



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ingeniería Química

Colegio de Ingeniería en Materiales

Estudio de la Reflectancia y Transmitancia en
Sistemas Unidimensionales Periódicos con inclusiones
de Bismuto:
en busca de un Sistema Metamaterial

Tesis presentada a la
Facultad de Ingeniería Química
como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciatura en Ingeniería en Materiales

por
Eder Hazael Aguilar Gómez

Director de Tesis

Dr. Marco Antonio Morales Sánchez
Dr. Alejandro Reyes Coronado

Puebla Pue. 11 de Noviembre 2014

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Ecuaciones de Maxwell en medios dieléctricos	4
1.3. Condiciones de frontera	5
1.3.1. Condiciones de frontera en una interfaz plana separando dos medios semi-infinitos	6
1.3.2. Condiciones de frontera para el caso de polarización perpendicular .	8
1.3.3. Condiciones de frontera para el caso de polarización paralela	9
1.3.4. Ley de Snell para reflexión y refracción de ondas planas	10
1.4. Deducción de las fórmulas de Fresnel	11
1.4.1. Caso 1: $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia	11
1.4.2. Caso 2: $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia.	13
1.5. Interpretación física de las fórmulas de Fresnel	13
1.6. Reflectancia, transmitancia, y su interpretación física	15
2. Estudio de la Reflexión y la Transmisión en un sistema de una capa y multicapas	19
2.1. Deducción general de las ecuaciones para la reflectancia y la transmitancia de una capa	19
2.2. Análisis de la reflectancia y la transmitancia de una capa	24
2.3. Casos particulares de la reflectancia y de la transmitancia en una capa . .	24
2.4. Obtención de las ecuaciones de la reflectancia y de la transmitancia en un sistema multicapa	26
3. Resultados y discusión	35
3.1. Características del Bismuto (Bi): propiedades físicas y químicas	35
3.2. Incorporación del bismuto en sistemas multicapa: propuesta de diseño para nuevos materiales con aplicaciones en sistemas ópticos	36
3.3. Función dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ del bismuto	38
3.4. Ecuaciones para la reflectancia y la transmitancia en una capa metálica entre dos medios dieléctricos	40
3.5. Gráficas comparativas de la reflectancia y la transmitancia para un sistema de una capa metálica a incidencia normal	44
3.6. Gráficas de la reflectancia y la transmitancia en un sistema multicapa dieléctrico—semi—metal a incidencia normal	46
4. Conclusiones	51

A. Reflectancia y transmitancia en un sistema multicapa a incidencia oblicua	53
--	----

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El estudio de la interacción de ondas electromagnéticas con sistemas periódicos multicapa, se remonta al menos dos siglos atrás con los resultados pioneros de Lord Rayleigh en 1887. En épocas más recientes, el interés de la comunidad científica en el estudio de este tipo de sistemas ha crecido a partir de los trabajos seminales de Yablonovitch [1] y John [2] en 1987, extendiendo el análisis a estructuras no sólo unidimensionales. Yablonovitch mostró que es posible obtener una inhibición total de la emisión espontánea por átomos al modificar su entorno, mientras que John mostró que en ciertos arreglos desordenados multicapa se puede obtener una fuerte localización de la luz. Hoy en día, a las estructuras ópticas periódicas se les conoce como *cristales fotónicos* y éstos afectan la propagación de la luz de la misma forma en como redes periódicas de iones afectan el movimiento de los electrones en un sólido [3]. La construcción de un sistema multicapa unidimensional puede ser tan sencillo como un simple apilamiento de películas delgadas depositadas sobre un sustrato, mientras que un sistema bidimensional se puede obtener a partir de un sustrato perforando agujeros sobre el mismo. Sin embargo, para la fabricación de cristales fotónicos tridimensionales se requiere de técnicas más elaboradas, como por ejemplo el uso de litografía no lineal por medio de dos haces láser pulsados [4] o bien produciendo un arreglo tridimensional de esferas inmersas en una matriz y posteriormente disolviendo las esferas, lo que se conoce como ópalos inversos [5].

Por otra parte, los cristales fotónicos se han producido de manera natural desde hace miles de años, dando lugar a las diferentes tonalidades de color en las alas de mariposas, en los ópalos, en el plumaje de las aves, el aspecto iridiscente de los escarabajos y coloraciones en los peces, etc., lo que ha generado un gran interés en la comunidad científica para entender y reproducir los patrones creados por la naturaleza, buscando potenciales aplicaciones tecnológicas. Hoy en día se organizan congresos enteros dedicados al estudio de estructuras fotónicas inspiradas por la naturaleza [6].

La gran variedad de aplicaciones tecnológicas que han tenido los sistemas multicapa, en particular los sistemas unidimensionales dentro de la óptica de películas delgadas, ha sido en el área de recubrimientos para la eliminación de reflexiones indeseables de diversas superficies, que van desde películas protectoras para lentes, divisores de haz no absorbentes, polarizadores y filtros de alta eficiencia, hasta espejos dicróicos. Los sistemas bidimensionales no han permeado tanto como los unidimensionales en cuanto a sus aplicaciones tecnológicas, siendo una de las primeras en el área de fibras ópticas para el guiado de luz haciendo uso de propiedades no lineales. Los cristales fotónicos tridimensionales se

encuentran todavía lejos de aplicaciones tecnológicas comerciales, pero una de las grandes apuestas es su empleo en computadoras ópticas o computadoras opto-electrónicas.

Recientemente se ha renovado el interés en el estudio de sistemas periódicos debido a la aparición de los *metamateriales fotónicos* o simplemente *metamateriales*, en los que el tamaño de las inclusiones y las separaciones entre éstas es menor que la longitud de onda de la radiación incidente, distinguiéndolos así de los cristales fotónicos en los que la distancia de separación de las inclusiones es del orden de la longitud de onda de la radiación incidente.

Un metamaterial es un material artificial que presenta propiedades electromagnéticas inusuales, i.e., que no se encuentran en la naturaleza. Dichas propiedades especiales aparecen debido a que los metamateriales poseen inclusiones con una estructura diseñada a priori, y no provienen directamente del material con que están hechas. De esta manera, la estructura diseñada podría modelarse como una “molécula”, y sus propiedades eléctricas y magnéticas pueden ser consideradas mediante parámetros globales que son la permitividad eléctrica (ϵ) y permeabilidad magnética (μ) efectivas, o índice de refracción efectivo (n). Usualmente a los sistemas metamateriales se les considera como estructuras periódicas, sin embargo existen otras propuestas para la construcción de sistemas metamateriales con estructuras aleatorias [7].

El estudio de los sistemas metamateriales comienza con el trabajo pionero de Veselago en 1968 [8], en el que se muestra que si un medio material presenta tanto ϵ como μ simultáneamente negativas, i.e. a la misma frecuencia, entonces el medio material estará caracterizado por un índice de refracción negativo. Tres décadas después del trabajo seminal de Veselago, se logró la realización experimental de un sistema material exhibiendo un índice de refracción peculiar y diferente a lo que se conocía en los materiales comunes: un *índice de refracción efectivo negativo* [9]. En ese trabajo, se fabricó un sistema macroscópico consistente en alambres metálicos formando una estructura cúbica 3D, y en cada cara de los cubos se localiza una estructura metálica conocida como “resonadores de anillo truncado” (*Split Ring Resonator – SRR*, en inglés), como se muestra en la Fig. 1.1.

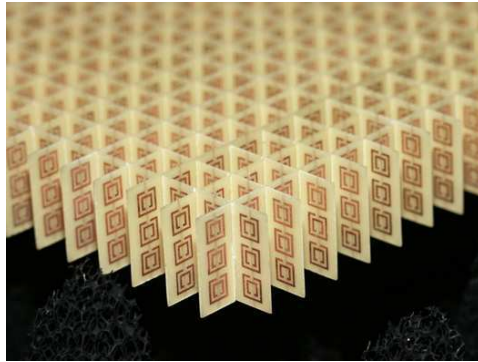


Figura 1.1: Metamaterial compuesto de alambres y resonadores de anillo truncado metálicos, hecho a base de fibra de vidrio con celdas de 5 mm de lado.

Los alambres metálicos proveen de $\Re[\epsilon] < 0$, donde $\Re$ denota la parte real de la permitividad eléctrica del material, mientras que los *SRR* proveen una respuesta magnética al sistema, por lo que a ciertas frecuencias (5 GHz aprox.) el sistema metamaterial compuesto presenta tanto $\Re[\epsilon] < 0$ como $\Re[\mu] < 0$, es decir, un índice de refracción negativo.

Las características únicas que exhiben los metamateriales en la interacción con campos

electromagnéticos son, por ejemplo, el efecto de enfocamiento perfecto, la invisibilidad a una frecuencia de la luz fija, radiación Cherenkov invertida, etc. [8, 10]. Mientras que todos los materiales encontrados en la naturaleza presentan un índice de refracción positivo (el índice de refracción es una medida de la velocidad promedio o efectiva de las ondas electromagnéticas al viajar en el medio), los metamateriales presentan un índice de refracción negativo. Esto significa que, en una interfaz entre un material normal y un metamaterial con índice de refracción negativo, las ondas incidentes se desviarán en dirección contraria a la que se desviarían en una interfaz entre dos medios materiales normales (índice de refracción positivo), como se muestra en la Fig. 1.2.



Figura 1.2: Esquema de la refracción de la luz en un sistema con índice de refracción positivo (izquierda) y con índice de refracción negativo (derecha).

Para poder describir la respuesta de un metamaterial a un campo electromagnético externo por medio de funciones respuesta efectivas, i.e., tratar al sistema como un medio material homogéneo, es condición necesaria que la dimensión máxima de sus componentes sea mucho menor que la longitud de onda incidente. En caso contrario, como ya se mencionó anteriormente, no serían metamateriales sino *cristales fotónicos* caracterizados con un índice de refracción positivo.

Típicamente los metamateriales que se han construido hasta nuestros días presentan tanto ϵ como μ negativas en el rango de frecuencias de GHz [9], THz [11] y recientemente en la región óptica del espectro electromagnético [12, 13]. Los metamateriales prometen mejorar las propiedades de un gran número de dispositivos y sistemas en los campos de la electrónica, lentes, acopladores de microonda y antenas aleatorias, entre otros.

Recientemente se han reportado estudios sobre sistemas unidimensionales periódicos consistentes en placas dieléctricas intercaladas en placas metálicas, observándose en ciertas regiones del espectro electromagnético un comportamiento tipo metamaterial [15-17] caracterizado por un índice de refracción negativo. En la actualidad, existe el interés de estudiar sistemas unidimensionales periódicos consistentes en placas metálicas intercaladas con placas polaritónicas, y se ha mostrado que el efecto de un metamaterial con índice de refracción negativo también existe en este tipo de sistemas [17].

Los materiales polaritónicos son materiales que poseen resonancias típicamente en la región de los terahertz, comprendidos entre microondas (100 GHz) e infrarojo (10 THz) o en términos de longitud de onda desde 1 mm a 0.1 mm (o 100 micrómetros). Las resonancias en los materiales polaritónicos corresponden a resonancias fonón-fotón, es decir, al acoplamiento de una onda electromagnética con oscilaciones de la red cristalina del material [3]. La motivación para el estudio de sistemas metamateriales con inclusiones

polaritónicas (con resonancias en THz) radica en la amplia gama de aplicaciones, desde la medicina, telecomunicaciones, seguridad y hasta la astronomía. Estos sistemas metamateriales podrían sustituir materiales como metales o dieléctricos de alto índice de refracción, con el fin de manipular haces en la región del espectro electromagnético de los THz.

A continuación, en este Capítulo 1, se exponen los fundamentos de la teoría electromagnética para estudiar el fenómeno de la reflexión y la transmisión en una interfaz plana que separa dos medios dieléctricos, considerados homogéneos, lineales e isotrópicos. Imponiendo condiciones de frontera a la solución de las ecuaciones de Maxwell sobre la interfaz, se deducen los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión de Fresnel para ambas polarizaciones: cuando el campo eléctrico es paralelo y cuando es perpendicular al plano de incidencia (definido por un vector normal a la interfaz y el vector de onda de la radiación incidente). Así mismo, se calculan las fórmulas para la reflectancia (R) y transmitancia (T), y a modo de ejemplo se estudian R y T para una interfaz aire-vidrio y también vidrio-aire, analizando su interpretación física en cada caso.

En el capítulo 2 se proponen los modelos matemáticos para la obtención de la reflectancia y transmitancia para una placa de grosor fijo, semi-infinita y dieléctrica, así como su interpretación física. Otro aspecto a estudiar, es la deducción de los coeficientes de amplitud de Fresnel de reflexión y transmisión para polarización paralela y perpendicular en un sistema multicapa.

En el capítulo 3 se mencionan las propiedades físicas y químicas del bismuto como semi-metal, el cual será incorporado en el sistema multicapa. Así mismo, se exponen las aplicaciones actuales que tiene este mineral en la vida cotidiana, y sus potenciales aplicaciones que puede tener en sistemas ópticos como en espejos dicróicos y filtros. Como parte central de este trabajo, se analiza la reflectancia y transmitancia en función de la frecuencia de la radiación incidente, en sistemas multicapa conformados por placas semi-metálicas (bismuto) intercaladas con placas dieléctricas (vidrio), iluminadas a incidencia normal.

El capítulo 4 se dedica a las conclusiones de esta tesis, y en el apéndice se presentan resultados de la reflectancia y la transmitancia a incidencia oblicua de ondas electromagnéticas en sistemas multicapa.

1.2. Ecuaciones de Maxwell en medios dieléctricos

Como es bien conocido, las ecuaciones de Maxwell [18] son un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales parciales que describen por completo los fenómenos electromagnéticos:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

La Ec. (1.1) se conoce como la ley de inducción de Faraday, donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, y $\vec{B}$ es el campo de inducción magnético. La Ec. (1.2) se conoce como la ley de Gauss del campo eléctrico, donde ρ_{total} es la densidad de carga total y ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío. Esta ecuación es siempre válida, tanto para campos dinámicos como estáticos.

La Ec. (1.3) describe la no existencia de monopolos magnéticos y se conoce como la ley de Gauss magnética. La Ec. (1.4) es conocida como la ley de Ampère-Maxwell donde $\vec{H}$ es el campo magnético, y $\vec{J}_{libre}$ es la densidad de corriente eléctrica libre. Para el caso de un material isotrópico, homogéneo y lineal, el vector de desplazamiento eléctrico, denotado por $\vec{D}$, guarda una relación con $\vec{E}$ tal que $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, así como $\vec{B} = \mu\vec{H}$, ecuaciones que se conocen como relaciones constitutivas.

Una solución a las ecuaciones de Maxwell, (1.1)-(1.4) es una onda monocromática plana, requiriéndose que se cumpla la siguiente relación $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$. En el cuadro 1.1 se definen las propiedades de una onda plana y su notación.

Propiedad Física	Fórmula
Velocidad de propagación de una onda	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
Longitud de onda	$\lambda = \frac{v}{\nu}$
Periodo	$\tau = \frac{\lambda}{v}$
Frecuencia	$\nu = \frac{1}{\tau}$
Frecuencia angular	$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$
Número de onda	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Índice de refracción	$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$

Cuadro 1.1: Características de una onda plana.

1.3. Condiciones de frontera

Las fórmulas de Fresnel son un conjunto de 4 ecuaciones que relacionan las amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas (o transmitidas) en función de la amplitud de la onda incidente. Cuando una onda electromagnética que se desplaza por un medio incide sobre la interfaz con otro medio, una parte de la onda se refleja y otra porción se transmite al otro medio. Las fórmulas de Fresnel dan una descripción completa y detallada del comportamiento de la luz, tanto en la onda que se refleja como en la onda que se transmite al segundo medio.

Suponiendo que una onda plana monocromática incide en una superficie plana que separa dos medios isotrópicos y lineales, independientemente de la polarización de la onda, serán descompuestos sus campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en sus componentes paralelas y perpendiculares al plano de incidencia, y se tratarán estas componentes por separado. El plano de incidencia se define por un vector normal $\hat{u}_n$ a la interfaz y el vector de onda $\vec{k}_i$ de la onda incidente (plano de color azul en la Fig. 1.3).

1.3.1. Condiciones de frontera en una interfaz plana separando dos medios semi-infinitos

Cuando se habla de condiciones de frontera, se hace referencia al comportamiento que tienen las componentes tangenciales y normales del campo eléctrico y magnético en la superficie que separa dos medios diferentes (interfaz). Considerando el caso cuando una onda monocromática plana incide sobre un material dieléctrico semi-infinito, el campo eléctrico incidente $\vec{E}_i$ tiene la siguiente forma

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t), \quad (1.5)$$

donde $\vec{E}_{0i}$ es la amplitud del campo eléctrico incidente, $\vec{k}_i$ es el vector de onda incidente, $\vec{r}$ es el vector de posicionamiento, ω_i es la frecuencia angular de incidencia y t es el tiempo.

Se supondrá que $\vec{E}_{0i}$ es constante en el tiempo, es decir, que la onda es linealmente polarizada. Así como el origen en el tiempo es arbitrario, también lo es la posición del origen del sistema de referencia (ver Fig. 1.3).

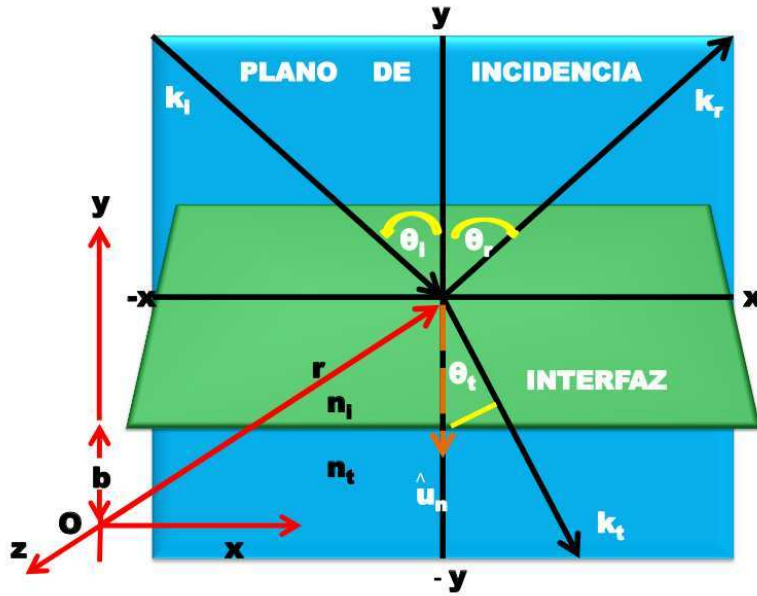


Figura 1.3: Esquema de un sistema de coordenadas entre dos medios dieléctricos.

Por lo tanto, sin hacer suposiciones acerca de sus direcciones, frecuencias, longitudes de onda, fases o amplitudes, podemos escribir las ondas reflejadas y transmitidas de los

campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de la siguiente forma:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r), \quad (1.6)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t), \quad (1.7)$$

$$\vec{B}_i = \vec{B}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t), \quad (1.8)$$

$$\vec{B}_r = \vec{B}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r), \quad (1.9)$$

$$\vec{B}_t = \vec{B}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t), \quad (1.10)$$

donde $\vec{E}_{0r}$ y $\vec{E}_{0t}$ son las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en las ecuaciones (1.6) y (1.7), ω_i , ω_r y ω_t son las frecuencias angulares de los campos (1.6)-(1.10), las cuales son constantes en el tiempo t , y $\vec{r}$ es el vector de posicionamiento. En estas ecuaciones ε_r y ε_t son constantes de fase relativas a $\vec{E}_i$, la cual se introducen debido a que la posición del origen no es única. De manera análoga, B_{0i} , B_{0r} y B_{0t} corresponden a las amplitudes para las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas del campo magnético, respectivamente.

El ángulo de incidencia se denota como θ_i , el ángulo de reflexión por θ_r y el de transmisión como θ_t , los cuales son los ángulos que forman los vectores de propagación $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ y $\vec{k}_t$ de las ondas incidente, reflejada y transmitida con la normal a la superficie de separación entre los dos medios dieléctricos a la interfaz (ver Fig. 1.3).

Los campos electromagnéticos en presencia de una interfaz deben satisfacer ciertas condiciones, denominadas condiciones de contorno o de frontera. Estas condiciones consisten en que la componente tangencial de ambos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ a la interfaz, deben ser continuas a través de ella. Dicho de otra forma, las componentes tangenciales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de un lado de la interfaz, tendrán que ser iguales a las componentes tangenciales de los campos del otro lado de la misma. En el caso de los campos eléctricos $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ y $\vec{E}_t$ sobre la interfaz, la condición de contorno se puede escribir de la siguiente manera

$$\hat{u}_n \times \vec{E}_i + \hat{u}_n \times \vec{E}_r = \hat{u}_n \times \vec{E}_t, \quad (1.11)$$

donde $\hat{u}_n$ es un vector unitario perpendicular a la interfaz. Susutituyendo las Ecs.(1.5)-(1.7) en la Ec.(1.11) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{u}_n \times \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) + \hat{u}_n \times \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \\ = \hat{u}_n \times \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Esta relación se debe mantener en cualquier instante de tiempo y en todo punto de la interfaz, localizado en $y = b$ (ver Fig. 1.3). Consecuentemente los campos $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ y $\vec{E}_t$ deben tener la misma dependencia funcional de las variables t y r , lo cual quiere decir que

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)|_{y=b} = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r)|_{y=b} = (\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t)|_{y=b}. \quad (1.13)$$

Esta expresión indica que la ecuación (1.12) es independiente de t y r . Como esto debe ser cierto para todos los valores del tiempo, los coeficientes de t deben ser iguales, obteniéndose

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t. \quad (1.14)$$

Suponiendo que los electrones dentro del medio están sujetos a vibraciones forzadas (lineales) a la frecuencia de la onda incidente, por lo que cualquier luz que sea dispersada tendrá la misma frecuencia. Entonces

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{r})|_{y=b} = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varepsilon_r)|_{y=b} = (\vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varepsilon_t)|_{y=b}, \quad (1.15)$$

donde $\vec{r}$ termina en la interfaz (ver Fig. 1.3). Los valores de ε_r y ε_t corresponden a una determinada posición del origen, O , y por lo tanto permite que la relación sea válida independientemente de esa ubicación. Hasta este punto del análisis sobre la incidencia de ondas planas sobre una interfaz plana dividiendo dos medios dieléctricos, no se ha especificado la polarización de la onda electromagnética incidente. A continuación se consideran los dos casos de polarización: cuando el campo eléctrico es perpendicular y paralelo al plano de incidencia.

1.3.2. Condiciones de frontera para el caso de polarización perpendicular

A continuación se trata el caso cuando el campo $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia. Para esto nuevamente se partirá de la Ec. (1.11), en la cual se sustituyen las ecuaciones (1.5)-(1.7) y considerando que en esta ecuación los cosenos se anularán, se obtiene la siguiente ecuación

$$\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}. \quad (1.16)$$

Por otro lado, mientras que $\vec{E}_r$ y $\vec{E}_t$ deben ser normales al plano de incidencia por simetría, se está suponiendo que apuntan en la misma dirección que $\vec{E}_i$ (ver Fig. 1.4).

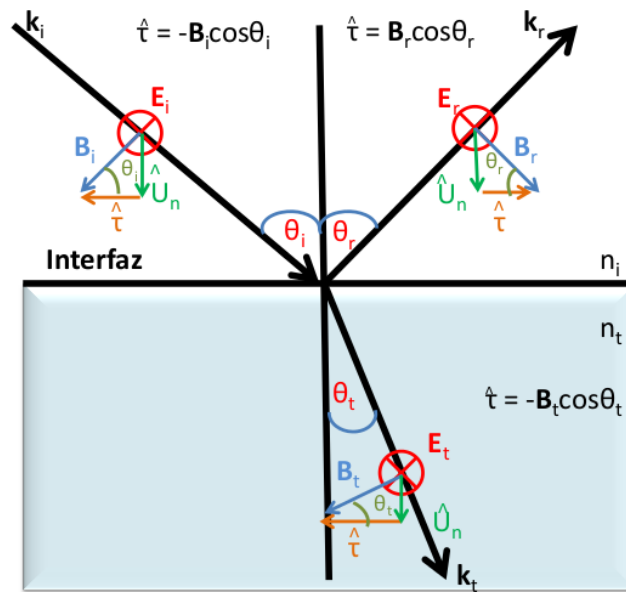


Figura 1.4: Esquema de la reflexión y transmisión en una interfaz plana para el caso cuando $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia.

Las direcciones de los campos $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ y $\vec{B}_t$ se obtienen a partir de la ley de inducción de Faraday $\hat{k} \times \vec{E} = v\vec{B}$, sustituyendo las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.7). Dado que el campo $\vec{B}$ es paralelo al plano de incidencia, tiene una componente perpendicular y otra tangencial a la interfaz. La componente normal de $\vec{B}$ es continua, al igual que la componente tangencial de $\mu^{-1}\vec{B}$. El efecto magnético de los medios aparece aquí a través de sus permeabilidades μ_i y μ_t . Descomponiendo los campos $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ y $\vec{B}_t$ en sus componentes normal y tangencial (empleando $\hat{u}_n$ y $\hat{\tau}$ respectivamente, siendo éste último un vector paralelo a la interfaz como se puede observar en la Fig. 1.4), y aplicando la continuidad de las componentes tangenciales a estos vectores, se tiene:

$$-\frac{\vec{B}_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{\vec{B}_r}{\mu_r} \cos \theta_r = -\frac{\vec{B}_t}{\mu_t} \cos \theta_t, \quad (1.17)$$

donde ambos lados de la igualdad representan las magnitudes totales de $\vec{B}/\mu$ paralelas a la interfaz en el medio incidente y en el transmitido, respectivamente.

1.3.3. Condiciones de frontera para el caso de polarización paralela

El otro caso de interés es cuando el campo $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia (ver Fig. 1.5), por lo cual el campo eléctrico tendrá una componente paralela y otra perpendicular a la interfaz. Imponiendo la continuidad de la componente paralela del campo $\vec{E}$, se debe cumplir que:

$$-\vec{E}_{0i} \cos \theta_i + \vec{E}_{0r} \cos \theta_r = -\vec{E}_{0t} \cos \theta_t. \quad (1.18)$$

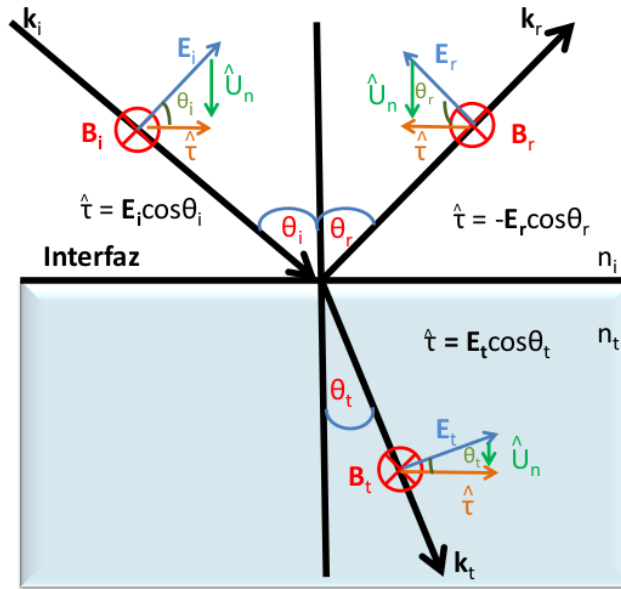


Figura 1.5: Esquema de la reflexión y transmisión en una interfaz plana para el caso cuando $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia.

Imponiendo la continuidad de las componentes tangenciales para el campo magnético $\vec{B}_{0i}/\mu_i$, $\vec{B}_{0r}/\mu_r$ y $\vec{B}_{0t}/\mu_t$ se tiene que

$$\frac{\vec{B}_{0i}}{\mu_i} + \frac{\vec{B}_{0r}}{\mu_r} = \frac{\vec{B}_{0t}}{\mu_t}. \quad (1.19)$$

1.3.4. Ley de Snell para reflexión y refracción de ondas planas

Ahora podemos abordar el problema general sobre incidencia de ondas planas en medios dieléctricos separados por una interfaz plana de forma sistemática, partiendo de las siguientes suposiciones:

- Los medios dieléctricos que se consideran son lineales, isotrópicos y homogéneos. En el caso de materiales semi-metálicos (por ejemplo el bismuto), también se supone que tiene las mismas propiedades anteriormente mencionadas.
- No hay aportación externa de cargas libres, por lo que sólo pueden aparecer distribuciones de carga y corriente de portadores ligados al medio.
- Como resultado de la interacción entre la onda plana incidente y las cargas ligadas al medio de la región II (ver Fig. 1.6), se formará una onda reflejada, dirigida hacia la región I, y una onda transmitida dirigida hacia el interior de la región II.
- La polarización de las ondas descritas por las Ecs. (1.5)-(1.10) afecta la reflexión y la transmisión a través de la interfaz.

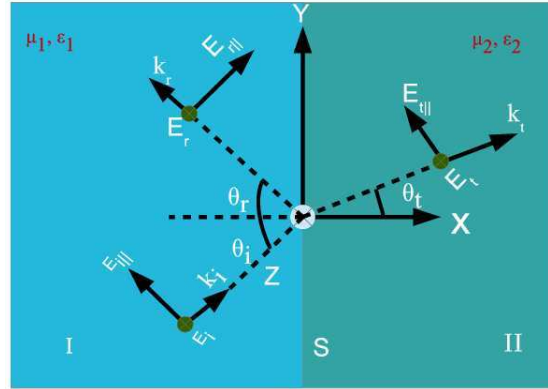


Figura 1.6: Incidencia oblicua de una onda plana sobre un medio dieléctrico.

Cuando una onda electromagnética incide en forma oblicua, cualquier dieléctrico cumple las condiciones de contorno en la superficie del material. Las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada deberán estar contenidas necesariamente en un mismo plano, perpendicular a la superficie (nombrado como plano de incidencia anteriormente). Esta propiedad es conocida como ley de Snell [ver Ec. (1.25)] y se cumple independientemente de si el medio que constituye la región II es un conductor o un dieléctrico (ver Fig. 1.6).

Retomando los dos primeros términos de la Ec. (1.15), se obtiene

$$[(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}]|_{y=b} = \varepsilon_r. \quad (1.20)$$

Puesto que la ecuación $\vec{k} \cdot \vec{r} = a$ establece que la punta del vector $\vec{r}$ barre todo punto sobre el plano (que es la interfaz), el cual es perpendicular al vector $\vec{k}$ (que es análogo al vector $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ en este caso). Sin embargo, la onda incidente y la reflejada están en el mismo medio, por tanto $\vec{k}_i = \vec{k}_r$. De esta forma $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ no tiene componente en el plano de la interfaz, es decir, $\hat{u}_n \times (\vec{k}_i - \vec{k}_r) = 0$, de lo cual se concluye que

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r, \quad (1.21)$$

partiendo de esto se obtiene la *ley de la reflexión*, es decir (ver Fig. 1.6)

$$\theta_i = \theta_r. \quad (1.22)$$

De manera similar, ya que $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ es paralelo a $\hat{u}_n$ (recordando que $\hat{u}_n$ es un vector normal a la interfaz), los tres vectores $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ y $\hat{u}_n$ se encuentran en el plano de incidencia. Nuevamente utilizando la Ec. (1.15) obtenemos

$$[(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}]_{y=b} = \varepsilon_r, \quad (1.23)$$

de tal manera que $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ es también normal a la interfaz. Se obtiene entonces que $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$, $\vec{k}_t$ y $\hat{u}_n$ son coplanares, y tal como se realizó anteriormente en la deducción de la Ec. (1.21), las componentes tangenciales de $\vec{k}_i$ y $\vec{k}_t$ deben ser iguales y por tanto

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t. \quad (1.24)$$

Pero como $\omega_i = \omega_t$, utilizando la siguiente relación $k_i = n_i(\omega_i/c)$, se tiene

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t, \quad (1.25)$$

que se conoce como. *Ley de Snell*.

1.4. Deducción de las fórmulas de Fresnel

En la sección anterior, se encontraron las relaciones que existen entre las fases de $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$, $\vec{E}_r(\vec{r}, t)$ y $\vec{E}_t(\vec{r}, t)$ en la interfaz que separa dos medios materiales. Hay una interdependencia compartida por las amplitudes $\vec{E}_{0i}$, $\vec{E}_{0r}$ y $\vec{E}_{0t}$ que ahora se puede calcular. Para esto, se debe suponer que una onda plana monocromática incide en una superficie plana que separa dos medios isótropicos, lineales y homogéneos. Independientemente de la polarización de la onda, se descomponen sus campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en componentes paralelas y perpendiculares al plano de incidencia, y a continuación serán tratadas por separado.

1.4.1. Caso 1: $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

A continuación serán empleadas las condiciones de frontera entre dos medios dieléctricos, dadas por las ecuaciones (1.16) y (1.17)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} &= \vec{E}_{0t}, \\ -\frac{\vec{B}_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{\vec{B}_r}{\mu_r} \cos \theta_r &= -\frac{\vec{B}_t}{\mu_t} \cos \theta_t, \end{aligned}$$

con la finalidad de deducir las fórmulas de los coeficientes de amplitud de Fresnel. Supongamos que $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia y que $\vec{B}$ es paralelo al mismo plano, como se muestra en la Fig. 1.4. Sustituyendo las Ecs (1.5) a (1.10) en las Ecs. (1.1) y (1.2), y simplificando términos se obtiene que:

$$\hat{k} \times \vec{E} = v\vec{B}, \quad (1.26)$$

$$\hat{k} \cdot \vec{E} = 0.$$

Sustituyendo los campos $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$, $\vec{B}_t$, $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ y $\vec{E}_t$ en la ecuación (1.26) y obteniendo sus magnitudes, se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$B_i = E_i/v_i, \quad (1.27)$$

$$B_r = E_r/v_r, \quad (1.28)$$

$$B_t = E_t/v_t, \quad (1.29)$$

y, dado que $v_i = v_r$ y $\theta_i = \theta_r$, sustituyendo las Ecs. (1.27) a (1.29) en la Ec. (1.17) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{\mu_i v_i} (E_i - E_r) \cos \theta_i = \frac{1}{\mu_t v_t} E_t \cos \theta_t.$$

Haciendo uso de las relaciones $n_i = \frac{c}{v_i}$, $n_t = \frac{c}{v_t}$, por lo que $\frac{1}{v_i} = \frac{n_i}{c}$, $\frac{1}{v_t} = \frac{n_t}{c}$ respectivamente, y recordando las Ecs. (1-5)-(1-7) donde aparecen los cosenos, los cuales son iguales entre sí en la interfaz, al simplificar estos términos se obtiene:

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t} \cos \theta_t. \quad (1.30)$$

Sustituyendo la condición de frontera (1.16) en esta última ecuación, y despejando E_{0r} se obtiene

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}. \quad (1.31)$$

Empleando nuevamente la condición de frontera (1.16), pero esta vez se despeja E_{0t} de esta ecuación, sustituyendo el resultado en la Ec. (1.30) y simplificando términos con la finalidad de obtener el cociente $\frac{E_{0t}}{E_{0i}}$, se tiene que

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}. \quad (1.32)$$

El subíndice $\perp$ denota que se trata del caso cuando $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia. Estas dos Ecs. (1.31) y (1.32), son las denominadas **fórmulas de Fresnel**. Es frecuente tratar con medios dieléctricos para los cuales $\mu_i \approx \mu_t \approx \mu_0$; en consecuencia la forma más común de estas ecuaciones es:

$$r_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (1.33)$$

$$t_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (1.34)$$

donde $r_{\perp}$ es el coeficiente de amplitud de reflexión, mientras que $t_{\perp}$ representa el coeficiente de amplitud de transmisión.

1.4.2. Caso 2: $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia.

Nuevamente serán empleadas las condiciones de frontera entre dos medios dieléctricos, que para el caso con polarización paralela están dadas por las Ecs. (1.18) y (1.19), con la finalidad de deducir las fórmulas de los coeficientes de amplitud de Fresnel. Cuando el campo eléctrico $\vec{E}_i$ está en el plano de incidencia tal y como se muestra en la Fig. 1.5, la continuidad de las componentes tangenciales de $\vec{E}$ y $\vec{B}/\mu$ en ambos lados de la frontera son las siguientes:

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t,$$

$$\frac{1}{\mu_i v_i} E_{0i} + \frac{1}{\mu_r v_r} E_{0r} = \frac{1}{\mu_t v_t} E_{0t},$$

respectivamente, donde han sido empleadas las Ecs. (1.27)-(1.29), $\mu_i = \mu_r \approx \mu_t \approx \mu_0$ y $\theta_i = \theta_r$. Mediante un procedimiento análogo al empleado para deducir las Ecs. (1.33) y (1.34), podemos combinar estas fórmulas para obtener dos nuevas **fórmulas de Fresnel**:

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}, \quad (1.35)$$

y

$$t_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}, \quad (1.36)$$

donde $r_{\parallel}$ y $t_{\parallel}$ son los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión de Fresnel en polarización paralela.

1.5. Interpretación física de las fórmulas de Fresnel

En la Fig. 1.7, se grafican las fórmulas de Fresnel para ambas polarizaciones, en función del ángulo de incidencia, para el caso de una onda plana electromagnética viajando del aire hacia vidrio (caracterizado por un índice de refracción igual a 1.5).

Un resultado que es fácil de recordar para el caso de una interfaz aire ($n_i = 1$) y vidrio ($n_t = 1.5$), cercanos al caso de incidencia normal, los coeficientes de amplitud de reflexión son iguales a ∓ 0.2 .

Cuando $n_t > n_i$ se deduce de la Ley de Snell que $\theta_i > \theta_t$, y así $r_{\perp}$ es negativa para todos los valores de θ_i (ver Fig. 1.7). Por el contrario, $r_{\parallel}$ comienza siendo positiva en $\theta_i = 0$ y decrece gradualmente hasta que se anula cuando $(\theta_i + \theta_t) = (\pi/2)$, ya que $\tan(\pi/2)$ es infinita. El valor particular del ángulo de incidencia para el cual esto ocurre se denota por θ_p , y se conoce como ángulo de polarización. A este ángulo de incidencia ya no existe reflexión en el material, y todo el haz incidente se va a transmitir sobre la interfaz del material.

El caso considerado en la Fig. 1.7 corresponde al de **reflexión externa**, es decir $n_t > n_i$. La situación contraria es la **reflexión interna**, en la cual el medio incidente posee un índice de refracción mayor ($n_i > n_t$) que el medio de transmisión. En la Fig. 1.8, se muestra que para $r_{\parallel}$ existe el ángulo de polarización (cuando $r_{\parallel}$ se anula). Es importante mencionar que a partir de un ángulo de incidencia 41.81° hasta un ángulo de 90° , ocurre que los coeficientes de amplitud de reflexión para ambas polarizaciones ($r_{\parallel}$ y $r_{\perp}$) alcanzan la unidad. A esto se le conoce como reflexión total interna, y el ángulo a partir del cual sucede se le nombra como ángulo crítico:

$$\theta_c = \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \quad (1.37)$$

de modo que para ángulos mayores que el ángulo crítico no habrá transmisión y todo el haz incidente se reflejará sobre la interfaz.

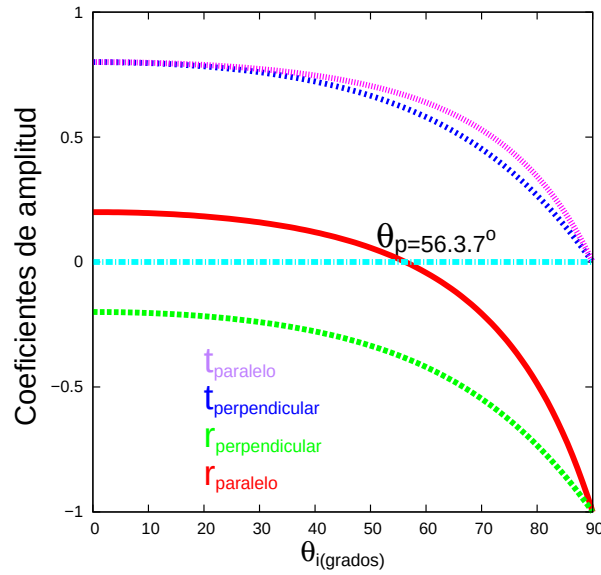


Figura 1.7: Coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión como función del ángulo de incidencia, correspondientes a reflexión externa $n_t > n_i$ en una interfaz aire-vidrio ($n_{ti}=1.5$).

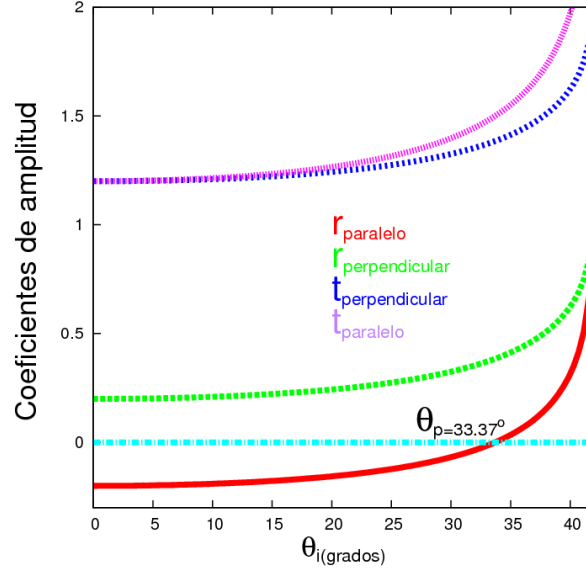


Figura 1.8: Coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión como función del ángulo de incidencia, correspondientes a reflexión interna $n_t < n_i$ en una interfaz vidrio-aire ($n_{ti} = 1/1.5$).

En el cuadro 1.2 se muestra un resumen de las características encontradas en las gráficas Figs. 1.7 y 1.8, correspondientes a las fórmulas de Fresnel.

Campos	Reflexión Externa	Reflexión Interna
	$n_i > n_t$	$n_i < n_t$
$\vec{E}_{ }$	θ_p	θ_p, θ_c
$\vec{E}_{\perp}$	–	θ_c

Cuadro 1.2: Existencia de ángulo de polarización y ángulo crítico para diferentes escenarios.

1.6. Reflectancia, transmitancia, y su interpretación física

La potencia por unidad de área que cruza una superficie en el vacío cuya normal es paralela al vector de Poynting $\vec{S}$, se define como

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}. \quad (1.38)$$

Además, la densidad de flujo radiante (W/m^2) o irradiancia es entonces

$$I = \langle S \rangle_{\tau} = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2, \quad (1.39)$$

donde $\langle S \rangle_{\tau}$ es el promedio temporal del vector de Poynting tomado sobre un período τ , dado por

$$\langle S \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} s(t') dt'$$

donde $\tau = 2\pi/\omega$ y t' es una variable muda.

El caso que se considera ahora es cuando las irradiancias I_i , I_r y I_t son las densidades de flujo incidente, reflejado y transmitido respectivamente, como se muestra en la Fig. 1.9; por lo que las áreas transversales de los rayos incidentes, reflejados y transmitidos serán respectivamente: $A \cos \theta_i$, $A \cos \theta_r$ y $A \cos \theta_t$, donde la porción de energía incidente, reflejada y transmitida es $I_i \cos \theta_i$, $I_r \cos \theta_r$ y $I_t \cos \theta_t$ respectivamente, las cuales son las energías por segundo que salen de un área unitaria en la frontera en cada lado. Ésta es la energía por unidad de tiempo que fluye en el rayo incidente y por consiguiente la potencia que llega a la superficie A . Se define la **reflectancia** R como la razón entre el flujo (o potencia) reflejado y el flujo incidente, es decir,

$$R \equiv \frac{I_r \cos \theta_r}{I_i \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i}. \quad (1.40)$$

Sustituyendo las Ecs. (1.5)-(1.10) en la ecuación (1.38), se pueden obtener los vectores de Poynting para la onda incidente $\vec{S}_i$, reflejada $\vec{S}_r$ y transmitida $\vec{S}_t$. Empleando estos vectores en la ecuación para la irradiancia (1.39), es posible calcular las irradiancias I_i , I_r e I_t . Así que el cociente:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{(v_r \epsilon_r E_{0r}^2/2)}{(v_i \epsilon_i E_{0i}^2/2)}$$

y dado que las ondas reflejadas e incidentes están en el mismo medio $v_r = v_i$, $\epsilon_r = \epsilon_i$. Sustituyendo todos los anteriores términos en la Ec. (1.40) se obtiene

$$R \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2. \quad (1.41)$$

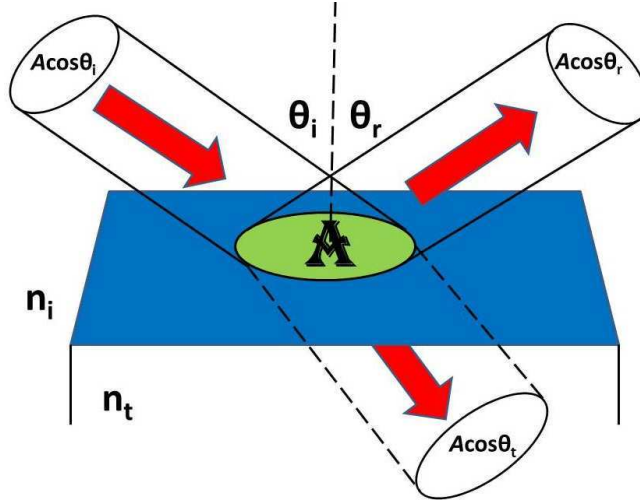


Figura 1.9: Reflexión y transmisión de un haz incidente, al atravesar una interfaz que separa dos medios dieléctricos diferentes.

Del mismo modo, la **transmitancia** T se define como el cociente entre el flujo transmitido y el flujo incidente, y está dada por

$$T \equiv \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i}. \quad (1.42)$$

En forma semejante como se obtiene la Ec. (1.41), y haciendo uso de $I_t/I_i = (v_t \epsilon_t E_{0t}^2/2) / (v_i \epsilon_i E_{0i}^2/2)$, $\mu_i = \mu_t = \mu_0$, y sustituyendo estas condiciones en (1.42), se obtiene la siguiente ecuación

$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) t^2, \quad (1.43)$$

donde fue empleado el hecho de que $\mu_t \epsilon_t = 1/v_t^2$ y $\mu_t v_t \epsilon_t = n_t/c$, relaciones que pueden ser obtenidas de las definiciones del índice de refracción n y velocidad de una onda v (ver cuadro 1.1). Dado que $R=r^2$, no debemos preocuparnos por el signo de r en ninguna formulación en concreto, lo cual convierte la reflectancia en un concepto general. Obsérvese que t no es simplemente igual a t^2 , por dos razones. La primera, el cociente entre los índices de refracción debe de estar presente, ya que las velocidades a las que se transporta la energía a un lado y al otro de la interfaz son diferentes. La segunda, las áreas transversales de los haces incidente y transmitido son diferentes, lo que se ve reflejado en la presencia del cociente de los términos coseno. La energía total que llega al área A por unidad de tiempo debe ser igual a la energía que fluye hacia fuera de ella por unidad de tiempo.

Considerando los dos casos posibles de polarización de incidencia de una onda plana sobre una interfaz plana, a partir de las ecs. (1.33) a (1.36) se puede escribir que:

$$R_{\perp} = r_{\perp}^2, \quad (1.44)$$

$$R_{\parallel} = r_{\parallel}^2, \quad (1.45)$$

$$T_{\perp} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) t_{\perp}^2, \quad (1.46)$$

$$T_{\parallel} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) t_{\parallel}^2. \quad (1.47)$$

En la Fig. 1.10 se grafican tanto la reflectancia como la transmitancia en función del ángulo de incidencia para el caso cuando se tiene polarización paralela al plano de incidencia (Fig. 1.10a), y polarización perpendicular al plano de incidencia (Fig. 1.10b), en la configuración de reflexión externa en una interfaz aire-vidrio. Una característica significativa común a todas las gráficas es que ambas curvas $R_{\parallel}$ y $R_{\perp}$ se aproximan a la unidad cuando $\theta_i \rightarrow \pi/2$. Esto implica que prácticamente cualquier interfaz se comportará como un espejo a incidencia rasante. Así mismo, se observa en el caso de polarización paralela al plano de incidencia, que cuando el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de polarización, la reflectancia (curva roja en la Fig. 1.10a) se anula, mientras que la transmitancia alcanza la unidad (curva verde en la Fig. 1.10a). Para el caso de polarización perpendicular al plano de incidencia, la curva de la reflectancia crece monótonamente desde 4 % hasta alcanzar a la unidad (ver curva roja en la Fig. 1.10b), y de manera similar la curva de la transmitancia disminuye monótonamente a cero (curva verde en la Fig. 1.10b). Esto se debe a que, cuando no hay fenómenos de absorción, la suma directa de la reflectancia y la transmitancia siempre dan igual a la unidad.

En la Fig. 1.11 y se muestran las gráficas de la reflectancia y la transmitancia, pero ahora para el caso de reflexión interna, en una interfaz vidrio-aire. La Fig. 1.11a muestra la reflectancia y transmitancia para el caso cuando la polarización es paralela al plano de incidencia. En este caso se observa la presencia de un ángulo de polarización y un ángulo crítico, cuyo valor es de $\theta_c = 41.81^\circ$. A partir de $\theta_i = \theta_c$ la reflectancia alcanza la unidad, de tal manera que toda la luz se refleja sobre la interfaz y no hay transmisión. En la Fig. 1.11b se ilustra ahora la reflectancia y transmitancia cuando la polarización es perpendicular al plano de incidencia. Para este caso la reflectancia y transmitancia presenta sólo un ángulo crítico con el mismo valor $\theta_c = 41.81^\circ$. Nuevamente, a partir de este ángulo todo se refleja y nada se transmite.

Para finalizar esta sección, es importante mencionar que la ley de la conservación de la energía sobre la interfaz entre dos medios dieléctricos semi-infinitos se cumple. Esto se debe a que la energía total que llega al área A debe de ser igual a la energía que fluye fuera de ella, esto es

$$I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t. \quad (1.48)$$

Nuevamente, puesto que $I_r = (v_r \epsilon_r E_{0r}^2/2)$, $I_i = (v_i \epsilon_i E_{0i}^2/2)$ y $I_t = (v_t \epsilon_t E_{0t}^2/2)$, multiplicando ambos lados de la Ec. (1.48) por c , y tomando en cuenta que $n_i = c\sqrt{\epsilon_i}$, $n_r = c\sqrt{\epsilon_r}$ y $n_t = c\sqrt{\epsilon_t}$, se puede mostrar que

$$n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i = n_r E_{0r}^2 \cos \theta_r + n_t E_{0t}^2 \cos \theta_t, \quad (1.49)$$

y dividiendo la Ec. (1.49) por el término $n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i$

$$1 = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 + \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2, \quad (1.50)$$

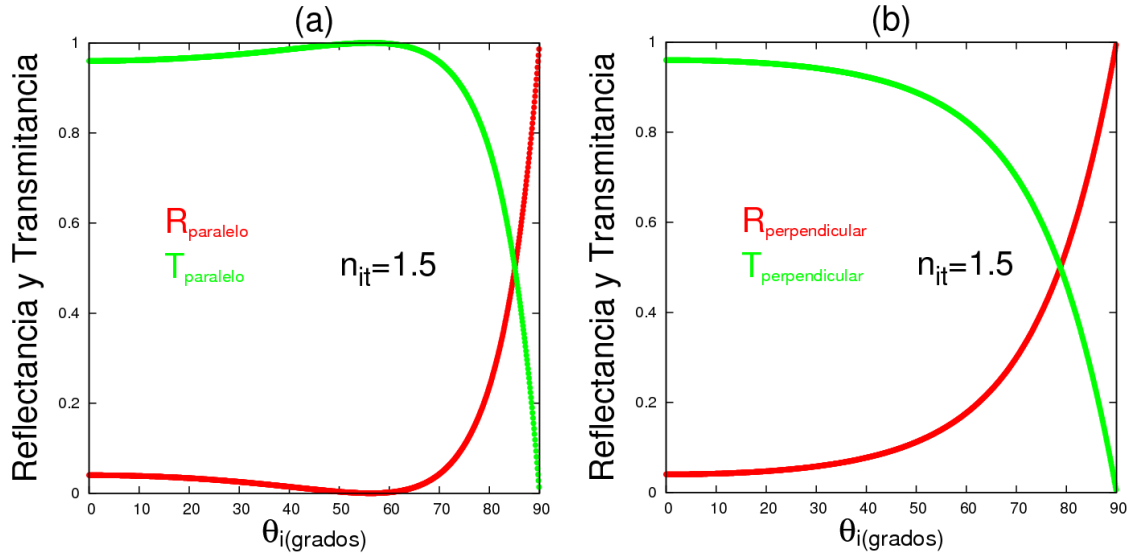


Figura 1.10: Reflectancia y transmitancia para ambas polarizaciones: (a) polarización paralela y (b) polarización perpendicular, considerando reflexión externa en función del ángulo de incidencia para una interfaz aire-vidrio $n_{ti} = 1.5$.

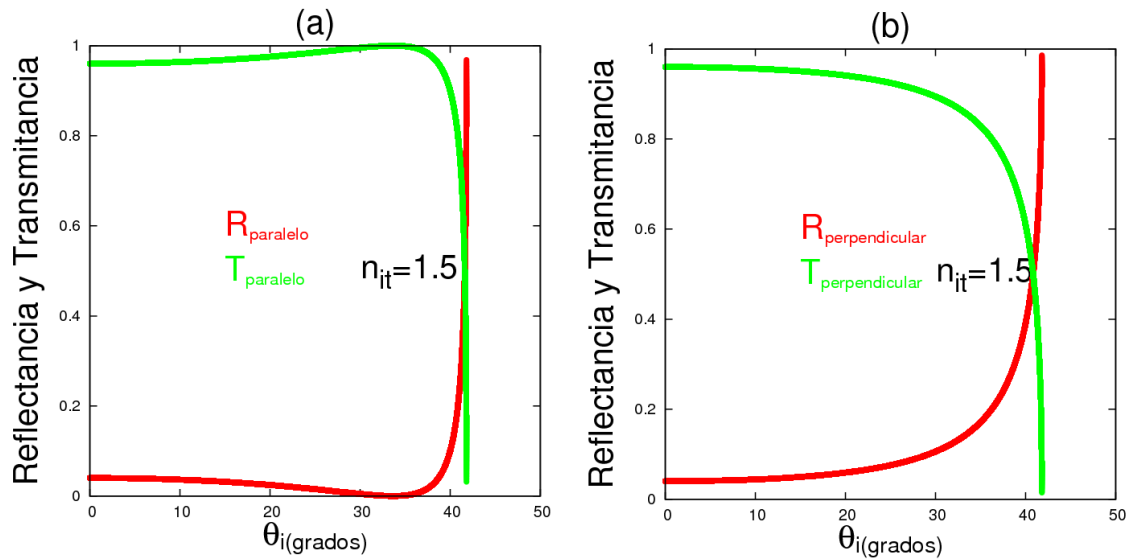


Figura 1.11: Reflectancia y transmitancia para ambas polarizaciones: (a) polarización paralela y (b) polarización perpendicular, considerando reflexión interna en función del ángulo de incidencia para una interfaz vidrio-aire $n_{it} = 1.5$.

sustituyendo la ecuación (1.42) y (1.41) en (1.50) nos queda de la siguiente forma

$$R + T = 1,$$

donde no hay presencia de absorción.

Capítulo 2

Estudio de la Reflexión y la Transmisión en un sistema de una capa y multicapas

2.1. Deducción general de las ecuaciones para la reflectancia y la transmitancia de una capa

Para el estudio de la reflexión y la transmisión de una onda plana monocromática en una capa o placa, se tendrán que deducir expresiones para la Reflectancia y Transmitancia en analogía a las presentadas en el capítulo anterior [ver Ecs. (1.33), (1.34), (1.35) y (1.36)]. Se supondrá que el medio que rodea a la placa es no absorbente y que $n_1 = n_2 = 1$, donde n_1 y n_2 son los índices de refracción a ambos lados de la placa (ver Fig. 2.1). Los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión para ambos tipos de polarización (paralela y perpendicular), serán representados por $r_{\perp}$ y $r_{\parallel}$, y por $t_{\perp}$ y $t_{\parallel}$, respectivamente. En la Fig. 2.1, el campo eléctrico denotado por las flechas negras, puede estar en posición perpendicular al plano de incidencia como en la Fig. 1.4, o bien puede ser paralelo como en la Fig. 1.5. La dirección de propagación de la onda plana puede ser representada como un rayo, que es una línea perpendicular a los frentes de onda, y por lo tanto, también es perpendicular a los campos eléctricos $\vec{E}_{1r}$, $\vec{E}_{2r}$, etc. Puesto que los rayos reflejados y transmitidos dentro y fuera de la placa permanecen casi paralelos (como se muestra en la Fig. 2.1), las amplitudes escalares de las ondas reflejadas $\vec{E}_{1r}$, $\vec{E}_{2r}$, $\vec{E}_{3r}$, ..., son respectivamente $E_0 r$, $E_0 t r' t'$, $E_0 t' r'^3 t'$, ...; y en forma similar, las ondas transmitidas $\vec{E}_{1t}$, $\vec{E}_{2t}$, $\vec{E}_{3t}$, tendrán amplitudes $E_0 t t'$, $E_0 t r'^2 t'$, $E_0 t' r'^4 t'$, ..., donde E_0 es la amplitud de la onda inicial incidente, r y t son las fracciones de amplitud reflejada y transmitida de la onda inicial respectivamente, mientras que r' es la fracción de amplitud de la onda reflejada internamente en la placa y t' es la fracción de amplitud de la onda transmitida del interior de la placa hacia fuera. Aquí se asume que el conjunto de rayos reflejados son paralelos, donde cada rayo posee su propia relación fija de fase con respecto a los otros rayos reflejados. Las diferencias de fase surgen como una combinación de diferencias en el camino óptico y cambios en la fase debido a las variaciones múltiples de las reflexiones. La diferencia de camino óptico se denotará por Λ , y está dada por:

$$\Lambda = 2n_f d \cos \theta_t. \quad (2.1)$$

con n_f el índice de refracción de la placa, d su espesor y θ_t el ángulo de transmisión cuando sale de la placa.

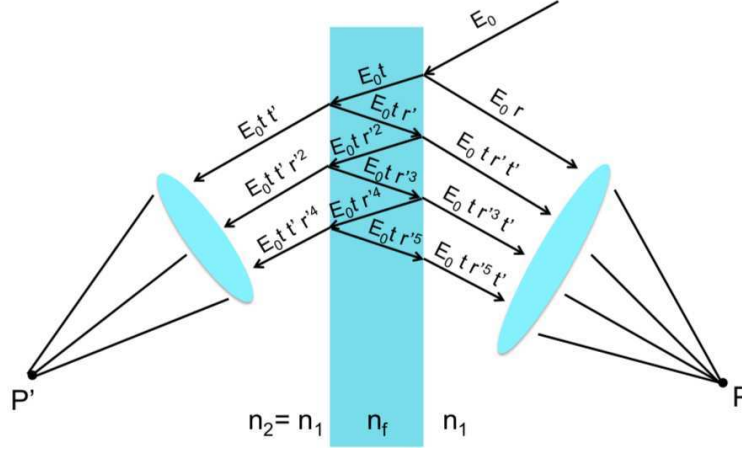


Figura 2.1: Interferencia de haces múltiples en una placa delgada.

Todas las ondas reflejadas excepto la primera $\vec{E}_{1r}$ sufren un número impar de reflexiones dentro de la placa, de donde se deduce que para cada reflexión interna la componente del campo paralela al plano de incidencia cambia de fase, ya sea en π o 0 dependiendo el ángulo interno incidente, $\theta_i < \theta_c$. La componente del campo perpendicular al plano de incidencia no sufre cambio en la fase para la reflexión interna cuando $\theta_i < \theta_c$. Entonces, no existe cambio de fase relativo entre las ondas resultantes de un número impar de reflexiones (ver Fig. 2.1).

Una herramienta importante que se emplea para el estudio de la reflexión y transmisión de las ondas planas, es el tratamiento de Stokes del principio de reversibilidad. Este principio afirma que en ausencia de absorción, un rayo de luz que se refleja o refracta puede ser imaginado como si regresara sobre su trayectoria original cuando su dirección se invierte. Suponiendo que se tiene una onda incidente de amplitud $\vec{E}_{0i}$, en una interfaz plana que separa dos medios dieléctricos como se muestra en la Fig. 2.2a, donde r y t son los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión, respectivamente, con $n_i = n_1$ y $n_t = n_2$. En la Fig. 2.2b se ilustra la situación contraria en donde se invierten todas las direcciones de los rayos. En la Fig. 2.2c se muestran todos los rayos al considerar ambos rayos dirigidos a la interfaz: $E_{0i}r$ y $E_{0i}t$. Una porción de la onda con amplitud $E_{0i}t$ se refracta y se transmite en la interfaz plana. Consecuentemente la porción reflejada es $(E_{0i}t)r'$, mientras que la transmitida es $(E_{0i}t)t'$, donde r' y t' son nuevamente los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión internos. Similarmente la onda con amplitud $E_{0i}r$ se divide en segmentos de amplitud $(E_{0i}r)r$ y $(E_{0i}r)t$. Si la configuración de la Fig. 2.2c es equivalente a la de la Fig. 2.2b se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$E_{0i}tt' + E_{0i}rr = E_{0i}, \quad (2.2)$$

y

$$E_{0i}rt + E_{0i}tr' = 0. \quad (2.3)$$

Factorizando la amplitud del campo incidente E_{0i} en la ecuación (2.2), y despejando tt' de la misma ecuación se obtiene lo siguiente:

$$tt' = 1 - r^2. \quad (2.4)$$

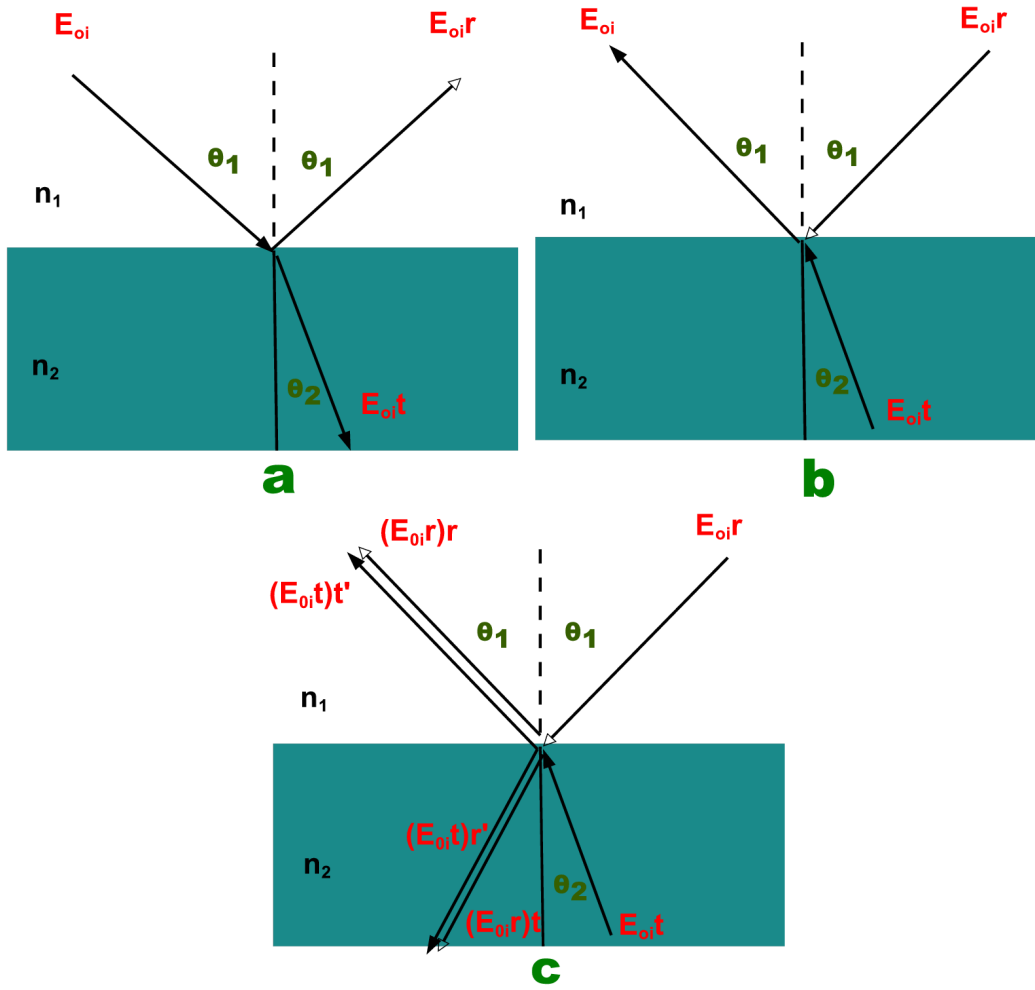


Figura 2.2: Reflexión y refracción por medio del tratamiento de Stokes.

Mientras que factorizando de la ecuación (2.3) E_{oi} y t , despejando r' se tiene la siguiente ecuación:

$$r' = -r. \quad (2.5)$$

Estas dos últimas ecuaciones se conocen como relaciones de Stokes. Los coeficientes de amplitud son funciones del ángulo de incidencia y por lo tanto de manera general las relaciones de Stokes deben ser escritas como

$$t(\theta_1)t'(\theta_2) = 1 - r^2(\theta_1), \quad (2.6)$$

y

$$r'(\theta_2) = -r(\theta_1), \quad (2.7)$$

donde los ángulos de incidencia y de transmisión están relacionados por $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. La ecuación (2.7) indica, por medio de un signo menos, que hay una diferencia de fase de 180° entre las ondas reflejadas internas y externas.

Los campos ópticos de las ondas reflejadas en el punto P (ver Fig. 2.1) están dados

por:

$$E_{1r} = E_0 r e^{i\omega t}, \quad (2.8)$$

$$E_{2r} = E_0 t r' t' e^{i(\omega t - \delta)}, \quad (2.9)$$

$$E_{3r} = E_0 t r'^3 t' e^{i(\omega t - 2\delta)}, \quad (2.10)$$

$$E_{Nr} = E_0 t r'^{(2N-3)} t' e^{i(\omega t - (N-1)\delta)}, \quad (2.11)$$

donde $E_0 e^{i\omega t}$ es la onda incidente. Los términos $\delta, 2\delta, \dots, (N-1)\delta$ son las contribuciones a la fase provenientes de una diferencia de camino óptico entre rayos adyacentes ($\delta = k_0 \Lambda$). Existe una contribución adicional a la fase proveniente de la distancia óptica recorrida por los rayos para llegar hasta el punto P (rayos reflejados), o bien al punto P' (rayos transmitidos), pero como es común a todos los rayos, ha sido omitida. El corrimiento relativo de fase dado en el primer rayo como resultado de la reflexión está incluido en la cantidad $-r'$ [signo menos en la Ec. (2.5)]. La onda escalar reflejada resultante es entonces:

$$E_r = E_{1r} + E_{2r} + E_{3r} + \dots + E_{Nr}, \quad (2.12)$$

sustituyendo las Ecs. (2.8) a (2.11) en la expresión anterior, después de factorizar el término $E_0 e^{i\omega t}$ y al realizar algunas simplificaciones algebraicas, se obtiene

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \{r + r' t t' e^{-i\delta} [1 + (r'^2 e^{-i\delta}) + (r'^2 e^{-i\delta})^2 + \dots + (r'^2 e^{-i\delta})^{N-2}]\}. \quad (2.13)$$

Si $|r'^2 e^{-i\delta}| < 1$, la serie geométrica que aparece entre corchetes en la ecuación (2.13) converge a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad (2.14)$$

donde el argumento de la serie es $x = r'^2 e^{-i\delta}$. Así que la onda resultante se transforma en

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r + \frac{r' t t' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right].$$

Para el caso cuando la absorción es cero, y sustituyendo las relaciones de Stokes [ver Ecs. (2.4) y (2.5)] en la ecuación anterior para E_r , y después de realizar algunas simplificaciones algebraicas, se obtiene:

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right]. \quad (2.15)$$

Empleando la ecuación (2.15), se puede calcular la densidad de flujo reflejado en P , puesto que $I_r = E_r E_r^*/2$, por lo que se tiene

$$I_r = \frac{E_0^2 r^2 (1 - e^{-i\delta})(1 - e^{+i\delta})}{2(1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})},$$

realizando operaciones algebraicas y empleando la identidad $\cos(\delta) = 2(e^{i\delta} + e^{-i\delta})$ en la última ecuación, ésta se transforma en

$$I_r = I_i \frac{2r^2 (1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta}. \quad (2.16)$$

El símbolo $I_i = E_0^2/2$ representa la densidad de flujo incidente ya que E_0 es la amplitud de la onda incidente.

Por otro lado, para las amplitudes de las ondas transmitidas se tiene que:

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_0 t t' e^{i\omega t}, \\ E_{2t} &= E_0 t t' r'^2 e^{i(\omega t - \delta)}, \\ E_{3t} &= E_0 t t' r'^4 e^{i(\omega t - \delta)}, \\ E_{Nt} &= E_0 t t' r'^{2(N-1)} e^{i(\omega - (N-1)\delta)}. \end{aligned}$$

Realizando un procedimiento análogo al seguido para obtener la Ec. (2.15), la suma de las amplitudes de las ondas transmitidas fuera de la placa, dan como resultado

$$E_t = E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{t t'}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right]. \quad (2.17)$$

Multiplicando por su complejo conjugado, empleando nuevamente la identidad $\cos(\delta) = 2(e^{i\delta} + e^{-i\delta})$ y después de realizar algunas operaciones algebraicas, se obtiene la irradiancia del haz transmitido

$$I_t = \frac{I_i (t t')^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta}. \quad (2.18)$$

Empleando la identidad trigonométrica $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$ en las ecuaciones (2.16) y (2.18), factorizando el término $(1 - r^2)^2$ en el denominador, y después de simplificar algunos términos, dichas ecuaciones se transforman en

$$I_r = I_i \frac{[2r / (1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + [2r / (1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}, \quad (2.19)$$

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + [2r / (1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}. \quad (2.20)$$

Si no hay absorción de energía dentro de la placa, la densidad de flujo incidente será exactamente igual a la suma de la densidad de flujo reflejado mas la densidad de flujo transmitido por la placa. Esto se deduce de las ecuaciones (2.19) y (2.20), cuando al sumarlas se tiene:

$$I_i = I_r + I_t. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.20), tiene un máximo cuando el denominador sea lo más pequeño posible, es decir cuando $\cos \delta = 1$ [o equivalentemente $\sin^2(\delta/2) = 0$], caso en el cual $\delta = 2\pi m$ y

$$(I_t)_{max} = I_i.$$

Partiendo de la misma condición: $\sin^2(\delta/2) = 0$, implica que $\delta = 2\pi m$, y al evaluar δ en la ecuación (2.19), se obtiene:

$$(I_r)_{min} = 0.$$

Es claro que habrá un mínimo en la densidad de flujo transmitido cuando el denominador es un máximo, es decir, cuando $\cos \delta = -1$ (o equivalentemente $\sin^2(\delta/2) = 1$). En este caso $\delta = (2m + 1)\pi$ y

$$(I_t)_{min} = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2} \quad [\text{ver Ec. (2.20)}]. \quad (2.22)$$

El máximo correspondiente en la densidad de flujo reflejado es

$$(I_r)_{\text{máx}} = I_i \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \quad [\text{ver Ec. (2.19)}]. \quad (2.23)$$

La forma de las ecuaciones (2.19) y (2.20) sugiere que se puede introducir una cantidad, conocida como el coeficiente F de finura:

$$F \equiv \left(\frac{2r}{(1+r^2)} \right)^2,$$

con lo cual estas ecuaciones se pueden escribir como

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)}, \quad (2.24)$$

$$T = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)}, \quad (2.25)$$

donde se asume que el coeficiente de reflexión de Fresnel r , considera que el campo eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia. El término $[1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1} \equiv \mathcal{A}(\theta)$ se denomina función de Airy y representa la distribución de la densidad de flujo transmitida.

2.2. Análisis de la reflectancia y la transmitancia de una capa

La función complementaria $[1 - \mathcal{A}(\theta)]$, ecuación (2.24), se grafica en la Fig. 2.3a y la ecuación (2.25) se grafica en la Fig. 2.3b como función de la fase debida a la diferencia en el camino óptico δ . Cuando $\delta/2 = m\pi$ la función de Airy es igual a la unidad para todos los valores de F y por lo tanto de r . Cuando r se aproxima a uno, la densidad de flujo transmitido es pequeño, excepto en los ángulos centrados sobre los puntos $\delta/2 = m\pi$ (ver Fig. 2.3b). En la Fig. 2.3a) se representa la distribución de la densidad de flujo reflejado (uno menos la función de Airy), en donde cada máximo en la curva corresponde a un δ particular, y por ende a un ángulo de incidencia θ_i particular.

2.3. Casos particulares de la reflectancia y de la transmitancia en una capa

Como *primer caso especial* $\Lambda = m\lambda$, donde Λ es la diferencia de camino óptico recorrida por los rayos dentro de la placa, y λ es la longitud de la onda del haz incidente, entonces la 2a, 3a, 4a, etc. de las ondas estarán todas en fase en P . La onda $\vec{E}_{1r}$ es debida a la reflexión que se da en la superficie de la placa (ver Fig. 2.1), y está desfasada 180° con respecto a las demás ondas. En este caso no existe cambio de fase relativo entre las ondas resultantes de un número impar de reflexiones. El cambio de fase está incluido en el hecho que $r = -r'$ y r' ocurre únicamente con potencias impares. La suma de amplitudes escalares, es decir, la *amplitud total reflejada* es:

$$\begin{aligned} E_{0r} &= E_0 r - (E_0 t r t' + E_0 t r^3 t' + E_0 t r^5 t' + \dots), \\ E_{0r} &= E_0 r - E_0 t r t' (1 + r^2 + r^4 + \dots), \end{aligned} \quad (2.26)$$

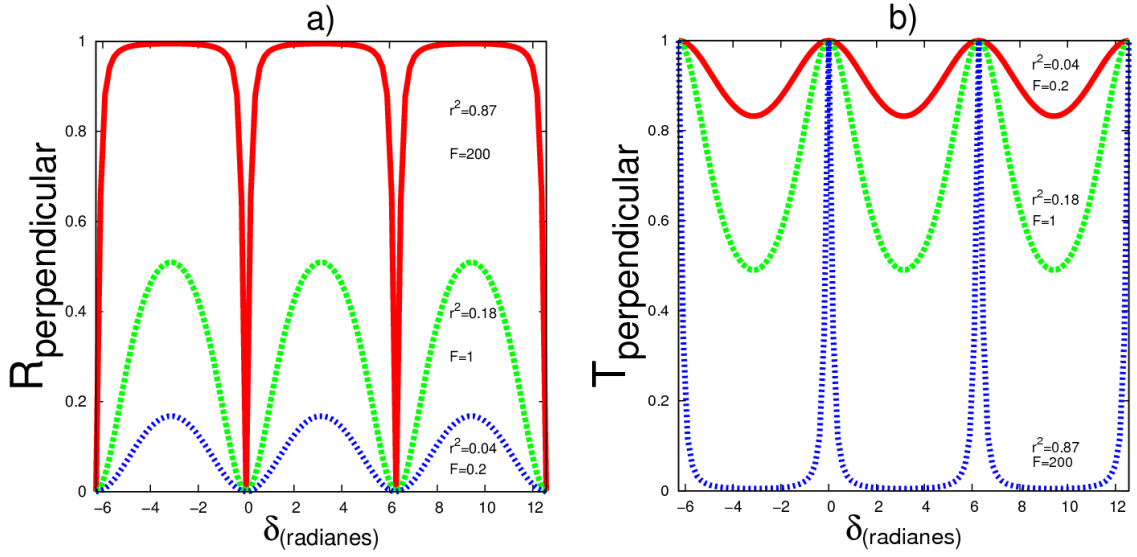


Figura 2.3: Gráfica a) uno menos la función de Airy, y gráfica b) función de Airy.

donde se ha remplazado r' por $-r$, y si nuevamente es empleada la serie geométrica definida por la Ec. (2.14), pero ahora para r^2 , se tiene

$$E_{0r} = E_0 r - \frac{E_0 t r t'}{1 - r^2}, \quad (2.27)$$

donde $r^2 = R \leq 1$ [ver Ecs. (1.44) y (1.45)].

Considerando el tratamiento de Stokes del principio de reversibilidad, y sustituyendo la Ec. (2.4) en la Ec. (2.27) se deduce lo siguiente:

$$E_{0r} = 0. \quad (2.28)$$

En consecuencia, cuando $\Lambda = m\lambda$, la 2a, 3a, 4a, etc., ondas anularán exactamente la onda reflejada. En este caso no se refleja la luz y toda la energía será transmitida.

El *segundo caso especial* se obtiene cuando $\Lambda = (m + 1/2)\lambda$. Ahora el primer y segundo rayo están en fase mientras que todas las ondas adyacentes están $\lambda/2$ fuera de fase, es decir, la 2a está fuera de fase con la 3a y la 3a está fuera de fase con la 4a, y así sucesivamente. La amplitud escalar resultante es entonces

$$E_{0r} = E_0 r + (E_0 t r t' - E_0 t r^3 t' + E_0 t r^5 t' - \dots), \quad (2.29)$$

$$E_{0r} = E_0 r + E_0 r t t' (1 - r^2 + r^4 - \dots). \quad (2.30)$$

La serie entre paréntesis en la última ecuación es igual a $1/(1 + r^2)$, por tanto se obtiene:

$$E_{0r} = E_0 r \left[1 + \frac{t t'}{(1 + r^2)} \right].$$

Una vez más empleando la relación de Stokes $t t' = 1 - r^2$ y simplificando términos, se tiene

$$E_{0r} = \frac{2r}{(1 + r^2)} E_0.$$

Dado que esta disposición particular conduce a la suma de la primera y de la segunda onda, que tienen amplitudes relativamente grandes, se obtiene una densidad de flujo reflejado

considerable. Puesto que la irradiancia está dada por la ecuación (1.39), y es proporcional a $E_{0r}^2/2$, sustituyendo la última expresión para E_{0r} en (1.39), se tiene que

$$I_r = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \left(\frac{E_0^2}{2} \right), \quad (2.31)$$

donde I_r resulta ser la irradiancia máxima $(I_r)_{max}$, lo cual se demostró en el caso general en la sección anterior [ver Ec. (2.23)].

Realizando un procedimiento semejante al efectuado para obtener la ecuación (2.31), se puede demostrar que

$$I_t = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2}.$$

Esta ecuación es idéntica a la Ec. (2.22) obtenida anteriormente por medio de un método más general al procedimiento empleado en esta sección, por lo que corresponde a un valor mínimo para la irradiancia transmitida $(I_t)_{min}$.

2.4. Obtención de las ecuaciones de la reflectancia y de la transmitancia en un sistema multicapa

Dentro de las aplicaciones tecnológicas que explotan las propiedades ópticas de sistemas multicapa se encuentran principalmente los recubrimientos en instrumentos ópticos [19], que pueden ser películas antirreflejantes, filtros, espejos dicróicos, etc. Un sistema de capa múltiple o sistema multicapa, consiste en un apilamiento de capas dieléctricas una sobre otra. A continuación se analiza la interacción electromagnética de una onda plana incidente interactuando con un sistema multicapa, obteniendo las expresiones para la reflectancia y la transmitancia, partiendo de un formalismo general denominado *matriz de transferencia*. Como un primer paso, se analiza el caso en el que el sistema multicapa esté compuesto por una sola capa dieléctrica, que corresponde al problema estudiado en las secciones anteriores, pero ahora es abordado desde una perspectiva más general empleando el formalismo de matriz de transferencia.

En la Fig. 2.4 se muestra una onda plana incidiendo sobre una placa dieléctrica de grosor d , caracterizada por un índice de refracción n_1 . La placa está inmersa en un medio no absorbente caracterizado por un índice de refracción n_0 , y en general puede estar soportada sobre un substrato caracterizado por un índice de refracción n_s . En la Fig. 2.4 se muestra una onda incidente sobre la placa en forma de haz, el cual se refleja y transmite sobre la primera interfaz. Luego, la onda transmitida dentro de la placa sufrirá múltiples reflexiones internas, y cada una de ellas será transmitida y reflejada en ambos lados de la placa de tal manera que E_{rI} , E'_{rII} , E_{tII} , etc., representa la resultante de todas las ondas posibles que viajan en el interior de la placa entre las fronteras I y II . Las condiciones de frontera imponen que las componentes tangenciales de los campos eléctricos $\vec{E}$ y magnéticos $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ deben ser continuas en ambas fronteras de la placa (es decir, igual en ambos lados).

En general $\vec{E}$ y $\vec{H}$ están relacionados por medio del índice de refracción n y la velocidad

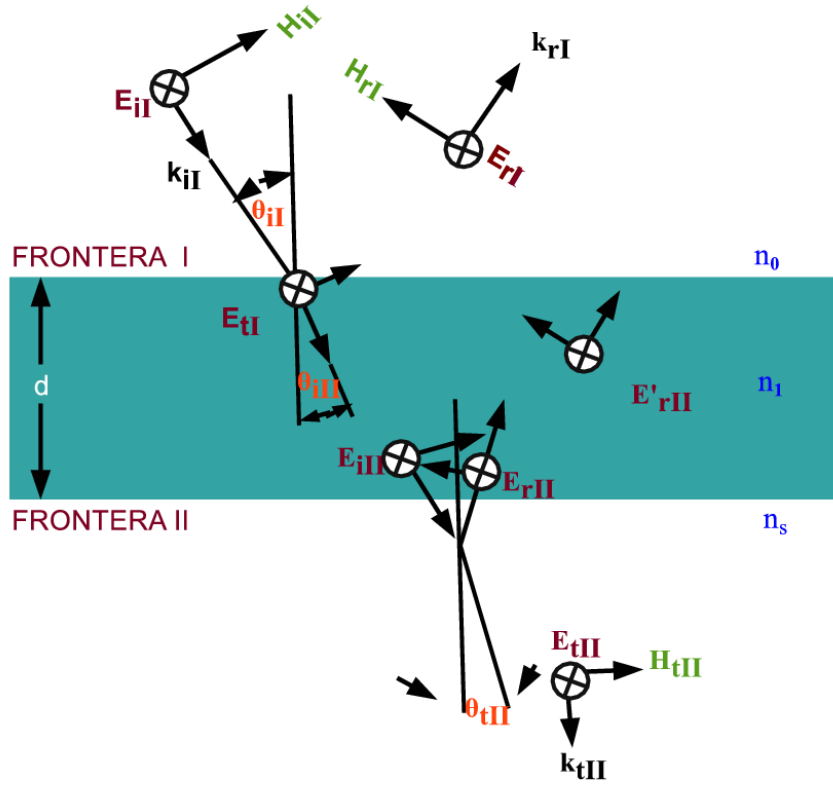


Figura 2.4: Interferencia de haces múltiples en una placa con un grosor d , caracterizado por un índice de refracción n_1 , inmerso en un medio n_0 y soportado por un sustrato caracterizado por un índice de refracción n_s (caso perpendicular).

de propagación de la onda v dentro de la placa, las cuales cumplen las siguientes relaciones:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (2.32)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (2.33)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}, \quad (2.34)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, μ_o es la permeabilidad del vacío, μ es la permeabilidad de la placa, ϵ_o la permitividad en el vacío y ϵ la permitividad de la placa. Sustituyendo las Ecs.(2.33) y (2.34) en la Ec.(2.32) y despejando $\sqrt{\mu \epsilon}$ se obtiene

$$\sqrt{\mu \epsilon} = n \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}. \quad (2.35)$$

Ahora bien, se puede hacer uso de la Ec. (2.35) con el fin de tener la forma en que se relaciona el campo $\vec{E}$ con el campo de inducción magnético $\vec{B}$. Recordando la ecuación

(1.26) $\hat{k} \times \vec{E} = v\vec{B}$, se tiene que

$$\vec{B} = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E},$$

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \vec{E}, [\text{sustituyendo (2.34)}] \quad (2.36)$$

$$\vec{B} = n\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \hat{k} \times \vec{E}, [\text{sustituyendo (2.35)}] \quad (2.37)$$

y considerando medios no magnéticos tal que $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, al sustituir esta relación en la Ec.(2.37) y simplificar, se tiene lo siguiente

$$\vec{H} = n\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{k} \times \vec{E}. \quad (2.38)$$

Analizando el caso cuando el campo $\vec{E}$ es **perpendicular al plano de incidencia** (ver Fig. 2.4), imponiendo condiciones de frontera sobre la primera interfaz (frontera I) se tiene que los campos $\vec{E}_{iI}$ incidente y $\vec{E}_{rI}$ son continuos a través de la frontera I, y por ello $\vec{E}_I$ guarda una cierta relación con el campo $\vec{E}_{tI}$, la cual está dada por la Ec. (1.16). Para este caso dicha condición de frontera se traduce en

$$E_I = E_{iI} + E_{rI} = E_{tI} + E'_{rII}, \quad (2.39)$$

donde E_{iI} es el campo eléctrico de incidencia, E_{rI} es el campo eléctrico reflejado, E_{tI} es el campo eléctrico transmitido en la frontera I y E'_{rII} es el campo eléctrico de reflejado en la frontera II, pero evaluado en la frontera I.

Para obtener la componente del campo magnético se utiliza nuevamente la siguiente expresión

$$-\frac{\vec{B}_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{\vec{B}_r}{\mu_r} \cos \theta_r = -\frac{\vec{B}_t}{\mu_t} \cos \theta_t,$$

y empleando la relación $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{H}_{iI} \cos \theta_{iI} + \vec{H}_{rI} \cos \theta_{rI} = (\vec{H}_{tI} + \vec{H}'_{rII}) \cos \theta_{tI}, \quad (2.40)$$

usando la Ec.(2.38) y sustituyéndola en la Ec.(2.40) se tiene

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_i \cos \theta_{iI} \hat{k} \times \vec{E}_{iI} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_r \cos \theta_{rI} \hat{k} \times \vec{E}_{rI} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_t \cos \theta_{tI} \hat{k} \times (\vec{E}_{tI} + \vec{E}'_{rII}), \quad (2.41)$$

donde fue usado el hecho de que $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en medios no magnéticos están relacionados por medio del índice de refracción y el vector unitario de propagación. En este caso $n_i = n_r = n_0$, que es el medio exterior a la placa, y empleando la ley de reflexión $\theta_{iI} = \theta_{rI}$, se obtiene que:

$$H_I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{iI} - E_{rI}) n_0 \cos \theta_{iI} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{tI} - E'_{rII}) n_1 \cos \theta_{iI}. \quad (2.42)$$

Mediante un procedimiento análogo al empleado en la deducción de las Ecs. (2.39) y (2.42), se pueden obtener las siguientes condiciones en la frontera II:

$$E_{II} = E_{iII} + E_{rII} = E_{tII}, \quad (2.43)$$

y

$$H_{II} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(E_{iII} - E_{rII})n_1 \cos \theta_{iII} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{tII}n_s \cos \theta_{tII}, \quad (2.44)$$

donde, debe ser recordado que el substrato está caracterizado por un índice n_s y la placa por n_1 . Anteriormente se definió la diferencia de camino óptico $\Lambda = 2n_f d \cos \theta_t$, donde n_f es el índice de refracción de la placa, n_1 en este caso, y d es el espesor de la placa. Entonces, una onda que cruza la placa sufre un corrimiento de fase de $k_0(2n_1 d \cos \theta_{iII})/2 = k_0 h$, de modo que

$$E_{iII} = E_{tII}e^{-ik_0 h}, \quad (2.45)$$

$$E_{rII} = E'_{rII}e^{+ik_0 h}, \quad (2.46)$$

donde los signos corresponden a la dirección de propagación de las ondas planas de incidencia E_{iII} y reflexión E_{rII} sobre la frontera II [ver Fig. (2.4)]. Utilizando las ecuaciones (2.43) y (2.44) y al ser sustituidas en las Ecs. (2.45) y (2.46), se obtienen las siguientes expresiones

$$E_{II} = E_{tII}e^{-ik_0 h} + E'_{rII}e^{+ik_0 h}, \quad (2.47)$$

y

$$H_{II} = (E_{tII}e^{-ik_0 h} - E'_{rII}e^{+ik_0 h})\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}. \quad (2.48)$$

Las Ecs. (2.47) y (2.48) se pueden resolver para E_{tII} y E'_{rII} utilizando el siguiente procedimiento: multiplicando la Ec.(2.47) por $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}$ se obtiene:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}E_{II} = E_{tII}e^{-ik_0 h}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII} + E'_{rII}e^{+ik_0 h}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}, \quad (2.49)$$

sumando el último resultado a la Ec. (2.48) y simplificando términos se obtiene

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}E_{II} + H_{II} = 2E_{tII}e^{-ik_0 h}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}.$$

Despejando E_{tII} de esta última ecuación se tiene

$$E_{tII} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}E_{II} + H_{II}}{2e^{-ik_0 h}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}}. \quad (2.50)$$

Ahora multiplicando la Ec.(2.48) por -1 , sumando el resultado de esta operación a la Ec. (2.49) y simplificando términos se obtiene,

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}E_{II} - H_{II} = 2n_1\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos \theta_{iII}E'_{rII}e^{+ik_0 h}, \quad (2.51)$$

despejando E'_{rII} de la última ecuación se tiene

$$E'_{rII} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos \theta_{iII}E_{II} - H_{II}}{2n_1\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos \theta_{iII}e^{+ik_0 h}}, \quad (2.52)$$

sustituyendo las Ecs. (2.50) y (2.52) en la Ec. (2.39) se obtiene

$$E_I = \frac{\gamma_1 E_{II} + H_{II}}{2\gamma_1 e^{-ik_0 h}} + \frac{\gamma_1 E_{II} - H_{II}}{2\gamma_1 e^{+ik_0 h}},$$

donde se ha sustituido el término $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_{iII}$ por γ_1 . Si en la última ecuación se realizan algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene

$$\begin{aligned} E_I &= \frac{1}{2\gamma_1} [(\gamma_1 E_{II} + H_{II})e^{ik_0 h} + (\gamma_1 E_{II} - H_{II})e^{-ik_0 h}], \\ E_I &= \frac{1}{2\gamma_1} (\gamma_1 E_{II} e^{ik_0 h} + H_{II} e^{ik_0 h} + \gamma_1 E_{II} e^{-ik_0 h} - H_{II} e^{-ik_0 h}), \\ E_I &= \frac{1}{2\gamma_1} [(\gamma_1 E_{II})(e^{ik_0 h} + e^{-ik_0 h}) + H_{II}(e^{ik_0 h} - e^{-ik_0 h})]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituyendo las identidades: $e^{ik_0 h} + e^{-ik_0 h} = 2 \cos(k_0 h)$ y $e^{ik_0 h} - e^{-ik_0 h} = 2i \sin(k_0 h)$ en la ecuación (2.53), y después de simplificar términos, se obtiene

$$E_I = E_{II} \cos(k_0 h) + H_{II} i \sin(k_0 h) / \gamma_1. \quad (2.54)$$

Empleando el mismo procedimiento realizado para obtener la ecuación (2.54), utilizando nuevamente las ecuaciones (2.50) y (2.52) junto con (2.42), se tiene el siguiente resultado

$$H_I = \gamma_1 E_{II} i \sin(k_0 h) + H_{II} \cos(k_0 h), \quad (2.55)$$

donde nuevamente ha sido empleada la definición

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_{iII}. \quad (2.56)$$

Utilizando las Ecs (2.54) y (2.55), se obtiene la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_0 h) & [i \sin(k_0 h)] / \gamma_1 \\ \gamma_1 i \sin(k_0 h) & \cos(k_0 h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

donde

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \cos(k_0 h) & [i \sin(k_0 h)] / \gamma_1 \\ \gamma_1 i \sin(k_0 h) & \cos(k_0 h) \end{pmatrix},$$

es la matriz característica o matriz de transferencia del sistema $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$, que puede ser extendida para relacionar los campos de tres fronteras o interfaces. La ecuación (2.57) relaciona los campos en la interfaz II con la interfaz I, por lo que es posible escribir la ecuación que relaciona los campos en la interfaz II con la III de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{II}} \begin{pmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Multiplicando ambos lados (por la izquierda) de la Ec. (2.58) por la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$, y empleando (2.57) en el término izquierdo de la ecuación resultante, se obtiene la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{I}} \mathcal{M}_{\mathcal{II}} \begin{pmatrix} E_{III} \\ H_{III} \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Empleando el mismo procedimiento que ha sido desarrollado para obtener la expresión matricial (2.59), se puede generalizar el problema para el caso de p capas. Si p es el número de capas, cada una con valores particulares para n_i y h_i con $i = 1, 2, \dots, p$, entonces los campos eléctrico y magnético entre la primera y última frontera del sistema están relacionados por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_I \mathcal{M}_{II} \dots \mathcal{M}_p \begin{pmatrix} E_{(p+1)} \\ H_{(p+1)} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

La matriz característica $\mathcal{M}_{Total}$ del sistema completo, es el producto de las matrices individuales de dos por dos, esto es

$$\mathcal{M}_{Total} = \mathcal{M}_I \mathcal{M}_{II} \dots \mathcal{M}_p = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

A continuación serán deducidas las expresiones para los coeficientes de amplitud de reflexión $r_\perp$ y transmisión $t_\perp$ cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, usando el método empleado para obtener la Ec. (2.61). Reformulando la Ec.(2.57) en términos de las condiciones de frontera, Ecs. (2.39), (2.42) y (2.44), es decir,

$$\begin{aligned} E_I &= E_{iI} + E_{rI}, \\ H_I &= \gamma_0(E_{iI} - E_{rI}), \\ E_{II} &= E_{tII}, \\ H_{II} &= \gamma_s E_{tII}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde han sido empleadas las siguientes definiciones:

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_0 \cos \theta_{iI}, \quad \gamma_s = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_s \cos \theta_{tII}. \quad (2.63)$$

Empleando las condiciones de frontera, Ecs. (2.62) y las relaciones (2.63), en la Ec. (2.57) se obtiene

$$\begin{pmatrix} E_{iI} + E_{rI} \\ \gamma_0(E_{iI} - E_{rI}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{tII} \\ \gamma_s E_{tII} \end{pmatrix}.$$

Realizando el producto de las matrices se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} E_{iI} + E_{rI} \\ \gamma_0(E_{iI} - E_{rI}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}E_{tII} + m_{12}\gamma_s E_{tII} \\ m_{21}E_{tII} + m_{22}\gamma_s E_{tII} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

igualando entrada con cada entrada de las matrices columna de (2.64) se obtiene

$$E_{iI} + E_{rI} = m_{11}E_{tII} + m_{12}\gamma_s E_{tII}, \quad (2.65)$$

$$\gamma_0(E_{iI} - E_{rI}) = m_{21}E_{tII} + m_{22}\gamma_s E_{tII}. \quad (2.66)$$

Utilizando las siguientes relaciones

$$r_\perp = \frac{E_{rI}}{E_{iI}}, \quad t_\perp = \frac{E_{tII}}{E_{iI}}, \quad (2.67)$$

y dividiendo ambos lados de la ecuación (2.65) por E_{iI} , se tiene la siguiente expresión,

$$1 + r_{\perp} = m_{11}t_{\perp} + m_{12}\gamma_s t_{\perp}. \quad (2.68)$$

Realizando este mismo procedimiento en la ecuación (2.66) es posible obtener la ecuación

$$(1 - r_{\perp})\gamma_0 = m_{21}t_{\perp} + m_{22}\gamma_s t_{\perp}. \quad (2.69)$$

Multiplicando la Ec. (2.68) por γ_0 y sumándola a la Ec. (2.69), se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} 2\gamma_0 &= \gamma_0 m_{11}t_{\perp} + \gamma_0 m_{12}\gamma_s t_{\perp} + m_{21}t_{\perp} + \gamma_s m_{22}t_{\perp}, \\ 2\gamma_0 &= t_{\perp}(\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 m_{12}\gamma_s + m_{21} + \gamma_s m_{22}). \end{aligned}$$

Despejando $t_{\perp}$ de la última ecuación se obtiene el coeficiente de amplitud de transmisión

$$t_{\perp} = \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 m_{12}\gamma_s + m_{21} + \gamma_s m_{22}}. \quad (2.70)$$

Multiplicando la Ec. (2.68) por $-\gamma_0$ y sumándola a la Ec. (2.69), es posible despejar el coeficiente de amplitud de reflexión

$$r_{\perp} = \frac{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 m_{12}\gamma_s - m_{21} - \gamma_s m_{22}}{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 m_{12}\gamma_s + m_{21} + \gamma_s m_{22}}. \quad (2.71)$$

Finalmente, la reflectancia R y la transmitancia T del sistema para polarización perpendicular se pueden calcular a partir de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= r_{\perp}^2, \\ T_{\perp} &= \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) t_{\perp}^2. \end{aligned}$$

Para el caso cuando el campo $\vec{E}$ es **paralelo al plano de incidencia** (ver Fig. 2.5), la condición de frontera apropiada está dada por la Ec. (1.18), y para este caso en la frontera I se traduce como

$$E_I = E_{iI} \cos \theta_{iI} - E_{rI} \cos \theta_{rI} = (E_{tI} - E'_{rII}) \cos \theta_{tII}, \quad (2.72)$$

mientras que la condición de frontera para el campo $\vec{B}$ está dada por la Ec. (1.19), donde nuevamente se emplea la relación $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, obteniendo la siguiente ecuación

$$H_I = H_{iI} + H_{rI} = H_{tI} + H'_{rII}. \quad (2.73)$$

Por otro lado, utilizando la Ec.(2.38) y sustituyendo en la Ec.(2.73) se tiene

$$H_I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_i \hat{k} \times E_{iI} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_r \hat{k} \times E_{rI} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_t \hat{k} \times (E_{tI} + E'_{rII}),$$

de modo que

$$H_I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{iI} + E_{rI}) n_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{tI} + E'_{rII}) n_1. \quad (2.74)$$

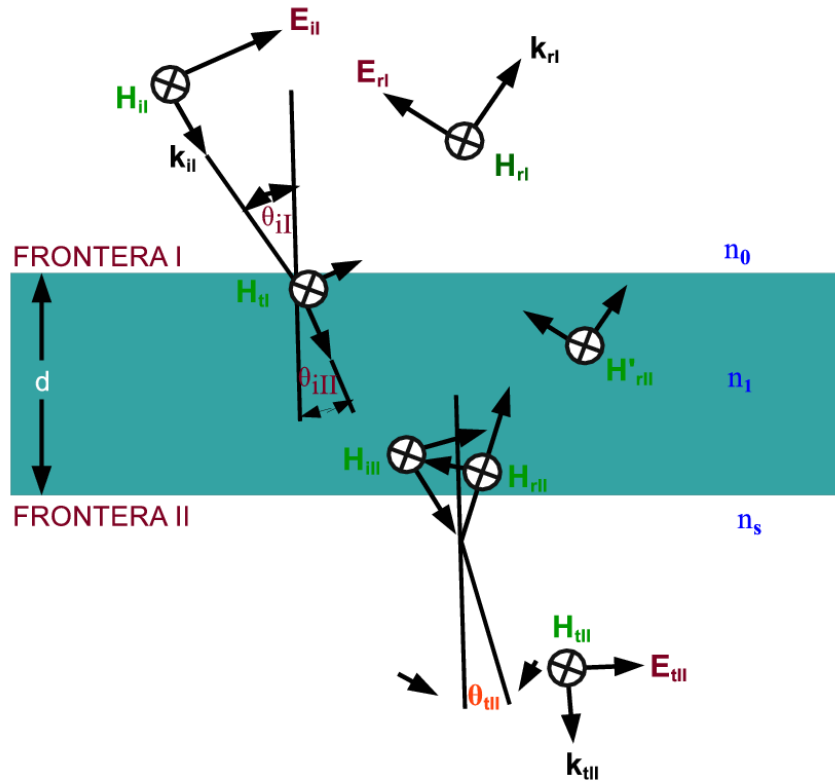


Figura 2.5: Interferencia de haces múltiples en una placa con un grosor d , caracterizado por un índice de refracción n_1 , inmerso en un medio n_0 y soportado por un sustrato caracterizado por un índice de refracción n_s (caso paralelo).

Empleando el mismo procedimiento con el que se obtuvieron las Ecs. (2.72) y (2.74), se obtienen las condiciones para la frontera II, las cuales son:

$$E_{II} = E_{iII} \cos \theta_{iII} - E_{rII} \cos \theta_{rII} = E_{tII} \cos \theta_{tII}, \quad (2.75)$$

$$H_{II} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (E_{iII} + E_{rII}) n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{tII} n_s. \quad (2.76)$$

A partir de las Ecs. (2.75) y (2.76) es posible conocer E_{tI} y E'_{rII} , empleando un procedimiento similar al seguido para obtener las Ecs. (2.50) y (2.52), y de lo cual resulta,

$$E_{tI} = \frac{\gamma_1 E_{II} + H_{II}}{2n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-ik_0 h}}, \quad (2.77)$$

$$E'_{rII} = \frac{-\gamma_1 E_{II} + H_{II}}{2n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{+ik_0 h}}, \quad (2.78)$$

donde ahora ha sido empleada la definición

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 / \cos \theta_{iII}. \quad (2.79)$$

Partiendo de las ecuaciones (2.77) y (2.78) y sustituyendo en la condición de frontera (2.72) para la interfaz I, se obtiene la misma ecuación (2.54), donde la única diferencia es que γ_1 está definida por la Ec. (2.79), para este caso. Nuevamente, empleando las ecuaciones (2.77) y (2.78), pero ahora sustituyéndolas en la ecuación (2.74), se obtiene una ecuación idéntica a la ecuación (2.55). De estas dos ecuaciones se puede obtener la misma ecuación matricial (2.64). Cabe mencionar que lo que hace diferente a esta ecuación cuando el campo eléctrico es perpendicular o paralelo al plano de incidencia, es la definición de γ_1 en términos de la Ecs. (2.56) y (2.79), respectivamente.

Capítulo 3

Resultados y discusión

3.1. Características del Bismuto (Bi): propiedades físicas y químicas

El bismuto en estado puro (sin mezclarse) es un elemento químico de la tabla periódica cuyo símbolo es Bi, su número atómico es 83 y se encuentra en el grupo 15 del sistema periódico. El bismuto es un metal pesado, blanco-rojizo, brillante y quebradizo que cristaliza en forma romboédrica (ver figura 3.1). Es uno de los pocos metales que se expanden al solidificarse, y su conductividad térmica es menor (junto al manganeso) que el resto de los metales pertenecientes a la tabla periódica de los elementos, con excepción del mercurio. También es una de las sustancias más fuertemente diamagnéticas. Además, es un mal conductor de calor y electricidad, y puede incrementar su resistencia eléctrica en un campo magnético, propiedad que lo hace útil en instrumentos para medir la fuerza de estos campos. Es opaco a los rayos X y puede emplearse en fluoroscopia.



Figura 3.1: Mineral bismuto en estado natural.

Se considera un elemento muy raro y tan sólo forma parte del $8.5 \times 10^{-7} \%$ del peso de la corteza terrestre. Es ocasionalmente encontrado en su estado puro, pero es más común encontrarlo como sulfuro, sulfato u óxido de bismuto.

Cuando es sólido flota sobre su estado líquido, por tener menor densidad en el estado sólido. Esta característica es compartida con el agua, el galio, el ácido acético, el antimonio y el silicio.

En casi todos los compuestos de bismuto está en forma trivalente, no obstante, en ocasiones puede ser pentavalente o monovalente. El bismutato de sodio y el pentafluoruro de bismuto son quizás los compuestos más importantes del Bi pentavalente. El primero es un agente oxidante poderoso y el segundo un agente fluorante útil para compuestos orgánicos.

La mayor parte del bismuto es usado en la industria siderúrgica y farmacéutica en el producto terminado (ver Fig. 3.2). Se emplea para formar aleaciones principalmente con aluminio y plomo. Dado que sus puntos de fusión son muy bajos, se emplean en soldaduras especiales, partes fundibles de rociadoras automáticas, sellos de seguridad para cilindros de gas comprimido, en apagadores automáticos de calentadores de agua eléctricos y de gas. También se usa en la manufactura de compuestos farmacéuticos y cosméticos. En la industria farmacéutica el Bi está presente en astringentes, antisépticos y remedios para males intestinales; el oxicloruro de bismuto (BiOCl) es de uso común en cosméticos.



Figura 3.2: Aplicaciones en donde se incorpora el bismuto: a) antiácidos estomacales, b) colorantes para maquillaje, c) aleaciones empleadas en partes de motor y d) envase (sellos) para algún tipo de gas.

3.2. Incorporación del bismuto en sistemas multicapa: propuesta de diseño para nuevos materiales con aplicaciones en sistemas ópticos

El problema central de estudio en este trabajo de tesis, consistió en estudiar la interacción de ondas electromagnéticas con un sistema periódico dieléctrico—semi-metal unidimensional, constituido por placas de grosor constante, intercaladas entre sí formado por celdas unitarias del sistema de placas AB, como se muestra en la figura 3.3. Las placas A corresponden a un medio material dieléctrico, mientras que las placas B a un semi-metal (por ejemplo bismuto). También se estudió el sistema complementario, esto es, sistemas multicapas conformados por la repetición de la celda básica BA. La caracterización de los sistemas unidimensionales multicapa periódicos se hizo a partir de la determinación de la reflectancia y la transmitancia del sistema en su conjunto, en función de la frecuencia de la onda electromagnética incidente, con la finalidad de identificar las regiones de frecuencia del espectro electromagnético para los que el sistema se pueda emplear como un filtro de frecuencias, o bien como un espejo dicróico como se muestra en la Fig. 3.4, el cual se emplea en sistemas ópticos (por ejemplo interferómetros).

Como se mencionó anteriormente en la Introducción de la tesis, se han reportado trabajos en los que se estudia la reflectancia y la transmitancia de sistemas periódicos unidimensionales compuestos ya sea por placas dieléctricas intercaladas con placas

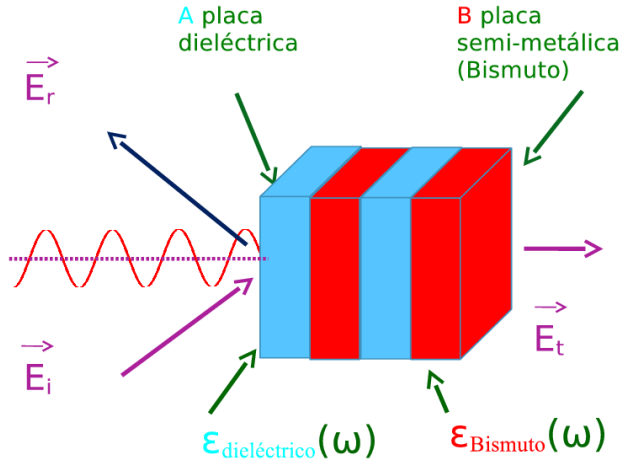


Figura 3.3: Esquema de un sistema multicapa unidimensional periódico interactuando con una onda electromagnética.

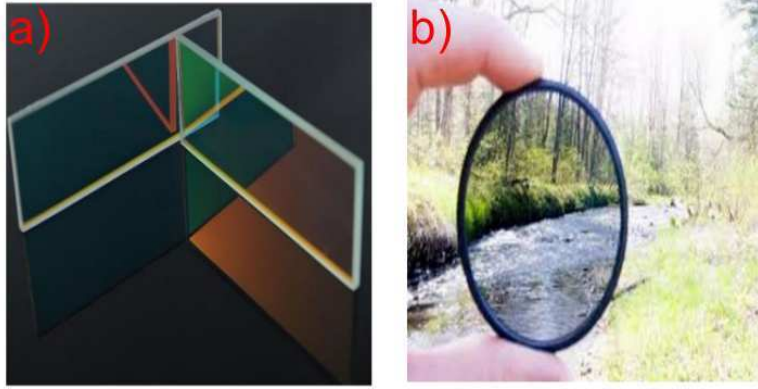


Figura 3.4: Ejemplos de a) espejo dicróico y b) filtro de luz.

metálicas [15-17], o bien placas metálicas intercaladas con placas polaritónicas [17], exhibiendo regiones de frecuencia para las cuales el sistema tiene un comportamiento tipo metamaterial.

Una de las potenciales aplicaciones de los sistemas metamateriales consiste en fabricar sistemas que presenten la propiedad de índice de refracción negativo, con especial interés en el rango de frecuencias de THz debido a sus múltiples aplicaciones. Como se mencionó en la Introducción, el rango de los THz abarca desde los 3,000 GHz, o en términos de la longitud de onda desde 1 mm hasta 0.1 mm (o 100 micrómetros), i.e., los THz están situados en el extremo de la radiación infraroja y en el principio de las microondas. Estos sistemas metamateriales pueden ser utilizados como dispositivos “ópticos” a estas frecuencias, i.e., en la fabricación de lentes, divisores de haz, polarizadores, filtros, etc. (ver Fig. 3.5). Cabe mencionar que a frecuencias de THz los materiales convencionales utilizados para la manipulación de haces ópticos resultan inútiles, ya que prácticamente son transparentes a THz. Recientemente se han estudiado sistemas metamateriales con constituyentes que poseen resonancias en la región de los THz, utilizando materiales polaritónicos [11, 23]. Ejemplo de estos materiales son la sal común NaCl, KCl y LiF entre otros.

La motivación de emplear al bismuto como material semi-metálico en el sistema mul-

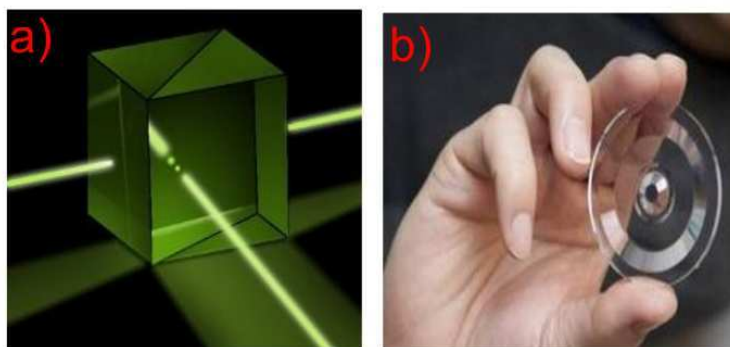


Figura 3.5: Ejemplos de a) un divisor de haz y b) de una lente para un microscopio óptico.

ticapa estudiado en esta tesis, radica en el hecho de que en la actualidad México ocupa el tercer lugar a nivel mundial en depósitos de Bismuto (Bi), siendo el estado de Coahuila uno de los principales estados exportadores de este material [24]. En este sentido, se estudiaron sistemas multicapa analizando la reflectancia y la transmitancia del sistema en su conjunto, buscando darle un valor agregado al bismuto al incluirlo en dispositivos ópticos, como pueden ser filtros o espejos dicróicos. Si la inclusión del bismuto en el sistema periódico de placas paralelas presenta un comportamiento tipo metamaterial, se podría considerar su empleo para la manipulación de haces THz. El análisis del comportamiento del sistema multicapa como un metamaterial, podría indicar el camino para desarrollar este tipo de aplicaciones, motivando estudios futuros.

3.3. Función dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ del bismuto

En la Fig. 3.6a se muestran los datos experimentales del índice de refracción del bismuto obtenidos mediante la técnica de espectroscopia infrarroja (IR) [27]. Dicha técnica es de gran utilidad para la caracterización de semiconductores, cristales fotónicos y para medir el grado de polimerización en la fabricación de polímeros [25, 26]. También es importante mencionar que esta técnica se fundamenta en la absorción de la radiación IR debido a las moléculas en vibración del material. La base de cómo opera la técnica del IR es que una molécula absorberá la energía de un haz de luz infrarroja cuando dicha energía incidente sea igual a la necesaria para que se de una transición vibracional de la molécula. Es decir, la molécula comienza a vibrar de una determinada manera gracias a la energía que se le suministra mediante luz infrarroja. Pueden distinguirse dos categorías básicas de vibraciones: tensión y flexión. Las vibraciones por tensión son cambios en la distancia interatómica a lo largo del eje del enlace entre dos átomos. Las vibraciones por flexión están originadas por cambios en el ángulo que forman dos enlaces.

A continuación, se muestran la gráfica de los datos del índice de refracción complejo del bismuto $n_{Bi} = N_r + iN_i$, obtenidos mediante la técnica de microscopía IR. En la Fig. 3.6a se muestran los datos experimentales del índice de refracción de la parte real del bismuto N_r (puntos en color verde), y la parte imaginaria N_i (puntos en color rosa), en función de la longitud de onda λ en nm , así como la interpolación de estos datos (curva en color rojo para N_r y en color azul para N_i). Tomando los datos experimentales de la Fig. 3.6a y utilizando la siguiente ecuación $\lambda = 2\pi c/\omega$, es posible cambiar el eje coordenado de longitud de onda al eje de frecuencia ω en THz. El resultado de tal conversión de datos

se presenta en la Fig. 3.6b, donde también se muestran los datos interpolados del bismuto en un rango de frecuencias de 2,300 a 6,800 THz, aproximadamente.

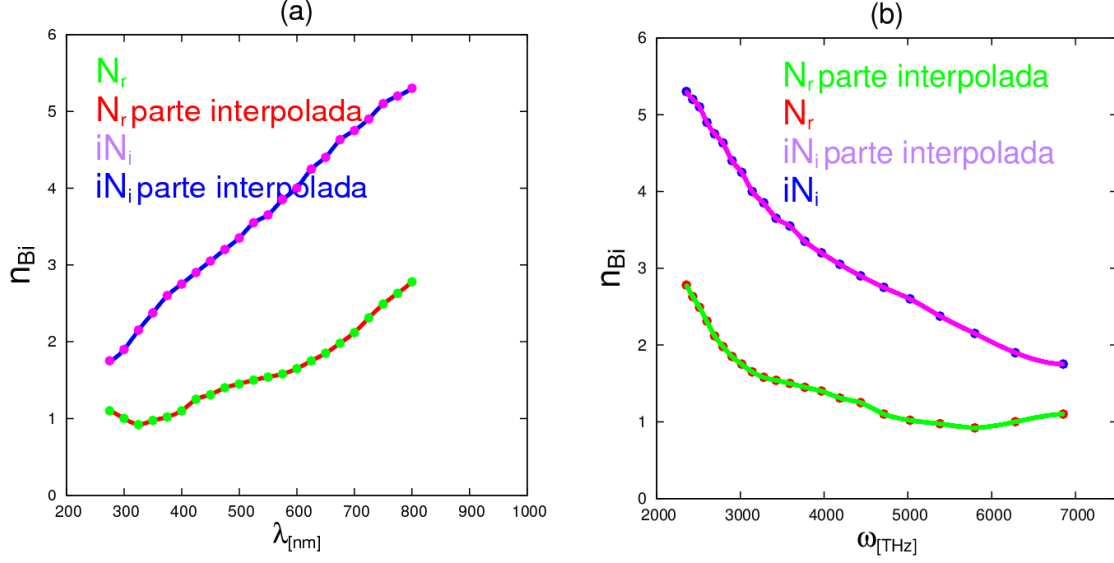


Figura 3.6: Gráfica de los datos experimentales para el índice de refracción del bismuto, tanto parte real como imaginaria, como función de a) la longitud de onda en nm y como función de b) la frecuencia angular ω en THz .

En los capítulos 1 y 2 se analizó la reflectancia y transmitancia en medios dieléctricos. A continuación se expondrá la teoría para medios con comportamiento metálico [28]. La función dieléctrica ε depende de la frecuencia y es un número complejo, esto es $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega)$, donde ε_r es la parte real de la función dieléctrica del Bi y ε_i es la parte imaginaria de la misma función. Recordando la relación $n_{Bi} = \sqrt{\varepsilon/\mu}$ y asumiendo que $\mu = 1$, es posible calcular las componentes real e imaginaria de la función dieléctrica, es decir $\varepsilon_r(\omega)$ y $\varepsilon_i(\omega)$. Desarrollando el binomio $(N_r + iN_i)^2 = \varepsilon(\omega)$ y factorizando términos se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_i(\omega) = 2N_r(\omega)N_i(\omega), \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_r(\omega) = N_r(\omega)^2 - N_i(\omega)^2. \quad (3.2)$$

Utilizando la ecuación (3.1) se obtuvo la parte imaginaria de la función dieléctrica del bismuto $\varepsilon_i(\omega)$, la cual se grafica de color verde en la Fig. 3.7. La parte real de la función dieléctrica $\varepsilon_r(\omega)$ se obtuvo empleando la Ec.(3.2), la cual se grafica en rojo en la Fig.3.7. Esta gráfica muestra que la parte real de $\varepsilon(\omega)$ es negativa, por lo que el bismuto en ese rango de frecuencias se comporta como un metal, mientras que la parte imaginaria de la permitividad dieléctrica representa la absorción del Bi , estos datos concuerdan con el análisis experimental reportado en el artículo [29].

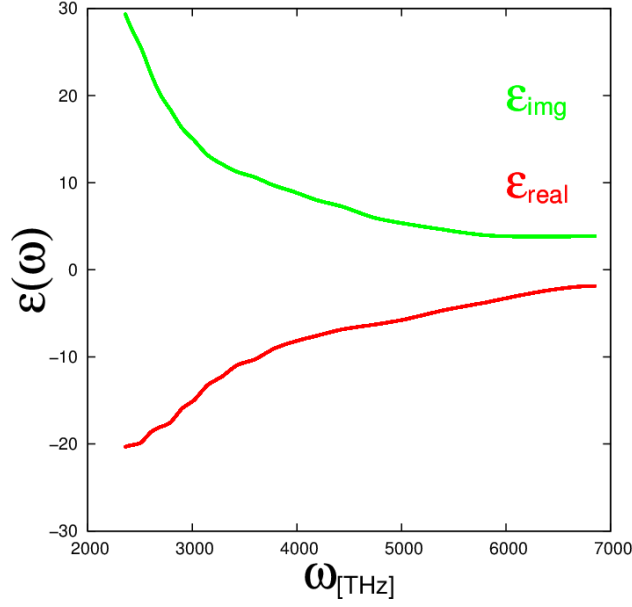


Figura 3.7: Gráfica de la función dieléctrica del bismuto, tanto la parte real (curva de color rojo) como de la parte imaginaria (curva de color verde), en función de la frecuencia angular.

3.4. Ecuaciones para la reflectancia y la transmitancia en una capa metálica entre dos medios dieléctricos

Como se explicó en la sección 1.4 Deducción de las fórmulas de Fresnel, las fórmulas de R y T suponen una relación lineal entre los componentes de los vectores de los campos de una onda electromagnética, las cuales conservan en el tiempo su validez para su propagación en medios dieléctricos. Ahora bien, es posible incluir una capa metálica en el sistema empleando las mismas expresiones para el caso de medios dieléctricos, siempre y cuando se reemplace la función dieléctrica real $\epsilon(\omega)$ por la función dieléctrica compleja $\tilde{\epsilon}(\omega)$, y el número de onda real k por uno complejo $\tilde{k} = \omega \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}} / c$ [30]. De esto se desprende que, en particular, un medio absorbente estratificado estará caracterizado por una matriz de transferencia de dos por dos [ver la matriz $\mathcal{M}_I$ de la Ec. (2.57)]. En contraste con el caso de un medio estratificado dieléctrico, los elementos de esta matriz ya no son números reales o imaginarios puros, ahora son números complejos.

Consideremos ahora como ejemplo una placa metálica situada entre dos medios dieléctricos, es decir, un sistema dieléctrico-metal-dieléctrico como se muestra en la Fig. 3.8, donde n_0 es el índice de refracción del medio de incidencia (dieléctrico), n_{Bi} es el índice de refracción complejo que caracteriza la placa metálica (que en este caso lo asociamos al bismuto), n_s es el índice de refracción del medio de transmisión (dieléctrico) y h representa el grosor de la placa metálica. Ahora bien, las fórmulas para la amplitud de

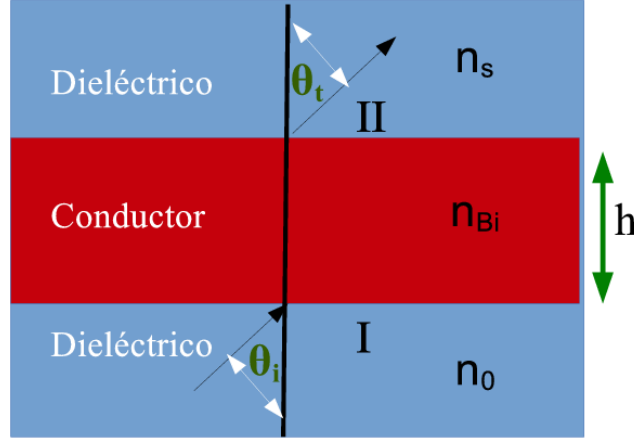


Figura 3.8: Placa conductora absorbente inmersa entre dos medios dieléctricos.

reflexión y transmisión, Ecs. (1.33) - (1.36):

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, & t_{\perp} &= \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \\ r_{\parallel} &= \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}, & t_{\parallel} &= \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}. \end{aligned}$$

Para el caso de tener una placa metálica, se obtienen simplemente sustituyendo el índice de refracción real por uno complejo. Usando la notación de la sección anterior $n_{Bi} = N_r + iN_i$. En el sistema dieléctrico-metal-dieléctrico existirán efectos de absorción de energía, por lo que una cantidad relevante a estudiar es la absorbancia, denotada por A y dada como $A = 1 - R - T$, y el efecto en general de la absorción de la energía será la disminución tanto de la reflectancia como de la transmitancia.

Es conveniente establecer la siguiente relación

$$n_{Bi} \cos \theta_t = u + iv, \quad (3.3)$$

donde u y v son cantidades reales, las cuales se pueden expresar en términos del ángulo de incidencia considerando el cuadrado de la Ec. (3.3) y la ley de Snell

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$

de modo que se obtienen las siguientes ecuaciones para la parte real y la imaginaria, respectivamente:

$$u^2 - v^2 = N_r^2 - N_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i, \quad (3.4)$$

$$uv = 2N_i N_r, \quad (3.5)$$

despejando v de la Ec. (3.5) y sustituyendo este resultado en la Ec. (3.4), se obtiene

$$\begin{aligned} (u^2)^2 - (N_r^2 - N_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i)u^2 - 4N_i^2 N_r^2 &= 0, \\ (v^2)^2 - (N_r^2 - N_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i)v^2 - 4N_i^2 N_r^2 &= 0, \end{aligned}$$

donde la última ecuación puede ser obtenida de manera similar como en el caso de la variable u . Resolviendo estas ecuaciones para u y v se obtiene

$$u^2 = \frac{(N_r^2 - N_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i) + \sqrt{(N_r^2 - N_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4N_i^2 N_r^2}}{2},$$

$$v^2 = \frac{-(N_r^2 - N_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i) + \sqrt{(N_r^2 - N_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i)^2 + 4N_i^2 N_r^2}}{2}.$$

Dado que en este trabajo de tesis se está interesado en las propiedades físicas generales de sistemas multicapa, se consideran la reflectancia y la transmitancia solamente a incidencia normal, de modo que los casos de polarización paralela y perpendicular coinciden para este caso. Por tanto, sin pérdida de generalidad, se elige el caso de polarización paralela.

Entonces, sustituyendo n_t por n_{Bi} y aplicando la Ec. (3.3) en el coeficiente de amplitud de Fresnel (1.35) para la frontera I del sistema representado en la Fig. (3.8), se obtiene que

$$r_{I\parallel} = \frac{n_{Bi} \cos \theta_{iI} - n_0 \cos \theta_{tI}}{n_{Bi} \cos \theta_{iI} + n_0 \cos \theta_{tI}} = \frac{n_{Bi}^2 \cos \theta_{iI} - n_0 n_{Bi} \cos \theta_{tI}}{n_{Bi}^2 \cos \theta_{iI} + n_0 n_{Bi} \cos \theta_{tI}} = \frac{(N_r + iN_i)^2 \cos \theta_{iI} - n_0(u + iv)}{(N_r + iN_i)^2 \cos \theta_{iI} + n_0(u + iv)}.$$

Dado que el coeficiente de amplitud de reflexión es una cantidad compleja, puede ser representado con una amplitud y una fase, es decir

$$r_{I\parallel} = \rho_I \exp(i\phi_I), \quad (3.6)$$

en donde la magnitud ρ_I está dada por:

$$\rho_I^2 = \frac{[(N_r^2 - N_i^2) \cos \theta_{iI} - n_0 u]^2 + [2N_i N_r \cos \theta_{iI} - n_0 v]^2}{[(N_r^2 - N_i^2) \cos \theta_{iI} + n_0 u]^2 + [2N_r N_i \cos \theta_{iI} + n_0 v]^2}, \quad (3.7)$$

y la fase por:

$$\tan \phi_I = 2n_0 \cos \theta_{iI} \frac{2N_i N_r u - (N_r^2 - N_i^2)v}{(N_r^2 + N_i^2)^2 \cos^2 \theta_{iI} - n_0^2(u^2 + v^2)}. \quad (3.8)$$

De manera análoga se pueden obtener el coeficiente de amplitud de transmisión de Fresnel t_I para la frontera I . Nuevamente sustituyendo n_t por n_{Bi} y aplicando la Ec. (3.3), pero ahora empleando la Ec. (1.36), se tiene

$$t_{I\parallel} = \frac{2n_0 \cos \theta_{iI}}{n_{Bi} \cos \theta_{iI} + n_0 \cos \theta_{tI}} = \frac{2n_{Bi} n_0 \cos \theta_{iI}}{n_{Bi}^2 \cos \theta_{iI} + n_0 n_{Bi} \cos \theta_{tI}} = \frac{2(N_r + iN_i)n_0 \cos \theta_{iI}}{(N_r + iN_i)^2 \cos \theta_{iI} + n_0(u + iv)}.$$

Nuevamente $t_{I\parallel}$ es un número complejo, por lo que se puede escribir de la forma

$$t_{I\parallel} = \tau_I \exp(\chi_I), \quad (3.9)$$

en donde la magnitud está dada por:

$$\tau_I^2 = \frac{4(N_i^2 + N_r^2)^2 \cos^2 \theta_{iI}}{[(N_r^2 - N_i^2) \cos \theta_{iI} + n_0 u]^2 + (2N_r N_i \cos \theta_{iI} + n_0 v)^2}, \quad (3.10)$$

y su fase:

$$\tan \chi_I = \frac{n_0[2N_i N_r u - (N_r^2 - N_i^2)v]}{(N_r^2 + N_i^2) \cos \theta_{iI} + n_0[(N_r^2 - N_i^2)^2 u + 2N_r N_i v]}. \quad (3.11)$$

De manera análoga se puede deducir las ecuaciones de los coeficientes de amplitud de reflexión r_{II} y transmisión t_{II} para la frontera II. Y de forma similar a como fueron obtenidas las Ecs. (3.7), (3.8), (3.10) y (3.11), se pueden obtener las magnitudes ρ_{II} , τ_{II} , así como las fases ϕ_{II} y χ_{II} , por lo que:

$$\begin{aligned}\rho_{II}^2 &= \frac{[(N_r^2 - N_i^2) \cos \theta_{tII} - n_s u]^2 + [2N_i N_r \cos \theta_{tII} - n_s v]^2}{[(N_r^2 - N_i^2) \cos \theta_{tII} + n_s u]^2 + [2N_i N_r \cos \theta_{tII} + n_s v]^2}, \\ \tan \phi_{II} &= 2n_s \cos \theta_{tII} \frac{2N_i N_r u - (N_r^2 - N_i^2)v}{(N_i^2 + N_r^2)^2 \cos^2 \theta_{tII} - n_s^2(u^2 + v^2)}, \\ \tau_{II}^2 &= \frac{4n_s^2(u^2 + v^2)}{[n_s u + (N_r^2 - N_i^2) \cos \theta_{tII}]^2 + (n_s v + 2N_r N_i \cos \theta_{tII})^2}, \\ \tan \chi_{II} &= \frac{[(N_r - N_i)^2 v - 2N_i N_r u] \cos \theta_{tII}}{n_s(u^2 + v^2) + [(N_r - N_i)^2 u + 2N_i N_r v] \cos \theta_{tII}}.\end{aligned}$$

Dado que tenemos un sistema de tres medios y dos interfaces, los coeficientes de reflexión y transmisión están dados por las siguientes ecuaciones:

$$r = \frac{r_I + r_{II} e^{2ik_o h}}{1 + r_I r_{II} e^{2ik_o h}}, \quad t = \frac{t_I + t_{II} e^{2ik_o h}}{1 + t_I t_{II} e^{2ik_o h}}. \quad (3.12)$$

de modo que sustituyendo las Ecs. (3.6) a (3.8) y (3.9) a (3.11) en las Ecs. (3.12) se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}r &= \rho e^{i\delta_r} = \frac{\rho_I e^{i\phi_I} + \rho_{II} e^{-2v\eta} e^{i(\phi_{II} + 2u\eta)}}{1 + \rho_I \rho_{II} e^{-2v\eta} e^{i(\phi_I + \phi_{II} + 2u\eta)}}, \\ t &= \tau e^{i\delta_t} = \frac{\tau_I \tau_{II} e^{-v\eta} e^{i(\chi_I + \chi_{II} + u\eta)}}{1 + \rho_I \rho_{II} e^{-2v\eta} e^{i(\phi_I + \phi_{II} + 2u\eta)}}, \\ R &= |r|^2 = \frac{\rho_I^2 e^{2v\eta} + \rho_{II}^2 e^{-2v\eta} + 2\rho_I \rho_{II} \cos(\phi_{II} - \phi_I + 2u\eta)}{e^{2v\eta} + \rho_I^2 \rho_{II}^2 e^{-2v\eta} + 2\rho_I \rho_{II} \cos(\phi_I + \phi_{II} + 2u\eta)},\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$T = \frac{n_s \cos \theta_{tII}}{n_0 \cos \theta_{iI}} |t|^2 = \frac{\tau_I^2 \tau_{II}^2 e^{-2v\eta}}{1 + \rho_I^2 \rho_{II}^2 e^{-4v\eta} + 2\rho_I \rho_{II} e^{-2v\eta} \cos(\phi_I + \phi_{II} + 2u\eta)}, \quad (3.14)$$

donde las fases δ_r y δ_t están dadas por:

$$\tan \delta_r = \frac{\rho_{II}(1 - \rho_I^2) \sin(2u\eta + \phi_{II}) + \rho_I(e^{2v\eta} - \rho_{II}^2 e^{-2v\eta}) \sin \phi_i}{\rho_{II}(1 + \rho_I^2) \cos(2u\eta + \phi_{II}) + \rho_I(e^{2v\eta} + \rho_{II}^2 e^{-2v\eta}) \cos \phi_i}$$

$$\tan[\delta_t - \chi_I - \chi_{II} + u\eta] = \frac{e^{2v\eta} \sin 2u\eta - \rho_I \rho_{II} \sin(\phi_I + \phi_{II})}{e^{2v\eta} \cos 2u\eta + \rho_I \rho_{II} \cos(\phi_I + \phi_{II})}$$

con η dada por

$$\eta = \left(\frac{\omega}{c}\right) h.$$

La importancia de introducir esta sección es para conocer qué efecto puede tener la parte imaginaria del índice de refracción del Bi en la reflectancia y transmitancia, para un sistema de capas dieléctricas con placas metálicas intercaladas.

3.5. Gráficas comparativas de la reflectancia y la transmitancia para un sistema de una capa metálica a incidencia normal

Como primera etapa en el estudio de un sistema multicapa, se analizó el efecto que tiene la parte real e imaginaria de la función dieléctrica del Bi en la reflectancia R y transmitancia T , comparando estas dos cantidades físicas para una placa de bismuto inmersa en aire y con un espesor fijo $d = 1.0 \mu\text{m}$. Dado que el sistema multicapa de interés a estudiar está conformado por capas de bismuto intercaladas con placas de vidrio, también se estudió la R y T de una sola placa de vidrio inmersa en aire, y con grosor fijo de $d = 1.0 \mu\text{m}$. Posteriormente, se analizó la R y T de un sistema multicapa compuesto por repeticiones de una celda básica conformada por una placa de bismuto junto con una de vidrio, pero sólo considerando la parte real del índice de refracción del bismuto (que incorpora la parte imaginaria de la función dieléctrica). Por último, se estudió el efecto en la R y T cuando se disminuye el grosor de la placa de vidrio, manteniendo el grosor de la placa de bismuto constante.

La Fig. 3.9a representa la reflectancia R_{real} en función de la frecuencia angular ω , y fue obtenida mediante los datos interpolados de la Fig. 3.6b y empleando la Ec. (3.13). La línea roja representa R_{real} y solamente considera la parte real N_r del índice de refracción del Bi (n_{Bi} donde se desprecia su parte imaginaria N_i). Esta línea muestra que en el rango de frecuencias desde 4,000 a 7,000 THz la reflectancia es prácticamente cero, mostrando algunas oscilaciones pequeñas. En el rango de frecuencias de 2,300 a 4,000 THz se presenta un máximo global ($\omega \approx 2,900$ THz). Otra característica importante que se puede apreciar de la misma gráfica, es que a frecuencias bajas de R_{real} es mayor que a frecuencias altas. También la Fig. 3.9a muestra una línea de color verde, la cual considera ambas partes N_r y N_i de n_{Bi} en el comportamiento de la reflectancia $R_{compleja}$. Como se observa no hay presencia de oscilaciones, y la reflectancia es alta en comparación al caso en que se desprecia la parte imaginaria del índice de refracción del bismuto.

En la Fig. 3.9b se grafica la transmitancia T para los casos cuando se toma en cuenta sólo la parte real del índice de refracción del Bi, T_{real} (curva en color rojo) y tanto parte real como imaginaria del índice de refracción para el Bi, $T_{compleja}$ [curva en color verde y Ec. (3.14)]. Se observa que para el caso en el que se consideran tanto la parte real como imaginaria del índice de refracción, prácticamente la transmisión es complementaria a la reflectancia, por lo que se espera que la absorción en este rango de frecuencias sea pequeña. Por otro lado, en el caso de T_{real} se observa un comportamiento complementario a R_{real} , es decir, se obtiene un mínimo en T_{real} cuando existe un máximo en R_{real} , y viceversa. En este sentido, para frecuencias mayores que 4,000 THz en las que R_{real} es prácticamente cero, T_{real} alcanza prácticamente la unidad.

Por último, en la Fig. 3.9c se grafican como función de la frecuencia angular ω , $R_{compleja}$, $T_{compleja}$ y A , recordando que esta última cantidad se obtuvo por medio de la ecuación $A = 1 - R_{compleja} - T_{compleja}$. Esta cantidad indica qué porcentaje de la energía de una onda electromagnética se absorbe dentro de la placa de bismuto. Se puede apreciar que la absorción de energía electromagnética para frecuencias mayores, a 6,000 THz es del 60 %, en contraste de la absorción a energías bajas (2,900 THz) alrededor del 20 %.

Para finalizar esta sección, en la Fig. 3.10 se grafican R y T en función de la frecuencia ω , para el caso de una sola placa de vidrio de espesor $d = 0.5 \mu\text{m}$, inmersa en aire y carac-

terizada por un índice de refracción $n_v = 1.5$. Se observa que tanto R como T oscilan con una frecuencia específica debido a los efectos de interferencia constructiva y destructiva de las ondas dentro de la placa (resonancias tipo Fabry-Perot). Es bien conocido que si se incrementa el grosor de la placa, el número de oscilaciones se incrementarán.

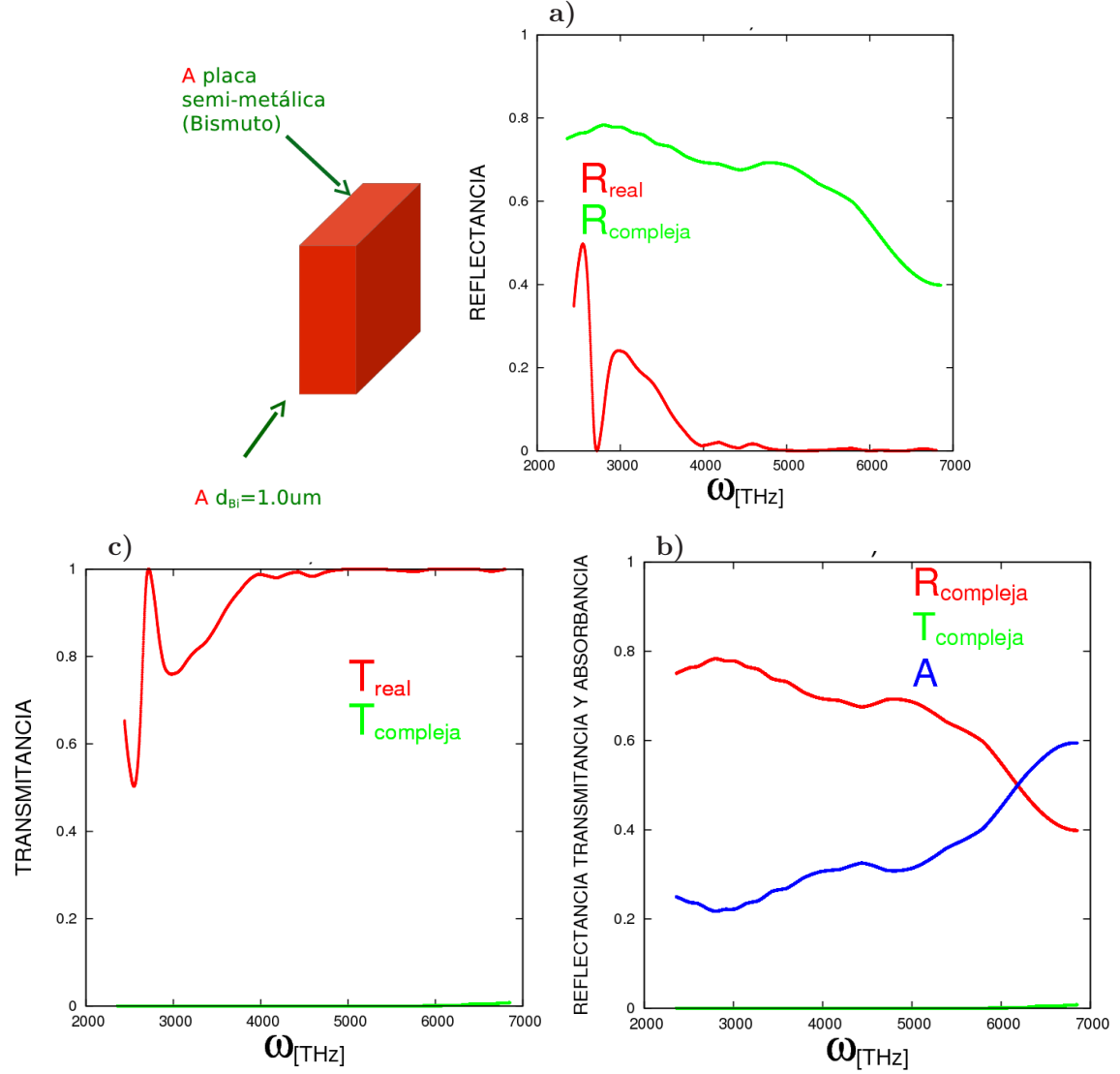


Figura 3.9: Reflectancia R y transmitancia T de una placa de bismuto de espesor $1 \mu m$, inmersa en aire y a incidencia normal, como función de la frecuencia angular ω . a) gráfica de la reflectancia considerando sólo la parte real del índice de refracción del Bi (curva verde), y considerando el índice de refracción complejo (curva en rojo). b) Igual que a) pero para la transmitancia. c) gráficas de la reflectancia, transmitancia y absorción, considerando el índice de refracción complejo para el Bi.

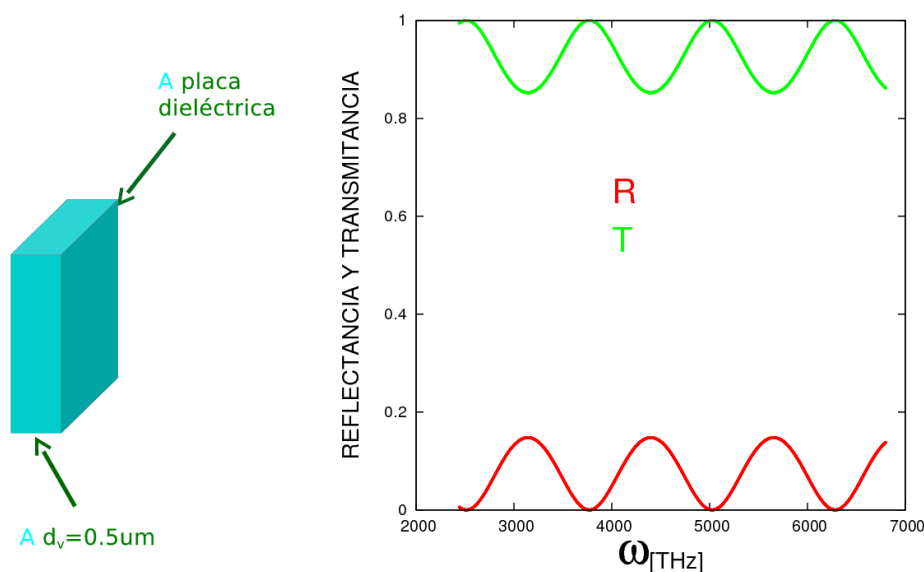


Figura 3.10: Reflectancia R y transmitancia T de una placa de vidrio de espesor $1\mu\text{m}$, inmersa en aire y a incidencia normal, como función de la frecuencia angular ω .

3.6. Gráficas de la reflectancia y la transmitancia en un sistema multicapa dieléctrico—semi—metal a incidencia normal

En la sección anterior se mostró el efecto de incluir tanto la parte real como la imaginaria del índice de refracción del bismuto para el cálculo de R y T . Se observó que para el caso de la transmisión, ésta es prácticamente cero cuando se considera el índice de transmisión complejo, de modo que no pasa nada de luz al otro lado de la placa. Dado que el interés de este trabajo reside en estudiar los efectos físicos generales de un sistema multicapa, se omitió la parte imaginaria del índice de refracción del bismuto en lo siguiente, conociendo que su efecto será principalmente el disminuir notoriamente la intensidad de la onda electromagnética que se propaga por el sistema. Por otro lado, si el bismuto hipotéticamente pudiera ser miscible con algún otro elemento químico o compuesto para formar un nuevo material, cuya principal propiedad sea tener una parte imaginaria del índice de refracción despreciable, entonces es posible estudiar un sistema multicapa únicamente con un índice de refracción real. Es bien sabido que los conformeros básicos de algunos cerámicos, como el vidrio, son formadores de red como los silicatos SiO_2 e intermediarios como las aluminas Al_2O_3 y algunos otros óxidos (TiO_2 y ZrO_2). El papel de un intermediario como la alumina en la estructura de la red, es evitar el ordenamiento de largo alcance de la estructura del silicato. Un compuesto que contiene al bismuto en forma de óxido es Bi_2O_3 (el cual es un producto comercial), y éste puede tomar el rol del Al_2O_3 en la formación de nuestro hipotético cerámico (vidrio con bismuto). Dicho sistema puede ser visualizado como en la figura 3.3, el cual se encuentra formado por varias placas de bismuto y otras de algún dieléctrico (aire, vidrio o agua, por ejemplo) intercaladas unas con otras.

A continuación se muestran los resultados de calcular R y T mediante los datos interpolados de la Fig. 3.6b, empleando las Ecs. (2.70) y (2.71), así como su interpretación para

el sistema multicapa a incidencia normal ($\theta_i = 0$), constituido por varias celdas unitarias. Una celda unitaria está conformada por una placa de bismuto (color rojo en la Fig. 3.11) con un grosor d_{Bi} y una de dieléctrico de grosor d_v , que en este caso se elige como vidrio caracterizado por un índice de refracción de 1.5 (color azul en la Fig. 3.11).

En la Fig. 3.11a se muestra R y T para el caso de incidencia normal en una sola celda bismuto-vidrio, con espesor constante de $1.0 \mu\text{m}$ en ambas placas de Bi y vidrio ($2 \mu\text{m}$ de espesor para la celda completa). Se observa que R y T a una frecuencia baja de $2,500 \text{ THz}$ aproximadamente, tienen un máximo en R y un mínimo en T con valor de aproximadamente 0.5 en su magnitud, mientras que para frecuencias mayores R oscila entre 0 y 0.2 , y complementariamente T oscila entre 0.8 y 1 , aproximadamente. Por otro lado, se observan oscilaciones similares a las observadas en una sola placa de vidrio, pero en este caso aperiódicas, originadas por fenómenos de interferencia constructiva y destructiva de las ondas electromagnéticas dentro de la celda.

En la Fig. 3.11b se muestran R y T para un sistema compuesto por 2 celdas básicas con grosor fijo $d_{Bi} = d_v = 1 \mu\text{m}$ (grosor total del sistema de $4 \mu\text{m}$). En este caso se aprecia que al aumentar el número de celdas se presentan un mayor número de oscilaciones, en comparación con el sistema de una sola celda, Fig. 3.11a. Así mismo, para una frecuencia cercana a $2,500 \text{ THz}$, disminuye la amplitud de R a un valor de 0.4 , mientras que la amplitud de T aumenta a un valor de 0.6 . En este caso se observa que a frecuencias bajas (en un rango de $3,000$ a $4,300 \text{ THz}$ aproximadamente), dichas oscilaciones presentan una amplitud menor a 0.2 , en contraste con el rango de frecuencias: $4,500$ a $7,000 \text{ THz}$, donde su amplitud es mucho mayor a 0.2 . En este rango, se puede observar un máximo de R y un mínimo de T a $\omega \approx 5,300 \text{ THz}$, cuya amplitud tiene un valor cercano a 0.5 . En las subsecuentes figuras, Figs. 3.11c, d y e, se muestra la variación en R y T al incrementar el número de celdas básicas a 3, 10 y 100, respectivamente. El comportamiento general que se observa es un incremento en el número de oscilaciones al incrementar el número de celdas en el sistema multicapa, llegando al caso límite de 100 celdas en las que se observa la formación de bandas bien definidas. En particular, se observa que el máximo (mínimo) en la reflectancia (transmitancia) localizado en $2,500 \text{ THz}$ aproximadamente, oscila en su amplitud en un rango pequeño alrededor de 0.5 , al pasar de 2 a 100 celdas. Cabe destacar que el máximo en R (mínimo en T) localizado en $5,300 \text{ THz}$ para el caso de 2 celdas básicas, se incrementa progresivamente al añadir más celdas básicas al sistema hasta llegar a la unidad (cero para T). En la Fig. 3.11e se aprecia claramente una banda de aproximadamente 300 THz de ancho (desde los $4,500 \text{ THz}$ hasta los $4,800 \text{ THz}$, aproximadamente), en la que el sistema se comporta como un espejo, es decir, R es igual a 1 y T igual a 0. Además, se aprecia que dicha banda de alta reflectividad está en medio de dos regiones en las que R cae a cero abruptamente, de modo que la transmisión es muy alta. En este sentido este sistema multicapa se comporta como un espejo dicróico, ya que para un rango de frecuencias refleja totalmente la onda electromagnética y a frecuencias ligeramente mayores o menores permite su paso a través del sistema. Adicionalmente a la banda localizada alrededor de $5,300 \text{ THz}$ y a la centrada en $4,650 \text{ THz}$, aproximadamente, se observa en la Fig. 3.11e la formación de otras bandas, con un ancho menor conforme se aumenta la frecuencia. En la Fig. 3.12 se muestran nuevamente R y T como función de la frecuencia angular ω , para el caso en el que el espesor del vidrio se disminuye a la mitad respecto al caso anterior, por lo que ahora la celda unitaria mide $1.5 \mu\text{m}$. En esta figura se repiten los números de celda unitaria, es decir, de 1, 2, 3, 10 y 100 celdas básicas. En estas gráficas se observa claramente una disminución en el número de oscilaciones como función de la frecuencia, en comparación con el caso de una placa de vidrio de $1 \mu\text{m}$.

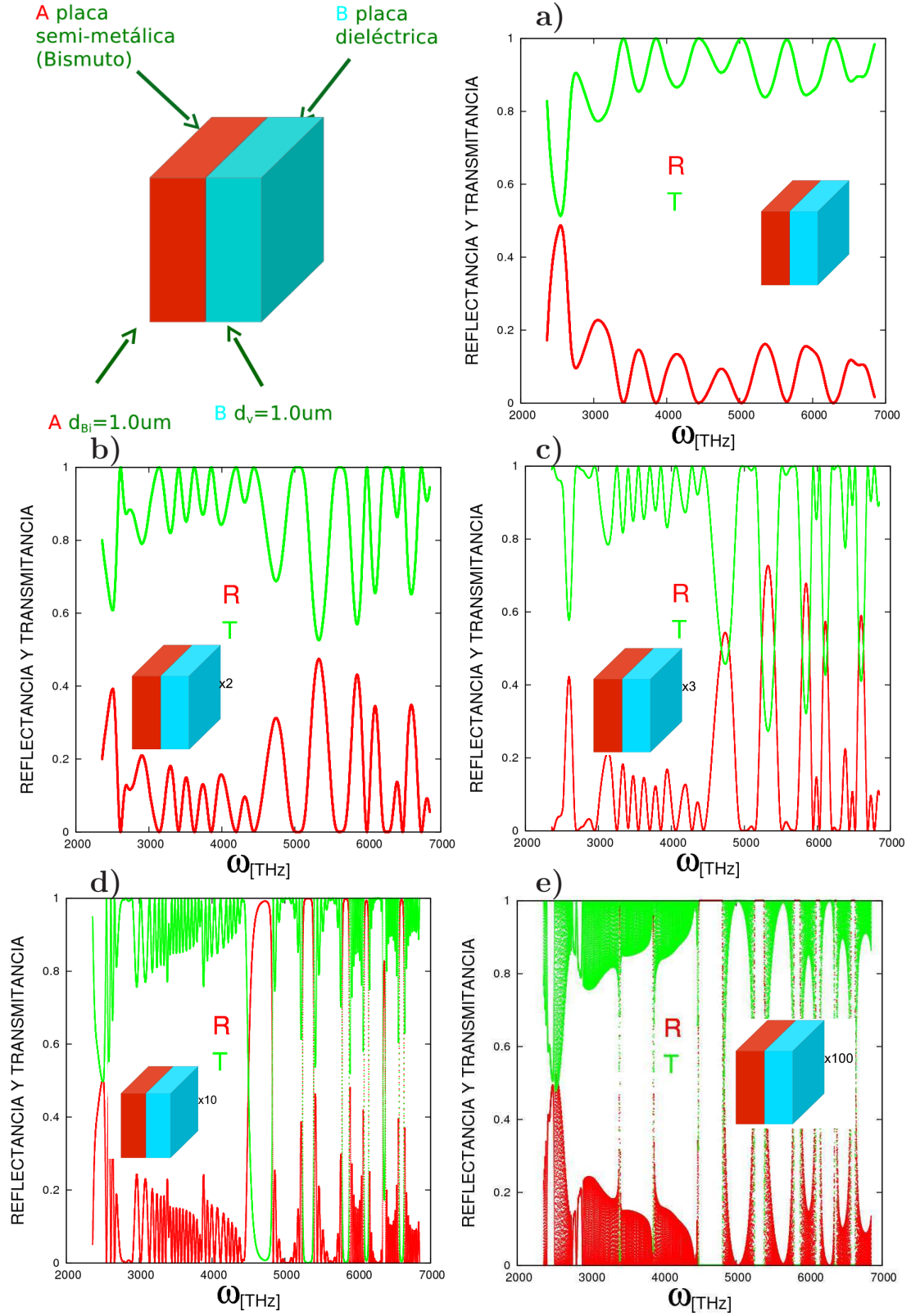


Figura 3.11: Reflectancia y transmitancia como función de la frecuencia para varios sistemas multicapa compuestos por celdas básicas de bismuto y vidrio de espesor fijo ($1 \mu\text{m}$ tanto para la placa de bismuto como para la de vidrio), inmersas en aire, a incidencia normal.

Esto tiene una explicación sencilla en términos de las veces que cabe la longitud de onda asociada a la onda electromagnética dentro de la placa de vidrio. Así mismo, para este caso donde la placa de vidrio tiene un espesor de $d_v = 0.5 \mu\text{m}$, se observa la formación de bandas de alta reflectancia y baja transmitancia conforme se aumentan celdas básicas al sistema, al igual que en el caso con grosor $d_v = 1 \mu\text{m}$ de la placa de vidrio (Fig. 3.11). Para el caso de una sola celda básica (ver Fig. 3.12a), se observa que para frecuencias mayores a 3,000 THz, la reflectancia oscila con valores por debajo de 0.2 (mayores a 0.8 para T), y se aprecia que al aumentar a dos celdas básicas (ver Fig. 3.12b), aparece notoriamente una zona de frecuencias (entre 5,300 y 5,800 THz) donde R y T toman un valor de 0.5 aprox. La R en esta banda de frecuencias aumenta sistemáticamente al aumentar el número de celdas básicas en el sistema, hasta formarse una banda bien definida cuando el sistema contiene 100 celdas básicas (ver Fig. 3.12e). Adicionalmente a dicha banda, se aprecia en la Fig. 3.12d la formación de otra banda para frecuencias en el rango 2,800 y 3,200 THz, que evoluciona y se define para el caso de 100 celdas básicas. Al igual que en el caso en el que la placa de vidrio tiene un grosor $d_v = 1 \mu\text{m}$ en este caso se observa la aparición de otras bandas de menor ancho en frecuencias alrededor de 6,100 THz y 6,600 THz, aproximadamente.

En la figura A-2 se muestran las gráficas para R y T para el caso complementario al presentado en la figura 3.12, es decir, se considera el mismo sistema multicapa pero invirtiendo el orden en la celda básica, conformado ahora por una placa de vidrio de espesor $d_v = 0.5 \mu\text{m}$ y luego una placa de bismuto de grosor $d_{Bi} = 1 \mu\text{m}$.

A modo de resumen del análisis de los resultados presentados en las gráficas anteriores, se observa que en ambos sistemas aparecen bandas de frecuencia bien definidas en las que R alcanza la unidad y T es prácticamente cero, conforme el número de celdas aumenta en el sistema, de modo que este tipo de sistema multicapa se pueden emplear como filtros o bien espejos dicróicos, de manera que selectivamente reflejan la luz incidente, o bien la dejan atravesar el sistema. Más aún, comparando los dos sistemas estudiados se observa que las bandas en las que $R=1$ sufren un corrimiento al modificar el grosor de la placa de vidrio, de manera que es posible sintonizar la región de alta reflectividad a una zona deseada con sólo modificar el grosor de las capas (la correspondiente al vidrio en este caso).

Es importante mencionar que la teoría presentada en la sección 3.4 para el cálculo de R y T para sistemas multicapa (ejemplificada sólo para un sistema de tres medios), con inclusiones metálicas, también se aplica para luz a incidencia oblicua y no sólo a incidencia normal como en los casos discutidos, Figs. 3.11 y 3.12. A modo de ejemplo, se presentan en el apéndice A las gráficas de R y T como función de la frecuencia para el caso de polarización paralela para una capa de bismuto inmersa en aire, para dos ángulos de incidencia: 30° y 66.5° .

Por último, en este trabajo de tesis también se estudió sistemáticamente el caso de incidencia oblicua sobre un sistema multicapa, para ambas polarizaciones de incidencia: paralela y perpendicular al plano de incidencia. En el apéndice se muestran los resultados para la reflectancia y la transmitancia al considerar ángulos de incidencia de $\theta_i = 30^\circ$ y $\theta_i = 66.5^\circ$ para el caso con polarización paralela (Figs. A-3 y A-4), y los mismos ángulos para polarización perpendicular (Figs. A-5 y A-6). El comportamiento general muestra la aparición de bandas en frecuencia, en las que la reflectancia es muy alta, contrastando con la poca o nula transmitancia del sistema multicapa.

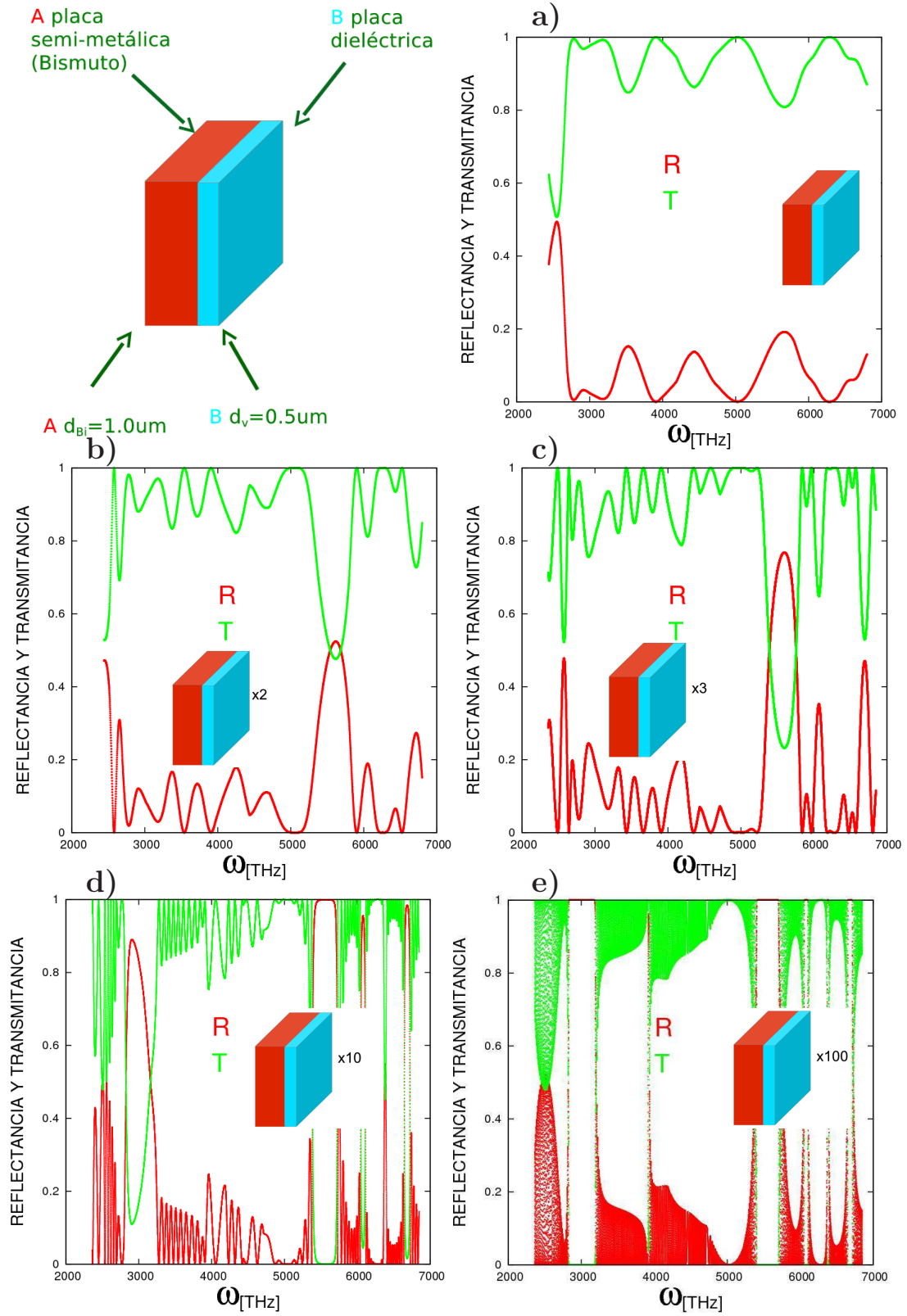


Figura 3.12: Reflectancia y transmitancia como función de la frecuencia para varios sistemas multicapa compuestos por celdas básicas de bismuto y vidrio de espesor fijo ($1 \mu m$ para la placa de bismuto y $0.5 \mu m$ para la de vidrio), inmersas en aire, a incidencia normal.

Capítulo 4

Conclusiones

Una primera observación es que la teoría estudiada para el cálculo de la reflectancia y transmitancia de sistemas multicapa, es aplicable tanto a sistemas compuestos por placas dieléctricas como por placas metálicas, o sus posibles combinaciones. En este sentido la teoría es general, por lo que es posible estudiar cualquier combinación de placas de diferentes materiales, grosores y orden dentro de la celda unitaria, así como estudiar la reflectancia y transmitancia de sistemas con arreglos tanto periódicos como aperiódicos de las celdas unitarias.

Como conclusiones generales de este trabajo, se estudiaron sistemas multicapa involucrando placas de bismuto, material que por razones geográficas es de relevancia para México, intercaladas con placas de vidrio común. Se estudió el efecto de considerar la respuesta real y compleja del bismuto, es decir, de contemplar que el bismuto es un semi-metal y que posee una función de respuesta dieléctrica compleja, en donde la parte real caracteriza la propagación de las ondas electromagnéticas dentro del material, y la parte imaginaria caracteriza la absorción de la luz por el medio material. Dada la complejidad del problema, se eligió estudiar y comprender los fenómenos fundamentales del problema, más allá de los fenómenos de absorción. Por esta razón, se eligió por estudiar sistemas multicapa compuestos por bismuto y vidrio, variando el grosor de cada placa en la celda unitaria, así como variando el número de celdas unitarias en el sistema, caracterizando la placa de bismuto por sólo la parte real del índice de refracción (que toma en cuenta la parte imaginaria de la función dieléctrica).

Como primera conclusión específica de este estudio, es que la teoría también permite calcular la reflectancia y transmitancia para cualquier ángulo de incidencia, para ambas polarizaciones, por lo que su uso permite el diseño de materiales con propiedades de reflectancia y transmitancia específicas, con potenciales aplicaciones como filtros o bien espejos dicróicos. La familiarización con la teoría electromagnética involucrada y más precisamente con el formalismo de matriz de transferencia, tema central de este trabajo.

También se analizó el resultado del estudio numérico, se encontró que el efecto de aumentar el número de celdas en el sistema produce la aparición de bandas bien definidas en las que la reflectancia es 1, o bien el sistema se comporta como un espejo. En este sentido, es posible implementar estos sistemas multicapa como filtros o espejos dicróicos para ciertos rangos específicos de frecuencia, determinados por los parámetros particulares del arreglo. Y se observó que al modificar el grosor de las placas dentro de la celda unitaria, las regiones donde la reflectancia es 1 se mueven, por lo que es posible sintonizar las regiones en las que se desea filtrar señales, al modificar los parámetros de la red.

Como parte complementaria, también se estudiaron los sistemas multicapa con la celda

unitaria complementaria, es decir, se estudió el caso cuando la celda unitaria tiene primero una placa de bismuto y luego la de vidrio. En este caso el sistema complementario estaría conformado por la misma repetición y número de celdas unitarias, pero ahora la placa de vidrio estaría en primer lugar, antes que la de bismuto.

Por último, se mostró que es posible obtener curvas para la reflectancia y la transmitancia en función de la frecuencia para ángulos de incidencia oblicua, mostrando su efecto en el grosor de las bandas, para ambas polarizaciones.

Apéndice A

Reflectancia y transmitancia en un sistema multicapa a incidencia oblicua

En este apéndice se grafican tanto R como T en función de la frecuencia angular para el caso de una sola placa de bismuto con grosor $d_{Bi} = 1$ um, inmersa en aire, para diferentes ángulos de incidencia: $\theta_i = 0^\circ$, 30° y 66.5° . Al igual que en la figura 3.9, se consideran dos casos, cuando el índice de refracción del bismuto es real (considerando la parte imaginaria de la función dieléctrica) y cuando se considera complejo. Se observa que, cuando se considera el índice de refracción complejo para el bismuto, la reflectancia no sufre cambios significativos en su forma al considerar diferentes ángulos de incidencia, salvo un pequeño desplazamiento de la curva en general a menores valores de R para un ángulo de incidencia de 30° , más notorio a frecuencias altas (7,000 THz), observándose que a $\theta_i = 0^\circ$ la R alcanza un valor de 0.4 mientras que a $\theta_i = 30^\circ$ disminuye a un valor de 0.38, aproximadamente.

Cuando se considera como real el índice de refracción para el bismuto, se observa que R_{real} mantiene su forma en general cuando $\theta_i = 30^\circ$ comparándolo con el caso a incidencia normal. Sin embargo, para $\theta_i = 66.5^\circ$ se observa la aparición de una región de frecuencias alrededor de 5,800 THz en la que R alcanza valores cercanos a 0.8.

Para la transmitancia se aprecia el caracter complementario con las curvas de reflectancia, cuando el índice de refracción se considera real, mientras que para el caso complejo la absorción de la placa de bismuto bloquea prácticamente toda la transmitancia.

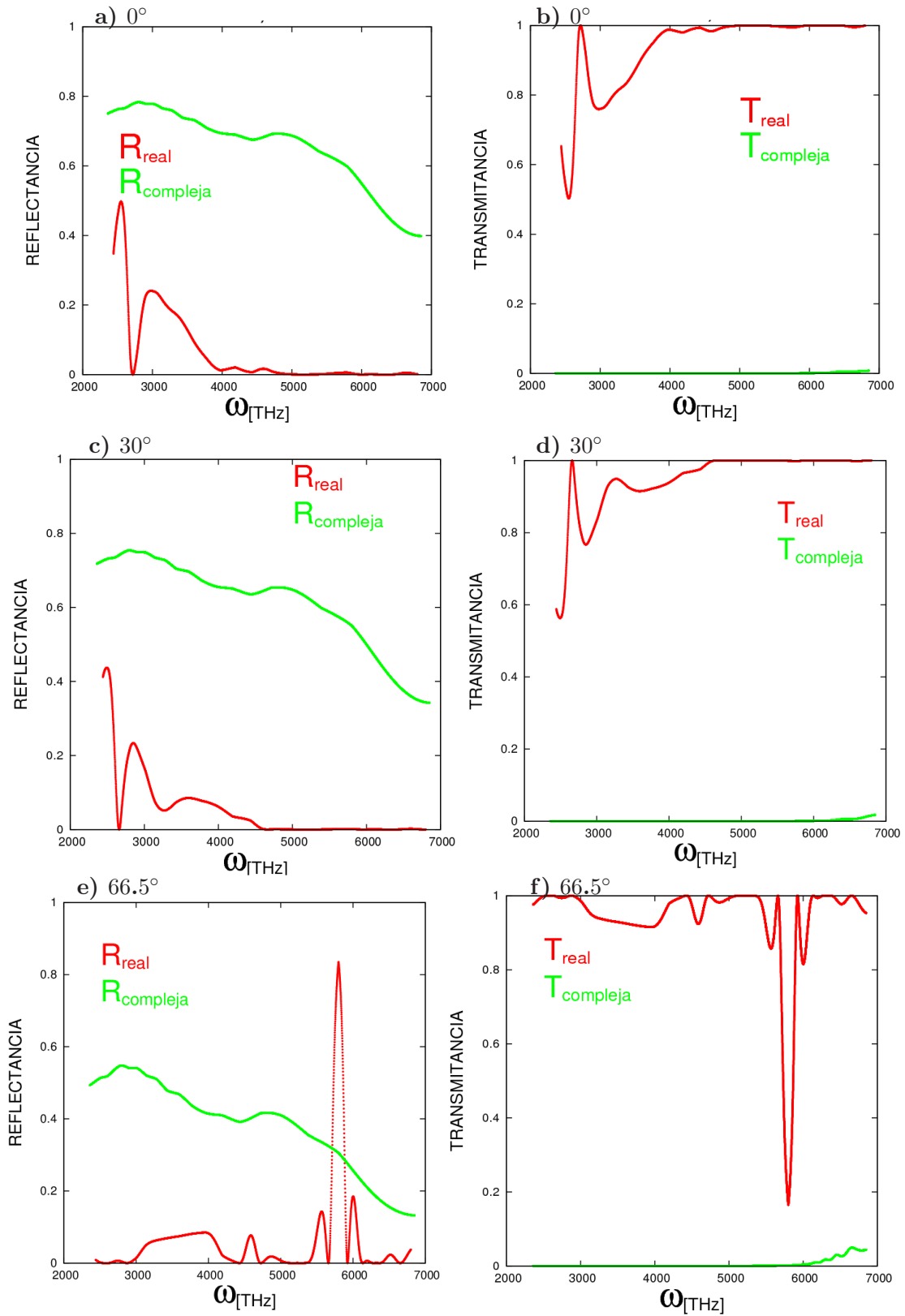


Figura A.1: Reflectancia y transmitancia a ángulos de incidencia oblicua: a) y b) $\theta_i = 0^\circ$ c) y d) $\theta_i = 30^\circ$ y e) y f) $\theta_i = 66.5^\circ$, como función de la frecuencia, en el caso de polarización paralela al plano de incidencia, para una placa de bismuto de espesor de $1 \mu\text{m}$ inmersa en aire.

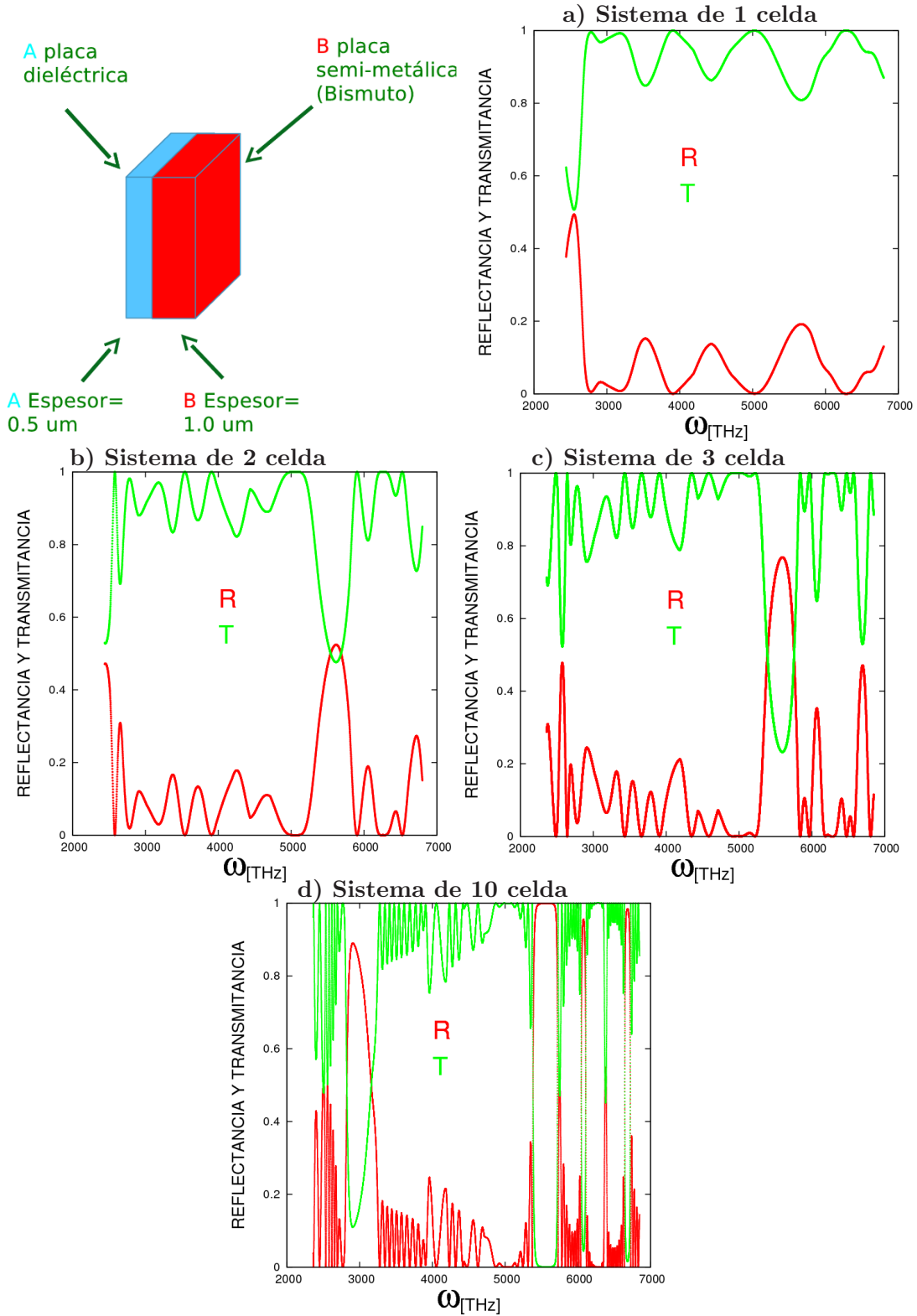


Figura A.2: Reflectancia y transmitancia como función de la frecuencia para varios sistemas multicapa compuestos por celdas básicas de vidrio y bismuto de espesor fijo ($0.5\mu\text{m}$ para la placa de vidrio y $1\mu\text{m}$ para la de bismuto), inmersas en aire, a incidencia normal.

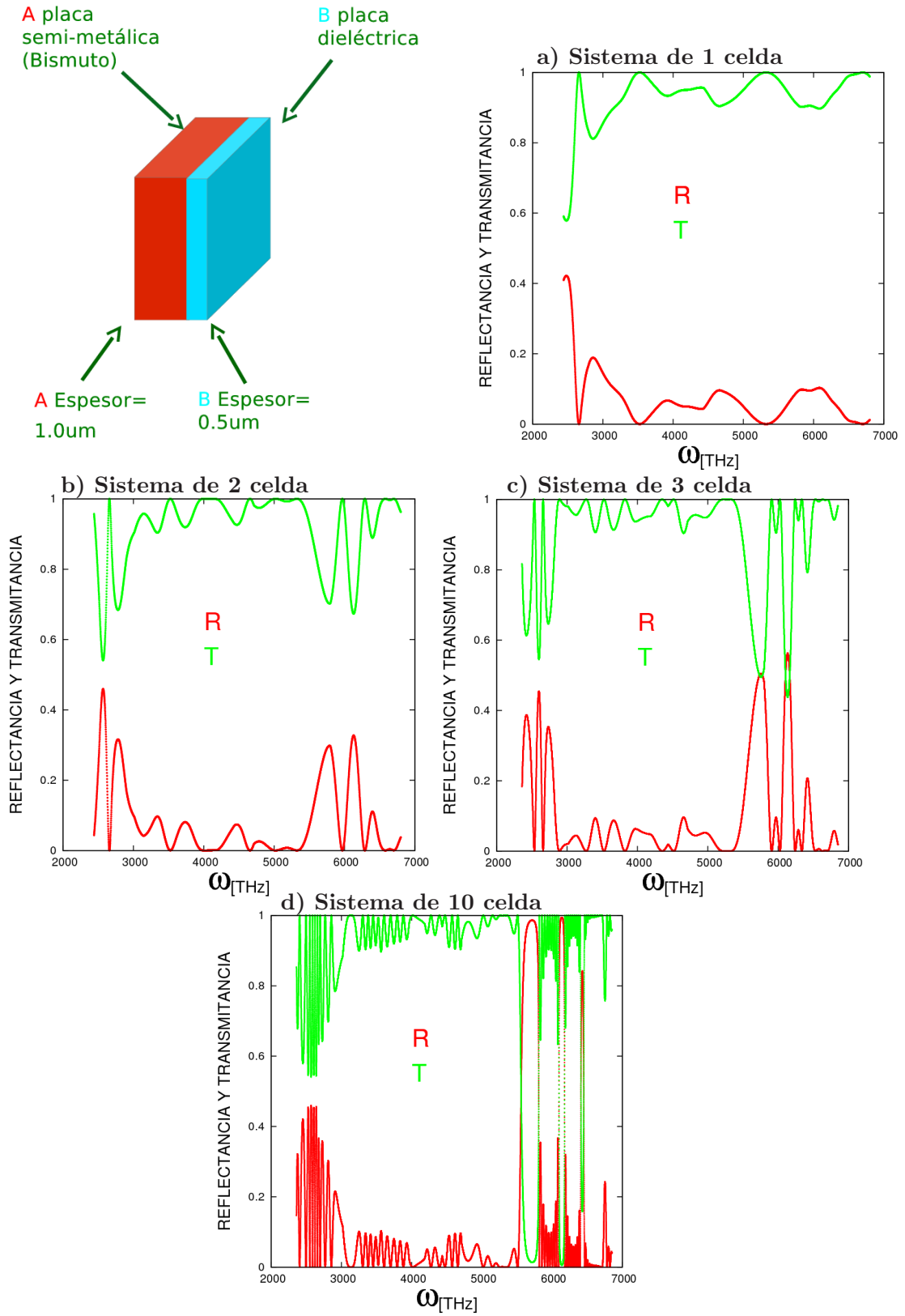


Figura A.3: Reflectancia y transmitancia de un sistema multicapa inmerso en aire, conformado por celdas básicas de vidrio y bismuto en función de la frecuencia, e iluminadas a un ángulo de incidencia $\theta_i = 30^\circ$ para polarización paralela.

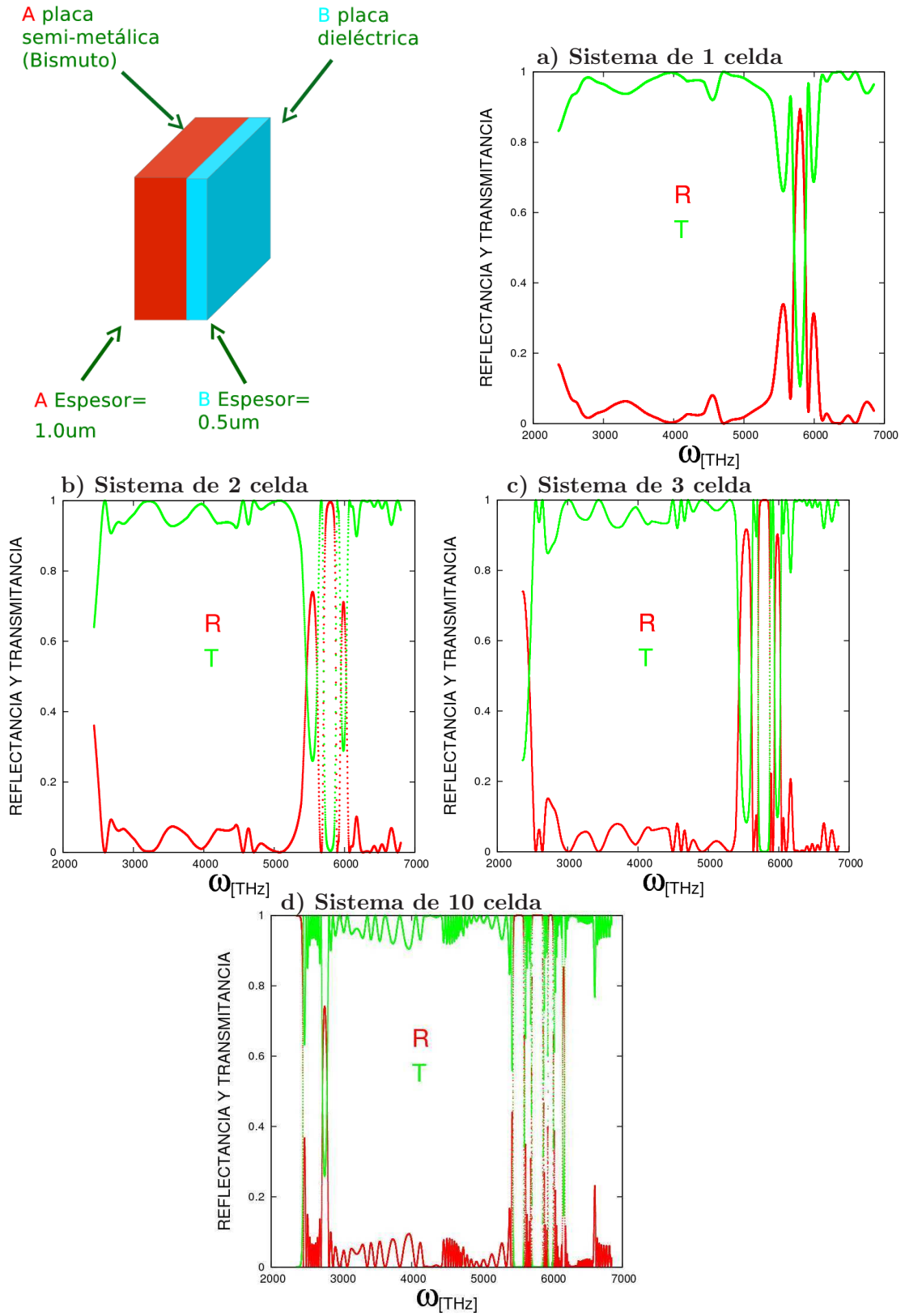


Figura A.4: Reflectancia y transmitancia de un sistema multicapa inmerso en aire, conformado por celdas básicas de vidrio y bismuto en función de la frecuencia, e iluminadas a un ángulo de incidencia $\theta_i = 66.5^\circ$ para polarización paralela.

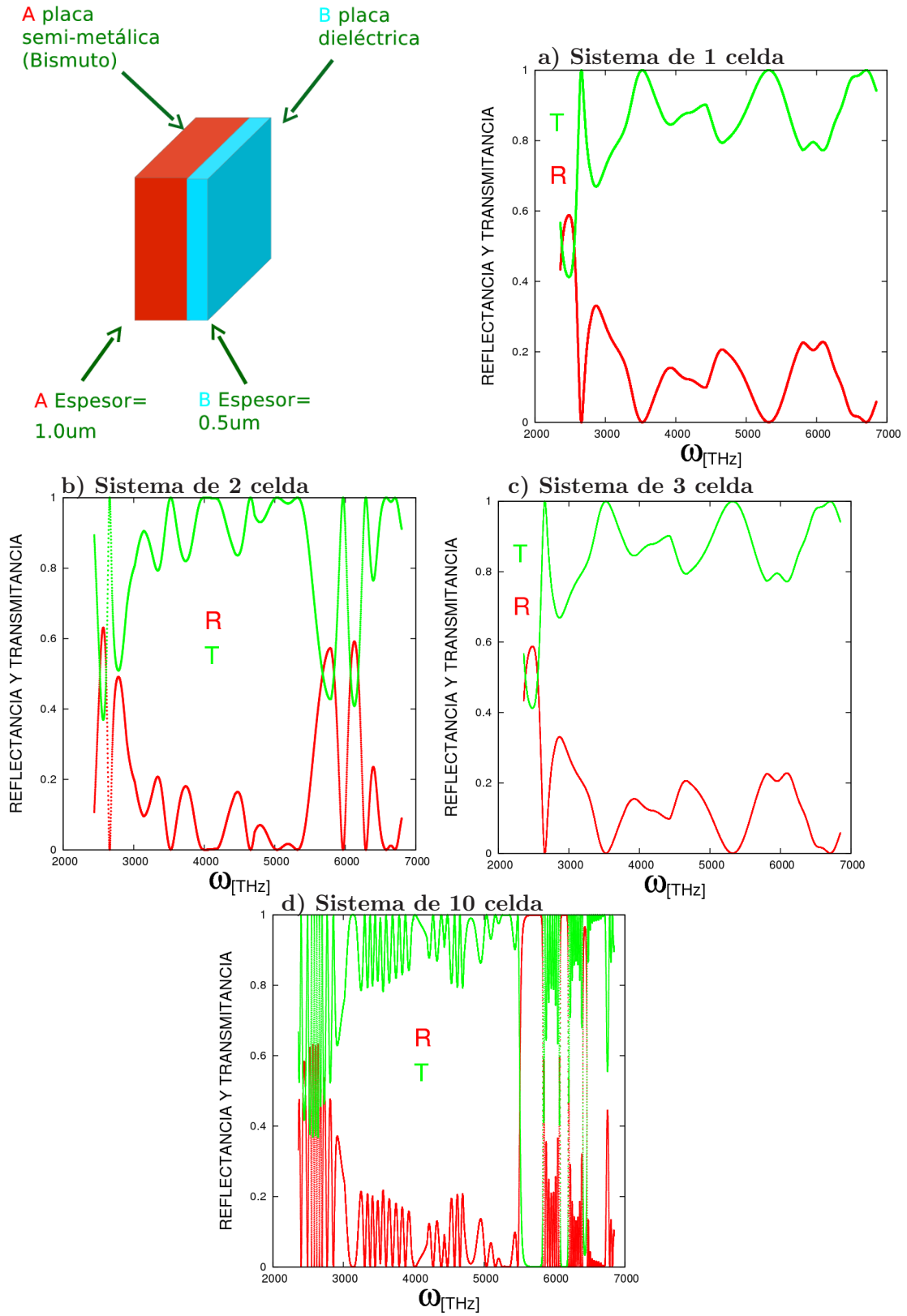


Figura A.5: Reflectancia y transmitancia de un sistema multicapa inmerso en aire, conformado por celdas básicas de vidrio y bismuto en función de la frecuencia, e iluminadas a un ángulo de incidencia $\theta_i = 30^\circ$ para polarización perpendicular.

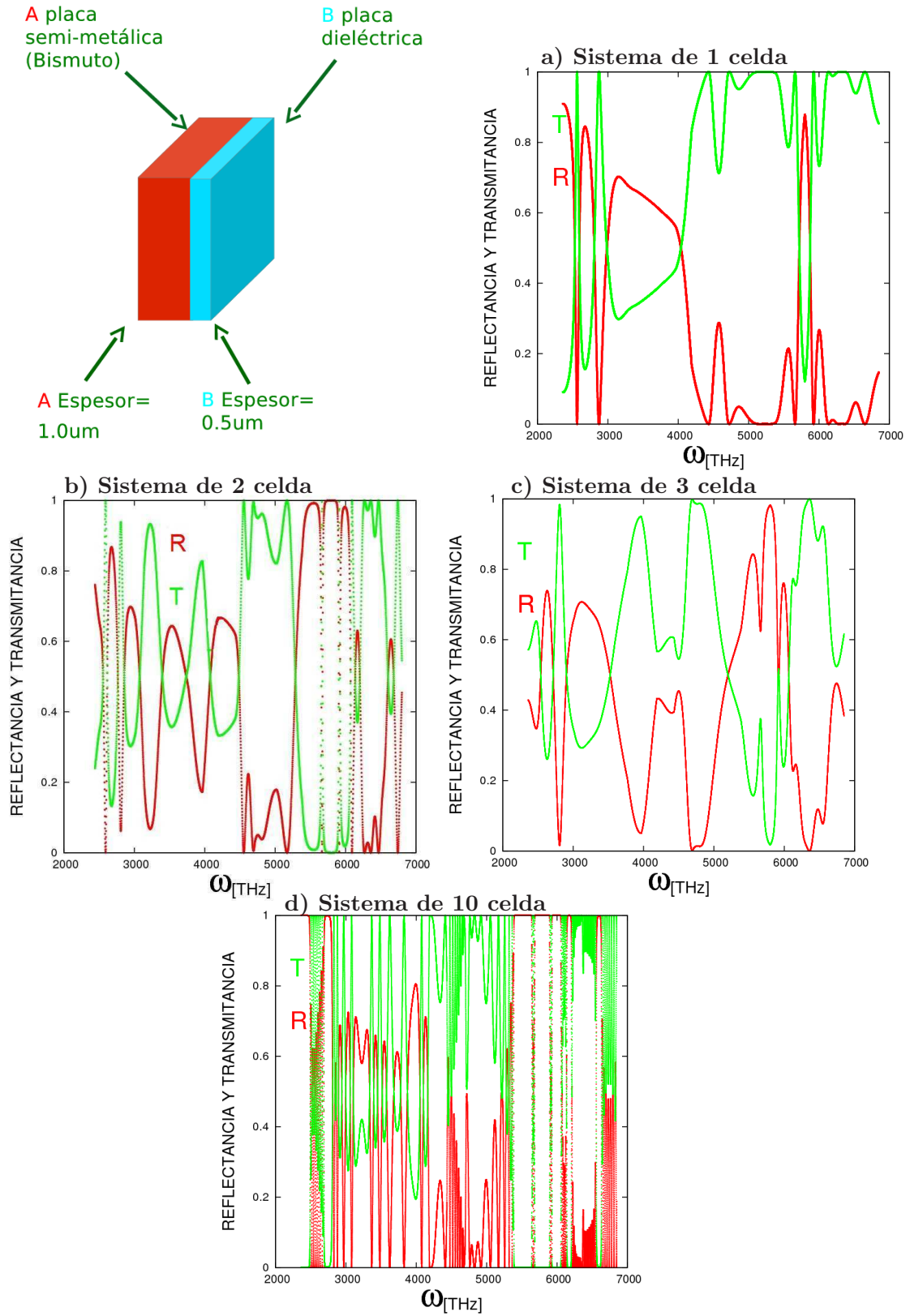


Figura A.6: Reflectancia y transmitancia de un sistema multicapa inmerso en aire, conformado por celdas básicas de vidrio y bismuto en función de la frecuencia, e iluminadas a un ángulo de incidencia $\theta_i = 66.5^\circ$ para polarización perpendicular.

Bibliografía

- [1] E. Yablonovitch “Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics”, *Phys. Rev. Lett.* **58** (20) 2059–2062 (1987).
- [2] S. John, “Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Superlattices”, *Phys. Rev. Lett.* **58** (23) 2486–2489 (1987).
- [3] C. Kittel, “Introduction to Solid State Physics”, 7ma Edición, John Wiley y Sons, Inc., 1996.
- [4] G. Bickauskaite, M. Manousidaki, K. Terzaki, et al., “3D Photonic Nanostructures via Diffusion-Assisted Direct fs Laser Writing”, *P. Soc. Photo-Opt. Ins.* **2012** 927931 1–6 (2012).
- [5] E. Sánchez-Mora, M. Fernández-Candelario, E. Gómez-Barojas, F. Pérez-Rodríguez, “Influence of Fe Ions on the Optical Properties of Fe-ZnO Inverse Opals”, *J. Superdond. Nov. Magn.* **26** (7) 2447–2449 (2013).
- [6] http://dipc.ehu.es/ws_presentacion.php?lng=eng&id=36
- [7] B.-J. Seo, T. Ueda, T. Itoh, H. Fetterman, “Isotropic left handed material at optical frequency with dielectric spheres embedded in negative permittivity medium”, *Appl. Phys. Lett.* **88** 161122 (2006).
- [8] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ”, *Sov. Phys. Uspekhi.* **10**, 509–514 (1968).
- [9] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, S. Schultz, “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity”, *Phys. Rev. Lett.* **84** 4184–4187 (2000).
- [10] J. B. Pendry, “Negative refraction makes perfect lens”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966–3969 (2000).
- [11] A. Reyes-Coronado, N. F. Acosta, R. I. Merino, V. M. Orera, G. Kenanakis, N. Katsarakis, M. Kafesaki, Ch. Mavdis, J. García de Abajo, E. M. Economou, C. M. Soukoulis, “Electromagnetic response of anisotropic eutectic metamaterials in THz range”, *Opt. Express* **20** 14663–14682 (2012).
- [12] V. M. Shalaev, “Optical negative-index metamaterials”, *Nat. Photonics.* **1** 41–48 (2007).

- [13] A. C. Atre, A. García-Etxarri, H. Alaeian, J. A. Dionne, “A Broadband Negative Index Metamaterial at Optical Frequencies”, *P. Soc. Photo. Opt. Ins.* **1** (4) 327–333 (2013).
- [14] R. Márquez-Islas, B. Flores-Desirena, F. Pérez-Rodríguez, “Exciton Polaritons in One-Dimensional Metal- Semiconductor Photonic Crystals”, *J. Nanosci. Nanotechno.* **8**, 1–5, (2008).
- [15] B. Flores-Desirena, R. Márquez-Islas, N. Atenco-Analco, F. Pérez-Rodríguez, “On the coupling of size-quantized excitons with light in one-dimensional dielectric-semiconductor photonic crystals”, *Rev. Mex. Fis.* **54**, (2) 87–94 (2008).
- [16] R. Márquez-Islas, B. Flores-Desirena, F. Pérez-Rodríguez, “Quantized longitudinal exciton-polaritons in periodic metal–semiconductor nanostructures”, *Photonic. Nanostruct.* **10** 69–82 (2012).
- [17] R. Márquez-Islas, B. Zenteno-Mateo, B. Flores-Desirena, A. Reyes-Coronado, F. Pérez-Rodríguez, “Plasma-phono polaritons in superlattices of metal and ionic dielectric”, por enviarse a publicar a *Optics Express*.
- [18] E. Hecht, *Óptica*, 3er edición, Addison Wesley, (1986).
- [19] T. W. Cornelius, M. E. Toimil-Molares, R. Neumann, G. Fahsold, R. Lovrincic, A. Pucci, S. Karim, “Quantum size effects manifest in infrared spectra of single bismuth nanowires”, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 103114 (2006).
- [20] K. C. Huang, P. Bienstman, J. D. Joannopoulos, K. A. Nelson, “Phonon-polariton excitations in photonic crystals,” *Phys. Rev. B* **68**, 5209, (2003).
- [21] R. Ruppin, “Evaluation of extended Maxwell-Garnett theories”, *Opt. Commun.* **182** 273–279 (2000).
- [22] M. Soukoulis, “Electromagnetic response of anisotropic eutectic metamaterials in THz range”, *AIP Conf. Proc.* **1291**, 148–150 (2010).
- [23] S. Foteinopoulou, M. Kafesaki, E. N. Economou, C. M. Soukoulis, “Two-dimensional polaritonic photonic crystals as terahertz uniaxial metamaterials”, *Phys. Rev. B* **84**, 035128 (2011).
- [24] <http://cuentame.inegi.org.mx/Economia/secundario/mineria/.aspxtema=E>.
- [25] F. Pérez, L. F. Castro, Eval Baca, E. Solarte, “Estudio de la morfología superficial de películas delgadas superconductoras de BiSrCaCuO tratadas mediante irradiación con luz laser infrarroja”, *Rev. Colomb. Fis.* **34**, 1 (2002).
- [26] D. W. Ward, E. R. Statz, K. A. Nelson, “Fabrication of polaritonic structures in $LiNbO_3$ and $LiTaO_3$ using femtosecond laser machining”, *Appl. Phys. A* **86**, 49–54 (2007).
- [27] K. Nakamoto, “Infrared and Raman Spectra of Inorganic and Coordination Compounds”, Ed. John Wiley y Sons, New York, 1997.
- [28] R. K. Wangsness, *Campos electromagnéticos*, 3er edición, Limusa, (2001).

- [29] O. Hunderi, “Optical properties of crystalline and amorphous bismuth films”, J. Phys. F: Metal Phys, **5**, 2217-2219, (1975).
- [30] M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, 7th edition, Cambridge, (2004).