(\beta\bar{v} - v) + 1.$$

A continuación dejando $\alpha = \delta(\beta\bar{v} - v)$, debido a la Ecuación (3.31) y por el Lema 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta^2 r(a) + \beta q_{a-1} \Delta_x V_{n-1}(x - a + 1) &\leq -\frac{1}{\delta} p_a - v q_{a-1} + \beta q_{a-1} \bar{v} \\ &\leq (\beta\bar{v} - \frac{\alpha}{\delta} - v) q_{a-1} = 0 \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.33)$$

Con la Proposición anterior sabemos que $V_n(x) = V_n(x, a_n^*(x))$ y así $a_n^*(x)$ es la cantidad óptima en la n -ésima subasta cuando x artículos restan si $V_{n-1}(x)$ es cóncava en x .

Proposición 3.6. Si $V_{n-1}(x)$ es cóncava en x , entonces $V_n(x, a)$ es supermodular en (x, a) y por lo tanto $a_n^*(x)$ es creciente en x .

Demostración: Debido a la Ecuación (3.33), tenemos

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

$$\begin{aligned}
\Delta_x \Delta_a V_n(x, a) &= \Delta_a V_n(x, a) - \Delta_s V_n(x-1, a) \\
&= -\beta p_s \Delta_x V_{n-1}(x-a+1) + \beta p_a \Delta_x V_{n-1}(x-a) \\
&= -\beta p_s \Delta_x^2 V_{n-1}(x-a+1) \geq 0,
\end{aligned}$$

porque $V_{n-1}(x)$ es cóncava en x . Por lo tanto, $V_n(x, a)$ es supermodular. Por los Teoremas 3.1 y 3.2 de Hu y Liu [25], sabemos que $a_n^*(x)$ es creciente en x ■

Tenemos además la siguiente Proposición.

Proposición 3.7. *Si $V_{n-1}(x)$ es cóncava en x , entonces $a_n^*(x) \leq a_n^*(x+1) \leq a_n^*(x) + 1$ para cualquier x .*

Demostración: La primera desigualdad la obtenemos siguiendo la Proposición 3.6, para mostrar la segunda desigualdad es suficiente mostrar que $\Delta_a V_n(x+1, a^*+2) < 0$ en donde $a^* := a_n^*(x)$ para una notación más conveniente. De la Ecuación (3.33), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_a V_n(x+1, a^*+2) &= \Delta r(a^*+2) - \beta p_{a^*+2} \Delta_x V_{n-1}(x-a^*) \\
&= \Delta^2 r(a^*+2) + \Delta r(a^*+1) - \beta(p_{s^*+1} - q_{a^*+1}) \Delta_x V_{n-1}(x-a^*) \\
&= \Delta_s V_n(x, a^*+1) + \Delta^2 r(a^*+2) + \beta q_{a^*+1} \Delta_i V_{n-1}(x-a^*).
\end{aligned}$$

Entonces $\Delta_x V_n(x, a^*+1) < 0$ y $\Delta^2 r(a^*+2) + \beta q_{a^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x-a^*) \leq 0$ por la Ecuación (3.34) ■

Teorema 3.15. *$V_n(x)$ es cóncava en x para cada $n \geq 1$, así $a_n^*(x)$ es creciente en x .*

Demostración: La demostración la haremos por inducción. Se sigue de la Proposición 3.3 que

$$V_1(x) = \max_{a=0,1,2,\dots,x} r(a) = r(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Así, $V_1(x)$ es cóncava en x .

Suponemos que $V_{n-1}(x)$ es cóncava en x para algún $n > 1$. Entonces de la Proposición 3.6, sabemos que $V_n(x, a)$ es supermodular en (x, a) . A continuación, mostraremos que $V_n(x)$ es cóncava en x .

Primero, debemos notar que si $a_n^*(x) = a_n^*(x-1) = a^*$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_x V_n(x) &= V_n(x, a^*) - V_n(x-1, a^*) \\
&= -h + \beta E[V_{n-1}(x - \xi_{a^*}) - V_{n-1}(x-1)] \\
&= -h + \beta E \Delta_x V_{n-1}(x - \xi_{a^*}) \\
&= -h + \beta \sum_{k=0}^{a^*-1} q_k \Delta_x V_{n-1}(x-k) + \beta \sum_{k=a^*}^{\infty} q_k \Delta_x V_{n-1}(x-a^*),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

mientras que si $a_n^*(x) = a^* + 1$ y $a_n^*(x - 1) = a^*$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta_x V_n(x) &= V_n(x, a^* + 1) - V_n(x - 1, a^*) \\ &= \Delta r(a^* + 1) - h + \beta E[V_{n-1}(x - \xi_{a^*+1}) - V_{n-1}(x - 1 - \xi_{a^*})] \\ &= \Delta r(a^* + 1) - h + \beta \sum_{k=0}^{a^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k).\end{aligned}\tag{3.35}$$

Basándose en la Proposición 3.7, mostraremos que $\Delta_x^2 V_n(x) \leq 0$ para los siguientes cuatro casos, donde denotaremos $a_n^*(x - 2) = a^*$ por conveniencia.

- **Caso 1:** $a_n^*(x) = a_n^*(x - 1) = a_n^*(x - 2) = a^*$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta_x^2 V_n(x) &= \Delta_x V_n(x) - \Delta_x V_n(x - 1) \\ &= \beta E[\Delta_x V_{n-1}(x - \xi_{a^*}) - \Delta_x V_{n-1}(x - 1 - \xi_{a^*})] \\ &= \beta E \Delta_x^2 V_{n-1}(x - \xi_{a^*}) \leq 0,\end{aligned}$$

porque V_{n-1} es cóncava en x .

- **Caso 2:** $a_n^*(x) = a_n^*(x - 1) = a_n^*(x - 2) + 1 = a^* + 1$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta_x^2 V_n(x) &= \beta E \Delta_x V_{n-1}(x - \xi_{a^*+1}) - \Delta r(a^* + 1) \\ &\quad - \beta E[V_{n-1}(x - 1 - \xi_{a^*+1}) - V_{n-1}(x - 2 - \xi_{a^*})] \\ &= \beta E \Delta_x^2 V_{n-1}(x - \xi_{a^*+1}) - \Delta r(a^* + 1) \\ &\quad - \beta E[V_{n-1}(x - 2 - \xi_{a^*+1}) - V_{n-1}(x - 2 - \xi_{a^*})] \\ &= \beta E \Delta_x^2 V_{n-1}(x - \xi_{a^*+1}) - \Delta_a V_n(x - 2, a^* + 1) \leq 0,\end{aligned}$$

donde la igualdad se obtiene de la Ecuación (3.33) y la desigualdad se obtiene de $a^* = a_n^*(x - 1)$ y la concavidad de $V_{n-1}(x)$.

- **Caso 3:** $a_n^*(x) = a_n^*(x - 1) + 1 = a_n^*(x - 2) + 1 = a^* + 1$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta_x^2 V_n(x) &= \Delta r(a^* + 1) + \beta \sum_{k=0}^{a^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) \\ &\quad - \beta \sum_{k=0}^{a^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - 1 - k) \\ &\quad - \beta \sum_{k=a^*+1}^{\infty} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - 1 - a^*) \\ &= \Delta r(a^* + 1) - \beta p_{a^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a^* - 1) \\ &\quad + \beta p_{a^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a^* - 1) \\ &\quad + \beta \sum_{k=0}^{a^*} q_k \Delta_x^2 V_{n-1}(x - k) - \beta p_{a^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - 1 - a^*) \\ &= \Delta_a V_{n-1}(x - 1, a^* + 1) + \beta \sum_{k=0}^{a^*} q_k \Delta_x^2 V_{n-1}(x - k) \leq 0,\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

donde la desigualdad se obtiene de la definición de $a_n^*(x-1) = a^*$ y la concavidad de $V_{n-1}(x)$ en x .

- **Caso 4:** $a_n^*(x) = a_n^*(x-1) + 1 = a_n^*(x-2) + 2 = a^* + 2$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta_x^2 V_n(x) &= \Delta^2 r(a^* + 2) + \beta E[V_{n-1}(x - \xi_{a^*+2}) - V_{n-1}(x - 1 - \xi_{a^*+1})] \\ &\quad - \beta E_\xi[V_{n-1}(x - 1 - \xi_{a^*+1}) - V_{n-1}(x - 2 - \xi_{a^*})] \\ &= \Delta_a^2 r(a^*) \beta \sum_{k=0}^{a^*} q_k \Delta_x^2 V_{n-1}(x - k) + \beta q_{a^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a^*) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

que puede ser demostrado como en la Proposición 3.5 ■

El Teorema anterior concluye que cuanto mayor sea el número de artículos, mayor será el número de artículos que se asignarán a cada subasta. El siguiente Teorema afirma que a menor número de etapas, menor será el número de artículos asignados a cada subasta.

Consideremos

$$x^* = \text{máx}\{x | \Delta r(x) \geq h\}.$$

Debido a la proposición 3.3 sabemos que $\Delta r(x) \geq h$ si y sólo si $x \leq x^*$. En general, h es pequeña y x^* puede ser grande, mientras que en los problemas de gestión del rendimiento h es cero y x^* es infinito [26].

Teorema 3.16. $a_n^*(x)$ es decreciente en n para cada $x \leq x^*$.

Demostración: Es suficiente mostrar que $V_n(x, a)$ es submodular en (n, a) ; es decir,

$$\Delta_n \Delta_a V_n(x, a) := \Delta_a V_n(x, a) - \Delta_a V_{n-1}(x, a) \leq 0$$

para cualquier n, x, a . De la Ecuación (3.33) tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_n \Delta_a V_n(x, a) &= -\beta p_a \Delta_x V_{n-1}(x - a + 1) + \beta p_a \Delta_i V_{n-2}(x - a + 1) \\ &= -\beta p_a \Delta_n \Delta_i V_{n-1}(x - a + 1). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Así, es suficiente mostrar que $\Delta_n \Delta_x \leq 0$ para cualquier n, x que se hace por el método de inducción sobre n a continuación.

Para $n = 1$, $\Delta_n \Delta_x V_1(x) = \Delta_x V_1(x) = \Delta r(x) - h \geq 0$ para $x \leq x^*$ por la Proposición 3.3.

Supongamos que para algún $n \geq 2$, $\Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x) \geq 0$ para $x \leq x^*$. Entonces de la Ecuación (3.37), $\Delta_n \Delta_a V_n(x, a) \leq 0$ y por lo tanto, $a_n^*(x) \leq a_{n-1}^*(x)$ para $x \leq x^*$.

Ahora mostremos que $\Delta_n \Delta_x V_n(x) \geq 0$ para $x \leq x^*$. Para cualquier $x \leq x^*$ dado, denotamos $a_n^* = a_n^*(x-1)$ y $a_{n-1}^* = a_{n-1}^*(x-1)$ por conveniencia. De la suposición de inducción, $a_n^* \leq a_{n-1}^*$. Mostraremos que $\Delta_n \Delta_x V_n(x) \geq 0$ para los siguientes cuatro casos.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

- **Caso 1:** $a_n^*(x) = a_n^* + 1$, $a_{n-1}^* = a_{n-1}^* + 1$ en este caso podemos obtener de la Ecuación (3.36) que

$$\begin{aligned}
\Delta_n \Delta_x V_n(x) &= \Delta_x V_n(x) - \Delta_x V_{n-1}(x) \\
&= \Delta r(a_n^* + 1) + \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) \\
&\quad - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k) \\
&= - \sum_{k=a_n^*+2}^{a_{n-1}^*+1} \Delta^2 r(k) + \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - k) \\
&\quad - \beta \sum_{k=a_n^*+1}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k) \\
&= \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - k) - \sum_{k=a_n^*+2}^{a_n^*+1} \Delta^2 r(k) \\
&\quad - \beta \sum_{k=a_n^*+2}^{a_{n-1}^*+1} q_{k-1} \Delta_x V_{n-2}(x - k + 1) \\
&= \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - k) \\
&\quad - \sum_{k=a_n^*+2}^{a_{n-1}^*+1} \{\Delta^2 r(k) + \beta q_{k-1} \Delta_x V_{n-2}(x - k + 1)\},
\end{aligned}$$

que es no negativa por la suposición inductiva y la Ecuación (3.34).

- **Caso 2:** $a_n^*(x) = a_n^* + 1$, $a_{n-1}^* = a_{n-1}^*$. En este caso, debido a la Ecuación (3.35) y (3.36), sabemos que

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

$$\begin{aligned}
\Delta_n \Delta_x V_n(x) &= \Delta r(a_n^* + 1) + \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) \\
&\quad - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k) - \beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_x V_{n-2}(x - a_{n-1}^*) \\
&= \Delta r(a_{n-1}^* + 1) - \beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a_{n-1}^*) \\
&\quad + \beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - a_{n-1}^*) + \Delta r(a_n^* + 1) - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) \\
&\quad + \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k) \\
&= \Delta_s V_n(x, a_{n-1}^* + 1) + \beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - a_{n-1}^*) \\
&\quad + \Delta r(a_n^* + 1) - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) + \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) \\
&\quad - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k).
\end{aligned}$$

En el lado derecho de la ecuación de arriba, el primer término $\Delta_a V_n(x, a_{n-1}^* + 1)$ es no negativo ya que $a_n^*(x) = a_n^* + 1 \leq a_{n-1}^* + 1$, el segundo término $\beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - a_{n-1}^*)$ es también no negativa debido a la suposición inductiva $\Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - a_{n-1}^*) \geq 0$ y que el término restante

$$\Delta r(a_n^* + 1) - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) + \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k),$$

es no negativo puede probarse exactamente como en el caso 1. Así, $\Delta_n \Delta_x V_n(x) \geq 0$.

- **Caso 3:** $a_n^*(x) = a_n^*$, $a_{n-1}^* = a_{n-1}^* + 1$. De la Ecuación (3.35) y (3.36), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_n \Delta_x V_n(x) &= \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) + \beta p_{a_n^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a_n^*) \\
&\quad - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k) \\
&= -\Delta r(a_n^* + 1) + \beta p_{a_n^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a_n^*) + \Delta r(a_n^* + 1) \\
&\quad - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) + \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \\
&\quad \Delta_x V_{n-2}(x - k).
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Para el primer término en el lado derecho de la ecuación anterior, tenemos de la Ecuación (3.33) y de la definición de $a_n^*(x)$ que

$$\begin{aligned} -\Delta r(a_n^* + 1) + \beta p_{a_n^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a_n^*) + \Delta r(a_n^* + 1) - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) \\ = -\Delta_a V_n(x, a_n^* + 1) > 0 \end{aligned}$$

el segundo término $\beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k)$ es exactamente $\Delta_n \Delta_x V_n(x)$ del caso 1 que es no negativo. Así $\Delta_n \Delta_x V_n(x) \geq 0$.

- **Caso 4:** $a_n^*(x) = a_n^*$, $a_{n-1}^* = a_{n-1}^*$. Este caso se debe a la Ecuación (3.35), entonces

$$\begin{aligned} \Delta_n \Delta_x V_n(x) &= \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_i V_{n-1}(x - k) + \beta p_{a_n^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a_n^*) \\ &\quad - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k) - \beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_x V_{n-2}(x - a_{n-1}^*) \\ &= -\Delta r(a_n^* + 1) + \beta p_{a_n^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a_n^*) + \Delta r(a_n^* + 1) \\ &\quad - \beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_x V_{n-1}(x - a_{n-1}^*) + \beta p_{a_{n-1}^*+1} \Delta_n \Delta_x V_{n-1}(x - a_{n-1}^*) \\ &\quad + \Delta r(a_n^* + 1) - \Delta r(a_{n-1}^* + 1) \\ &\quad + \beta \sum_{k=0}^{a_n^*} q_k \Delta_x V_{n-1}(x - k) - \beta \sum_{k=0}^{a_{n-1}^*} q_k \Delta_x V_{n-2}(x - k). \end{aligned}$$

Entonces la no negatividad de $\Delta_n \Delta_x V_n(x)$ puede ser probada de forma similar a los casos 2 y 3 ■

Hemos conseguido dos resultados analíticos para la asignación óptima de las subastas secuenciales en internet. El primero es que no existe diferencia si el precio de reserva es privado o público Teorema 3.14. El segundo resultado es acerca de la propiedades de monotonía de la política óptima Teoremas 3.15 y 3.16.

3.6.5. Resultados numéricos

En [8] se discutió un problema de asignación óptima similar al aquí presentado. Pero asumiendo que todos los artículos son ofertados en cada subasta. Bajo esta suposición, se formuló el problema de programación dinámica determinista con horizonte finito y calcularon su solución para un ejemplo basado en eBay. Sin duda, la suposición es un tanto restrictiva.

Los siguientes parámetros se eligieron con fines ilustrativos. Consideremos seis subastas consecutivas de aparatos electrónicos con los siguientes datos:

1. El vendedor abre un máximo de 6 subastas para cada envío, la duración de cada subasta es de 1.6 días. Inicialmente, la cantidad total de artículos es de 40. Es decir, $W = 6$, $t_0 = 1.6$, $k = 40$ y $T = 10$.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

2. El costo de almacenamiento de cada artículo por subasta es de \$0.15, es decir, $h = 0.15$.
3. Los compradores arriban con una tasa de $\lambda = 16.7$.
4. Las ofertas tienden a distribuirse uniformemente en el intervalo $[85, 160]$, así $\underline{v} = 85$, $\bar{v} = 160$.
5. También suponemos (como en [8]), que el precio de reserva es igual a cero; es decir, $v = 0$.

Substituyendo estos parámetros en las Ecuaciones (3.24) y (3.29), obtenemos la probabilidad de transición $p_{xj}(a)$ y la función de recompensa $r(a)$. Entonces resolviendo la Ecuación (3.30) podemos calcular la función de valor óptimo y al resolver la Ecuación (3.32) calculamos la política óptima.

El máximo beneficio total calculado aquí es $V_6(40) = \$5964.6$. La cantidad óptima a subastar es dada por $a_n^*(x)$ para cada n y x , que se muestra en la Figura 3.2. Podemos ver que para el periodo $n = 1$, el número óptimo de ofertas $a_1^*(x)$ es exactamente x . Para los siguientes periodos ($n \geq 2$), el número óptimo de ofertas $a_n^*(x)$ es una función creciente escalonada con longitud de exactamente n . Así, puede escribirse como

$$a_n^*(x) = \left\lfloor \frac{(x+1)}{n} \right\rfloor + 1,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es definido como el mayor entero positivo no más grande que x . De esta definición, suponemos que esta fórmula es verdadera para casos generales. Por otro lado, se observa que $a_n^*(x)$ es decreciente en n (Figura 3.4). Esto muestra los resultados de los Teoremas 3.15 y 3.16.

Podemos analizar además la influencia de los parámetros en el máximo beneficio total para el vendedor.

En la Tabla 3.1 se muestran los valores de asignación óptima obtenidos en cada etapa, de estos valores obtenemos también a la Figura 3.2, es decir las acciones con respecto a la cantidad de artículos.

Primero, la tasa de llegada λ significa el número esperado de llegada de compradores por hora. De esto se puede conjeturar que $V_n(x)$ es creciente en λ . En la Figura 3.3 se muestra $\{V_n(40), n = 1, 2, \dots, 6\}$ para $\lambda = 4.7, 8.7, 13.7, 16.7$ respectivamente, en donde se ilustra que $V_n(40)$ es creciente en λ .

$V_6(40)$ es una función de v , este hecho se ilustra en la Figura 3.4 y se observa. En la Tabla 3.2 se muestran los valores del máximo beneficio total con respecto de la tasa de llegada λ de los compradores en cada una de las etapas de la subastas.

En la Tabla 3.3 se muestra como afecta el precio de reserva al máximo beneficio total o con respecto de la tasa de llegada de los compradores λ .

De la Figura 3.3, podemos ver que $V_6(40) = 5964.6$ es constante para $85 \leq v \leq 102$ y aumenta cuando $v > 102$, decrece despacio cuando $v > 135$ y rápidamente cuando $v > 144$. Para $v = 135$, $V_3(40) = 5614.8$, que es un poco menor que el valor máximo 5964.6. Por lo que sólo un precio de reserva muy grande influirá en el beneficio total

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

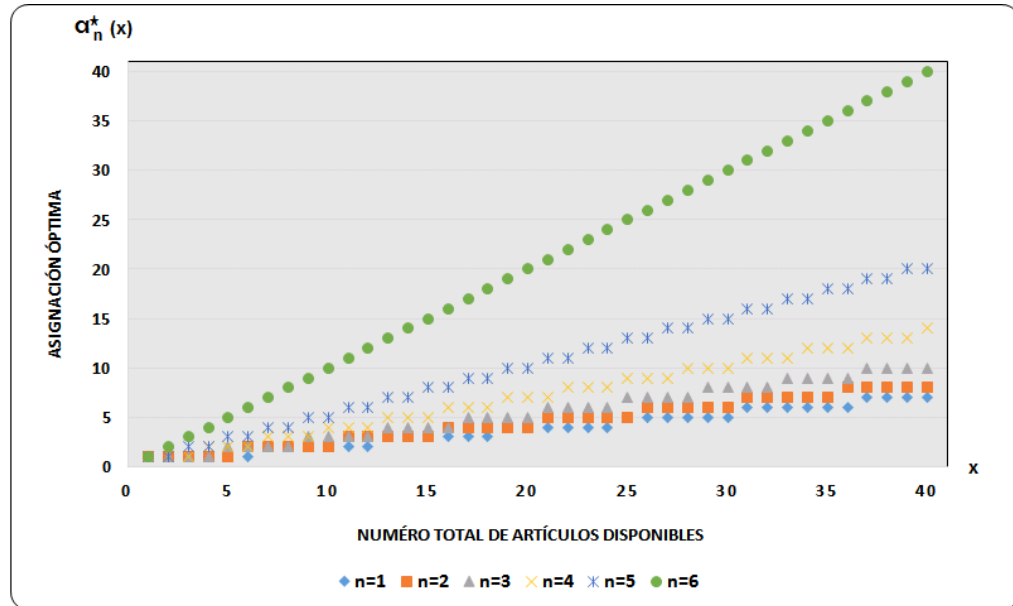


Figura 3.2: Asignación óptima $a_n^*(x)$ vs número total de artículos disponibles en n .

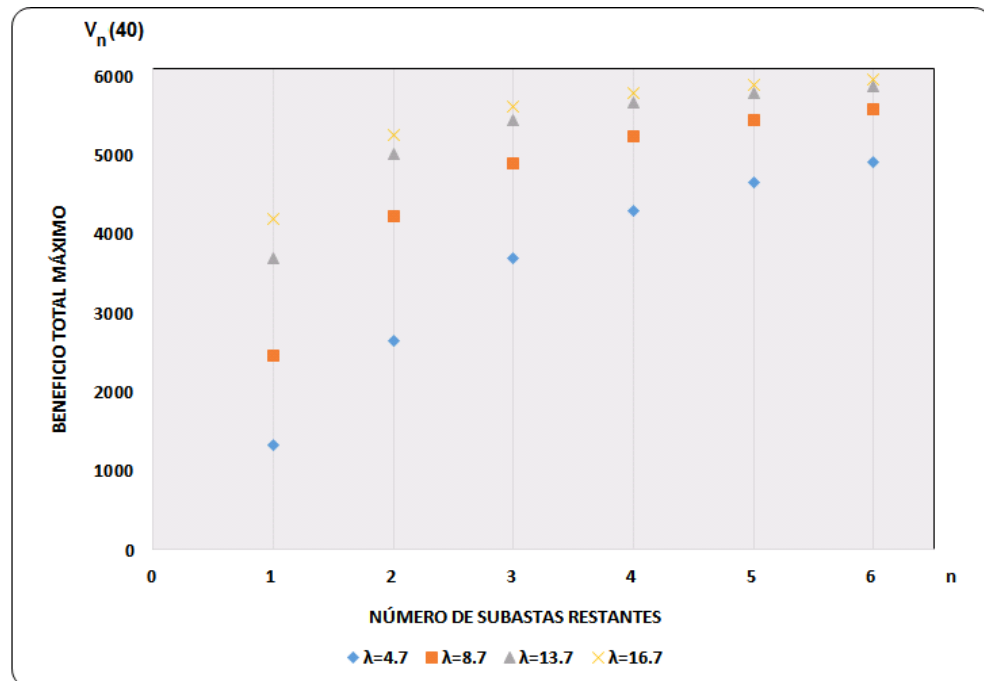


Figura 3.3: Máximo beneficio total esperado $V_n(40)$ vs número de subastas restantes en λ .

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Tabla 3.1: Asignación óptima.

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	2	3
1	1	1	2	2	4
1	1	2	2	3	5
1	2	2	2	3	6
2	2	2	3	4	7
2	2	2	3	4	8
2	2	3	3	5	9
2	2	3	4	5	10
2	3	3	4	6	11
2	3	3	4	6	12
3	3	4	5	7	13
3	3	4	5	7	14
3	3	4	5	8	15
3	4	4	6	8	16
3	4	5	6	9	17
3	4	5	6	9	18
4	4	5	7	10	19
4	4	5	7	10	20
4	5	6	7	11	21
4	5	6	8	11	22
4	5	6	8	12	23
4	5	6	8	12	24
5	5	7	9	13	25
5	6	7	9	13	26
5	6	7	9	14	27
5	6	7	10	14	28
5	6	8	10	15	29
5	6	8	10	15	30
6	7	8	11	16	31
6	7	8	11	16	32
6	7	9	11	17	33
6	7	9	12	17	34
6	7	9	12	18	35
6	8	9	12	18	36
7	8	10	13	19	37
7	8	10	13	19	38
7	8	10	13	20	39
7	8	10	14	20	40

esperado del vendedor. Esto es porque el número de compradores que llegan es más grande. De hecho, el número promedio de compradores que arriban durante todo

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Tabla 3.2: Máximo beneficio total.

n	$\lambda = 4.7$	$\lambda = 8.7$	$\lambda = 13.7$	$\lambda = 16.7$
1	1330.9	2467.2	3703.8	4184.5
2	2656.7	4220.8	5011.4	5259.3
3	3695.3	4903.7	5445.4	5614.8
4	4291.2	5247.1	5662.4	5792.2
5	4662.3	5451	5790.8	5897
6	4906.8	5583	5873.8	5964.6

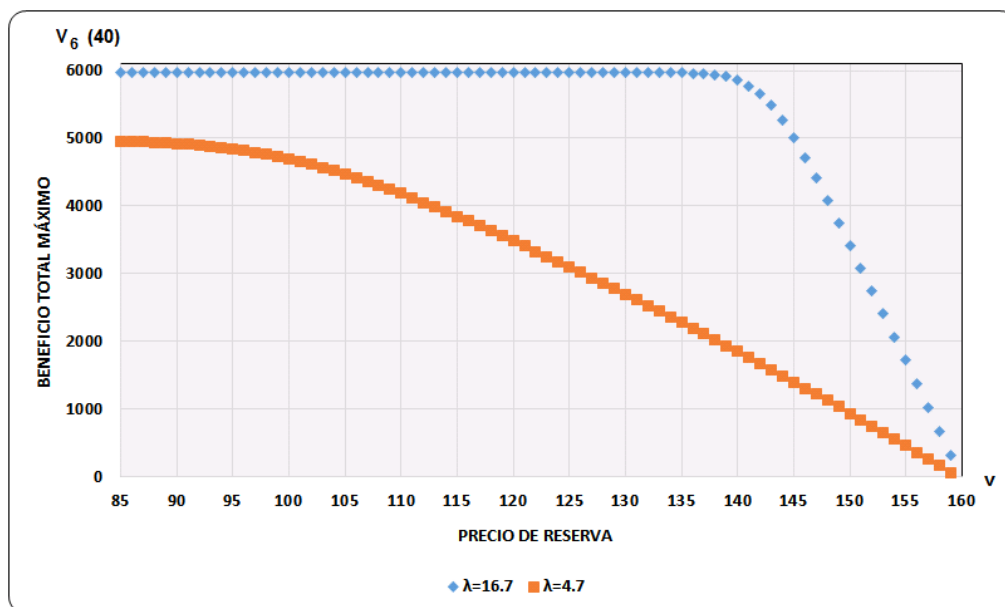


Figura 3.4: Máximo beneficio total esperado $V_6(40)$ vs precio de reserva en λ .

el período es $\lambda \cdot T = 16.7 \times 10 = 167$, aunque sólo hay 40 artículos. Esto puede verse también en la Figura 3.4 en donde la tasa de llegada es $\lambda = 4.7$. En este caso, un precio de reserva menor influirá en el beneficio total esperado del vendedor. Además, si el vendedor debe pagar los costos de los artículos cuando recibe los envíos, entonces su máximo beneficio total se incrementará con el precio de reserva inicial y después de alcanzar el valor máximo se reducirá con v . Esto revela un problema asociado con el precio de reserva óptima, que es un tema para futuras investigaciones [26].

Finalmente, cuando $\lambda = 16.7$, tenemos aproximadamente que $V_3(40) = V_6(40)$, que implica que tres períodos de subastas son suficientes y las dos restantes subastas se podrían utilizar para subastar otros artículos.

CAPÍTULO 3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN FINANCIEROS
3.6. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE SUBASTAS SECUENCIALES EN LÍNEA

Tabla 3.3: Máximo beneficio total y precio de reserva.

v	$\lambda = 16.7$	$\lambda = 4.7$	v	$\lambda = 16.7$	$\lambda = 4.7$
85	5964.6	4955.9	123	5965.9	3253.5
86	5964.6	4952	124	5966	3175.9
87	5964.6	4946.9	125	5966.2	3097.7
88	5964.6	4940.6	126	5966.2	3018.8
89	5964.6	4932.7	127	5966.5	2939.3
90	5964.6	4923.1	128	5966.9	2859.2
91	5964.6	4911.7	129	5967.3	2778.4
92	5964.6	4898.3	130	5967.5	2697
93	5964.6	4882.6	131	5967.9	2615
94	5964.6	4864.6	132	5968	2532.4
95	5964.6	4843.9	133	5968.2	2449.1
96	5964.6	4820.5	134	5968.1	2365.2
97	5964.6	4794.2	135	5966.8	2280.7
98	5964.6	4764.9	136	5963.4	2195.6
99	5964.64	4732.6	137	5955.9	2109.8
100	5964.6	4697.1	138	5940.8	2023.4
101	5964.6	4658.5	139	5911.4	1936.4
102	5964.6	4616.9	140	5859.8	1848.7
103	5964.7	4572.2	141	5776.7	1760.4
104	5964.7	4524.5	142	5653.2	1671.5
105	5964.7	4474	143	5483.8	1582
106	5964.7	4420.8	144	5267.7	1491.8
107	5964.7	4365	145	5010.2	1401
108	5964.7	4306.8	146	4720.6	1309.6
109	5964.7	4246.5	147	4409.8	1217.6
110	5964.7	4184	148	4086.6	1124.9
111	5964.8	4119.8	149	3756.9	1031.6
112	5964.8	4053.8	150	3423.6	937.6
113	5964.9	3986.3	151	3087.7	843.1
114	5964.9	3917.5	152	2749.6	747.9
115	5965	3847.4	153	2409.2	652.1
116	5965	3776.2	154	2066.5	555.7
117	5965.1	3704	155	1721.7	458.6
118	5965.2	3630.8	156	1374.6	360.9
119	5965.3	3556.9	157	1025.3	262.6
120	5965.5	3482.1	158	673.7	163.7
121	5965.6	3406.6	159	319.9	64.1
122	5965.7	3330.4	160	-36	-36

Capítulo 4

Conclusiones

Este trabajo está relacionado con la teoría de los procesos de decisión de Markov (PDM). En el se trabajaron problemas a tiempo discreto, con horizonte finito. El criterio de rendimiento que se utilizó para evaluar la calidad de las políticas admisibles fue el de costo total esperado.

Uno de los principales objetivos de la ciencia de datos es ayudar a que tomemos mejores decisiones. Los procesos de decisión de Markov proporcionan un sistema muy útil para crear e implementar un proceso de toma de decisiones con varios escenarios posibles donde los resultados son en parte al azar. Los procesos de decisión de Markov pueden ayudar a hacer predicciones para el futuro, basándose en datos actuales, datos pasados y probables condiciones futuras. Los PDM tienen muchas aplicaciones en el mundo real especialmente en Economía y Finanzas como lo hemos visto.

Los procesos de decisión de Markov son realmente importantes ya que aparecen con bastante frecuencia en la practica. Debido a que éstos utilizan muchas herramientas matemáticas para su solución, si bien la teoría expuesta en este trabajo puede ser encontrada en los libros que se hace referencia en la bibliografía, el mérito de este trabajo es la forma en que desarrollamos algunos cálculos que algunos autores dan por hecho y el tratar de explicar de forma clara y concisa la interrelación entre la teoría de decisión de Markov y la programación dinámica, así como de la importancia del supuesto de integrabilidad para que cualquier esperanza esté bien definida y el supuesto de estructura para que nuestro problema y su solución esté bien definida.

A lo largo del trabajo se obtuvo lo siguiente,

- El problema recursivo simplifica la formulación y resolución de problemas.
- La ecuación de Bellman puede interpretarse como una ecuación funcional o un operador.
- La función de valor que se busca es el punto fijo del operador de Bellman.
- Bajo un conjunto de condiciones que satisfacen la mayoría de los modelos usados en economía, el operador de Bellman tiene un punto fijo V_n^* .

- Además, éste será único.

Por otra parte, obtuvimos las políticas óptimas para el problema de riqueza terminal, consumo e inversión, seguimiento de índices y el problema de subastas en línea. Utilizamos las funciones de utilidad potencia, HARA, logaritmo y exponencial para resolver algunos problemas, en otros casos se implemento con la función de distribución binomial y normal. También realizamos un algoritmo en Matlab del problema de asignación óptima de subastas secuenciales en línea para obtener el máximo beneficio total, en este programa obtuvimos las políticas óptimas, que en este caso serían las asignaciones óptimas de artículos para cada subasta pero teniendo en cuenta el supuesto de que se ofertan todos los artículos por cada subasta, además asumimos que tenemos 40 artículos a subastar, de los cuales en cada subasta vamos a elegir qué artículos se van a subastar para obtener el máximo beneficio total esperado, por otro lado vemos como cambia el problema si alteramos la tasa de llegada λ de los compradores ó cuando modificamos el precio de reserva v , de lo cuál también se abrieron a nuevas preguntas acerca del número óptimo de subastas ó el precio de reserva óptimo para futuros trabajos.

Apéndice A

Código del programa en matlab

```
clear all

h=.15; %costo de almacenamiento en dólares $15.00
vabajo=85; %precio mínima del vendedor en dolares
varriba=160; %precio máxima del vendedor en dolares, este puede cambiar
lambda=16.7; %tasa de llegada de los compradores
%lambda=4.7,8.7,13.7,16.7, toma estos valores
T=10; %frecuanecia de las subastas en días
W=6; %subastas a realizar
k=40; %cantidad total de artículos a subastar
v=0; %precio de reserva
beta=1; %factor de descuento
tcero=T/W; %duración de cada subasta
delta=lambda*tcero/(varriba-vabajo);

%Cálculo de q_m y p_s
q=exp(-delta*(varriba-v))*(1./factorial(1:k))
.*((delta*(varriba-v)).^[1:k]);
q=[exp(-delta*(varriba-v)) q];

%sum(q)
p=[1 1-cumsum(q)];

%Cálculo de la función r(.)
r=[0 varriba-(1/delta)+((1/delta)-v)*q(1)];

for s=2:k
r=[r s*varriba-(s*(s+1))/(2*delta)+sum(((s-[0:s-1])
.*q(1:s)).*(s+1-2*delta*v-[0:s-1]))/(2*delta)];
end

V=zeros(k+1,W+1);
```

APÉNDICE A. CÓDIGO DEL PROGRAMA EN MATLAB

```
acciones=[ ];

for n=2:W+1
    accion=[ ];

    for i=1:k
        paramax=[r(1)+beta*p(1)*V(i+1,n-1) r(2)
                +beta*q(1)*V(i+1,n-1)+beta*p(2)*V(i,n-1)];

        if i==1
            paramax=paramax;

        else
            for s=2:i
                xx=r(s+1)+beta*sum(q(1:s)
                .*fliplr(V(i-s+2:i+1,n-1)'))+beta*p(s+1)*V(i+1-s,n-1);
                paramax=[paramax xx];
            end
        end

        [argvalue, argmax] = max(paramax);
        argmax=argmax-1;
        V(i+1,n)=argvalue-h*i;
        accion=[accion argmax];
    end

    acciones=[acciones; accion];
end

plot(1:k,acciones(1,:),'*')
hold on
plot(1:k,acciones(2,:),'o')
plot(1:k,acciones(3,:),'+')
plot(1:k,acciones(4,:),'r*')
plot(1:k,acciones(5,:),'or')
grid
V
```

Apéndice B

Herramientas de análisis

B.1. Funciones semicontinuas

Con el fin de probar la existencia de políticas óptimas, las funciones semicontinuas superior son importantes. Para la siguiente definición y propiedades supongamos que M es un espacio métrico. Usamos la notación $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición B.1. Una función $v : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es llamada *continua superior* si para cualquier sucesión $(x_n) \subset M$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in M$ que posee

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} v(x_n) \leq v(x).$$

Una función $v : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es llamada *semicontinua inferior* si $-v$ es semicontinua superior.

Una típica función semicontinua es mostrada en la Figura A.1

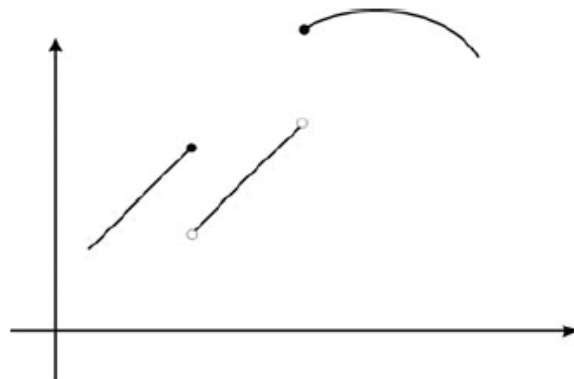


Figura B.1: Gráfica de una función semicontinua superior.

APÉNDICE B. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS
B.1. FUNCIONES SEMICONTINUAS

Teorema B.1. *Sea M es un compacto. Si $v : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es semicontinua por superior entonces la función v alcanza su supremo.*

Demostración: Sea v es semicontinua superior y denota $\alpha := \sup_{x \in M} v(x) \in \bar{\mathbb{R}}$. Existe una sucesión $(x_n) \subset M$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n) = \alpha$. Como M es compacto existe una subsucesión convergente (x_{n_k}) de (x_n) con $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b \in M$. Así, obtenemos

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} v(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(x_{n_k}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} v(x_{n_k}) \leq v(b).$$

Por lo tanto b es un punto máximo de v . ■

Si $v : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es semicontinua superior y $v(x) < \infty$ para cualquier $x \in M$, entonces v es acotada en cada subconjunto compacto de M y alcanza su supremo finito. El próximo Lema resume algunas propiedades de funciones semicontinuas [5], [24]. Note que las funciones semicontinuas son también funciones de Baire y la parte a) es también llamado Teorema de Baire en funciones semicontinuas.

Lema B.1. *Sea $v : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es una función.*

- a) *v es semicontinua superior si y solo si $\{x \in M | v(x) \geq \alpha\}$ es cerrado para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. v es semicontinua superior si y solo si $\{x \in M | v(x) < \alpha\}$ es abierto para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.*
- b) *v es semicontinua superior y acotada superiormente si y solo si existe una sucesión (v_n) de funciones acotadas y continuas tal que $v_n \downarrow v$.*
- c) *Sea $v_i : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es semicontinua superior para cualquier $i \in I$ (I arbitrario), entonces $\inf_{i \in I} v_i$ es semicontinua superior.*
- d) *Si v es semicontinua superior y M' es un espacio métrico y $w : M' \rightarrow M$ es continua, entonces $v \circ w$ es semicontinua superior.*
- e) *v es continua si y solo si v es semicontinua superior e inferior.*

En lo que sigue asumimos que $b : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función medible y $\mathbb{B}_b^+ := \{v \in M(E) | v^+(x) \leq cb(x) \text{ para algún } c \in \mathbb{R}_+\}$.

Lema B.2. *Sea (v_n) y (δ_n) es una sucesión de funciones con $v_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $\delta_n : M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = 0$ para cualquier $x \in M$ y*

$$v_n(x) \leq v_m(x) + \delta_m(x), \quad x \in M, \quad n \geq m$$

i.e. (v_n) es débilmente decreciente. Entonces se cumple:

- a) *El $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ existe.*
- b) *Si $v_n \in \mathbb{B}_b^+$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_0 \in \mathbb{B}_b^+$, entonces $v \in \mathbb{B}_b^+$.*
- c) *Si v_n y δ_n es semicontinua superior para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces v es semicontinua superior.*

Demostración:

APÉNDICE B. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS
B.1. FUNCIONES SEMICONTINUAS

a) La suposición implica que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n(x) \leq v_m(x) + \delta_m(x), \quad x \in M$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Ya que $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m(x) = 0$ así obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} v_m(x)$$

y por lo tanto el límite existe.

b) Como $v \leq v_0 + \delta_0 \in \mathbb{B}_b^+$ concluimos que $v \in \mathbb{B}_b^+$.

c) La suposición implica que $v \leq v_m + \delta_m$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Así, obtenemos para una sucesión $(x_n) \subset M$ con $x_n \rightarrow x \in M$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} v(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (v_m(x_n) + \delta(x_n)) \leq v_m(x) + \delta_m(x).$$

Tomando el límite cuando $m \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} v(x_n) \leq v(x)$$

y así v es semicontinua superior. ■

Ahora sea (A_n) es una sucesión con $A_n \subset M$. Entonces definimos por

$$LsA_n := \{a \in M \mid a \text{ es un punto de acumulación de una sucesión } (a_n) \text{ con } a_n \in A_n \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}\}$$

el llamado límite superior de la sucesión (A_n) . El siguiente Teorema muestra que bajo algunas suposiciones de continuidad y compactación es posible intercambiar el límite y el supremo de una sucesión de funciones.

Teorema B.2. *Sea M es un compacto y sea (v_n) es una sucesión de funciones semicontinuas superior $v_n : M \rightarrow \mathbb{R}$. Además, existe una sucesión $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ y*

$$v_n(a) \leq v_m(a) + \delta_m, \quad a \in M, \quad n \geq m.$$

Entonces el límite $v_\infty := \lim v_n$ existe y v_∞ es semicontinua superior.

a) Sea $A_n := \{a \in M \mid v_n(a) = \sup_{x \in M} v_n(x)\}$ para $n \in \mathbb{N}$ y $n = \infty$. Entonces

$$\emptyset \neq LsA_n \subset A_\infty.$$

b) Se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_n(a) = \sup_{a \in M} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(a) = \sup_{a \in M} v_\infty(a).$$

APÉNDICE B. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS
B.1. FUNCIONES SEMICONTINUAS

Demostración: La primera declaración sigue directamente del Lemma A.2. Como v_n es semicontinua superior, tenemos que $A_n \neq \emptyset$ y $\sup_{a \in M} v_n(a) < \infty$ para $n \in \mathbb{N} + \{\infty\}$. Obviamente esto implica que

$$\sup_{a \in M} v_n(a) \leq \sup_{a \in M} v_m(a) + \delta_m$$

para cualquier $n \geq m$. Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_n(a)$ existe. Ya que M es compacto tenemos por definición que $LsA_n \neq \emptyset$. Ahora sea $a_0 \in LsA_n$, i.e., a_0 es un punto de acumulación de una sucesión (a_n) con $v_n(a_n) = \sup_{a \in M} v_n(a)$ para cualquier n . Nos restringimos a una subsucesión (a_{n_k}) tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0$. Para $m \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_n(a) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_{n_k}(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k}(a_{n_k}) \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} (v_m(a_{n_k}) + \delta_m) &\leq v_m(a_0) + \delta_m. \end{aligned}$$

Dado que la suposición $v_\infty \leq v_n + \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$ adicionalmente obtenemos junto con la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \sup_{a \in M} v_\infty(a) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_n(a) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (v_m(a_0) + \delta_m) \\ &= v_\infty(a_0) \leq \sup_{a \in M} v_\infty(a). \end{aligned}$$

Esto implica que $a_0 \in A_\infty$ y que

$$\sup_{a \in M} v_\infty(a) = \lim_{\infty} \sup_{a \in M} v_n(a).$$

Así, las declaraciones en a) y b) se tienen. ■

El intercambio del límite y supremo es fácil cuando la sucesión de funciones es débilmente creciente.

Teorema B.3. *Sea (v_n) es una sucesión de funciones $v_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ tal que*

$$v_n(a) \geq v_m(a) - \delta_m, \quad a \in M, \quad n \geq m.$$

Entonces el límite $v_\infty := \lim v_n$ existe y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_n(a) = \sup_{a \in M} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(a) = \sup_{a \in M} v_\infty(a).$$

Demostración: La existencia del límite sigue de manera similar que el Lema A.2 la desigualdad $v_n(a) \geq v_m(a) - \delta_m$ implica para cualquier $a \in M$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(a) \geq v_m(a) - \delta_m.$$

Tomando el supremo sobre cualquier $a \in M$ y tendiendo $n \rightarrow \infty$ produce

$$\sup_{a \in M} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(a) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_n(a).$$

APÉNDICE B. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS
B.2. MAPEOS DEL CONJUNTO DE VALOR Y EL TEOREMA DE SELECCIÓN

Por otra parte tenemos para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{a \in M} v_n(a) \geq v_n(a), \quad a \in M.$$

Tomando el límite $n \rightarrow \infty$ y tomando el supremo sobre cualquier $a \in M$ nos da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a \in M} v_n(a) \geq \sup_{a \in M} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(a)$$

lo que implica el resultado. ■

B.2. Mapeos del conjunto de valor y el Teorema de selección

Supongamos que E y A son espacios de Borel. Un mapeo del conjunto de valor (también conocido como una multifunción o correspondencia) $D(\cdot)$ de E a A es una función tal que $D(x)$ es un subconjunto no vacío de A para cualquier $x \in E$. Consideremos solo mapeos de valor compacto $x \mapsto D(x)$, i.e. $D(x)$ es un compacto para $x \in E$. En $D := \{(x, a) \in E \times A \mid a \in D(x)\}$ es la gráfica de $D(\cdot)$.

Definición B.2. a) *El mapeo del conjunto de valor $x \mapsto D(x)$ es llamada semicontinua superior si tiene la siguiente propiedad, para cualquier $x \in E$: si $x_n \rightarrow x$ y $a_n \in D(x_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces (a_n) tiene un punto de acumulación en $D(x)$.*

(b) *El mapeo del conjunto de valor $x \mapsto D(x)$ es llamada semicontinua inferior si tiene la siguiente propiedad, para cualquier $x \in E$: si $x_n \rightarrow x$, entonces cada punto en $D(x)$ es un punto de acumulación de una sucesión de puntos $a_n \in D(x_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$*

c) *El mapeo del conjunto de valor $x \mapsto D(x)$ es llamada continua si es semicontinua superior e inferior.*

Note que la definición de semicontinua superior es ligeramente más restrictiva que otras definiciones esperadas en la literatura [13]. El próximo Lema da alguna caracterización y ejemplos para funciones continuas y semicontinuas en mapeos del conjunto de valor.

Lema B.3. a) *El mapeo del conjunto de valor $x \mapsto D(x)$ es semicontinua superior si y solo si cada sucesión $(x_n, a_n) \subset D$ tal que (x_n) converge en E , tiene un punto de acumulación en D . Entonces:*

D es compacto $\Rightarrow x \mapsto D(x)$ es semicontinua superior $\Rightarrow D$ es cerrado.

b) *Si A es compacto, entonces $x \mapsto D(x)$ es semicontinua superior si y sólo si D es cerrado.*

c) *Si A es compacto y $D(x) = A$ para cualquier x , entonces $x \mapsto D(x)$ es continua.*

APÉNDICE B. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS
B.3. FUNCIONES SUPERMODULAR Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

d) Si $A = \mathbb{R}$ y $D(x) = [\underline{d}(x), \bar{d}(x)]$, entonces $x \mapsto D(x)$ es semicontinua superior si $\underline{d} : E \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferior y $\bar{d} : E \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superior.

A continuación presentamos el Teorema de selección de Kuratowski y Ryll-Nardzewski [15] es básico para la existencia de maximizadores. Para más Teoremas de selección ver [7], [12],[28].

Teorema B.4. (*Teorema de selección*). Sea $x \mapsto D(x)$ un mapeo de valor compacto tal que $D := \{(x, a) \in E \times A | a \in D(x)\}$ es un subespacio de Borel de $E \times A$. Entonces existe un selector medible de Borel f para D , i.e. existe una función medible de Borel $f : E \rightarrow A$ tal que $f(x) \in D(x)$ para cualquier $x \in E$.

Del Teorema A.4 la existencia de maximizadores medibles pueden ser derivados.

Teorema B.5. Sea $x \mapsto D(x)$ es un mapeo de valor compacto tal que $D := \{(x, a) \in E \times A | a \in D(x)\}$ es un subconjunto de Borel de $E \times A$. Sea $w : D \rightarrow \mathbb{R}$ es Borel medible. Entonces existe un maximizador f de w , i.e. existe una función medible Borel $f : E \rightarrow A$ tal que $f(x) \in D(x)$ para cualquier $x \in E$ y

$$w(x, f(x)) = \sup_{a \in D(x)} w(x, a) = v(x), \quad x \in E.$$

Por otra parte, $v(x)$ es Borel medible.

B.3. Funciones supermodular y el Teorema del punto fijo

Funciones supermodular son útiles cuando las propiedades de monotonía de maximizadores son estudiados. Aparecen con diferentes nombres en la literatura. Algunas veces son llamados L -superaditiva o funciones con derivadas crecientes. En lo que sigue denotamos por dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$x \wedge y := (\min\{x_1, y_1\}, \dots, \min\{x_d, y_d\}),$$

$$x \vee y := (\max\{x_1, y_1\}, \dots, \max\{x_d, y_d\}).$$

Definición B.3. Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada supermodular si

$$f(x) + f(y) \leq f(x \wedge y) + f(x \vee y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Una función f es llamada submodular si $-f$ es supermodular. Note que f es supermodular si y sólo si cualquier función $(x_i, x_j) \rightarrow f(x)$ son supermodular para $i \neq j$. Así, una caracterización alternativa de una función supermodular es dada como sigue: f es supermodular si y sólo si

$$\Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

para cualquier $i, j = 1, \dots, d$ y ε, δ donde $\Delta_i^\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon e_i) - f(x)$ es el operador diferencia. Una función supermodular tiene la siguiente propiedad [18], [3].

APÉNDICE B. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS
B.3. FUNCIONES SUPERMODULAR Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Lema B.4. a) Si f es continua y dos veces diferenciable, entonces f es supermodular si y sólo si para cualquier $1 \leq i, j \leq n$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- b) Si $g_1, \dots, g_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son crecientes y f es supermodular, entonces $f \circ (g_1, \dots, g_d)$ es supermodular.
- c) Si f, g son supermodular y $a, b \geq 0$, entonces $af + bg$ es supermodular.
- d) Si $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ es creciente y supermodular, entonces $f \cdot g$ es creciente y supermodular.

A continuación introduciremos el concepto de funciones MTP_2 que son cruciales cuando las propiedades de dependencia de vectores aleatorios son discutidos (para más detalles ver e.g., Müller and Stoyan [18]).

Definición B.4. Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ es llamada MTP_2 (multivariada total positiva de orden 2) si

$$f(x)f(y) \geq f(x \wedge y)f(x \vee y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Obtenemos las siguientes propiedades:

Lema B.5. a) Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ es MTP_2 si y sólo si el $\log f$ es supermodular.

b) Si $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ es MTP_2 , entonces también el producto fg es MTP_2 .

Si f es una función de densidad de Lebesgue de un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$, entonces f pertenece a MTP_2 e implica que una dependencia fuerte positiva entre las variables aleatorias. En particular MTP_2 implica conceptos como dependencia condicional creciente, asociación y dependencia ortante positiva.

Finalmente afirmamos el Teorema del punto fijo de Banach aquí ya que será muy importante en el análisis de modelos de decisión de Markov con horizonte finito.

Teorema B.6. (Teorema del punto fijo de Banach). Sea M es un espacio métrico completo con métrica $d(x, y)$ y τ un operador que satisface

- i) $\tau : M \rightarrow M$.
- ii) Existe un número $\beta \in (0, 1)$ tal que $d(\tau_v, \tau_w) \geq \beta d(v, w)$ para cualquier $v, w \in M$.

Entonces se cumple:

- a) τ tiene un único punto fijo v^* en M , i.e. $v^* = \tau v^*$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n v = v^*$ para cualquier $v \in M$.
- c) Para $v \in M$ obtenemos

$$d(v^*, \tau^n v) \geq \frac{\beta^n}{1 - \beta} d(\tau v, v), \quad n \in \mathbb{N}.$$

APÉNDICE B. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS
B.3. FUNCIONES SUPERMODULAR Y EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO

En nuestra aplicación M es un subconjunto cerrado de

$$\mathbb{B}_b := \{v \in \mathbf{M}(E) \mid \|v\|_b < \infty\}$$

con métrica $d(v, w) := \|v - w\|_b$ para $v, w \in M$ y τ es la recompensa máxima del operador.

Apéndice C

Herramientas de probabilidad

C.1. Teoría de probabilidad

En lo que sigue supongamos que todas las variables aleatorias están definidas en un espacio completo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El siguiente resultado clásico acerca del intercambio de esperanza y límite pueden ser encontrados en cada libro de texto de teoría de probabilidad [1], [6], [2], [30].

- **(Convergencia Monótona)** Supongamos (X_n) es una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \uparrow X$, $X_n \geq Y$ \mathbb{P} -a.s. para cualquier n y la variable aleatoria Y satisface $\mathbb{E}(Y) > -\infty$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

- **(Convergencia Dominada)** Supongamos (X_n) es una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \rightarrow X$, $X_n \geq Y$ \mathbb{P} -a.s. para cualquier n y la variable aleatoria Y satisface $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

- **(Lema de Fatou)** Supongamos (X_n) es una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \geq Y$ \mathbb{P} -a.s. para cualquier n y la variable aleatoria Y satisface $\mathbb{E}(Y) < \infty$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n).$$

Para los modelos de decisión de Markov con horizonte infinito necesitamos el siguiente resultado [13].

APÉNDICE C. HERRAMIENTAS DE PROBABILIDAD
C.2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Teorema C.1. *Supongamos (X_n) es una sucesión de variables aleatorias con $\mathbb{E} [\sum_{k=1}^{\infty} X_k^+] < \infty$ o $\mathbb{E} [\sum_{k=1}^{\infty} X_k^-] < \infty$. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k).$$

Se necesita el concepto de convergencia débil cuando los procesos de tiempo continuo tienen que aproximarse mediante interpolaciones de procesos en tiempo discreto.

Definición C.1. *Supongamos que X, X_1, X_2, \dots , son variables aleatorias con valores en un espacio métrico separable M . Entonces (X_N) converge débilmente en X si y sólo si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$$

para cualquier función continua y acotada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

C.2. Procesos estocásticos

A continuación resumimos definiciones y hechos de los procesos de Markov a tiempo discreto y martingalas. Para más detalle ver [17] y para más información de procesos a tiempo continuo y predicción ver [23].

Definición C.2. *Una familia de variables aleatorias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en un espacio medible (E, \mathfrak{E}) es llamado un proceso estocástico (a tiempo discreto).*

Definición C.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad.*

- a) *Una sucesión de σ -álgebras (\mathcal{F}_n) es llamada una filtración si $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$.*
- b) *Un proceso estocástico (X_n) en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamado (\mathcal{F}_n) -adaptado si X_n es \mathcal{F}_n medible para cualquier n .*

Si $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ i.e. \mathcal{F}_n es la más pequeña σ -álgebra tal que las variables aleatorias X_0, \dots, X_n son medibles con respecto a \mathcal{F}_n , entonces (\mathcal{F}_n) es llamada la filtración natural de (X_n) . En este caso (X_n) es trivialmente adaptado a (\mathcal{F}_n) . Además, si una variable aleatoria Y es \mathcal{F}_n^X -medible entonces existe una función medible $h : E^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Y = h(X_0, \dots, X_n)$, \mathbb{P} -a.s.

Recordemos la siguiente definición de kernel estocástico.

Definición C.4. *Un mapeo $Q : \mathfrak{E} \times E \rightarrow [0, 1]$ con las dos propiedades*

- i) *$B \rightarrow Q(\cdot|x)$ es una medida de probabilidad para cualquier $x \in E$,*
- ii) *$x \rightarrow Q(B|x)$ es medible para cualquier $B \in \mathfrak{E}$,*

es llamado un kernel (transición) estocástico.

APÉNDICE C. HERRAMIENTAS DE PROBABILIDAD
C.2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

La segunda propiedad implica que cuando $v : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces

$$x \mapsto \int v(x, x')Q(dx'|x)$$

es de nuevo medible siempre que la integral exista.

Definición C.5. *Un proceso estocástico (X_n) es llamado un proceso de Markov (a tiempo discreto), si existe una sucesión de kérneles estocásticos (Q_n) tal que*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B | X_n) = Q_n(B | X_n).$$

Si (Q_n) no depende de n entonces el proceso es llamado *proceso de Markov estacionario (o homogéneo)*. La primera igualdad es llamada *propiedad de Markov*.

Un proceso estocástico (X_n) es un proceso de Markov si y sólo si existe variables aleatorias independientes Z_1, Z_2, \dots con valores en un espacio medible $(\mathcal{Z}, \mathfrak{B})$ y funciones medibles $T_n : E \times \mathcal{Z} \rightarrow E$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tal que X_0 es dada y

$$X_{n+1} = T_n(X_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si el espacio de estados E del proceso de Markov estacionario (X_n) es finito o contable, el kernel de transición es representado por una matriz estocástica $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$, i.e., $p_{ij} \geq 0$ y $\sum_j p_{ij} = 1$ para cualquier $i \in E$ y se cumple

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}.$$

En este caso también llamaremos a (X_n) una cadena de Markov.

Teorema C.2. *(Ionescu-Tulcea). Sea v es una medida de probabilidad en E y (Q_n) una sucesión de kérneles estocásticos. Entonces existe una única medida de probabilidad \mathbb{P}_v en E^∞ tal que*

$$\mathbb{P}_v(B_0 \times \dots \times B_N \times E \times \dots) = \int_{B_0} \dots \int_{B_N} Q_{N-1}(dx_N | x_{N-1}) \dots Q_0(dx_1 | x_0) v(dx_0)$$

para cada conjunto rectángulo medible $B_0 \times \dots \times B_N \in E^{N+1}$.

Definición C.6. *Un proceso estocástico (X_n) que es (\mathcal{F}_n) -adaptado y satisface $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ para cualquier n es llamado una (\mathcal{F}_n) -martingala si*

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

El proceso (X_n) es llamado una (\mathcal{F}_n) -supermartingala si

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

El proceso (X_n) es llamado una (\mathcal{F}_n) -submartingala si

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n \text{ para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Note que la condición $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ para cualquier n es equivalente a $\mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n] = X_n$, para cualquier $n < m$. A menudo, la filtración no se menciona explícitamente en cuyo caso se supone que es la filtración natural del proceso.

APÉNDICE C. HERRAMIENTAS DE PROBABILIDAD
C.3. ÓRDENES ESTOCÁSTICOS

Definición C.7. a) Un proceso a tiempo continuo $(N_t)_{t \geq 0}$ con valores en \mathbb{N}_0 y $N_0 = 0$ es llamado un proceso homogéneo Poisson con intensidad $\lambda > 0$ si tiene incremento independiente y para $0 \leq s < t$ el incremento $N_t - N_s$ es una distribución Poisson con parámetro $\lambda(t - s)$.

b) Un proceso estocástico a tiempo continuo $(C_t)_{t \geq 0}$ con valores en \mathbb{R}^d y $C_0 = 0$ es llamado un proceso compuesto Poisson si es dado por

$$C_t := \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

donde (N_t) es un proceso Poisson y Y_1, Y_2, \dots es una sucesión de distribuciones independientes e idénticamente distribuidas de vectores aleatorios cuyos valores están en \mathbb{R}^d que es independiente de (N_t) .

Definición C.8. Un proceso estocástico a tiempo continuo $(W_t)_{t \geq 0}$ con valores en \mathbb{R} y W_0 es llamado un proceso de Wiener o movimiento Browniano, si tiene caminos casi seguramente continuos, incrementos independientes y para $0 \leq s < t$ tenemos $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Definición C.9. Denotamos por \mathcal{P} la σ -álgebra en $[0, T] \times \Omega$ generada por cualquier proceso adaptado con caminos continuos a la izquierda. Una función $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ que es medible con respecto a \mathcal{P} es llamado un proceso previsible. Por ejemplo algún proceso continuo por la izquierda es previsible.

C.3. Órdenes estocásticos

Órdenes estocásticos son órdenes parciales sobre un conjunto de distribuciones. Aquí consideramos el conjunto de todas las distribuciones de valor real de variables aleatorias. En el caso multivariado es más delicado ya que hay diferentes extensiones razonables del caso univariado. Los órdenes estocásticos son una valiosa herramienta para la obtención de los límites sobre las medidas de rendimiento o para derivar resultados de sensibilidad. Libros generales de órdenes estocásticos [18], [29]. El enfoque de este último está en las aplicaciones. Una vista particular, hacia los temas de dependencia se puede encontrar en [31], [19]. En [14] uno puede encontrar aplicaciones concernientes de el orden de los riesgos actuariales. Propiedades de monotonía de sistemas estocásticos tienen ha ser discutidos ampliamente en [18], capítulo 5 y 6.

Definición C.10. Una relación binaria \preceq en un conjunto arbitrario S es llamada una preorden si

i) $x \preceq x$ para cualquier $x \in S$ (Reflexiva),

ii) Si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$ (Transitiva).

Si \preceq es también antisimétrica, i.e., si $x \preceq y$ y $y \preceq x$ implica que $x = y$, entonces \preceq es llamada una parcial de orden. (S, \preceq) es llamado completamente ordenado si para algún $x, y \in S$ cualquiera de los dos $x \preceq y$ ó $y \preceq x$.

C.3.1. El orden usual estocástico

Definición C.11. *La variable aleatoria X es llamada más pequeña que la variable aleatoria Y con respecto al orden estocástico (escrito como $X \geq_{st} Y$), si $\mathbb{P}(X \leq t) \geq \mathbb{P}(Y \leq t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.*

En particular en la literatura económica este orden es a menudo llamado primer orden de dominancia estocástica y el símbolo \leq_{FSD} es usado. Note que $X \leq_{st} Y$ implica que $\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(Y > t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, i.e., Y toma valores grandes con probabilidad muy grande. Como se sigue de la definición que la relación de orden depende sólo en la distribución de X y Y , es común también escribir $P^X \leq_{st} P^Y$. Caracterizaciones útiles del orden estocástico se dan en el siguiente teorema.

Teorema C.3. *Sea X y Y dos variables aleatorias. Las siguientes declaraciones son equivalentes:*

- i) $X \leq_{st} Y$.
- ii) *Para cualquier función creciente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se cumple que $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$, siempre y cuando exista la esperanza.*
- iii) *Existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y variables aleatorias \hat{X}, \hat{Y} en el, tal que $X \stackrel{d}{=} \hat{X}$, $Y \stackrel{d}{=} \hat{Y}$ y $\hat{X}(\omega) \leq \hat{Y}(\omega)$ para cualquier $\omega \in \Omega$.*

Obviamente $X \leq_{st} Y$ implica $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Además de esto, el orden estocástico tiene un número importante de propiedades. Mencionamos algunas de ellas. Por ejemplo ver la próxima Sección.

Lema C.1. *a) El orden estocástico es cerrado bajo convolución, i.e. si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes así como Y_1 y Y_2 y $X_i \leq_{st} Y_i$ para $i = 1, 2$, entonces*

$$X_1 + X_2 \leq_{st} Y_1 + Y_2.$$

- b) *El orden estocástico es cerrado bajo mezclas, i.e. si X, Y y Z son variables aleatorias con $\mathbb{P}(X \leq t | Z = z) \geq \mathbb{P}(Y \leq t | Z = z)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, \mathbb{P} y casi cualquier z , entonces $X \leq_{st} Y$.*
- c) *El orden estocástico es cerrado con respecto a la convergencia débil, i.e. si $X_n \leq_{st} Y_n$ para cualquier n y (X_n) converge débilmente contra X , (Y_n) converge débilmente a Y , entonces $X \leq_{st} Y$.*

C.3.2. Razón de orden de verosimilitud

La razón de orden de verosimilitud es más fuerte que el orden estocástico y es importante para la comparación de resultados en modelos Bayesianos. A menudo es más fácil para verificar que el orden estocástico.

Definición C.12. *La variable aleatoria X es llamada más pequeña que la variable aleatoria Y con respecto a la razón de orden de verosimilitud (escrito como $X \leq_{lr} Y$), si*

APÉNDICE C. HERRAMIENTAS DE PROBABILIDAD
C.3. ÓRDENES ESTOCÁSTICOS

X y Y tienen densidades f_X y f_Y con respecto a alguna medida dominada tal que para cualquier $s \leq t$:

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t).$$

Note que la definición es válida para variables aleatorias continuas así como discretas o mezclas de ambas. En el caso multivariado existe diferentes posibilidades para definir la razón de orden de verosimilitud.

Teorema C.4. Si X y Y son variables aleatorias con $X \leq_{lr} Y$, entonces también $X \leq_{st} Y$.

La siguiente caracterización es importante para la comprensión de la razón de orden de verosimilitud y particularmente útil en ajustes Bayesianos:

Teorema C.5. Sea X y Y son dos variables aleatorias. Las siguientes declaraciones son equivalentes:

- i) $X \leq_{lr} Y$.
- ii) Para cualquier evento A con $\mathbb{P}(X \in A) > 0$ y $\mathbb{P}(Y \in A) > 0$ tenemos $\mathbb{P}(X \leq t | X \in A) \geq \mathbb{P}(Y \leq t | Y \in A)$, $t \in \mathbb{R}$.

C.3.3. Orden convexo

Los órdenes convexos comparan la variabilidad de las variables aleatorias (en lugar del tamaño como hace el orden estocástico y razón de orden de verosimilitud). Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada convexa si para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ y para cualquier $x, x' \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x').$$

f es llamada cóncava si $-f$ es convexa.

Definición C.13. Sea X y Y son variables aleatorias con media finita.

- a) X es más pequeña que Y con respecto al orden convexo (escribimos $X \leq_{cx} Y$), si $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ para cualquier función convexa f para los cuales la esperanza existe.
- b) X es más pequeña que Y con respecto al orden convexo creciente (escribimos $X \leq_{icx} Y$), si $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ para cualquier función convexa y creciente f para los cuales la esperanza existe.
- c) X es más pequeña que Y con respecto al orden cóncavo creciente (escribimos $X \leq_{icv} Y$), si $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ para cualquier función cóncava y creciente f para los cuales la esperanza existe.

El orden \leq_{icv} es a menudo llamado *segundo orden estocástico de dominancia* en la literatura económica y el símbolo \leq_{SSD} es usado, mientras el orden \leq_{icx} es conocido como el orden de pérdida detenida \leq_{sl} en las ciencias actuariales. Además, no es difícil ver que $X \leq_{icx} Y$ es equivalente a $-Y \leq_{icv} -X$. Así, en lo que sigue restringimos las declaraciones al caso \leq_{icx} . Además, seguimos inmediatamente de la definición que $X \leq_{st} Y$ implica $X \leq_{icx} Y$.

Teorema C.6. Sea X y Y variables aleatorias. Las siguientes declaraciones son equivalentes:

- i) $X \leq_{cx} Y$.
- ii) $X \leq_{icx} Y$ y $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.
- iii) Existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y variables aleatorias \hat{X}, \hat{Y} en él con $X \stackrel{d}{=} \hat{X}$, $Y \stackrel{d}{=} \hat{Y}$, tal que $\mathbb{E}[\hat{Y}|\hat{X}] = \hat{X}$ \mathbb{P} -a.s. y que $\mathbb{P}(\hat{Y} \leq t|\hat{X} = x) \geq \mathbb{P}(\hat{Y} \leq t|\hat{X} = x')$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y $x < x'$.

Teorema C.7. Sea X y Y variables aleatorias. Las siguientes declaraciones son equivalentes:

- i) $X \leq_{icx} Y$.
- ii) $\mathbb{E}(X - t)_+ \leq \mathbb{E}(Y - t)_+$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.
- iii) Existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y variables aleatorias \hat{X}, \hat{Y} en él con $X \stackrel{d}{=} \hat{X}$, $Y \stackrel{d}{=} \hat{Y}$, tal que $\mathbb{E}[\hat{Y}|\hat{X}] \geq \hat{X}$ a.s. y que $\mathbb{P}(\hat{Y} \leq t|\hat{X} = x) \geq \mathbb{P}(\hat{Y} \leq t|\hat{X} = x')$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y $x < x'$.

Como \leq_{lr} implica \leq_{icx} , un interesante ejemplo es el siguiente:

C.3.4. Monotonía estocástica de procesos Markovianos

Supongamos (X_n) es un proceso Markoviano estacionario con espacio de estados $E \subset \mathbb{R}^d$ y kernel de transición estocástica $Q(B|x)$.

Definición C.14. El kernel estocástico Q es llamado monótonamente estocástico si para cualquier función creciente $v : E \rightarrow \mathbb{R}$, la función

$$x \mapsto \int v(x')Q(dx'|x)$$

es creciente siempre y cuando la integral exista. Si Q define un proceso Markoviano (X_n) entonces también decimos que (X_n) es monótonamente estocástico.

De la definición del orden estocástico seguimos inmediatamente que el kernel Q es monótonamente estocástico si y sólo si $x \leq x'$, $x, x' \in E$ implica que $Q(\cdot|x) \leq_{st} Q(\cdot|x')$. Si el espacio de estados $E = \{1, \dots, m\}$ es finito y la probabilidad de transición es dada por $P = (p)_{ij}$ entonces la cadena de Markov (X_n) es monótonamente estocástica si y sólo si para cualquier $i, j \in E$ con $i \leq j$

$$\sum_{\nu=k}^m p_{i\nu} \leq \sum_{\nu=k}^m p_{j\nu}, \quad k \in E.$$

Si denotamos por $\alpha \in \mathbb{R}^m$ la distribución inicial, entonces αP^n es la distribución de la cadena de Markov a tiempo $n \in \mathbb{N}$ y (X_n) es monótonamente estocástico si para alguna distribución inicial α y α' , $\alpha \leq_{st} \alpha'$ implica $\alpha P^n \leq_{st} \alpha' P^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Apéndice D

Herramientas de matemática financiera

D.1. Teoría de precios sin arbitraje

En esta Sección asumiremos algunos hechos de la fundamental teoría de precios sin arbitraje y observaremos el papel de las martingalas en opciones de precio. Para más detalles ver [10]. A continuación suponemos un espacio de probabilidad con un filtro $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ es dado, donde $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. En este espacio existe $d + 1$ activos y el precio a tiempo $n = 0, 1, \dots, N$ de k activos es modelado por una variable aleatoria S_n^k (ver capítulo 2 para una descripción detallada del mercado financiero). El activo S^0 es un activo sin riesgo acotado que es usado como un numerario.

Definición D.1. a) Una medida de probabilidad \mathbb{Q} en (Ω, \mathcal{F}) es equivalente a \mathbb{P} si \mathbb{Q} y \mathbb{P} tienen los mismos conjuntos nulos.

b) Una medida de probabilidad \mathbb{Q} en (Ω, \mathcal{F}_n) es una medida de martingala si el proceso descontado de precios de valores de $\left(\frac{S_n^k}{S_n^0}\right)$ es una (\mathcal{F}_n) -martingala bajo \mathbb{Q} para cualquier $k = 1, \dots, d$.

La siguiente caracterización sin arbitraje es crucial.

Teorema D.1. El mercado financiero es libre de arbitrajes si y sólo si existe una equivalente medida de martingala.

Definición D.2. a) Una reclamo de contingencia es una variable aleatoria H no negativa y \mathcal{F}_N -medible.

b) Un reclamo de contingencia se dice ser alcanzable si existe un portafolio de estrategia de autofinanciación ϕ que reproduce la recompensa H , i.e.,

$$H = X_N^\phi, \quad \mathbb{P} - a.s.$$

La estrategia de portafolio ϕ es llamada una estrategia réplica ó estrategia de cobertura .

APÉNDICE D. HERRAMIENTAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA
D.1. TEORÍA DE PRECIOS SIN ARBITRAJE

c) El mercado financiero es llamado completo si cada reclamo de derecho es alcanzable.

Teorema D.2. Consideremos que el mercado financiero admite las oportunidades sin arbitraje. Entonces el mercado es completo si y sólo si existe una única medida de martingala equivalente.

Definición D.3. Consideremos que existen oportunidades sin arbitraje y H es un reclamo de contingencia alcanzable. Si su precio $\pi(H)$ es definido como la cantidad inicial que es necesaria para replicar, i.e., si ϕ es una estrategia de cobertura entonces

$$\pi(H) := \phi_0^0 + \phi_0 \cdot e.$$

Teorema D.3. Consideremos que existen oportunidades sin arbitraje y \mathbb{Q} es una medida de martingala equivalente. Entonces el precio de reclamo de contingencia H es alcanzable y puede ser calculado por

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{S_N^0} \right].$$

Si el reclamo de contingencia H no es alcanzable, entonces un intervalo de precio de libre arbitraje puede ser calculado por

$$\left(\inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{S_N^0} \right], \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{S_N^0} \right] \right)$$

Donde \mathcal{Q} es el conjunto de todas las equivalencias de medidas de martingalas.

Ejemplo D.1. (Modelo Binomial ó Cox-Ross-Rubinstein). Si los parámetros del modelo binomial satisfacen

$$d < 1 + i < u$$

entonces el mercado admite oportunidades sin arbitraje y también es completo. Si denotamos el espacio muestral en este modelo por

$$\Omega := \{(\omega_1, \dots, \omega_N) | \omega_i \in \{d, u\}\}$$

y $\tilde{R}_n(\omega) = \omega_n$ entonces la única equivalente medida de martingala \mathbb{Q} es determinada por

$$\mathbb{Q}(\tilde{R}_n = u) = q = \frac{1 + i - d}{u - d}$$

y el hecho que el relativo precio aleatorio cambia $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N$ son independientes bajo \mathbb{Q} .
 \diamond

Bibliografía

- [1] Ash R. B. and Doléans-Dade C. A., Probability and Measure Theory. Academic Press Elsevier, San Diego, ISBN0120652021, 2005.
- [2] Bauer H. Probability Theory. Walter de Gruyter, Berlin, ISBN9783110139358, 1996.
- [3] Bäuerle, N. Discounted Stochastic Fluid Programs. Math. Oper. Res. 26, 401 – 420, 1997.
- [4] Bäuerle N., Rieder U. Markov Decision Processes with Applications to Finance. Springer Verlag, ISBN9783642183232, 2011.
- [5] Bertsekas D. P. and S. E. Shreve, Stochastic Optimal Control: The discrete-Time Case. Athena Scientific, ISBN1886529264, 1978.
- [6] Billingsley, P. Probability and Measure. John Wiley & Sons, New York, ISBN0471007102, 1995.
- [7] Brown, L. and Purves, R. Measurable Selection of Extrema. Ann. Math. Statist. 1, 903 – 912, 1973.
- [8] C. Beam, A.J. Segev and G. Shanthikumar, Electronic negotiation through Internetbased auctions, CITM Working Paper 96-WP-1019, 1996.
- [9] Cox, J. C. and Rubinstein, M. Option markets. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, ISBN9781584885672, 1985.
- [10] Föllmer, H. and Schied, A. Stochastic Finance. Walter de Gruyter, Berlin, ISBN9783110171198, 2004.
- [11] Hernández-Lerma, O. and Lasserre, J. B. Discrete-Time Markov Control Processes. Springer-Verlag, ISBN9781461268840, 1996.

- [12] Himmelberg C. J, Parthasarathy T. and VanVleck F.S, Optimal Plans For Dynamic Programming Problems. *Math. Oper. Res.* 1, 390 – 394, 1976.
- [13] Hinderer, K. *Foundations of Non-Stationary Dynamic Programming With Discrete Time Parameter.* Springer-Verlag, Berlin, ISBN9783540049562, 1970.
- [14] Kaas, R., van Heerwaarden, A., and Goovaerts, M. *Ordering of Actuarial Risk.* Caire, Brussels, ISBN0792376366, 1998.
- [15] Kuratowski, K. and Ryll-Nardzewski, C. A General Theorem on Selectors. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 13, 397 – 403, 1965.
- [16] Luenberger, D. G. *Investment Science.* Oxford University Press, New York, Oxford, Second Edition, ISBN9780199740086, 1998.
- [17] Meyn, S. and Tweedie, R. L. *Markov Chains and Stochastic Stability.* Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition, ISBN9780521731829, 2009.
- [18] Müller, A. and Stoyan, D. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* John Wiley & Sons, Chichester, ISBN9786471494461, 2002.
- [19] Nelsen, R. B. *An Introduction to Copulas.* Springer Series in Statistics. New York. Second Edition, ISBN9780387286594, 2006.
- [20] Von Neumann, J. and Morgenstern, O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press, Princeton, NJ, ISBN9780691130613, 2007.
- [21] Pflug, G. and Römisch, W. *Modeling, Measuring and Managing Risk.* World Scientific, Singapore, ISBN9789812707406, 2007.
- [22] Prigent, J.-L. *Weak convergence of financial markets.* Springer-Verlag, Berlin, ISBN9783540711490, 2003.
- [23] Protter, P. E. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin, ISBN9783642120572, 2005.
- [24] Puterman, M. L. *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming.* John Wiley & Sons, New York, ISBN0471619779, 1994.

- [25] Q. Hu, J. Liu. An Introduction to Markov Decision Processes, Press of Xidian University, Xian, China, ISBN9783902613141, 2000.

- [26] Qiyong Hu, Wuyi Yue. Markov Decision Processes With Their Applications. Springer, New York, USA, ISBN9780387369501, 2008.

- [27] Rásonyi, M. and Stettner, L. On utility maximization in discrete-time financial market models. *Ann. Appl. Probab.* 15, 1367 – 1395, 2005.

- [28] Rieder, U. Measurable Selection Theorems for Optimization Problems. *Manuscripta Math.* 24, 115 – 131, 1978.

- [29] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. *Stochastic Orders*. Springer, New York, ISBN978038771796, 2007.

- [30] Shiryaev, A. N. *Probability*. Springer-Verlag, New York, ISBN9780387945491, 1996

- [31] Szekli, R. *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*. Springer-Verlag, New York, ISBN9780387944500, 1995.