



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"DINÁMICA POST-MARKOVIANA DE DOS
ÁTOMOS DE DOS NIVELES ACOPLADOS"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

JOSÉ BLADIMIR GUZMÁN PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. JUAN MAURICIO TORRES GONZÁLEZ

No. de CVU: 1139808

OCTUBRE-2025

**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”**

Dinámica post-markoviana de dos átomos de dos niveles acoplados

Tesis presentada por

José Bladimir Guzmán Pérez

para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias
(Física)**

Dirigida por

Dr. Juan Mauricio Torres González

Puebla, México
Octubre, 2025

Dinámica post-markoviana de dos átomos de dos niveles acoplados
© José Bladimir Guzmán Pérez, 2025

Este documento se distribuye bajo la licencia **Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0** (CC BY-NC-SA 4.0). El texto completo de la licencia está disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>. Se autoriza la copia y distribución de esta obra en todo el mundo, sin regalías y por cualquier medio, siempre que se conserve íntegramente esta nota. Asimismo, se concede permiso para la traducción de este documento a otros idiomas, siempre que dicha traducción cuente con la aprobación del autor y que tanto el aviso de copyright como la presente nota de permiso permanezcan inalterados en todas las copias.



Dedicado a ti, mamá:

*Porque tus manos tejieron sueños donde solo hubo desafíos.
Tus sábados a las 7 PM no fueron llamadas, sino himnos de resistencia.
Tus silencios hablaron más que el mundo entero gritando “no”.
Convertiste el pan de tu boca en el aire que me hizo volar,
las arrugas de tus noches en las alas de mis sueños.
Esta tesis no es mía: es el fruto de tu fe infinita.
Cada página, una huella que plantaste en mí antes de que el
mundo supiera mi nombre.*

Dinámica post-markoviana de dos átomos de dos niveles acoplados

José Bladimir Guzmán Pérez
Puebla, Octubre de 2025

Resumen

El control y la preservación del entrelazamiento cuántico en sistemas abiertos constituyen desafíos fundamentales para la realización práctica de tecnologías cuánticas avanzadas. Aunque la dinámica markoviana, ampliamente estudiada, ofrece una descripción sencilla y efectiva del decaimiento exponencial del entrelazamiento, no contempla la influencia crucial que ejerce la memoria del entorno sobre la evolución de sistemas cuánticos reales. Esta limitación deja una brecha importante en la comprensión precisa del comportamiento de sistemas cuánticos en situaciones experimentales, donde los entornos frecuentemente presentan correlaciones temporales significativas.

En esta tesis, abordamos esta problemática a través de un estudio riguroso y detallado de dos sistemas de dos niveles (2 TLS) en interacción con un entorno bosónico con memoria, utilizando condiciones iniciales que corresponden a estados de Bell máximamente entrelazados. Presentamos soluciones exactas tanto para el régimen markoviano como para el post-markoviano, destacando cómo la presencia de memoria ambiental ralentiza y modula la pérdida del entrelazamiento. Al implementar la concurrencia de Wootters como métrica de entrelazamiento, evidenciamos fenómenos inéditos como la aparición de oscilaciones y revivals parciales en la dinámica post-markoviana.

Nuestros resultados proporcionan evidencia de que la memoria del entorno no solo modifica cuantitativamente la tasa de decaimiento del entrelazamiento, sino que también genera fenómenos cualitativamente nuevos, enriqueciendo nuestra comprensión de los sistemas cuánticos abiertos. Este trabajo ofrece, por tanto, una base sólida y nuevas perspectivas para futuras investigaciones dirigidas al control óptimo del entrelazamiento cuántico bajo condiciones experimentales más realistas.

Palabras clave: *Sistemas cuánticos abiertos, TLS, markoviana, post-markoviana, concurrencia, estados de Bell, memoria, decoherencia, entrelazamiento, control cuántico.*

Post-Markovian Dynamics of Two Coupled Two-Level Atoms

José Bladimir Guzmán Pérez
Puebla, October 2025

Abstract

Controlling and preserving quantum entanglement in open systems are crucial challenges for developing advanced quantum technologies. Although the widely studied Markovian dynamics effectively describe the simple exponential decay of entanglement, they do not consider how the memory of the environment affects the evolution of real quantum systems. This leaves an important gap in fully understanding quantum behavior under experimental conditions, where environments often show significant temporal correlations.

In this thesis, we address this issue by carefully studying two two-level systems (2 TLS) interacting with a bosonic environment that includes memory effects, starting from maximally entangled Bell states. We present exact solutions for both Markovian and post-Markovian dynamics, highlighting how environmental memory slows down and modifies entanglement loss. By using Wootters' concurrence as our measure of entanglement, we identify novel phenomena such as oscillations and partial revivals in the post-Markovian regime.

Our findings clearly show that environmental memory not only changes how quickly entanglement decays but also produces qualitatively new behaviors, enriching our understanding of open quantum systems. Therefore, this work provides a foundation and new insights for future research aimed at optimally controlling quantum entanglement under realistic experimental conditions.

Keywords: *Open quantum systems, TLS, Markovian, Post-Markovian, concurrence, Bell states, memory, Decoherence, entanglement, Quantum control.*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi madre y a mi hermano, cuyo apoyo y cariño fueron indispensables para superar una difícil etapa emocional y alcanzar esta primera contribución científica. Gracias a su compañía, hoy concluyo esta etapa académica.

A mi tíos Emigdio, Ana y a la maestra Yadi, cuyo apoyo económico y emocional fueron fundamentales para continuar con mis estudios y alcanzar esta meta.

A mis queridos amigos Roberto, Yahir, Carelly y Cinthya, quienes se convirtieron en luz y soporte en los difíciles momentos. Su incondicional compañía, cariño y amistad sincera me dieron la fuerza necesaria para superar las adversidades y llegar hasta aquí.

A la familia Valente Camacho, Doña Rosi, Don Audón, Sara y Jesús, quienes me brindaron cálidamente hospedaje y me hicieron sentir como parte de su familia al llegar a Puebla. Especialmente agradezco a Sara, cómplice incansable, por creer en mí incluso cuando dudaba. Su cobijo fue el faro que guio cada paso.

A mis tíos Emigdio y Lucy, quienes me ofrecieron un hogar durante el resto de mi estancia en Puebla, haciendo posible la conclusión de mis estudios de maestría.

A mi amigo Richy, hermano en este camino académico, con quien he colaborado, debatido y tejido ideas que iluminaron los desafíos de esta tesis. Tu ingenio y complicidad intelectual fueron faros indispensables; sin ellos, este logro no habría sido posible.

A mi equipo de maestría Edmundo, Ricardo, Miguel, Fernando, y Gustavo, cuyas valiosas discusiones sobre física enriquecieron enormemente mi formación y fueron fundamentales para estructurar esta tesis. Su apoyo aligeró las noches de estrés, y sus risas hicieron inolvidable cada reto. Gracias por ser más que un equipo.

A mi asesor de tesis, Dr. Juan Mauricio Torres González, cuyo invaluable empeño, paciencia y guía hicieron posible la realización de este proyecto y enriquecieron mi crecimiento personal y académico, introduciéndome al fascinante campo de la teoría de información cuántica.

A los académicos e investigadores que integran el comité evaluador de este trabajo, por su dedicación y tiempo valioso en analizar mi investigación, lo cual enriqueció sustancialmente esta tesis.

Finalmente se agradece a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado para la conclusión de esta tesis dentro del Eje IV. Modelo de Investigación abierta y compartida. Objetivo 13. Formar recursos humanos que impacten positivamente el contexto social y científico como consecuencia de su accionar en una comunidad para lograr una educación desarrolladora de la transformación. Indicador establecido en el Plan de Desarrollo Institucional 2021-2025. A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), cuyo apoyo económico a través de la beca ref: 000093, hizo posible la culminación de este proyecto.

Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
Agradecimientos	ix
Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xvii
Introducción	1
1 Sistemas cuánticos abiertos	3
1.1 Dinámica cuántica	4
1.1.1 Sistemas cuánticos cerrados	4
1.1.2 Sistemas cuánticos abiertos	5
1.2 Sistemas de dos niveles (TLS)	6
1.3 Operador de densidad	7
1.3.1 Estados puros y mixtos	8
1.3.2 Valores esperados	8
1.3.3 Operador de densidad reducido	9
1.3.4 Evolución temporal	10
1.4 Régimen markoviano	10
1.4.1 Dinámica de sistemas abiertos	11
1.4.2 Semigrupos dinámicos cuánticos	11
1.4.3 Ecuación maestra de Lindblad	12
1.5 Régimen post-markoviano	14
1.5.1 Ecuación maestra post-markoviana	14
2 Solución de sistemas markovianos	17
2.1 Ecuación de eigenvalores	18
2.1.1 Eigenvectores izquierdos y derechos	18

2.1.2	Vectorización	18
2.1.3	Eigensistema para 1 TLS	19
2.1.4	Eigensistema para 2 TLS	22
2.2	Solución de la ecuación maestra de Lindblad	32
2.3	Solución markoviana para 1 TLS	33
2.4	Solución markoviana para 2 TLS	35
2.4.1	Solución general	35
2.4.2	Solución para estados de Bell como condición inicial	38
3	Solución de sistemas post-markovianos	43
3.1	Solución de la ecuación post-markoviana	44
3.1.1	Derivación analítica de la solución general	44
3.1.2	Límite markoviano	47
3.2	Solución post-markoviana para 1 TLS	48
3.3	Solución post-markoviana para 2 TLS	50
3.3.1	Solución post-markoviana general	51
3.3.2	Estados de Bell como condiciones iniciales	52
4	Dinámica del entrelazamiento en el régimen markoviano y post-markoviano	57
4.1	Entrelazamiento Cuántico	58
4.1.1	Concurrencia como medida de entrelazamiento	58
4.1.2	Concurrencia para estados X	58
4.2	Concurrencia para el sistema de 2 TLS markoviano	59
4.3	Concurrencia para el sistema de 2 TLS post-markoviano	60
4.4	Generación de entrelazamiento a partir de estados separables	63
	Conclusiones	67
A	Determinación del eigensistema total markoviano	71
A.1	Cálculo de los eigenvalores del superoperador $\hat{\mathcal{K}}$	71
A.2	Derivación del eigensistema derecho para 2 TLS	72
A.3	Derivación del eigensistema izquierdo para 2 TLS	80
B	Cálculo de los coeficientes $C_i(0)$	83
C	Representación matricial en la base computacional	89
	Bibliografía	91

Índice de figuras

1.1	Representación de un sistema cuántico abierto $\mathcal{S}$ interactuando con su entorno $\mathcal{E}$. Las flechas negras simbolizan la interacción bidireccional $H_{\mathcal{SE}}$, responsable de procesos como decoherencia y disipación.	5
1.2	Representación del estado cuántico $ \psi\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ en la esfera de Bloch.	7
1.3	Esquema de conmutación del mapa dinámico $V(t)$	12
2.1	Diagrama de un 1 TLS con una tasa de decaimiento Γ y una separación de energía $\hbar\omega$	20
2.2	Esquema por bloques del operador densidad. Las líneas separan sectores de excitación; las flechas indican las conexiones inducidas por el salto $\mathcal{D}$ hacia sectores de menor excitación. Los elementos resaltados (verde) son anulados por $\mathcal{D}$ al contener $ gg\rangle$ o $\langle gg $	26
2.3	Esquema por bloques del operador densidad. Las líneas separan sectores de excitación; las flechas indican las conexiones inducidas por el salto $\mathcal{D}$ hacia sectores de mayor excitación. Los elementos resaltados (verde) son anulados por $\mathcal{D}^\dagger$ al contener $ ee\rangle$ o $\langle ee $	29
2.4	Evolución temporal de las poblaciones de un sistema de dos niveles bajo dinámica markoviana. La población del estado excitado $P_{ee}(t)$ decae exponencialmente, mientras que la del estado base $P_{gg}(t)$ aumenta hasta estabilizarse en el largo plazo, reflejando la relajación hacia $ g\rangle$	34
2.5	Evolución temporal de la coherencia en un sistema de dos niveles markoviano con $\omega = 8\Gamma$. Se ilustra la parte real, la parte imaginaria y el módulo de $P_{eg}(t)$, evidenciando la atenuación exponencial de la coherencia y la ausencia de resurgimientos en el régimen sin memoria.	34
2.6	Evolución temporal de las probabilidades de encontrar al sistema en los niveles $ ee\rangle$, $ eg\rangle$, $ ge\rangle$ y $ gg\rangle$ cuando se parte de cada uno de los cuatro estados de Bell. Los estados $ \Phi^\pm\rangle$ (dos excitaciones) vacían $ ee\rangle$ con rapidez y muestran un abultamiento intermedio en $ eg\rangle$, $ ge\rangle$ antes de relajarse por completo a $ gg\rangle$; en cambio, los estados $ \Psi^\pm\rangle$ (una excitación) se transfieren directamente a $ gg\rangle$ con pendiente a la mitad de velocidad. En todos los casos $ gg\rangle$ actúa como sumidero final.	39

- 2.7 Comportamiento de las coherencias que sostienen el entrelazamiento inicial. Para $|\Phi^\pm\rangle$, la amplitud $P_{ee,gg}(t)$ oscila a 2ω con $\omega = 6\Gamma$. Para $|\Psi^\pm\rangle$, la coherencia $P_{eg,ge}(t)$ carece de oscilaciones y decae exponencialmente con la misma escala temporal. Estas curvas reflejan que los pares $|\Phi^\pm\rangle$ pierden entrelazamiento al doble de velocidad que los pares $|\Psi^\pm\rangle$, sin exhibir muerte súbita en ningún caso. 40
- 3.1 Evolución post-markoviana de las poblaciones $P_{ee}(t)$ y $P_{gg}(t)$ para 1 TLS; el acoplamiento con memoria ralentiza el vaciado de la excitación inicial y genera un tramo no-exponencial antes de la relajación final. Mostramos una comparativa entre la dinámica markoviana (líneas punteadas) y post-markoviana (líneas continuas) bajo el parámetro $R = 2$. La memoria ambiental atenúa el decaimiento rápido típico del caso sin memoria, mostrando cómo el baño retroalimenta temporalmente la ocupación del estado excitado. 49
- 3.2 Comparación de la evolución temporal de la coherencia $|P_{eg}(t)|$ de 1 TLS en el régimen markoviano y post-markoviano. Para valores de $R \in [5, 2, 1, 0.5, 0.2]$ y $\delta = 5$, se observa que, al disminuir R , la solución PM converge a la M, mientras que para R grandes la cola de $|P_{eg}(t)|$ se prolonga debido a la influencia de la memoria. 50
- 3.3 Comparación de las poblaciones markovianas vs post-markovianas para los valores de $R \in [2, 0.5, 0.2]$. Cuando $R = 2$, la memoria frena la relajación y redondea las curvas; para $R = 0.5$: la disipación se acelera y el perfil se aproxima a la ley exponencial; y $R = 0.2$ hace que las trayectorias confluyan prácticamente con la solución markoviana, evidenciando la recuperación del límite sin memoria. 54
- 3.4 Comparación de la evolución temporal de la coherencia ($|P_{ee,ge}(t)|$ para los $\Phi^\pm$ y $|P_{eg,ge}(t)|$ para los $\Psi^\pm$) entre la dinámica markoviana y post-markoviana para $\delta = 5.0$ y $R \in [5, 2, 1, 0.5, 0.1]$. Se observa que para el caso de los $\Phi^\pm$ hay curvas PM que convergen a la curva M por abajo. Esto se debe a que el estado inicial es una superposición de dos excitaciones, mientras que para los $\Psi^\pm$ es una superposición de una excitación, ocasionando que las curvas PM queden por encima de la M. 55
- 4.1 Concurrencia para el sistema de 2 TLS en el régimen markoviano. La curva azul muestra la ley $C(\rho_{\Phi^\pm}^M)(t) = e^{-2\Gamma t}$, que tiene un decaimiento más rápido al partir de dos excitaciones, mientras que la curva naranja reproduce $C(\rho_{\Psi^\pm}^M) = e^{-\Gamma t}$, con una pérdida de entrelazamiento a la mitad de la velocidad cuando sólo hay una excitación. 60
- 4.2 Comparación de la evolución temporal de la concurrencia en el régimen markoviano (línea negra discontinua) y post-markoviano (líneas continuas) para valores $R \in [4, 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1]$ y $\delta = 5$. El panel izquierdo corresponde a la concurrencia para $|\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|$ como estado inicial; el derecho, a $|\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm|$. 62

- 4.3 Comparativa sobre la generación de entrelazamiento en ambos regímenes para un valor de acoplamiento $\Lambda = 0.5\Gamma$ y valores de $\gamma \in [3, 1, 0.5]$. La gráfica muestra que la curva negra (markoviana) tiene un pico alto pero decae más rápido a cero. Las curvas post-markovianas tienen picos más bajos, pero sus colas son más largas, indicando una mayor duración del entrelazamiento a tiempos mayores. 65

Índice de tablas

2.1	Eigensistema para vectores derechos $(\lambda_i, \hat{\rho}_{\lambda_i})$ y vectores izquierdos $(\lambda_i, \check{\rho}_{\lambda_i})$ de 1 TLS.	22
2.2	Eigensistema del hamiltoniano efectivo no hermítico $\hat{K}$ y $\hat{K}^\dagger$	25
2.3	Eigensistema para vectores derechos $(\lambda_i, \hat{\rho}_{\lambda_i})$ de 2 TLS.	28
2.4	Eigensistema para vectores izquierdos $(\lambda_i, \check{\rho}_{\lambda_i})$ de 2 TLS.	31
2.5	Eigensistema para vectores derechos $(\lambda_i, \hat{\rho}_{\lambda_i})$ y vectores izquierdos $(\lambda_i, \check{\rho}_{\lambda_i})$ de 2 TLS.	32
2.6	Expresiones iniciales de los coeficientes markovianos $C_{\lambda_i}(0)$ para 2 TLS con la definición $\chi = \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda}$	36

Introducción

La necesidad de controlar y preservar fenómenos cuánticos como la coherencia y el entrelazamiento es uno de los mayores desafíos actuales en física [1]. Tecnologías emergentes, como la computación cuántica y la criptografía cuántica [2], dependen fundamentalmente de la capacidad para manipular y mantener estas delicadas propiedades cuánticas. Sin embargo, en situaciones prácticas, los sistemas cuánticos reales nunca están completamente aislados, sino que interactúan inevitablemente con un entorno externo, generando procesos irreversibles que comprometen su funcionamiento. Entender cómo esta interacción ambiental influye en la dinámica de sistemas cuánticos es crucial para desarrollar estrategias efectivas de protección y control.

Actualmente, la teoría de sistemas cuánticos abiertos ofrece diferentes aproximaciones para describir estas interacciones. La más conocida es la dinámica markoviana [3], adecuada cuando los tiempos de correlación del entorno son mucho más cortos que las escalas características del sistema. Bajo estas condiciones, la evolución se describe rigurosamente por ecuaciones maestras de tipo Lindblad, que garantizan completa positividad y una estructura de semigrupo. Este marco ha sido extraordinariamente fructífero tanto para obtener soluciones analíticas como para diseñar y validar protocolos experimentales. Cuando dichas condiciones dejan de cumplirse, la ausencia de memoria deja de ser una buena aproximación y se requieren extensiones no markovianas [4, 5], que capturan correlaciones temporales del entorno a costa de desafíos analíticos y numéricos adicionales.

En este panorama, el régimen post-markoviano emerge como una alternativa particularmente interesante [6]. Este formalismo incorpora efectos de memoria ambiental de manera manejable, permitiendo interpolar entre la dinámica markoviana y escenarios con memoria significativa, manteniendo al mismo tiempo tratabilidad analítica y una interpretación física transparente. No obstante, hasta ahora este enfoque había sido aplicado principalmente a sistemas simples, quedando pendiente la exploración sistemática del caso bipartito, donde efectos colectivos y de entrelazamiento enriquecen sustancialmente la dinámica.

Esta tesis aborda precisamente este vacío, presentando por primera vez una solución analítica completa para la dinámica post-markoviana de dos sistemas de dos niveles (2 TLS) acoplados, fundamentales en muchas aplicaciones tecnológicas cuánticas. Nuestra investigación no solo extiende el formalismo post-markoviano al caso bipartito, sino que revela cómo la memoria ambiental modula tanto la evolución como la generación de entrelazamiento. A diferencia de estudios previos [7, 8], examinamos escenarios que van desde la evolución de estados inicialmente entrelazados —estudiando cómo la memoria ambiental puede prolongar su vida útil— hasta la generación de correlaciones cuánticas a partir de estados separables, revelando así el papel dual del entorno: aunque típicamente actúa como un agente destructivo, bajo condiciones de memoria puede facilitar la creación y mantenimiento de correlaciones cuánticas.

La presente tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se establecen las bases matemáticas indispensables. Partimos de una visión general sobre sistemas cuánticos abiertos y cerrados, para profundizar luego en la estructura teórica específica de 1 TLS. Introducimos formalmente el operador de densidad [9], con estados puros y mixtos, valores esperados y pureza. Finalmente, abordamos las ecuaciones maestras que gobiernan la dinámica markoviana y post-markoviana, sentando así los fundamentos para el análisis de los capítulos posteriores.

El Capítulo 2 analiza el régimen markoviano, donde el entorno se presenta como un agente sin memoria, que actúa de manera instantánea sobre los sistemas cuánticos. Aquí, encontramos soluciones exactas de la ecuación de Lindblad para sistemas de 1 TLS y de 2 TLS. El régimen markoviano no solo proporciona claridad conceptual, sino que además permite soluciones analíticas cerradas permitiéndonos identificar de manera precisa cómo decaen exponencialmente las coherencias y cómo se degrada el entrelazamiento, estableciendo así un punto de referencia indispensable para contrastar con escenarios más complejos.

En el Capítulo 3 exploramos el régimen post-markoviano, introduciendo la memoria ambiental a través del núcleo de memoria en la ecuación maestra propuesta por Shabani y Lidar [6]. Este régimen permite observar fenómenos fascinantes, como la recuperación parcial de coherencias y resurgimientos del entrelazamiento, destacando la influencia del pasado en la dinámica actual del sistema. Derivamos soluciones exactas generales para sistemas de 1 TLS y 2 TLS, analizando explícitamente la evolución de estados de Bell en presencia de memoria. Además, mostramos cómo se recupera el límite markoviano cuando el parámetro de memoria es muy grande.

Finalmente, el Capítulo 4 profundiza en la dinámica del entrelazamiento cuántico en ambos regímenes. Utilizando la concurrencia como medida cuantitativa, estudiamos tanto la evolución de estados inicialmente entrelazados como la generación de entrelazamiento a partir de estados separables. Observamos cómo la memoria ambiental induce comportamientos no triviales —como oscilaciones, resurgimientos y una generación más sostenida de correlaciones— en contraste con el decaimiento exponencial característico del régimen markoviano.

En conjunto, esta investigación proporciona herramientas analíticas y conceptuales para entender y aprovechar los efectos de memoria ambiental en sistemas cuánticos compuestos. Esperamos que estos aportes no solo enriquezcan nuestra comprensión fundamental de los sistemas cuánticos abiertos, sino que también inspiren nuevas estrategias para transformar lo que tradicionalmente se consideraba una limitación —la interacción con el entorno— en un recurso explotable para tecnologías cuánticas más robustas y eficientes.

Sistemas cuánticos abiertos

El contraste entre el determinismo clásico y la indeterminación cuántica ha desafiado a la física desde los albores de la teoría cuántica. Mientras el formalismo de Schrödinger predice superposiciones arbitrarias de estados, la experiencia macroscópica se manifiesta definida y categórica. Esta aparente contradicción se resuelve al reconocer la inevitabilidad de las interacciones ambientales: todo sistema físico está intrínsecamente acoplado a grados de libertad inaccesibles, que actúan como un registro de su evolución.

Este acoplamiento sistema-entorno genera un fenómeno de selección ambiental donde ciertos estados cuánticos —aquellos compatibles con los observadores clásicos— se tornan privilegiados, dinámicamente. La decoherencia, lejos de ser un mero artefacto teórico, opera como un mecanismo de emergencia termodinámica que filtra las superposiciones cuánticas, estableciendo una jerarquía entre lo observable y lo prohibitivo. En tecnologías cuánticas, esta interacción dual representa tanto un obstáculo (degradación de superposiciones) como un recurso (canalización controlada de información). Es precisamente esta dualidad la que impulsa nuevas estrategias en ingeniería cuántica, donde el objetivo ya no es eliminar completamente el entorno, sino aprovechar sus características intrínsecas para optimizar protocolos cuánticos robustos.

La transición entre el comportamiento cuántico y la realidad clásica no es una frontera estática, sino un paisaje dinámico moldeado por interacciones ambientales. Este capítulo desentraña los principios que gobiernan sistemas cuánticos en diálogo constante con su entorno, donde la unitariedad de la evolución se fractura para revelar fenómenos emergentes como la decoherencia y la relajación. La frontera entre lo clásico y lo cuántico, tradicionalmente considerada rígida, ahora se presenta como un continuo donde la interacción sistema-entorno establece reglas dinámicas que gobiernan la emergencia de fenómenos colectivos y macroscópicos.

Al abandonar la idealización de sistemas cerrados, se construye un formalismo matemático capaz de describir intercambios de información cuántica con grados de libertad inaccesibles. Desde modelos simplificados de dos niveles hasta ecuaciones maestras no markovianas, cada herramienta teórica ilumina facetas de un mismo problema: cómo la irreversibilidad ambiental redefine los límites del control cuántico. Este enfoque permite una descripción más precisa y profunda, revelando cómo efectos sutiles como las correlaciones ambientales y la memoria influyen decisivamente en la dinámica del sistema cuántico.

Este marco no solo explica la emergencia de propiedades clásicas, sino que también establece las bases para resolver analíticamente la dinámica de TLS en regímenes markovianos y post-markovianos. A través de operadores de densidad, superoperadores de Lindblad y núcleos de memoria, se teje un puente entre la abstracción matemática y aplicaciones en dispositivos realistas. Las secciones siguientes explorarán cómo estos conceptos permiten

modelar la evolución de coherencias, poblaciones y entrelazamiento, sentando las bases para los capítulos 3 y 4, donde se resolverán sistemas de uno y dos TLS en ambos regímenes.

1.1. DINÁMICA CUÁNTICA

La dinámica cuántica abarca un espectro amplio de fenómenos donde los sistemas pueden encontrarse perfectamente aislados, preservando su coherencia y evolucionando únicamente bajo sus propias reglas internas, o bien, interactuando inevitablemente con su entorno, perdiendo información de forma irreversible. Para entender cabalmente estas situaciones, conviene distinguir claramente entre dos escenarios fundamentales: aquellos sistemas que permanecen herméticamente aislados, y aquellos cuya evolución está determinada significativamente por influencias externas. Estos dos marcos representan extremos conceptuales esenciales para abordar con rigor la descripción física de la realidad cuántica.

1.1.1. Sistemas cuánticos cerrados

En el ámbito de la física cuántica, un sistema cerrado se define como una entidad teórica que no intercambia energía, materia ni información con su entorno externo. Matemáticamente, su dinámica se rige por la ecuación de Schrödinger, la cual garantiza una evolución temporal determinista y reversible, descrita mediante operadores unitarios. Esta unitariedad preserva la norma del estado cuántico, asegurando la conservación de probabilidades y, en sistemas con hamiltonianos independientes del tiempo, la energía total se mantiene constante.

Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert asociado al sistema. La dinámica está descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

donde $\hat{H}$ es el operador hamiltoniano del sistema (hermítico: $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$), y $|\psi(t)\rangle$ es el vector de estado del sistema. La evolución temporal se expresa mediante un operador unitario $\hat{U}(t, t_0)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0). \quad (1.2)$$

Esta es la ecuación de Schrödinger para el operador de evolución temporal. Hay tres casos para esta ecuación que deben tratarse por separado [10].

Caso 1. Si el hamiltoniano es independiente del tiempo, la solución a (1.2) es:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(0)\rangle, \quad \hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}. \quad (1.3)$$

La unitariedad ($\hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{1}$) garantiza la conservación de la probabilidad ($\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$) para todo t , y la reversibilidad temporal, reflejando la conservación estricta de energía y coherencia.

Caso 2. Si el operador hamiltoniano $\hat{H}$ depende del tiempo, pero con $\hat{H}$ conmutando en diferentes tiempos. La solución formal a la ecuación (1.2) en este caso es:

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt' \right). \quad (1.4)$$

Esta expresión generaliza la exponencial de operadores al caso no autónomo, preservando unitariedad y determinismo.

Caso 3. Si $\hat{H}$ no conmuta en diferentes tiempos. La solución formal en esta situación viene dada por:

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \cdots \hat{H}(t_n), \quad (1.5)$$

la cual es conocida como la *serie de Dyson*.

Pese a su utilidad teórica, los sistemas cerrados representan una idealización que solo se aproxima a sistemas físicos reales en condiciones extremas de aislamiento, como en cavidades superconductoras de QED cuántica o trampas de iones ultraenfriados. Su descripción unitaria es fundamental para algoritmos cuánticos, donde la coherencia se preserva durante operaciones lógicas, y en protocolos de metrología que explotan superposiciones sin decaimiento. Sin embargo, esta idealización falla al considerar que todo sistema real interactúa, aunque sea débilmente, con grados de libertad externos —un entorno térmico, campos fluctuantes o instrumentos de medición—. Estas interacciones rompen la unitariedad, introduciendo disipación y decoherencia que degradan superposiciones cuánticas. Así, mientras los sistemas cerrados capturan la esencia de la reversibilidad microscópica, la transición a sistemas abiertos se vuelve indispensable para modelar efectos termodinámicos, relajación a equilibrio y límites fundamentales en tecnologías cuánticas.

1.1.2. Sistemas cuánticos abiertos

Un sistema cuántico abierto se caracteriza por su intercambio dinámico e irreversible con un entorno externo (Figura 1.1), rompiendo la unitariedad idealizada de los sistemas cerrados. Aquí, la evolución no está dictada únicamente por el hamiltoniano del sistema, sino que incorpora efectos de fluctuaciones, disipación de energía y correlaciones cuánticas con el medio. Esta interacción se modela mediante ecuaciones maestras, que describen procesos no unitarios, donde la coherencia cuántica se degrada progresivamente debido a la influencia del medio.

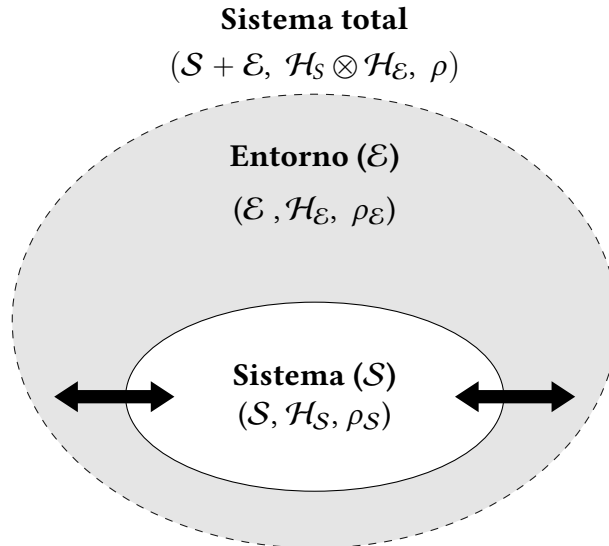


Figura 1.1: Representación de un sistema cuántico abierto S interactuando con su entorno E . Las flechas negras simbolizan la interacción bidireccional H_{SE} , responsable de procesos como decoherencia y disipación.

En el estudio de sistemas cuánticos abiertos, consideramos un sistema principal S que interactúa de manera no trivial con un reservorio ambiental E [3]. Este último actúa como

un banco de memoria cuántica, almacenando información y energía intercambiada durante la evolución. El sistema conjunto $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ se describe mediante espacios de Hilbert complementarios: $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ para el subsistema de interés y $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ para el ambiente. El espacio total se define como el producto tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Los estados físicamente admisibles del sistema global se representan mediante operadores densidad ρ , que abordamos en la [§Sección 1.3](#).

En sistemas cuánticos abiertos, el estado efectivo de un subsistema de interés $\mathcal{S}$ no puede describirse de manera aislada, pues está intrínsecamente entrelazado con los grados de libertad de su entorno $\mathcal{E}$. Para acceder a una descripción práctica, se recurre a la *traza parcial*, una operación matemática que “promedia” los efectos del entorno, permitiendo enfocarse únicamente en la evolución del subsistema $\mathcal{S}$. Este proceso no elimina la influencia ambiental, sino que la encapsula en términos estadísticos, revelando cómo la interacción con el entorno degrada coherencias cuánticas y redistribuye energía. La dinámica global del sistema compuesto está gobernada por un operador hamiltoniano [\[3, 11, 12\]](#):

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}}_{\text{Subsistema}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes \hat{H}_{\mathcal{E}}}_{\text{Entorno}} + \underbrace{\hat{H}_{\mathcal{SE}}}_{\text{Interacción}}, \quad (1.6)$$

donde $H_{\mathcal{SE}}$ modela la interacción sistema–entorno. La dinámica exacta de $\rho_{\mathcal{S}}(t)$ requiere resolver la ecuación de von Neumann la cual, bajo las aproximaciones de *acoplamiento débil* y *memoria corta*, esta descripción se reduce a una ecuación maestra markoviana para $\rho_{\mathcal{S}}(t)$, como se detallará en la [§Sección 1.4](#).

1.2. SISTEMAS DE DOS NIVELES (TLS)

Los sistemas de dos niveles (TLS por sus siglas en inglés) son la manifestación física de un bit cuántico o qubit —la unidad fundamental de información cuántica— [\[13\]](#). Mientras un bit clásico solo puede asumir valores 0 ó 1, un qubit existe en una superposición cuántica de ambos, permitiendo procesar información en paralelo mediante interferencia cuántica.

En la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, cualquier estado puro de un qubit (hasta una fase global) puede parametrizarse como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi). \quad (1.7)$$

Esta parametrización (véase la [Figura 1.2](#)) cubre todos los estados puros y es equivalente a $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ con $\alpha = \cos(\theta/2)$, $\beta = e^{i\phi} \sin(\theta/2)$, lo cual garantiza $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Aquí, θ y ϕ son coordenadas esféricas: θ controla la proporción entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$, mientras que ϕ representa la fase relativa responsable de la interferencia cuántica.

La capacidad de los TLS para existir en superposiciones coherentes de estados base —visualizadas geométricamente en la esfera de Bloch— constituye el cimiento de tecnologías cuánticas revolucionarias. En computación cuántica, los TLS implementan qubits físicos en arquitecturas como circuitos superconductores (IBM Quantum) [\[14, 15\]](#) y trampas de iones (Honeywell) [\[16\]](#), donde pulsos de microondas o láser inducen rotaciones precisas en la esfera de Bloch, ejecutando operaciones lógicas. El entrelazamiento entre dos qubits requiere interacciones específicas entre ellos; en esta sección nos enfocamos únicamente en el comportamiento de un TLS y en su representación geométrica.

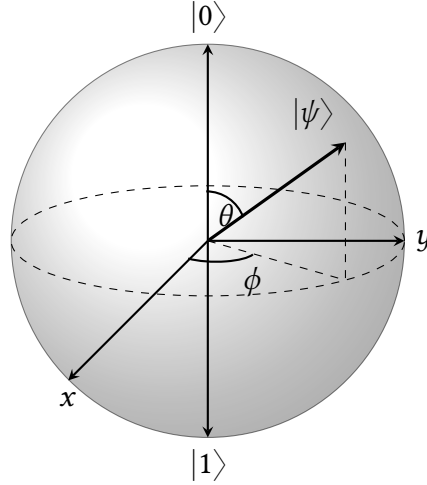


Figura 1.2: Representación del estado cuántico $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ en la esfera de Bloch.

Cuando el TLS interactúa con su entorno, su evolución ya no es puramente unitaria: las superposiciones se atenúan y las poblaciones pueden redistribuirse. Este efecto puede describirse con ecuaciones maestras que incorporan la influencia del entorno. Más adelante compararemos dos descripciones estándar —markoviana y post-markoviana— para analizar cómo cambia la dinámica según haya o no efectos de memoria ambiental.

En síntesis, el TLS ofrece un lenguaje geométrico directo (la esfera de Bloch) y un modelo mínimo para estudiar preparación, control y pérdida de propiedades cuánticas. Por esa razón lo tomamos como punto de partida del capítulo y como base para los análisis que desarrollaremos en las secciones siguientes.

1.3. OPERADOR DE DENSIDAD

El operador de densidad, también conocido como matriz densidad, es una herramienta fundamental en mecánica cuántica para describir sistemas cuánticos en estados puros, mezcla estadística o en interacción con entornos. A diferencia del vector de estado $|\psi\rangle$, que solo puede representar sistemas aislados y perfectamente conocidos, el operador de densidad permite modelar sistemas con incertidumbre clásica (ignorancia sobre el estado preparado) y cuántica (decoherencia). Esta sección desarrolla el formalismo matemático, propiedades físicas y aplicaciones avanzadas del operador de densidad, sentando las bases para la teoría de sistemas cuánticos abiertos.

Definición 1. Para un sistema cuántico genérico, el operador de densidad se define como:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (1.8)$$

para un ensamble estadístico de estados puros $\{|\psi_i\rangle\}$ con probabilidades $\{p_i\}$.

Este operador actúa en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y satisface tres propiedades fundamentales [17]:

- Hermiticidad: $\rho = \rho^\dagger$,
- Positividad completa: $\rho \geq 0$,
- Traza unitaria: $\text{Tr}[\rho] = \sum_i p_i \text{Tr}[|\psi_i\rangle\langle\psi_i|] = \sum_i p_i = 1$
- Condición de traza: $\text{Tr}[\rho^2] \leq 1$.

Estas propiedades establecen las propiedades esenciales del operador de densidad, permitiéndole describir sistemas cuánticos con información completa o parcial. A diferencia del enfoque convencional basado en vectores de estado, este formalismo no solo representa coherencia cuántica en estados puros, sino también incertidumbre clásica mediante mezclas estadísticas. Su versatilidad lo hace fundamental en el estudio de subsistemas entrelazados, termodinámica cuántica y preparaciones no ideales. La distinción entre estados puros y mixtos, que analizaremos a continuación, revelará cómo este operador unifica y generaliza la descripción cuántica, trascendiendo las limitaciones de los vectores de estado.

1.3.1. Estados puros y mixtos

El formalismo del operador de densidad describe de manera unificada dos clases de estados cuánticos: *estados puros* y *estados mixtos*. La diferencia entre ambos está en la información que codifican y en sus propiedades matemáticas.

Un estado puro corresponde a la descripción máxima del sistema y está representado por un proyector de rango uno, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, con $|\psi\rangle$ normalizado. Este operador es *idempotente* ($\rho^2 = \rho$) y no contiene mezcla estadística. Para fijar ideas, si $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, entonces su matriz densidad es $\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; los elementos fuera de la diagonal reflejan coherencias en la base elegida.

Para cuantificar el “grado de mezcla” introducimos la *pureza* del estado:

$$\mathcal{P}(\rho) \equiv \text{Tr}[\rho^2].$$

Con esta definición, $\mathcal{P} = 1$ si y solo si el estado es puro (equivalentemente, $\rho^2 = \rho$); en el ejemplo anterior, $\mathcal{P} = 1$. En espacios de dimensión finita d , el estado de máxima mezcla $\rho = \mathbb{1}/d$ tiene $\mathcal{P} = 1/d$.

Un estado mixto describe conocimiento estadístico incompleto (por mezcla de preparaciones o por reducción de un sistema compuesto) y puede escribirse como combinación convexa de proyectores, $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, con $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$. En general ya no es idempotente y su pureza es estrictamente menor que 1. Por ejemplo, la mezcla equiprobable $\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$ se representa como $\frac{1}{2}\mathbb{1}$ y cumple $\mathcal{P} = \frac{1}{2}$; la ausencia de términos fuera de la diagonal indica pérdida total de coherencia en esa base.

Físicamente, la distinción es clara: un estado puro puede mostrar incertidumbre cuántica (superposición), mientras que un estado mixto incorpora además incertidumbre clásica. En sistemas compuestos, tomar la traza parcial de un estado entrelazado produce, en general, un estado reducido mixto, ilustrando cómo el entrelazamiento genera mezcla estadística en los subsistemas.

1.3.2. Valores esperados

Podemos calcular los valores esperados mediante la operación de *traza*. La traza de un operador A es simplemente la suma de los elementos diagonales de la matriz con respecto a cualquier conjunto completo y ortonormal de estados $|n\rangle$:

$$\text{Tr}[A] = \sum_n \langle n|A|n\rangle. \quad (1.9)$$

En el formalismo del operador de densidad, el cálculo de valores esperados adquiere una generalización natural que unifica la descripción de estados puros y mixtos. Para cualquier

observable físico representado por un operador hermítico A , el valor esperado se obtiene mediante la operación de traza:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A], \quad (1.10)$$

donde ρ es el operador de densidad del sistema. Esta expresión engloba tanto casos de conocimiento completo (estados puros) como parcial (estados mixtos), preservando la consistencia con la mecánica cuántica estándar. Esta formulación no solo preserva la estructura probabilística de la mecánica cuántica, sino que también establece un puente matemático entre descripciones microscópicas y macroscópicas.

1.3.3. Operador de densidad reducido

El formalismo del operador de densidad no solo unifica la descripción de estados puros y mixtos, sino que también permite abordar sistemas cuánticos compuestos donde solo se tiene acceso parcial a la información.

Considérese un sistema total dividido en dos subsistemas, A y B , cuyo estado conjunto está descrito por un operador de densidad ρ^{AB} . Si el interés recae únicamente en las propiedades físicas del subsistema A , cualquier predicción experimental sobre A debe prescindir de la información asociada a B . Esta necesidad de ignorancia controlada se resuelve mediante la operación de traza parcial, que define el operador de densidad reducido para el sistema A y B [13]. Sea $\{|a_i\rangle\}$ una base ortonormal de A y $\{|b_k\rangle\}$ una de B . Los elementos de matriz de ρ^{AB} en la base producto se definen por

$$\rho_{ik,jl} = \langle a_i b_k | \rho^{AB} | a_j b_l \rangle. \quad (1.11)$$

Con esos elementos, la expansión general de ρ^{AB} es

$$\rho^{AB} = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ik,jl} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_k\rangle\langle b_l|. \quad (1.12)$$

La traza parcial sobre B y sobre A , respectivamente, se definen como

$$\begin{aligned} \rho^A &= \text{Tr}_B[\rho^{AB}] = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ik,jl} |a_i\rangle\langle a_j| \text{Tr}[|b_k\rangle\langle b_l|] = \sum_{i,j,k} \rho_{ik,jk} |a_i\rangle\langle a_j|, \\ \rho^B &= \text{Tr}_A[\rho^{AB}] = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ik,jl} \text{Tr}[|a_i\rangle\langle a_j|] |b_k\rangle\langle b_l| = \sum_{i,k,l} \rho_{ik,il} |b_k\rangle\langle b_l|. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Consideremos el ejemplo de un sistema compuesto AB en el estado entrelazado (Bell):

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B),$$

con operador de densidad global $\rho^{AB} = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|$. Para obtener el estado reducido del subsistema A , aplicamos la traza parcial sobre B :

$$\rho^A = \text{Tr}_B[\rho^{AB}] = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0|_A + |1\rangle\langle 1|_A).$$

Este resultado es un estado mixto con igual probabilidad de encontrar A en $|0\rangle$ o $|1\rangle$, a pesar de que el estado global es puro. La operación de traza parcial ha convertido correlaciones cuánticas (entrelazamiento) en una mezcla estadística clásica, evidenciando cómo la pérdida de información sobre B degrada la coherencia cuántica de A .

1.3.4. Evolución temporal

En sistemas cerrados, la dinámica del operador densidad sigue una trayectoria unitaria gobernada por la ecuación de von Neumann [3]:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho] = \mathcal{L}\rho, \quad (1.14)$$

que generaliza la ecuación de Schrödinger para operadores de densidad. Aquí $\mathcal{L}$ es el *superoperador liouvilliano*, definido como $\mathcal{L}[\cdot] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \cdot]$. Los superoperadores, a diferencia de los operadores convencionales, actúan sobre matrices (operadores de densidad) en lugar de vectores de estado, generalizando así el espacio de operaciones cuánticas.

En sistemas aislados, la dinámica de la matriz de densidad sigue una evolución gobernada por operadores unitarios. Concretamente, el propagador temporal $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ actúa sobre el estado inicial $\rho(0)$, modelando su transformación en el tiempo:

$$\rho(t) = \hat{U}(t)\rho(0)\hat{U}^\dagger(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\rho(0)e^{i\hat{H}t/\hbar}. \quad (1.15)$$

Esta formulación muestra que, en sistemas cerrados, la evolución unitaria preserva el espectro de la matriz de densidad global; en particular, la pureza permanece constante:

$$\text{Tr}[\rho^2] = \text{Tr}\left[\hat{U}(t)\rho(0)\underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{U}}_{\mathbb{1}}\rho(0)\hat{U}^\dagger\right] = \text{Tr}[\rho^2(0)\hat{U}\hat{U}^\dagger] = \text{Tr}[\rho^2(0)] \quad (1.16)$$

donde hemos usado la propiedad cíclica de la traza.

Sin embargo, ni la coherencia respecto de una base fija ni el entrelazamiento respecto de una bipartición se conservan en general bajo una transformación unitaria cualquiera: solo permanecen invariantes frente a transformaciones locales (del tipo $U_A \otimes U_B$). En sistemas compuestos, una operación unitaria con interacción puede convertir un estado producto en uno entrelazado (y la inversa también), y los estados reducidos de los subsistemas pueden volverse mixtos aun cuando el sistema total siga siendo puro.

Por ejemplo, si partimos de $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ y aplicamos la inversa (CNOT seguida de Hadamard en el primer qubit) volvemos a $|00\rangle$: el entrelazamiento desaparece aunque la pureza global no cambió; de forma análoga, un Hadamard sobre $|0\rangle$ crea (y al aplicarlo de nuevo elimina) coherencia en la base computacional, también sin cambiar la pureza.

El superoperador $\mathcal{L}$ en la ecuación de von Neumann es solo un ejemplo de una clase más amplia de superoperadores que describen dinámicas cuánticas. En sistemas abiertos, por ejemplo, la evolución se modela mediante superoperadores no unitarios como los de la ecuación de Lindblad, que incluyen términos disipativos. En la siguiente subsección, exploraremos formalmente la teoría de superoperadores y las definiciones más relevantes.

1.4. RÉGIMEN MARKOVIANO

En el estudio de sistemas cuánticos abiertos, el régimen markoviano emerge como un marco teórico esencial para describir dinámicas donde las interacciones sistema-entorno operan en escalas temporales drásticamente separadas. Este régimen se caracteriza por dos propiedades fundamentales:

1. *Separación de tiempos*: La escala temporal característica del entorno, τ_E (tiempo de correlación ambiental), es mucho menor que la del sistema, τ_S ($\tau_E \ll \tau_S$).
2. *Pérdida rápida de memoria*: Las correlaciones cuánticas entre el sistema y el entorno decaen exponencialmente, sin retroalimentación significativa.

Estos postulados implican que el entorno actúa como un “baño ideal” que no retiene información sobre el estado pasado del sistema, permitiendo modelar la evolución mediante ecuaciones diferenciales locales en el tiempo.

Este formalismo encuentra aplicaciones en sistemas donde el acoplamiento ambiente-sistema es débil y las fluctuaciones ambientales son rápidas, como en: Qubits superconductores sometidos a ruido térmico de microondas, átomos en cavidades ópticas con fugas de fotones o espines nucleares en campos magnéticos fluctuantes.

Sin embargo, su validez se limita a escenarios donde los efectos de memoria ambiental (no markovianos) son despreciables. Cuando $\tau_E \sim \tau_S$, la dinámica exige extensiones post-markovianas, como se discutirá en la [Sección 1.5](#).

1.4.1. Dinámica de sistemas abiertos

La matriz de densidad ρ contiene más información de la necesaria para describir al sistema S , por lo que uno de los propósitos en los sistemas cuánticos abiertos es analizar, ya sea analítica o numéricamente, el comportamiento dinámico de un conjunto limitado de variables que representan al subsistema S . Para lograr esto, se intenta comúnmente suprimir las variables del entorno de las ecuaciones dinámicas y obtener una ecuación de movimiento efectiva para el estado reducido ρ_S , conocida como la *ecuación maestra* [3]. En general, la ecuación maestra está dada por una expresión de la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S = \frac{1}{i\hbar}[H'_S, \rho_S] + \mathcal{D}\rho_S = \mathcal{L}\rho_S \quad (1.17)$$

donde $\mathcal{L}$ es un *superoperador*, es decir, un operador que actúa sobre otro operador. El hamiltoniano H'_S es un hamiltoniano modificado y el término $\mathcal{D}\rho_S$ es el responsable de la dinámica no unitaria.

Suponiendo que el estado del sistema compuesto $S + E$ se representa mediante una matriz de densidad global ρ , la descripción efectiva del subsistema S se obtiene al eliminar los grados de libertad del entorno mediante la traza parcial:

$$\rho_S = \text{Tr}_E \rho \quad (1.18)$$

Al tratarse de un sistema aislado, la evolución temporal de ρ está determinada por una transformación unitaria, lo cual permite expresar la dinámica del subsistema como:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E \left[\hat{U}(t, 0) \rho(0) \hat{U}^\dagger(t, 0) \right]. \quad (1.19)$$

donde $U(t, 0)$ es el operador de evolución temporal del sistema total. Si tomamos la traza parcial sobre el entorno en ambos lados de la ecuación (1.14), la ecuación de movimiento para la matriz de densidad reducida es:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_E [H(t), \rho(t)]. \quad (1.20)$$

1.4.2. Semigrupos dinámicos cuánticos

La evolución del sistema reducido, determinada por las relaciones exactas (1.19) y (1.20), exhibe un grado de complejidad matemática en su formulación general. Para abordar la dinámica de sistemas reducidos, una estrategia clave radica en emplear los denominados *mapas dinámicos*. [3, 18]. Para ello, se supone que el sistema y el entorno están desacoplados entre sí al principio y que el entorno permanece constante en el tiempo $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E$,

donde $\rho_S(0)$ es el estado inicial del sistema reducido S y ρ_E representa algún estado de referencia del entorno. De esta manera la evolución temporal del sistema reducido está descrita por

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E \left[\hat{U}(t, 0) \rho(0) \hat{U}^\dagger(t, 0) \right] = \text{Tr}_E [\hat{U}(t, 0) (\rho_S(0) \otimes \rho_E) \hat{U}^\dagger(t, 0)]. \quad (1.21)$$

Este mapa que describe el cambio del sistema abierto a lo largo del tiempo t se denomina *mapa dinámico* (ver [Figura 1.3](#)).

$$\begin{array}{ccc} \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E & \xrightarrow{\text{Evolución unitaria}} & \rho(t) = \hat{U}(t, 0) [\rho_S(0) \otimes \rho_E] \hat{U}^\dagger(t, 0) \\ \text{Tr}_E \downarrow & & \downarrow \text{Tr}_E \\ \rho_S(0) & \xrightarrow{\text{Mapa dinámico}} & \rho_S(t) = V(t) \rho_S(0) \end{array}$$

Figura 1.3: Esquema de conmutación del mapa dinámico $V(t)$.

Esto se puede utilizar para especificar un *mapa dinámico* que calcula la matriz de densidad del sistema en un momento dado en el tiempo, el cual formalmente está definido como [\[3\]](#):

$$\begin{aligned} V(t) : \mathcal{H}_S &\rightarrow \mathcal{H}_S \\ \rho_S(0) &\mapsto \rho_S(t) = V(t) \rho_S(0). \end{aligned} \quad (1.22)$$

A partir de la definición anterior, entenderemos por $V(t)$ el mapa que lleva el estado reducido del sistema en $t = 0$ al estado en el tiempo t : $\rho_S(t) = V(t) \rho_S(0)$. Para que sea físicamente admisible, $V(t)$ debe ser completamente positivo y preservador de traza (CPTP). En dimensión finita esto es equivalente a la forma de Kraus [\[19\]](#):

$$V(t) \rho = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(t) \rho K_{\alpha}^{\dagger}(t), \quad \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{\dagger}(t) K_{\alpha}(t) = \mathbb{1}. \quad (1.23)$$

Esta representación garantiza, sin mayor detalle aquí, la conservación de la traza y de la hermiticidad del estado reducido.

En lo que sigue trabajaremos con familias $V(t)$ que son CPTP. La estructura específica del régimen markoviano y su ecuación maestra se presentarán en la siguiente sección.

1.4.3. Ecuación maestra de Lindblad

El marco más elemental para modelar procesos cuánticos abiertos se sustenta en el enfoque markoviano, una aproximación que simplifica la descripción dinámica al asumir un desacople rápido de correlaciones ambientales. En esencia, esta hipótesis postula que las interacciones entre el sistema y su entorno generan correlaciones temporales τ_E que se desvanecen rápidamente en comparación con la escala temporal característica de evolución del sistema τ_S .

Bajo esta perspectiva, el tiempo de memoria del entorno τ_E —asociado al decaimiento de autocorrelaciones— es insignificante frente al tiempo de relajación o decoherencia τ_S , donde el estado del sistema experimenta cambios observables. La validez de la aproximación se condensa en la relación de escalas temporales $\tau_E \ll \tau_S$ la cual permite despreciar efectos de memoria y formular ecuaciones maestras locales en el tiempo.

Aunque la formulación es ampliamente aplicable, se puede simplificar considerablemente al suponer que $\{V(t) : t \geq 0\}$, con $V(0) = \mathbb{1}$, cumple con la propiedad de markovianidad (no tener memoria), es decir,

$$V(t + s, 0) = V(t, 0)V(s, 0) \quad \forall t, s \geq 0, \quad (1.24)$$

es decir, forma un semigrupo dinámico cuántico (dinámica markoviana y homogénea en el tiempo).

La clave de la ecuación anterior es que el desarrollo futuro de un sistema abierto se determina solo por su estado presente, sin tener en cuenta el camino que haya recorrido anteriormente. La ecuación que describe cómo cambia $\rho_S(t)$ a lo largo del tiempo es de naturaleza temporal local, lo que se puede comprobar fácilmente a partir de la siguiente identidad resultante de la propiedad de divisibilidad [20]

$$\rho_S(t_2) = V(t_2, t_1)\rho_S(t_1). \quad (1.25)$$

De aquí se deduce el hecho de que la evolución del sistema en el tiempo t_2 únicamente está influenciada por su estado en t_1 . Esto significa que la evolución es independiente de cualquier estado anterior a t_1 , indicando que el sistema no retiene memoria de su pasado antes de ese punto en el tiempo. Además, si se cumple la condición de Markov, la familia de mapas dinámicos, parametrizados por el tiempo t , forma un semigrupo dinámico $\{V(t) | t \geq 0\}$, con la propiedad de semigrupo de la ecuación (1.24). Lindblad demostró en 1976 [21] que existe un generador infinitesimal, $\mathcal{L}$, del semigrupo que permite escribir el mapa dinámico $V(t)$ del sistema reducido como

$$V(t) = e^{\mathcal{L}t}, \quad (1.26)$$

esta representación da lugar a una ecuación diferencial de primer orden para la matriz densidad reducida, $\dot{\rho}_S = \mathcal{L}\rho_S$, que es la ecuación maestra cuántica markoviana. Esta ecuación es muy importante, debido a que bajo ciertas aproximaciones se obtiene su forma más general, conocida como la ecuación maestra de Lindblad [22]

$$\frac{d}{dt}\rho_S = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_S, \rho_S] + \sum_{k=1}^{d^2-1} \frac{\gamma_k}{2} \left(2L_k\rho_S L_k^\dagger - L_k^\dagger L_k \rho_S - \rho_S L_k^\dagger L_k \right) = \mathcal{L}\rho_S, \quad (1.27)$$

donde $d = \dim(\mathcal{H}_S)$, $\mathcal{L}$ es el *generador de Lindblad*, $\hat{H}_S$ un hamiltoniano efectivo del sistema S , $\{L_k\}$ operadores de disipación, y $\gamma_k \geq 0$ tasas de decaimiento.

El primer término corresponde a la parte unitaria de la evolución del sistema, mientras que los operadores L_k , denominados *operadores de Lindblad*, representan los distintos mecanismos de decaimiento del sistema. Las cantidades γ_k , que son siempre positivas, actúan como tasas de relajación asociadas a cada modo de decaimiento dentro del sistema abierto.

Cabe señalar que mientras Lindblad formuló esta ecuación en el contexto de dimensión infinita y para operadores de Lindblad acotados, Gorini, Kossakowski y Sudarshan (GKS) la derivaron en el contexto de sistemas de dimensión finita [23, 24]. Esta formulación general, conocida como la ecuación de Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad (GKSL), es de fundamental importancia en teoría cuántica de sistemas abiertos, ya que proporciona una descripción unificada para cualquier mapa dinámico markoviano en sistemas finitos, con precisión arbitraria.

El régimen markoviano, basado en la ecuación de Lindblad, describe dinámicas disipativas bajo dos supuestos clave: interacciones débiles y memoria ambiental efímera ($\tau_E \ll \tau_S$).

Sin embargo, en sistemas donde el entorno conserva correlaciones comparables a la escala temporal del sistema ($\tau_E \sim \tau_S$), el régimen markoviano falla. Estos escenarios exigen una generalización que incorpore efectos de memoria ambiental de manera controlada, sin sacrificar la tratabilidad analítica.

El *régimen post-markoviano* surge como un puente conceptual entre la descripción markoviana (sin memoria) y los procesos no markovianos totalmente dependientes de la historia. Al introducir kernels temporales que codifican interacciones retrasadas, este régimen permite modelar fenómenos como retroacción cuántica y recuperación de coherencias, preservando al mismo tiempo estructuras matemáticas manejables. En la siguiente sección, exploraremos cómo este enfoque intermedio expande el formalismo de Lindblad, incorporando memoria finita mediante ecuaciones maestras post-markovianas que generalizan la noción de semigrupos cuánticos.

1.5. RÉGIMEN POST-MARKOVIANO

La dinámica de sistemas cuánticos en interacción con su entorno constituye un pilar fundamental para comprender fenómenos como la decoherencia, un desafío central en tecnologías emergentes como la computación cuántica. Tradicionalmente, la descripción se mueve entre dos marcos complementarios: por un lado, formulaciones con memoria —a menudo no locales en el tiempo— que capturan con fidelidad las correlaciones del entorno pero pueden ser matemáticamente costosas; y, por otro, el régimen markoviano, válido cuando las correlaciones del entorno decaen mucho más rápido que la dinámica del sistema, donde se cuenta con una estructura rigurosa (semigrupos CPTP) ampliamente validada y muy útil para el análisis y el diseño experimental. Cuando esa separación de escalas deja de cumplirse, la influencia del pasado se vuelve apreciable y se requieren extensiones con memoria. Esta situación motiva la búsqueda de un esquema intermedio que integre efectos no markovianos manteniendo tratabilidad analítica y consistencia física.

1.5.1. Ecuación maestra post-markoviana

La necesidad de trascender las limitaciones de los modelos tradicionales se hace evidente al analizar sistemas cuánticos realistas, donde los efectos de memoria del entorno no pueden ser ignorados ni simplificados de manera trivial. En este contexto, el trabajo de Shabani y Lidar [6] propone una ecuación maestra que sintetiza lo mejor de ambos mundos: la precisión no-markoviana y la manejabilidad markoviana. Para introducir formalmente esta ecuación, es esencial partir de una reinterpretación física de la dinámica sistema-entorno.

Los autores parten de un enfoque innovador que reinterpreta la interacción con el entorno como un proceso de medición probabilística. Imagínese un escenario en el que el baño, actuando como una sonda acoplada al sistema, es sometido a una única medición generalizada en un instante intermedio t' , en lugar de la serie continua de mediciones que caracterizan el límite markoviano. Este acto de medición, aunque disruptivo, permite capturar correlaciones temporales entre el sistema y el entorno de manera controlada. Al discretizar el intervalo temporal $[0, t]$ y promediar sobre posibles resultados de medición ponderados por un núcleo de memoria $k(t')$, se obtiene una descripción que retiene efectos de historia sin sacrificar la estructura matemática de la ecuación de Lindblad.

La ecuación post-markoviana emerge así como una convolución entre el generador de Lindblad $\mathcal{L}$ —encargado de la dinámica markoviana— y un núcleo de memoria $k(t')$ que modula la influencia de estados pasados. Matemáticamente, se expresa como:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L} \int_0^t dt' k(t') e^{\mathcal{L}t'} \rho(t - t'), \quad (1.28)$$

donde $e^{\mathcal{L}t'}$ codifica la evolución markoviana acumulada durante el intervalo t' , y la integral representa una superposición temporal de contribuciones históricas. La elección del núcleo $k(t')$ determina el carácter de la memoria: desde decaimientos exponenciales (memoria corta) hasta funciones oscilatorias (memoria estructurada), permitiendo adaptar el modelo a diversos entornos experimentales.

Un aspecto crucial es que esta ecuación no solo generaliza la de Lindblad —recuperándola cuando $k(t') \rightarrow \delta(t')$ —, sino que también aproxima la complejidad de la *ecuación de Nakajima-Zwanzig* [3] mediante un esquema analíticamente tratable. La preservación de la positividad completa, garantizada por la condición $\sum_k \xi_k(t) L_k^T \otimes R_k \geq 0$, asegura que las soluciones sean físicamente válidas, incluso en regímenes donde efectos no-markovianos dominan.

Solución de sistemas markovianos

En el estudio de sistemas cuánticos abiertos, el régimen markoviano emerge como el campo de batalla ideal para comprender la dinámica esencial de los sistemas de dos niveles (TLS) en su forma más pura: sin memoria ambiental. Aquí, el entorno no recuerda, no retroalimenta, no deja huella del pasado. Es un adversario sin historia, cuya única interacción es instantánea, brutalmente eficaz en destruir coherencias, pero predecible en su simplicidad.

Este régimen no es una mera abstracción, sino un laboratorio matemático donde las ecuaciones se someten a la disciplina de la localidad temporal. La ecuación de Lindblad, con su semigrupo dinámico y operadores de disipación bien definidos, es nuestra arma principal. Sus cimientos —forjados por Gorini, Kossakowski, Sudarshan y el propio Lindblad— son el acero templado que nos permite tallar predictibilidad en el caos. Nos obliga a marchar al ritmo de la aproximación de Born-Markov, donde el entorno no solo olvida, sino que se niega a aprender. Nos permite desentrañar cómo un TLS pierde coherencia, cómo sus poblaciones decaen exponencialmente, y cómo el ruido térmico impone su ley termodinámica. Es la antesala de toda batalla contra la decoherencia: si no dominamos este territorio, *¿cómo pretendemos navegar paisajes más complejos, donde el entorno guarda rencor y el pasado persigue al presente?*

En este capítulo, combatiremos en el frente markoviano. Resolveremos analíticamente la dinámica de TLS individuales y correlacionados, trazando trayectorias de relajación y decaimiento con precisión quirúrgica. Aprenderemos a diagonalizar el superoperador de Lindblad, a extraer sus autovalores como si fueran órdenes de batalla, y a predecir el destino de estados iniciales, desde superposiciones coherentes hasta entrelazamientos frágiles.

Pero esto no es solo un ejercicio de guerra teórica. Cada solución aquí obtenida será el cimiento sobre el que construiremos, en el Capítulo 4, el régimen post-markoviano. Porque para entender cómo la memoria ambiental modula la dinámica, primero debemos saber cómo se comporta el sistema cuando el entorno olvida. *Para domar la complejidad, primero hay que conquistar la simplicidad.*

Sin embargo, no nos engañemos: el régimen markoviano no es un edén de soluciones exactas. Es un desierto de supuestos, donde la tiranía del factor de decaimiento y la dictadura del tiempo de correlación ambiental gobiernan sin oposición. Aquí, la memoria del entorno no solo es despreciable, es ejecutada en el acto. Pero es precisamente esta crudeza la que nos entrena para detectar, en futuras batallas, las desviaciones sutiles: ese ligero retraso en la respuesta del entorno, ese eco de interacciones pasadas que delatan la emergencia de efectos no-markovianos.

Así, con las herramientas de Lindblad en mano y la ausencia de memoria como aliada temporal, iniciamos esta campaña. Que la predictibilidad markoviana sea nuestro escudo, y la tratabilidad analítica, nuestra espada.

2.1. ECUACIÓN DE EIGENVALORES

Como se estableció previamente, los superoperadores juegan un papel central en la descripción dinámica de sistemas cuánticos abiertos. Particularmente, la evolución temporal de la matriz de densidad queda determinada por la acción del superoperador Liouvilliano. En esta sección analizaremos las propiedades espectrales de $\mathcal{L}$ mediante su ecuación de valores propios, herramienta fundamental para caracterizar modos dinámicos en sistemas disipativos.

2.1.1. Eigenvectores izquierdos y derechos

La ecuación de valores propios constituye un pilar en mecánica cuántica, permitiendo descomponer operadores en sus componentes fundamentales. En sistemas cerrados, donde el hamiltoniano H es hermítico, la ecuación $H |\psi\rangle = E |\psi\rangle$ garantiza valores propios reales y una base ortogonal completa. Sin embargo, en sistemas abiertos con un hamiltoniano efectivo no hermítico, esta simetría se rompe, requiriendo una generalización del formalismo.

La no hermiticidad introduce una dualidad en el espacio de estados: cada valor propio λ está asociado a dos vectores fundamentales de un superoperador no hermítico $\mathcal{L}$: vectores izquierdos y vectores derechos [25]. Estos vectores se expresan mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\text{vectores derechos}) \quad \mathcal{L} \hat{\rho}_{\lambda_i} &= \lambda_i \hat{\rho}_{\lambda_i}, \\ (\text{vectores izquierdos}) \quad \check{\rho}_{\lambda_i}^\dagger \mathcal{L} &= \lambda_i^* \check{\rho}_{\lambda_i}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Estos vectores satisfacen una relación de biortogonalidad bajo el producto interno de Hilbert-Schmidt:

$$\text{Tr} \left[(\check{\rho}_{\lambda_j})^\dagger \hat{\rho}_{\lambda_i} \right] = \delta_{\lambda_i, \lambda_j}. \quad (2.2)$$

En las siguientes subsecciones aplicaremos este marco teórico a sistemas de uno y dos qubits (TLS) con decaimiento espontáneo.

2.1.2. Vectorización

La vectorización es una herramienta matemática que permite convertir matrices en vectores mediante un reordenamiento sistemático de sus elementos. Esta operación es crucial en mecánica cuántica, especialmente al trabajar con superoperadores (como el Liouvilliano) en sistemas abiertos, donde las ecuaciones dinámicas involucran productos matriciales no conmutativos. Al vectorizar matrices, transformamos operaciones complejas en multiplicaciones matriciales estándar, simplificando cálculos en espacios de alta dimensión como el espacio de Fock-Liouville (o espacio de Liouville), donde los estados cuánticos se representan como vectores y los superoperadores como matrices.

Definición 2. Sean $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ el espacio de matrices complejas de dimensión $n \times n$, y $\mathbb{C}^{n^2}$ el espacio vectorial complejo de dimensión n^2 . La vectorización es una correspondencia operador-vector dada por el isomorfismo lineal $\text{vec} : \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$, definido por la correspondencia

$$\text{vec}[A] = |A\rangle\rangle = \sum_i \sum_j a_{ij} \mathbf{e}_{(j-1)n+i} = [a_{11}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn}]^T, \quad (2.3)$$

donde $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{n^2}$ es la base canónica del espacio $\mathbb{C}^{n^2}$ y $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.

La vectorización es como desarmar un rompecabezas 2D (matriz) y ordenar sus piezas en una línea recta (vector). Esto permite aplicar reglas de álgebra lineal simples para resolver problemas que originalmente requerían manipular filas y columnas simultáneamente.

Un ejemplo ilustrativo es considerar una matriz de dimensión 2 ($A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$), al aplicar la vectorización obtenemos:

$$\text{vec}[A] = \text{vec} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Usaremos la notación de doble ket $|A\rangle\rangle \equiv \text{vec}(A)$ y su dual $\langle\langle B| \equiv \text{vec}(B)^\dagger$, de modo que el producto interno de Hilbert–Schmidt queda $\langle\langle A | B\rangle\rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$.

Consideremos un término genérico como $A\rho B$, donde $\rho \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ es la matriz de densidad y A, B son operadores fijos. La propiedad fundamental de la vectorización (para nuestra convención de apilado por columnas) para tales productos es:

$$\text{vec}[A\rho B] = (B^T \otimes A)\text{vec}[\rho], \quad (2.5)$$

donde $\otimes$ denota el producto de Kronecker (que combina matrices en un tensor más grande) y B^T indica la transposición de B . Esta igualdad permite reemplazar productos de matrices por multiplicaciones por Kronecker en un espacio vectorial de dimensión n^2 , simplificando análisis y cómputo en problemas donde aparecen operadores actuando por la izquierda y/o por la derecha.

En secciones posteriores, la propiedad (2.5) se utilizará para expresar, en forma matricial, la acción de superoperadores de multiplicación izquierda y derecha, lo que fija de manera unívoca cómo actúan sus versiones vectorizadas. Por este motivo dejamos aquí establecida la convención y las identidades que se emplearán más adelante.

2.1.3. Eigensistema para 1 TLS

Como se destacó en la [§Sección 1.2](#), los sistemas de dos niveles constituyen una piedra angular en el estudio de sistemas cuánticos abiertos. En esta sección, nos enfocaremos en resolver el problema espectral asociado a un único sistema de dos niveles (1-TLS) bajo aproximaciones markovianas, con el objetivo de derivar explícitamente los eigenvalores y eigenvectores del superoperador de Liouville $\mathcal{L}$, así como su espectro dinámico.

Consideremos los estados cuánticos

$$\begin{aligned} |e\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{excitado}), \\ |g\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{fundamental}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

cuya separación energética es $\hbar\omega$ y están asociados a una tasa de decaimiento Γ .

Estos estados definen la base computacional del sistema de dos niveles (TLS), que es la base tensorial de eigenestados de la matriz de Pauli σ_z , donde $\sigma_z |e\rangle = +|e\rangle$ (energía excitada) y $\sigma_z |g\rangle = -|g\rangle$ (energía fundamental). Adoptamos esta convención estándar en óptica cuántica y dinámica atómica, en la que $|e\rangle$ representa el estado de mayor energía y

$|g\rangle$ el de menor energía, con separación $\hbar\omega$. Cabe notar que difiere de la convención común en computación cuántica, donde $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ground) y $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (excited); sin embargo, esta elección es puramente notacional y no altera la física subyacente, ya que los operadores y la dinámica se ajustan de manera equivalente, preservando simetrías y resultados. Con esta elección, los operadores de ascenso y descenso toman la forma

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

de modo que $\sigma_- |e\rangle = |g\rangle$ describe el decaimiento del estado excitado al fundamental, coherente con la dinámica de amplitud.

El esquema de este problema se puede observar en la [Figura 2.1](#).

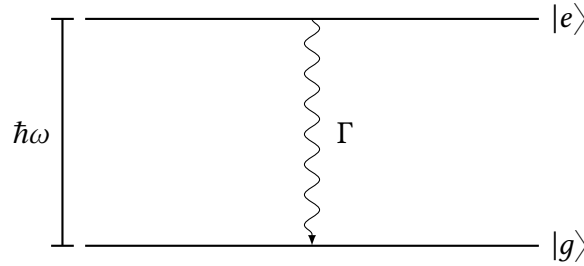


Figura 2.1: Diagrama de un 1 TLS con una tasa de decaimiento Γ y una separación de energía $\hbar\omega$.

El Hamiltoniano del sistema en términos de las bases $|e\rangle$ y $|g\rangle$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| = E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| + E_g \mathbb{1} - E_g \mathbb{1} \\ &= E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| - E_g (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) + E_g \mathbb{1} \\ &= (E_e - E_g) |e\rangle\langle e| + E_g \mathbb{1} \\ &= \hbar\omega |e\rangle\langle e| + E_g \mathbb{1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde hemos introducido la definición $\hbar\omega = E_e - E_g$. Procediendo a una redefinición del nivel de energía de referencia, trasladamos el Hamiltoniano restando la constante $E_g \mathbb{1}$, lo que lleva a la forma simplificada:

$$\hat{H} = \hbar\omega |e\rangle\langle e| = \hbar\omega \sigma_+ \sigma_-. \quad (2.9)$$

Para modelar el decaimiento del estado excitado, introducimos un término disipativo complejo $-i\hbar\frac{\Gamma}{2} |e\rangle\langle e| = -i\hbar\frac{\Gamma}{2} \sigma_+ \sigma_-$, lo que nos lleva a definir un Hamiltoniano efectivo no hermitico:

$$\hat{K} = \left(\hbar\omega - i\hbar\frac{\Gamma}{2} \right) |e\rangle\langle e| = \left(\hbar\omega - i\hbar\frac{\Gamma}{2} \right) \sigma_+ \sigma_- = \hat{H} - i\hbar\frac{\Gamma}{2} \sigma_+ \sigma_-. \quad (2.10)$$

Sustituyendo este hamiltoniano efectivo en la ecuación de Von Neumann (1.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= -\frac{1}{i\hbar}[\hat{K}\rho - \rho\hat{K}^\dagger] \\
 &= \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{H} - i\hbar\frac{\Gamma}{2}\sigma_+\sigma_-\right)\rho - \frac{1}{i\hbar}\rho\left(\hat{H}^\dagger + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\sigma_-^\dagger\sigma_+^\dagger\right) \\
 &= \frac{1}{i\hbar}(\hat{H}\rho - \rho\hat{H}) - \frac{1}{i\hbar}\left(i\hbar\frac{\Gamma}{2}\sigma_+\sigma_-\rho + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right) \\
 &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho] + \frac{\Gamma}{2}(-\sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para garantizar la conservación de la traza, es necesario que $\text{Tr}(\dot{\rho}) = 0$. La traza del primer término se anula directamente debido a la propiedad cíclica de la traza: $\text{Tr}([\hat{H}, \rho]) = 0$. No obstante, el segundo término no es nulo, ya que $\text{Tr}(-\sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-) = -2\text{Tr}(\sigma_+\sigma_-\rho)$.

Para corregir esto, se introduce un término adicional $2\sigma_-\rho\sigma_+$, lo que lleva a la forma general de la ecuación maestra de Lindblad:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho] + \frac{\Gamma}{2}(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-) = \mathcal{L}\rho. \tag{2.12}$$

Esta ecuación conserva la traza, ya que el término añadido garantiza que $\text{Tr}(\dot{\rho}) = 0$, preservando así la consistencia probabilística del operador de densidad.

Esta forma de Lindblad se puede derivar microscópicamente a partir de un Hamiltoniano total $H_{\text{tot}} = H_S + H_B + H_{SB}$ bajo las aproximaciones de Born–Markov y secular (RWA), lo que garantiza un generador completamente positivo de tipo GKSL [3, 21, 23].

Para un sistema de un solo TLS, la matriz de densidad se representa de la forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Sabiendo que $\hat{H}$ está dado como en (2.9), y utilizando los operadores de ascenso y descenso (2.7), mediante la base (2.6), se obtiene

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \rho] + \frac{\Gamma}{2}(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-) = \begin{pmatrix} -\Gamma\rho_{ee} & (-i\omega - \frac{\Gamma}{2})\rho_{eg} \\ (i\omega - \frac{\Gamma}{2})\rho_{ge} & \Gamma\rho_{gg} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

La matriz de densidad puede ser representada en el espacio de Liouville (también llamado espacio de Hilbert–Schmidt) mediante la operación de vectorización,

$$|\rho\rangle\rangle = \begin{pmatrix} \rho_{ee} \\ \rho_{ge} \\ \rho_{eg} \\ \rho_{gg} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

La evolución del sistema ahora corresponde a la ecuación matricial

$$\frac{d}{dt}|\rho\rangle\rangle = \tilde{\mathcal{L}}|\rho\rangle\rangle, \tag{2.16}$$

con $\tilde{\mathcal{L}}$ una matriz de 4×4 . En este espacio, la ecuación anterior puede ser representada como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{ee} \\ \rho_{ge} \\ \rho_{eg} \\ \rho_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma \rho_{ee} \\ (i\omega - \frac{\Gamma}{2}) \rho_{ge} \\ -(i\omega + \frac{\Gamma}{2}) \rho_{eg} \\ \Gamma \rho_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i\omega - \frac{\Gamma}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(i\omega + \frac{\Gamma}{2}) & 0 \\ \Gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{ee} \\ \rho_{ge} \\ \rho_{eg} \\ \rho_{gg} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde el superoperador liouviliano expresado en forma matricial es

$$\tilde{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} -\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i\omega - \frac{\Gamma}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(i\omega + \frac{\Gamma}{2}) & 0 \\ \Gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Podemos observar que $\tilde{\mathcal{L}}$ es una matriz triangular inferior, por lo que los eigenvalores son los elementos de la diagonal, es decir,

$$\lambda_i = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \left\{ -\Gamma, i\omega - \frac{\Gamma}{2}, -i\omega - \frac{\Gamma}{2}, 0 \right\}. \quad (2.19)$$

Dado el conjunto de eigenvalores podemos obtener los eigenvectores al resolver las eigenecuaciones (2.1). Los resultados obtenidos al resolver dichas ecuaciones de eigenvalores se muestran en la tabla siguiente.

λ_i (eigenvalor)	$\hat{\rho}_{\lambda_i}$ (eigenvector derecho)	$\check{\rho}_{\lambda_i}$ (eigenvector izquierdo)
$-\Gamma$	$\sigma_z = e\rangle\langle e - g\rangle\langle g $	$\sigma_+ \sigma_- = e\rangle\langle e $
$-\frac{\Gamma}{2} + i\omega$	$\sigma_- = g\rangle\langle e $	$\sigma_- = g\rangle\langle e $
$-\frac{\Gamma}{2} - i\omega$	$\sigma_+ = e\rangle\langle g $	$\sigma_+ = e\rangle\langle g $
0	$\sigma_- \sigma_+ = g\rangle\langle g $	$\mathbb{1}$

Tabla 2.1: Eigensistema para vectores derechos ($\lambda_i, \hat{\rho}_{\lambda_i}$) y vectores izquierdos ($\lambda_i, \check{\rho}_{\lambda_i}$) de 1 TLS.

2.1.4. Eigensistema para 2 TLS

Aunque el estudio de un único sistema de dos niveles (TLS) ofrece un marco teórico accesible —cuya simplicidad permite un análisis directo—, resulta crucial ampliar nuestro enfoque a redes de dos TLS acoplados. Este salto conceptual no solo enriquece el modelo, sino que habilita la exploración de fenómenos colectivos, como el entrelazamiento cuántico, una propiedad fundamental en tecnologías cuánticas avanzadas.

El Hamiltoniano que gobierna la dinámica de 2 TLS interactuantes se estructura como:

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\sigma_1^+\sigma_1^- + \hbar\omega_2\sigma_2^+\sigma_2^- + \hbar\Lambda(\sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_1^-\sigma_2^+), \quad (2.20)$$

donde los dos primeros términos corresponden a las contribuciones energéticas individuales de cada sistema de dos niveles (TLS), mientras que el tercero modela el acoplamiento coherente entre ambos. Específicamente:

- ω_1 y ω_2 denotan las frecuencias de transición asociadas a los saltos cuánticos en cada TLS.
- Λ es el acoplamiento entre ambos subsistemas
- σ_i^+ y σ_i^- son los operadores de ascenso y descenso correspondientes al i -ésimo TLS.

Para incorporar efectos disipativos en la dinámica del sistema, modificaremos el Hamiltoniano mediante la adición de un término fenomenológico no hermítico, el cual modela pérdidas de energía hacia el entorno. Este término se expresa como $-i\hbar \sum_{j=1}^2 \frac{\Gamma_j}{2} \sigma_j^+ \sigma_j^-$. La inclusión de este término conduce a un Hamiltoniano efectivo no hermítico dado por:

$$\hat{K} = \hat{H} - i\hbar \sum_{j=1}^2 \frac{\Gamma_j}{2} \sigma_j^+ \sigma_j^- = \hat{H} - i\hbar \frac{\Gamma_1}{2} |e\rangle\langle e|_1 \otimes \mathbb{1} - i\hbar \frac{\Gamma_2}{2} \mathbb{1} \otimes |e\rangle\langle e|_2. \quad (2.21)$$

donde hemos usado $\sigma_1^+ \sigma_1^- = |e\rangle\langle e|_1 \otimes \mathbb{1}$ y $\sigma_2^+ \sigma_2^- = \mathbb{1} \otimes |e\rangle\langle e|_2$.

La forma matricial de $\hat{K}$ está dada por:

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - i\hbar \frac{\Gamma_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - i\hbar \frac{\Gamma_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \hbar \left(\omega_1 - i\frac{\Gamma_1}{2} \right) + \hbar \left(\omega_2 - i\frac{\Gamma_2}{2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar \left(\omega_1 - i\frac{\Gamma_1}{2} \right) & \hbar\Lambda & 0 \\ 0 & \hbar\Lambda & \hbar \left(\omega_2 - i\frac{\Gamma_2}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Definiendo $z_j = \omega_j - i\frac{\Gamma_j}{2}$ reescribimos la matriz anterior en la forma

$$\hat{K} = \hbar \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 2z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

En esta construcción, se ha adoptado la igualdad $z_1 = z_2 = z$, bajo el supuesto de simetría $\omega_1 = \omega_2$ y $\Gamma_1 = \Gamma_2$, con el fin de modelar sistemas compuestos por átomos idénticos y simplificar el análisis de la dinámica cuántica resultante.

Diagonalizaremos $\hat{K}$ porque sus eigenvalores proporcionan las energías cuasi-complejas del sistema (donde la parte real describe las contribuciones energéticas y la parte imaginaria captura las tasas de decaimiento inducidas por la interacción con el entorno), mientras que los eigenvectores definen la base en la que la dinámica evoluciona de manera diagonal, facilitando la solución de la ecuación maestra de Lindblad. En particular, esta diagonalización nos permite descomponer $\hat{K}$ en su forma espectral, revelando el espectro completo del sistema y permitiendo una interpretación física clara de los modos excitados y el estado fundamental. De esta manera, identificamos explícitamente dos eigenvalores triviales ($\varepsilon_1 = 2z\hbar$ y $\varepsilon_4 = 0$) asociados a los estados $|ee\rangle$ y $|gg\rangle$, y procedemos a encontrar los restantes mediante la diagonalización del bloque central no trivial:

$$\mathcal{G} = \hbar \begin{pmatrix} z & \Lambda \\ \Lambda & z \end{pmatrix} = \hbar(z\mathbb{1} + \Lambda\sigma_x). \quad (2.24)$$

Dado que ya conocemos el eigensistema de σ_x mediante la ecuación de eigenvalores $\sigma_x \vec{v}_{1,2} = (\pm 1)\vec{v}_{1,2}$, y considerando que cualquier eigenvector es un eigenvector de la identidad, podemos concluir que los eigenvectores de σ_x también lo son de la identidad. Por lo tanto, el eigensistema para $\mathcal{G}$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\vec{v} &= \hbar(z\mathbb{1} + \Lambda\sigma_x)\vec{v} \\ &= z\hbar(\mathbb{1}\vec{v}) + \Lambda\hbar(\sigma_x\vec{v}) \\ &= \hbar[z\vec{v} + \Lambda(\pm\vec{v})] \\ &= \hbar(z \pm \Lambda)\vec{v}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde obtenemos los eigenvalores restantes $\varepsilon_{2,3} = \hbar(z \pm \Lambda)$. Por lo tanto, los eigenvalores de $\hat{K}$ son:

$$\varepsilon_i = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\} = \{2z\hbar, \hbar(z + \Lambda), \hbar(z - \Lambda), 0\}. \quad (2.26)$$

Con estos eigenvalores podemos hacer el cálculo de los respectivos eigenvectores. Expresamos la forma matricial de $\hat{K}$,

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \langle ee|\hat{K}|ee\rangle & \langle ee|\hat{K}|eg\rangle & \langle ee|\hat{K}|ge\rangle & \langle ee|\hat{K}|gg\rangle \\ \langle ge|\hat{K}|ee\rangle & \langle ge|\hat{K}|eg\rangle & \langle ge|\hat{K}|ge\rangle & \langle ge|\hat{K}|gg\rangle \\ \langle eg|\hat{K}|ee\rangle & \langle eg|\hat{K}|eg\rangle & \langle eg|\hat{K}|ge\rangle & \langle eg|\hat{K}|gg\rangle \\ \langle gg|\hat{K}|ee\rangle & \langle gg|\hat{K}|eg\rangle & \langle gg|\hat{K}|ge\rangle & \langle gg|\hat{K}|gg\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Del análisis matricial se desprende que $|ee\rangle$ y $|gg\rangle$ son autovectores de $\hat{K}$ satisfaciendo $\hat{K}|ee\rangle = 2z\hbar|ee\rangle$ y $\hat{K}|gg\rangle = 0|gg\rangle$. Para calcular los eigenvectores correspondientes a los eigenvalores $\varepsilon_{2,3} = \hbar(z \pm \Lambda)$, resolvemos la ecuación de eigenvectores $\hat{K}\vec{v}_{2,3} = \hbar(z \pm \Lambda)\vec{v}_{2,3}$. Este proceso algebraico nos permite determinar los eigenvectores $\vec{v}_{2,3}$, los cuales pueden representarse como

$$\vec{v}_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg\rangle \pm |ge\rangle) = |\pm\rangle. \quad (2.28)$$

Por lo tanto, en la [Tabla 2.2](#) mostramos el eigensistema de $\hat{K}$ y $\hat{K}^\dagger$

$\hat{K}$	$\varepsilon_1 = 2z\hbar$	$\varepsilon_2 = \hbar(z + \Lambda)$	$\varepsilon_3 = \hbar(z - \Lambda)$	$\varepsilon_4 = 0$
	$ ee\rangle$	$ +\rangle$	$ -\rangle$	$ gg\rangle$
$\hat{K}^\dagger$	$\varepsilon_1^* = 2z^*\hbar$	$\varepsilon_2^* = \hbar(z^* + \Lambda)$	$\varepsilon_3^* = \hbar(z^* - \Lambda)$	$\varepsilon_4^* = 0$
	$\langle ee $	$\langle + $	$\langle - $	$\langle gg $

Tabla 2.2: Eigensistema del hamiltoniano efectivo no hermítico $\hat{K}$ y $\hat{K}^\dagger$.

Aclaración importante. Trabajamos en la base computacional estándar para dos sistemas de dos niveles (2 TLS), denotada como $\mathcal{B}_{\text{comp}} = \{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$. Esta base corresponde a los estados de producto tensorial de los estados individuales de cada TLS, donde $|e\rangle$ y $|g\rangle$ son los estados excitado y fundamental, respectivamente, según la convención adoptada.

Es crucial destacar que este **no es un cambio de base**, sino una consecuencia directa de la diagonalización de $\hat{K}$ en la base computacional. Los estados $|\pm\rangle$ se introducen por brevedad notacional y por su utilidad para simplificar cálculos, pero todos los cálculos posteriores se realizan y se pueden expresar en términos de la base computacional original.

La dinámica del sistema está gobernada por la ecuación maestra en forma de Lindblad

$$\mathcal{L}\rho = \mathcal{K}\rho + \mathcal{D}\rho, \quad (2.29)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\rho &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{K}\rho - \rho\hat{K}^\dagger], \\ \mathcal{D}\rho &= \Gamma(\sigma_1^- \rho \sigma_1^+ + \sigma_2^- \rho \sigma_2^+), \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde el primer término representa la dinámica que conserva las excitaciones y el segundo término es el operador de brinco que representa las desexcitaciones [26].

La propiedad de vectorización (2.5) nos ayuda a expresar el superoperador $\mathcal{L}$ como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbb{1}_4 \otimes \hat{K} - \hat{K}^* \otimes \mathbb{1}_4] + \Gamma \sum_{j=1}^2 (\sigma_j^+)^T \otimes (\sigma_j^-), \quad (2.31)$$

lo que nos permite escribir la ecuación maestra derecha:

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_{\lambda_i} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{K}\rho - \rho\hat{K}^\dagger] + \Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^- \hat{\rho}_{\lambda_i} \sigma_j^+. \quad (2.32)$$

Para diagonalizar la parte coherente $\mathcal{K}$, consideramos la base de eigenoperadores construida a partir de los eigenvectores de $\hat{K}$ y $\hat{K}^\dagger$, como se detalla en la [Tabla 2.2](#).

Sean $|r_j\rangle$ eigenkets tales que $\hat{K}|r_j\rangle = \varepsilon_j|r_j\rangle$ y $\langle r_j|\hat{K}^\dagger = \varepsilon_j^*\langle r_j|$. Los eigenoperadores de $\mathcal{K}$ son entonces los productos exteriores $\rho_{ij} = |r_j\rangle\langle r_k|$, y su acción se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}|r_j\rangle\langle r_k| &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{K}|r_j\rangle\langle r_k| - |r_j\rangle\langle r_k|\hat{K}^\dagger] \\ &= \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_j|r_j\rangle\langle r_k| - |r_j\rangle\langle r_k|\varepsilon_k^*] \\ &= \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_k^*}{i\hbar}|r_j\rangle\langle r_k|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por lo tanto, los eigenvalores de $\hat{\mathcal{K}}$ son:

$$\lambda_{4(j-1)+k} = \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_k^*}{i\hbar}, \quad j, k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.34)$$

lo que genera 16 eigenvalores en total, correspondientes a la dimensión del espacio de Liouville ($4^2 = 16$). Estos eigenvalores determinan las frecuencias y tasas de decaimiento en la evolución temporal de $\rho(t)$. Para mayores detalles del cálculo de los eigenvalores, véase el **Apéndice A.1**.

Como observamos en la **Tabla 2.2** Entonces, podemos construir una matriz de densidad en esta base como:

$ ee\rangle\langle ee $	$ ee\rangle\langle + $	$ ee\rangle\langle - $	$ ee\rangle\langle gg $
$ +\rangle\langle ee $	$ +\rangle\langle + $	$ +\rangle\langle - $	$ +\rangle\langle gg $
$ -\rangle\langle ee $	$ -\rangle\langle + $	$ -\rangle\langle - $	$ -\rangle\langle gg $
$ gg\rangle\langle ee $	$ gg\rangle\langle + $	$ gg\rangle\langle - $	$ gg\rangle\langle gg $

Figura 2.2: Esquema por bloques del operador densidad. Las líneas separan sectores de excitación; las flechas indican las conexiones inducidas por el salto $\mathcal{D}$ hacia sectores de menor excitación. Los elementos resaltados (verde) son anulados por $\mathcal{D}$ al contener $|gg\rangle$ o $\langle gg|$.

El operador de brinco $\mathcal{D}$ conecta bloques desacoplados de estados más excitados a menos excitados, ya que físicamente representa las des-excitaciones del sistema debido a la interacción con el entorno.

2.1.4.1. Eigensistema derecho del superoperador $\mathcal{L}$

El objetivo de esta sección es describir cómo se obtienen los *autovalores* y *autovectores derechos* (o eigenvectores derechos) del superoperador de Lindblad, $\mathcal{L}$. Recordemos que $\mathcal{L}$ combina la evolución coherente (descrita por el conmutador con $\hat{K}$) y la evolución disipativa (descrita por el operador de brinco $\mathcal{D}$), el cual conecta estados más excitados con estados menos excitados.

En particular, para un sistema de dos niveles dobles (2 TLS), utilizamos la base propia de $\hat{K}$,

$$\{|ee\rangle, |+\rangle, |-\rangle, |gg\rangle\}.$$

La representación de la matriz densidad en esta base se muestra en la **Figura 2.2**. Nótese que el operador de brinco $\mathcal{D}$ *anula* todo estado que contenga $|gg\rangle$ (en ket o en bra), ya que no es posible desexcitar aún más al estado fundamental:

$$\mathcal{D}\{|gg\rangle\langle gg|, |gg\rangle\langle ee|, |gg\rangle\langle +|, |gg\rangle\langle -|, |ee\rangle\langle gg|, |+\rangle\langle gg|, |-\rangle\langle gg|\} = 0.$$

Para este conjunto de estados G , la acción de $\mathcal{L}$ se reduce a $\mathcal{L}G = \mathcal{K}G$, de modo que sus autovalores se obtienen directamente de la parte coherente $\mathcal{K}$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} |gg\rangle\langle gg| &= 0 |gg\rangle\langle gg| \\
\mathcal{L} |gg\rangle\langle +| &= i(z^* + \Lambda) |gg\rangle\langle +| \\
\mathcal{L} |ee\rangle\langle gg| &= -2iz |ee\rangle\langle gg| \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. En pocas palabras, estos vectores son eigenvectores de $\mathcal{L}$ con los autovalores que corresponden a la evolución coherente, modificada por la naturaleza disipativa de $\mathcal{D}$.

Para el caso de los bloques que contienen elementos con excitación, el operador $\mathcal{D}$ sí produce transiciones a estados de menor energía. Por ejemplo,

- $|ee\rangle\langle ee|$ puede decaer hacia combinaciones que involucran $|\pm\rangle\langle\pm|$, $|\pm\rangle\langle\mp|$ (bloque central) y, finalmente, $|gg\rangle\langle gg|$.
- $|ee\rangle\langle +|$ y $|ee\rangle\langle -|$ pueden pasar al bloque formado por $|+\rangle\langle gg|$ y $|-\rangle\langle gg|$.
- $|+\rangle\langle ee|$ y $|-\rangle\langle ee|$ pueden dar lugar a los elementos del bloque formado por $|gg\rangle\langle +|$ y $|gg\rangle\langle -|$.
- Dentro del bloque central, los elementos $|+\rangle\langle +|$, $|+\rangle\langle -|$, $|-\rangle\langle +|$ y $|-\rangle\langle -|$ transitan al estado fundamental $|gg\rangle\langle gg|$.

Para conservar la coherencia del eigenvector, *cada elemento* $|a\rangle\langle b|$ que tenga la posibilidad de decaer por $\mathcal{D}$ debe incluir, en su *ansatz*, a todos los elementos del bloque inferior al que transita. Así garantizamos que, al aplicar $\mathcal{L}$ sobre el *ansatz*, el resultado no “salga” de la combinación lineal propuesta.

Por ende, en estos bloques se construyen *ansatz* que recogen tanto el estado original $(|a\rangle\langle b|)$ como los términos del bloque “inferior” que $\mathcal{D}$ generaría. De este modo surgen sistemas de ecuaciones para los coeficientes de la superposición, cuyos valores se determinan al imponer $\mathcal{L}\hat{\rho}_\lambda = \lambda\hat{\rho}_\lambda$.

El procedimiento global para obtener el eigensistema completo de $\mathcal{L}$ se puede sintetizar de la siguiente forma:

1. Identificar la estructura en bloques de la matriz densidad y separar los elementos según su nivel de energía (ver [Figura 2.2](#)).
2. Analizar cómo actúa $\mathcal{D}$ en cada bloque, determinando qué estados se anulan y cuáles generan transiciones hacia bloques inferiores.
3. Construir *ansätze* que incluyan cada estado $|a\rangle\langle b|$ más todos los estados en el bloque inferior.
4. Resolver la ecuación de autovalor $\mathcal{L}\rho = \lambda\rho$ en cada bloque, considerando que $\mathcal{D}$ introduce términos “de bajada” que hacen que algunos autovectores sean combinaciones de estados excitados y estados base.
5. Encontrar los correspondientes autovalores λ y las relaciones entre coeficientes que definen cada autovector.

De este modo, se obtiene un conjunto completo de eigenvalores y eigenvectores [véase la [Tabla 2.3](#)], donde algunos se asocian a modos puramente decaentes, otros a oscilaciones amortiguadas y, por último, uno que da lugar al estado estable cuando el sistema evoluciona

a largo plazo. Este resultado refleja la dinámica intrínseca del sistema markoviano, donde los procesos de decaimiento y coherencia juegan un papel central.

Para no saturar esta sección con el desglose algebraico paso a paso, en el **Apéndice A.2** se proporcionan todos los detalles: allí se explica con precisión cómo $\mathcal{D}$ actúa en cada bloque, cómo se plantean los ansatz y cómo se resuelven las ecuaciones lineales. Este apéndice sirve como un recurso complementario que permite al lector profundizar en los cálculos sin interrumpir el flujo narrativo de la sección principal.

i	λ_i (eigenvalor)	$\hat{\rho}_{\lambda_i}$ (eigenvector derecho)
1	-2Γ	$ ee\rangle\langle ee - +\rangle\langle + - -\rangle\langle - + gg\rangle\langle gg $
2	$-\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda)$	$ ee\rangle\langle + - \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} +\rangle\langle gg $
3	$-\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda)$	$ ee\rangle\langle - - \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} -\rangle\langle gg $
4	$-\Gamma - 2i\omega$	$ ee\rangle\langle gg $
5	$-\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda)$	$ +\rangle\langle ee - \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} gg\rangle\langle + $
6	$-\Gamma$	$ -\rangle\langle - - gg\rangle\langle gg $
7	$-\Gamma - 2i\Lambda$	$ +\rangle\langle - $
8	$-\frac{\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda)$	$ +\rangle\langle gg $
9	$-\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda)$	$ -\rangle\langle ee + \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} gg\rangle\langle - $
10	$-\Gamma + 2i\Lambda$	$ -\rangle\langle + $
11	$-\Gamma$	$ +\rangle\langle + - gg\rangle\langle gg $
12	$-\frac{\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda)$	$ -\rangle\langle gg $
13	$-\Gamma + 2i\omega$	$ gg\rangle\langle ee $
14	$-\frac{\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda)$	$ gg\rangle\langle + $
15	$-\frac{\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda)$	$ gg\rangle\langle - $
16	0	$ gg\rangle\langle gg $

Tabla 2.3: Eigensistema para vectores derechos ($\lambda_i, \hat{\rho}_{\lambda_i}$) de 2 TLS.

2.1.4.2. Eigensistema izquierdo del superoperador $\mathcal{L}$

En la sección anterior (§2.1.4.1) se describió el eigensistema derecho del superoperador de Lindblad, $\mathcal{L}$. Ahora abordaremos el eigensistema izquierdo, es decir, aquel que satisface la ecuación

$$\mathcal{L}^\dagger \check{\rho}_{\lambda_i} = \lambda_i^* \check{\rho}_{\lambda_i}, \quad (2.35)$$

donde $\mathcal{L}^\dagger$ es el adjunto del superoperador $\mathcal{L}$. Por medio de la propiedad (2.5) y la ecuación (2.31) podemos expresar a $\mathcal{L}^\dagger$ como:

$$\mathcal{L}^\dagger = -\frac{1}{i\hbar} [\mathbb{1}_4 \otimes \hat{K}^\dagger - \hat{K}^T \otimes \mathbb{1}_4] + \Gamma \sum_{j=1}^2 (\sigma_j^-)^T \otimes (\sigma_j^+), \quad (2.36)$$

lo cual nos permite escribir la ecuación maestra izquierda:

$$\mathcal{L}^\dagger \check{\rho}_{\lambda_i} = -\frac{1}{i\hbar} [K^\dagger \check{\rho}_{\lambda_i} - \check{\rho}_{\lambda_i} K] + \Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \check{\rho}_{\lambda_i} \sigma_j^-, \quad (2.37)$$

donde $\mathcal{K}^\dagger$ y $\mathcal{D}^\dagger$ (el nuevo operador de brinco) se expresan mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\dagger &= -\frac{1}{i\hbar} [K^\dagger \check{\rho}_{\lambda_i} - \check{\rho}_{\lambda_i} K], \\ \mathcal{D}^\dagger &= \Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \check{\rho}_{\lambda_i} \sigma_j^-. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Desde el punto de vista matemático, esto implica considerar la ecuación adjunta y analizar la acción de $\mathcal{D}$ “al otro lado” de la matriz densidad. A diferencia del eigensistema derecho, donde $\mathcal{D}$ “desexcita” los estados, ahora, en el análisis izquierdo, las transiciones aparecen “al revés”: podrían verse como “ascensos” en la parte del bra. Formalmente, esto se refleja en que el operador de brinco $\mathcal{D}^\dagger$ anula elementos con $|ee\rangle$ (en ket o bra), del mismo modo que en el caso derecho, $\mathcal{D}$ anulaba los que contenían $|gg\rangle$.

$$\mathcal{D}^\dagger \{ |gg\rangle\langle ee|, |-\rangle\langle ee|, |+\rangle\langle ee|, |ee\rangle\langle ee|, |ee\rangle\langle +|, |ee\rangle\langle -|, |ee\rangle\langle gg| \} = 0.$$

Si consideramos la matriz como se muestra en la [Figura 2.3](#), podemos ver que los elementos marcados en verde se anulan bajo el operador de brinco en sentido izquierdo, mientras que otros generan mezclas en bloques distintos. Esto conlleva, de nuevo, la necesidad de *ansätze* que incluyan tanto el elemento “original” como aquellos a los que $\mathcal{D}^\dagger$ puede llevarlos.

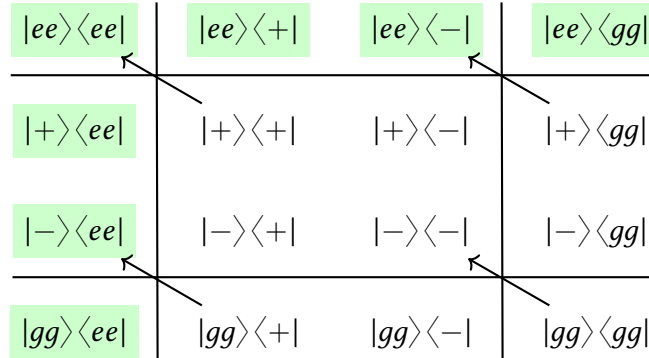


Figura 2.3: Esquema por bloques del operador densidad. Las líneas separan sectores de excitación; las flechas indican las conexiones inducidas por el salto $\mathcal{D}$ hacia sectores de mayor excitación. Los elementos resaltados (verde) son anulados por $\mathcal{D}^\dagger$ al contener $|ee\rangle$ o $\langle ee|$.

Sin embargo, es importante subrayar que este procedimiento no describe procesos físicos en los que el sistema “se excita espontáneamente”: se trata de un recurso formal para obtener el espectro de $\mathcal{L}$ de manera consistente. Aun cuando parezca que el brinco “sube” de $|gg\rangle$ a $|ee\rangle$ o anule estados con $|ee\rangle$, no significa que ocurra excitación real; es un reflejo de la construcción adjunta, no de un fenómeno físico realizable. A la hora de armar la ecuación adjunta, las direcciones de conmutación e inserción de σ_j^+ y σ_j^- se invierten matemáticamente. En otras palabras, el hecho de que uno “suba” en la descripción izquierda es un *arreglo formal*

para cerrar el sistema de ecuaciones y garantizar la biortogonalidad de los vectores izquierdos con los derechos. Nada de ello cambia la interpretación física: no hay generación espontánea de fotones ni transiciones.

Tal como sucedió en el caso derecho, resulta útil agrupar los elementos de la matriz densidad en:

- Los elementos del bloque central $\{|+\rangle\langle+|, |+\rangle\langle-|, |-\rangle\langle+|, |-\rangle\langle-|\}$, ahora pueden “subir” hacia $|ee\rangle\langle ee|$.
- El bloque formado por los elementos $|\pm\rangle\langle gg|$, suben al bloque formado por los elementos $|ee\rangle\langle\pm|$.
- El bloque formado por los elementos $|gg\rangle\langle\pm|$, pueden pasar al bloque formado por los elementos $|\pm\rangle\langle ee|$.
- El estado base $|gg\rangle$, puede transitar a combinaciones que involucren a los elementos del bloque central $\{|\pm\rangle\langle\pm|, |\pm\rangle\langle\mp|\}$ y, finalmente, $|ee\rangle$.

Cada uno de ellos *transita* al bloque “inmediatamente superior” al actuar el operador de brinco en sentido izquierdo. Por ende, para encontrar un autovector (izquierdo) asociado, por ejemplo, a $|+\rangle\langle gg|$, es preciso componer un ansatz que incluya $|+\rangle\langle gg|$ y los elementos del bloque superior al que conecta.

Por ejemplo, el bloque central (formado por $|\pm\rangle\langle\pm|$ y sus combinaciones), el operador de brinco actúa análogamente a como ocurre en el caso derecho, pero “al revés”. De esta manera, surgen ansätze del tipo

$$|\pm\rangle\langle\pm| + X_{\pm,\pm}^{(ee)} |ee\rangle\langle ee|,$$

$$|\pm\rangle\langle\mp| + X_{\pm,\mp}^{(ee)} |ee\rangle\langle ee|,$$

cuyos coeficientes se determinan al imponer la ecuación eigenvalor (2.35). Así se obtienen autovalores similares a los del caso derecho, pero ahora con las partes reales e imaginarias que se ajustan según el signo correspondiente a λ^* .

Tras aplicar este método en cada bloque, se listan los eigenvalores y los eigenvectores izquierdos en una tabla análoga a la del caso derecho (véase la [Tabla 2.4](#)). Allí puede apreciarse que, para cada autovalor λ_i , el eigensistema izquierdo presenta vectores cuyas combinaciones involucren $|ee\rangle$ en distintos órdenes, y que el operador de brinco “va” en dirección opuesta. Dichos resultados se pueden resumir así:

- Autovalores con parte real negativa (modos de decaimiento).
- Autovalores con parte imaginaria (oscilaciones).
- Un autovalor cero que señala la posibilidad de un estado estacionario, análogo al del caso derecho.

En caso de querer profundizar en el desarrollo algebraico paso a paso (cómo se anulan ciertos estados, cómo se construyen todos los ansätze y cómo se resuelven los sistemas lineales), se remite al [Sección A.3](#). Allí se incluye el cálculo detallado de cada bloque, siguiendo la estructura mostrada anteriormente.

i	λ_i (eigenvalor)	$\check{\rho}_{\lambda_i}$ (eigenvector izquierdo)
1	-2Γ	$ ee\rangle\langle ee $
2	$-\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda)$	$ ee\rangle\langle + $
3	$-\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda)$	$ ee\rangle\langle - $
4	$-\Gamma - 2i\omega$	$ ee\rangle\langle gg $
5	$-\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda)$	$ +\rangle\langle ee $
6	$-\Gamma$	$ -\rangle\langle - + ee\rangle\langle ee $
7	$-\Gamma - 2i\Lambda$	$ +\rangle\langle - $
8	$-\frac{\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda)$	$ +\rangle\langle gg + \frac{\Gamma}{\Gamma+2i\Lambda} ee\rangle\langle + $
9	$-\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda)$	$ -\rangle\langle ee $
10	$-\Gamma + 2i\Lambda$	$ -\rangle\langle + $
11	$-\Gamma$	$ +\rangle\langle + + ee\rangle\langle ee $
12	$-\frac{\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda)$	$ -\rangle\langle gg - \frac{\Gamma}{\Gamma-2i\Lambda} ee\rangle\langle - $
13	$-\Gamma + 2i\omega$	$ gg\rangle\langle ee $
14	$-\frac{\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda)$	$ gg\rangle\langle + + \frac{\Gamma}{\Gamma-2i\Lambda} +\rangle\langle ee $
15	$-\frac{\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda)$	$ gg\rangle\langle - - \frac{\Gamma}{\Gamma+2i\Lambda} -\rangle\langle ee $
16	0	$\mathbb{1}$

Tabla 2.4: Eigensistema para vectores izquierdos $(\lambda_i, \check{\rho}_{\lambda_i})$ de 2 TLS.

Al unir los resultados para los eigenvectores derechos e izquierdos de cada autovalor, no solo se completa el espectro de $\mathcal{L}$, sino que se forja un arsenal matemático clave para la guerra contra la decoherencia. Esta base biortogonal es el puente entre la teoría abstracta y las trincheras prácticas. Con ella, desplegamos representaciones espectrales que descomponen la dinámica en modos elementales, calculamos funciones de correlación como si descifráramos códigos enemigos, y resolvemos ecuaciones diferenciales con la precisión de un estratega que domina el terreno.

La tabla comparativa que presentamos [véase [Tabla 2.5](#)] no es un mero resumen, sino un mapa táctico. En ella, cada autovalor λ_i —desde los que gobiernan el decaimiento exponencial hasta los que dictan oscilaciones amortiguadas— se empareja con sus eigenvectores derecho e izquierdo, revelando simetrías ocultas y jerarquías de decoherencia. Por ejemplo, los autovalores con parte real cercana a cero delinean los modos de vida larga, supervivientes testarudos de la disipación, mientras que aquellos con grandes valores negativos marcan la muerte rápida de coherencias frágiles. Aquí no hay lugar para ambigüedades: cada λ_i es un parte de guerra, y sus eigenvectores, las órdenes escritas en clave cuántica. Con ello, la descripción de la dinámica abierta queda preparada para aplicaciones concretas en el régimen markoviano y post-markoviano.

En la próximas secciones, nos centraremos en aplicar estos resultados para resolver las ecuaciones markovianas y post-markovianas, subrayando el papel que desempeñan las tasas de decaimiento y las frecuencias derivadas de los autovalores de $\mathcal{L}$.

i	λ_{k_i} (eigenvalor)	$\hat{\rho}_{\lambda_{k_i}}$ (eigenvector derecho)	$\check{\rho}_{\lambda_{k_i}}$ (eigenvector izquierdo)
1	-2Γ	$ ee\rangle\langle ee - +\rangle\langle + - -\rangle\langle - + gg\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle ee $
2	$-\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda)$	$ ee\rangle\langle + - \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} +\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle + $
3	$-\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda)$	$ ee\rangle\langle - - \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} -\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle - $
4	$-\Gamma - 2i\omega$	$ ee\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle gg $
5	$-\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda)$	$ +\rangle\langle ee - \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} gg\rangle\langle + $	$ +\rangle\langle ee $
6	$-\Gamma$	$ -\rangle\langle - - gg\rangle\langle gg $	$ -\rangle\langle - + ee\rangle\langle ee $
7	$-\Gamma - 2i\Lambda$	$ +\rangle\langle - $	$ +\rangle\langle - $
8	$-\frac{\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda)$	$ +\rangle\langle gg $	$ +\rangle\langle gg + \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} ee\rangle\langle + $
9	$-\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda)$	$ -\rangle\langle ee + \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} gg\rangle\langle - $	$ -\rangle\langle ee $
10	$-\Gamma + 2i\Lambda$	$ -\rangle\langle + $	$ -\rangle\langle + $
11	$-\Gamma$	$ +\rangle\langle + - gg\rangle\langle gg $	$ +\rangle\langle + + ee\rangle\langle ee $
12	$-\frac{\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda)$	$ -\rangle\langle gg $	$ -\rangle\langle gg - \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} ee\rangle\langle - $
13	$-\Gamma + 2i\omega$	$ gg\rangle\langle ee $	$ gg\rangle\langle ee $
14	$-\frac{\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda)$	$ gg\rangle\langle + $	$ gg\rangle\langle + + \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} +\rangle\langle ee $
15	$-\frac{\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda)$	$ gg\rangle\langle - $	$ gg\rangle\langle - - \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} -\rangle\langle ee $
16	0	$ gg\rangle\langle gg $	$\mathbb{1}$

Tabla 2.5: Eigensistema para vectores derechos $(\lambda_i, \hat{\rho}_{\lambda_i})$ y vectores izquierdos $(\lambda_i, \check{\rho}_{\lambda_i})$ de 2 TLS.

2.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA DE LINDBLAD

Para abordar la solución de la ecuación de Lindblad (1.27), es fundamental subrayar que nuestro interés se centra en sistemas donde el superoperador de Liouville $\mathcal{L}$ carece de dependencia temporal. Bajo esta condición, la ecuación maestra ($\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho$) admite un tratamiento matemático análogo al utilizado en la ecuación de Schrödinger para sistemas cerrados autónomos (véase el Caso 1 en §Subsección 1.1.1). En particular, al asumir $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t)$, la integración formal de ambos miembros conduce a una solución exponencial de la forma:

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0) \quad (2.39)$$

la cual describe la evolución dinámica del estado cuántico desde una condición inicial $\rho(0)$.

Un enfoque alternativo, de naturaleza algebraica, explota la completitud del conjunto de vectores derechos $\{\hat{\rho}_{\lambda_i}\}$. Al expandir $\rho(t)$ como una combinación lineal de estos vectores [27]:

$$\rho(t) = \sum_i C_i(t) \hat{\rho}_{\lambda_i}, \quad (2.40)$$

donde

$$C_i(t) = \text{Tr} \left[\check{\rho}_{\lambda_i}^\dagger \rho(t) \right], \quad (2.41)$$

se puede reescribir la ecuación de Lindblad como

$$\sum_i \dot{C}_i(t) \hat{\rho}_{\lambda_i} = \sum_i C_i(t) \underbrace{\mathcal{L} \hat{\rho}_{\lambda_i}}_{(2.1)} = \sum_i C_i(t) \lambda_i \hat{\rho}_{\lambda_i}, \quad (2.42)$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial $\dot{C}_i(t) = \lambda_i C_i(t)$, la cual tiene solución en la forma $C_i(t) = e^{\lambda_i t} C_i(0)$. Por lo tanto, la solución markoviana es

$$\rho(t) = \sum_i C_i(0) e^{\lambda_i t} \hat{\rho}_{\lambda_i}. \quad (2.43)$$

2.3. SOLUCIÓN MARKOVIANA PARA 1 TLS

En esta sección abordamos la forma de resolver la evolución temporal de un sistema de dos niveles (1 TLS) en régimen markoviano, haciendo uso de la solución general presentada en la ecuación (2.43) y de los coeficientes introducidos en la ecuación (2.41). Tal como se muestra en [Tabla 2.1](#), conocer el eigensistema del superoperador que describe la dinámica es fundamental para descomponer adecuadamente el operador de densidad y capturar así los procesos de relajación y decoherencia.

Por ello, a continuación se presenta el cálculo explícito de los coeficientes necesarios para reconstruir la evolución a partir de la base propia de dicho superoperador, lo que brindará una descripción analítica clara y sistemática de la dinámica de un TLS en el régimen de Markov. Consideremos un estado inicial como una superposición que puede expresarse como

$$\rho(0) = \rho_{11} |e\rangle\langle e| + \rho_{12} |e\rangle\langle g| + \rho_{21} |g\rangle\langle e| + \rho_{22} |g\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Con esta propuesta del estado inicial podemos calcular los coeficientes $C_i(0)$:

$$\begin{aligned} C_1(0) &= \text{Tr}[\check{\rho}_{\lambda_1}^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[|e\rangle\langle e| \rho(0)] = \text{Tr}[\rho_{11} |e\rangle\langle e| + \rho_{12} |e\rangle\langle g|] = \rho_{11}, \\ C_2(0) &= \text{Tr}[\check{\rho}_{\lambda_3}^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[|e\rangle\langle g| \rho(0)] = \text{Tr}[\rho_{21} |e\rangle\langle e| + \rho_{22} |e\rangle\langle g|] = \rho_{21}, \\ C_3(0) &= \text{Tr}[\check{\rho}_{\lambda_2}^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[|g\rangle\langle e| \rho(0)] = \text{Tr}[\rho_{11} |g\rangle\langle e| + \rho_{12} |g\rangle\langle g|] = \rho_{12}, \\ C_4(0) &= \text{Tr}[\check{\rho}_{\lambda_4}^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[\mathbb{1} \rho(0)] = \text{Tr}[\rho(0)] = 1. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Al integrar los valores numéricos de los coeficientes, los autovectores derechos y sus autovalores correspondientes dentro del formalismo markoviano, la solución general del sistema adopta su expresión definitiva:

$$\begin{aligned} \rho^M(t) &= \rho_{11} e^{-\Gamma t} |e\rangle\langle e| + \rho_{21} e^{-(\Gamma/2 - i\omega)t} \sigma_- + \rho_{12} e^{-(\Gamma/2 + i\omega)t} \sigma_+ + [1 - \rho_{11} e^{-\Gamma t}] |g\rangle\langle g| \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11} e^{-\Gamma t} & \rho_{12} e^{-(\Gamma/2 + i\omega)t} \\ \rho_{21} e^{-(\Gamma/2 - i\omega)t} & 1 - \rho_{11} e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para el análisis gráfico de la evolución de las poblaciones y coherencias, así como en todas las gráficas a lo largo de este trabajo, aclaramos que trabajaremos con el tiempo adimensional (Γt), fijando $\Gamma = 1.0$ como escala fundamental y expresando todos los parámetros en unidades adimensionales relativas a Γ .

Tomamos como estado inicial la matriz de densidad

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Esta elección garantiza que $\rho(0)$ cumpla la traza unidad y la positividad exigidas a una matriz de densidad. A continuación mostramos las gráficas obtenidas correspondientes a la solución (2.46).

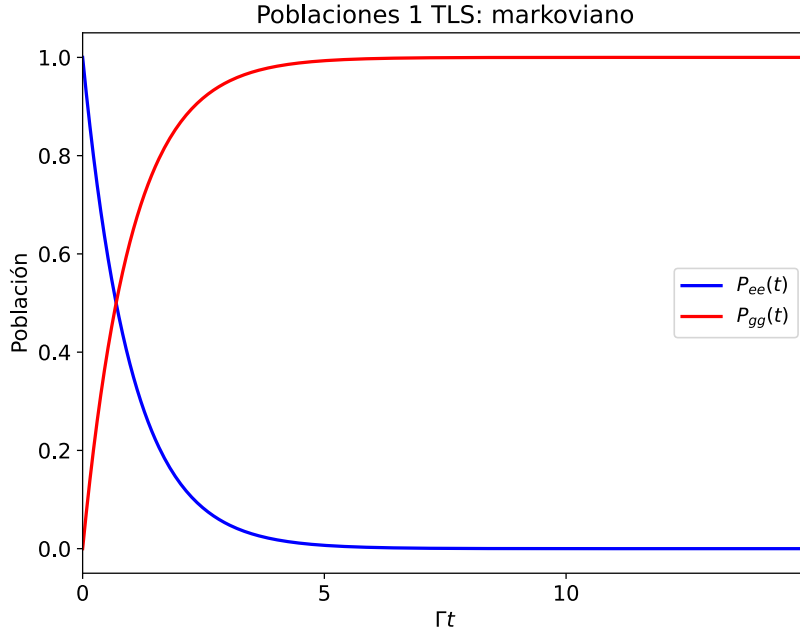


Figura 2.4: Evolución temporal de las poblaciones de un sistema de dos niveles bajo dinámica markoviana. La población del estado excitado $P_{ee}(t)$ decae exponencialmente, mientras que la del estado base $P_{gg}(t)$ aumenta hasta estabilizarse en el largo plazo, reflejando la relajación hacia $|g\rangle$.

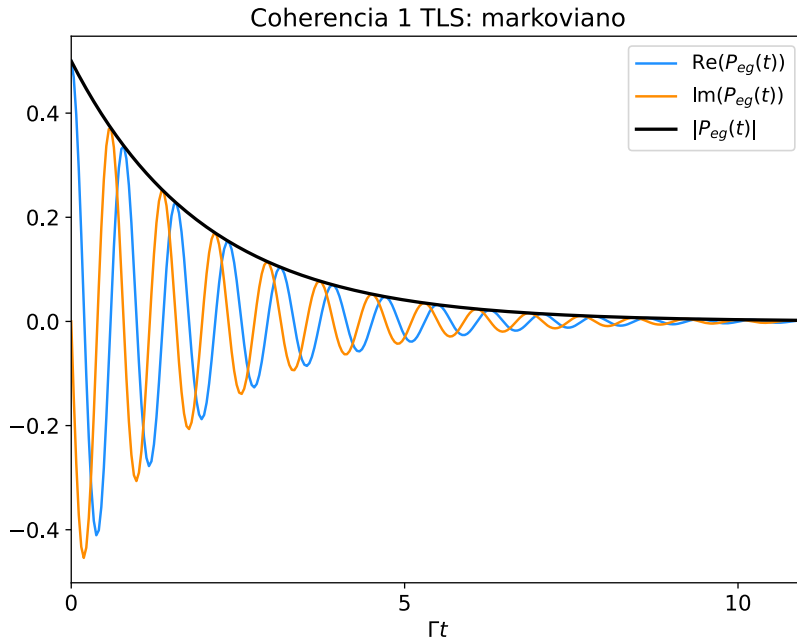


Figura 2.5: Evolución temporal de la coherencia en un sistema de dos niveles markoviano con $\omega = 8\Gamma$. Se ilustra la parte real, la parte imaginaria y el módulo de $P_{eg}(t)$, evidenciando la atenuación exponencial de la coherencia y la ausencia de resurgimientos en el régimen sin memoria.

Las gráficas de poblaciones confirman que, en un proceso de relajación puramente markoviano, el sistema transfiere progresivamente su probabilidad hacia el estado base sin mostrar oscilaciones remanentes a tiempos largos. Paralelamente, el comportamiento de la coherencia revela cómo las superposiciones cuánticas se atenúan de manera exponencial, dejando claro que en ausencia de memoria no se observan resurgimientos. Estas dos observaciones son centrales para comprender la dinámica de sistemas de dos niveles en interacciones disipativas simples, sentando las bases para describir procesos de decoherencia y control cuántico en condiciones realistas.

2.4. SOLUCIÓN MARKOVIANA PARA 2 TLS

Concluida la discusión del caso de un TLS, nos extendemos ahora al problema de dos TLS (es decir, dos qubits) conservando el enfoque markoviano. Este paso representa una generalización natural, ya que los sistemas de múltiples qubits permiten explorar fenómenos cuánticos más complejos, como el entrelazamiento y las correlaciones no locales, que son fundamentales en aplicaciones de información cuántica, tales como protocolos de teletransportación o computación cuántica distribuida. La idea es aplicar la misma solución general presentada en la ecuación (2.43), que describe la evolución temporal de la matriz densidad bajo un superoperador markoviano, y seguir el mismo procedimiento para el cálculo de coeficientes descrito en (2.41), pero aprovechando ahora el eigensistema mostrado en la [Tabla 2.4](#).

2.4.1. Solución general

En esta subsección presentamos la solución general para el caso de dos TLS, extendiendo la metodología empleada en el caso de un TLS. Partimos del eigensistema descrito en la [Tabla 2.4](#), en el cual se encuentran los 16 autovalores acompañados de sus respectivos autovectores izquierdos y derechos.

Para calcular los coeficientes $C_i(0)$, consideremos el estado inicial:

$$\rho(0) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \rho_{ij} |\phi_i\rangle \langle \phi_j| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

donde $|\phi_i\rangle = |ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle$ representa la base computacional del espacio de Hilbert combinado $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Al considerar un estado inicial genérico, no restringimos el estudio a configuraciones específicas, sino que proporcionamos una herramienta que puede adaptarse a diversas condiciones iniciales. Esta representación matricial captura todos los elementos posibles, incluyendo coherencias que reflejan superposiciones cuánticas entre los qubits. Con esta propuesta del estado inicial y con ayuda del eigensistema ya mencionado, podemos calcular los coeficientes $C_i(0)$ mediante proyecciones ortogonales, asegurando que la solución general abarque cualquier configuración inicial.

Dado que el conjunto $|\phi_i\rangle$ forma un conjunto completo ortonormal en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{Tr}[|\phi_i\rangle \langle \phi_j|] = \delta_{ij} = \langle \phi_i | \phi_j \rangle. \quad (2.49)$$

Aunque los eigenvectores izquierdos $\check{\rho}_{\lambda_i}$ se expresan en términos de la base propia de $\hat{K}$ (que incluye los estados $|\pm\rangle$), es crucial destacar que estos pueden convertirse en términos

de la base computacional, utilizando las relaciones $\frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle \pm |ge\rangle)$. Esto permite calcular los coeficientes $C_i(0)$ de manera consistente, ya que $\rho(0)$ está definido en la base computacional. La traza es una operación independiente de la base, y al expresar tanto $\check{\rho}_{\lambda_i}$ como $\rho(0)$ en la misma base (computacional), se garantiza la validez del cálculo. En el [Apéndice B](#), se detalla este procedimiento. Listamos explícitamente los coeficientes en la [Tabla 2.6](#).

Coeficientes $C_i(0)$	
$C_1(0) = \rho_{11}$	$C_9(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} - \rho_{31})$
$C_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} + \rho_{13})$	$C_{10}(0) = \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{33})$
$C_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} - \rho_{13})$	$C_{11}(0) = \rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{33})$
$C_4(0) = \rho_{14}$	$C_{12}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{24} - \rho_{34}) - \chi(\rho_{12} - \rho_{13})]$
$C_5(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} + \rho_{31})$	$C_{13}(0) = \rho_{41}$
$C_6(0) = \rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} - \rho_{32} + \rho_{33})$	$C_{14}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{42} + \rho_{43}) + \chi(\rho_{21} + \rho_{31})]$
$C_7(0) = \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{33})$	$C_{15}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{42} - \rho_{43}) - \chi^*(\rho_{21} - \rho_{31})]$
$C_8(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{24} + \rho_{34}) + \chi^*\rho_{12} + \rho_{13}]$	$C_{16}(0) = 1$

Tabla 2.6: Expresiones iniciales de los coeficientes markovianos $C_{\lambda_i}(0)$ para 2 TLS con la definición $\chi = \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda}$.

Con los coeficientes $C_i(0)$ determinados, podemos construir la solución general markoviana para el sistema de 2 TLS como:

$$\begin{aligned}
\rho^M(t) = & \rho_{11} e^{-2\Gamma t} |ee\rangle\langle ee| + \frac{\rho_{12} + \rho_{13}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_2 t} |ee\rangle\langle +| + \frac{\rho_{12} - \rho_{13}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_3 t} |ee\rangle\langle -| \\
& + \rho_{14} e^{[-\Gamma - 2i\omega]t} |ee\rangle\langle gg| + \frac{\rho_{21} + \rho_{31}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_2^* t} |+\rangle\langle ee| \\
& + \left[(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t})\rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{33}) e^{-\Gamma t} \right] |+\rangle\langle +| \\
& + \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{33}) e^{\lambda_7 t} |+\rangle\langle -| \\
& + \left[\chi^* \frac{\rho_{12} + \rho_{13}}{\sqrt{2}} (e^{\lambda_8 t} - e^{\lambda_2 t}) + \frac{\rho_{24} + \rho_{34}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_8 t} \right] |+\rangle\langle gg| \\
& + \frac{\rho_{21} - \rho_{31}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_3^* t} |-\rangle\langle ee| + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{33}) e^{\lambda_7^* t} |-\rangle\langle +| \\
& + \left[(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t})\rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} - \rho_{32} + \rho_{33}) e^{-\Gamma t} \right] |-\rangle\langle -| \\
& + \left[-\chi \frac{\rho_{12} - \rho_{13}}{\sqrt{2}} (e^{\lambda_{12} t} + e^{\lambda_3 t}) + \frac{\rho_{24} - \rho_{34}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_{12} t} \right] |-\rangle\langle gg| \\
& + \rho_{41} e^{[-\Gamma + 2i\omega]t} |gg\rangle\langle ee| \\
& + \left[\frac{\rho_{42} + \rho_{43}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_8^* t} + \chi \frac{\rho_{21} + \rho_{31}}{\sqrt{2}} (e^{\lambda_8^* t} - e^{\lambda_2^* t}) \right] |gg\rangle\langle +| \\
& + \left[\frac{\rho_{42} - \rho_{43}}{\sqrt{2}} e^{\lambda_{12}^* t} - \chi^* \frac{\rho_{21} - \rho_{31}}{\sqrt{2}} (e^{\lambda_{12}^* t} - e^{\lambda_3^* t}) \right] |gg\rangle\langle -| \\
& + \left[\rho_{11} (e^{-\Gamma t} - 1)^2 + (\rho_{22} + \rho_{33})(1 - e^{-\Gamma t}) + \rho_{44} \right] |gg\rangle\langle gg|.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Esta solución utiliza los operadores $|ee\rangle$, $|\pm\rangle$ y $|gg\rangle$, donde $|\pm\rangle$ son combinaciones de los estados de la base computacional como ya lo hemos mencionado. Aunque la notación $|\pm\rangle$ sugiere una base alternativa, es crucial destacar que toda **la solución se mantiene en la base computacional** $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$. Esto se debe a que:

- Los estados $|\pm\rangle$ son simplemente etiquetas compactas para superposiciones de $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$, y no representan un cambio de base independiente.
- Las representaciones matriciales de todos los operadores $|\cdot\rangle\langle\cdot|$ que aparecen en la solución (como $|ee\rangle\langle+|$, $|+\rangle\langle-|$, etc.) están explícitamente definidas en la base computacional. Por ejemplo, $|ee\rangle\langle+|$ corresponde a una matriz 4×4 cuyos elementos se calculan en la base computacional, como se detalla en el [Apéndice C](#).
- Los coeficientes ρ_{ij} son elementos de la matriz densidad inicial $\rho(0)$ en la base computacional, es decir, $\rho_{ij} = \langle\phi_i|\rho(0)|\phi_j\rangle$, donde $\{\phi_i\} = \{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$.

Por lo tanto, la solución en la Ecuación (2.50) es una expresión intermedia que aprovecha la estructura de la base propia de $\hat{K}$ para simplificar la escritura, pero su interpretación y uso final se realizan en la base computacional. A continuación, presentamos la solución markoviana en su forma matricial explícita:

$$\rho^M(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}e^{-2\Gamma t} & \frac{1}{2}[(\rho_{12} + \rho_{13})e^{\lambda_2 t} + (\rho_{12} - \rho_{13})e^{\lambda_3 t}] & \frac{1}{2}[(\rho_{12} + \rho_{13})e^{\lambda_2 t} - (\rho_{12} - \rho_{13})e^{\lambda_3 t}] & \rho_{14}e^{[-\Gamma - 2i\omega]t} \\ \frac{1}{2}[(\rho_{21} + \rho_{31})e^{\lambda_2^* t} + (\rho_{21} - \rho_{31})e^{\lambda_3^* t}] & \rho_{11}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t}) + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23})e^{-\Gamma t} + \frac{1}{4}Se^{\lambda_7 t} + \frac{1}{4}Qe^{\lambda_7^* t} & \frac{1}{2}(\rho_{23} + \rho_{32})e^{-\Gamma t} - \frac{1}{4}Se^{\lambda_7 t} + \frac{1}{4}Qe^{\lambda_7^* t} & \frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{12} + \rho_{13})(e^{\lambda_8 t} - e^{\lambda_2 t}) + (\rho_{24} + \rho_{34})e^{\lambda_8 t}] - \frac{1}{2}[\chi(\rho_{12} - \rho_{13})(e^{\lambda_{12} t} + e^{\lambda_3 t}) - (\rho_{24} - \rho_{34})e^{\lambda_{12} t}] \\ \frac{1}{2}[(\rho_{21} + \rho_{31})e^{\lambda_2^* t} - (\rho_{21} - \rho_{31})e^{\lambda_3^* t}] & \frac{1}{2}(\rho_{23} + \rho_{32})e^{-\Gamma t} + \frac{1}{4}Se^{\lambda_7 t} - \frac{1}{4}Qe^{\lambda_7^* t} & \rho_{11}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t}) + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23})e^{-\Gamma t} - \frac{1}{4}Se^{\lambda_7 t} - \frac{1}{4}Qe^{\lambda_7^* t} & \frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{12} + \rho_{13})(e^{\lambda_8 t} - e^{\lambda_2 t}) + (\rho_{24} + \rho_{34})e^{\lambda_8 t}] + \frac{1}{2}[\chi(\rho_{12} - \rho_{13})(e^{\lambda_{12} t} + e^{\lambda_3 t}) - (\rho_{24} - \rho_{34})e^{\lambda_{12} t}] \\ \rho_{41}e^{[-\Gamma + 2i\omega]t} & \frac{1}{2}[\chi(\rho_{21} + \rho_{31})(e^{\lambda_8^* t} - e^{\lambda_2^* t}) + (\rho_{42} + \rho_{43})e^{\lambda_8^* t}] - \frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{21} - \rho_{31})(e^{\lambda_{12}^* t} - e^{\lambda_3^* t}) - (\rho_{42} - \rho_{43})e^{\lambda_{12}^* t}] & \frac{1}{2}[\chi(\rho_{21} + \rho_{31})(e^{\lambda_8^* t} - e^{\lambda_2^* t}) + (\rho_{42} + \rho_{43})e^{\lambda_8^* t}] + \frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{21} - \rho_{31})(e^{\lambda_{12}^* t} - e^{\lambda_3^* t}) - (\rho_{42} - \rho_{43})e^{\lambda_{12}^* t}] & 1 + \rho_{11}e^{-2\Gamma t} - (2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33})e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

donde hemos utilizado

$$S = (\rho_{22} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{33}), \quad Q = (\rho_{22} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{33}),$$

y los eigenvalores λ_2 , λ_3 , λ_7 , λ_8 y λ_{12} como se muestran en la [Tabla 2.5](#). Esta solución posee carácter general al emplear un estado inicial arbitrario $\rho(0)$. No obstante, aunque la solución general es aplicable a cualquier estado inicial arbitrario, nos enfocaremos en estados iniciales particularmente relevantes, como los estados de Bell, con el interés de estudiar la evolución temporal del entrelazamiento. También analizaremos estados de una sola excitación para ver si podemos generar entrelazamiento.

2.4.2. Solución para estados de Bell como condición inicial

Como se estableció previamente, nuestro objetivo es caracterizar la evolución del entrelazamiento cuántico. Para ello, emplearemos los estados de Bell como condiciones iniciales, permitiendo rastrear su dinámica temporal. Estos estados, caracterizados por un entrelazamiento máximo, constituyen una base ortonormal de estados máximamente entrelazados (base de Bell), definidos bajo nuestra convención [ver §Subsección 2.1.3] como:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ee\rangle \pm |gg\rangle), \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle \pm |ge\rangle), \quad (2.52)$$

donde las matrices de densidad para cada uno de estos estados vienen dadas por

$$\rho_{\Phi^\pm} = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\Psi^\pm} = |\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Caso $\Phi^\pm$:

El estado inicial $\rho(0) = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|$ se define en la base computacional y dado que la solución markoviana general está en la misma base, elegimos los coeficientes ρ_{ij} :

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{14} = \pm \frac{1}{2}, \quad \rho_{41} = \pm \frac{1}{2}, \quad \rho_{44} = \frac{1}{2},$$

con todos los demás $\rho_{ij} = 0$. De esta forma, garantizamos que en $t = 0$ la solución (2.51) se transforme en $\rho_{\Phi^\pm}$. Sustituyendo estos coeficientes en la solución general, obtenemos:

$$\rho_{\Phi^\pm}^M(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2\Gamma t} & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2}e^{[-\Gamma-2i\omega]t} \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t}) & 0 \\ \pm \frac{1}{2}e^{[-\Gamma+2i\omega]t} & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - e^{-\Gamma t})^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Caso $\Psi^\pm$:

El estado inicial $\rho(0) = |\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm|$ se define en la base computacional al igual que la solución markoviana general, elegimos los coeficientes ρ_{ij} :

$$\rho_{22} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{23} = \pm \frac{1}{2}, \quad \rho_{32} = \pm \frac{1}{2}, \quad \rho_{33} = \frac{1}{2},$$

con todos los demás $\rho_{ij} = 0$. De esta forma, garantizamos que en $t = 0$ la solución (2.51) se transforme en $\rho_{\Psi^\pm}$. Sustituyendo estos coeficientes en la solución general, obtenemos:

$$\rho_{\Psi^\pm}^M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} & \pm \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} & \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Estas cuatro soluciones reflejan de forma explícita cómo evoluciona cada estado de Bell bajo la dinámica markoviana, poniendo de manifiesto la desintegración de coherencias y la redistribución de poblaciones en el sistema bipartito. En particular, apreciamos que mientras los términos diagonales decaen exponencialmente con ritmos distintos, las coherencias fuera de diagonal principal muestran oscilaciones amortiguadas según la frecuencia propia del sistema.

A continuación, presentaremos las gráficas correspondientes a cada una de estas trayectorias temporales para facilitar su visualización e interpretación. Empezaremos con las poblaciones, donde se observa el comportamiento de las probabilidades de encontrar el sistema en cada uno de los subespacios, y luego analizaremos las coherencias, detallando cómo se atenúan y modulan con el tiempo.

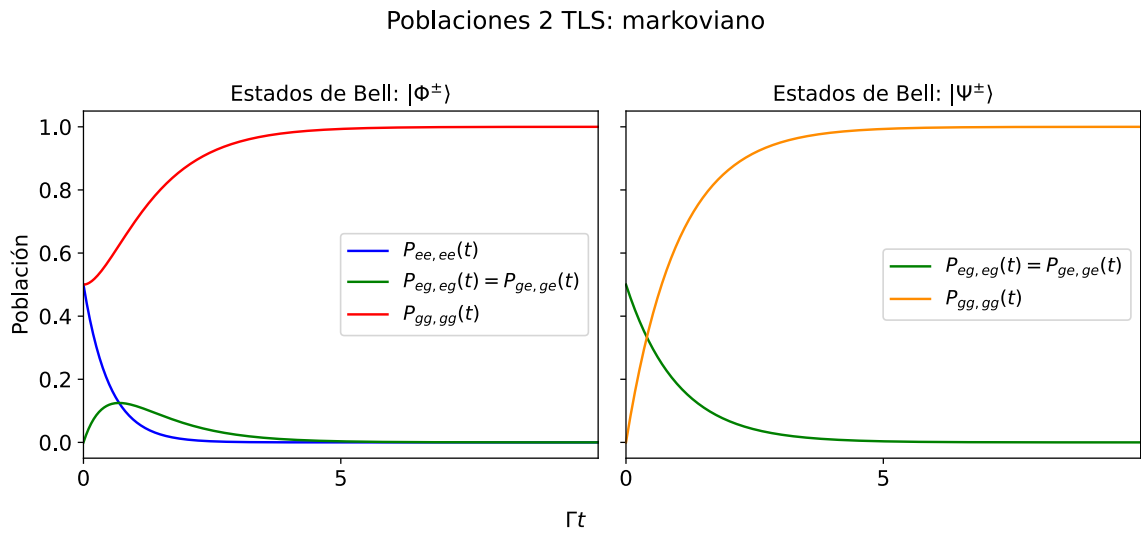


Figura 2.6: Evolución temporal de las probabilidades de encontrar al sistema en los niveles $|ee\rangle$, $|eg\rangle$, $|ge\rangle$ y $|gg\rangle$ cuando se parte de cada uno de los cuatro estados de Bell. Los estados $|\Phi^\pm\rangle$ (dos excitaciones) vacían $|ee\rangle$ con rapidez y muestran un abultamiento intermedio en $|eg\rangle$, $|ge\rangle$ antes de relajarse por completo a $|gg\rangle$; en cambio, los estados $|\Psi^\pm\rangle$ (una excitación) se transfieren directamente a $|gg\rangle$ con pendiente a la mitad de velocidad. En todos los casos $|gg\rangle$ actúa como sumidero final.

En la [Figura 2.6](#) se observa cómo la emisión espontánea redistribuye la probabilidad entre los estados del sistema de dos qubits. Para los estados de Bell $|\Phi^\pm\rangle$, inicialmente preparados en una superposición máxima del estado doblemente excitado $|ee\rangle$ y el base $|gg\rangle$, la población $P_{ee,ee}(t) = \frac{1}{2}e^{-2\Gamma t}$ decae rápidamente. Este comportamiento refleja que ambos qubits deben perder su excitación individualmente, emitiendo cada uno un fotón de manera independiente, lo cual ocurre con una tasa efectiva 2Γ . Mientras tanto, las poblaciones $P_{eg,eg}(t) = P_{ge,ge}(t) = \frac{1}{2}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t})$ muestran un aumento transitorio. Este “abultamiento” surge porque, antes de alcanzar el estado base $|gg\rangle$, el sistema pasa por configuraciones donde solo uno de los qubits ha emitido su fotón. Finalmente, $P_{gg,gg}(t)$ crece siguiendo $\frac{1}{2}(1 - e^{-\Gamma t})^2 + \frac{1}{2}$, acumulando la población a medida que ambos fotones son emitidos.

Para los estados $|\Psi^\pm\rangle$, que inician en una superposición de $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$, la dinámica es distinta. Aquí, solo un qubit está inicialmente excitado, lo que implica que la emisión de un único fotón basta para llegar al estado base. Esto se traduce en que las poblaciones $P_{eg,ge}(t)$ y $P_{ge,eg}(t)$ decaen con una tasa Γ , mientras que $P_{gg,gg}(t) = 1 - e^{-\Gamma t}$ aumenta suavemente hasta saturar en 1. La ausencia de la población en $P_{ee,ee}(t)$ confirma que, en ningún momento,

ambos qubits están simultáneamente excitados: el sistema nunca “almacena” un segundo fotón.

La diferencia clave entre ambos casos radica en la jerarquía de tiempos característicos. Los estados $|\Phi^\pm\rangle$, al depender de dos emisiones independientes, vacían su excitación al doble de velocidad comparados con $|\Psi^\pm\rangle$, donde una sola emisión gobierna la transición. Esto se evidencia en las tasas exponenciales: 2Γ para $|\Phi^\pm\rangle$ frente a Γ para $|\Psi^\pm\rangle$. El estado $|gg\rangle$ actúa como sumidero universal, pero la ruta hacia él depende críticamente de las correlaciones iniciales.

Coherencias 2 TLS: markoviano

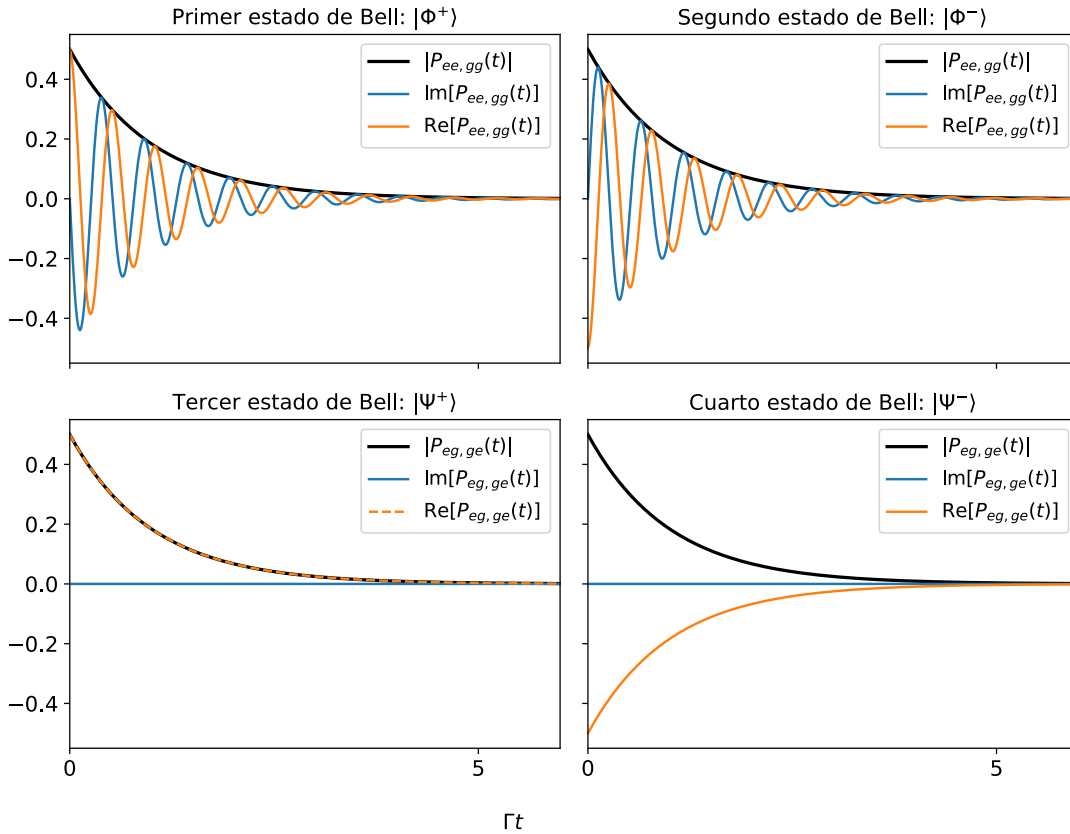


Figura 2.7: Comportamiento de las coherencias que sostienen el entrelazamiento inicial. Para $|\Phi^\pm\rangle$, la amplitud $P_{ee,gg}(t)$ oscila a 2ω con $\omega = 6\Gamma$. Para $|\Psi^\pm\rangle$, la coherencia $P_{eg,ge}(t)$ carece de oscilaciones y decae exponencialmente con la misma escala temporal. Estas curvas reflejan que los pares $|\Phi^\pm\rangle$ pierden entrelazamiento al doble de velocidad que los pares $|\Psi^\pm\rangle$, sin exhibir muerte súbita en ningún caso.

En la [Figura 2.7](#) se muestra cómo las correlaciones cuánticas, representadas por los elementos fuera de la diagonal de la matriz densidad, evolucionan en el tiempo para cada estado de Bell. Para los estados $|\Phi^\pm\rangle$, inicialmente entrelazados entre el nivel doblemente excitado $|ee\rangle$ y el base $|gg\rangle$, la coherencia $P_{ee,gg}(t) = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}e^{-2i\omega t}$ domina la dinámica. Este término combina un decaimiento exponencial—gobernado por la tasa Γ — con oscilaciones rápidas a frecuencia 2ω , como si la diferencia de energía entre $|ee\rangle$ y $|gg\rangle$ imprimiera un “latido” cuántico en las fases relativas. Estas oscilaciones, sin embargo, se amortiguan progresivamente debido a la interacción con el entorno, dejando solo un rastro de las correlaciones iniciales. En contraste, los estados $|\Psi^\pm\rangle$, que parten de una superposición

simétrica ($|\Psi^+\rangle$) o antisimétrica ($|\Psi^-\rangle$) de $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$, presentan coherencias $P_{eg,ge}(t) = \pm \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}$. Aquí, no hay oscilaciones porque $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$ tienen la misma energía: al no existir un desbalance energético entre estos estados, no se acumula fase relativa con el tiempo. La única fuente de decaimiento es la emisión espontánea de un único fotón, correspondiente a la relajación del qubit excitado hacia su estado base.

La diferencia entre ambos casos es crucial. Mientras que en $|\Phi^\pm\rangle$ se requiere la emisión de dos fotones —uno por cada qubit— para eliminar completamente las coherencias, en $|\Psi^\pm\rangle$ basta con un solo evento de emisión. Esto se refleja en las tasas de decaimiento: las coherencias de $|\Phi^\pm\rangle$ están sujetas a una combinación de procesos (oscilaciones y decaimiento), mientras que las de $|\Psi^\pm\rangle$ se atenúan de manera monótona, como una llama que se apaga sin titubeos. En ambos escenarios, las amplitudes no desaparecen abruptamente, sino que se desvanecen de forma suave, siguiendo las leyes exponenciales típicas de los sistemas markovianos. Esta suavidad confirma que el entorno no “interrumpe” violentamente las superposiciones, sino que las erosiona progresivamente.

En síntesis, el estudio del régimen markoviano nos confirma que, cuando el entorno carece de memoria, la dinámica de dos sistemas de nivel (2 TLS) se rige por un flujo de excitaciones sencillo y predecible: los niveles poblacionales se vacían escalonadamente y los términos no diagonales se apagan de forma exponencial, modulados —o no— por la diferencia de energía entre los estados involucrados. Este comportamiento refleja la naturaleza “sin pasado” del baño: cada emisión es un evento independiente que no retroalimenta al sistema ni altera su futuro inmediato más allá de reducir, de forma irreversible, la energía y la coherencia almacenadas.

Los cuatro estados de Bell constituyen una prueba de fuego particularmente clara. Partir desde los sectores con dos excitaciones ($|\Phi^\pm\rangle$) acelera la relajación y añade una oscilación rápida asociada a la brecha energética entre $|ee\rangle$ y $|gg\rangle$, mientras que los sectores con una sola excitación ($|\Psi^\pm\rangle$) muestran una caída más pausada y carente de modulación dinámica.

Con ello concluimos el examen del escenario markoviano. Hemos visto que la ausencia de memoria simplifica la evolución y permite resolverla exactamente, pero también impone un límite intrínseco: cualquier recurso cuántico depositado inicialmente—ya sea energía, coherencia o correlación—se diluye de manera inexorable y con tasas determinadas por el número de excitaciones involucradas. Esta visión sienta las bases para el siguiente capítulo, donde abriremos la puerta a entornos con memoria y exploraremos cómo la retroalimentación del pasado altera, enriquece o incluso revierte las conclusiones aquí obtenidas.

Solución de sistemas post-markovianos

Tras dominar el terreno marcado por la simplicidad del régimen markoviano, donde el entorno carecía de memoria y las ecuaciones eran batallas lineales, avanzamos hacia un paisaje donde el tiempo deja cicatrices. El post-markoviano no es ruptura, sino evolución: un puente entre orden y caos, donde el entorno ya no olvida. Aquí, el pasado es arquitecto silencioso del presente. En el silencio de sistemas sin historia, desarmamos interacciones efímeras y exhibimos la dinámica fugaz de qubits. Pero la naturaleza no perdona ni olvida. Ahora, el pasado nos alcanza: el campo de batalla se expande con un nuevo adversario: el recuerdo.

El régimen post-markoviano representa un escenario más realista que el puramente markoviano. No es aún la jungla impenetrable del régimen fuertemente no markoviano, pero sí un terreno salpicado de memoria, un frente intermedio donde las retroalimentaciones sutiles se vuelven tangibles. En este territorio, los sistemas de dos niveles (TLS) enfrentan un nuevo desafío: interactuar con un entorno que guarda memorias, un testigo que registra cada intercambio de energía y lo devuelve como un eco temporal. Las correlaciones ambientales ahora persisten, tejiendo una red de influencias que conectan instantes distantes. Pero esta complejidad no es un laberinto sin salida. Con la ecuación post-markoviana de Shabani y Lidar [6], transformamos la memoria en un aliado: el kernel $k(t)$, una función que cuantifica cuánto pesa cada momento pasado en el presente, actúa como un traductor entre el lenguaje del entorno y la dinámica del sistema.

¿Qué secretos oculta este régimen? ¿Cómo resurgen coherencias aparentemente perdidas? ¿De qué modo el entrelazamiento entre TLS se modula bajo la sombra de memorias estructuradas? Estas son las preguntas que guiarán nuestra incursión. En sistemas de un solo TLS, la memoria puede ralentizar el decaimiento de coherencias, como si el entorno, al recordar, ofreciera una tregua a la decoherencia. En sistemas de dos TLS entrelazados, la memoria ambiental modula el entrelazamiento, creando pulsos de resurgimiento o acelerando su desvanecimiento, dependiendo de si el entorno preserva o borra sus huellas. Este régimen no solo describe pérdidas, sino intercambios: energía que fluye bidireccionalmente, coherencias que se filtran y reconstruyen, como ondas chocando contra un acantilado y retrocediendo con nueva forma.

Hemos preparado el campo de batalla en los capítulos anteriores. Hemos dominado la simplicidad. Ahora, armados con soluciones markovianas y el kernel $k(t)$, exploramos cómo la memoria redefine las reglas. No es un salto a la oscuridad, sino una inmersión en un océano de posibilidades controladas: la ecuación post-markoviana preserva la tratabilidad analítica, pero añade capas de realismo. Cada solución aquí obtenida no es un final, sino una puerta a preguntas más profundas: ¿Puede la memoria ambiental convertirse en un recurso? ¿Cómo diseñar entornos que “programen” la dinámica cuántica mediante kernels

específicos?

Este capítulo es la llave para desbloquear sistemas cuánticos en regímenes realistas, donde el tiempo no es un enemigo, sino un cómplice. La memoria, lejos de ser un obstáculo, es el lienzo donde pintamos el futuro de las tecnologías cuánticas.

3.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN POST-MARKOVIANA

En el marco de la dinámica cuántica no markoviana, la ecuación post-markoviana —propuesta seminalmente por Shabani y Lidar— emerge como un puente conceptual entre el mapa exacto de Kraus (de naturaleza discreta) y la ecuación maestra generalizada de Nakajima-Zwanzig (de carácter integro-diferencial). Dicha ecuación está expresada como

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L} \int_0^t dt' k(t') e^{\mathcal{L}t'} \rho(t - t'). \quad (3.1)$$

Esta formulación unificadora permite modelar sistemas cuánticos abiertos con memoria finita, combinando precisión y tratabilidad matemática.

3.1.1. Derivación analítica de la solución general

En este trabajo, nos enfocamos en resolver dicha ecuación mediante una descomposición espectral de la matriz de densidad $\rho(t)$ términos de vectores derechos $\{\hat{\rho}_{\lambda_i}\}$, análoga a la metodología empleada en el régimen markoviano. Dado que los eigenvectores de $\mathcal{L}$ son completos, podemos escribir la expansión:

$$\rho(t) = \sum_i C_i(t) \hat{\rho}_{\lambda_i}, \quad (3.2)$$

donde los coeficientes dinámicos están determinados como en (2.41). Aplicamos la derivada temporal a la ecuación anterior obteniendo así,

$$\dot{\rho}(t) = \sum_i \dot{C}_i(t) \hat{\rho}_{\lambda_i}. \quad (3.3)$$

Introduciendo las ecuaciones (3.2) y (3.3) en la ecuación post-markoviana (3.1), conseguimos

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{C}_i(t) \hat{\rho}_{\lambda_i} &= \mathcal{L} \int_0^t d\tau k(\tau) \exp(\mathcal{L}\tau) \sum_i C_i(t - \tau) \hat{\rho}_{\lambda_i} \\ &= \sum_i \lambda_i \int_0^t k(\tau) C_i(t - \tau) \exp(\lambda_i \tau) d\tau \hat{\rho}_{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Al hacer la comparación de ambos miembros de la ecuación anterior, obtenemos una relación para los coeficientes dinámicos,

$$\dot{C}_i(t) = \lambda_i \int_0^t k(\tau) C_i(t - \tau) \exp(\lambda_i \tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Recordemos que la convolución de dos funciones f y g se define como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad (3.6)$$

donde de esta definición podemos suponer que $g(\tau) = \lambda_i k(\tau) \exp(\lambda_i \tau)$ y $f(t - \tau) = C_i(t - \tau)$. Por lo tanto, podemos escribir el lado derecho de la ecuación (3.5) como

$$\lambda_i \int_0^t k(\tau) \exp(\lambda_i \tau) C_i(t - \tau) d\tau = \lambda_i k(\tau) \exp(\lambda_i \tau) * C_i(t), \quad (3.7)$$

lo cual nos permite reescribir la ecuación (3.5) en la forma

$$\dot{C}_i(t) = \lambda_i k(\tau) \exp(\lambda_i \tau) * C_i(t). \quad (3.8)$$

Ahora, podemos aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación anterior,

$$\mathcal{L}\{\dot{C}_i(t)\} = \mathcal{L}\{\lambda_i k(\tau) \exp(\lambda_i \tau) * C_i(t)\}. \quad (3.9)$$

Es conocido, [28], que la transformada de Laplace de la derivada se define expresa mediante la relación

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - f(0), \quad (3.10)$$

la cual nos permite obtener

$$\mathcal{L}\{\dot{C}_i(t)\} = s\mathcal{L}\{C_i(t)\}(s) - C_i(0) = s\tilde{C}_i(s) - C_i(0), \quad (3.11)$$

donde $\tilde{C}_i(s) := \mathcal{L}\{C_i(t)\}$ es la transformada de Laplace de la función $C_i(t)$.

Para el lado derecho de (3.9) invocamos la propiedad $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$ [28]. Esto nos permite escribir

$$\mathcal{L}\{\lambda_i k(\tau) \exp(\lambda_i \tau) * C_i(t)\} = \lambda_i \tilde{C}_i(s) \tilde{k}(s - \lambda_i). \quad (3.12)$$

Introduciendo las relaciones (3.12) y (3.11) dentro de (3.9), concluimos que

$$\tilde{C}_i(s) = \frac{C_i(0)}{s - \lambda_i \tilde{k}(s - \lambda_i)}. \quad (3.13)$$

Dado que nos interesa una expresión para calcular los coeficientes $C_i(t)$, aplicamos la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior, permitiéndonos escribir

$$C_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \lambda_i \tilde{k}(s - \lambda_i)}\right\} C_i(0) = \xi_i(t) C_i(0). \quad (3.14)$$

Para calcular explícitamente los coeficientes $\xi_i(t)$, necesitamos una función de kernel de memoria, en este caso, nuestra elección es en forma exponencial:

$$k(t) = \gamma e^{-\gamma t}, \quad (3.15)$$

el cual nos permite expresar el término $\tilde{k}(s - \lambda_i)$ como:

$$\tilde{k}(s - \lambda_i) = \frac{\gamma}{s - (\lambda_i - \gamma)}. \quad (3.16)$$

De lo anterior, podemos representar el término en llaves de la ecuación (3.14) en la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s - \lambda_i \tilde{k}(s - \lambda_i)} &= \frac{1}{s - \lambda_i \left(\frac{\gamma}{s + \gamma - \lambda_i} \right)} = \frac{s + \gamma - \lambda_i}{s^2 + s\gamma - s\lambda_i - \lambda_i\gamma} \\
 &= \frac{(s - \lambda_i) + \gamma}{(s + \gamma)(s - \lambda_i)} = \frac{1}{s + \gamma} + \frac{\gamma}{(s + \gamma)(s - \lambda_i)}. \\
 &= \frac{1}{s + \gamma} + \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_i} \left(\frac{1}{s - \lambda_i} - \frac{1}{s + \gamma} \right) \\
 &= \frac{\lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \left(\frac{1}{s + \gamma} \right) + \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_i} \left(\frac{1}{s - \lambda_i} \right).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - \lambda_i \tilde{k}(s - \lambda_i)} \right\} &= \frac{\lambda_i}{\gamma + \lambda_i} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \gamma} \right\} + \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_i} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - \lambda_i} \right\} \\
 &= \frac{\lambda_i}{\gamma + \lambda_i} e^{-\gamma t} + \frac{\gamma}{\gamma + \lambda_i} e^{\lambda_i t}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Finalmente, concluimos que

$$\xi_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - \lambda_i \tilde{k}(s - \lambda_i)} \right\} = \frac{\gamma e^{\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\gamma t}}{\gamma + \lambda_i}. \tag{3.19}$$

Por lo tanto, la solución final post-markoviana es:

$$\rho(t) = \sum_i \xi_i(t) C_i(0) \hat{\rho}_{\lambda_i}. \tag{3.20}$$

La solución de la ecuación post-markoviana revela una dependencia crítica en la relación entre la tasa de decaimiento del sistema, Γ , y la tasa de pérdida de memoria, γ . Para los eigenvalores $\lambda_1 = -2\Gamma$ y $\lambda_6 = \lambda_{11} = -\Gamma$, el denominador $\gamma + \lambda_i$ introduce una singularidad cuando $\gamma = 2\Gamma$ y $\gamma = \Gamma$, respectivamente. A continuación, se analizan los tres casos clave:

1. **Caso $\Gamma > \gamma$:**

Memoria persistente Cuando Γ domina sobre γ , el término asociado a los eigenvalores degenerados λ_6 y λ_{11} en la solución adquiere la forma:

$$\frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma}.$$

Al descomponerlo, prevalece el término con $e^{-\gamma t}$ para tiempos largos, ya que γ es la tasa más lenta. Esto implica que la dinámica del sistema está gobernada por la pérdida de memoria. El sistema “recuerda” su historia debido a la persistencia de la memoria (γ pequeña), lo que ralentiza su decaimiento efectivo.

2. **Caso $\Gamma < \gamma$:**

Régimen cuasi-Markoviano Si γ es mayor que Γ , el denominador $\gamma - \Gamma$ es positivo, y el término correspondiente a λ_6 y λ_{11} se simplifica a:

$$\frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} \approx \frac{\gamma}{\gamma - \Gamma} e^{-\Gamma t} \quad (\text{para } t \text{ grandes}).$$

Aquí, la rápida pérdida de memoria (γ) suprime los efectos no-Markovianos, y el sistema decae según su tasa intrínseca Γ . Este régimen se asemeja a un comportamiento Markoviano, donde la memoria del entorno no influye significativamente.

3. Caso $\Gamma = \gamma$:

Punto crítico y resolución de la indeterminación. Cuando $\Gamma = \gamma$, el denominador $\gamma - \Gamma$ se anula, sugiriendo una indeterminación. Sin embargo, al aplicar el límite $\gamma \rightarrow \Gamma$ (usando la regla de L'Hôpital), el término crítico para λ_6 y λ_{11} se transforma en:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \Gamma} \frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} = e^{-\Gamma t} (1 + \Gamma t).$$

Este resultado muestra que, en el punto crítico, la solución adquiere un término lineal en el tiempo multiplicado por una exponencial. Esta dependencia temporal indica una desviación fundamental del decaimiento exponencial puro, reflejando una competencia exacta entre la pérdida de memoria y el decaimiento del sistema.

Este análisis subraya que la ecuación post-markoviana no es meramente una extensión formal de modelos markovianos, sino una herramienta para explorar cómo la memoria ambiental modula la evolución de sistemas cuánticos abiertos, desde regímenes fuertemente no-markovianos hasta transiciones críticas.

3.1.2. Límite markoviano

La solución post-markoviana generaliza la dinámica de sistemas cuánticos abiertos al incorporar efectos de memoria finita. Sin embargo, es fundamental verificar que, en el régimen donde la memoria del entorno se vuelve despreciable, se recupere la descripción Markoviana estándar. A continuación, se demuestra cómo la solución post-markoviana se reduce a la dinámica de Lindblad cuando la tasa de pérdida de memoria γ domina sobre la tasa de decaimiento del sistema Γ .

El límite Markoviano corresponde al caso donde el kernel de memoria $k(t)$ en la ecuación post-markoviana se aproxima a una delta de Dirac: $k(t) \rightarrow \delta(t)$. Bajo esta aproximación, la integral de memoria en la ecuación post-markoviana se simplifica:

$$\mathcal{L} \int_0^t dt' \delta(t') e^{\mathcal{L}t'} \rho(t - t') = \mathcal{L} e^{\mathcal{L} \cdot 0} \rho(t) = \mathcal{L} \rho(t), \quad (3.21)$$

lo que reduce la ecuación original a la ecuación maestra de Lindblad:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L} \rho(t).$$

Con el kernel (o núcleo) que hemos elegido, la transición al régimen Markoviano, se realiza tomando el límite de pérdida de memoria infinita ($\gamma \rightarrow \infty$) en la solución post-markoviana. Partimos de la expresión general (3.20). En este límite, el término $\lambda_i e^{-\gamma t}$ en el numerador se suprime exponencialmente debido al decaimiento ultrarrápido de $e^{-\gamma t}$, reduciendo el numerador a $\gamma e^{\lambda_i t}$. Simultáneamente, el denominador $\gamma + \lambda_i$ se aproxima a γ , ya que γ domina sobre cualquier eigenvalor λ_i (por ejemplo, $\lambda_i = -\Gamma, -2\Gamma$). Esto simplifica cada término en la solución post-markoviana dándonos la solución

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sum_i \frac{\gamma e^{\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\gamma t}}{\gamma + \lambda_i} C_{\lambda_i}(0) \hat{\rho}_{\lambda_i} = \frac{\gamma e^{\lambda_i t}}{\gamma} C_{\lambda_i}(0) \hat{\rho}_{\lambda_i} = e^{\lambda_i t} C_{\lambda_i}(0) \hat{\rho}_{\lambda_i}, \quad (3.22)$$

que corresponde exactamente a la solución de la ecuación de Lindblad.

La condición $\gamma \rightarrow \infty$ implica que el entorno “olvida” instantáneamente las interacciones pasadas con el sistema ($\tau_{\text{memoria}} \sim 1/\gamma \rightarrow 0$). Como consecuencia, la dinámica se vuelve local en el tiempo, y las correlaciones no-markovianas, proporcionales a $e^{-\gamma t}$, se suprimen. La solución resultante $\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0)$ describe un semigrupo dinámico markoviano, donde la evolución depende únicamente del estado instantáneo del sistema.

Este análisis no solo valida la coherencia de la solución post-markoviana con el marco teórico establecido, sino que además establece un criterio fundamental para determinar la relevancia de los efectos de memoria: estos se vuelven significativos cuando el parámetro γ es comparable o inferior a las tasas de decaimiento del sistema (Γ).

3.2. SOLUCIÓN POST-MARKOVIANA PARA 1 TLS

En esta sección estudiamos un sistema de dos niveles (TLS) dentro del régimen post-markoviano, propuesto por Shabani y Lidar [6] y aplicada al problema de 1 qubit por Maniscalco y Petruccione [7], que introduce memoria ambiental a través de un kernel exponencial. Al igual que en el régimen markoviano, la solución se construye mediante una expansión espectral en el espacio de Liouville con los coeficientes dinámicos $C_i(t)$ definidos en la ecuación (2.41). Repetimos ahora dicho procedimiento usando los autovectores derechos y sus eigenvalores asociados, lo que conduce a la forma general de la solución:

$$\begin{aligned} \rho^{\text{PM}}(t) = & \rho_{11} \frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} |e\rangle\langle e| + \rho_{21} \frac{\gamma e^{-(\Gamma/2 - i\omega)t} - (\frac{\Gamma}{2} - i\omega) e^{-\gamma t}}{\gamma - \frac{\Gamma}{2} + i\omega} \sigma_- \\ & + \rho_{12} \frac{\gamma e^{-(\Gamma/2 + i\omega)t} - (\frac{\Gamma}{2} + i\omega) e^{-\gamma t}}{\gamma - \frac{\Gamma}{2} - i\omega} \sigma_+ + \left[1 - \rho_{11} \frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} \right] |g\rangle\langle g| \\ = & \begin{pmatrix} \rho_{11} \frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} & \rho_{12} \frac{\gamma e^{-(\Gamma/2 + i\omega)t} - (\frac{\Gamma}{2} + i\omega) e^{-\gamma t}}{\gamma - \frac{\Gamma}{2} - i\omega} \\ \rho_{21} \frac{\gamma e^{-(\Gamma/2 - i\omega)t} - (\frac{\Gamma}{2} - i\omega) e^{-\gamma t}}{\gamma - \frac{\Gamma}{2} + i\omega} & 1 - \rho_{11} \frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para analizar los efectos de la memoria en el sistema, resulta esclarecedor examinar gráficamente la evolución temporal de los elementos de la matriz densidad. La comparación directa entre los regímenes markoviano y post-markoviano —especialmente de las poblaciones ($P_{ee}(t)$, $P_{gg}(t)$) y las coherencias ($P_{eg}(t)$, $P_{ge}(t)$)— permite visualizar de manera precisa cómo la memoria modifica la dinámica del sistema.

Observemos que el coeficiente $\xi_6(t)$ puede ser expresado como una función

$$\xi_6(t, R) = \frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} = \frac{e^{-\Gamma t} - R e^{-\Gamma t/R}}{1 - R} \quad (3.24)$$

donde $R = \Gamma/\gamma$ es la razón de las tasas de decaimiento del sistema y de la memoria, respectivamente. Por convención, R grande indica memoria larga (relajación lenta del entorno) y R pequeño, memoria corta. Bajo esta definición podemos expresar las poblaciones de $\rho(t)$ como:

$$\begin{aligned} P_{ee}(t) &= \rho_{11} \xi_6(t, R), \\ P_{gg}(t) &= 1 - P_{ee}(t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

mientras que las coherencias son

$$P_{eg}(t) = P_{ge}^*(t) = \rho_{12} \frac{e^{-(\frac{1}{2} + i\delta)\Gamma t} - R(\frac{1}{2} + i\delta)e^{-\Gamma t/R}}{1 - R(\frac{1}{2} + i\delta)}, \quad (3.26)$$

con $\delta = \omega/\Gamma$.

Procedemos con el análisis de la evolución temporal de las poblaciones y coherencias (utilizando el mismo estado inicial que en el caso markoviano, mostrado en (2.47)) tal como se muestran en las siguientes figuras.

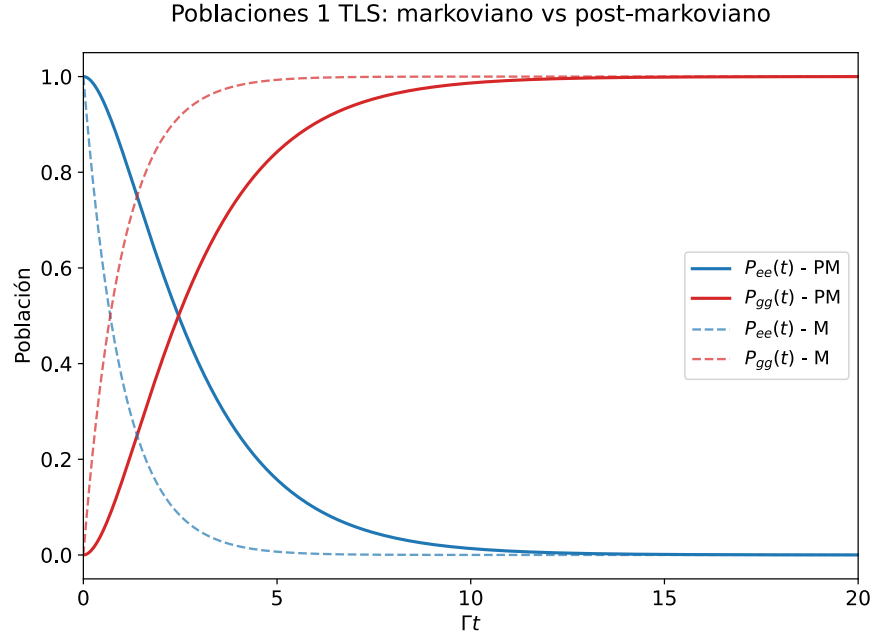


Figura 3.1: Evolución post-markoviana de las poblaciones $P_{ee}(t)$ y $P_{gg}(t)$ para 1 TLS; el acoplamiento con memoria ralentiza el vaciado de la excitación inicial y genera un tramo no-exponencial antes de la relajación final. Mostramos una comparativa entre la dinámica markoviana (líneas punteadas) y post-markoviana (líneas continuas) bajo el parámetro $R = 2$. La memoria ambiental atenúa el decaimiento rápido típico del caso sin memoria, mostrando cómo el baño retroalimenta temporalmente la ocupación del estado excitado.

En la Figura 3.1 se observa que el decaimiento de $P_{ee}(t)$ y el crecimiento de $P_{gg}(t)$ son más lentos en comparación con el mostrado en el caso markoviano, reflejando efectos no-Markovianos débiles. En particular, el inicio del decaimiento de $P_{ee}(t)$ presenta un comportamiento no exponencial, caracterizado por un tramo inicial retardado debido a la retroalimentación temporal del baño ambiental, antes de transitar hacia una relajación final más gradual. La dinámica mantiene monotonicidad, pero con una relajación retardada, evidenciando cómo la memoria ambiental influye temporalmente en la ocupación del estado excitado.

En la Figura 3.2, comparamos el módulo de la coherencia $|P_{eg}(t)|$ con valores de $R \in [0.2, 0.5, 1, 2, 5]$ frente al caso puramente markoviano. Para R grande la coherencia decae lentamente con oscilaciones residuales, evidenciando efectos no-Markovianos dominantes (memoria prolongada del entorno). Al disminuir R las curvas post-markovianas se aproximan progresivamente a la dinámica markoviana. Para $R = 0.2$, el decaimiento de $|P_{eg}(t)|$ converge a la curva del régimen markoviano por abajo.

Un valor de R pequeño implica tiempos de memoria cortos en el entorno, suprimiendo la influencia no-markoviana. Así, el límite $R \rightarrow 0$ recupera la descripción markoviana estándar, donde la interacción sistema-entorno es instantánea y sin historia previa. Este resultado confirma que el modelo post-markoviano generaliza la teoría markoviana, incorporando memoria finita que se desvanece en el régimen de R pequeño.

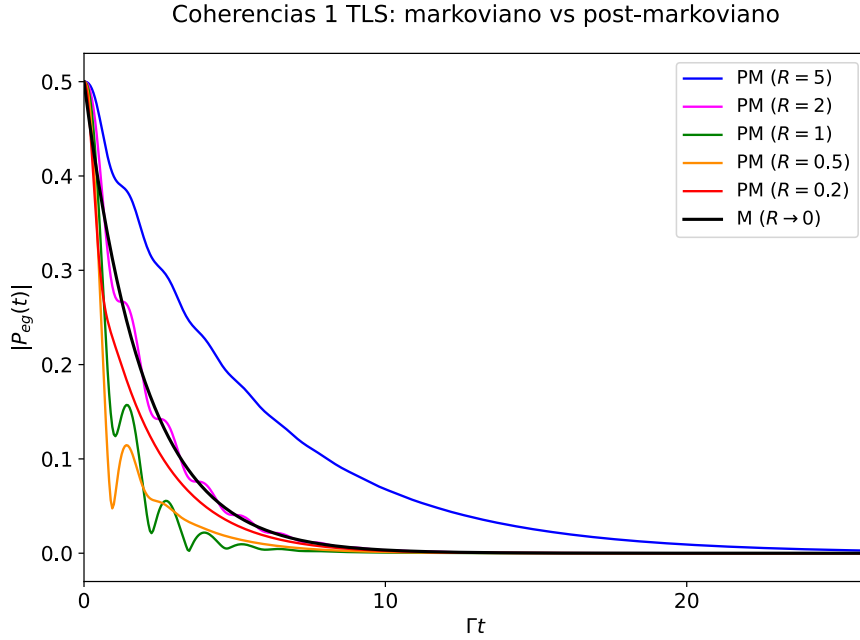


Figura 3.2: Comparación de la evolución temporal de la coherencia $|P_{eg}(t)|$ de 1 TLS en el régimen markoviano y post-markoviano. Para valores de $R \in [5, 2, 1, 0.5, 0.2]$ y $\delta = 5$, se observa que, al disminuir R , la solución PM converge a la M, mientras que para R grandes la cola de $|P_{eg}(t)|$ se prolonga debido a la influencia de la memoria.

3.3. SOLUCIÓN POST-MARKOVIANA PARA 2 TLS

Después de haber analizado detalladamente el caso de un único sistema de dos niveles (1 TLS) en el régimen post-markoviano, es natural extender ahora nuestro estudio hacia sistemas más complejos. En particular, examinaremos la dinámica de dos sistemas de dos niveles acoplados (2 TLS) bajo las mismas condiciones post-markovianas. Aunque el régimen post-markoviano ha sido estudiado en sistemas individuales, la extensión a sistemas acoplados como este no ha sido explorada en profundidad en la literatura existente, dejando un vacío en la comprensión de cómo la memoria ambiental afecta las interacciones colectivas entre subsistemas cuánticos.

En esta sección, presentamos por primera vez una solución analítica cerrada para la evolución temporal de 2 TLS acoplados en el régimen post-markoviano, generalizando la metodología de expansión espectral del superoperador de Liouville al espacio bipartito. Esta solución, que hasta donde tenemos conocimiento no ha sido reportada previamente, nos permite desentrañar de manera precisa cómo los efectos de memoria del baño no solo modifican las poblaciones individuales de cada TLS, sino que también regulan la dinámica de correlaciones cuánticas entre ellos.

Como aplicación directa de esta solución general, analizaremos en detalle la evolución partiendo no solo de estados de Bell —los cuales, debido a su entrelazamiento máximo, sirven como un banco de pruebas ideal para cuantificar el impacto de la memoria ambiental en el entrelazamiento—, sino también de estados particulares como $|eg\rangle\langle eg|$ o $|ge\rangle\langle ge|$, con el fin

de explorar si es posible generar entrelazamiento a partir de configuraciones inicialmente separables y comparar esta creación en los regímenes markoviano y post-markoviano. Los resultados que presentamos a continuación no solo amplían el alcance de la dinámica post-markoviana a sistemas multipartitos, sino que también proporcionan nuevas herramientas conceptuales para entender la preservación, generación y control de correlaciones cuánticas en entornos estructurados.

3.3.1. Solución post-markoviana general

Para la solución general del sistema de 2 TLS en el régimen post-markoviano, aprovecharemos los coeficientes dinámicos previamente calculados en el contexto markoviano, los cuales ya hemos definido en el capítulo 3 y se detallan exhaustivamente en la [Tabla 2.6](#). Esta elección se fundamenta en la similitud estructural que comparten ambas aproximaciones, lo que no solo facilita la transición entre regímenes, sino que también permite una formulación consistente y directa, asegurando que las dinámicas no markovianas se construyan sobre una base sólida ya establecida.

$$\begin{aligned}
\rho^{\text{PM}}(t) = & \rho_{11} \xi_1(t) |ee\rangle\langle ee| + \frac{\rho_{12} + \rho_{13}}{\sqrt{2}} \xi_2(t) |ee\rangle\langle +| + \frac{\rho_{12} - \rho_{13}}{\sqrt{2}} \xi_3(t) |ee\rangle\langle -| \\
& + \rho_{14} \xi_4(t) |ee\rangle\langle gg| + \frac{\rho_{21} + \rho_{31}}{\sqrt{2}} \xi_2^*(t) |+\rangle\langle ee| \\
& + \left[-\rho_{11} \xi_1(t) + \left(\rho_{11} + \frac{\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{33}}{2} \right) \xi_6(t) \right] |+\rangle\langle +| \\
& + \frac{1}{2} (\rho_{22} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{33}) \xi_7(t) |+\rangle\langle -| \\
& + \left[\frac{\rho_{24} + \rho_{34}}{\sqrt{2}} \xi_8(t) + \frac{\chi_-}{\sqrt{2}} (\rho_{12} + \rho_{13}) (\xi_8(t) - \xi_{\lambda_2}(t)) \right] |+\rangle\langle gg| \\
& + \frac{\rho_{21} - \rho_{31}}{\sqrt{2}} \xi_3^*(t) |-\rangle\langle ee| + \frac{1}{2} (\rho_{22} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{33}) \xi_7^*(t) |-\rangle\langle +| \\
& + \left[-\rho_{11} \xi_{\lambda_1}(t) + \left(\rho_{11} + \frac{\rho_{22} - \rho_{23} - \rho_{32} + \rho_{33}}{2} \right) \xi_6(t) \right] |-\rangle\langle -| \\
& + \left[\frac{\rho_{24} - \rho_{34}}{\sqrt{2}} \xi_{12}(t) - \frac{\chi_+}{\sqrt{2}} (\rho_{12} - \rho_{13}) (\xi_{12}(t) + \xi_3(t)) \right] |-\rangle\langle gg| \\
& + \rho_{41} \xi_4^*(t) |gg\rangle\langle ee| \\
& + \left[\frac{\rho_{42} + \rho_{43}}{\sqrt{2}} \xi_8^*(t) + \frac{\chi_+}{\sqrt{2}} (\rho_{21} + \rho_{31}) (\xi_8^*(t) - \xi_2^*(t)) \right] |gg\rangle\langle +| \\
& + \left[\frac{\rho_{42} - \rho_{43}}{\sqrt{2}} \xi_{12}^*(t) + \frac{\chi_-}{\sqrt{2}} (\rho_{21} - \rho_{31}) (\xi_3^*(t) - \xi_{12}^*(t)) \right] |gg\rangle\langle -| \\
& + \left[1 - (2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33}) \xi_6(t) + \rho_{11} \xi_1(t) \right] |gg\rangle\langle gg|,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde seguimos usando la definición $\chi = \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda}$. Esta solución, a pesar de estar escrita en términos de la notación $|\pm\rangle$, su forma matricial se encuentra en la base computacional. Los argumentos son los mismos que usamos para explicar la solución markoviana en la ecuación (2.51). Por lo tanto, la representación matricial de la solución post-markoviana es

$$\rho^{\text{PM}}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}\xi_1(t) & \frac{1}{2}[(\rho_{12} + \rho_{13})\xi_2(t) + (\rho_{12} - \rho_{13})\xi_3(t)] & \frac{1}{2}[(\rho_{12} + \rho_{13})\xi_2(t) - (\rho_{12} - \rho_{13})\xi_3(t)] & \rho_{14}\xi_4(t) \\ \frac{1}{2}[(\rho_{21} + \rho_{31})\xi_2^*(t) + (\rho_{21} - \rho_{31})\xi_3^*(t)] & \rho_{11}(\xi_6(t) - \xi_1(t)) + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23})\xi_6(t) + \frac{1}{4}S\xi_7(t) + \frac{1}{4}Q\xi_7^*(t) & \frac{1}{2}(\rho_{23} + \rho_{32})\xi_6(t) - \frac{1}{4}S\xi_7(t) + \frac{1}{4}Q\xi_7^*(t) & \frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{12} + \rho_{13})(\xi_8(t) - \xi_2(t)) + (\rho_{24} + \rho_{34})\xi_8(t)] \\ \frac{1}{2}[(\rho_{21} + \rho_{31})\xi_2^*(t) - (\rho_{21} - \rho_{31})\xi_3^*(t)] & \frac{1}{2}(\rho_{23} + \rho_{32})\xi_6(t) + \frac{1}{4}S\xi_7(t) - \frac{1}{4}Q\xi_7^*(t) & \rho_{11}(\xi_6(t) - \xi_1(t)) + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23})\xi_6(t) - \frac{1}{4}S\xi_7(t) - \frac{1}{4}Q\xi_7^*(t) & \frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{12} + \rho_{13})(\xi_8(t) - \xi_2(t)) + (\rho_{24} + \rho_{34})\xi_8(t)] \\ \rho_{41}\xi_4^*(t) & \frac{1}{2}[\chi(\rho_{21} + \rho_{31})(\xi_8^*(t) - \xi_2^*(t)) + (\rho_{42} + \rho_{43})\xi_8^*(t)] & \frac{1}{2}[\chi(\rho_{21} + \rho_{31})(\xi_8^*(t) - \xi_2^*(t)) + (\rho_{42} + \rho_{43})\xi_8^*(t)] & 1 + \rho_{11}\xi_1(t) \\ & -\frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{21} - \rho_{31})(\xi_{12}^*(t) - \xi_3^*(t)) - (\rho_{42} - \rho_{43})\xi_{12}^*(t)] & +\frac{1}{2}[\chi^*(\rho_{21} - \rho_{31})(\xi_{12}^*(t) - \xi_3^*(t)) - (\rho_{42} - \rho_{43})\xi_{12}^*(t)] & -(2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33})\xi_6(t) \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

con $\xi_i(t)$ definidos como en (3.19) y S, Q como lo definimos en la solución markoviana (2.51).

Esta formulación compacta permite centrar nuestro análisis en los aspectos cualitativos y físicos relevantes del problema, particularmente en la dinámica poblacional, la coherencia y el entrelazamiento, facilitando así la interpretación y discusión de los efectos no-markovianos derivados del entorno. Además, esta representación abre el camino para explorar cuantitativamente cómo el acoplamiento entre los dos sistemas influye en la evolución temporal del entrelazamiento, permitiendo un análisis de los fenómenos emergentes del régimen post-markoviano.

3.3.2. Estados de Bell como condiciones iniciales

En esta subsección estudiaremos específicamente la evolución dinámica del sistema de 2 TLS utilizando como condiciones iniciales los estados de Bell, cuya representación matricial ya ha sido introducida en la ecuación (2.53). La elección de estos estados iniciales resulta particularmente interesante dado que corresponden a estados máximamente entrelazados, ideales para analizar el comportamiento del entrelazamiento debido a efectos de memoria ambiental en el régimen post-markoviano.

Las soluciones post-markovianas obtenidas correspondientes a estos cuatro estados son:

Caso $\Phi^\pm$:

Para el caso del estado inicial $\rho(0) = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|$, elegimos los coeficientes ρ_{ij} :

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{14} = \pm\frac{1}{2}, \quad \rho_{41} = \pm\frac{1}{2}, \quad \rho_{44} = \frac{1}{2},$$

con todos los demás $\rho_{ij} = 0$. De esta forma, garantizamos que en $t = 0$ la solución (3.28) se transforme en $\rho_{\Phi^\pm}$. Sustituyendo estos coeficientes en la solución general, obtenemos:

$$\rho_{\Phi^\pm}^{\text{PM}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\xi_1(t) & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2}\xi_4(t) \\ 0 & \frac{1}{2}(\xi_6(t) - \xi_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\xi_6(t) - \xi_1(t)) & 0 \\ \pm\frac{1}{2}\xi_{13}(t) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\xi_1(t) - \xi_6(t) + 1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Caso $\Psi^\pm$:

Para el estado inicial $\rho(0) = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|$, elegimos los coeficientes ρ_{ij} :

$$\rho_{22} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{23} = \pm\frac{1}{2}, \quad \rho_{32} = \pm\frac{1}{2}, \quad \rho_{33} = \frac{1}{2},$$

con todos los demás $\rho_{ij} = 0$. De esta forma, garantizamos que en $t = 0$ la solución (3.28) se transforme en $\rho_{\Psi^\pm}$. Sustituyendo estos coeficientes en la solución general, obtenemos:

$$\rho_{\Psi^\pm}^{\text{PM}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\xi_6(t) & \pm\frac{1}{2}\xi_6(t) & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{2}\xi_6(t) & \frac{1}{2}\xi_6(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi_6(t) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Una vez presentadas estas soluciones explícitas, analizaremos su comportamiento mediante gráficas. Dichas gráficas ilustrarán tanto la evolución temporal de las poblaciones como de las coherencias cuánticas, ofreciendo una visualización clara y directa del impacto de la dinámica post-markoviana sobre estos estados inicialmente entrelazados.

Utilizando la definición (3.24) podemos expresar las poblaciones de $\rho_{\Phi^\pm}^{\text{PM}}(t)$ como:

$$\begin{aligned} P_{ee,ee}^{\Phi^\pm}(t) &= \frac{1}{2}\xi_1(2t, 2R), \\ P_{eg,eg}^{\Phi^\pm}(t) &= \frac{1}{2}\left[\xi_6(t, R) - \xi_1(2t, 2R)\right] = P_{ge,ge}^{\Phi^\pm}(t), \\ P_{gg,gg}^{\Phi^\pm}(t) &= \frac{1}{2}\xi_1(2t, 2R) - \xi_1(t, R) + 1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

mientras que para las coherencias son

$$P_{ee,gg}^{\Phi^\pm}(t) = [P_{gg,ee}^{\Phi^\pm}(t)]^* = \pm\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(1+2i\delta)\Gamma t} - R(1+2i\delta)e^{-\Gamma t/R}}{1 - R(1+2i\delta)}\right], \quad (3.32)$$

con $\delta = \omega/\Gamma$.

Análogamente escribimos las poblaciones para $\rho_{\Psi^\pm}^{\text{PM}}(t)$ como

$$\begin{aligned} P_{eg,eg}^{\Psi^\pm}(t) &= P_{ge,ge}^{\Psi^\pm}(t) = \frac{1}{2}\xi_6(t, R), \\ P_{gg,gg}^{\Psi^\pm}(t) &= 1 - \xi_6(t, R), \end{aligned} \quad (3.33)$$

y para las coherencias

$$P_{eg,ge}^{\Psi^\pm}(t) = P_{ge,eg}^{\Psi^\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\xi_6(t, R) = \pm\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-\Gamma t} - Re^{-\Gamma t/R}}{1 - R}\right]. \quad (3.34)$$

En esta notación es necesario aclarar que el límite markoviano se obtiene cuando $R \rightarrow 0$ (equivalente a $\gamma \rightarrow \infty$). A continuación presentamos el análisis para las poblaciones y las coherencias.

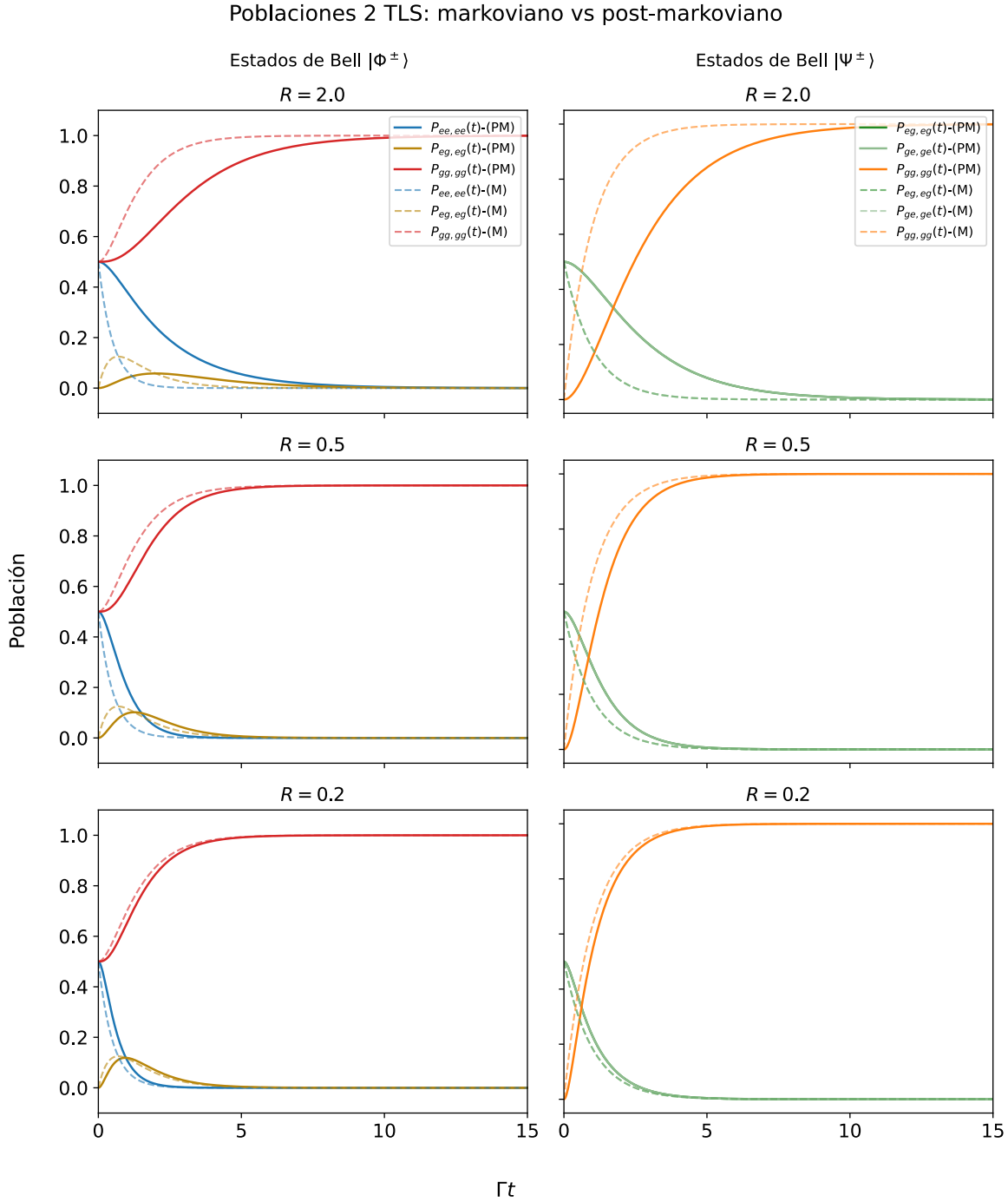


Figura 3.3: Comparación de las poblaciones markovianas vs post-markovianas para los valores de $R \in [2, 0.5, 0.2]$. Cuando $R = 2$, la memoria frena la relajación y redondea las curvas; para $R = 0.5$: la disipación se acelera y el perfil se aproxima a la ley exponencial; y $R = 0.2$ hace que las trayectorias confluyan prácticamente con la solución markoviana, evidenciando la recuperación del límite sin memoria.

En la [Figura 3.3](#) se muestra una comparación de las trayectorias temporales de las poblaciones $P_{ee,ee}(t)$, $P_{eg,eg}(t) = P_{ge,ge}(t)$ y $P_{gg,gg}(t)$ en ambos regímenes cuando el sistema de dos qubits evoluciona en un entorno con memoria finita; cada subfigura compara la predicción post-markoviana (líneas continuas) con el límite markoviano (líneas punteadas) para distintos valores del parámetro R .

- $R = 2$. La memoria ambiental es intensa: el drenaje de $P_{ee,ee}(\tau)$ se vuelve netamente

más lento que el exponencial markoviano, y el abultamiento intermedio de $P_{eg,eg}(\tau)$ se prolonga antes de vaciarse en $P_{gg,gg}(\tau)$. El resultado es una relajación global retardada: el estado base tarda más en alcanzar su ocupación asintótica.

- $R = 0.5$. El entorno ya “olvida” casi tan rápido como el propio sistema evoluciona. Las diferencias entre ambos modelos pasan a ser marginales: las tres poblaciones se superponen salvo por una sutil demora inicial en la post-markoviana. A efectos prácticos, la dinámica empieza a comportarse como markoviana.
- $R = 0.2$. Con una memoria más corta, la coincidencia es evidente en todo el intervalo estudiado. El sistema recupera rápidamente el comportamiento exponencial característico del régimen sin memoria.

De esta forma ilustramos cómo el parámetro γ controla la transición del régimen post-markoviano al régimen markoviano: a valores grandes de R , la interacción con el entorno retarda la transferencia de excitaciones y “ensancha” los tramos de una y dos excitaciones; a medida que R decrece, las curvas se alinean progresivamente hasta reproducir el decaimiento exponencial puro previsto por la teoría markoviana.

Para el caso de las coherencias, en la [Figura 3.4](#) mostramos una comparación en el régimen markoviano con el post-markoviano. El panel izquierdo, correspondiente a los estados $|\Phi^\pm\rangle$ con doble excitación, se aprecia que la presencia de memoria transforma la simple ley exponencial en un decaimiento estructurado:

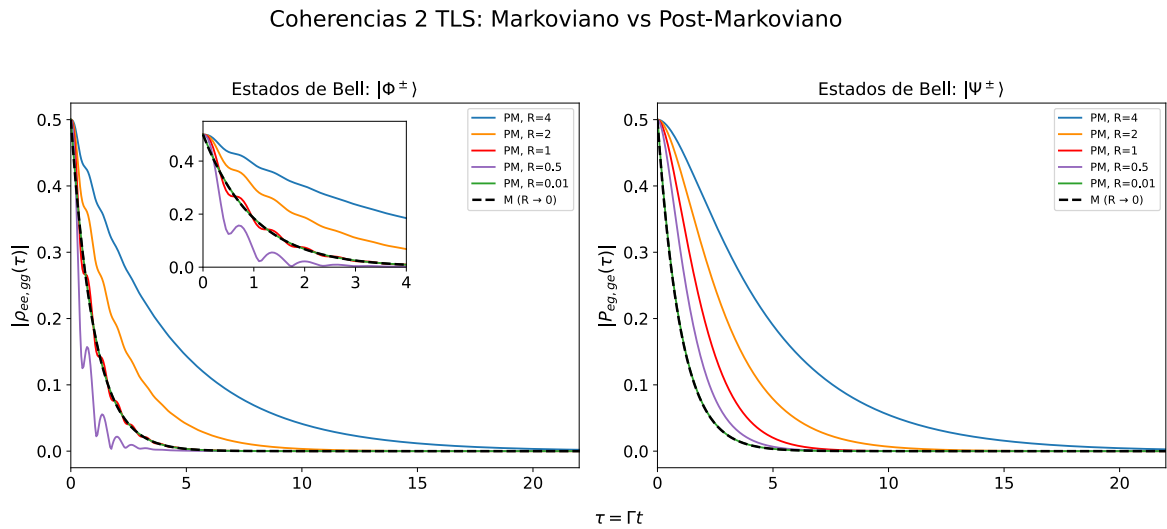


Figura 3.4: Comparación de la evolución temporal de la coherencia ($|P_{ee,ge}(t)|$ para los $\Phi^\pm$ y $|P_{eg,ge}(t)|$ para los $\Psi^\pm$) entre la dinámica markoviana y post-markoviana para $\delta = 5.0$ y $R \in [5, 2, 1, 0.5, 0.1]$. Se observa que para el caso de los $\Phi^\pm$ hay curvas PM que convergen a la curva M por abajo. Esto se debe a que el estado inicial es una superposición de dos excitaciones, mientras que para los $\Psi^\pm$ es una superposición de una excitación, ocasionando que las curvas PM queden por encima de la M.

- Con $R = 5$ y $R = 2$ estamos trabajando con memoria fuerte (es decir, un valor del parámetro memoria pequeña), entonces la atenuación es mucho más lenta y completamente monótona; el entorno devuelve información de fase, retardando la pérdida de coherencia.
- Para $R = 1$ surgen oscilaciones amortiguadas —pequeñas ondulaciones que no existen en el límite markoviano— producto de la competencia entre la emisión de fotones y la retroalimentación temporal del baño.

- Al disminuir a $R = 0.5$ y $R = 0.1$, las curvas post-markovianas se pegan progresivamente a la curva markoviana: el entorno “olvida” tan rápido que ya no puede sostener la retroalimentación, y se recupera el caso sin memoria. Observamos que las curvas PM convergen a la curva M, pero por abaojo. Esto es producto de que la coherencia está entre dos excitaciones y cero excitaciones: $|ee\rangle \leftrightarrow |gg\rangle$. Este sector tiene un canal lateral inmediato: $|ee\rangle \rightarrow \{|eg\rangle, |ge\rangle\}$ (bloque de una excitación). A corto tiempo, la memoria alimenta precisamente a ese bloque lateral y eso roba peso a la coherencia. Es por eso que la coherencia baja más que en el caso markoviano y la convergencia de las curva PM son por debajo de la markoviana. A tiempos largos, la memoria introduce una escala lenta de atenuación (vuelve parte de la fase) y eso alarga la cola y hace que la coherencia no muera tan rápido como en la M.

El panel derecho, que corresponde a $|\Psi^\pm\rangle$ (una sola excitación), el efecto cualitativo es similar pero más suave. Las coherencias descienden siempre de forma puramente monótona; la degeneración energética de $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$ impide la aparición de modulación rápida. La memoria se manifiesta sólo como un alargamiento del tiempo de decaimiento: cuanto mayor es R , más despacio cae la curva; a medida que R crece, la curva post-markoviana se acerca a la markoviana. El entorno con memoria no abre un canal lateral fuerte que compita; básicamente solo atenúa más lento esa misma coherencia. Es por esto que las curvas PM van por encima de la M, ya que es la misma coherencia y solo cambia cómo la degrada el entorno en el tiempo.

En conjunto, la [Figura 3.4](#) muestra cómo el parámetro de memoria gobierna una transición continua entre dos regímenes: para valores pequeños, la coherencia se erosiona lentamente y puede presentar oscilaciones debidas a la retroalimentación del entorno. A medida que R disminuye, la memoria se acorta y el decaimiento vuelve a ser la exponencial del resultado markoviano.

Con lo desarrollado a lo largo de este capítulo hemos completado la descripción analítica de la dinámica post-markoviana de 2 TLS acoplados. Primero, obtuvimos expresiones cerradas para la matriz densidad $\rho^{\text{PM}}(t)$ que dependen explícitamente del parámetro de memoria γ y se reducen sin ambigüedades al resultado markoviano cuando $\gamma \rightarrow \infty$. Con estas soluciones exactas comprobamos que la memoria ambiental ralentiza la disipación: las poblaciones abandonan los niveles excitados con una pendiente más suave y el retardo es tanto mayor cuanto más pequeña es γ y mayor es el número inicial de excitaciones.

El análisis de las coherencias mostró dos comportamientos distintivos. Para las superposiciones de dos excitaciones la debilitación de la fase combina una envolvente más lenta con oscilaciones amortiguadas; para la superposición de una excitación el decaimiento sigue siendo monótono, pero su constante temporal se alarga de forma apreciable. En ambos casos la huella de la memoria desaparece gradualmente a medida que se incrementa γ , de modo que la dinámica converge de forma continua hacia el régimen markoviano.

Estos resultados establecen que la memoria actúa como un regulador que interpola entre una relajación amortiguada por retroalimentación y el régimen sin memoria. La escena queda así preparada para la cuestión central que abordaremos en el siguiente capítulo: evaluar, mediante la concurrencia, cómo se degrada el entrelazamiento en ambos regímenes y hasta qué punto la memoria del entorno puede ofrecer ventanas de preservación de la correlación cuántica.

Dinámica del entrelazamiento en el régimen markoviano y post-markoviano

El universo cuántico es un teatro de paradojas. En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) lanzaron un desafío a la incipiente teoría cuántica al señalar su aparente incompletitud: si dos partículas entrelazadas pueden influirse instantáneamente a distancia, ¿no violaría esto la relatividad? [29]. Lo que EPR consideraron un «defecto» de la teoría se convirtió, décadas después, en su característica más revolucionaria. El entrelazamiento cuántico —esa conexión íntima entre partículas que desafía la localidad— no solo fue confirmado experimentalmente gracias a las desigualdades de Bell [30], sino que hoy es la piedra angular de tecnologías que prometen redefinir el futuro, desde la computación cuántica hasta la criptografía irrompible.

Sin embargo, la mayoría de estas pruebas se han llevado a cabo en condiciones que se acercan a la idealización markoviana: los fotones o iones interactúan con entornos cuya memoria es despreciable. En la práctica, los dispositivos cuánticos emergentes operan inmersos en entornos con retardo, donde parte de la información expulsada regresa al sistema. Esta dinámica post-markoviana no sólo afecta la coherencia individual de cada qubit; también gobierna la supervivencia y las revivencias del entrelazamiento, redefiniendo los límites de la no-localidad explotable.

En los capítulos anteriores derivamos la evolución exacta de sistemas de dos niveles (TLS) en ambos regímenes: markoviano (Capítulo 2) y post-markoviano (Capítulo 3). El presente capítulo toma esas soluciones como punto de partida y se concentra en el entrelazamiento bipartito. Adoptaremos la concurrencia de Hill y Wootters como medida de entrelazamiento y compararemos su comportamiento temporal en los dos escenarios [31]. Estudiaremos cómo dos sistemas de dos niveles (TLS), aquellos «átomos teóricos» que tanto inspiraron a David Bohm en su reformulación de la mecánica cuántica [32], pierden, ganan o incluso generan entrelazamiento bajo la influencia de entornos con y sin memoria. ¿Puede la no-localidad sobrevivir mejor en un mundo post-markoviano? ¿O acaso la memoria ambiental acelera su decadencia? Veremos cómo la memoria ambiental puede provocar la muerte súbita del entrelazamiento, ralentizar su decaimiento y, en ciertas condiciones, su inesperada resurrección [33], ofreciendo rutas para diseñar entornos que prolonguen la no-localidad más allá de los límites markovianos.

Al explorar estas preguntas, no solo honraremos el legado de EPR y Bell, sino que también nos adentraremos en un territorio donde la teoría de sistemas abiertos se encuentra con las fronteras de la información cuántica. Un territorio donde la dinámica abierta no es un mero reto a superar, sino una herramienta que, bien controlada, puede convertirse en aliada del

entrelazamiento. Aquí la memoria ambiental deja de ser un ruido molesto y se vuelve un recurso que prolonga la coherencia y da paso a dispositivos cuánticos más robustos.

4.1. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO

El entrelazamiento cuántico representa la manifestación más nítida de la naturaleza no clásica de los qubits y habilita aplicaciones como la teleportación, la distribución segura de claves y numerosos algoritmos acelerados. A continuación describiremos las principales métricas para cuantificarlo, con énfasis en la concurrencia, y evaluaremos cómo esta evoluciona en un par de sistemas de dos niveles bajo dinámicas markoviana y post-markoviana.

4.1.1. Concurrencia como medida de entrelazamiento

La cuantificación rigurosa del entrelazamiento representa un desafío teórico fundamental. Es importante señalar que, para estados mixtos en sistemas de dimensión arbitraria, la cuantificación precisa del entrelazamiento sigue siendo un problema abierto en la teoría cuántica de la información. Afortunadamente, para el caso particular de sistemas bipartitos de dos niveles (2 qubits), contamos con medidas bien establecidas y computacionalmente tratables. Entre estas métricas, la concurrencia destaca por su elegancia matemática y aplicabilidad universal en sistemas 2×2 . Introducida por William Wootters en 1998 [31], esta medida no solo captura el grado de correlaciones no clásicas mediante un ingenioso “giro conceptual” (la operación de spin flip), sino que ofrece un valor único en el rango intuitivo $[0, 1]$, donde 1 representa entrelazamiento máximo y 0 su ausencia total.

Para un estado de dos TLS descrito por la matriz densidad ρ , la concurrencia se calcula como [31]:

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (4.1)$$

donde los λ'_i s son las raíces cuadradas de los eigenvalores de $\rho\tilde{\rho}$ en orden decreciente y

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (4.2)$$

con la definición de la conjugación compleja en la base estándar (computacional) y σ_y es la matriz de Pauli-Y. Para ilustrar, si tomamos el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, resulta que $\lambda_1 = 1$ y las otras raíces se anulan, de modo que $C(|\Phi^+\rangle) = 1$: un ejemplo claro de entrelazamiento máximo.

4.1.2. Concurrencia para estados X

En sistemas abiertos, los estados rara vez permanecen puros. En la práctica, muchas evoluciones relevantes—incluyendo las que obtuvimos en los Capítulos 2 y 3 a partir de estados de Bell—mantienen una estructura de **estado X** [34], es decir, matrices de densidad que, expresadas en la base computacional, presentan elementos no nulos únicamente en la diagonal principal y la anti-diagonal:

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

con $\text{Tr}[\rho_X] = 1$. Para esta estructura, la concurrencia se simplifica a [35, 36]:

$$C(\rho_X) = 2 \max\{0, |\rho_{32}| - \sqrt{\rho_{44}\rho_{11}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{33}\rho_{22}}\}, \quad (4.4)$$

Dado que nuestras soluciones $\rho(t)$ para el sistema de 2 TLS —tanto en el régimen markoviano como en el post-markoviano— conservan la forma X cuando parten de estados de Bell, emplearemos esta expresión compacta en las subsecciones siguientes para trazar la dinámica temporal del entrelazamiento de manera rápida y transparente.

4.2. CONCURRENCIA PARA EL SISTEMA DE 2 TLS MARKOVIANO

Como ya se mencionó, las soluciones markovianas para el problema de 2 TLS, obtenidas en las ecuaciones (2.54) y (2.55), exhiben una estructura de estado X. Esto permite aplicar directamente la fórmula de concurrencia en (4.4). Al comparar estas matrices con la forma general en (4.3), observamos que comparten la misma estructura, con la condición adicional de $\rho_{23} = \rho_{32} = 0$. Como resultado, la fórmula general de concurrencia se simplifica a:

$$C(\rho_X) = 2 \max\{0, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{33}\rho_{22}}\}. \quad (4.5)$$

Para las soluciones $\rho_{\Phi\pm}^M(t)$ (ver Ecuación (2.54)), se tiene $\rho_{14} = \pm \frac{1}{2}e^{[-\Gamma-2i\omega]t}$ y $\rho_{22} = \rho_{33} = \frac{1}{2}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t})$. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior conseguimos

$$\begin{aligned} C_M(\rho_{\Phi\pm}) &= 2 \max\left\{0, \left|\pm \frac{1}{2}e^{[-\Gamma-2i\omega]t}\right| - \sqrt{\frac{1}{4}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t})^2}\right\} \\ &= 2 \max\left\{0, \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} - \frac{1}{2}(e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t})\right\}, \quad e^{-\Gamma t} > e^{-2\Gamma t} \\ &= 2 \max\left\{0, \frac{1}{2}e^{-2\Gamma t}\right\} \end{aligned}$$

obteniendo la expresión para la concurrencia para $\rho_{\Phi\pm}$ como

$$C(\rho_{\Phi\pm}^M) = e^{-2\Gamma t}. \quad (4.6)$$

Para el caso de las soluciones $\rho_{\Psi\pm}^M(t)$ (ver Ecuación (2.55)), observamos que $\rho_{11} = \rho_{14} = 0$, $\rho_{32} = \pm \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}$ y $\rho_{44} = 1 - e^{-\Gamma t}$. Entonces, la fórmula (4.4), se simplifica a

$$C(\rho_X) = 2 \max\{0, |\rho_{32}| - \sqrt{\rho_{44}\rho_{11}}\}. \quad (4.7)$$

De la forma en (2.55), es claro que $\rho_{44}\rho_{11} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} C(\rho_{\Psi\pm}^M) &= 2 \max\left\{0, \left|\pm \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\right|\right\} \\ &= 2 \max\left\{0, \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

lo que nos conduce a la expresión para la concurrencia de $\rho_{\Psi\pm}$,

$$C(\rho_{\Psi\pm}^M) = e^{-\Gamma t}. \quad (4.9)$$

A continuación mostramos graficamente como es la evolución temporal de la concurrencia lo que nos permitirá analizar lo que sucede con el entrelazamiento cuántico.

En la Figura 4.1 se visualiza la suerte del entrelazamiento cuando el sistema evoluciona en el régimen puramente markoviano. Las trayectorias parten de la unidad, reflejando que los cuatro estados de Bell están inicialmente maximamente entrelazados, y descienden sin

quiebres ni mesetas hasta anularse de forma asintótica. La pendiente más pronunciada de $C(\rho_{\Phi\pm}^M) = e^{-2\Gamma t}$ confirma que, al requerirse la emisión de dos fotones para destruir la correlación entre $|ee\rangle$ y $|gg\rangle$, la pérdida de coherencia es el doble de rápida que en $C(\rho_{\Psi\pm}^M) = e^{-\Gamma t}$, donde basta un único salto cuántico para suprimir la superposición entre $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$. No se aprecia muerte súbita de entrelazamiento: el valor de la concurrencia en ambos casos se aproxima gradualmente a cero, lo que refuerza la naturaleza exponencial de la disipación en un baño sin memoria. Este comportamiento servirá como referencia para la subsección siguiente, donde evaluaremos cómo la presencia de memoria ambiental modifica —y potencialmente prolonga— la persistencia del entrelazamiento.

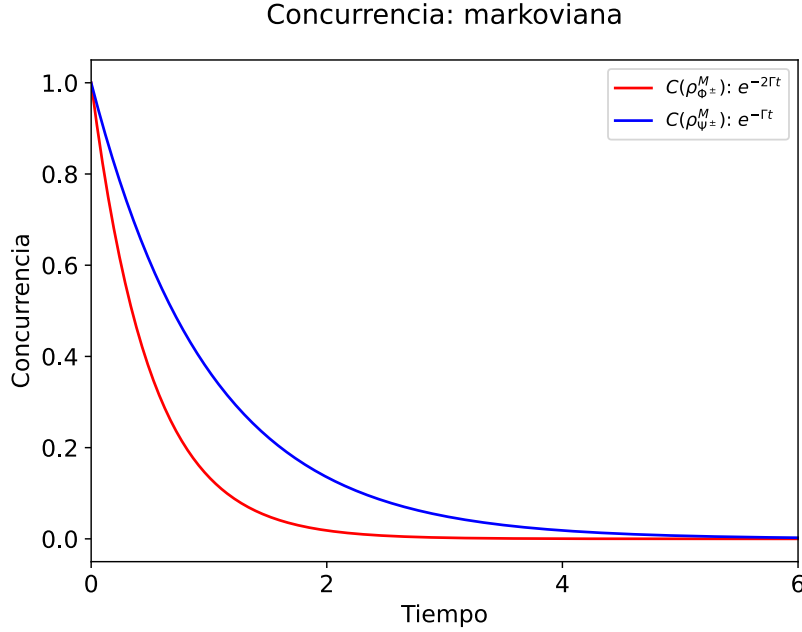


Figura 4.1: Concurrencia para el sistema de 2 TLS en el régimen markoviano. La curva azul muestra la ley $C(\rho_{\Phi\pm}^M)(t) = e^{-2\Gamma t}$, que tiene un decaimiento más rápido al partir de dos excitaciones, mientras que la curva naranja reproduce $C(\rho_{\Psi\pm}^M) = e^{-\Gamma t}$, con una pérdida de entrelazamiento a la mitad de la velocidad cuando sólo hay una excitación.

4.3. CONCURRENCIA PARA EL SISTEMA DE 2 TLS POST-MARKOVIANO

Las soluciones para el sistema de 2 TLS en el régimen post-markoviano están determinadas por las expresiones (3.29) y (3.30). Estas expresiones presentan una estructura de estados tipo X, caracterizada por tener términos nulos fuera de la diagonal y la antidiagonal, con traza unitaria. Esto permite aplicar directamente la ecuación (4.4) para determinar la concurrencia.

Analizando específicamente $\rho_{\Phi\pm}^{\text{PM}}(t)$ (ver Ecuación (3.29)), observamos que coinciden estructuralmente con la forma X, con la particularidad de que el término en la posición (2,3) es cero. En este caso, la concurrencia adopta la misma forma simplificada mostrada en (4.5), obteniendo así:

$$\begin{aligned}
 C(\rho_{\Phi\pm}^{\text{PM}}) &= 2 \max \left\{ 0, \left| \pm \frac{1}{2} \xi_4(t) \right| - \sqrt{\left(\frac{1}{2} [\xi_6(t) - \xi_1(t)] \right)^2} \right\} \\
 &= 2 \max \left\{ 0, \frac{1}{2} |\xi_4(t)| - \left| \frac{1}{2} [\xi_6(t) - \xi_1(t)] \right| \right\},
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

lo que nos permite escribir la expresión para la concurrencia,

$$C(\rho_{\Phi^\pm}^{\text{PM}}) = \max \{0, |\xi_4(t)| - |\xi_6(t) - \xi_1(t)|\}. \quad (4.11)$$

La expresión $|\xi_4(t)| - |\xi_6(t) - \xi_1(t)|$, en términos de la definición (3.24), puede escribirse explícitamente como:

$$C_{\text{PM}}(\rho_{\Phi^\pm}) = \left| \frac{e^{-(1+2i\delta)\Gamma t} - R(1+2i\delta)e^{-\Gamma t/R}}{1 - R(1-2i\delta)} \right| - \left| \frac{e^{-\Gamma t} - Re^{-\Gamma t/R}}{1 - R} - \frac{e^{-2\Gamma t} - 2Re^{-\Gamma t/R}}{1 - 2R} \right|$$

Sí hacemos $R \rightarrow \infty$, el término $e^{-\Gamma t/R} = 0$, permitiéndonos simplificar como

$$C_{\text{PM}}(\rho_{\Phi^\pm}) = |e^{(-1-2i\delta)\Gamma t}| - e^{-\Gamma t} + e^{-2\Gamma t} = e^{-2\Gamma t}. \quad (4.12)$$

Esto nos demuestra que en el caso de R muy pequeño (equivalente a memoria muy grande) se recupera el caso markoviano (ver Ecuación (4.6)).

Como dato final, utilizando la definición mostrada en la ecuación (3.24), y $\delta = \omega/\Gamma$, la concurrencia para los estados de Bell $|\Phi^\pm\rangle$ se puede expresar como:

$$C(\rho_{\Phi^\pm}^{\text{PM}}) = \max\{0, f(t, R, \delta)\} \quad (4.13)$$

donde

$$f(t, R, \delta) = \sqrt{\frac{e^{-2\Gamma t} + (1 + 4\delta^2)R^2e^{-2\Gamma t/R} - 2Re^{-(1+R)\Gamma t/R}[\cos(2\delta\tau) + 2\delta\sin(2\delta\tau)]}{(1 - R)^2 + 4\delta^2R^2}} - \left| \frac{e^{-\Gamma t} - Re^{-\Gamma t/R}}{1 - R} - \frac{e^{-2\Gamma t} - 2Re^{-\Gamma t/R}}{1 - 2R} \right|. \quad (4.14)$$

Esta expresión también se reduce al caso markoviano cuando $R \rightarrow 0$ ya que obtenemos $f(\tau, R, \delta) = e^{-2\Gamma t}$.

Para las soluciones $\rho_{\Psi^\pm}^{\text{PM}}(t)$, (ver Ecuación (3.30)), la forma matricial presenta términos específicos con $\rho_{11} = \rho_{14} = 0$, $\rho_{32} = \pm \frac{1}{2}\xi_{10}(t)$ y $\rho_{44} = 1 - \xi_6(t)$. Esto simplifica la fórmula de concurrencia a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} C(\rho_{\Psi^\pm}^{\text{PM}}) &= 2 \max \left\{ 0, \left| \pm \frac{1}{2}\xi_6(t) \right| \right\} \\ &= 2 \max \left\{ 0, \frac{1}{2}\xi_6(t) \right\} \\ &= \max \{0, \xi_6(t)\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

obteniendo así:

$$C(\rho_{\Psi^\pm}^{\text{PM}}) = \xi_6(t) = \frac{\gamma e^{-\Gamma t} - \Gamma e^{-\gamma t}}{\gamma - \Gamma} = \frac{e^{-\Gamma t} - Re^{-\Gamma t/R}}{1 - R}. \quad (4.16)$$

De la misma forma que lo hicimos con la ecuación (4.11), si factorizamos γ , y hacemos el límite $R \rightarrow 0$, se recupera el caso markoviano que se mostró en la ecuación (4.9).

A continuación procedemos a analizar gráficamente la evolución de la concurrencia en este régimen.

Analizamos una comparativa de la concurrencia en ambos regímenes para observar como influye la memoria ambiental en el entrelazamiento.

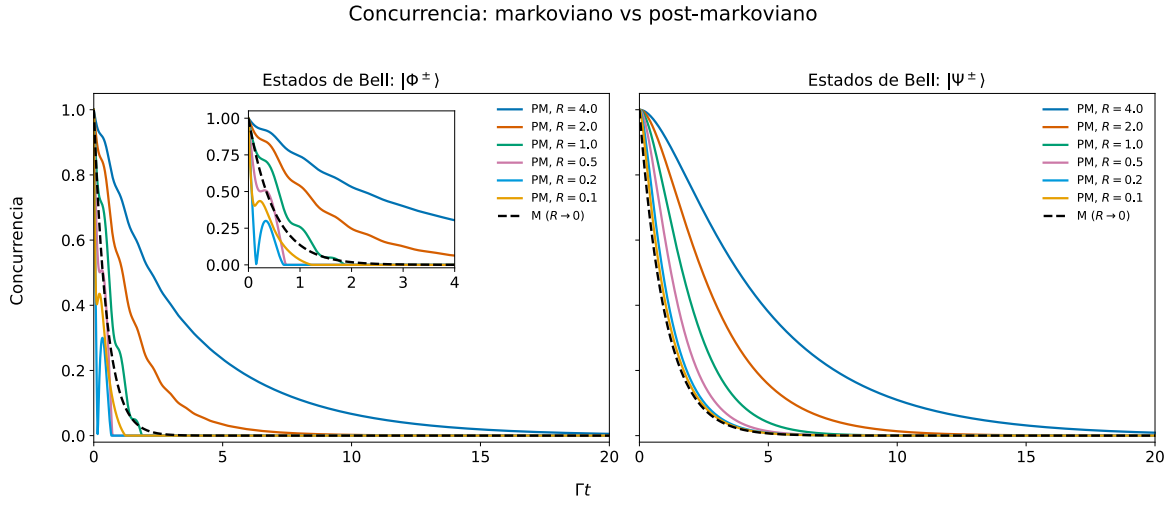


Figura 4.2: Comparación de la evolución temporal de la concurrencia en el régimen markoviano (línea negra discontinua) y post-markoviano (líneas continuas) para valores $R \in [4, 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1]$ y $\delta = 5$. El panel izquierdo corresponde a la concurrencia para $|\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm|$ como estado inicial; el derecho, a $|\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm|$.

En la [Figura 4.2](#) comparamos la concurrencia $C(t)$ de dos TLS preparados inicialmente en estados de Bell. Las curvas sólidas corresponden a la dinámica post-markoviana (PM) para distintos valores del parámetro $R = \Gamma/\gamma$; la línea punteada negra es la referencia markoviana (límite $R \rightarrow 0$).

El Panel izquierdo: $|\Phi^\pm\rangle$ (superposición de dos y cero excitaciones) Se distinguen tres regímenes: (i) con *memoria larga* ($R = 4, 2$) el decaimiento se *ralentiza* y aparecen ondulaciones tempranas (véase el recuadro): la retroalimentación del entorno devuelve fase y población, retrasando la pérdida de entrelazamiento frente al caso markoviano; (ii) para *memoria intermedia* ($R \approx 1$) surge muerte súbita seguida de un resurgimiento breve antes del decaimiento final; (iii) con *memoria corta* ($R \leq 0.5$) las curvas post-markovianas convergen a la curva markoviana por abajo. Esto es rasgo llamativo ya que algunas curvas PM quedan por debajo de la markoviana durante un intervalo inicial. Esto no contradice la idea de “memoria como recurso”; más bien refleja que el efecto de la memoria sobre $C(t)$ no es monótono en $\Phi^\pm$. La razón se entiende a partir de la fórmula para estados X , (4.4). En $\Phi^\pm$ el término típico que domina es $|\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{33}\rho_{22}}$, donde ρ_{14} mide la coherencia $|ee\rangle \leftrightarrow |gg\rangle$ y $\sqrt{\rho_{33}\rho_{22}}$ penaliza la repoblación del subespacio de una excitación. La memoria, además de aumentar $|\rho_{14}|$, reinyecta población desde el entorno por el canal $|ee\rangle \rightarrow \{|eg\rangle, |ge\rangle\} \rightarrow \dots$; si el incremento transitorio de ρ_{22}, ρ_{33} supera la ganancia en $|\rho_{14}|$, la penalización domina y resulta $C_{PM} < C_M$ durante ese intervalo. En síntesis: para $\Phi^\pm$ la memoria aporta coherencia en el bloque de una excitación; según R , este segundo efecto puede hundir temporalmente la concurrencia por debajo de la markoviana antes del resurgimiento o de la ralentización.

Panel derecho: $|\Psi^\pm\rangle$ (una excitación). Aquí el decaimiento es monótono para todos los R . La memoria se manifiesta casi exclusivamente como alargamiento del tiempo de coherencia: cuanto menor es el parámetro de memoria (equivalente a mayor R), más lenta es la caída y

mayor es $C(t)$ respecto al caso markoviano. La concurrencia es solamente $C(\rho_{\Psi^\pm}^M) = |\rho_{23}|$, evidenciando que no hay algún término penalizador. Por ello, a diferencia del caso $|\Phi^\pm\rangle$, las curvas post-markovianas para $|\Psi^\pm\rangle$ no caen por debajo de la curva markoviana: la memoria únicamente modula la velocidad de decaimiento de $|\rho_{23}(t)|$, y en el límite de memoria corta ($R \rightarrow 0$) se recupera la ley markoviana. Podemos demostrar matemáticamente que $C(\rho_{\Psi^\pm}^{PM}) > C(\rho_{\Psi^\pm}^M)$. De las expresiones (4.9) y (4.16) tenemos

$$\Delta_M^{PM} = C(\rho_{\Psi^\pm}^{PM}) - C(\rho_{\Psi^\pm}^M) = \frac{e^{-\Gamma t} - R e^{-\Gamma t/R}}{1 - R} - e^{-\Gamma t} = \frac{R}{1 - R} (e^{-\Gamma t} - e^{-\Gamma t/R}). \quad (4.17)$$

De esta expresión podemos tomar casos por separado. Para el caso $R > 1$ es evidente que $R/(1 - R) < 0$ y $e^{-\Gamma t} < e^{-\Gamma t/R}$, dándonos $\Delta_M^{PM} > 0$. Para $R < 1$, se tiene $R/(1 - R) > 0$ y $e^{-\Gamma t} > e^{-\Gamma t/R}$, obteniendo así $\Delta_M^{PM} > 0$. Finalmente, para el caso $R = 1$, implica que $\Gamma = \gamma$. En este valor vimos que había una indeterminación (ver **Caso 3** en la §Subsección 3.1.1), la cual se podía eliminar al tomar el límite $\Gamma \rightarrow \gamma$ (equivalente a $R \rightarrow 1$). Entonces, en este límite se tiene $C(\rho_{\Psi^\pm}^{PM}) \rightarrow e^{-\Gamma t}(1 + \Gamma t)$, que es mayor que $C(\rho_{\Psi^\pm}^M) = e^{-\Gamma t}$, lo cual satisface la desigualdad requerida. Por lo tanto, concluimos que para el caso de $\Psi^\pm$, la curva post-markoviana siempre está por encima de la markoviana.

Tras este análisis, hemos observado que la memoria ambiental no siempre “mejora” el entrelazamiento; su impacto depende de dónde reside el recurso: para $\Phi^\pm$ (coherencia $|ee\rangle \leftrightarrow |gg\rangle$) la repoblación del bloque de una excitación puede penalizar $C(t)$ y situar C_{PM} por debajo de C_M de forma transitoria; para $\Psi^\pm$ (recurso en el bloque de una excitación) no hay penalización y la memoria prolonga de forma limpia la coherencia. En el límite $R \rightarrow 0$ ambas familias convergen a la disipación exponencial característica del régimen markoviano.

En conjunto, la Figura 4.2 confirma que la memoria gobierna la velocidad con la que el entrelazamiento se erosiona. Cuanto más larga es la memoria, más se retrasa la pérdida y más compleja se vuelve la trayectoria temporal, especialmente cuando intervienen dos excitaciones; en el límite de memoria ultracorta, ambas familias de estados convergen hacia la disipación exponencial característica del régimen markoviano.

4.4. GENERACIÓN DE ENTRELAZAMIENTO A PARTIR DE ESTADOS SEPARABLES

Hasta ahora hemos estudiado la evolución del entrelazamiento cuando el sistema parte de estados maximamente entrelazados. Sin embargo, un fenómeno igualmente fascinante es la *generación de entrelazamiento* a partir de estados inicialmente separables. Este proceso demuestra que el entorno, lejos de ser solo un agente destructivo, puede mediar en la creación de correlaciones no clásicas entre sistemas inicialmente independientes.

Para explorar este fenómeno, consideremos como estado inicial el estado separable $|eg\rangle = |e\rangle \otimes |g\rangle$, donde un qubit está excitado y el otro en el estado fundamental. El acoplamiento Λ entre los átomos permite que interactúen, lo que puede generar entrelazamiento a lo largo del tiempo. La matriz densidad inicial es:

$$\rho(0) = |eg\rangle\langle eg| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Esto quiere decir que su matriz de densidad está construida por $\rho_{22} = 1$ y todos los demás

$\rho_{ij} = 0$. Con esta información podemos determinar las soluciones markoviana y post-markoviana partiendo de este estado inicial.

Sustituyendo $\rho_{22} = 1$ en nuestra solución markoviana (2.51), obtenemos

$$\rho_{eg,eg}^M(t) = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \cos(2\Lambda t) & i \sin 2\Lambda t & 0 \\ 0 & -i \sin 2\Lambda t & 1 - \cos(2\Lambda t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(e^{\Gamma t} - 1) \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(e^{\lambda_7 t} + e^{\lambda_7^* t}) &= \frac{1}{2}\text{Re}[e^{\lambda_7 t}] = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \cos(2\Lambda t), \\ \frac{1}{4}(e^{\lambda_7 t} - e^{\lambda_7^* t}) &= \frac{1}{2}\text{Im}[e^{\lambda_7 t}] = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} i \sin(2\Lambda t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

con $\lambda_7 = -\Gamma - 2i\Lambda$.

De la misma forma, sustituyendo $\rho_{22} = 1$ en la solución post-markoviana (3.28) nos da

$$\rho_{eg,eg}^{\text{PM}}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_6(t) + \text{Re}[\xi_7(t)] & -i\text{Im}[\xi_7(t)] & 0 \\ 0 & i\text{Im}[\xi_7(t)] & \xi_6(t) - \text{Re}[\xi_7(t)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1 - \xi_6(t)) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

donde usamos $\xi_7(t) + \xi_7^*(t) = 2\text{Re}[\xi_7(t)]$ y $\xi_7(t) - \xi_7^*(t) = 2i\text{Im}[\xi_7(t)]$ con el mismo λ_7 y

$$\begin{aligned} \xi_7(t) &= \frac{e^{-\Gamma t} \left[\left(1 - \frac{\Gamma}{\gamma}\right) \cos(2\Lambda t) + \frac{2\Lambda}{\gamma} \sin(2\Lambda t) \right] + e^{-\gamma t} \left[\left(\frac{\Gamma}{\gamma}\right)^2 + 4\left(\frac{\Lambda}{\gamma}\right)^2 - \frac{\Gamma}{\gamma} \right]}{\left(1 - \frac{\Gamma}{\gamma}\right)^2 + 4\left(\frac{\Lambda}{\gamma}\right)^2} \\ &+ i \left[\frac{e^{-\Gamma t} \left[\frac{2\Lambda}{\gamma} \cos(2\Lambda t) - \left(1 - \frac{\Gamma}{\gamma}\right) \sin(2\Lambda t) \right] - \frac{2\Lambda}{\gamma} e^{-\gamma t}}{\left(1 - \frac{\Gamma}{\gamma}\right)^2 + 4\left(\frac{\Lambda}{\gamma}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dado que ambas matrices poseen la estructura de estado X, podemos emplear la fórmula en (4.4) para calcular la concurrencia. En estas soluciones, $\rho_{14} = 0$, lo que implica $|\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{33}\rho_{22}} < 0$. Además, $\rho_{11} = 0$, por lo que $|\rho_{32}| - \sqrt{\rho_{44}\rho_{11}} = |\rho_{32}|$. En consecuencia, la fórmula (4.4) se simplifica para estos casos a:

$$C(\rho) = 2 \max\{0, |\rho_{32}|\}. \quad (4.23)$$

Utilizando la fórmula anterior, logramos determinar que la concurrencia en ambos regímenes. Para el caso markoviano tenemos

$$C(\rho_{eg,eg}^M) = e^{-\Gamma t} |\sin(2\Lambda t)|, \quad (4.24)$$

mientras que para el post-markoviano es

$$C(\rho_{eg,eg}^{\text{PM}}) = |\text{Im}[\xi_7(t)]| = \frac{e^{-\Gamma t} \left[\frac{2\Lambda}{\gamma} \cos(2\Lambda t) - \left(1 - \frac{\Gamma}{\gamma}\right) \sin(2\Lambda t) \right] - \frac{2\Lambda}{\gamma} e^{-\gamma t}}{\left(1 - \frac{\Gamma}{\gamma}\right)^2 + 4\left(\frac{\Lambda}{\gamma}\right)^2}. \quad (4.25)$$

Para esta última expresión se puede ver fácilmente que en el límite $\gamma \rightarrow \infty$ (memoria grande) se recupera el caso markoviano.

Con una excitación localizada, el acoplamiento coherente Λ mezcla los estados $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$, generando superposiciones tipo $|\Psi^\pm\rangle$ en el subespacio de una excitación. En estas condiciones (sin bombeo hacia $|ee\rangle$ y sin coherencia $|ee\rangle \leftrightarrow |gg\rangle$), la concurrencia depende sólo de la *coherencia de intercambio* $|\rho_{23}(t)|$ entre $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$.

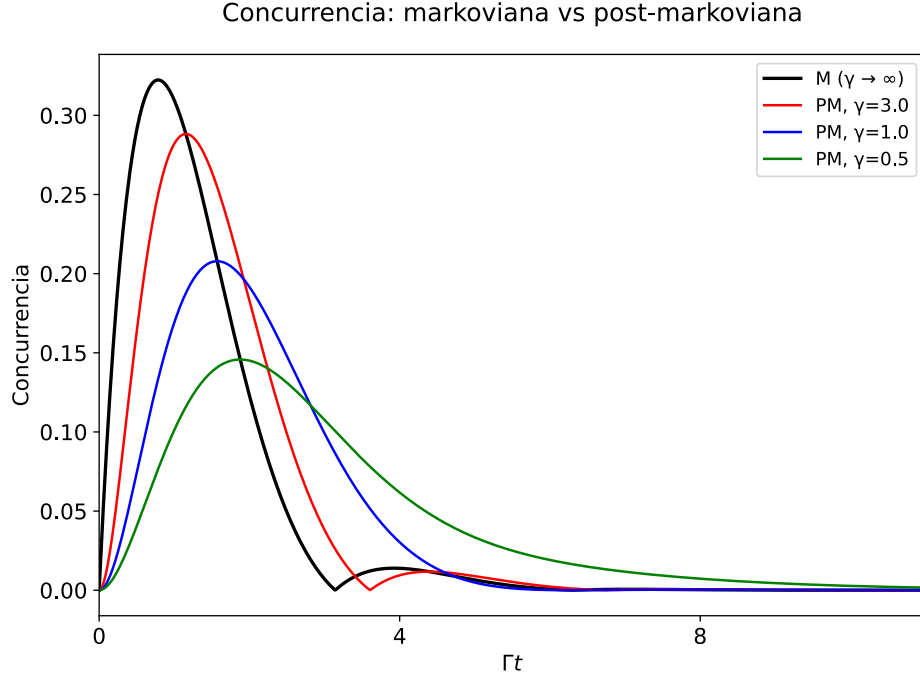


Figura 4.3: Comparativa sobre la generación de entrelazamiento en ambos regímenes para un valor de acoplamiento $\Lambda = 0.5\Gamma$ y valores de $\gamma \in [3, 1, 0.5]$. La gráfica muestra que la curva negra (markoviana) tiene un pico alto pero decae más rápido a cero. Las curvas post-markovianas tienen picos más bajos, pero sus colas son más largas, indicando una mayor duración del entrelazamiento a tiempos mayores.

En la [Figura 4.3](#) analizamos como es la creación del entrelazamiento en ambos regímenes. En el régimen markoviano, la expresión $C(\rho_{eg,eg}^M) = e^{-\Gamma t} |\sin(2\Lambda t)|$ muestra oscilaciones puras impulsadas por Λ , amortiguadas solo por la tasa de disipación Γ . Físicamente, esto significa que el baño actúa como un sumidero eficiente: disipa rápidamente cualquier correlación con el entorno, permitiendo que la interacción interna (Λ) entre los TLS construya entrelazamiento de manera libre al principio. Sin memoria en el baño, no hay interferencia retroactiva que “estorbe” la generación inicial de entrelazamiento. Los átomos pueden intercambiar excitaciones (vía Λ) de forma coherente durante un corto tiempo, alcanzando un máximo de entrelazamiento más pronunciado. Es como si el sistema evolucionara casi unitariamente al inicio, maximizando la superposición entre estados como $|eg\rangle$ y $|ge\rangle$ (que es la base del entrelazamiento aquí). Sin embargo, esta libertad inicial viene con un costo: la disipación es irrevocable, por lo que el entrelazamiento se pierde rápidamente (decae exponencialmente). El baño absorbe la coherencia sin devolver nada.

En el post-markoviano, la expresión de la concurrencia involucra términos con $e^{-\gamma t}$, que reflejan la correlación temporal del baño (γ es inversamente proporcional al tiempo de memoria del baño). Para γ menor, el baño retiene información por más tiempo. La memoria del baño introduce una retroacción que compite con la interacción Λ . Físicamente, cuando los

TLS intentan entrelazarse, parte de la información se “presta” al baño, pero este la devuelve parcialmente en fases posteriores. Esto crea una especie de “fricción” o interferencia durante la fase de creación: el entrelazamiento no se acumula tan eficientemente porque el sistema está atado a las fluctuaciones del baño. Por ejemplo, términos como $(2\frac{\Delta}{\gamma})$ en el numerador sugieren que un γ pequeño amplifica esta interferencia, reduciendo el máximo alcanzable. Sin embargo, aunque el pico en este régimen no es tan grande comparado con el markoviano, la retroacción permite reflujos de información: coherencia que se había perdido regresa al sistema, reviviendo parcialmente el entrelazamiento. Esto se manifiesta en decaimientos no exponenciales y colas largas en la gráfica (especialmente para $\gamma = 0.5$). Es como si el baño actuara como un “reservorio temporal” que almacena y libera energía/correlaciones, protegiendo el entrelazamiento de una disipación total.

Conclusiones

La presente tesis ha explorado en profundidad la dinámica de sistemas cuánticos abiertos, con una contribución central en el análisis de dos sistemas de dos niveles (2 TLS) acoplados en interacción con un entorno con memoria. Este trabajo representa uno de los primeros estudios exhaustivos que extiende el formalismo post-markoviano al caso bipartito, proporcionando por primera vez una solución analítica cerrada para este escenario. Nuestro análisis se ha enfocado en caracterizar cómo la memoria ambiental afecta tanto la evolución como la generación del entrelazamiento, uno de los recursos más valiosos en información cuántica.

La originalidad de nuestra investigación radica en haber resuelto analíticamente la ecuación maestra para el régimen post-markoviano en 2 TLS, un problema que presenta desafíos sustanciales debido a la complejidad del espacio de Hilbert compuesto y a la interferencia entre el acoplamiento directo y los efectos de memoria. Al emplear tanto estados de Bell como estados separables iniciales, hemos caracterizado completamente cómo el entorno modula las correlaciones cuánticas.

Mientras el régimen markoviano exhibió un decaimiento puramente exponencial —con una pérdida irreversible del entrelazamiento—, nuestros resultados en el régimen post-markoviano revelan comportamientos más ricos y físicamente relevantes. La inclusión de memoria ambiental produce una dinámica no exponencial, con retardos en la relajación y modulaciones temporales que no solo prolongan significativamente la vida útil de las correlaciones cuánticas existentes, sino que también modifican sustancialmente la generación de entrelazamiento a partir de estados inicialmente separables.

Un hallazgo muy particular es el comportamiento diferencial del entorno con memoria según el estado inicial: mientras que en estados inicialmente entrelazados actúa preservando las correlaciones existentes, cuando el sistema parte de estados separables como $|eg\rangle$ favorece la generación de entrelazamiento de manera más sostenida en el tiempo. El análisis comparativo muestra que, aunque el régimen markoviano genera picos más pronunciados de entrelazamiento, el post-markoviano produce correlaciones más persistentes, con colas temporales extendidas que evidencian la retroalimentación del baño estructurado.

Al analizar sistemáticamente las coherencias y el entrelazamiento mediante la concurrencia, hemos demostrado que el formalismo post-markoviano captura fenómenos no triviales como la muerte súbita, el resurgimiento parcial del entrelazamiento, y la generación sostenida de correlaciones desde estados separables. Estos efectos, que escapan a la descripción markoviana convencional, subrayan la importancia de considerar entornos estructurados en modelos realistas de sistemas cuánticos.

En conjunto, esta tesis constituye un avance en la teoría de sistemas cuánticos abiertos al proporcionar: (1) una solución analítica completa para 2 TLS en régimen post-markoviano, (2) una caracterización detallada de los efectos de memoria tanto en la evolución como en la generación de entrelazamiento, y (3) herramientas conceptuales para el control de correla-

ciones cuánticas en entornos estructurados. Estos desarrollos abren nuevas perspectivas para aplicaciones en tecnologías cuánticas, donde la gestión precisa de recursos cuánticos en condiciones realistas resulta esencial.

APÉNDICES

APÉNDICE A

Determinación del eigensistema total markoviano

A.1. CÁLCULO DE LOS EIGENVALORES DEL SUPEROPERADOR $\hat{\mathcal{K}}$

Tal como se discutió previamente en la [§Subsección 2.1.4](#), el superoperador $\hat{\mathcal{K}}$ posee un espectro de 16 autovalores, los cuales están determinados por la ecuación (2.34). Partiendo de los autovalores asociados a los operadores K y $K^\dagger$, definidos respectivamente como:

$$\begin{aligned} \text{Espectro de } K : \varepsilon_i &= \{2z\hbar, \hbar(z + \Lambda), \hbar(z - \Lambda), 0\}, \\ \text{Espectro de } K^\dagger : \varepsilon_i^* &= \{2z^*\hbar, \hbar(z^* + \Lambda), \hbar(z^* - \Lambda), 0\}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

La combinación de estos conjuntos permite derivar los 16 autovalores de $\hat{\mathcal{K}}$ mediante operaciones algebraicas específicas. El siguiente desarrollo ilustra paso a paso este procedimiento, garantizando consistencia con la estructura matemática del sistema.

$$\lambda_1 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_1 - \varepsilon_1^*] = \frac{2\hbar}{i\hbar}[z - z^*] = -2i \left[\omega - i\frac{\Gamma}{2} - (\omega + i\frac{\Gamma}{2}) \right] = -2i(-i\Gamma) = -2\Gamma,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[2z - z^* - \Lambda] = \frac{1}{i} \left[2\omega - i\Gamma - \omega - i\frac{\Gamma}{2} - \Lambda \right] = -\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_1 - \varepsilon_3^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[2z - z^* + \Lambda] = \frac{1}{i} \left[2\omega - i\Gamma - \omega - i\frac{\Gamma}{2} + \Lambda \right] = -\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_1 - \varepsilon_4^*] = \frac{1}{i\hbar}[2z\hbar - 0] = -2iz = -2i \left(\omega - i\frac{\Gamma}{2} \right) = -\Gamma - 2i\omega,$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_2 - \varepsilon_1^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z + \Lambda - 2z^*] = \frac{1}{i} \left[\omega - i\frac{\Gamma}{2} + \Lambda - 2 \left(\omega + i\frac{\Gamma}{2} \right) \right] = -\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda),$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_2 - \varepsilon_2^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z + \Lambda - (z^* + \Lambda)] = \frac{1}{i}[z - z^*] = \frac{1}{i}(-i\Gamma) = -\Gamma,$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_2 - \varepsilon_3^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z + \Lambda - (z^* - \Lambda)] = \frac{1}{i}[z - z^* + 2\Lambda] = \frac{1}{i}(-i\Gamma + 2\Lambda) = -\Gamma - 2i\Lambda$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_2 - \varepsilon_4^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z + \Lambda - 0] = \frac{1}{i}\left[\omega - i\frac{\Gamma}{2} + \Lambda\right] = -\frac{\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda),$$

$$\lambda_9 = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_3 - \varepsilon_1^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z - \Lambda - 2z^*] = \frac{1}{i}\left[\omega - i\frac{\Gamma}{2} - \Lambda - 2\left(\omega + i\frac{\Gamma}{2}\right)\right] = -\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda),$$

$$\lambda_{10} = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_3 - \varepsilon_2^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z - \Lambda - (z^* + \Lambda)] = \frac{1}{i}[z - z^* - 2\Lambda] = \frac{1}{i}(-i\Gamma - 2\Lambda) = -\Gamma + 2i\Lambda,$$

$$\lambda_{11} = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_3 - \varepsilon_3^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z - \Lambda - (z^* - \Lambda)] = \frac{1}{i}[z - z^*] = \frac{1}{i}(-i\Gamma) = -\Gamma$$

$$\lambda_{12} = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_3 - \varepsilon_4^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[z - \Lambda - 0] = \frac{1}{i}\left[\omega - i\frac{\Gamma}{2} - \Lambda\right] = -\frac{\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda),$$

$$\lambda_{13} = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_4 - \varepsilon_1^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[0 - 2z^*] = \frac{1}{i}\left[-2\left(\omega + i\frac{\Gamma}{2}\right)\right] = \frac{1}{i}(-2\omega - i\Gamma) = -\Gamma + 2i\omega,$$

$$\lambda_{14} = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_4 - \varepsilon_2^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[0 - (z^* + \Lambda)] = \frac{1}{i}\left[-\left(\omega + i\frac{\Gamma}{2}\right) - \Lambda\right] = -\frac{\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda),$$

$$\lambda_{15} = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_4 - \varepsilon_3^*] = \frac{\hbar}{i\hbar}[0 - (z^* - \Lambda)] = \frac{1}{i}\left[-\left(\omega + i\frac{\Gamma}{2}\right) + \Lambda\right] = -\frac{\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda),$$

$$\lambda_{16} = \frac{1}{i\hbar}[\varepsilon_4 - \varepsilon_4^*] = \frac{1}{i\hbar}[0 - 0] = 0.$$

A.2. DERIVACIÓN DEL EIGENSISTEMA DERECHO PARA 2 TLS

En este apéndice se describe el método seguido para derivar de manera sistemática los autovalores y autovectores derechos del superoperador de Liouville $\mathcal{L}$. El procedimiento consiste en dividir el espacio en bloques, analizar cómo los operadores de salto conectan cada bloque con el estado fundamental y, finalmente, resolver las ecuaciones que se obtienen al imponer la condición de eigenvalor. A continuación, se detallan los cálculos necesarios para encontrar el eigensistema derecho.

La [Figura 2.2](#) muestra que el operador de brinco desexcita a bloques más excitados. En

este caso, dicho operador anula a los elementos en verde:

$$\mathcal{D}\{|gg\rangle\langle gg|, |gg\rangle\langle +|, |gg\rangle\langle -|, |gg\rangle\langle ee|, |+\rangle\langle gg|, |-\rangle\langle gg|, |ee\rangle\langle gg|\} = 0.$$

Con esta información y como se mencionó en la §Subsubsección 2.1.4.1, podemos hallar fácilmente los eigenvalores correspondientes a los eigenvectores anteriores.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|gg\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle gg| + \mathcal{D}|gg\rangle\langle gg| = \frac{1}{i\hbar} \left[K|gg\rangle\langle gg| - |gg\rangle\langle gg| K^\dagger \right] = 0|gg\rangle\langle gg| \\ &= \lambda_{16}|gg\rangle\langle gg|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|gg\rangle\langle +| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle +| + \mathcal{D}|gg\rangle\langle +| = \frac{1}{i\hbar} \left[K|gg\rangle\langle +| - |gg\rangle\langle +| K^\dagger \right] = -\frac{1}{i\hbar} \hbar(z^* + \Lambda)|gg\rangle\langle +| \\ &= i(z^* + \Lambda)|gg\rangle\langle +| \\ &= \lambda_{14}|gg\rangle\langle +|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|gg\rangle\langle -| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle -| + \mathcal{D}|gg\rangle\langle -| = \frac{1}{i\hbar} \left[K|gg\rangle\langle -| - |gg\rangle\langle -| K^\dagger \right] = -\frac{1}{i\hbar} \hbar(z^* - \Lambda)|gg\rangle\langle -| \\ &= i(z^* - \Lambda)|gg\rangle\langle -| \\ &= \lambda_{15}|gg\rangle\langle -|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|gg\rangle\langle ee| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle ee| + \mathcal{D}|gg\rangle\langle ee| = \frac{1}{i\hbar} \left[K|gg\rangle\langle ee| - |gg\rangle\langle ee| K^\dagger \right] = -\frac{1}{i\hbar} 2z^* \hbar |gg\rangle\langle ee| \\ &= 2iz^* |gg\rangle\langle ee| \\ &= \lambda_{13}|gg\rangle\langle ee|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|+\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|+\rangle\langle gg| + \mathcal{D}|+\rangle\langle gg| = \frac{1}{i\hbar} \left[K|+\rangle\langle gg| - |+\rangle\langle gg| K^\dagger \right] = \frac{1}{i\hbar} \hbar(z + \Lambda)|+\rangle\langle gg| \\ &= -i(z + \Lambda)|+\rangle\langle gg| \\ &= \lambda_8|+\rangle\langle gg|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|-\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|-\rangle\langle gg| + \mathcal{D}|-\rangle\langle gg| = \frac{1}{i\hbar} \left[K|-\rangle\langle gg| - |-\rangle\langle gg| K^\dagger \right] = \frac{1}{i\hbar} \hbar(z - \Lambda)|-\rangle\langle gg| \\ &= -i(z - \Lambda)|-\rangle\langle gg| \\ &= \lambda_{12}|-\rangle\langle gg|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|ee\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|ee\rangle\langle gg| + \mathcal{D}|ee\rangle\langle gg| = \frac{1}{i\hbar} \left[K|ee\rangle\langle gg| - |ee\rangle\langle gg| K^\dagger \right] = \frac{1}{i\hbar} 2z \hbar |ee\rangle\langle gg| \\ &= -2iz |ee\rangle\langle gg| \\ &= \lambda_4|ee\rangle\langle gg|.\end{aligned}$$

Es crucial destacar que el operador de salto no elimina los elementos residuales del espacio de estados. Para completar la descripción del eigensistema, es necesario analizar su

efecto sobre dichos componentes.

Primero hagamos una observación sobre la aplicación de los operadores de subida y bajada a los estados. Su aplicación se ve como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_+ |e\rangle &= 0 & \langle e| \sigma_+ &= \langle g| \\
 \sigma_+ |g\rangle &= |e\rangle, & \langle g| \sigma_+ &= 0, \\
 \sigma_- |e\rangle &= |g\rangle & \langle e| \sigma_- &= 0 \\
 \sigma_- |g\rangle &= 0, & \langle g| \sigma_- &= \langle e|.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Del análisis precedente, se desprende la acción fundamental de los operadores de elevación (σ_i^+) y reducción (σ_i^-) sobre los estados simétricos $|\pm\rangle$. Estos operadores actúan de manera local sobre el i -ésimo qubit: σ_i^+ induce una transición al estado excitado, mientras que σ_i^- promueve la relajación al estado base. Sin embargo, su aplicación está sujeta a restricciones cuánticas intrínsecas:

- Si el i -ésimo qubit se encuentra ya en el estado excitado ($|e\rangle$), la acción de σ_i^+ anula el estado, dado que no es posible excitar un sistema en su máximo nivel energético.
- Análogamente, si el qubit reside en el estado base ($|g\rangle$), la aplicación de σ_i^- elimina el estado, al no existir niveles inferiores para desexcitar.

Estos principios, basados en las reglas de conmutación de los operadores de Pauli, permiten deducir las siguientes relaciones para los estados simétricos $|\pm\rangle$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^+ |ge\rangle &= \sigma_2^+ |eg\rangle = |ee\rangle, \\
 \sigma_1^- |eg\rangle &= \sigma_2^- |ge\rangle = |gg\rangle, \\
 \sigma_1^- |ee\rangle &= \sigma_2^+ |gg\rangle = |ge\rangle, \\
 \sigma_1^+ |gg\rangle &= \sigma_2^- |ee\rangle = |eg\rangle, \\
 \sigma_1^+ |ee\rangle &= \sigma_1^- |ge\rangle = \sigma_2^+ |ge\rangle = \sigma_2^- |eg\rangle = 0, \\
 \sigma_1^+ |\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1^+ (|eg\rangle \pm |ge\rangle) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle, \\
 \sigma_1^- |\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1^- (|eg\rangle \pm |ge\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |gg\rangle, \\
 \sigma_2^+ |\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2^+ (|eg\rangle \pm |ge\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle, \\
 \sigma_2^- |\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2^- (|eg\rangle \pm |ge\rangle) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |gg\rangle.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Sin embargo, aplicar los operadores de ascenso (σ^+) y descenso (σ^-) sobre vectores bra ($\langle\psi|$), su comportamiento se invierte respecto a su acción habitual sobre kets ($|\psi\rangle$). Esta inversión surge de la propiedad fundamental de los operadores en mecánica cuántica: el adjunto de σ^+ es σ^- , y viceversa. Así, cuando σ^+ actúa sobre un bra, en lugar de excitar (como haría sobre un ket), produce un efecto de desexcitación, mientras que σ^- aplicado a un

bra genera una excitación. Esto se debe a que, en el espacio dual, los operadores se comportan como sus adjuntos. Por ejemplo, si σ^+ lleva $|g\rangle$ a $|e\rangle$ en el espacio de kets, su acción sobre el bra $\langle e|$ equivale a $\langle g|$, ya que $\langle e|\sigma^+ = \langle g|$. Esta dualidad no solo es consistente con el formalismo matemático de la teoría cuántica, sino que también garantiza la coherencia en el cálculo de valores esperados y la hermiticidad de los operadores observables. En términos físicos, aunque esta inversión pueda interpretarse como un cambio de rol entre excitación y desexcitación, es importante recordar que se trata de una consecuencia puramente matemática de la estructura de los espacios de Hilbert y no de un proceso físico observable. Esta propiedad resulta clave en el análisis de operadores adjuntos y en la construcción de eigensistemas completos, donde la acción dual de $\sigma^\pm$ sobre bras debe considerarse para mantener la consistencia algebraica de las soluciones.

Calculamos los eigenvectores del bloque central que está compuesto por los estados $\{|+\rangle\langle +|, |+\rangle\langle -|, |-\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$, y que el operador de brinco los transita al estado $|gg\rangle\langle gg|$.

Usando las propiedades anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}|\pm\rangle\langle\pm| &= \Gamma(\sigma_1^-|\pm\rangle\langle\pm|\sigma_1^+ + \sigma_2^-|\pm\rangle\langle\pm|\sigma_2^+) \\ &= \Gamma\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle gg|\right) + \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle\right)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\langle gg|\right)\right] \\ &= \frac{\Gamma}{2} [|gg\rangle\langle gg| + |gg\rangle\langle gg|] \\ &= \Gamma |gg\rangle\langle gg|\end{aligned}\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}|\pm\rangle\langle\mp| &= \Gamma(\sigma_1^-|\pm\rangle\langle\mp|\sigma_1^+ + \sigma_2^-|\pm\rangle\langle\mp|\sigma_2^+) \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle gg|\right) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg\rangle)\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\langle gg|\right)\right) \\ &= \frac{\Gamma}{2} (|gg\rangle\langle gg| - |gg\rangle\langle gg|) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Ahora actuamos el operador de brinco al bloque conformado por los estados $\{|ee\rangle\langle +|, |ee\rangle\langle -|\}$ y que los transita al bloque conformado por los estados $\{|+\rangle\langle gg|, |-\rangle\langle gg|\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}|ee\rangle\langle\pm| &= \Gamma(\sigma_1^-|ee\rangle\langle\pm|\sigma_1^+ + \sigma_2^-|ee\rangle\langle\pm|\sigma_2^+) \\ &= \Gamma\left(|ge\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\langle gg| + |eg\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\langle gg|)\right) \\ &= \Gamma\frac{1}{\sqrt{2}}(|ge\rangle \pm |eg\rangle)\langle gg| \\ &= \pm\Gamma|\pm\rangle\langle gg|.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Ahora actuamos el operador de brinco al bloque conformado por los estados $\{|+\rangle\langle ee|, |-\rangle\langle ee|\}$

y que los transita al bloque conformado por los estados $\{|gg\rangle\langle +|, |gg\rangle\langle -|\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} |\pm\rangle\langle ee| &= \Gamma (\sigma_1^- |\pm\rangle\langle ee| \sigma_1^+ + \sigma_2^- |\pm\rangle\langle ee| \sigma_2^+) = \Gamma \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |gg\rangle\langle ge| \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (|gg\rangle\langle eg|) \right) \\
&= \pm \Gamma |gg\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle eg| \pm \langle ge|) \\
&= \pm \Gamma |gg\rangle\langle \pm|.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Finalmente, aplicamos el operador de brinco al estado $|ee\rangle\langle ee|$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} |ee\rangle\langle ee| &= \Gamma (\sigma_1^- |ee\rangle\langle ee| \sigma_1^+ + \sigma_2^- |ee\rangle\langle ee| \sigma_2^+) = \Gamma (|ge\rangle\langle ge| + |eg\rangle\langle eg|) \\
&= \Gamma (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Una vez teniendo la información de cómo actúa $\mathcal{D}$ sobre los elementos restantes de la matriz de densidad, podemos proceder a calcular los eigenvalores y eigenvectores restantes del superoperador $\mathcal{L}$.

Para los elementos del bloque central $\{|+\rangle\langle +|, |+\rangle\langle -|, |-\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$, proponemos los siguientes ansätze:

$$\begin{aligned}
|+\rangle\langle +| &+ (X_{gg,gg}^{+,+}) |gg\rangle\langle gg|, \\
|+\rangle\langle -| &+ (X_{gg,gg}^{+,-}) |gg\rangle\langle gg|, \\
|-\rangle\langle +| &+ (X_{gg,gg}^{-,+}) |gg\rangle\langle gg|, \\
|-\rangle\langle -| &+ (X_{gg,gg}^{-,-}) |gg\rangle\langle gg|.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Esta propuesta se basa en la consideración de que los elementos del bloque central de la matriz de densidad transitan al estado fundamental a través de la acción de $\mathcal{D}$.

Por ejemplo, haciendo el cálculo para el primer ansatz obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} [|+\rangle\langle +| + (X_{gg,gg}^{+,+}) |gg\rangle\langle gg|] &= \mathcal{K} (|+\rangle\langle +| + (X_{gg,gg}^{+,+}) |gg\rangle\langle gg|) + \mathcal{D} (|+\rangle\langle +| + (X_{gg,gg}^{+,+}) |gg\rangle\langle gg|) \\
&= \frac{1}{i\hbar} [K (|+\rangle\langle +| + (X_{gg,gg}^{+,+}) |gg\rangle\langle gg|) \\
&\quad - (|+\rangle\langle +| + (X_{gg,gg}^{+,+}) |gg\rangle\langle gg|) K^\dagger] + \mathcal{D} |+\rangle\langle +| \\
&= \frac{1}{i\hbar} [\hbar(z + \Lambda) |+\rangle\langle +| - |+\rangle\langle +| \hbar(z^* + \Lambda)] + \Gamma |gg\rangle\langle gg| \\
&= -i(z - z^*) |+\rangle\langle +| + \Gamma |gg\rangle\langle gg| \\
&= -i(z - z^*) \left(|+\rangle\langle +| + \frac{\Gamma}{-i(z - z^*)} |gg\rangle\langle gg| \right).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Sin embargo, dado que $z - z^* = -i\Gamma$ concluimos que $X_{gg,gg}^{+,+} = \frac{\Gamma}{-i(z - z^*)} = -1$. Por lo tanto $|+\rangle\langle +| - |gg\rangle\langle gg|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_{11} = -i(z - z^*) = -i(-i\Gamma) = -\Gamma$.

De manera análoga se hace el cálculo para los ansátzes restantes obteniendo así

- $|+\rangle\langle-|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_7 = -i(z - z^* + 2\Lambda) = -\Gamma - 2i\Lambda$.
- $|-\rangle\langle+|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_{10} = -i(z - z^* - 2\Lambda) = -\Gamma + 2i\Lambda$.
- $|-\rangle\langle-| - |gg\rangle\langle gg|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_6 = -i(z - z^*) = -\Gamma$.

Calcularemos los eigenvalores y eigenvectores del bloque conformado por los elementos $\{|ee\rangle\langle+|, |ee\rangle\langle-|\}$, y que el operador de brinco los transita al bloque $\{|+\rangle\langle gg|, |-\rangle\langle gg|\}$. Para hallar los eigenvectores proponemos los ansátzes siguientes:

$$\begin{aligned} &|ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) |+\rangle\langle gg|, \\ &|ee\rangle\langle-| + (X_{-,gg}^{ee,-}) |-\rangle\langle gg|. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La propuesta se basa en la acción del superoperador $\mathcal{D}$ sobre los elementos $|ee\rangle\langle\pm|$ que los transita a $\Gamma |\pm\rangle\langle gg|$ tal como se muestra en (A.6). Esto ocasiona que los eigenvectores sean una combinación lineal de dos términos, el elemento inicial y el elemento al que es transitado. Primero aplicamos el superoperador $\mathcal{L}$ al primer ansatz obteniendo:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[|ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) |+\rangle\langle gg|\right] \\ &= \mathcal{K}\left[|ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) |+\rangle\langle gg|\right] + \mathcal{D}\left[|ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) |+\rangle\langle gg|\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[K(|ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) |+\rangle\langle gg|) - (|ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) |+\rangle\langle gg|)K^\dagger\right] \\ &\quad + \mathcal{D}\left[|ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) |+\rangle\langle gg|\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[2z\hbar |ee\rangle\langle+| + (X_{+,gg}^{ee,+}) \hbar(z + \Lambda) |+\rangle\langle gg| - |ee\rangle\langle+| \hbar(z^* + \Lambda)\right] + \Gamma |+\rangle\langle gg| \\ &= -i\left[(2z - (z^* + \Lambda)) |ee\rangle\langle+| + ((X_{+,gg}^{ee,+})(z + \Lambda) + i\Gamma) |+\rangle\langle gg|\right] \\ &= -i(2z - z^* - \Lambda)\left[|ee\rangle\langle+| + \frac{(X_{+,gg}^{ee,+})(z + \Lambda) + i\Gamma}{2z - z^* - \Lambda} |+\rangle\langle gg|\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Al hacer la comparación de ambos miembros y el álgebra necesaria, podemos encontrar

$$X_{+,gg}^{ee,+} = \frac{-\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda}. \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, $|ee\rangle\langle+| - \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} |+\rangle\langle gg|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\mu_{12} = -i(2z - z^* - \Lambda) = -\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega - \Lambda)$.

De la misma forma, para el segundo ansatz obtenemos que $|ee\rangle\langle-| + \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} |-\rangle\langle gg|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_3 = -i(2z - z^* + \Lambda) = -\frac{3\Gamma}{2} - i(\omega + \Lambda)$.

Procedemos con el cálculo de los eigenvectores del bloque $\{|+\rangle\langle ee|, |-\rangle\langle ee|\}$, que transitan por medio de $\mathcal{D}$ al bloque $\{|gg\rangle\langle +|, |gg\rangle\langle -|\}$. Proponemos los ansätze siguientes:

$$\begin{aligned} &|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee}) |gg\rangle\langle +| \\ &|-\rangle\langle ee| + (X_{gg,-}^{-,ee}) |gg\rangle\langle -|. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Al igual que el caso anterior la propuesta se debe a la forma de actuar de $\mathcal{D}$ que se muestra en (A.7). Aplicamos $\mathcal{L}$ al primer ansatz obteniendo así:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left[|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee}) |+\rangle\langle gg|\right] \\ &= \mathcal{K}\left[|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee}) |+\rangle\langle gg|\right] + \mathcal{D}\left[|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee}) |+\rangle\langle gg|\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[K(|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee}) |+\rangle\langle gg|) - (|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee}) |+\rangle\langle gg|)K^\dagger\right] \\ &\quad + \mathcal{D}\left[|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee}) |+\rangle\langle gg|\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hbar(z + \Lambda) |+\rangle\langle ee| - 2\hbar z^* |+\rangle\langle ee| - \hbar(z^* + \Lambda) X_{gg,+}^{+,ee} |gg\rangle\langle +|\right] + \Gamma |+\rangle\langle gg| \\ &= -i\left[(z + \Lambda - 2z^*) |+\rangle\langle ee| - [X_{gg,+}^{+,ee}(z^* + \Lambda) - i\Gamma] |gg\rangle\langle +|\right] \\ &= -i(z - 2z^* + \Lambda)\left[|+\rangle\langle ee| - \frac{X_{gg,+}^{+,ee}(z^* + \Lambda) - i\Gamma}{z - 2z^* + \Lambda} |gg\rangle\langle +|\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Comparando ambos miembros y resolviendo el álgebra se obtiene

$$X_{gg,+}^{+,ee} = \frac{-\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda}. \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, $|+\rangle\langle ee| - \frac{\Gamma}{\Gamma + 2i\Lambda} |gg\rangle\langle +|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_5 = -i(z - 2z^* + \Lambda) = -\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega - \Lambda)$.

Siguiendo el mismo procedimiento podemos determinar para el segundo ansatz que $|-\rangle\langle ee| + \frac{\Gamma}{\Gamma - 2i\Lambda} |gg\rangle\langle -|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_9 = -i(z - 2z^* + \Lambda) = -\frac{3\Gamma}{2} + i(\omega + \Lambda)$.

Para completar el análisis espectral, abordaremos el cálculo del autovector asociado al element $|ee\rangle\langle ee|$. Es fundamental recordar que el operador de salto mapea este estado hacia el subespacio central, compuesto por todas las superposiciones coherentes de $|\pm\rangle\langle \pm|$, así como hacia el estado base $|gg\rangle\langle gg|$. Como se evidencia en (A.8), la acción de $\mathcal{D}$ sobre $|ee\rangle\langle ee|$ genera una mezcla de proyecciones en $|+\rangle\langle +|$ y $|-\rangle\langle -|$.

Adicionalmente, dado que los elementos del subespacio central son gradualmente mapeados al estado fundamental, la construcción del ansatz debe incorporar: el propio elemento $|ee\rangle\langle ee|$, los elementos $|+\rangle\langle +|$, $|-\rangle\langle -|$ y finalmente el $|gg\rangle\langle gg|$. Esta combinación estraté-

gica garantiza que el ansatz capture la dinámica completa inducida por $\mathcal{D}$. Formalmente, se expresa como:

$$|ee\rangle\langle ee| + (X_{+,+}^{ee,ee})|+\rangle\langle +| + (X_{-,-}^{ee,ee})|-\rangle\langle -| + (X_{gg,gg}^{ee,ee})|gg\rangle\langle gg|. \quad (\text{A.17})$$

Aplicando $\mathcal{L}$ al ansatz anterior obtenemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left[|ee\rangle\langle ee| + (X_{+,+}^{ee,ee})|+\rangle\langle +| + (X_{-,-}^{ee,ee})|-\rangle\langle -| + (X_{gg,gg}^{ee,ee})|gg\rangle\langle gg|\right] \\ &= \mathcal{K}\left[|ee\rangle\langle ee| + (X_{+,+}^{ee,ee})|+\rangle\langle +| + (X_{-,-}^{ee,ee})|-\rangle\langle -| + (X_{gg,gg}^{ee,ee})|gg\rangle\langle gg|\right] \\ &+ \mathcal{D}\left[|ee\rangle\langle ee| + (X_{+,+}^{ee,ee})|+\rangle\langle +| + (X_{-,-}^{ee,ee})|-\rangle\langle -| + (X_{gg,gg}^{ee,ee})|gg\rangle\langle gg|\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[K(|ee\rangle\langle ee| + (X_{+,+}^{ee,ee})|+\rangle\langle +| + (X_{-,-}^{ee,ee})|-\rangle\langle -| + (X_{gg,gg}^{ee,ee})|gg\rangle\langle gg|) \right. \\ &\quad \left. - (|ee\rangle\langle ee| + (X_{+,+}^{ee,ee})|+\rangle\langle +| + (X_{-,-}^{ee,ee})|-\rangle\langle -| + (X_{gg,gg}^{ee,ee})|gg\rangle\langle gg|)K^\dagger\right] \\ &+ \mathcal{D}\left[|+\rangle\langle ee| + (X_{gg,+}^{+,ee})|+\rangle\langle gg|\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[2z\hbar|ee\rangle\langle ee| + (X_{+,+}^{ee,ee})\hbar(z+\Lambda)|+\rangle\langle +| + (X_{-,-}^{ee,ee})\hbar(z-\Lambda)|-\rangle\langle -| \right. \\ &\quad \left. - 2z^*\hbar|ee\rangle\langle ee| - (X_{+,+}^{ee,ee})\hbar(z^*+\Lambda)|+\rangle\langle +| - (X_{-,-}^{ee,ee})\hbar(z^*-\Lambda)|-\rangle\langle -|\right] \\ &\quad + \Gamma|+\rangle\langle +| + X_{+,+}^{ee}\Gamma|gg\rangle\langle gg| + X_{-,-}^{ee}\Gamma|gg\rangle\langle gg| \\ &= -i\left[2(z-z^*)|ee\rangle\langle ee| + [(X_{+,+}^{ee,ee})(z-z^*) + i\Gamma]|+\rangle\langle +| + [(X_{-,-}^{ee,ee})(z-z^*) + i\Gamma]|-\rangle\langle -| \right. \\ &\quad \left. + i\Gamma(X_{+,+}^{ee,ee} + X_{-,-}^{ee,ee})|gg\rangle\langle gg|\right] \\ &= -2i(z-z^*)\left[|ee\rangle\langle ee| + \frac{(X_{+,+}^{ee,ee})(z-z^*) + i\Gamma}{2(z-z^*)}|+\rangle\langle +| + \frac{(X_{-,-}^{ee,ee})(z-z^*) + i\Gamma}{2(z-z^*)}|-\rangle\langle -| \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\Gamma(X_{+,+}^{ee,ee} + X_{-,-}^{ee,ee})}{2(z-z^*)}|gg\rangle\langle gg|\right]. \end{aligned}$$

Comparando ambos miembros de la ecuación anterior y resolviendo el álgebra podemos determinar que

$$X_{+,+}^{ee,ee} = X_{-,-}^{ee,ee} = -1 \quad \text{y} \quad X_{gg,gg}^{ee,ee} = 1.$$

Por lo tanto, concluimos que $|ee\rangle\langle ee| - |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| + |gg\rangle\langle gg|$ es eigenvector de $\mathcal{L}$ con eigenvalor $\lambda_1 = -2i(z-z^*) = -2\Gamma$.

De esta manera hemos calculado el espectro completo del superoperador $\mathcal{L}$, el cual mostramos en la [Tabla 2.3](#).

A.3. DERIVACIÓN DEL EIGENSISTEMA IZQUIERDO PARA 2 TLS

La determinación del eigensistema izquierdo sigue una metodología análoga a la empleada en el cálculo del eigensistema derecho. En este contexto, el objetivo central del apéndice radica en elucidar la acción del operador de salto adjunto $\mathcal{D}^\dagger$ sobre los elementos de la matriz de densidad izquierda, cuya estructura en la base diagonal de K se detalla en la [Figura 2.3](#). Como se estableció en la [§Subsubsección 2.1.4.2](#), aquellos elementos que contienen estados excitados en su definición son eliminados bajo la aplicación de $\mathcal{D}^\dagger$, fenómeno que puede interpretarse —de manera puramente formal— como una excitación inversa de estados de menor energía. Es crucial enfatizar que este comportamiento no corresponde a un proceso físico real, sino a una proyección dual inherente a la estructura algebraica del superoperador adjunto $\mathcal{L}^\dagger$.

En coherencia con lo anterior, y tal como se demostró en la sección correspondiente, la aplicación sistemática de $\mathcal{D}^\dagger$ sobre los elementos con excitación conduce a su aniquilación completa, tal que:

$$\mathcal{D}^\dagger \{ |gg\rangle\langle ee|, |-\rangle\langle ee|, |+\rangle\langle ee|, |ee\rangle\langle ee|, |ee\rangle\langle +|, |ee\rangle\langle -|, |ee\rangle\langle gg| \} = \mathcal{D}^\dagger G' = 0.$$

Este resultado implica que la ecuación maestra izquierda, al igual que su contraparte derecha, experimenta una simplificación significativa. Para el conjunto de elementos denotado como G' , la dinámica gobernada por $\mathcal{L}$ se reduce exclusivamente a evaluar la contribución coherente $\mathcal{K}^\dagger G'$, dado que el operador de salto izquierdo $\mathcal{D}^\dagger$ aniquila cualquier elemento perteneciente a G' .

Ahora necesitamos ver cómo es la aplicación de $\mathcal{D}^\dagger$ sobre los elementos restantes. Para esto haremos uso de las relaciones mencionadas en [\(A.3\)](#).

Bloque central (formado por las combinaciones de $|\pm\rangle\langle\pm|$)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\dagger |\pm\rangle\langle\pm| &= \Gamma [\sigma_1^+ |\pm\rangle\langle\pm| \sigma_1^- + \sigma_2^+ |\pm\rangle\langle\pm| \sigma_2^-] \\ &= \Gamma \left[\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle \right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \langle ee| \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle ee| \right) \right] \\ &= \Gamma \left(\frac{1}{2} |ee\rangle\langle ee| + \frac{1}{2} |ee\rangle\langle ee| \right) \\ &= \Gamma |ee\rangle\langle ee| \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\dagger |\pm\rangle\langle\mp| &= \Gamma [\sigma_1^+ |\pm\rangle\langle\mp| \sigma_1^- + \sigma_2^+ |\pm\rangle\langle\mp| \sigma_2^-] \\ &= \Gamma \left[\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle \right) \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}} \langle ee| \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle ee| \right) \right] \\ &= \Gamma \left(-\frac{1}{2} |ee\rangle\langle ee| + \frac{1}{2} |ee\rangle\langle ee| \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Bloque formado por la combinación $\{|\pm\rangle\langle gg|\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\dagger |\pm\rangle\langle gg| &= \Gamma [\sigma_1^+ |\pm\rangle\langle gg| \sigma_1^- + \sigma_2^+ |\pm\rangle\langle gg| \sigma_2^-] \\
&= \Gamma \left[\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle \right) \langle eg| + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |ee\rangle \right) \langle ge| \right] \\
&= \pm \Gamma |ee\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle eg| \pm \langle ge|) \right) \\
&= \pm \Gamma |ee\rangle \langle \pm|
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Bloque formado por la combinación de $\{|gg\rangle\langle \pm|\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\dagger |gg\rangle\langle \pm| &= \Gamma [\sigma_1^+ |gg\rangle\langle \pm| \sigma_1^- + \sigma_2^+ |gg\rangle\langle \pm| \sigma_2^-] \\
&= \Gamma \left[|eg\rangle \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \langle ee| \right) + |ge\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle ee| \right) \right] \\
&= \pm \Gamma \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|eg\rangle \pm |ge\rangle) \right) \langle ee| \\
&= \pm \Gamma |\pm\rangle\langle ee|
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Bloque formado por el elemento $|gg\rangle\langle gg|$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\dagger |gg\rangle\langle gg| &= \Gamma [\sigma_1^+ |gg\rangle\langle gg| \sigma_1^- + \sigma_2^+ |gg\rangle\langle gg| \sigma_2^-] \\
&= \Gamma [|eg\rangle\langle eg| + |ge\rangle\langle ge|] \\
&= \pm \Gamma (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|).
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Con la información precedente podemos saber a qué elementos transita el operador de salto $\mathcal{D}^\dagger$. Con esto, al igual que en el caos derecho, podemos proponer ansätze que nos ayude a encontrar los eigenvectores izquierdos con sus respectivos eigenvalores.

PROPUESTA DE ANSÁTZES**Ansätze para el bloque central**

- Para $|+\rangle\langle +|$ y $|-\rangle\langle -|$ proponemos el ansatz: $|\pm\rangle\langle \pm| + X_{ee}^{\pm,\pm} |ee\rangle\langle ee|$
- Para $|+\rangle\langle -|$ y $|-\rangle\langle +|$ proponemos el ansatz: $|\pm\rangle\langle \mp| + X_{ee}^{\pm,\mp} |ee\rangle\langle ee|$

Ansätze para el bloque formado por $\{|\pm\rangle\langle gg|\}$

- Para $|+\rangle\langle gg|$ proponemos el ansatz: $|+\rangle\langle gg| + X_{ee,+}^{+,gg} |ee\rangle\langle +|$.
- Para $|-\rangle\langle gg|$ proponemos el ansatz: $|-\rangle\langle gg| + X_{ee,-}^{+,gg} |ee\rangle\langle -|$.

Ansätze para el bloque formado por $\{|gg\rangle\langle \pm|\}$

- Para $|gg\rangle\langle +|$ proponemos el ansatz: $|gg\rangle\langle +| + X_{+,ee}^{gg,+} |+\rangle\langle ee|$.
- Para $|gg\rangle\langle -|$ proponemos el ansatz: $|gg\rangle\langle -| + X_{-,ee}^{gg,-} |-\rangle\langle ee|$.

Bloque formado por $\{|gg\rangle\langle gg|\}$

Para este caso el eigenvector derecho es la identidad $\mathbb{1}$. Esto se puede demostrar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger \mathbb{1} &= \mathcal{K}^\dagger \mathbb{1} + \mathcal{D}^\dagger \mathbb{1} \\
&= -\frac{1}{i\hbar} [\hat{K}^\dagger \mathbb{1} - \mathbb{1} \hat{K}] + \Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \mathbb{1} \sigma_j^- \\
&= -\frac{1}{i\hbar} [\hat{K}^\dagger - \hat{K}] + \Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \sigma_j^- \\
&= -\frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}^\dagger + i\hbar \sum_{j=1}^2 \frac{\Gamma_1}{2} \sigma_j^+ \sigma_j^- - \hat{H} + i\hbar \sum_{j=1}^2 \frac{\Gamma_2}{2} \sigma_j^+ \sigma_j^- \right] + \Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \sigma_j^- \\
&= -\Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \sigma_j^- + \Gamma \sum_{j=1}^2 \sigma_j^+ \sigma_j^- \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Este resultado emerge al emplear el Hamiltoniano efectivo definido en (2.21), donde se aprovecha la naturaleza hermítica tanto de H como del operador $\sigma_j^+ \sigma_j^-$, junto con la condición de tasas de decaimiento idénticas $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Bajo estos supuestos, se deduce que el operador identidad $\mathbb{1}$ actúa como un eigenvector izquierdo del sistema, asociado al eigenvalor nulo.

Finalmente, con los ansätze propuestos anteriormente y utilizando la misma metodología que en el eigensistema derecho, se encuentra el eigensistema izquierdo mostrado en la [Tabla 2.4](#).

APÉNDICE B

Cálculo de los coeficientes $C_i(0)$

Para calcular los coeficientes $C_{\lambda_i}(0) = \text{Tr}[\check{\rho}_{\lambda_i}^\dagger \rho(0)]$, expresamos tanto los eigenvectores izquierdos $\check{\rho}_{\lambda_i}$ como el estado inicial $\rho(0)$ en la base computacional $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$, denotada como $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle\}$. Aquí, $\rho(0) = \sum_{i,j} \rho_{ij} |\phi_i\rangle\langle\phi_j|$, con ρ_{ij} siendo los elementos de matriz en la base computacional. A continuación, se detalla el cálculo para cada coeficiente:

Coficiente $C_{\lambda_1}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_1} = |ee\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_1}^\dagger = |ee\rangle\langle ee|$

$$C_{\lambda_1}(0) = \text{Tr}[|ee\rangle\langle ee| \rho(0)] = \langle ee | \rho(0) | ee \rangle = \rho_{11}$$

$$C_{\lambda_1}(0) = \rho_{11}$$

Coficiente $C_{\lambda_2}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_2} = |ee\rangle\langle +| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_2}^\dagger = |+\rangle\langle ee|$

$$C_{\lambda_2}(0) = \text{Tr}[|+\rangle\langle ee| \rho(0)] = \langle ee | \rho(0) | + \rangle$$

Usando $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle + |ge\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle)$:

$$C_{\lambda_2}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle ee | \rho(0) | \phi_2 \rangle + \langle ee | \rho(0) | \phi_3 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} + \rho_{13})$$

$$C_{\lambda_2}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} + \rho_{13})$$

Coficiente $C_{\lambda_3}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_3} = |ee\rangle\langle -| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_3}^\dagger = |-\rangle\langle ee|$

$$C_{\lambda_3}(0) = \text{Tr}[|-\rangle\langle ee| \rho(0)] = \langle ee | \rho(0) | - \rangle$$

Usando $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle - |ge\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle)$:

$$C_{\lambda_3}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle ee | \rho(0) | \phi_2 \rangle - \langle ee | \rho(0) | \phi_3 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} - \rho_{13})$$

$$C_{\lambda_3}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} - \rho_{13})$$

Coeficiente $C_{\lambda_4}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_4} = |ee\rangle\langle gg| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_4}^\dagger = |gg\rangle\langle ee|$

$$C_{\lambda_4}(0) = \text{Tr}[|gg\rangle\langle ee|\rho(0)] = \langle ee|\rho(0)|gg\rangle = \rho_{14}$$

$$C_{\lambda_4}(0) = \rho_{14}$$

Coeficiente $C_{\lambda_5}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_5} = |+\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_5}^\dagger = |ee\rangle\langle +|$

$$C_{\lambda_5}(0) = \text{Tr}[|ee\rangle\langle +|\rho(0)] = \langle +|\rho(0)|ee\rangle$$

Usando $\langle +| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \phi_2| + \langle \phi_3|)$:

$$C_{\lambda_5}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \phi_2|\rho(0)|ee\rangle + \langle \phi_3|\rho(0)|ee\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} + \rho_{31})$$

$$C_{\lambda_5}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} + \rho_{31})$$

Coeficiente $C_{\lambda_6}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_6} = |-\rangle\langle -| + |ee\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_6}^\dagger = |-\rangle\langle -| + |ee\rangle\langle ee|$

$$C_{\lambda_6}(0) = \text{Tr}[(|-\rangle\langle -| + |ee\rangle\langle ee|)\rho(0)] = \text{Tr}[|-\rangle\langle -|\rho(0)] + \text{Tr}[|ee\rangle\langle ee|\rho(0)]$$

Sabemos que $\text{Tr}[|ee\rangle\langle ee|\rho(0)] = \rho_{11}$. Para el primer término:

$$\text{Tr}[|-\rangle\langle -|\rho(0)] = \langle -|\rho(0)|-\rangle$$

Usando $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle)$ y $\langle -| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle \phi_2| - \langle \phi_3|)$:

$$\langle -|\rho(0)|-\rangle = \frac{1}{2}(\langle \phi_2| - \langle \phi_3|)\rho(0)(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle) = \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} - \rho_{32} + \rho_{33})$$

Por lo tanto:

$$C_{\lambda_6}(0) = \rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} - \rho_{32} + \rho_{33})$$

$$C_{\lambda_6}(0) = \rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} - \rho_{32} + \rho_{33})$$

Coeficiente $C_{\lambda_7}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_7} = |+\rangle\langle -| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_7}^\dagger = |-\rangle\langle +|$

$$C_{\lambda_7}(0) = \text{Tr}[|-\rangle\langle +|\rho(0)] = \langle +|\rho(0)|-\rangle$$

Usando $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle)$ y $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle)$:

$$\langle +|\rho(0)|-\rangle = \frac{1}{2}(\langle\phi_2| + \langle\phi_3|)\rho(0)(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle) = \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{33})$$

$$C_{\lambda_7}(0) = \frac{1}{2}(\rho_{22} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{33})$$

Coeficiente $C_{\lambda_8}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_8} = |+\rangle\langle gg| + \frac{\Gamma}{\Gamma+2i\Lambda}|ee\rangle\langle +| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_8}^\dagger = |gg\rangle\langle +| + \frac{\Gamma}{\Gamma-2i\Lambda}|+\rangle\langle ee|$

Definimos $\chi = \frac{\Gamma}{\Gamma+2i\Lambda}$, $\chi^* = \frac{\Gamma}{\Gamma-2i\Lambda}$

$$C_{\lambda_8}(0) = \text{Tr}[(|gg\rangle\langle +| + \chi^*|+\rangle\langle ee|)\rho(0)] = \text{Tr}[|gg\rangle\langle +|\rho(0)] + \chi^* \text{Tr}[|+\rangle\langle ee|\rho(0)]$$

Sabemos:

$$\text{Tr}[|gg\rangle\langle +|\rho(0)] = \langle +|\rho(0)|gg\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{24} + \rho_{34})$$

$$\text{Tr}[|+\rangle\langle ee|\rho(0)] = \langle ee|\rho(0)|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} + \rho_{13})$$

Por lo tanto:

$$C_{\lambda_8}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{24} + \rho_{34}) + \chi^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} + \rho_{13}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{24} + \rho_{34}) + \chi^*(\rho_{12} + \rho_{13})]$$

$$C_{\lambda_8}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{24} + \rho_{34}) + \chi^*(\rho_{12} + \rho_{13})]$$

Coeficiente $C_{\lambda_9}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_9} = |-\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_9}^\dagger = |ee\rangle\langle -|$

$$C_{\lambda_9}(0) = \text{Tr}[|ee\rangle\langle -|\rho(0)] = \langle -|\rho(0)|ee\rangle$$

Usando $\langle -| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\phi_2| - \langle\phi_3|)$:

$$C_{\lambda_9}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\phi_2|\rho(0)|ee\rangle - \langle\phi_3|\rho(0)|ee\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} - \rho_{31})$$

$$C_{\lambda_9}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} - \rho_{31})$$

Coeficiente $C_{\lambda_{10}}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_{10}} = |-\rangle\langle +| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_{10}}^\dagger = |+\rangle\langle -|$

$$C_{\lambda_{10}}(0) = \text{Tr}[|+\rangle\langle -|\rho(0)] = \langle -|\rho(0)|+\rangle$$

Usando $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle)$ y $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle)$:

$$\langle -|\rho(0)|+\rangle = \frac{1}{2}(\langle\phi_2| - \langle\phi_3|)\rho(0)(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle) = \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{33})$$

$$C_{\lambda_{10}}(0) = \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{33})$$

Coefficiente $C_{\lambda_{11}}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_{11}} = |+\rangle\langle+| + |ee\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_{11}}^\dagger = |+\rangle\langle+| + |ee\rangle\langle ee|$

$$C_{\lambda_{11}}(0) = \text{Tr}[(|+\rangle\langle+| + |ee\rangle\langle ee|) \rho(0)] = \text{Tr}[|+\rangle\langle+| \rho(0)] + \text{Tr}[|ee\rangle\langle ee| \rho(0)]$$

Sabemos $\text{Tr}[|ee\rangle\langle ee| \rho(0)] = \rho_{11}$. Para el primer término:

$$\text{Tr}[|+\rangle\langle+| \rho(0)] = \langle+|\rho(0)|+\rangle = \frac{1}{2}(\langle\phi_2| + \langle\phi_3|)\rho(0)(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle) = \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{33})$$

Por lo tanto:

$$C_{\lambda_{11}}(0) = \rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{33})$$

$$C_{\lambda_{11}}(0) = \rho_{11} + \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{33})$$

Coefficiente $C_{\lambda_{12}}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_{12}} = |-\rangle\langle gg| - \frac{\Gamma}{\Gamma-2i\Lambda}|ee\rangle\langle-| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_{12}}^\dagger = |gg\rangle\langle-| - \frac{\Gamma}{\Gamma+2i\Lambda}|-\rangle\langle ee|$

$$C_{\lambda_{12}}(0) = \text{Tr}[(|gg\rangle\langle-| - \chi|-\rangle\langle ee|) \rho(0)] = \text{Tr}[|gg\rangle\langle-| \rho(0)] - \chi \text{Tr}[|-\rangle\langle ee| \rho(0)]$$

Sabemos:

$$\text{Tr}[|gg\rangle\langle-| \rho(0)] = \langle-|\rho(0)|gg\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{24} - \rho_{34})$$

$$\text{Tr}[|-\rangle\langle ee| \rho(0)] = \langle ee|\rho(0)|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} - \rho_{13})$$

Por lo tanto:

$$C_{\lambda_{12}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{24} - \rho_{34}) - \chi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{12} - \rho_{13}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\rho_{24} - \rho_{34}) - \chi(\rho_{12} - \rho_{13})]$$

$$C_{\lambda_{12}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\rho_{24} - \rho_{34}) - \chi(\rho_{12} - \rho_{13})]$$

Coefficiente $C_{\lambda_{13}}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_{13}} = |gg\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_{13}}^\dagger = |ee\rangle\langle gg|$

$$C_{\lambda_{13}}(0) = \text{Tr}[|ee\rangle\langle gg| \rho(0)] = \langle gg|\rho(0)|ee\rangle = \rho_{41}$$

$$C_{\lambda_{13}}(0) = \rho_{41}$$

Coefficiente $C_{\lambda_{14}}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_{14}} = |gg\rangle\langle+| + \frac{\Gamma}{\Gamma-2i\Lambda}|+\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_{14}}^\dagger = |+\rangle\langle gg| + \frac{\Gamma}{\Gamma+2i\Lambda}|ee\rangle\langle+|$

$$C_{\lambda_{14}}(0) = \text{Tr}[(|+\rangle\langle gg| + \chi|ee\rangle\langle+|) \rho(0)] = \text{Tr}[|+\rangle\langle gg| \rho(0)] + \chi \text{Tr}[|ee\rangle\langle+| \rho(0)]$$

Sabemos:

$$\text{Tr}[|+\rangle\langle gg|\rho(0)] = \langle gg|\rho(0)|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{42} + \rho_{43})$$

$$\text{Tr}[|ee\rangle\langle +|\rho(0)] = \langle +|\rho(0)|ee\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} + \rho_{31})$$

Por lo tanto:

$$C_{\lambda_{14}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{42} + \rho_{43}) + \chi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} + \rho_{31}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{42} + \rho_{43}) + \chi(\rho_{21} + \rho_{31})]$$

$$C_{\lambda_{14}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{42} + \rho_{43}) + \chi(\rho_{21} + \rho_{31})]$$

Coeficiente $C_{\lambda_{15}}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_{15}} = |gg\rangle\langle -| - \frac{\Gamma}{\Gamma+2i\Lambda}|-\rangle\langle ee| \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_{15}}^\dagger = |-\rangle\langle gg| - \frac{\Gamma}{\Gamma-2i\Lambda}|ee\rangle\langle -|$

$$C_{\lambda_{15}}(0) = \text{Tr}[(-\langle gg| - \chi^*|ee\rangle\langle -|)\rho(0)] = \text{Tr}[|-\rangle\langle gg|\rho(0)] - \chi^* \text{Tr}[|ee\rangle\langle -|\rho(0)]$$

Sabemos:

$$\text{Tr}[|-\rangle\langle gg|\rho(0)] = \langle gg|\rho(0)|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{42} - \rho_{43})$$

$$\text{Tr}[|ee\rangle\langle -|\rho(0)] = \langle -|\rho(0)|ee\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} - \rho_{31})$$

Por lo tanto:

$$C_{\lambda_{15}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{42} - \rho_{43}) - \chi^* \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{21} - \rho_{31}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{42} - \rho_{43}) - \chi^*(\rho_{21} - \rho_{31})]$$

$$C_{\lambda_{15}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\rho_{42} - \rho_{43}) - \chi^*(\rho_{21} - \rho_{31})]$$

Coeficiente $C_{\lambda_{16}}(0)$

Eigenvector izquierdo: $\check{\rho}_{\lambda_{16}} = \mathbb{1} \Rightarrow \check{\rho}_{\lambda_{16}}^\dagger = \mathbb{1}$

$$C_{\lambda_{16}}(0) = \text{Tr}[\mathbb{1}\rho(0)] = \text{Tr}[\rho(0)] = 1$$

$$C_{\lambda_{16}}(0) = 1$$

En este cálculo sustituimos $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle \pm |ge\rangle)$. Esto nos permitió hallar los coeficientes $C_i(0)$ en la base computacional, lo cual es importante para todos nuestros cálculos en el desarrollo del trabajo. Esto asegura que las soluciones de 2TLS para ambos regímenes estarán en la base computacional.

APÉNDICE C

Representación matricial en la base computacional

En este apéndice mostramos la forma matricial de los elementos $|\cdot\rangle\langle\cdot|$ con todas las combinaciones del conjunto $\{|ee\rangle, |\pm\rangle, |gg\rangle\}$, donde

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle \pm |ge\rangle),$$

con representació matricial.

$$|ee\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |eg\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |ge\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |gg\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, las 16 matrices representadas en la base computacional están dadas por:

$$|ee\rangle\langle ee| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |ee\rangle\langle\pm| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |ee\rangle\langle gg| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|+\rangle\langle ee| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |+\rangle\langle\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |+\rangle\langle gg| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle\langle ee| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle\langle\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & -1 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle\langle gg| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|gg\rangle\langle ee| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |gg\rangle\langle \pm| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |gg\rangle\langle gg| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, pp. 865–942, Jun 2009, DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865>.
- [2] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, “Quantum cryptography,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, pp. 145–195, Mar 2002, DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.145>.
- [3] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2004.
- [4] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, and B. Vacchini, “Colloquium: Non-markovian dynamics in open quantum systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 88, p. 021002, Apr 2016, DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.021002>.
- [5] I. de Vega and D. Alonso, “Dynamics of non-markovian open quantum systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 89, p. 015001, Jan 2017, DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.015001>.
- [6] A. Shabani and D. A. Lidar, “Completely positive post-markovian master equation via a measurement approach,” *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 020101, Feb 2005, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.020101>.
- [7] S. Maniscalco and F. Petruccione, “Non-markovian dynamics of a qubit,” *Phys. Rev. A*, vol. 73, p. 012111, Jan 2006, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.012111>.
- [8] X. L. Huang, J. Nie, J. Chen, and X. X. Yi, “Solution of the post-markovian master equation for a damping harmonic oscillator,” *Physica Scripta*, vol. 78, no. 2, p. 025001, jul 2008, DOI: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/78/02/025001>.
- [9] U. Fano, “Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 29, pp. 74–93, Jan 1957, DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.29.74>.
- [10] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 2nd ed. Addison-Wesley, 2017.
- [11] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Springer, 1993.
- [12] A. Rivas and S. F. Huelga, *Open Quantum Systems*. Springer, 2012.
- [13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2011.
- [14] V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve, and M. H. Devoret, “Quantum coherence with a single cooper pair,” *Physica Scripta*, vol. 1998, no. T76, p. 165, jan 1998, DOI: <https://dx.doi.org/10.1238/Physica.Topical.076a00165>.
- [15] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, “Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 042319, Oct 2007, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.042319>.

- [16] J. I. Cirac and P. Zoller, “Quantum computations with cold trapped ions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, pp. 4091–4094, May 1995, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091>.
- [17] N. Mirkin, “Explotando la dinámica de sistemas cuánticos abiertos para el caos y el control cuántico,” Ph.D. dissertation, Buenos Aires U., 2022.
- [18] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [19] K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*. Berlin: Springer Verlag, 1983.
- [20] B. Vacchini, A. Smirne, E.-M. Laine, J. Piilo, and H.-P. Breuer, “Markovianity and non-markovianity in quantum and classical systems,” *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 9, p. 093004, sep 2011, DOI: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/9/093004>.
- [21] G. Lindblad, “On the generators of quantum dynamical semigroups,” *Communications in mathematical physics*, vol. 48, pp. 119–130, 1976.
- [22] D. Manzano, “A short introduction to the lindblad master equation,” *AIP Advances*, vol. 10, no. 2, p. 025106, 02 2020, DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5115323>.
- [23] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, “Completely positive dynamical semigroups of n-level systems,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 17, no. 5, pp. 821–825, 05 1976, DOI: <https://doi.org/10.1063/1.522979>.
- [24] A. Kossakowski, “On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems,” *Reports on Mathematical Physics*, vol. 3, no. 4, pp. 247–274, 1972, DOI: [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(72\)90010-9](https://doi.org/10.1016/0034-4877(72)90010-9).
- [25] H.-J. Briegel and B.-G. Englert, “Quantum optical master equations: The use of damping bases,” *Phys. Rev. A*, vol. 47, pp. 3311–3329, Apr 1993, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.3311>.
- [26] J. M. Torres, “Closed-form solution of lindblad master equations without gain,” *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 052133, May 2014, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.020101>.
- [27] M. Bienert, “Manifestations of mechanical effects of light in atom optics,” Ph.D. dissertation, Universität Ulm, Ulm, Germany, 2004.
- [28] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [29] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Phys. Rev.*, vol. 47, pp. 777–780, May 1935, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777>.
- [30] J. S. Bell, “On the einstein podolsky rosen paradox,” *Physics Physique Fizika*, vol. 1, pp. 195–200, Nov 1964, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>.
- [31] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 2245–2248, Mar 1998, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [32] D. Bohm, *Quantum Theory*, ser. Dover books in science and mathematics. Dover Publications, 1989.
- [33] T. Yu and J. H. Eberly, “Sudden death of entanglement,” *Science*, vol. 323, no. 5914, pp. 598–601, 2009, DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1167343>.
- [34] T. Yu and J. H. Eberly, “Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed “x” states,” 2007, DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0503089>.
- [35] S. R. Hedemann, “Evidence that all states are unitarily equivalent to x states of the same entanglement,” 2014, DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.7038>.

-
- [36] S. R. Hedemann, “X states of the same spectrum and entanglement as all two-qubit states,” 2018, DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.03038>.