BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

PROGRAMACIÓN LÓGICA Y SU SEMÁNTICA EN ESPACIOS MÉTRICOS GENERALIZADOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA **ERICK SALGADO MATIAS**

DIRECTORES DE TESIS
Dr. IVÁN MARTÍNEZ RUÍZ &
Dr. ALEJANDRO RAMÍREZ PÁRAMO

PUEBLA, PUEBLA 6 de diciembre de 2018

Dedicatoria

A mis padres,
Eleazar y Sara.

A mis hermanos,
Andres y Giovanni.

Agradecimientos

Quiero agradecer, en especial, a mis padres Eleazar y Sara, quienes siempre me han apoyado incondicionalmente en todas las decisiones que he tomado respecto a mi vocación, ellos que siempre me han dado todo lo que un hijo puede pedir y pese a las carencias que sufrieron siempre trataron de darme lo mejor. A ellos les debo la persona que soy y el lugar en donde estoy ahora. Es por eso y muchas cosas más que este trabajo va dedicado a ellos.

A mis hermanos, Andres y Giovanni porque con ellos pude disfrutar grandes momentos en mi vida y son fuente de motivación e inspiración para salir adelante.

A una pequeña niña, Lizbeth quien me ha soportado por un gran tiempo, la cual me ha hecho crecer mucho y valorar cada momento que he pasado a su lado. De igual manera a mis colegas de la facultad que de alguna u otra forma ayudaron en mi desarrollo.

A los profesores de esta facultad quienes me brindaron una buena formación académica y motivación para seguir aprendiendo, y también a aquellos que me motivaron a continuar con mis estudios de posgrado.

A mi asesores de tesis, Dr. Iván Martínez Ruíz y Dr. Alejandro Ramírez Páramo, a quienes les estoy muy agradecido por haber aceptado trabajar conmigo y por el apoyo que me brindaron estos dos años.

Por último, quisiera agradecer al Congreso Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo brindado a través de una de las muchas becas que ofertan para continuar con mis estudios de posgrado, ya que de no haber sido por esta beca no habría sido posible concluir este grado en tiempo y forma.

Introducción

La programación lógica inició a principios de los años 70 como consecuencia directa de trabajos anteriores sobre demostradores automáticos de teoremas e inteligencia artificial (IA). La construcción de sistemas deductivos automáticos es, por supuesto, un pilar central dentro de los trabajos que tienen como objetivo el desarrollo de la inteligencia artificial. Basándose en el trabajo de Herbrand [66] en 1930, hubo mucha actividad en los demostradores automáticos a principios de los 60's por Prawitz [49], Gilmore [27], Davis, Putnam [15] y otros. Este esfuerzo culminó en 1965 con la publicación del artículo emblemático hecho por Robinson [53], en el cual introduce el principio de resolución. El principio de resolución es una regla de inferencia, la cual es en particular bien-comportada para la automatización sobre una computadora.

El crédito por la introducción de la programación lógica se le atribuye principalmente a Kowalski [41] y Colmerauer [14], aunque Green [28] y Heyes [31] también deberían compartir dicho mérito. En 1972, Kowalski y Colmerauer fueron los que establecieron la idea (fundamental) de que la lógica puede ser usada como un lenguaje de programación. El acrónimo PROLOG (PROgramming in LOGic) fue concebido y el primer interpretador de PROLOG [14] fue implementado en lenguaje ALGOL-W por Roussel, el mismo año. El sistema PLANNER de Hewit [33] puede ser considerado como un predecesor de PROLOG.

La idea de que un lenguaje de primer orden, o al menos un subconjunto substancial de este, puede ser usado como un lenguaje de programación fue revolucionario porque hasta 1972 la lógica solo había sido usada como una especificación o lenguaje declarativo en ciencias de la computación. Teniendo como principal precursor a Kowalski quien muestra en [41] que la lógica tiene una "procedural interpretation", la cual resulta ser muy adecuada a un lenguaje de programación.

Una de las ideas principales de la programación lógica, [debido a Kowalski [42] y [43]], es que un algoritmo consiste de dos componentes disjuntos: la lógica y el control. La lógica declara cuál es el problema que tiene que ser resuelto, mientras que el control se encarga de declarar cómo el problema será resuelto.

Los sistemas de programación lógica no necesariamente están basados en el principio de resolución, estos pueden ser sistemas no clausales con muchas reglas de inferencia [9], [29], [30]. Así, en este trabajo, consideraremos únicamente sistemas de programación lógica basados en el principio de resolución y en el sistema PROLOG, sin perder de vista que la finalidad u objetivo del trabajo se encuentra en el estudio de la semántica de estos sistemas y la búsqueda de modelos minimales para los mismos mediante operadores.

De esta manera podemos decir brevemente como se encuentra estructurado el trabajo: el capítulo 1 da las bases para el desarrollo del trabajo, donde se mostrará lo que entenderemos por semántica de la programación lógica que está basada principalmente en un lenguaje de primer orden con principal interés en los espacios de valuaciones de la forma $I(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto arbitrario y $\mathcal{T}$ una lógica; en el capítulo 2 introduciremos una serie de operadores y modelos cuyo objetivo principal será la obtención de modelos adecuados para un programa dado, donde los puntos fijos de los operadores que se verán serán clave en este trabajo; en el capítulo 3 se verá la relación que hay entre una área como lo es la topología y la semántica de la programación lógica, enfocándonos principalmente en el estudio de la convergencia en estas topologías. Trabajaremos con funciones distancia relajando de una manera u otra los axiomas de una métrica con el fin de proporcionar Teoremas de punto-fijo análogos al Teorema de contracción de Banach, además de que se verá la relación que existe entre estos Teoremas y los espacios asociados a estos; en el último capítulo se verán ampliamente los modelos soportados 2, 3-valuados destacando la importancia de estos al introducir nuevas clases de programas y exhibiendo la relación que habrá entre las clases de programas que se verán en este trabajo. Finalmente se darán unas generalizaciones de algunos operadores vistos y medios para interpretar los resultados proporcionados para modelos soportados a los modelos estables y perfectos.

Este trabajo se basa principalmente en las contribuciones desarrolladas por Pascal Hitzler y Anthony Karel Seda, presentes en su libro “Mathematical Aspects of Logic Programming Semantics” [véase [35]]. Por último, es necesario mencionar que lo nuevo en este trabajo es la forma en que se exponen algunos de los resultados, así como la modificación en distintas pruebas, buscando solventar nuestro conocimiento en el área.

Índice general

Capítulo 1

Fundamentos

En este capítulo se presentará el tipo de programación en la que está basada la programación lógica. Después, se darán los resultados y conceptos básicos que son necesarios para los fundamentos teóricos de la programación lógica. Finalmente, se impartirá una breve introducción a la programación lógica y teorías de primer orden.

1.1. Programación Declarativa

La programación declarativa (o programación inferencial) puede entenderse como aquel estilo de programación en el cual el programador especifica qué debe computarse más que cómo deben realizarse los cómputos. En este nuevo paradigma de programación un programa consiste de dos partes fundamentales: lógica y control. La tarea básica del programador se centra en la lógica dejando de lado el control, el cual se asume de manera automática por parte del sistema. De lo anterior, podemos pensar que la parte lógica determina el significado del programa mientras que la parte de control se remite a la eficiencia de este. Esta distinción posee la ventaja de que la eficiencia del programa puede refinarse modificando únicamente el control del programa, sin la necesidad de una intervención directa en la lógica del algoritmo. En otras palabras, la característica fundamental de la programación declarativa es el uso de la lógica como lenguaje de programación, la cual podemos conceptualizar como sigue [véase [37]]:

- Un programa es una teoría formal en una cierta lógica, en otras palabras, un conjunto de fórmulas lógicas que resultan ser la especificación del problema que se pretende resolver.
- La computación se entiende como una forma de inferencia o

deducción en dicha lógica.

Se considera que la lógica empleada debe cumplir ciertos requisitos, como son:

1. Un lenguaje lo suficientemente expresivo, para con ello lograr que el campo de aplicación sea lo suficientemente interesante.
2. Poseer una semántica operacional, es decir, cierto mecanismo que nos permita ejecutar los programas.
3. Una semántica declarativa, la cual nos permitirá darle cierto significado a los programas de manera completamente independiente a su posible ejecución.
4. Poseer ciertos resultados de corrección y completitud que aseguren que lo que se computa coincide con aquello que es considerado como verdadero (de acuerdo con la noción de verdad que se este empleando).

Considerando el soporte que se le pueda brindar a la declarativa del programa, se puede tomar el tercer requisito como el más importante ya que es el que permite especificar qué se está computando. En esencia, la semántica declarativa precisa la sintáctica del lenguaje por medio de la traducción del significado de los objetos en elementos y estructuras del dominio conocido.

1.1.1. Programación Lógica

La programación lógica [1] se basa en fragmentos de la lógica de predicados, siendo el más usado la lógica de las cláusulas de Horn (HCL), la cual es la base para un lenguaje de programación cuando se posee una semántica operacional susceptible de una implementación eficiente. Tal es el caso de la resolución SLD, el cual es un método de prueba por refutación [véase [44] pg. 11.] que emplea el algoritmo de unificación [véase [44] pg. 24.] como base y permite la extracción de respuestas. Como semántica declarativa se utiliza una semántica por teoría de modelos que toma como dominio de interpretación un universo puramente sintáctico, en este caso el universo de Herbrand.

Este lenguaje de programación es muy útil para resolver problemas que implican objetos y relaciones entre estos, basándose en los siguientes mecanismos: unificación, estructuras de datos basadas en árboles y backtracking automático. Además, la sintaxis del programa se puede pensar de la siguiente manera: declarar hechos, hacer preguntas y definir reglas.

[1] Para una revisión más amplia consúltese [44]

1.1.2. Programación Funcional

Los lenguajes funcionales están fundamentados en el concepto de función (matemática) y de ecuaciones (en su mayoría recursivas), las cuales constituyen al programa. La programación funcional se centra en la evaluación de expresiones (funcionales) para obtener un valor. En este tipo de programación, la descripción de dominios conduce a la idea de tipos de datos.

Lo que caracteriza a una función, es que a cada elemento de su dominio le corresponde un único elemento de su codominio, es decir, el resultado (salida) de aplicar una función sobre sus argumentos viene determinado exclusivamente por el valor de estos (su entrada). Otra propiedad de las funciones, es su capacidad para ser compuestas. La composición de funciones es la técnica por excelencia en la programación funcional, que permite la construcción de programas mediante el empleo de funciones previamente definidas por el usuario. Además, tales composiciones de funciones refuerza la modularidad de los programas.

La programación declarativa ha encontrado un sin fin de aplicaciones pero para no ser exhaustivos con ellas citemos a las siguientes: procesamiento de lenguaje natural, representación del conocimiento, química y biología molecular, desarrollo de sistemas de producción y sistemas expertos, resolución de problemas, metaprogramación, prototipado de aplicaciones, bases de datos deductivas, servidores de información inteligente, herramientas de soporte al desarrollo de software, entre otras.

1.2. Lógica de Predicados de Primer Orden

En esta sección se discutirá brevemente la sintaxis y la semántica de un lenguaje de primer orden. Para una mayor lectura de estos temas véase [48], [44].

Un lenguaje de primer orden tiene dos aspectos fundamentales: la sintaxis y su semántica. El aspecto sintáctico concierne a las fórmulas bien formadas admitidas por la gramática de un lenguaje formal, así como cuestiones más profundas sobre pruebas teóricas. Por otro lado, la semántica se centra en los significados adjuntos a las fórmulas bien formadas y los símbolos que estas poseen.

1.2.1. Sintaxis de la Lógica de Predicados de Primer Orden

En general, una teoría de primer orden consiste de un alfabeto, un lenguaje de primer orden, un conjunto de axiomas y un conjunto de reglas de inferencias. Brevemente, se puede comentar lo siguiente sobre estos conceptos; el lenguaje de primer orden consiste de las fórmulas bien-formadas de la teoría, los axiomas son un subconjunto designado de las fórmulas bien-formadas y por último, las reglas de inferencia junto con los axiomas son usados para derivar los teoremas de la teoría.

Definición 1.1. *Un **alfabeto** $\mathcal{A}$ consiste de las siguientes siete clases de símbolos: una colección de símbolos constantes (posiblemente vacía) $\{a, b, c, ...\}$; una colección no vacía de símbolos variables $\{u, v, w, x, y, z, ...\}$; una colección de símbolos funcionales (posiblemente vacía) $\{f, g, h, ...\}$; una colección no vacía de símbolos predicados $\{p, q, r, ...\}$; colección de conectivos, en nuestro caso, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; colección de cuantificadores, $\{\exists, \forall\}$; símbolos de puntuación, " (", ")" y " , ".*

La **aridad** de un símbolo funcional f o de un símbolo predicado p, se denota usualmente por $\sharp(f)$ ó $\sharp(p)$, respectivamente. En las siguientes definiciones se asumirá que $\mathcal{A}$ denota algún alfabeto fijo pero arbitrario.

Definición 1.2. *Un **término** es definido recursivamente sobre $\mathcal{A}$ como sigue:*

1. *Cada símbolo constante en $\mathcal{A}$ es un término.*
2. *Cada símbolo variable en $\mathcal{A}$ es un término.*
3. *Si f es algún símbolo funcional n-ário en $\mathcal{A}$ y $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos, entonces $f(t_1, ..., t_n)$ es un término.*

Un término es llamado **básico** si no contiene símbolos variables.

Definición 1.3. *Un **átomo**, fórmula átomica o proposición A sobre $\mathcal{A}$ es una expresión de la forma $p(t_1, ..., t_n)$, donde p es un símbolo predicado n-ário en $\mathcal{A}$ y $t_1, ..., t_n$ son términos sobre $\mathcal{A}$. Una **literal** es un átomo o la negación de un átomo.*

Los átomos algunas veces son llamados **literales positivos** y los átomos negados reciben el nombre de **literales negadas**.

Definición 1.4. *Una fórmula bien-formada (sobre $\mathcal{A}$) es definida recursívamente como sigue:*

1. *Cada átomo es una fórmula bien-formada.*
2. *Si F y G son fórmulas bien-formadas, entonces también lo son $\neg F$ y $F \Box G$ donde $\Box$ es cualquier conectivo binario del lenguaje.*
3. *Si F es una fórmula bien-formada y x es un símbolo variable, entonces $\forall x F$ y $\exists x F$ también lo son.*

Una fórmula es llamada **base** si no contiene símbolos variables. Así, en particular, un **átomo base** es un átomo que no posee símbolos variables.

Es claro que los paréntesis son necesarios al escribir fórmulas bien formadas para evitar ambigüedad. Sin embargo, su uso puede ser minimizado por medio de su jerarquía de precedencia habitual (orden descendiente) que es el siguiente; $\neg, \forall, \exists$ tienen una precedencia mayor; seguida por $\vee, \wedge$; y por último $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Definición 1.5. *Un* ***lenguaje de primer orden*** $\mathcal{L}$ *dado por un alfabeto* $\mathcal{A}$ *consiste del conjunto de todas las fórmulas bien formadas determinadas por los símbolos de* $\mathcal{A}$*. Nos referiremos a términos sobre* $\mathcal{A}$ *como términos en o sobre* $\mathcal{L}$*.*

Ejemplo 1.6. *Supóngase que* $\mathcal{A}$ *es un alfabeto que contiene como símbolos constantes* $\{a, b\}$*, símbolos variables* $\{x\}$*, símbolos funcionales* $\{h\}$ *con* h *funcional binario, símbolos predicados* $\{p\}$ *con* p *binario y los mismos símbolos que se habían definido anteriormente para los conectivos, cuantificadores y puntuación. Como ejemplos de términos sobre* $\mathcal{A}$ *se tienen los siguientes:* $a, b, x, h(a, a), h(x, a), h(h(a, x), b)$*... En particular, note que* $h(a, a)$ *es un término base mientras que* $h(x, a)$ *no lo es.*

Más aún, los siguientes son ejemplos de fórmulas bien-formadas en el lenguaje de primer-orden $\mathcal{L}$ *determinado por el alfabeto* $\mathcal{A}$*:* $p(a, x), \neg p(x, b), p(b, p(a, b)), p(a, b) \vee \neg p(x, a), \forall x p(x, a), \exists x p(b, x)$*..., en donde* $p(b, p(a, b))$ *es una fórmula base (atómica) y* $\forall x p(x, a)$ *no lo es.*

1.2.2. Semántica de la Lógica de Predicados de Primer-Orden

Ahora presentemos, de forma semántica, un estudio de los elementos básicos de la lógica de predicados de primer orden. Para ello, se adopta el enfoque usual utilizado en la teoría de modelos con dos variantes que serán esenciales en el desarrollo de este trabajo. Primero, en su mayoría no se manejarán fórmulas cuantificadas porque para los propósitos de la semántica de programas lógicos, digamos P, generalmente se considerará el conjunto $base(P)$ en lugar de P mismo, donde sus elementos no contienen símbolos variables ni cuantificados. La segunda diferencia esencial corresponde a la posibilidad de emplear más de dos valores de verdad, con sus respectivos valores distinguidos.

En la lógica clásica 2-valuada, y en la mayoría de las matemáticas, es usual emplear el conjunto $TWO = \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$ con valores de verdad *true* **t** y *false* **f**. Sin embargo, en muchos lugares dentro de la programación lógica y otras áreas de la computación, ha sido ventajoso trabajar con más valores de verdad en lugar de solo estos dos. De hecho, Marving Fitting había argumentado en distintas ocasiones el uso de la lógica 3-valuada fuerte y débil de Kleene [véase [20] y [24]] en la programación lógica, donde el conjunto de valores de verdad es $THREE = \{\mathbf{u},\ \mathbf{f},\ \mathbf{t}\}$; $\mathbf{t}$ denota true, $\mathbf{f}$ denota false y $\mathbf{u}$ denota un tercer valor de verdad el cual puede ser pensado como *indefined, none* (ni true, ni false) o *no information*[2].

Fitting también consideró la lógica 4-valuada de Belnap [véase [6], [21] y [23]], en la cual el conjunto de valores de verdad es $FOUR = \{\mathbf{u},\ \mathbf{f},\ \mathbf{t},\ \mathbf{b}\}$. En este caso, $\mathbf{b}$ denota un cuarto valor de verdad que puede entenderse o interpretarse como *both (true and false)*, el cual se puede usar para manejar información conflictiva. Usualmente, se trabajará sobre los conjuntos de valores $TWO, THREE$ y algunas veces, con $FOUR$. Sin embargo, en la formulación de los conceptos de valuación e interpretación, se trabajará de manera muy general al permitir conjuntos arbitrarios de valores de verdad y ciertos conectivos definidos sobre ellos. En cualquier caso, $\mathcal{T}$ denotará un conjunto arbitrario de valores de verdad o, un conjunto de verdad que contiene al menos dos elementos, donde uno de ellos puede distinguirse con el valor de verdad $\mathbf{t}$, que denota true. Además, asumiremos ciertos conectivos binarios como funciones sobre $\mathcal{T}$, dígase: la conjunción ($\wedge$) y disyunción ($\vee$), un conectivo unario: negación ($\neg$). Por último, la implicación ($\leftarrow$) puede ser dada como un tercer conectivo binario o puede ser definida en términos de otros conectivos.

Definición 1.7. *Una lógica es un conjunto de valores de verdad, $\mathcal{T}$, junto con las definiciones de aquellos conectivos referidos a esta.*

En general, si las definiciones de los conectivos son claras, escribiremos simplemente el conjunto de valores de verdad, $\mathcal{T}$, para referirnos a la lógica correspondiente sin causar confusión alguna.

Es común que las definiciones de ciertos conectivos puedan ser dadas por medio de una tabla de verdad. Así es el caso para la mayoría de las lógicas que se usarán en este trabajo. Por ejemplo, el cuadro 1.2.2 presenta como la lógica de Belnap fue empleada por Fitting y como se usará en este trabajo, la cual contiene a las lógicas 2-valuada y la 3-valuada fuerte de Kleene como sublógicas[3].

Mas adelante se verá que $FOUR$ es una lattice completa y por ello, técnicamente, es fácil trabajar con esta lógica. De hecho, esta es una de las razones por cuales la lógica 4-valuada desempeña un rol importante

[2] En algunos contextos *non-termination.*

[3] Una sublógica S de una lógica T, se da en el sentido de que S es un subconjunto de valores de verdad de T y los conectivos en S, son las restricciones a S de los correspondientes conectivos en T.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
u	u	u	u	u
u	f	u	f	u
u	t	u	u	t
u	b	u	f	t
f	u	t	f	u
f	f	t	f	f
f	t	t	f	t
f	b	t	f	b
t	u	f	u	t
t	f	f	f	t
t	t	f	t	t
t	b	f	b	t
b	u	b	f	t
b	f	b	f	b
b	t	b	b	t
b	b	b	b	b

Cuadro 1.1: Lógica 4-valuada de Belnap

en la unificación de la teoría y es la razón principal del que se trabaje con ella, pese a que la mayoría de las aplicaciones en este trabajo sean en los conjuntos TWO y $THREE$.

Las siguientes definiciones son fundamentales para el desarrollo de este trabajo, empleando en ellas la notación común en programación lógica.

Definición 1.8. *Sean $\mathcal{L}$ una lenguaje de primer-orden y D un conjunto no vacío. Una* ***preinterpretación*** *J para $\mathcal{L}$ con* ***dominio*** *D, es una asignación $\cdot^J$ que satisface lo siguinte:*

1. *Para cada símbolo constante $c \in \mathcal{L}$, $c^J \in D$.*

2. *Para cada símbolo funcional n-ário $f \in \mathcal{L}$, f^J es una función n-ária sobre D.*

Una **asignación J-variable** es un mapeo (total) θ, de los símbolos variables de $\mathcal{L}$ a elementos en D.

Sean J una preinterpretación con dominio D y θ una asignación $J-$variable. Entonces, se puede asignar a cada término, $t \in \mathcal{L}$, un elemento en D (llamada su **denotación o término asignado**) de manera recursiva como sigue:

- Si t es un símbolo variable, $(t\theta)^J = \theta(t)$.

- Si t es un símbolo constante, $(t\theta)^J = t^J$.

- Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ símbolo funcional n-ário, donde $t_1, \dots, t_n$ son términos, $(t\theta)^J = f^J((t_1\theta)^J, \dots, (t_n\theta)^J)$.
- Para los átomos $A = p(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{L}$, $(A\theta)^J = p((t_1\theta)^J, \dots, (t_n\theta)^J)$, que será llamada **instancia J-Base** del átomo $p(t_1, \dots, t_n)$.

Se denota por $B_{\mathcal{L},J}$ al conjunto de instancias J-base de los átomos en $\mathcal{L}$. Así, $B_{\mathcal{L},J}$ es el conjunto de todos los símbolos $p(d_1, \dots, d_n)$, donde $p \in \mathcal{L}$ es un símbolo predicado n-ário y $d_1, \dots d_n \in D$.

Definición 1.9. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, J una preinterpretación para $\mathcal{L}$ con dominio D y $\mathcal{T}$ una lógica. Una **valuación o interpretación** para $\mathcal{L}$ (basada sobre J) con valores en $\mathcal{T}$ es un mapeo v, donde $v : B_{\mathcal{L},J} \to \mathcal{T}$.*

Sean $v : B_{\mathcal{L},J} \to \mathcal{T}$ una valuación y θ una asignación J-variable. Entonces, v y θ determinan de manera inductiva un valor de verdad bien-definido en $\mathcal{T}$ para cualquier cuantificador libre, fórmula bien formada $F \in \mathcal{L}$ mediante la construcción de F y las definiciones de los conectivos en $\mathcal{T}$. Se dirá que v **es un modelo para** F, denotado por $v \models F$, si v asigna el valor true **t** para F. Usualmente nos referiremos a valuaciones, interpretaciones y modelos basados sobre J como J-valuaciones, J-interpretaciones y J-modelos, respectivamente.

Denotaremos por $I(B_{\mathcal{L},J}, \mathcal{T})$ al conjunto de todas las valuaciones para $\mathcal{L}$ basadas sobre J con valores en $\mathcal{T}$, donde $I(B_{\mathcal{L},J}, \mathcal{T})$ será considerado como un conjunto ordenado. Tales órdenes sobre $I(B_{\mathcal{L},J}, \mathcal{T})$ vendrán inducidos por aquellos definidos sobre $\mathcal{T}$ y por tanto $B_{\mathcal{L},J}$ no será relevante en ello. Así, consideraremos a las valuaciones o interpretaciones como simples mapeos $X \to \mathcal{T}$ con X un conjunto arbitrario y denotando al conjunto de tales mapeos como $I(X, \mathcal{T})$.

1.3. Espacios Ordenados de Valuaciones

Iniciemos mostrando una notación conveniente relacionada a la terminología de valuación e interpretación. Si se consideran estructuras generales tales como ordenamientos o topologías sobre $I(X, \mathcal{T})$, entenderemos a las valuaciones como mapeos. Si $\mathcal{T}$ es un conjunto con 2, 3 ó 4 elementos, es conveniente identificar a una valuación con una tupla (ordenada) de conjuntos sobre la cual esta toma los diferentes valores de verdad en $\mathcal{T}$. Así, para referirnos a estas últimas utilizaremos el término de interpretación.

Es posible dotar al conjunto de valores de verdad $\mathcal{T}$ con una relación, digamos $\leq$, con la cual $(\mathcal{T}, \leq)$ puede ser un cpo, una semi-lattice superior completa, una lattice completa, un dominio de Scott (con elemento mínimo, bottom ($\perp$)) o incluso una bilattice cuando se le asocie con dos órdenes compatibles. En el caso particular en que $\mathcal{T}$ sea dotado de un orden, $\leq$, se puede definir el correspondiente **ordenamiento puntual** sobre $I(X, \mathcal{T})$ denotado por $\sqsubseteq$ y definido para cuales quiera v_1 y v_2 como sigue: $v_1 \sqsubseteq v_2$ si y solo si $v_1(x) \leq v_2(x)$, para todo $x \in X$.

Observación 1.10. *Si $\leq$ es un orden parcial, entonces $\sqsubseteq$ también lo es. Más aún, si $\perp$ es el elemento bottom de $\mathcal{T}$, la valuación que mapea cada elemento $x \in X$ a $\perp$ servirá como elemento bottom en $I(X, \mathcal{T})$ y se denotará tal valuación, una vez más, por $\perp$ sin causar confusión alguna.*

Finalmente, supóngase que $(\mathcal{T}, \leq)$ es un dominio de Scott, entonces se dirá que una **valuación** $v \in I(X, \mathcal{T})$ **es finita**, si para cada $x \in X$, $v(x)$ es un elemento compacto en $(\mathcal{T}, \leq)$ y el conjunto $\{x \in X \mid v(x) \neq \perp\}$ es finito.

Análogamente, las propiedades sobre la estructura de $\mathcal{T}$ se pueden heredar a $I(X, \mathcal{T})$ las cuales pueden ser establecidas en el siguiente resultado [véase [57]].

Teorema 1.11. *Sean X un conjunto no vacío, $(\mathcal{T}, \leq)$ un conjunto de valores de verdad dotado con elemento bottom $\perp$ e $I(X, \mathcal{T})$ dotado con el ordenamiento puntual y elemento bottom recien definidos.*

1. *Si $(\mathcal{T}, \leq)$ es ordenado parcialmente, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es ordenado parcialmente.*

2. *Si $(\mathcal{T}, \leq)$ es $\omega - cpo$, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es $\omega - cpo$.*

3. *Si $(\mathcal{T}, \leq)$ es cpo, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es cpo.*

4. *Si $(\mathcal{T}, \leq)$ es una semi-lattice superior completa, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una semi-lattice superior completa.*

5. *Si $(\mathcal{T}, \leq)$ es una lattice completa, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una lattice completa.*

6. *Si $(\mathcal{T}, \leq)$ es un dominio de Scott, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es un dominio de Scott. En esta situación los elementos compactos de $I(X, \mathcal{T})$ son las valuaciones finitas.*

Demostración.
(1) Es inmediato verificar que $I(X, \mathcal{T})$ es un ordenamiento parcial a partir del ordenamiento que éste posee.

(2) El argumento es similar a (3) por lo que será omitido.

(3) Sea $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$ un subconjunto dirigido. Afirmamos que para cualquier $x \in X$, $M(x) = \{v(x) \mid v \in M\}$ es un conjunto dirigido.

En efecto, sean $x \in X$ y $v_1, v_2 \in M$ tales que $v_1(x), v_2(x) \in M(x)$. Entonces, existe $v_3 \in M$ tal que $v_1 \leq v_3$ y $v_2 \leq v_3$, así $v_1(x) \sqsubseteq v_3(x)$ y $v_2(x) \sqsubseteq v_3(x)$. Por tanto, $M(x)$ es dirigido. Más aún, dicho conjunto posee un supremo en $\mathcal{T}$ ya que $(\mathcal{T}, \leq)$ es un *cpo*. Por lo anterior, se puede definir una valuación v_M en X, por $v_M(x) := \bigsqcup\{v(x) \mid v \in M\} = \bigsqcup(M(x))$, donde es fácil verificar que v_M es el supremo de M en $I(X, \mathcal{T})$. De hecho, para cualquier conjunto dirigido $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$, $\bigsqcup M$ satisface la siguiente relación: para cada $x \in X$, $\big(\bigsqcup M\big)(x) = \bigsqcup(M(x))$, donde $M(x) := \{v(x) \mid v \in M\}$. En efecto, sea $x \in X$, véase que $(i)\big(\bigsqcup M\big)(x) \leq \bigsqcup(M(x))$ y $(ii)\big(\bigsqcup M\big)(x) \geq \bigsqcup(M(x))$. Para (i), dado que para toda $v \in M : v(x) \leq v_M(x)$, entonces $v \sqsubseteq v_M$. Así, $\bigsqcup M \sqsubseteq v_M$ y por ello, $\big(\bigsqcup M\big)(x) \leq v_M(x)$. Para (ii), dado que para toda $v \in M$, $v \sqsubseteq \bigsqcup M$. Entonces, para toda $v \in M : v(x) \leq \big(\bigsqcup M\big)(x)$. Así, $v_M(x) \leq \big(\bigsqcup M\big)(x)$. De (i) y (ii) se tiene lo pedido. Por tanto, $I(X, \mathcal{T})$ es un *cpo*.

(4) Por lo argumentado en (3), para cada $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$ subconjunto dirigido existe el supremo $\bigsqcup M$. Más aún, para cualquier $M \subseteq I(X, \mathcal{T})$ se tiene que existe $\bigsqcap M$ y es definido por: $\big(\bigsqcap M\big)(x) = \bigsqcap(M(x))$ para cada $x \in X$, donde $M(x)$ es como se definió en (3). Por tanto, $I(X, \mathcal{T})$ es una semi-lattice superior completa.

(5) Se sigue de manera inmediata por los incisos (3) y (4).

(6) Mostremos primero que las valuaciones finitas son los elementos compactos. Supóngase que v es una valuación finita y que $\{x \in X \mid v(x) \neq \bot\} = \{x_1, \ldots, x_n\} = V$. Además, supóngase que $M = \{u_k \mid k \in K\}$ es un conjunto dirigido de valuaciones en $I(X, \mathcal{T})$ tal que $v \sqsubseteq \bigsqcup M$. Sea $x_i \in V$. Entonces, se tiene que $v(x_i) \leq \bigsqcup M(x_i) = \bigsqcup\big(M(x_i)\big)$. Lo anterior impica que, $v(x_i)$ es un elemento compacto y $\{u_k(x_i) \mid k \in K\}$ es un conjunto dirigido. Por lo tanto, para cada $i = \overline{1, n}$, existe $u_{k_i} \in M$ tal que $v(x_i) \leq u_{k_i}(x_i)$. Como M es dirigido, existe $u \in M$ tal que $u_{k_i} \sqsubseteq u$ para todo i, y por tanto, se sigue de manera inmediata que $v \sqsubseteq u$. Se concluye que v es compacto.

Recíprocamente, supóngase que u es cualquier valuación sobre X y sea M el conjunto de todas las valuaciones finitas v tales que $v \sqsubseteq u$. Veamos que M es dirigido. En efecto, sean $v_1, v_2 \in M$ valuaciones no triviales y $x \in X$ tales que $v_1(x) \neq \bot$ y $v_2(x) \neq \bot$ (hay sólo un número finito de tales x que lo cumplen). Nótese que $approx(u(x))$ es un conjunto dirigido en $\mathcal{T}$, que $v_1(x), v_2(x) \in approx(u(x))$ y por considerar valuaciones de un-punto (llamadas, aquellas valuaciones w tales que $w(x) \neq \bot$ en al menos un valor, x), existe $v_3(x) \in approx(u(x))$ tal que $v_1(x) \leq v_3(x)$ y $v_2(x) \leq v_3(x)$. De lo anterior se sigue que, existe $v_3 \in M$ tal que $v_1 \sqsubseteq v_3$ y $v_2 \sqsubseteq v_3$, y por tanto M es dirigido. Más aún, dado $x \in X$, y $a \in approx(u(x))$ es posible elegir por v_a^x a alguna valuación de un-punto que satisface $v_a^x(x) = a$ y $v_a^x(y) = \bot$ para todo $y \neq x$.

Entonces, se verifica que $v_a^x \in M$ y $\bigsqcup\{v_a^x \mid a \in \mathit{approx}(u(x))\} = u(x)$. Así, $\bigsqcup M = u$.

Se sigue de las observaciones anteriores que si u es compacto, entonces existe $v \in M$ tal que $u \sqsubseteq v$. Por tanto el conjunto $\{x \in X \mid v(x) \neq \bot\}$ es finito. Afirmamos que, para cada $x \in X$, $u(x)$ es un elemento compacto en $(\mathcal{T}, \leq)$. En efecto, supongamos lo contrario, es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $u(x_0)$ no es compacto en $(\mathcal{T}, \leq)$. Entonces, existe al menos un conjunto dirigido $N \in \mathcal{T}$ tal que $u(x_0) \leq \bigsqcup N$, para el cual no existe $n \in N$ con $u(x_0) \leq n$. Para cada $n \in N$ defínase la familia $N_n^* := \{u_n \in I(X, \mathcal{T}) \mid n \in N\}$ donde $u_n(x) = u(x)$ para todo $x \neq x_0$ y $u_n(x_0) = n$. Entonces, N_n^* es dirigido y $u \sqsubseteq \bigsqcup\{u_n \mid n \in N\}$, sin embargo, aún no se tiene $u \sqsubseteq u_n$ para cualquier $n \in N$. Esto contradice el hecho de que u sea un elemento compacto. Por tanto, se cumple la afirmación. Así, los elementos compactos son, de hecho, las valuaciones finitas e, incluso, se observa que $\mathit{approx}(u)$ es dirigido y que $\bigsqcup \mathit{approx}(u) = u$ para cada valuación $u \in I(X, \mathcal{T})$.

Finalmente, si u_1 y u_2 son dos elementos finitos consistentes en $I(X, \mathcal{T})$, entonces la valuación definida por $v(x) := \bigsqcup\{u_1, u_2\}$ para cada $x \in X$, es el supremo de u_1 y u_2 (y es un elemento finito). $\square$

1.3.1. Conjuntos TWO, THREE y FOUR

Una gran parte de la semántica declarativa para programas lógicos emplea la lógica clásica 2-valuada, 3-valuada y la 4-valuada. En esta sección se discutirán las propiedades de los conjuntos $TWO, THREE$ y $FOUR$, implícitos en las lógicas mencionadas.

En la lógica clásica el ordenamiento usual tomado es **truth**, el cual es un orden parcial denotado por $\leq_t$ que satisface $\mathbf{f} \leq_t \mathbf{t}$. Por ello, TWO resulta ser una lattice completa con elemento bottom $\mathbf{f}$.

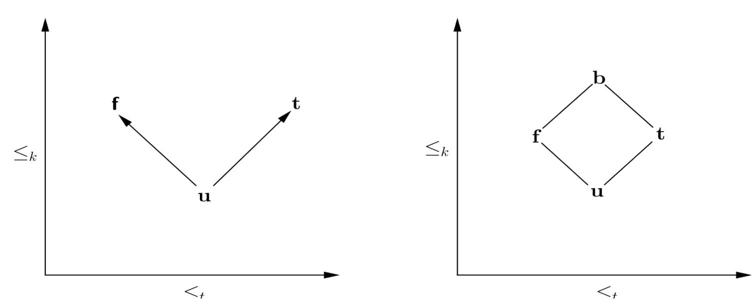

Figura 1.1: Diagramas de Hasse para TRHEE y FOUR.

Para la lógica 3-valuada, consideraremos los siguientes dos: el ordenamiento **knowledge** $\leq_k$ y el ordenamiento **truth** $\leq_t$. Finalmente, para $FOUR$ también se tienen dos órdenes, **knowledge** y **truth**, los cuales se representan de manera completamente análoga a los de $THREE$ y se encuentran indicados en la figura 1.1. En ambos órdenes $FOUR$ es una lattice completa, más aún es una bilattice. Habiendo definido los posibles ordenamientos que se utilizarán en el conjunto $FOUR$, es conveniente dar la siguiente definición sobre el uso de la implicación.

Definición 1.12. *Sean $t_1, t_2 \in FOUR$. Se define la* ***implicación*** *para t_1, t_2 como sigue; $t_1 \leftarrow t_2$ toma el valor* ***f*** *si y solo si $t_1 \leq_t t_2$, y* ***t*** *en otro caso.*

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia de una aplicación directa del Teorema 1.11, con el correspondiente ordenamiento puntual inducido.

Teorema 1.13. *Sea X un conjunto arbitrario. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Si $\mathcal{T} = TWO$, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una lattice completa con el orden $\leq_t$.*
2. *Si $\mathcal{T} = THREE$, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una semi-lattice superior completa con el orden $\leq_k$ y es una lattice completa con el orden $\leq_t$.*
3. *Si $\mathcal{T} = FOUR$, entonces $I(X, \mathcal{T})$ es una lattice completa en cada uno de los ordenes $\leq_t, \leq_k$.*

Más áun, en cada caso y en cada orden, el conjunto $I(X, \mathcal{T})$ es un dominio de Scott, donde sus elementos compactos son aquellas valuaciones v para las cuales el conjunto $\{x \in X \mid v(x) \neq \perp\}$ es finito.

Nótese que la estructura de orden es independiente de la correspondiente lógica involucrada, a diferencia del conjunto de verdad base. Por ejemplo, las lógicas 3-valuadas fuerte y débil de Kleene dan lugar a la misma estructura de orden sobre $I(X, \mathcal{T})$ pese a que la definición de sus conectivos sea diferente.

Dada v una valuación, se define de manera única una partición de X de la siguiente manera; $\{v_{\mathbf{u}} = v^{-1}(\mathbf{u}),\ v_{\mathbf{f}} = v^{-1}(\mathbf{f}),\ v_{\mathbf{t}} = v^{-1}(\mathbf{t})$ y $v_{\mathbf{b}} = v^{-1}(\mathbf{b})\}$, donde alguno de ellos puede ser incluso vacío. Con la notación anterior, una valuación v que toma valores en TWO queda completamente determinada por $I = v_{\mathbf{t}}$. Por tanto, tal valuación puede ser identificada con I. Si la valuacion v toma valores en $THREE$, ésta puede ser identificada con cualquiera de estas parejas ordenadas:(1)

$I = (v_{\mathbf{t}}, v_{\mathbf{f}})$, si se considera el orden $\sqsubseteq_k$ con elemento bottom $\mathbf{u}$, también llamado **valor por defecto** en el sentido que $v_u = X \setminus (v_{\mathbf{t}} \cup v_{\mathbf{f}})$. (2) $I = (v_{\mathbf{t}}, v_{\mathbf{u}})$, si se está considerando el orden $\sqsubseteq_t$ con elemento bottom $\mathbf{f}$, también llamado **valor por defecto** en el sentido que $v_f = X \setminus (v_{\mathbf{t}} \cup v_{\mathbf{u}})$. Finalmente, una valuación que toma valores en $FOUR$, puede ser identificada con la terna $I = (v_{\mathbf{t}}, v_{\mathbf{f}}, v_{\mathbf{b}})$ si $\mathbf{u}$ es el elemento bottom y valor por defecto, o con la terna $I = (v_{\mathbf{t}}, v_{\mathbf{u}}, v_{\mathbf{b}})$ cuando $\mathbf{f}$ es el elemento bottom y valor por defecto.

Recíprocamente, cualquier $I \subseteq X$ determina una valuación $v : X \to TWO$ con la propiedad: $v(x) = \mathbf{t}$ si y solo si $x \in I$. Dado el orden $\sqsubseteq_k$, la pareja disjunta de subconjuntos de X, $I = (I_{\mathbf{t}}, I_{\mathbf{f}})$, determina una valuación $v : X \to THREE$ donde $v(x) = \mathbf{t}$ si $x \in I_{\mathbf{t}}$; $v(x) = \mathbf{f}$ si $x \in I_{\mathbf{f}}$; $v(x) = \mathbf{u}$ si $x \in X \setminus I_{\mathbf{t}} \cup I_{\mathbf{f}}$. De manera completamente análoga se puede definir una valuación sobre $THREE$ considerando el orden $\sqsubseteq_t$. Por último, lo mismo se puede hacer con las ternas $I = (I_{\mathbf{t}}, I_{\mathbf{f}}, I_{\mathbf{b}})$, $I = (I_{\mathbf{t}}, I_{\mathbf{u}}, I_{\mathbf{b}})$ y obtener una relación para la valuación $v : X \to FOUR$.

La relación biunívoca entre mapeos y tuplas de subconjuntos nos permite utilizar indistintamente tales conceptos. Como se había mencionado previamente, se utilizará el término valuación para referirse a mapeos y el término interpretación para referirse a tuplas de subconjuntos. Así, será de utilidad introducir la siguiente terminología.

Definición 1.14. *Una valuación o interpretación que tome valores en TWO,$THREE$ o $FOUR$ será llamada 2-valuada, 3-valuada o 4-valuada, respectivamente.*

La identificación mencionada de valuaciones con tuplas de conjuntos, permite definir una relación que lleva el ordenamiento puntual de valuaciones sobre el ordenamiento puntual de interpretaciones y se empleará la misma notación para los ordenamientos en los casos correspondientes. En consecuencia, se obtiene el siguiente resultado cuya prueba es directa.

Teorema 1.15.

1. *Sean I y K interpretaciones 2-valuadas. Entonces $I \sqsubseteq_t K$ si y solo si $I \subseteq K$ como subconjuntos de X. El elemento bottom para el conjunto de interpretaciones 2-valuadas está dado por el conjunto vacío.*

2. *Sean I y K interpretaciones 3-valuadas. Entonces $I \sqsubseteq_k K$ si y solo si $I_{\mathbf{t}} \subset K_{\mathbf{t}}$ y $I_{\mathbf{f}} \subset K_{\mathbf{f}}$. De manera similar, $I \sqsubseteq_t K$ si y solo si $I_{\mathbf{t}} \subset K_{\mathbf{t}}$ y $K_{\mathbf{f}} \subset I_{\mathbf{f}}$. En ambos ordenes, el elemento bottom para el conjunto de interpretaciones 3-valuadas está dado por la pareja $(\emptyset, \emptyset)$.*

3. *Sean I y K interpretaciones 4-valuadas. Entonces $I \sqsubseteq_k K$ si y solo si $I_{\boldsymbol{t}} \subset K_{\boldsymbol{t}} \cup K_{\boldsymbol{b}}$, $I_{\boldsymbol{f}} \subset K_{\boldsymbol{f}} \cup K_{\boldsymbol{b}}$ y $I_{\boldsymbol{b}} \subseteq K_{\boldsymbol{b}}$. De manera similar, $I \sqsubseteq_t K$ si y solo si $I_{\boldsymbol{t}} \subset K_{\boldsymbol{t}}$, $I_{\boldsymbol{u}} \subset K_{\boldsymbol{u}} \subset K_{\boldsymbol{t}}$ y $I_{\boldsymbol{b}} \subseteq K_{\boldsymbol{b}} \cup K_{\boldsymbol{t}}$. En ambos ordenes, el elemento bottom para el conjunto de interpretaciones 4-valuadas está dado por la terna $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.*

En los casos anteriores, excepto en la lógica 3-valuada, se trabaja con una lattice completa. Por tanto, la valuación que mapea cada elemento de X en el correspondiente elemento top, es en si mismo un elemento top para el espacio de valuaciones. Para la excepción (interpretaciones 3-valuadas con el orden $\sqsubseteq_k$) es claro que las interpretaciones $I = (I_{\mathbf{t}}, I_{\mathbf{f}})$ donde $I_{\mathbf{t}} \cup I_{\mathbf{f}} = X$ son elementos máximales para el ordenamiento $\sqsubseteq_k$. Más aún, cada elemento máximal $I = (I_{\mathbf{t}}, I_{\mathbf{f}})$ da lugar a una interpretación 2-valuada $I_{\mathbf{t}}$ y reciprocamente, cada interpretación 2-valuada I da lugar a una interpretación 3-valuada $(I, X \setminus I)$, donde tal correspondencia es uno a uno. Por tanto, las interpretaciones 2-valuadas pueden ser vistas como interpretaciones máximales 3-valuadas. De hecho, los elementos máximales son llamados **interpretaciones totales**, mientras que los elementos restantes son llamados **interpretaciones parciales**.

1.3.2. Interpretaciones 3-Valuadas y Conjuntos Indicadores

Una pregunta natural relativa a las interpretaciones 3-valuadas es la siguiente, ¿existe una forma alternativa de estudiar a las interpretaciones 3-valuadas respecto al orden $\sqsubseteq_k$? Para dar una respuesta positiva a esta pregunta veamos lo siguiente.

Sean X un conjunto arbitrario e $I \subseteq X$, defínanse los conjuntos $\neg X := \{\neg x \mid x \in X\}$ y $\neg I = \{\neg x \mid x \in I\}$. Si X es un conjunto de átomos o literales, entonces $\neg x$ es significativo. En ambos casos, supóngase que $x \neq \neg x$ para toda $x \in X$. Un subconjunto $C \subseteq X \cup \neg X$ es llamado **subconjunto indicador** de X, y es llamado **consistente** si para cualquier $x \in X$: $x, \neg x \notin C$. Es claro que todo subconjunto indicador de X es de la forma $I^+ \cup \neg I^-$, donde I^+ e I^- son subconjuntos de X y será consistente si y solo si $I^+ \cap I^- = \emptyset$.

Ahora, obsérvese que si $I = I^+ \cup I^-$ es un subconjunto indicador consistente de X, entonces I da lugar a una interpretación 3-valuada formada por la pareja (I^+, I^-). Entonces, identificando a I como una interpretación 3-valuada, se tiene que $I_{\mathbf{t}} = I^+ = \{x \in X \mid x \in I\}$ y que $I_{\mathbf{f}} = I^- = \{x \in X \mid \neg x \in I\}$. Reciprocamente, cada interpretación 3-valuada $I = (I_{\mathbf{t}}, I_{\mathbf{f}}) = (I^+, I^-)$ da lugar a un subconjunto indicador consistente, $I^+ \cup I^-$, de X. Por último, esta correspondencia es uno a uno y por ello $I(X, THREE)$ puede ser identificado con el conjunto de todos los subconjuntos indicadores consistentes de X. De ahora en adelante, y de manera recurrente, se hará uso de este hecho sin previo aviso. De hecho, en esta representación se tiene que $I \sqsubseteq_k K$ si y solo si $I^+ \cup I^- \subseteq K^+ \cup K^-$ y más aún, el elemento bottom es el conjunto vacío visto como un subconjunto indicador consistente de X.

Luego, dado X subconjunto de átomos en un lenguaje de primer-orden $\mathcal{L}$ y dada I interpretación 3-valuada vista como un subconjunto indicador consistente de X, se tiene que para cualquier literal $L = A$ con A un átomo, se cumple lo siguiente: $L \in I$, si $A \in I$; $\neg L \in I$, si $\neg A \in I$.

Resultados similares se obtienen, si $L = \neg A$. Con el uso de estas observaciones, se dirá que una literal L es cierta (true) en I, si $L \in I$. L es falsa (false) en I, si $\neg L \in I$. Y por último que L es indefinida (undefined) en I, en cualquier otro caso.

Nótese que estos hechos son equivalentes a definir el operador negación, $\neg : THREE \to THREE$, por medio del cuadro 1.2.2. Así, $\neg(\mathbf{t}) = \mathbf{f}$, $\neg(\mathbf{f}) = \mathbf{t}$ y $\neg(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

1.3.3. Operadores Sobre Espacios de Valuaciones

Como se ha visto, un ordenamiento sobre un espacio de valores de verdad $\mathcal{T}$ induce un orden sobre el correspondiente espacio $I(X, \mathcal{T})$. De manera similar, otros conectivos definidos sobre $\mathcal{T}$ inducen ciertos operadores definidos sobre $I(X, \mathcal{T})$, por ello discutiremos de manera breve esta observación.

De hecho basta enfocarse en la lógica 4-valuada de Belnap, en la cual el conjunto de verdad es $FOUR$ y los conectivos son determinados por el cuadro 1.2.2. Observemos que la lógica 2-valuada clásica y la lógica 3-valuada fuerte de Kleene son sublógicas de $FOUR$. Por tanto, no es necesario que se trabajen por separado.

El primero de estos operadores surge a través de la negación, el cual será denotado por $\neg$ (también) sobre $I(X, \mathcal{T})$ en si mismo, mediante $(\neg v)(x) = \neg(v(x))$ para cada $x \in X$ y con $v \in I(X, \mathcal{T})$, arbitrario.

Análogamente, los conectivos $\vee$ y $\wedge$ determinan operadores de $I(X, \mathcal{T}) \times I(X, \mathcal{T})$ hacia $I(X, \mathcal{T})$ tales que, para cada $x \in X$ y $u, v \in I(X, \mathcal{T})$ arbitrarios, se definen: $(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x)$ y $(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x)$. Note que, la sobrecarga en los símbolos $\vee$ y $\wedge$ no debe causar dificultad alguna y de manera similar se pueden tratar los conectivos $\to$ y $\leftrightarrow$.

Ahora, obsérvese lo siguiente, si $v_1, v_2 \in I(X, \mathcal{T})$ tales que $v_1 \sqsubseteq_t v_2$, $v_1(x) = \mathbf{f}$ y $v_2(x) = \mathbf{t}$ para algún $x \in X$, entonces $\neg v_1 \not\sqsubseteq_t \neg v_2$, lo cual es inmediato. De lo anterior se tiene que el operador $\neg$ no es monótono en este caso. Por tanto, $\neg$ no es un orden continuo con el orden $(\sqsubseteq_t)$. Sin embargo, es un orden continuo si se considera el orden $\sqsubseteq_k$.

La siguiente proposición es solo una muestra de las muchas propiedades, que se pueden tener en $I(X, \mathcal{T})$ cuando $\mathcal{T}$ es el conjunto $FOUR$.

Proposición 1.16. *Los operadores $\vee$ y $\wedge$, son monótonos en cada entrada.*

Demostración. Sea $v \in I(X, \mathcal{T})$. Dado la conmutatividad del operador $\vee$, es suficiente mostrar que la función $f_\vee : I(X, \mathcal{T}) \to I(X, \mathcal{T})$ es monótona. Donde $f_\vee$ está definida por; $f_\vee(u) = u \vee v$, para cualquier $u \in I(X, \mathcal{T})$. Del cuadro 1.2.2 y del diagrama de Hasse para $FOUR$ (figura 1.1), se tiene de manera inmediata que $f_\vee$ es monótona. Por tanto, el operador $\vee$ es monótono. De manera completamente análoga se prueba que el operador $\wedge$ es monótono. $\square$

Capítulo 2

Semántica de Programas Lógicos

El enfoque que se adoptará para el estudio de programas lógicos será dado a partir de su semántica declarativa evitando en su mayoría los aspectos relacionados con su cómputo.

La semántica declarativa de un programa es dada por la asignación de modelos adecuados, los cuales son modelos con ciertas propiedades que se consideran deseables para el objetivo del programa, así como su aplicación. Además, habremos de considerar que toda la semántica que se discuta puede ser descrita en términos de puntos fijos de ciertos operadores asociados a algún programa lógico.

2.1. Modelos y Operadores sobre Programas Lógicos

Se dará inicio a esta sección definiendo uno de los conceptos base para trabajar con un programa lógico.

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Una* ***cláusula de programa o regla*** *en $\mathcal{L}$ es una fórmula de la forma $(\forall x_1)\dots(\forall x_l)(A \leftarrow L_1 \wedge \cdots \wedge L_n)$ donde $l, n \in \mathbb{N}$, "A" es un átomo en $\mathcal{L}$, "L_i" literales en $\mathcal{L}$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ y "x_j" variables que ocurren en la fórmula con $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Para simplificar la notación nos referiremos únicamente por $A \leftarrow L_1, \dots, L_n$ a una cláusula del programa, donde el átomo "A" es llamado la **cabeza de la cláusula**, cada "L_i" es llamada **literal del cuerpo de la cláusula** y el "$L_1, \dots, L_n$" es llamado el **cuerpo de la cláusula**.

Como un abuso de notación, se permitirá que $n = 0$ en el sentido que el cuerpo de la cláusula es vacío. En este caso, la cláusula $(A \leftarrow)$ o simplemente A es llamada **cláusula unitaria o hecho**[1]. Si una literal del cuerpo L es un átomo B, entonces se dice que B **ocurre positivamente** en el cuerpo de la cláusula. Por otro lado, si L es un átomo negado, dígase $\neg B$, entonces se dice que B **ocurre negativamente** en el cuerpo de la cláusula. Por tanto, una cláusula típica será denotada por $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, B_m$ donde A_i y B_j son átomos en $\mathcal{L}$ con el respectivo corrimiento de los índices i, j.

En general se considerarán tres tipos de programas lógicos, que son:

1. **Programa lógico normal**, aquel que posee un conjunto finito de cláusulas.

2. **Programa lógico definite**, aquel programa lógico en el cual no ocurren símbolos negados.

3. **Programa lógico proposicional**, aquel programa lógico en el cual todos los símbolos predicados son de aridad cero.

El término **programa** se usará en el sentido de programa normal.

Cada programa P tiene asociado un lenguaje denotado por $\mathcal{L}_P$, el cual llamaremos base de un lenguaje del programa P. $\mathcal{L}_P$ no será dado de manera explicita pero se sobreentiende que el lengueje consiste de las constantes, variables, funciones y símbolos predicados que ocurren en el programa P. Convenimos que cuando P no contenga algún símbolo constante se añadirá uno.

Por último, como una convención relativa a programas lógicos, se establece que los símbolos constantes, funcionales y predicados se denotarán mediante letras minúsculas, mientras que los símbolos variables por letras mayúsculas.

Los siguientes ejemplos de programas exhiben lo mencionado en líneas anteriores.

Ejemplo 2.2 (Programa-Tweety1)**.** *Sea Tweety1 el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$\begin{array}{rcl}
\mathit{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\
\mathit{ave(bob)} & \leftarrow & \\
\mathit{ave(X)} & \leftarrow & \mathit{pingüino(X)} \\
\mathit{vuela(X)} & \leftarrow & \mathit{ave(X)}, \neg \mathit{pingüino(X)}
\end{array}$$

Por tanto, Tweety1 representa los siguientes hechos: tweety es un pingüino, bob es una ave, todos los pingüinos son aves y cada ave que no sea un pingüino puede volar.

[1] Algunas veces se escribirán las cláusulas simplemente como A ←cuerpo, donde "cuerpo" denota el cuerpo de la cláusula.

Ejemplo 2.3 (Programa-Even). *Sea Even el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$\begin{array}{rcl} \mathit{par(a)} & \leftarrow & \\ \mathit{par(s(X))} & \leftarrow & \neg \mathit{par(X)} \end{array}$$

El significado interpretado de este programa es el siguiente: "a" es el número natural 0 *(cero) y "s" es la función sucesor sobre los números naturales. Así, el programa representa los siguientes hechos; "0" es par y si algún número no es par, entonces su sucesor es par.*

Ejemplo 2.4 (Programa-Lenght). *Sea Lenght el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$\begin{array}{rcl} \mathit{longitud}([\ ], a) & \leftarrow & \\ \mathit{longitud}([H \mid T], s(X)) & \leftarrow & \mathit{longitud}(T, X) \end{array}$$

Siguiendo la convención de Prolog, $[\ ]$ *denota la lista vacía y* $[\cdot \mid \cdot]$ *denota una función binaria cuyo siginficado deseado es el constructor lista y donde el primer argumento es la cabeza de la lista y el segundo argumento es la cola. Así, el programa Lenght se puede entender como una forma recursiva de definir la longitud de una lista, usando la notación sucesor para números naturales del programa 2.3. Más aún, Lenght es un ejemplo de un programa definite.*

Consideremos ahora el estudio semántico de los programas.

Definición 2.5. *Sean P un programa con lenguaje base $\mathcal{L}_P$ y D un conjunto no vacío. Una **preinterpretación** J **para** P **con dominio** D, es una preinterpretación J para $\mathcal{L}_P$ con dominio D.*

Sean J una preinterpretación para el programa P con dominio D y θ una asignación J-variable. Dada una cláusula C en P con $C = A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m$ se define $(C\theta)^J$ como,

$$(A\theta)^J \leftarrow (A_1\theta)^J, \ldots, (A_n\theta)^J, \neg(B_1\theta)^J, \ldots, \neg(B_m\theta)^J.$$

*Usualmente a $(C\theta)^J$ se le llama una **instancia** J**-básica de** C. Se denotará al conjunto de todas las instancias J-básicas de cláusulas en P por $\mathbf{Base_J(P)}$. Por último, se denotará por $\mathbf{B_{P,J}}$ al conjunto $B_{\mathcal{L}_P,J}$ de todas las instancias J-base de átomos en $\mathcal{L}_P$, es decir, la colección de todos los elementos de la forma $\mathbf{p(d_1, \ldots, d_n)}$, donde p es un símbolo predicado $n-$ario en $\mathcal{L}_P$ y $d_1, \ldots, d_n \in D$.*

En general, se trabajará sobre una preinterpretación fija J elegida arbitrariamente y omitiremos hacer mención a ella, si no causa confusión. Así, se escribirá únicamente; B_P, $Base(P)$, instancia básica, ... en lugar de lo ya mencionado. De la misma manera uno se referirá a los elementos de $Base_J(P)$ como cláusulas (base) y se aplicará la terminología ya definida para cláusulas de programas a las cláusulas base, tales como "definite".

Una de las principales interpretaciones para el estudio de programas lógicos son las llamadas **preinterpretaciones de Herbrand**, las cuales son suficientes para el estudio de programas lógicos [véase [44]]. Por tanto, en este trabajo formularemos las definiciones básicas en completa generalidad dado que ello no produce ningún trabajo extra y consideraremos la preinterpretación de Herbrand a no ser que se mencione lo contrario.

Definición 2.6. *Sea un programa P con lenguaje base $\mathcal{L}_P$. Entonces: (1) El* ***universo de Herbrand*** *$\mathcal{U}_\mathcal{P}$ de P, es el conjunto de todos los términos base en $\mathcal{L}_P$. (2) La* ***preinterpretación de Herbrand****, dígase J para P, tiene como dominio a $\mathcal{U}_P$ y se define sobre los símbolos funcionales y constantes como sigue:*

- *Para cada símbolo constante $c \in \mathcal{L}_P$, $c^J = c$.*
- *Para cada símbolo funcional n-ario $f \in \mathcal{L}_P$, J le asigna a f el mapeo $f^J : \mathcal{U}_P^n \to \mathcal{U}_P$ definido por, $f^J(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.*

Ejemplo 2.7. *Para el programa Tweety1(Ejemplo 2.2), se tiene:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_{Tweety1} & = & \{\texttt{bob},\ \texttt{tweety}\}, \\ B_{Tweety1} & = & \{\texttt{pingüino(bob)},\ \texttt{pingüino(tweety)}, \\ & & \texttt{ave(bob)},\ \texttt{ave(tweety)}, \\ & & \texttt{vuela(bob)},\ \texttt{vuela(tweety)}\}, \end{array}$$

Y Base(Tweety1) consiste de las siguientes cláusulas.

$$\begin{array}{rcl} \texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\ \texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \\ \texttt{ave(tweety)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(tweety)} \\ \texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)} \\ \texttt{vuela(tweety)} & \leftarrow & \texttt{ave(tweety)},\ \neg\texttt{pingüino(tweety)} \\ \texttt{vuela(bob)} & \leftarrow & \texttt{ave(bob)},\ \neg\texttt{pingüino(bob)} \end{array}$$

Consideremos de nueva cuenta el programa Even (Ejemplo 2.3) e introduzcamos la siguiente notación: para cada $n \in \mathbb{N}$, $s^n(x)$ denota al término $s(s(\ldots s(x)\ldots))$ con n ocurrencias de s.

Ejemplo 2.8. *Se tiene para el programa Even, lo siguiente:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_{Tweety1} & = & \{s^n(a) \mid a \in \mathbb{N}\}, \\ B_{Tweety1} & = & \{\texttt{par}(s^n(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{array}$$

Además, Base(Even) consiste de las siguientes cláusulas para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} \texttt{par(a)} & \leftarrow & \\ \texttt{par}(s^{n+1}(a)) & \leftarrow & \neg\texttt{par}(s^n(a)). \end{array}$$

Nótese que el conjunto Base(Even) es infinito, de hecho es más sencillo tomar al conjunto `Base(P)` como un programa proposicional infinito (contable) y estudiarlo de esta manera en lugar de P mismo. Por tanto, se tomará ventaja de su notación como sigue.

Ejemplo 2.9. *Sea P el siguiente programa.*

$$p \leftarrow \neg q$$
$$q \leftarrow \neg p$$

Entonces $B_P = \{p, q\}$ y $Base(P) = P$. Nótese que en este caso la preinterpretación no juega algún rol.

Ahora, se darán las nociones básicas sobre interpretación y modelo para programas.

Definición 2.10. *Sean P un programa, J una pre-interpretación para P con dominio D y $\mathcal{T}$ una lógica. Una **interpretación** (o valuación) para P con valores en $\mathcal{T}$ (basada sobre J), es una interpretación o valuación definida sobre $B_{P,J}$ con valores en $\mathcal{T}$. Una interpretación I para P es un **modelo para** P, si para cada cláusula $C \in Base_J(P)$; $I(C) = \mathbf{t}$.*

En secciones posteriores se usará la notación $I_{P,J,2}$ para el conjunto de todas las interpretaciones 2-valuadas para P basadas sobre J. La preinterpretación J y el número 2 serán omitidos, si J está fija y es claro el contexto donde se este trabajando. Así, el conjunto de todas las interpretaciones 2-valuadas para P basadas sobre una preinterpretación dada, pero fija J, será denotado por I_P[2]. Argumentos similares son aplicados a $I_{P,J,3}$ e $I_{P,J,4}$.

Los tres conjuntos arriba definidos poseen la estructura teórica de orden descritas en el Teorema 1.13 relativa a los ordenes que se discutieron en 1.3.

2.1.1. El Operador de un Solo Paso y Modelos Soportados

Recordemos que la semántica declarativa para programas lógicos se da mediante la selección de modelos adecuados. Tal selección puede ser descrita mediante un operador, el cual mapea interpretaciones en interpretaciones y cuyos puntos fijos serán los modelos ideales para el programa. En esta sección se introducirá el primero de varios operadores que se estudiarán en el contexto de la semántica declarativa, llamado el **operador de un solo paso** u **operador de consecuencia inmediata** debido a Kowalski y Van Emden [véase [64]].

[2] En particular $I_{P,2}$ puede ser identificado con el conjunto potencia de B_P.

Definición 2.11. *Sean P un programa lógico normal y J una preinterpretación para P. El* ***operador de un solo paso*** *u* ***operador consecuencia inmediata*** *$T_{P,J} : I_{P,J} \to I_{P,J}$ está definido por; dado $I \in I_{P,J}$, $T_P(I)$ es el conjunto de todos los básicos $A \in B_{P,J}$ para los cuales existe una cláusula $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base_J(P)$ que satisfaga $I \models \{L_1 \wedge \cdots \wedge L_n\}$, es decir, $I(L_1 \wedge \cdots \wedge L_n) = \mathbf{t}$.*

Trabajaremos con la lógica clásica 2-valuada, por tanto I_P o $I_{P,2}$ se entiende por $I_{P,J,2}$ donde J es una preintepretación dada.

La importancia del operador de un solo paso es clara a partir de la siguiente proposición.

Proposición 2.12. *Sea P un programa. Entonces, I es modelo para P si y solo si I es un punto pre-fijo del operador T_P.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sean $I \in I_P$ un modelo para P y $A \in T_P(I)$. Entonces, existe una cláusula $C = A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ donde $I \models (cuerpo) = \mathbf{t}$. Como I es un modelo, $I(C) = \mathbf{t}$. Por tanto, $I(A) = \mathbf{t}$ y de ahí que, $A \in I$. Así, $T_P(I) \subseteq I$.

[$\Leftarrow$ Supóngase que $T_P(I) \subseteq I$ y considere la cláusula $C = A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ tal que $I \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$. Entonces, $A \in T_P(I) \subseteq I$. Así, $I(A) = \mathbf{t}$. Por tanto, $I(C) = \mathbf{t}$. □

Observemos que B_P siempre es un modelo para P, pero en general B_P no es adecuado para capturar la semántica declarativa de los programas, es decir, el "significado deseado" de los programas dado que B_P contiene muchos elementos. Por tanto, un enfoque estándar para la semántica declarativa involucra la imposición de ciertas condiciones adicionales que los modelos deben satisfacer para calificar como "modelos adecuados". Sin embargo, es razonable pensar que las condiciones que se elijan, en este contexto, dependen sobre la comprensión particular que uno le puede dar, de lo que podría significar. Por ello, nos dedicaremos a la presentación y al estudio de las diferentes condiciones que han sido propuestas por diversos autores para resolver este problema.

La observación anterior sugiere pensar en la búsqueda de modelos minimales. Por tanto, los casos donde exista un modelo mínimo serán de particular interés para este trabajo.

Teorema 2.13. *Sean P un programa definite y J una preinterpretación fija para $\mathcal{L}_P$. Entonces se cumplen los siguientes resultados.*

(a) T_P es un orden continuo sobre I_P.

(b) P posee un (J-)modelo mínimo, el cual coincide con el mínimo punto fijo de T_P y es igual a $T_P \uparrow \omega$.

(c) *La intersección de cualquier colección no vacía de (J-) modelos para P, es un modelo para P. Por lo tanto, un programa definite no puede tener dos modelos minimales distintos para P. Más aún, la intersección de la colección de todos los modelos para P coincide con el modelo mínimo para P.*

Demostración. (a) Véase primero que T_P es monótono. Sean $I, K \in I_P$ con $I \subseteq K$ y supóngase que $A \in T_P(I)$. Entonces existe una cláusula $A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ con $\mathit{cuerpo} \subseteq I$. Así, $\mathit{cuerpo} \subseteq K$, y de ahí que $A \in T_P(K)$.

Ahora, sean $\mathcal{I} = \{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia dirigida de interpretaciones 2-valuadas e $I = \bigsqcup \mathcal{I} = \bigcup \mathcal{I}$. Como el orden que se está considerando es la inclusión de conjuntos usual y por la definición de T_P, se sigue de manera inmediata que $T_P(\mathcal{I})$ es dirigido. Por la Proposición A.14, únicamente resta mostrar que $T_P(I) \subseteq \bigcup T_P(\mathcal{I})$. Para ello, supóngase que $A \in T_P(I)$. Entonces hay una cláusula (definite) $C = A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in \mathit{Base}(P)$ tal que $A_1, \ldots, A_n \in I$. Por tanto, existen I_{λ_i} con $A_i \in I_{\lambda_i}$ para $i = 1, \ldots, n$. Como $\mathcal{I}$ es dirigido, existe $I_\lambda \in \mathcal{I}$ con $I_{\lambda_i} \subseteq I_\lambda$ con $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, el cuerpo de C está en I_λ, es decir, $I_\lambda(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$, y de lo anterior se tiene que $A \in T_P(I_\lambda)$. Por tanto, $A \in \bigcup T_P(\mathcal{I})$.

(b) Por la condición (a), es posible aplicar el Teorema de Kleene [Véase A.17] para asegurarse que T_P tiene un mínimo punto fijo, el cual coincide con, $T_P \uparrow \omega$. Más aún, es el menor punto pre-fijo de T_P. Así, por la proposición 2.12, $T_P \uparrow \omega$ es el modelo mínimo para P.

(c) Es claro. □

En conclusión, la semántica de modelos mínimos es muy satisfactoria para los programas lógicos definite desde varios puntos de vista dado que se puede mostrar, por ejemplo, que el mínimo modelo para un programa definite se corresponde bastante bien con el "procedural interpretation" de los programas lógicos[3]. Por ello, se ha tratado de generalizar el Teorema 2.13, sin embargo tales propuestas siguen fallando de distintas maneras. Por ejemplo, véase el siguiente programa.

Ejemplo 2.14. *Sea P el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$p \leftarrow \neg q$$
$$q \leftarrow \neg p$$
$$r \leftarrow \neg r$$

Entonces $\{p, r\}$ y $\{q, r\}$ son modelos minimales para P, pero incomparables. Por tanto, P no tiene modelo mínimo y por ello, P no tiene puntos fijos. Por último, sin niguna dificultad se puede verificar que $T_P(\emptyset) = \{p, q, r\}$ y $T_P(p, q, r) = \emptyset$. Por tanto T_P no es monótono.

[3] Para más detalles sobre esto véase [44] y [2].

Se ha abordado el problema relativo a la ausencia de modelos minimos de distintas maneras que sugieren el uso de modelos específicos. Así, revisaremos algunos de estos enfoques iniciando con el siguiente ejemplo, el cual se empleará para establecer el primer modelo que se trabajará y que sugiere el uso de modelos minimales.

Ejemplo 2.15. *Sea el programa Even 2.3 con los modelos siguientes:*

$$K_1 = \{par(s^{2n}(a)) \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$K_2 = \{par(s^{2n+1}(a)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Se verifica sin mucha dificultad que ambos modelos son minimales pero (como veremos más adelante) K_1 resulta ser un modelo más adecuado dado que logra captar el significado deseado que intenta dar Even, mientras que K_2 no lo hace. En esencia, lo anterior se relaciona con el siguiente hecho; $par(s(a)) = \mathbf{t}$ respecto a K_2 pese a que el programa no da una justificación para ello. Así, de manera intuitiva, es razonable decir que siempre que un átomo tome el valor "true" en algún modelo deseado para el programa, entonces este debería tomar el mismo valor por una razón provista por el programa mismo.

Definición 2.16. *Una interpretación I para un programa P es llamada **soportada** si, para cada $A \in I$, existe un cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ con $I(cuerpo) = \mathbf{t}$.*

En el ejemplo 2.15, K_1 es soportado mientras que K_2 no lo es. De hecho, en una sección posterior mostraremos que K_1 es el único modelo soportado para Even. Así, para algunos programas ser soportado es un requerimiento apropiado de los modelos.

Ahora, veamos la relación que hay entre los modelos soportados y el operador de un solo paso [véase [3]].

Proposición 2.17. *Sea P un programa normal. Entonces, I es una interpretacion soportada para P si y solo si I es un punto post-fijo del operador T_P. Además, I es un modelo soportado para P si y solo si I es un punto fijo del operador T_P.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sea I una interpretación soportada para P y supóngase que $A \in I$. Entonces, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ con $I(cuerpo) = \mathbf{t}$, por tanto $A \in T_P(I)$. Lo anterior muestra que, $I \subseteq T_P(I)$. Por tanto, I es un punto post-fijo de T_P.

$[\Leftarrow$ Supóngase que I es un punto post-fijo y $A \in I$. Entonces $A \in T_P(I)$, por ser I post-fijo. Por tanto, existe una cláusula en la base del programa, $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ con $I(cuerpo) = \mathbf{t}$, lo cual muestra que I es un modelo soportado para P. Finalmente, usando la proposición 2.12, se tiene que una interpretación para P es un modelo soportado para P si y solo si la interpretación es tanto un punto post y pre-fijo del operador T_P, es decir, si y solo si es un punto fijo de T_p. $\square$

Ejemplo 2.18. *Considérese el programa Tweety1 del ejemplo 2.2. Entonces,se puede verificar sin ninguna dificultad que Tweety1 tiene como modelo soportado al siguiente conjunto:*

$$M = \{\texttt{pingüino(tweety), ave(bob), ave(tweety), vuela(bob)}\}.$$

Una revisión más cuidadosa mostrará que M es el único modelo soportado para Tweety1, lo cual se dará en un ejemplo posterior.

En el contexto de programación lógica basada en resolución, los modelos soportados son mejores que aquellos que únicamente son minimales, dado que ellos representan mejor la idea del programador, quien define a una cláusula como una forma de equivalencia mas que, como una implicación [véase [12]].

Observación 2.19. *Dado que los modelos mínimos para un programa definite son los puntos fijos del operador de un solo paso, por el Teorema 2.13 se obtiene de manera inmediata que todo modelo mínimo es soportado.*

En conclusión, el Teorema A.17 y A.18 no son válidos en general para todo programa normal, debido a la no monotonía del operador de un solo paso en estos programas. Así, para la obtención de los puntos fijos del operador de un solo paso es natural el empleo de teoremas sobre puntos fijos, en los cuales no es necesario la monotonía del operador.

2.1.2. El Operador de Gelfond- Lifschitz y Modelos Estables

Un inconveniente que se presenta en la semántica para modelos soportados es el hecho que los programas definite pueden tener más de un modelo soportado. Para ello, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.20. *Sea P el programa que consiste de la siguiente cláusula, $p \leftarrow p$. Entonces, tanto $\emptyset$ como $\{p\}$ son modelos soportados para P.*

Tal inconveniente puede ser resuelto mediante la introducción de los modelos estables, para los cuales será necesario el siguiente resultado auxiliar.

Proposición 2.21. *El mínimo modelo, $T_P \uparrow \omega$, para un programa definite P, es el único modelo M para P que satisface la siguiente condición: existe un mapeo $l : B_P \to \alpha$, para algún ordinal α, tal que para cada $A \in M$, existe una cláusula $A \to cuerpo \in Base(P)$ con $M(cuerpo) = \mathbf{t}$, y para cada $B \in cuerpo$; $l(B) < l(A)$.*

Demostración. $\Rightarrow$]Supóngase que el modelo mínimo es $T_P \uparrow \omega = M$. Tómese $\alpha = \omega$ y defínase $l : B_p \to \alpha$ por medio de $l(A) = \text{mín}\{n \mid A \in$

$T_p \uparrow (n+1)\}$ si, $A \in M$ y $l(A) = 0$ si, $A \notin M$. Para cada n ocurre que $\emptyset \subseteq T_P \uparrow 1 \subseteq \cdots \subseteq T_P \uparrow n \subseteq \cdots \subseteq T_P \uparrow \omega = \bigcup_{m<\omega} T_P \uparrow m$, con lo cual se observa que l está bien definida y el mínimo modelo, $T_P \uparrow \omega$, para P tiene las propiedades requeridas.

[$\Leftarrow$ Si M es un modelo para P que satisface las condiciones dadas para algún mapeo $l : B_p \to \alpha$. Entonces, afírmese lo siguiente: $A \in M \Rightarrow A \in T_P \uparrow (l(A)+1)$. Si, $l(A) = 0$ entonces, es claro que $A \in T_P \uparrow 1$. Ahora supóngase que, la afirmación se cumple para todo A con $l(A) < n$. Véase que también se cumple si $l(A) = n$. En efecto, sea $A \in M$, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $M(cuerpo) = \mathbf{t}$ y $\forall B \in cuerpo$, $l(B) < l(A)$. Entonces, $B \in T_P \uparrow (l(B)+1)$ para todo $B \in cuerpo$, por hipótesis inductiva. De ahí que, $cuerpo \in \bigcup_{B \in cuerpo} T_P \uparrow (l(B)+1) \subseteq T_P \uparrow (l(A))$. Por tanto, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $cuerpo \in T_P \uparrow (l(A))$, es decir, $A \in T_P \uparrow (l(A)+1)$. De la afirmación probada, se sigue que $M \subseteq T_P \uparrow \omega$ y por ello que $M = T_P \uparrow \omega$, ya que de la minimalidad del modelo $T_P \uparrow \omega$ se tiene que $T_P \uparrow \omega \subseteq M$. $\square$

Los mapeos l, mencionados en la Proposición anterior, comunmente son llamados **mapeos de nivel**. En ocasiones será necesario extender tales mapeos a literales asumiendo que tales extensiones satisfacen que $l(\neg A) = l(A)$, para cada átomo A.

La siguiente definición[4] de modelo estable relaciona la propiedad recién establecida sobre el operador T_P y la de modelo soportado.

Definición 2.22. *Una interpretación I para un programa P es llamada una **interpretación bien soportada** si existe un mapeo de nivel $l : B_P \to \alpha$, para algún ordinal α, tal que para cada $A \in I$, existe una cláusula $C \in Base(P)$ de la forma $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_k$ de tal manera que el cuerpo de C cumple: $I(cuerpo) = \mathbf{t}$ y $l(A_i) < l(A)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

En particular, un modelo bien-soportado será llamado un **modelo estable**.

Teorema 2.23. *(1) Cada modelo estable es soportado y minimal. (2) Cada programa definite tiene un único modelo estable, el cual es su modelo mínimo.*

Demostración. (1) Sean P un programa, M un modelo estable para P y l un mapeo de nivel con el cual M es estable. Que M es soportado es inmediato a partir de la Definición 2.22. Veamos que M es minimal. Supóngase que K es un modelo para P con $K \subset M$. Entonces, existe $A \in M \setminus K$. Sin pérdida de generalidad, supóngase también que A es tal

[4]Véase [13], donde se exhibe que los modelos estables pueden ser introducidos de esta manera.

que $l(A)$ es minimal. Dado que M es bien-soportado, existe una cláusula C de la forma $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_k \in Base(P)$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, k$ se tiene que $A_i \in M$, $l(A_i) < l(A)$ y $B_j \notin M \supset K$. Entonces, $B_j \notin K$ para cada j, y por la minimalidad de $l(A)$ se tiene que $A_i \in K$ para cada i. Luego, como K es modelo de P y el *cuerpo* de C toma el valor $\mathbf{t}$ con respecto a K, entonces $A \in K$, lo cual es falso ya que contradice el hecho que $A \in M \setminus K$. Por tanto, M es un modelo minimal.

(2) Por la Proposición 2.21, se observa que todo modelo mínimo es un modelo estable para un programa. Por último, la unicidad se sigue de (2) y de la parte (c) del Teorema 2.13. □

En general, los recíprocos del Teorema anterior (2.23) no se cumplen.

Ejemplo 2.24. *Sea P el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$p \leftarrow q$$
$$p \leftarrow \neg p$$

Es sencillo ver que $\{p\}$ es el único modelo soportado para P. Sin embargo, este modelo no es estable.

Por el Teorema 2.23 (2), la unicidad de los modelos estables nos garantiza que dichos modelos sean mínimos. Por otro lado, si un programa tiene un modelo mínimo, entonces no hay garantía de que tal modelo sea estable para el programa, como lo muestra el ejemplo anterior y donde dicho ejemplo sirve para probar que el recíproco del inciso (2) del Teorema 2.23 no se cumple en general. De la misma manera, se puede exhibir que el recíproco del inciso (1) del Teorema 2.23 es falso, para ello considérese el Ejemplo 2.20 con modelo soportado $\{p\}$, donde $\{p\}$ no es un modelo estable para P.

El siguiente resultado muestra una caracterización de los modelos estables como puntos fijos de un operador.

Definición 2.25. *Sean P un programa e $I \in I_P$. Entonces, la* ***transformada Gelfond- Lifschitz*** $\mathbf{P/I}$ *de P es el conjunto de todas las cláusulas $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n$ para las cuales existe una cláusula $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_k \in Base(P)$ con $B_j \in I$ y $j = 1, \ldots, k$.*

Nótese que la transformada de Gelfond-Lifschitz P/I de un programa P es definite (como un conjunto de cláusulas básicas) y por tanto, por el Teorema 2,13, tiene un modelo mínimo, dígase $T_{P/I} \uparrow \omega$. Una vez definida la transformada de Gelfond-Lifschitz, se puede definir el **operador de Gelfond-Lifschitz** [véase [26]] asociado con P como, $\mathbf{GL_P : I \rightarrow T_{P/I}} \uparrow \omega$.

Teorema 2.26.

1. *El operador GL_P es antítono y en general no es monótono.*

2. *Una interpretación I es un modelo estable para un programa P si y solo si I es un punto fijo del operador GL_P.*

Demostración. (1) Sea P un programa y sean I, K interpretaciones para P con $I \subseteq K$. Entonces, es fácil ver que $P/k \subseteq P/I$. Afírmese lo siguiente, para todo $n \in \mathbb{N} : T_{P/K} \uparrow n \subseteq T_{P/I} \uparrow n$. En efecto, para $n = 1$. Sea $A \in T_{P/K} \uparrow 1$. Entonces, existe una cláusula $C = A \leftarrow A_1, \ldots, A_m \in Base(P/K) \subseteq Base(P/I)$ tal que $\emptyset \models A_1 \wedge \cdots \wedge A_m$. Entonces, $C \in T_{P/I} \uparrow 1$. Ahora, supóngase que la afirmación se cumple para algún n y véase que se satisface para $n{+}1$. Sea $A \in T_{P/K} \uparrow (n{+}1) = T_{P/K}\big(T_{P/K} \uparrow (n)\big)$, entonces por hipotesis inductiva y el caso $n = 1$ se tiene que, $A \in T_{P/I}\big(T_{P/I} \uparrow (n)\big) = T_{P/I} \uparrow (n+1)$. Por tanto, se tiene la afirmación. De lo anterior, se sigue que $GL_P(K) = T_{P/K} \uparrow \omega \subseteq T_{P/I} \uparrow \omega = GL_P(I)$. Por tanto, GL_P es un operador antítono.

Para probarse que GL_P en general no es monótono, considérese el programa del Ejemplo 2.24. Tómese $I = \emptyset$, se observa que $P/I = \{p \leftarrow p, p \leftarrow\}$ (sin mucha dificultad). De ahí, es claro que $GL_P(I) = \{p\}$. Ahora, tomando $I = \{p\}$, se observa que $P/I\{p \leftarrow p\}$ y $GL_P(I) = \emptyset$. De lo cual se sigue (1).

(2) [$\Leftarrow$ Supóngase que $GL_P(I) = T_{P/I} \uparrow \omega = I$. Entonces I es un modelo mínimo para P/I, por tanto I es un modelo para P. Y por la Proposición 2.21, I es bien-soportado con respecto a cualquier mapeo de nivel, l, que satisface: $l(A) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid A \in T_{P/I} \uparrow (n{+}1)\}$ para cada $A \in I$.

$\Rightarrow$] Supóngase que I es un modelo estable para P. Entonces, I es bien-soportado relativo a algún mapeo de nivel, dígase l. Así, para cada $A \in I$, existe una cláusula $C = A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_k \in Base(P)$ de tal forma que, $I(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$ y $l(A_i) < l(A)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces, para cada $A \in I$, existe una cláusula de la forma $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in P/I$, donde $I(\mathit{cuerpo}') = \mathbf{t}$ y $l(A_i) < l(A)$, para cada i. Por tanto, se sigue de la Proposición 2.21 que I es un modelo mínimo para P/I, de ahí que, $I = T_{P/I} \uparrow \omega = GL_P(I)$. Por tanto se tiene (2). □

La transformada de Gelfond-Lifschitz puede ser considerada como un proceso de dos pasos: (1) Elimina cada cláusula-base que posea literales negadas, dígase $\neg B$, en el "*cuerpo*" de la cláusula y con $B \in I$. (2) Elimina todas las literales negadas en el "*cuerpo*" de las cláusulas restantes. En otras palabras, el proceso se entiende de la siguiente manera: se considera a P como un conjunto de premisas y a I como un conjunto de creencias que un agente racional podría sostener y quisiera probar dadas las premisas en P. Cualquier cláusula-base que contenga elementos de la forma $\neg B$ en el "*cuerpo*" de la cláusula, donde $B \in I$, son inútiles para el agente y pueden ser descartadas. Luego, entre las restantes cláusulas-base, una ocurrencia de la forma $\neg B$ con $B \notin I$ son triviales. Así, se puede simplificar el conjunto de premisas P al conjunto P/I. Por último, si sucede que I sea el conjunto átomos que se siguen lógicamente de P/I, entonces el agente es racional. Para dejar en claro las líneas anteriores, véanse los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.27. *Consideremos el Programa Tweety1 del Ejemplo 2.2 y su modelo soportado M dado en el Ejemplo 2.18. Se afirma que M es estable para Tweety1. En efecto, para ello véase que $Tweety1/M$ consiste de las siguientes cláusulas:*

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(tweety)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(tweety)} \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)} \\
\texttt{vuela(bob)} & \leftarrow & \texttt{ave(bob)}
\end{array}$$

Donde, de la Proposición 2.21 se sigue que M es un modelo mínimo para $Tweety1/M$. Por tanto, M es estable para Tweety1.

En la semántica de modelos soportados al añadir cláusulas de la forma $p \leftarrow p$ se puede cambiar la semántica del programa. Como ejemplo de ello, considérese el siguiente programa.

Ejemplo 2.28 (Tweety2)**.** *Considérese el siguiente programa llamado $Tweety2$.*

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(X)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(X)} \\
\texttt{vuela(X)} & \leftarrow & \texttt{ave(X),}\neg\texttt{pingüino(X)} \\
\texttt{pingüino(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)}
\end{array}$$

El programa Tweety2 resulta de Tweety1 por la adición de la última cláusula, la cual es suficiente para modificar la semántica del programa como se muestra a continuación:

- *Tweety2 posee como modelos soportados tanto a M del Ejemplo 2.18 y a M' que consiste de los siguientes básicos* $\{$`pingüino(tweety), pingüino(bob), ave(tweety), ave(bob)`$\}$.
- *M es un modelo soportado para Tweety2, mientras que M' no lo es. En efecto, sea $Twetty2/M'$ que consta de las siguientes cláusulas:*

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(tweety)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(tweety)} \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)} \\
\texttt{pingüino(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)}
\end{array}$$

Y tiene como modelo mínimo: {`pingüino(tweety)`, `ave(tweety)`, `ave(bob)`}$\neq M'$.

Por último, veamos que la semántica de modelos estables sirve para modelar la elección en el sentido de delimitar el dominio de estudio correspondiente al contexto del problema.

Ejemplo 2.29 (Tweety3). *Sea Tweety3 que consta de las siguientes cláusulas.*

$$\begin{array}{rcl} \texttt{aguila(tweety)} & \leftarrow & \neg\texttt{pingüino(tweety)} \\ \texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \neg\ \texttt{aguila(tweety)} \\ \texttt{ave(X)} & \leftarrow & \texttt{aguila(X)} \\ \texttt{ave(X)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(X)} \\ \texttt{vuela(X)} & \leftarrow & \texttt{ave(X)},\ \neg\texttt{pingüino(X)} \end{array}$$

Se garantiza que Tweety3 posee los siguientes modelos estables:

- {`aguila(tweety)`, `ave(tweety)`, `vuela(tweety)`} *y*
- {`pingüino(tweety)`, `ave(tweety)`}.

2.1.3. El Operador y Modelos De Fitting

La semántica de modelos estables es más satisfactoria que la de modelos soportados por el siguiente hecho: cada programa definite tiene un único modelo estable, el cual coincide con su modelo mínimo. Sin embargo, para programas normales la unicidad no se cumple como se exhibió en el programa del Ejemplo 2.9. Para solucionar el problema de unicidad Fitting [Véase [20]] introdujo una clase de modelos basados en la lógica 3-valuada fuerte de Kleene con el ordenamiento $\leq_k$ y utilizando los conjuntos indicadores (véase la Subsección 1.3.2) con su correspondiente ordenamiento.

Definición 2.30. *Sea P un programa lógico normal, se definen los operadores T'_P y F_P sobre $I_P = I_{P,3} = I_{P,J,3}$ como sigue.*

- $T'_P(I) = \{ \quad A \in B_P \mid \exists\ A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ `con` $I(cuerpo) = \mathbf{t}$, `respecto a la lógica` $3-$ `valuada fuerte de Kleene` $\}$
- $F_P(I) = \{ \quad A \in B_P \mid \forall\ A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ `se tiene` $I(cuerpo) = \mathbf{f}$, `respecto a la l.` $3-$ `valuada fuerte de Kleene` $\}$

Así, se define el ***operador de Fitting****(o el* $\mathbf{\Phi_P}$ **− operador***)* $\mathbf{\Phi_P}$ *para P, de la siguiente manera. Para cada $I \in I_P$,*

$$\Phi_P(I) = T'_P(I) \cup \neg F_P(I).$$

Nótese que para cualquier I interpretación 3-valuada, se tiene que $A \in \Phi_P(I)$ siempre que A sea la cabeza de una cláusula-base, mientras que $\neg A \in \Phi_P(I)$ si no existe cláusula-base cuya cabeza sea A.

Ejemplo 2.31. *Iniciemos el cálculo de $\Phi_P(I)$, tomando a P como $Tweety1$ del Ejemplo 2.2. Consideremos la interpretación 3-valuada $I = \emptyset$, la cual será conveniente tomarla con la notación de subconjunto indicador. Es claro que "$\emptyset$" asignará el valor de verdad "$\mathbf{u}$" para todo átomo-base en el presente contexto.*

Se cumple que $T'_P(\emptyset)$ $=\{$`pingüino(tweety), ave(bob)`$\}$ y $F_P(\emptyset) = \neg\{$`pingüino(bob)`$\}$. Por lo tanto,

$$\Phi_P(\emptyset) = \{\texttt{pingüino(tweety), ave(bob), }\neg\texttt{pingüino(bob)}\}.$$

De la misma manera, se obtiene:

$$T'_P(\Phi_P(\emptyset)) = \{\texttt{pingüino(tweety), ave(bob), ave(tweety), vuela(bob)}\}$$

y

$$\neg F_P(\Phi_P(\emptyset)) = \neg\{\texttt{pingüino(bob), vuela(tweety)}\}.$$

Así, $\Phi_P(\Phi_P(\emptyset)) = T'_P(\Phi_P(\emptyset)) \cup \neg F_P(\Phi_P(\emptyset))$ es una interpretación total 3-valuada.

El siguiente resultado puede considerarse el análogo al resultado presentado en la Proposición 2.12.

Proposición 2.32. *Sea P un programa lógico normal. Entonces, M es modelo 3-valuado para P si y solo si M es un punto pre-fijo del operador Φ_P con el orden $\sqsubseteq_t$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supóngase que M es un modelo 3-valuado para P y sea $A \in \Phi_P(M)$. Entonces, existe una cláusula $C = A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ con $M(cuerpo) = \mathbf{t}$. Como M es modelo, entonces $M(C) = \mathbf{t}$. De ahí que, $M(A) = \mathbf{t}$, es decir $A \in M$. Por tanto, M es un punto pre-fijo de Φ_P.

$[\Leftarrow$ Supóngase que M es tal que $\Phi_P(M) \sqsubseteq_t M$ y sea $A \in B_P$, arbitrario. Supóngase que $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{u}$, entonces $M(A) = \mathbf{u}$ ó $\mathbf{t}$. Luego, si existen cláusulas $C = A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ con $M(cuerpo) = \mathbf{t}$, entonces de los posibles valores para $\Phi_P(M)(A)$ toma el valor $\mathbf{t}$, lo cual no es posible. Por tanto, $M(cuerpo) = \mathbf{u}$ ó $\mathbf{f}$ para cada cláusula C. Así, de la Definición 1.12 se tiene que, $M(C) = \mathbf{t}$. Ahora, supóngase que $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{t}$, entonces $M(A) = \mathbf{t}$. De la Definición 1.12 se tiene que para cada $C = A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$, $M(C) = \mathbf{t}$. Por último, supóngase que $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{f}$, entonces $\neg A \in \Phi_P(M)$, por tanto no existe cláusula con cabeza A, es decir, $M(C) = \mathbf{t}$ se cumple por vacuidad. Por todo lo anterior, se sigue que M es un modelo para P. □

Ahora, consideremos el siguiente ejemplo que mostrará como la Proposición anterior (2.32) es falsa en ambas direcciones si se considera el orden $\sqsubseteq_k$.

Ejemplo 2.33. *Sea P el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$\begin{array}{ccc} p & \leftarrow & \neg q \\ p & \leftarrow & \neg r \\ q & \leftarrow & q \\ r & \leftarrow & r \end{array}$$

Defínase M como sigue: $M(P) = \mathbf{f}, M(q) = \mathbf{u}$ y $M(r) = \mathbf{t}$. Entonces, M es una interpretación 3-valuada para P que cumple $\Phi_P(M) \sqsubseteq_k M$. Para ello, véase lo siguiente.

- $\Phi_P(M)(p) \sqsubseteq_k M(p)$. *En efecto, supóngase que $\Phi_P(M)(p) = \mathbf{t}$, entonces debe existir una cláusula tal que p sea su cabeza y el cuerpo de esta cláusula en M tome el valor $\mathbf{t}$. Pero, para las dos cláusulas que tiene P con cabeza p, se tiene $M(\neg q) = \mathbf{u}$ y $M(\neg r) = \mathbf{f}$. Por tanto, $\Phi_P(M)(p) = \mathbf{t}$ no puede pasar. Así, se cumple C.1.*

- $\Phi_P(M)(q) \sqsubseteq_k M(q)$. *En efecto, por como se definio $\Phi_P(M)$ sobre los básicos se tiene que $\Phi_P(M)(q) \neq \mathbf{t}$ ó $\mathbf{f}$. Por tanto, se tiene C.2.*

- $\Phi_P(M)(r) \sqsubseteq_k M(r)$. *En efecto, $\Phi_P(M)(r) = \mathbf{f}$ no puede suceder ya que P posee la siguiente cláusula $r \leftarrow r$, donde $M(r) = \mathbf{t}$. Por tanto, se tiene C.3.*

Además, M no es un modelo para P. Basta tomar, la cláusula $C = p \leftarrow \neg q$, donde $M(C) = \mathbf{f}$.

Por otro lado, consideré al programa P del Ejemplo 2.14 y defínase M como sigue: $M(p) = \mathbf{t}, M(q) = \mathbf{u}$ y $M(r) = \mathbf{t}$. Entonces, es inmediato verificar que M es un modelo 3-valuado para P. Sin embargo, M no es un punto pre-fijo de Φ_P, basta notar lo siguiente: $\Phi_P(M)(q) = \mathbf{f}$, mientras que $M(q) = \mathbf{u}$. Por tanto, es falso que $\Phi_P(M)(q) \sqsubseteq_k M(q)$.

El siguiente resultado sobre Φ_P, será fundamental para los propósitos de esta sección.

Proposición 2.34. *Sea P un programa. Entonces, Φ_P es monótono sobre I_P respecto al orden $\sqsubseteq_k$.*

Demostración. Sean $I, K \subseteq I_P$ con $I \subseteq K$ y $A \in \Phi_P(I)$. Entonces, $A \in T'_P(I)$. Así, existe una cláusula-base $A \leftarrow \textit{cuerpo}$ tal que $I(\textit{cuerpo}) = \mathbf{t}$. Por la Tabla 1.2.2, se tiene que cada literal $L \in \textit{cuerpo}$ debe tomar el valor de verdad $\mathbf{t}$. Y por los resultados presentados en la Subsección 1.3.2, se tiene que cada literal del *cuerpo* es tal que, $L \in I$. Por tanto, para cada $L \in \textit{cuerpo}$, $L \in K$. De ahí que, $K(\textit{cuerpo}) = \mathbf{t}$. Así, $A \in T'_P(K) \subseteq \Phi_P(K)$.

Ahora, si $\neg A \in \Phi_P(I)$. Entonces, $A \in F_P(I)$. Así, para toda cláusula-base $A \in \mathit{cuerpo}$, el $I(\mathit{cuerpo})\mathbf{f}$. Por ello, para tales cláusulas se observa que al menos una literal, dígase $L_j \in \mathit{cuerpo}$ es tal que $I(L_j) = \mathbf{f}$, es decir, $\neg L_j \in I$ (una vez más por la Tabla 1.2.2) y los resultados de la Subsección 1.3.2. Como $I \subseteq K$, $\neg L_j \in K$, por tanto $K(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{f}$ para todas estas cláusulas. Por lo cual, $A \in F_P(K)$ y de ahí que $\neg A \in \Phi_P(K)$. Por tanto Φ_P es monótono sobre I_P. □

Nótese que, con lo exhibido en el Ejemplo 2.31 y de la Proposición 2.34, se tiene que $\Phi_P(\Phi_P(\emptyset))$ es el mínimo punto fijo del operador Φ_P, lo cual puede verificarse fácilmente al iterar una vez más al operador Φ_P.

Ejemplo 2.35. *Sea P el programa del Ejemplo 2.14. Defínanse las siguientes interpretaciones 3-valuadas para P como sigue: $I(p) = I(q) = I(r) = \mathbf{f}$ y $K(p) = K(q) = K(r) = \mathbf{t}$. Entonces, $I \sqsubset_t K$. Más aún, se verifica que $\Phi_P(K)$ y $\Phi_P(I)$ toman los valores constantes $\mathbf{f}$ y $\mathbf{t}$ respectivamente. Por tanto $\Phi_P(K) \sqsubset_t \Phi_P(I)$, es decir, Φ_P no es monótono relativo al orden $\sqsubset_t$.*

Dado que el operador Φ_P es monótono respecto al orden $\sqsubseteq_k$, entonces (por el Teorema A.18) Φ_P tiene un mínimo punto fijo y este punto fijo es potencia de algún ordinal α, $\Phi_P \uparrow \alpha$. El mínimo punto fijo de Φ_P es llamado el modelo de **Kripke-Kleene** o el **modelo de Fitting** para P. En relación a esto, más adelante se observará que Φ_P no es un orden continuo, de hecho, ni ω-continuo, respecto al orden $\sqsubseteq_k$. Por tanto, el Teorema A.17 no es aplicable sobre Φ_P en general.

Proposición 2.36. *Sea P un programa. Entonces, cada punto fijo M de Φ_P son modelos para P con las siguientes propiedades.*

(a) Para cada $A \in B_P$ con $M(A) = \mathbf{t}$, existe una cláusula $A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ con $M(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$.

(b) Si $A \in B_P$ de tal forma que para toda cláusula $A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ se cumple, $M(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{f}$. Entonces, $M(A) = \mathbf{f}$.

Demostración. Primero, véase que M es un modelo. En efecto, sean $A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ y M un punto fijo del operador Φ_P. Por la Definición 1.12, basta examinar los siguientes casos:

- $M(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$. Entonces, $\mathbf{t} = \Phi_P(M)(A) = M(A)$. Por tanto, $M(A) = \mathbf{t}$.
- $M(A) = \mathbf{f}$. Entonces, $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{f}$. Por tanto, $M(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{f}$.
- $M(A) = \mathbf{u}$. Entonces, $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{u}$, de ahí que $M(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{f}$ ó $M(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{u}$.

Por tanto, M es un modelo para P.

(a) Sea $A \in B_P$ y supóngase que $M(A) = \mathbf{t}$. Entonces, $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{t}$ por ser M punto fijo. Así, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $M(cuerpo) = \mathbf{t}$ por la definición del operador Φ_P.

(b) Sea $A \in B_P$ y supóngase que, para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ se tiene $M(cuerpo) = \mathbf{f}$. Entonces, $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{f}$ por la definición de Φ_P y al ser M punto fijo de este operador, se tiene $M(A) = \mathbf{f}$. □

En otras palabras, la Proposición anterior asegura que cada punto fijo del operador Φ_P es un **modelo soportado 3-valuado** para P, en el sentido que tal modelo satisface (a) y (b) de la misma Proposición. Así, obsérvese que cada modelo soportado 3-valuado total es un modelo soportado en el sentido de la Definición 2.16.

Proposición 2.37. *Sea P un programa. Entonces, M es un punto fijo del operador Φ_P si y solo si M es un modelo soportado 3-valuado para P.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Por la Proposición 2.36 se tiene el resultado. $[\Leftarrow$ Sean M un modelo soportado 3-valuado para P y $A \in B_P$. Si $M(A) = \mathbf{t}$, entonces al ser M modelo 3-valuado soportado existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $M(cuerpo) = \mathbf{t}$. Por tanto, $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{t}$ pero $\mathbf{t} = M(A)$, entonces $\Phi_P(M)(A) = M(A)$. Ahora, si $M(A) = \mathbf{f}$, entonces al ser M modelo para P se tiene que para cada $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ su cuerpo es tal que $M(cuerpo) = \mathbf{f}$. Por tanto, $\Phi_P(M)(A) = \mathbf{f} = M(A)$. Por tanto, M es un punto fijo del operador Φ_P. □

La discusión sobre las propiedades de los modelos de Fitting será retomada después de la siguiente caracterización que mostrará una forma alternativa de trabajar con los modelos de Fitting vía mapeos de nivel. Para ello, definamos lo siguiente.

Definición 2.38. *Sean P un programa e $I \in I_{P,3}$ una interpretación 3-valuada. Se dice que l es un I-**mapeo de nivel parcial para P**, si l es un mapeo parcial de B_P hacia α, donde $dom(l) = \{A \in B_P \mid A \in I \text{ ó } \neg A \in I\}$ y α es algún ordinal.*

Una vez más, se pueden extender tales mapeos a literales como sigue: $l(\neg A) = l(A)$, para todo $A \in dom(l)$.

Definición 2.39. *Sean P un programa lógico normal, I un modelo 3-valuado para P y l un I-mapeo de nivel parcial para P. Entonces, se dice que P **satisface (F) con respecto a I y l**, si para cada $A \in dom(l)$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

- *(F_1) $A \in I$ y existe $A \leftarrow L_1, \ldots L_n \in Base(P)$ tal que $L_i \in I$ y $l(L_i) < l(A)$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

- *(F_2) $\neg A \in I$ y para cada $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$, existe $i \in \{i, \ldots, n\}$ tal que $\neg L_i \in I$ y $l(L_i) < l(A)$.*

*Si $A \in dom(l)$ cumple F_1, entonces se dirá que A **satisface** F_1 **con respecto a** I **y** l. De manera análoga, para F_2.*

Teorema 2.40. *Sean P un programa normal y M_P su modelo de Fitting. Entonces, en el ordenamiento $\sqsubseteq_k$, M_P es el máximo modelo entre todos los modelos 3-valuados I, para los cuales existe un I-mapeo de nivel parcial, l, para P tal que P satisface (F) con respecto a I y l.*

Demostración. Recordemos que $M_P = \Phi_P \uparrow \alpha$ para algún ordinal α. Defínase el M_P-mapeo de nivel parcial, dígase $l_P : B_P \to \alpha$ como sigue: $l_P(A) = \beta$ donde β es el mínimo ordinal tal que A no se encuentra indefinido en $\Phi_P \uparrow (\beta + 1)$. Afirmamos los siguientes hechos:

1. P satisface (F) respecto a M_P y l_P.

2. Si I es un modelo 3-valuado para P y l es un I-mapeo de nivel parcial tal que P satisface (F) respecto a I y l. Entonces, $I \subseteq M_P$.

[1] En efecto, sea $A \in dom(l_P)$. Supóngase que $l_P(A) = \beta$ y considérense los casos correspondientes para (F_1) y (F_2).

(F_1) Si $A \in M_P$, entonces $A \in \Phi_P \uparrow \alpha$ y por como se definio l_P, se sigue que $A \in \Phi_P \uparrow (\beta + 1) = \Phi_P(\Phi_P \uparrow \beta)$. Entonces, $A \in T'_P(\Phi_P \uparrow \beta)$. Por tanto, existe una cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $\Phi_P \uparrow \beta(cuerpo) = \mathbf{t}$ y por tanto, para todo $L_i \in cuerpo$; $\Phi_P \uparrow \beta(L_i) = \mathbf{t}$. De lo anterior, se sigue que $l_P(L_i) < \beta$ y $L_i \in M_P$ para todo i. Por tanto, A satisface (F_1) respecto a M_P y l_P.

(F_2) Si $\neg A \in M_P$, entonces (con el mismo razonamiento del C.(F_1)) $A \in F_P(\Phi_P \uparrow \beta)$. Por tanto para cada $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$, existe $L \in cuerpo$, literal, tal que $\Phi_P \uparrow \beta(L) = \mathbf{f}$, es decir, $\neg L \in \Phi_P \uparrow \beta$. De lo anterior, se tiene que $l_P(L) < \beta$ y $\neg L \in M_P$. Por tanto, A satisface (F_2) respecto a M_P y l_P.

[2] En efecto, supóngase que $l(A) = \beta$. Luego, pruébese lo siguiente mediante inducción transfinita sobre $l(A)$; $(A \in I \Rightarrow A \in \Phi_P \uparrow (\beta + 1)) \vee (\neg A \in I \Rightarrow \neg A \in \Phi_P \uparrow (\beta + 1))$. Si $l(A) = 0$, entonces $A \in I$. Luego por (F_1) se garantiza que A ocurre como la cabeza de un hecho en $Base(P)$. Por tanto, $A \in \Phi_P \uparrow 1$. Por otro lado, $\neg A \in I$, y por (F_2) se garantiza que no existen cláusulas en $Base(P)$ con cabeza A. Por tanto, $\neg A \in \Phi_P \uparrow 1$.

Supóngase que la hipótesis inductiva se cumple para todo $B \in B_P$ con $l(B) < l(A)$. [C.i] Si $A \in I$, entonces A satisface (F_1) respecto a I y l. Por lo tanto, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $I(cuerpo) = \mathbf{t}$ y $l(K) < \beta$ para toda $K \in cuerpo$. Así, por hipótesis inductiva, $cuerpo \subseteq M_P$ y dado que M_P es un modelo para P, se tiene que $A \in M_P$. [C.ii] Si

$A \in I$, entonces A satisface (F_1) respecto a I y l. Por tanto, para cada $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$, existe $K \in cuerpo$ tal que $\neg K \in I$ y $l(K) < \beta$. Luego, por hipótesis inductiva, se asegura que $\neg K \in M_P$, y de ahí que para cada $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$, $M_P(cuerpo) = \mathbf{f}$. Como M_P es un punto fijo del operador Φ_P, entonces $\neg A \in M_P$. Por tanto, se tiene [2]. □

Observación 2.41. *Sea P un programa lógico normal. Entonces, P posee un modelo de Fitting total si y solo si existe un modelo total I y l-mapeo de nivel (total) para P tal que P satisface (F) respecto a I y l.*

Ejemplo 2.42. *En el Ejemplo 2.31 se mostró que el programa Tweety1 (Ejemplo 2.2) tiene como modelo de Fitting (total) al conjunto de básicos $M \cup \neg(B_{Tweety1} \setminus M)$, donde M es como en el Ejemplo 2.18.*

Ahora consideremos el programa Tweety2(Ejm 2.28), el cual tiene como modelo de Fitting a {`pingüino(tweety)`, `ave(bob)`, `ave(tweety)`, ¬`vuela(tweety)`}. Nótese que de esta manera no es posible decidir si bob es o no es un pingüino. Por tanto, la semántica de Fitting posee la misma deficiencia que se poseía en la semántica de modelos soportados (véase el Ejemplo 2.28).

También se tiene el siguiente ejemplo, considérese el programa Tweety3 (Ejemplo 2.29), sin niguna dificultad se garantiza que Tweety3 tiene a "$\emptyset$" como su modelo de Fitting.

A continuación, se dará un ejemplo en el cual se exhibirá que el operador de Fitting, Φ_P, no es ω-continuo en general e inclusive para programas definite no se cumple tal propiedad.

Ejemplo 2.43. *Sea P el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$\begin{gathered} p(s(X)) \leftarrow p(X) \\ q \leftarrow p(X) \end{gathered}$$

Entonces, no es difícil verificar que; $\Phi_P \uparrow n = \{\neg p(s^k(X)) \mid k < n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Phi_P \uparrow \omega = \{\neg p(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}\}$, Sin embargo, el menor punto fijo del operador Φ_P está dado por; $\Phi_P \uparrow (\omega + 1) = \{\neg q, \neg p(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Observemos que el operador de Fitting puede considerarse como una forma de aproximarse al operador de un solo paso, en el sentido de la siguiente proposición.

Proposición 2.44. *Sea P un programa. Entonces, para todo $I \in I_{P,3}$ se cumple $\Phi_P(I)^+ \subseteq T_P(I^+) \subseteq B_P \setminus \Phi_P(I)^-$. Más aún, el operador de Fitting mapea interpretaciones totales en interpretaciones totales y en este tipo de interpretaciones, el operador de Fitting coincide con el operador de un solo paso.*

Demostración. Sean $I \in I_{P,3}$ con $I = I^+ \cup \neg I^-$ y $A \in \Phi_P(I)^+$. Entonces, $A \in \Phi_P(I)$, existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $I(cuerpo) = \mathbf{t}$. Si $cuerpo = A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_k$, entonces para todo i, j, $A_i \in I_+$ y $B_j \in I^-$ con $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, k$, es decir, $A_i \in I_+$ y $B_j \notin I^+$. Por tanto, $I^+(cuerpo) = \mathbf{t}$ ya que I^+ puede considerarse como una interpretación 2-valuada. De ahí que, $A \in T_P(I^+)$. La igualdad se obtiene en el caso de que I sea una interpretacion 3-valuada total, en este caso $B_j \notin I^+$ se entiende por $B_j \in I^-$, por ello que si $A \in T_P(I^+)$, entonces $A \in \Phi_P(I)^+$.

Para la segunda inclusión, obsérvese que $A \in \Phi_P(I)^-$ si y solo si para toda cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ es tal que $I(cuerpo) = \mathbf{f}$. De lo anterior, se sigue que al menos una de las literales en el *cuerpo* es falsa repecto a I, dígase $A_i \in I^-$ o ya sea $B_j \in I^+$, es decir, $A_i \notin I^+$ o algún $B_j \in I^+$. Por tanto, $I^+(cuerpo) = \mathbf{f}$ tomando a I^+ como una interpretación 2-valuada. Así que, $A \notin T_P(I^+)$. Via complementos se obtiene que $T_P(I^+) \subseteq B_P \setminus \Phi_P(I)^-$. De manera análoga, a lo hecho en la primera inclusión, se obtiene la igualdad. Es decir, si I es total, entonces $B_P \setminus \Phi_P(I)^- = \Phi_P(I)^+ = T'_P(I) = T_P(I^+)$. □

Observación 2.45. *De la proposición 2.44, se sigue que todo modelo de Fitting total es un modelo soportado. Sin embargo, para un programa P, la unicidad del modelo estable no garantiza que P posea un modelo de Fitting total. En efecto, considérese al programa P que consiste de las siguientes cláusulas,*

$$p \leftarrow \neg q$$
$$q \leftarrow \neg p$$
$$p \leftarrow \neg p$$

Se verifica que $\{p\}$ es el único modelo soportado 2-valuado para P, más aún $\{p\}$ es un modelo estable para P. Sin embargo, el modelo de Fitting 3-valuado para P es en todas partes igual a $\mathbf{u}$.

2.1.4. Modelos Perfectos y Débilmente Perfectos

El enfoque usando modelos 3-valuados tiene la ventaja que a cada programa se le puede asociar un único modelo, llamado el modelo de Fitting. Esto evitó la ambigüedad presentada en la semántica basada en lógica clásica, donde un programa puede tener varios modelos asociados. Una manera alternativa de evitar este problema es restringir la sintaxis de los programas, de tal manera que solo se permitan aquellos programas donde la semántica no sea ambigua. Usualmente la restricción se establece mediante condiciones las cuales impiden la recursión en ciertas situaciones y la manera más conveniente para expresar estas condiciones es mediante mapeos de nivel. En otras palabras; la introducción de la negación, en particular la posibilidad de permitir dependencias recursivas entre átomos negados, causa ambigüedad desde un punto de vista declarativo. Sin embargo, si la recursión solo se permite a través de los átomos positivos (llamado modelo estándar) entonces el mínimo modelo puede obtenerse.

Definición 2.46. *Sea P un programa. P es llamado* ***localmente estratificado****, si existe un mapeo de nivel "l" tal que para cada $A \leftarrow A_1, \dots, A_n, \neg B_1, \dots, \neg B_m \in Base(P)$ se satisface:*

- *(E1) $l(A_i) \leq l(A)$ para cada $i = 1, \dots, n$.*
- *(E2) $l(B_j) < l(A)$ para cada $j = 1, \dots, m$.*

Más aún, P será llamado ***estratificado*** *si P es localmente estratificado y para cualesquiera átomos $A, B \in B_P$, con el mismo símbolo predicado, se tiene que $l(A) = l(B)$.*

Nótese que para los programas estratificados la imagen de los mapeos de nivel involucrados es finita, situación diferente la que se presenta para los programas localmente estratificados.

La semántica que se desarrolló con la introducción de los programas localmente estratificados fue llamada **semántica de modelos perfectos**[5]. Sin embargo, se discutirá una semántica aún más general, llamada **semántica débilmente perfecta** (definida más adelante).

Definición 2.47. *Sean P un programa localmente estratificado, l el mapeo de nivel asociado a P y M, N modelos distintos para P. Se dice que N* ***es preferible a*** *M, si para cada átomo-base $A \in N \setminus M$, existe un átomo-base $B \in M \setminus N$ tal que $l(B) < l(A)$. Un modelo M para P es llamado* ***perfecto****, si no existen modelos preferibles a M en P.*

Dada la definición anterior, se está interesado en dar una caracterización de la semántica de los modelos perfectos para lógicas 3-valuadas, con el objetivo de proporcionar un único "modelo adecuado" para cada programa dado. Para ello, se procede en presentar las definiciones involucradas en los modelos débilmente perfectos debido a Przymusinska y Przymusinski [véase [51]].

Para facilitar la notación será conveniente considerar programas proposicionales (infinitos contables) en lugar de programas sobre lenguajes de primer orden, teniendo en cuenta que ya se ha hecho esta observación (en la sección 2.1) sin la pérdida de generalidad para los propósitos del trabajo.

Definición 2.48. *Sean P un programa proposicional y $A, B \in B_P$. Entonces, se tiene lo siguiente.*

[5] Véase [52] y [3] para más resultados.

- *A **refiere a** B si, ya sea que B o $\neg B$ ocurran como una "literal de cuerpo" en alguna cláusula de la forma $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$.*
- *A **refiere negativamente a** B si, $\neg B$ ocurre como una "literal de cuerpo" en una cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$.*
- *A **depende sobre** B, denotado por $B \leq A$, si la pareja (A, B) pertenece a la clausura transitiva de la relación "refiere a".*
- *A **depende negativamente sobre** B, denotado por $B < A$, si existen $C, D \in B_P$ tal que C refiere negativamente a D y se cumplen las siguientes condiciones: 1.- $C \leq A$ o $C = A$ (el último caso en el sentido de la identidad). 2.- $B \leq D$ o $B = D$.*

Consideremos la siguiente notación útil. Sean $A, B \in B_P$, entonces se escribirá $A \sim B$ si $A = B$ o A y B dependen negativamente uno sobre el otro, es decir, $A < B$ y $B < A$. No es difícil verificar que la relación, $\sim$, es una relación de equivalencia y sus clases de equivalencia son llamadas **componentes de** P. Además, se dice que una componente es trivial si esta consiste de un solo elemento A tal que $A \nless A$. Con esta notación se puede considerar el siguiente ejemplo de programas estratificados.

Ejemplo 2.49. *Considérese el programa Tweety2 (Ejemplo 2.28). Se garantiza que tal programa es localmente estratificado, de hecho, es estratificado ya que "`vuela`" depende tanto de "`pingüino`" como de "`ave`" , "`ave`" depende únicamente de "`pingüino`" y "`pingüino`" no depende de ningún símbolo predicado más que el de él mismo. Por otro lado, es claro que Tweety3 (Ejemplo 2.29) no es localmente estratificado.*

Otra manera de presentar las definiciones dadas en 2.48 es por medio de lo que se conoce como la **dependencia gráfica** de un programa P, denotado por G_P y que se define como sigue.

Definición 2.50. *Sea P un programa. Entonces, la dependencia gráfica G_P de P se construye de la siguiente manera:*

- *Los vertices de G_P son los átomos-base que aparecen en P.*
- *Para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ y B un átomo; si B ocurre en el cuerpo, existe una arista dirigida positiva en G_P de B hacia A. Si $\neg B$ ocurre en el cuerpo, existe una arista dirigida negativa en G_P de B hacia A.*

Así, basándose en la Definición 2.50, se tiene que $B \leq A$ si y solo si existe una trayectoria dirigida en G_P de B hacia A; y $B < A$ si y solo si existe una trayectoria dirigida en G_P de B hacia A a través de una arista negada.

Además, dadas C_1 y C_2 dos componentes para un programa P, se puede introducir una relación de orden entre las componentes de la dependencia gráfica del programa P, de la siguiente manera; $C_1 \prec C_2$ si y solo si $C_1 \neq C_2$ y para cada $A_1 \in C_1$, existe $A_2 \in C_2$ tal que $A_1 < A_2$. Por último, se dirá que C_1 es una **componente minimal** para P, si no existe componente C_2 con $C_2 \prec C_1$.

Definición 2.51. *Sea P un programa lógico normal. Entonces, el* ***estrato inferior*** *$S(P)$* ***de*** *P es la unión de todas las componentes minimales de P. La* ***capa inferior*** *$L(P)$* ***de*** *P es el subprograma de P, que consiste de todas las cláusulas del programa P con cabeza en $S(P)$. Además, dada I una interpretación 3-valuada para P, considerando a I como subconjunto indicador, entonces* ***el reducto de*** *P* ***con respecto a*** *I se define como el programa P/I que se obtiene a partir de P mediante las siguientes reducciones: (1) remover de P todas las cláusulas que contienen una literal-cuerpo, L, tal que $\neg L \in I$ o con cabeza perteneciente a I (en otras palabras, remover todas las cláusulas verdaderas en P). (2) Remover de todas las cláusulas restantes todas las literales-cuerpo, L, con $L \in I$. (3) Remover del programa resultante todas las cláusulas no unitarias tales que su cabeza aparezca como cabeza de una cláusula unitaria en el programa P.*

Nótese que la definición de P/I difiere de la dada en la Definición 2.25 para modelo estables. Por tanto, la Definición 2.51 solo será usada en esta sección.

Definición 2.52. *Sea P un programa. Entonces, el* ***modelo débilmente perfecto*** *M_P para P está definido via inducción transfinita como sigue. Sean $P_0 = P$ y $M_0 = \emptyset$. Sea $\alpha > 0$ un ordinal (contable), tal que para todo $\delta < \alpha$ se han definido los programas P_δ y las interpretaciones 3-valuadas M_δ, donde:*

- $N_\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} M_\delta$,
- $P_\alpha = P/N_\alpha$,
- *R_α es el conjunto de átomos que están indefinidos en N_α y fueron eliminados de P, por el reducto de P con respecto a N_α,*
- $S_\alpha = S(P_\alpha)$,
- $L_\alpha = L(P_\alpha)$.

Entonces, la construcción procede con uno de los siguientes 3 casos.

1. *Si $P_\alpha = \emptyset$, entonces la construcción se detiene y $M_P = N_\alpha \cup \neg R_\alpha$ es el modelo débilmente perfecto (total) para P.*

2. *Si $S_\alpha = \emptyset$ o L_α contiene alguna literal negada, entonces la construcción se detiene y $M_P = N_\alpha \cup \neg R_\alpha$ es el modelo débilmente perfecto (parcial) para P.*

3. *En los casos restantes L_α es un programa definite y se define $M_\alpha = H \cup \neg R_\alpha$, donde H es el modelo total 3-valuado correspondiente al mínimo modelo 2-valuado para L_α, y la construcción continua.*

*Para cada α, el conjunto $S_\alpha \cup R_\alpha$ es llamado el **α-ésimo estrato de** P y el programa L_α es llamada la **α-ésima capa de** P.*

Ejemplo 2.53 (Tweety4)**.** *Considérese al porgrama Tweety4 como sigue;*

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(X)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(X)} \\
\texttt{vuela(X)} & \leftarrow & \texttt{ave(X)},\ \neg\texttt{pingüino(X)} \\
\texttt{pingüino(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)},\ \neg\texttt{vuela(bob)}
\end{array}$$

Donde, se exhibirá que Tweety4 tiene como modelo débilmente perfecto a,

$$\{\texttt{ave(bob)},\ \texttt{ave(tweety)},\ \texttt{pingüino(tweety)},\ \neg\texttt{vuela(tweety)}\}.$$

Para ello, sea $P = P_0 = Base(Tweety4)$, donde $Base(Tweety4)$ está conformada por las siguientes cláusulas:

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(tweety)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(tweety)} \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)} \\
\texttt{vuela(tweety)} & \leftarrow & \texttt{ave(tweety)},\ \neg\texttt{pingüino(tweety)} \\
\texttt{vuela(bob)} & \leftarrow & \texttt{ave(bob)},\ \neg\texttt{pingüino(bob)} \\
\texttt{pingüino(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)},\ \neg\texttt{vuela(bob)}
\end{array}$$

Ahora, sea $M_0 = \emptyset$, entonces $N_1 = M_0$ y $P_1 = P_0/M_0$. Luego, llévese acabo la reducción de P_0 respecto a M_0 para obtener P_1. Aplicando la Definición 2.51 se observa que solo aplica (3), y de ahí se tiene que P_1 está formado por;

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(bob)} & \leftarrow & \\
\texttt{ave(tweety)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(tweety)} \\
\texttt{vuela(tweety)} & \leftarrow & \texttt{ave(tweety)},\ \neg\texttt{pingüino(tweety)} \\
\texttt{vuela(bob)} & \leftarrow & \texttt{ave(bob)},\ \neg\texttt{pingüino(bob)} \\
\texttt{pingüino(bob)} & \leftarrow & \texttt{pingüino(bob)},\ \neg\texttt{vuela(bob)}
\end{array}$$

Como el reducto de P_0 respecto a M_0, solo removió una cláusula la cual no removió atómos básicos de P_0, entonces $R_1 = \emptyset$.

La dependencia gráfica G_{P_1} de P_1, se muestra en la Figura 2.1 donde se utilizan las abreviaciones obvias para los átomos-base de P_1. Así, utilizando G_{P_1} es sencillo verificar que las componentes de P_1 son: {ave(bob)}, {ave(tweety)}, {pingüino(tweety)}, {vuela(tweety)}, {vuela(bob), pingüino(bob)}. *Además, es inmediato observar que las componentes minimales de P_1 son;* {ave(bob)},{ave(tweety)},{pingüino(tweety)}. *Así, el estrato inferior de P_1 es $S(P_1)$=*{ave(bob), ave(tweety), pingüino(tweety)} *y la capa inferior de P_1, $L_1 = L(P_1)$, es el siguiente programa definite.*

$$\begin{array}{rcl} \textit{pingüino(tweety)} & \leftarrow & \\ \textit{ave(bob)} & \leftarrow & \\ \textit{ave(tweety)} & \leftarrow & \textit{pingüino(tweety)} \end{array}$$

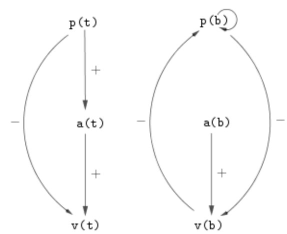

Figura 2.1: Dependencia gráfica para P_1.

Donde, es claro que el mínimo modelo 2-valuado para L_1 es igual a S_1. Luego, como L_1 es definite, se sigue de (3) en la Definición 2.52 que $M_1 = H \cup \neg R_1$, donde H es el modelo 3-valuado total correspondiente a S_1 y al ser $R_1 = \emptyset$, $M_1 = S_1$. Por tanto, el proceso continua. El programa P_2 que se obtiene al realizar el reducto de P_1 respecto a M_1 es el siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \textit{vuela(bob)} & \leftarrow & \neg\textit{pingüino(bob)} \\ \textit{pingüino(bob)} & \leftarrow & \textit{pingüino(bob)}, \neg\textit{vuela(bob)} \end{array}$$

La dependencia gráfica G_{P_2} que se muestra en la Figura2.2, solo posee una componente a saber {pingüino(bob), vuela(bob)}. *Por tanto, el estrato inferior de P_2 es $S_2 = S(P_2)$ =*{pingüino(bob), vuela(bob)}. *Más aún, $N_2 = M_0 \cup M_1 = M_1$ y por como se definió R_2, se tiene que es igual a* {vuela(tweety)}. *Como la capa inferior $L_2 = L(P_2) = P_2$, entonces L_2 no es un programa definite. Por tanto, la construcción se detiene por (2) en la Definición 2.52, y el modelo débilmente perfecto es $M_2 \cup \neg R_2 = M_1 \cup \neg R_2 = S_1 \cup \neg R_2$ como se había afirmado.*

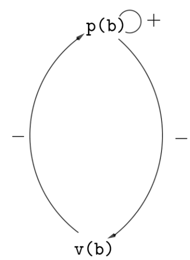

Figura 2.2: Dependencia gráfica para P_2.

Definición 2.54. *Un programa lógico normal P se dice que es un **programa débilmente estratificado**, si P posee un modelo débilmente perfecto (total). Así, el conjunto de todos los estratos de P será llamado su **estratificación debil**.*

Ahora, veamos una caracterización alternativa de los modelos débilmente perfectos usando mapeos de nivel.

Definición 2.55. *Sean P un programa lógico normal, I una interpretación 3-valuada para P y l un I-mapeo de nivel parcial para P. Se dice que P **satisface** (WS) **respecto a** I **y** l, si para cada $A \in dom(l)$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

WS1. $A \in I$ *y existe* $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ *tal que para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$; $L_i \in I$ *y* $l(A) > l(L_i)$.

WS2. $\neg A \in I$ *y para cada* $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m \in Base(P)$ *al menos una de las siguientes condiciones se cumple.*

- *WS2a. Existe i tal que $\neg A_i \in I$ y $l(A) > l(A_i)$.*
- *WS2b. Para todo k, j; $l(A_k) \leq l(A)$, $l(B_j) < l(A)$ y existe i con $\neg A_i \in I$.*
- *WS2c. Existe j tal que $B_j \in I$ y $l(A) > l(B_j)$.*

Nótese que la condición $(F2)$ en la Definición 2.39 implica $(WS2a.)$ ó $(WS2c.)$, donde se observa que la condición $(WS2)$ es más general que la condición $(F2)$ y de hecho las condiciones $(WS1)$ y $(F1)$ son idénticas.

Ahora, consideremos algo de notación que ayudará en la presentación de un Teorema posterior. Será conveniente considerar los mapeos de nivel como mapeos de B_P hacia el conjunto de pares de ordinales (β, n), donde $n \leq \omega$. En efecto, dado α un ordinal (contable) y tomando $\mathcal{A} = \{(\beta, n) \mid \beta < \alpha,\ n \leq \omega\}$, se tiene que $\mathcal{A}$ está dotado con el orden lexicográfico y es isomorfo a un ordinal. Por tanto, cualquier mapeo de B_P hacia $\mathcal{A}$ puede considerarse como un mapeo de nivel. Además, dado P un programa con M_P su modelo débilmente perfecto, se define el M_P-mapeo de nivel parcial, denotado por l_P, como sigue: $l_P(A) = (\beta, n)$, donde $A \in S_\beta \cup R_\beta$ y n es mínimo con la propiedad que $A \in T_{L_\beta} \uparrow (n+1)$, si tal n existe. En otro caso, $l_P(A) = (\beta, \omega)$. Nótese lo siguiente, si $l_P(A) = l_P(B)$, entonces existe α tal que $A, B \in S_\alpha \cup R_\alpha$. Además, si $A \in S_\alpha \cup R_\alpha$ y $B \in S_\beta \cup R_\beta$ con $\alpha < \beta$, entonces $l(A) < l(B)$.

Definición 2.56. *Sean P, Q programas e I una interpretación.*

(a) Sean $C_1 = A \leftarrow L_1, \ldots, L_n$ y $C_2 = B \leftarrow K_1, \ldots, K_m$ dos cláusulas. Entonces, C_1 ***subsume a*** *C_2, si $A = B$ y $\{L_1, \ldots, L_n\} \subseteq \{K_1, \ldots, K_m\}$. Denotado por, $C_1 \preccurlyeq C_2$.*

(b) Se dice que P ***subsume a*** *Q, si para cada cláusula $C_1 \in P$, existe C_2 cláusula en Q, tal que $C_1 \preccurlyeq C_2$. Denotado por, $P \preccurlyeq Q$.*

(c) Se dice que P ***subsume a*** *Q* ***como modelo-consistente*** *(con respecto a I), denotado por $P \preccurlyeq_I Q$, si las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) Para cada $C_1 = A \leftarrow L_1, \ldots, L_n$ en P, existe $C_2 = B \leftarrow K_1, \ldots, K_m$ en Q tal que $C_1 \preccurlyeq C_2$ y $\{K_1, \ldots, K_m\} \setminus \{L_1, \ldots, L_n\} \subseteq I$.

(ii) Para cada $C_2 = B \leftarrow K_1, \ldots, K_m$ en Q con $\{K_1, \ldots, K_m\} \subseteq I$ y $B \notin I$, existe cláusula C_1 en P tal que $C_1 \preccurlyeq C_2$.

Con la notación establecida en la Definición 2.52 y la Definición anterior se prueba el siguiente lema.

Lema 2.57. *Sea P un programa. Entonces, para todo ordinal α; $P/N_\alpha \preccurlyeq_{N_\alpha} P$.*

Demostración. Sea α un ordinal. Como cada cláusula $C_1 = A \leftarrow L_1, \ldots, L_n$ en P/N_α, se obtiene de una cláusula $C_2 = A \leftarrow K_1, \ldots, K_m$ en P por medio de la eliminación de literales en el cuerpo contenidas en N_α, entonces la condición (Ci) en la Definición 2.56 se cumple. Además, claramente $C_1 \preccurlyeq C_2$ y $\{K_1, \ldots, K_m\} \setminus \{L_1, \ldots, L_n\}$ solo contiene elementos de N_α.

Por otro lado, para cada cláusula $C_2 = A \leftarrow K_1, \ldots, K_m$ en P donde $A \notin N_\alpha$ y el *cuerpo* de C_2 es cierto bajo N_α, se tiene que mediante el segundo paso del reducto de P respecto a N_α, todas las literales K_i son eliminadas del *cuerpo* de C_2. Por tanto, $C_1 = A \leftarrow$ es una cláusula unitaria en P/N_α. Por tanto, $C_1 \preccurlyeq C_2$. □

Lema 2.58. *Sean P' un programa lógico infinito proposicional normal, $I \neq \emptyset$ un modelo 3-valuado para P' y l un I-mapeo de nivel parcial tal que P' satisface (WS) respecto a I y l. Entonces, Si $P = P'/\emptyset$ se cumple lo siguiente:*

(1) El estrato inferior de P es diferente del conjunto vacío, es decir $S(P) \neq \emptyset$, y únicamente consiste de componentes triviales.

(2) $L(P)$ de P es un subprograma definite.

(3) El modelo 3-valuado N correspondiente al mínimo modelo 2-valuado para $L(P)$ es consistente con I en el siguiente sentido: $I' \subseteq N$, donde I' es la restricción de I sobre aquellos átomos los cuales no están indefinidos en N.

(4) P/N satisface (WS) respecto a I/N y $l|_N$, donde $l|_N$ es la restricción de l sobre los átomos en I/N.

Demostración. (1) Supongamos que existe una componente no trivial tal que $C \subseteq S(P)$. Entonces, existen átomos en C tales que $A \neq B$, $A < B$ y $B < A$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que A es elegido de tal manera que $l(A)$ es mínimal. Ahora, sea A' cualquier átomo que ocurre en el *cuerpo* de la cláusula con cabeza A. Entonces,

- Si A' ocurre positivamente, entonces $A > B > A \geq A'$, sin mucha dificultad se prueba que $A > A'$.

- Si A' ocurre negativamente, entonces $A > A'$. Y, por la minimalidad de la componente, también se tiene que $A < A'$.

Por tanto, se tiene que todos los átomos que ocurren positivamente o negativamente en el cuerpo de las cláusulas con cabeza A están contenidos en C.

Ahora, considérense los siguientes casos.

- Si $A \in I$, entonces debe de existir una cláusula unitara con cabeza A en P, dígase $A \leftarrow$ de lo contrario por $(WS1)$ en la Definición 2.55, se tiene $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n$ con $n \geq 1$, $L_i \in I$ y $l(A) > l(L_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, lo que contradice la minimalidad de $l(A)$. Además, como $P = P'/\emptyset$, se tiene que $A \leftarrow$ es la única cláusula P con cabeza A. Contradiciendo la existencia $B \neq A$ con $B < A$.

- Si $\neg A \in I$, y dado que A fue elegido de tal manera que fuera minimal respecto a l, entonces se tiene que $(WS2b)$, de la Definición 2.55, debe satisfacerse para toda cláusula $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m$ respecto a I y l, más aún, $m = 0$. Además, como se hizó notar líneas anteriores, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i \in C$ y $l(A) \geq l(A_i)$. También, del Caso(1), se tiene que ningún A_i pertenece a I. De lo anterior se sigue que, para todo A_i en el *cuerpo* de cualquier cláusula con cabeza A, se tiene $l(A) = l(A_i)$ y $\neg A_i \in I$. El mismo argumento se cumple para todas las cláusulas con cabeza algun A_i, y el argumento se repite en si mismo. Ahora del hecho que $A > B$, existen $D, E \in C$ tal que E refiere negativamente a D, $E \leq A$ y $B \leq D$. Como se acaba de observar, $\neg E \in I$ y $l(E) = l(A)$. Como E refiere negativamente a D, existe una cláusula con cabeza E y la $\neg D$ en el *cuerpo* de tal cláusula. Y como $(WS2)$ se cumple para esta cláusula, entonces existe una literal L en el *cuerpo* de esta cláusula tal que $l(L) < l(A)$ y $L \in C$, lo cual es una contradicción.

Por tanto todas las componentes en P son triviales.

Ahora, véase que $S(P) \neq \emptyset$. En efecto, sea A un átomo de tal manera que $l(A)$ sea minimal. Se afirma que $\{A\}$ es una componente. Para ello, supóngase lo contrario, es decir, existe átomo B con $B < A$. Entonces, existe $D_1, \ldots, D_k$ para algún $K \in \mathbb{N}$, tal que $D_1 = A$, D_j refiere a D_{j+1} para todo $j = 1, \ldots, k-1$ y D_k refiere negativamente algún B' con $B' \geq B$ (ó $B' = B$).

Mediante inducción pruébese lo siguiente, para todo $j = 1, \ldots, k$; $\neg D_j \in I$, $B < D_j$ y $l(D_j) = l(A)$. De hecho, nótese que para $j = 1$, es decir $D_j = A$, se tiene que $B < D_j = A$ y $l(D_j) = l(A)$. Supóngase que $A \in I$, luego por la minimalidad de $l(A)$, se tiene que $A \leftarrow$ es la única cláusula en $P = P'/\emptyset$, lo cual contradice la existencia de $B < A$. Por tanto, $\neg A \in I$ y la propiedad se cumple para $j = 1$. Ahora, supóngase que la propiedad se cumple para $j < k$. Entonces, al tener que $B \leq B' < D_k \leq D_{k-1} \leq \cdots \leq D_2 \leq A$ se tiene que $B < D_{j+1}$. Como $\neg D_j \in I$ y $l(D_j) = l(A)$, se observa que $(WS2)$ debe cumplirse, y por la minimalidad de $l(A)$, se infiere que $(WS2b)$ se cumple y de ahí que no haya cláusulas con cabeza D_j que contengan átomos negados. ASí, por $(WS2b)$ y la minimalidad de $l(A)$, se cumple que $l(D_{j+1}) = l(D_j) = l(A)$. Además, si se supone que $D_{j+1} \in I$, tal supuesto puede ser refutado por el mismo argumento que se dio para A líneas anteriores, de lo contrario, $D_{j+1} \leftarrow$ sería la única cláusula con cabeza D_{j+1} y por la minimalidad $l(D_{j+1}) = l(A)$, contradiciendo que $B < D_{j+1}$. Por tanto se cumple la propiedad.

En resumen, se tiene que D_k refiere negativamente a B' y $\neg D_k \in I$. Entonces, existe una cláusula que satisface $(WS2)$ con cabeza D_k y la $\neg B'$ en el *cuerpo* de tal cláusula. Contradiciendo, una vez más, la minimalidad de $l(A) = l(D_k)$. Por tanto, se cumple (1).

(2) Supóngase que $L(P)$ no es definite. Entonces, existe una cláusula $A \leftarrow$ *cuerpo* $\in L(P)$ tal que $\neg B$ ocurre en el *cuerpo* de la cláusula para alguna literal B. De donde, se tiene que $B < A$. Y, dado que el estrato inferior consiste unicamente de componentes minimales, se sigue que $A < B$. De lo anterior, se infiere que A y B pertenecen a la misma componente, contradiciendo (1). Por tanto, $L(P)$ es definite.

(3) Primero, nótese que al formar el reducto P de P' respecto a $\emptyset$, el

tercer paso en este proceso es el único que tiene algún efecto al remover todas las cláusulas no unitarias, donde su cabeza aparezca también como una cebeza de alguna cláusula unitaria.

Ahora, sea un átomo $A \in I'$ tal que $A \notin N$ y supóngase, sin pérdida de generalidad que, A es elegido de tal manera que $l(A)$ es minimal con esta porpiedad. Por la observación hecha en un principio y la hipótesis (P' satisface (WS) respecto a I y l), existe una cláusula $A \leftarrow L_1, \dots, L_n$ en P tal que, para todo i; $L_i \in I$. Por tanto, $L_i \in I'$ para todo i y $l(A) > l(L_i)$. Así, todas las literales L_i son verdaderas respecto a N por la minimalidad de $l(A)$. De donde, al ser N un modelo para $L(P)$, se sigue que $A \in N$, lo cual contradice lo supuesto en un principio.

De manera análoga, considérese un átomo $A \in N$ tal que $A \notin I'$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que A es elegido de tal manera que n sea minimal respecto al hecho siguiente, $A \in T_{L(P)} \uparrow (n+1)$. Entonces, existe una cláusula definite, $A \leftarrow \textit{cuerpo} \in L(P)$ tal que todos los atomos que ocurren en *cuerpo* son verdaderos respecto a $T_{L(P)} \uparrow n$. Por tanto, estos átomos son verdaderos en I', y al ser I' un modelo para $L(P)$, se infiere que $A \in I'$, contradiciendo la hipótesis.

Finalmente, sea $\neg A \in I'$. Entonces, no es posible tener que $A \in N$, de lo contrario $A \in I'$. Así, dado que N es un modelo total para $L(P)$ se tiene que $\neg A \in N$.

(4) Del Lema 2.57, se tiene que $P/N \preccurlyeq_N P$. De lo cual, considérense los siguientes casos;

- Si $A \in I \setminus N$, entonces existe una cláusula $A \leftarrow L_1, \dots, L_k$ en P tal que $L_i \in I$ y $l(A) > l(L_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Como, lo anterior, no es posible para aquellos elementos $A \in N$, entonces existe una cláusula en P/N la cual subsume a $A \leftarrow L_1, \dots, L_k$, y por tanto, satisface $(WS1)$. Así, A satisface $(WS1)$.

- Si $\neg A \in I \setminus N$, entonces para cada $C_1 = A \leftarrow \textit{cuerpo}_1$ en P/N, existe $C = A \leftarrow \textit{cuerpo}$ en P tal que C subsume a C_1. Y como, $\neg A \in I$, entonces se satisface la condición $(WS2)$ para A y C. Finalmente, como la reducción respecto a N elimina solo literales en el cuerpo, que ocurren en N, entonces la condición $(WS2)$ se sigue cumpliendo.

Por tanto, P/N satisface (WS) respecto a I/N y $l|_N$. □

Ahora, se presentará el Teorema que dio motivo a la introducción de la notación, Definiciónes y Lemas anteriores.

Teorema 2.59. *Sea P un programa lógico normal con modelo débilmente prefecto M_P. Entonces en el ordenamiento $\sqsubseteq_k$, M_P es el modelo más grande entre todos los modelos I, para los cuales existe l un*

I-mapeo de nivel parcial para P, tal que P satisface (WS) respecto a I y l.

Demostración. Mostraremos las siguientes afirmaciones.

1. P satisface (WS) respecto a M_P y l_P.

2. Si I es un modelo para P y l es un I-mapeo de nivel parcial tal que P satisface (WS) respecto a I y l, entonces $I \subseteq M_P$.

[1] Sea $A \in dom(l_P)$. Supóngase que $l_P(A) = (\alpha, n)$, entonces considerensé los siguientes casos.

(i) $A \in M_P$. Entonces $A \in T_{L_\alpha} \uparrow (n{+}1)$. Por tanto, existe una cláusula definite en L_α, dígase $A \leftarrow A_1, \ldots, A_k$ tal que $A_i \in T_{L_\alpha} \uparrow n$, para todo i. Así, para todo i; $A_i \in M_P$ y $l_P(A) > l_P(A_i)$. Por el Lema 2.57, existe una cláusula en P $A \leftarrow A_1, \ldots, A_k, L_1, \ldots, L_m$ tal que $L_j \in N_\alpha \subseteq M_P$ para todo $j = 1, \ldots, m$. De lo anterior se sigue que $l_P(A) > l_P(L_j)$, para todo j. Por tanto, $(WS1)$ se cumple.

(ii) $\neg A \in M_P$. Sea $A \leftarrow A_1, \ldots, A_k, \neg B_1, \ldots, \neg B_m$ en P. Si tal cláusula no existe $(WS2)$ se cumple trivialmente. Entonces, supóngase que existen cláusulas de este tipo y considérense los siguientes casos.

ii.1 Supóngase que A se encuentra indefinido en N_α y fue eliminado de P, por el reducto de P respecto a N_α, es decir $A \in R_\alpha$. En particular, existen $\neg A_i$ ó $B_j \in N_\alpha$ para los cuales se satisfacen, respectivamente, $l_P(A_i) < l_P(A)$ o $l_P(B_j) < l_p(A)$. Por tanto, se cumple $(WS2a)$ o en el otro caso $(WS2c)$.

ii.2 Supóngase que $\neg A \in H$, donde H es el modelo 3-valuado correspondiente al mínimo modelo 2-valuado para L_α. Como $P/N_\alpha \preccurlyeq_{N_\alpha} P$, entonces existe A_i tal que $\neg A_i \in H$, y por como se definio l_P se sigue que $l_P(A) = l_P(A_i) = (\alpha, \omega)$. De ahí que, para todo $i' \neq i$; $l_P(A_{i'}) \leq l_P(A_i)$. Además, al ser P/N_α un subprograma definite, se sigue que para toda j; $\neg B_j \in N_\alpha$ y en consecuencia, $l_P(B_j) < l_P(A)$ para toda j. Por tanto, $WS2b$ se satisface.

[2] Supóngase que I es un modelo 3-valuado no vacío para P y l un I-mapeo de nivel parcial tal que P satisface (WS) respecto a I y l. Nótese que para todo modelo M, N de P con $M \subseteq N$ se tiene, $(P/M)/N = P/(M \cup N) = P/N$ y $(P/N)/\emptyset = P/N$.

Considérese a I_α como la restricción de I sobre aquellos átomos que no se encuentran indefinidos en $N_\alpha \cup R_\alpha$. Basta mostrar que para todo ordinal $\alpha > 0$; $I_\alpha \subseteq N_\alpha \cup R_\alpha$, y $I \setminus M_P = \emptyset$. Muéstrese por inducción sobre α los siguientes hechos: (i) $S(P/N_\alpha) \neq \emptyset$ y consiste unicamente de componentes triviales. (ii) $L(P/N_\alpha)$ es definite. (iii) $I_\alpha \subseteq N_\alpha \cup R_\alpha$. (iv) $P/N_{\alpha+1}$ satisface (WS) respecto a $I \setminus N_{\alpha+1}$ y $l|_{N_{\alpha+1}}$.

Nótese que P satisface las hipótesis del Lema 2.58. Así dado $\alpha = 1$, se garantiza que $P/N_\alpha = P/\emptyset$ satisface (WS) respecto a $I \setminus N_1$ y $l|_{N_1}$. Y, por el Lema 2.58, se tiene que los apartados $(i), (ii)$ se cumplen. Para (iii), nótese que ningún átomo en R_1 puede ocurrir en I, ya que ningún átomo en R_1 puede suceder como cabeza de alguna cláusula en P, por último se puede aplicar el Lema 2.58 para obtener (iii). Para (iv), se aplica una vez más el Lema 2.58 notando que $P/N_2 \preccurlyeq_{N_2} P$.

Sea $\alpha = \beta+1$. Por hipótesis inductiva se garantiza que P/N_β satisface las hipótesis del Lema 2.58. Por tanto, los apartados $(i), (ii)$ se siguen de manera inmediata a partir de este Lema y para $(iii), (iv)$ se garantizarán de la misma manera en que se hagan, cuando se considere el caso límite.

Sea α un ordinal límite. P satisface (WS) respecto a $I \setminus N_\alpha$ y $l|_{N_\alpha}$[6]. Por tanto, el Lema 2.58 es aplicable y se garantizan los apartados $(i) y (ii)$. Para (iii), sea $A \in R_\alpha$. Entonces, cada cláusula en P con cabeza A contiene una literal en su *cuerpo* la cual es falsa en N_α. Por la hipótesis inductiva, se garantiza que no existen cláusulas en P con cabeza A tal que el *cuerpo* de estas cláusulas sea cierto en I, es decir, $A \notin I$. Finalmente, aplicando (3) del Lema 2.58 se obtiene (iii). Para (iv), se aplica (4) del Lema 2.58 notando que $P/N_{\alpha+1} \preccurlyeq_{N_{\alpha+1}} P$.

Solo resta convencerse que $I \setminus M_P = \emptyset$. En efecto, por el argumento dado para la inducción transfinita líneas arriba, se tiene que P/M_P satisface (WS) respecto a $I \setminus M_P$ y $l|_{M_P}$. Si $I \setminus M_P \neq \emptyset$, entonces por el Lema 2.58, $S(P/M_P) \neq \emptyset$, $L(P/M_P)$ es definite y posee a M como el modelo correspondiente al mínimo modelo 2-valuado para $L(P/M_P)$. Por tanto, por la Definición 2.52 se tiene que $M \subseteq M_P$, lo cual es una contradicción dado que M es el mínimo modelo para $L(P/M_P)$. Finalmente, se concluye la prueba. $\square$

Como un caso particular se tiene el siguiente Corolario, que se sigue de manera inmediata del Teorema anterior (2.59).

Corolario 2.60. *Sea P un programa. P es débilmente estratificado si y solo si existe I un modelo total para P y l un mapeo de nivel (total) para P tal que, P satisface (WS) respecto a I y l.*

Observación 2.61.

- *Los modelos débilmente perfectos en general difieren de los modelos de Fitting.*

[6]Lo cual se hace de la misma manera en que se hizó el inciso (d) del Lema 2.58

- *Los modelos de Fittinng en general no coinciden con los modelos débilmente perfectos (parciales).*

- *Los modelos de Fitting en general no coinciden con los modelos perfectos para programas localmente estratificados.*

Para esclarecer la observación 2.61 considérense los siguientes resultados.

Proposición 2.62. *Sea P un programa. Si M_1 es el modelo de Fitting para P y M_2 el modelo débilmente perfecto (parcial) para P, entonces $M_1 \subseteq M_2$.*

Demostración. Sea l' un M_1-mapeo de nivel parcial tal que P satisface (F) respecto a M_1 y l'. Entonces, es claro que, P satisface (WS) respecto a M_1 y l'. Como M_2 es el modelo más grande entre todos los modelos para los cuales existe un I-mapeo parcial de nivel l para P tal que P satisface (WS) respecto a I y l, entonces por el Teorema 2.59 se cumple que $M_1 \subseteq M_2$. □

Ejemplo 2.63. *Considérese el Programa P que consiste unicamente de la cláusula $P \leftarrow P$. Luego, se verifica que $\emptyset$ es un modelo de Fitting para P, sín embargo su modelo débilmente perfecto (parcial) es $\{\neg p\}$. Nótese que P es localmente estratificado con modelo (2-valuado) perfecto, en donde p es falso.*

Como un último resultado para esta Sección considérese la siguiente proposición.

Proposición 2.64. *Todo programa definite es localmente estratificado y posee un modelo débilmente perfecto total.*

Demostración. Sea P un programa definite. Entonces, es claro que P es localmente estratificado. Para la otra parte, considérese a I como su modelo minimo. Además, defínase $l(A)$ para todo $A \in I$ como en la Proposición 2.21, y $l(B) = 0$ para todo $B \notin I$. Luego, al considerar la caracterización para los modelos débilmente perfectos del Teorema 2.59, se observa que todo $A \in I$ satisface $(WS1)$ y los átomos restantes satisfacen $(WS2b)$. Por tanto, se tiene el resultado. □

2.1.5. El Operador W_P y Modelos Bien-Fundados

Recordemos que la idea base de la estratificación es la restricción de la recursión a través de la negación y comparando las Definiciones 2.39 y 2.55, podemos plantear la pregunta siguiente: ¿la Definición 2.55 es la manera más adecuada de lograr esto en un conjunto 3-valuado? Para responder a tal pregunta, véase la siguiente definición.

Definición 2.65. *Sean P un programa normal, I un modelo para P y l un I-mapeo parcial de nivel para P. Se dirá que P satisface (WF) respecto a I y l, si cada $A \in dom(l)$ satisface una de las siguientes condiciones.*

WF1 *$A \in I$ y existe una cláusula $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ tal que $L_i \in I$ y $l(L_i) < l(A)$ para todo $i \in \{1, \ldots n\}$.*

WF2 *$\neg A \in I$ y para cada cláusula $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m \in Base(P)$ (al menos) una de las siguientes condiciones se cumple.*

- *WF2i* *Existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\neg A_i \in I$ y $l(A_i) \leq l(A)$.*
- *WF2ii* *Existe $l \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $B_j \in I$ y $l(B_j) < l(A)$.*

Si $A \in dom(l)$ satisface $(WF1)$, entonces se dirá que A satisface $(WF1)$ respecto a I y l. De manera análoga, si $A \in dom(l)$ satisface $(WS2)$.

Nótese que las condiciones $(F1), (WS1)$ y $(WF1)$ son idénticas. Más aún, si P satisface (WS) respecto a I y l, entonces P satisface (WF) respecto a I y l. Sin embargo, reemplazar $(WF1)$ por una “versión estratificada” como la que se da a continuación no es del todo satisfactorio.

SF1 $A \in I$ y existe una cláusula $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m \in Base(P)$ tal que $A_i, \neg B_j \in I$, $l(A_i) \leq l(A)$ y $l(B_j) < l(A)$ para todo i, j.

De hecho, si se reemplaza la condición $(WF1)$ por la condición $(SF1)$, entonces no se garantiza que exista el modelo más grande que satisfaga las propiedades deseadas para un programa dado.

Ejemplo 2.66. *Considérese al programa P que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$p \leftarrow p$$
$$q \leftarrow \neg p.$$

Entonces, $\{p, \neg q\}$ y $\{\neg p, q\}$ son modelos (totales) para P y l definido por $l(p) = 0$ y $l(q) = 1$ es un mapeo de nivel para P. Obsérvese que estos modelos son incomparables, a pesar de que en ambos casos las condiciones obtenidas al reemplazar $(WF1)$ por $(SF1)$ en (WF) se satisfacen.

Por tanto, a la luz del Teorema 2.40, la Definición 2.65 proporciona una versión estratificada natural de la semántica de Fitting (véase el Ejemplo 2.78 para ello). Además, la semántica que resulta coincide con otra semántica bien-conocida llamada, la semántica bien-fundada [véase [65]]. Para demostrar la afirmación anterior será necesario introducir los modelos bien-fundados que se hará a continuación.

Definición 2.67. *Sean P un programa normal e $I \in I_{P,4}$. Se dice que $U \subseteq B_P$ es un* **conjunto infundado de** P **respecto a** I *si para cada átomo $A \in U$ se satisface la siguiente condición. Para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ al menos una de las siguientes condiciones se cumple.*

US1 Alguna literal (positiva o negativa) en el cuerpo es falsa en I.

US2 Algún átomo (no-negado) en el cuerpo ocurre en U.

Proposición 2.68. *Sean P un programa e $I \in I_{P,4}$. Entonces, existe el máximo conjunto infundado de P respecto a I.*

Demostración. Sea $\{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ una familia de conjuntos, donde cada U_i es un conjunto infundado de P respecto a I. Entonces, se sigue de manera inmediata de la Definición 2.67 que el conjunto $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ es un conjunto infundado de P respecto a I. Por tanto, se concluye la prueba. □

Sea P un programa e $I \in I_{P,4}$, se define el operador T'_P sobre $I_{P,4}$ de la siguiente manera:

$$T'_P(I) = \{ \quad A \in B_P \mid \exists\ A \leftarrow cuerpo \in Base(P) \ \texttt{con} \\ I(cuerpo) = \mathbf{t},\ \texttt{respecto a la lógica} \\ \texttt{3} - \texttt{valuada fuerte de Kleene} \quad \}$$

Además, se define $U_P(I)$ como el máximo conjunto infundado de P respecto a I. Finalmente, para cada $I \in I_{P,4}$ se define el operador W_P, llamado W_p-operador, como: $W_P(I) = T'_P(I) \cup \neg U_P(I)$. Nótese que W_P no se restringe a una función sobre $I_{P,3}$, en su lugar necesita el uso de $I_{P,4}$.

Ejemplo 2.69. *Considérese al Programa del Ejemplo 2.20 y sea $I = \{p\} \in I_{P,3}$. Entonces, $T'_P(I) = \{p\}$ y $U_P(I) = \{p\}$, luego $W_P(I) = \{p, \neg p\} \notin I_{P,3}$.*

La primera propiedad del operador W_P, la cual es base para la introducción de los modelos bien-fundados se da a continuación.

Proposición 2.70. *Sea P un programa. Entonces, el operador W_P es monotonico sobre $I_{P,4}$.*

Demostración. Sean $I, K \in I_{P,4}$ con $I \subseteq K$. Entonces, de manera completamente análoga a lo que se hizo en la prueba de la Proposición 2.34, se tiene que $T'_P(I) \subseteq T'_P(K)$. Por tanto, solo resta probar que cada conjunto infundado de P respecto a I también es un conjunto infundado de P respecto a K, lo cual una vez más se sigue de manera inmediata a partir de la Defınción 2.67. □

Ahora, obsérvese que el operador W_P tiene un mínimo punto fijo por el Teorema A.18, dado que W_P es monótono. Tal punto fijo es llamado el **modelo bien-fundado para** P, dando lugar a la semántica bien-fundada de P.

Mostremos con el siguiente Ejemplo que el operador W_P no es un orden-continuo en general e inclusive no es ω-continuo, pese a la monotonía del mismo.

Ejemplo 2.71. *Sea P el siguiente programa.*

$$\begin{array}{rcl} p(0) & \leftarrow & \\ p(s(X)) & \leftarrow & p(X) \\ q(s(X)) & \leftarrow & \neg p(X) \\ r & \leftarrow & \neg q(s(X)) \end{array}$$

Entonces, sin ninguna dificultad se puede verificar que;

$$\begin{array}{l} W_P \uparrow n = \{p(s^k(0)) \mid k < n\} \cup \{\neg q(s^k(0)) \mid 0 < k < n\},\ y \\ W_P \uparrow \omega = \{p(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg q(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}, 0 < n\} \\ \qquad\quad \neq \{p(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg q(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}, 0 < n\} \cup \{\neg r\} \\ \qquad\quad = W_P \uparrow (\omega + 1) \end{array}$$

A continuación, mostremos que los modelos bien-fundados pertenecen a $I_{P,3}$.

Teorema 2.72. *Sea P un programa. Entonces $W_P \uparrow \alpha \in I_{P,3}$ para todo ordinal α. Más aún, los modelos bien-fundados para P pertenecen a $I_{P,3}$.*

Demostración. Sea M el mínimo punto fijo de W_P y para cada átomo $A \in M^+$, $l(A)$ es el mínimo ordinal β tal que $A \in W_P \uparrow (\beta + 1)$.

Supóngase que existe γ-ordinal, el cual es mínimo bajo la condición que $W_P \uparrow \gamma \notin I_{P,3}$. Entonces, γ es un ordinal sucesor, y dado que $I_{P,3}$ es un *cpo* se tiene que $I = W_P \uparrow (\gamma - 1) \in I_{P,3}$. Ahora, considérese el conjunto $U = T'_P(I) \cap U_P(I)$. Entonces, para cada $A \in U$ y cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ con $I(cuerpo) = \mathbf{t}$, se garantiza que algún B (átomo no-negado) ocurre en $U_P(I)$ dado que no se cumple $(US1)$. De ahí que, $B \in U_P(I) \cap I$ y al tener que $I \subseteq T'_P(I)$ se obtiene que $B \in U$. Ahora, sea $A \in U$ elegido de tal manera que es minimal respecto a $l(A) = \beta$ y nótese que $\beta < \gamma$, necesariamente. Entonces, existe una cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ con $W_P \uparrow \beta(cuerpo) = \mathbf{t}$, $W_P \uparrow \beta \subseteq I$ y en particular $B \in I$ y $l(B) < l(A)$ para todo átomo (no-negado) B que ocurre en el *cuerpo* de la cláusula. Pero, recién se mostró que $B \in U$ contradiciendo la minimalidad de $l(A)$. □

Proposición 2.73. *Sean P un programa e $I \in I_{P,3}$ una interpretación para P. Entonces, $\Phi_P(I) \subseteq W_P(I)$. Más aún, todo punto fijo 3-valuado de W_P es un modelo soportado 3-valuado para P con respecto a la lógica 3-valuada fuerte de Kleene.*

Demostración. Veamos que $F_P(I) \subseteq U_P(I)$.En efecto, sea $A \in F_P(I)$. Entonces para cada cláusula $A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ se tiene que $I(\mathit{cuerpo})$ es `falso`, por tanto, existe $L \in \mathit{cuerpo}$ literal con $I(L) = \mathbf{f}$. De lo anterior se garantiza que A pertenece a algún conjunto infundado de P respecto a I, por tanto $A \in U_P(I)$.

Ahora, sea $M = W_P(M) = T'_P(M) \cup \neg U_P(M)$. Mostremos que $M = \Phi_P(M) = T'_P(M) \cup \neg F_P(M)$, para ello es suficiente probar que $U_P(M) \subseteq F_P(M)$ dado que por $(US1)$ es claro que $F_P(M) \subseteq U_P(M)$. Sean $A \in U_P(M)$ y $C = A \leftarrow \mathit{cuerpo}$ una cláusula arbitraria en $\mathit{Base}(P)$. Nótese que $U_P(M)$ es un conjunto infundado de P respecto a M. Entonces, si la condición $(US1)$ de la Definición 2.67 se cumple, entonces el *cuerpo* de C es `falso` en M respecto a la lógica 3-valuada fuerte de Kleene. Si $(US2)$ de la Defnición 2.67 se cumple, entonces algún átomo $B \in \mathit{cuerpo}$ ocurre en $U_P(M)$ y por tanto, B es falso en M. De lo anterior se tiene que el *cuerpo* de C es `falso` en M respecto a la lógica 3-valuada fuerte de Kleene. Por tanto, $A \in F_P(M)$. □

Con el siguiente Teorema veamos que todo modelo bien-fundado puede ser caracterizado usando mapeos de nivel.

Teorema 2.74. *Sean P un programa normal y M su modelo bien fundado. Entonces, en el orden "conocido" -k, M es el modelo más grande entre todos los modelos I para los cuales existe l un I-mapeo parcial de nivel para P tal que P satisface (WF) respecto a I y l.*

Demostración. Sea M_P el modelo bien fundado para P. Defínase l_P, M_P-mapeo parcial de nivel como sigue: para cada $A \in B_P$, $l_P(A) = \alpha$ donde α es el mínimo ordinal tal que A no se encuentra indefinido en $W_P \uparrow (\alpha + 1)$. La prueba procederá verificando los siguientes hechos.

1. P satisface (WF) respecto a M_P y l_P.
2. Si I es un modelo para P, y l es un I-mapeo parcial de nivel tal que P satisface (WF) respecto a I y l, entonces $I \subseteq M_P$.

1. En efecto, sea $A \in \mathit{dom}(l_P)$ y supóngase que $l_P(A) = \alpha$, luego habrá que considerarse los dos casos correspondientes a (WF).

- $A \in M_P$, entonces $A \in T'_P(W_P \uparrow \alpha)$. Por tanto, existe una cláusula $C = A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ tal que el *cuerpo* de C es `cierto` en $W_P \uparrow \alpha$. Así, para toda literal $L_i \in \mathit{cuerpo}$, se tiene que $L_i \in W_P \uparrow \alpha$. Por tanto, $l_P(L_i) < l_P(A) = \alpha$ y $L_i \in M_P$ para todo i. Por ello, se tiene que A satisface $(WF1)$ respecto a M_P y l_P.
- $\neg A \in M_P$. Entonces $A \in U_P(W_P \uparrow \alpha)$, de ahí que A se encuentre en el conjunto infundado más grande de P respecto a $W_P \uparrow \alpha$. Por

tanto, para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$, ya sea $(US1)$ o $(US2)$ se garantizan para esta cláusula con respecto a $W_P \uparrow \alpha$ y el conjunto infundado $U_P(W_P \uparrow \alpha)$. Si $(US1)$ se cumple, entonces existe alguna literal $L \in cuerpo$ de C tal que $\neg L \in W_P \uparrow \alpha$. Por tanto, $l_P(L) < l_P(A) = \alpha$ y la condición $(WF2i)$, de la Definición 2.65, se cumple relativa a M_P y l_P si L es un átomo, o la condición $(WF2ii)$ se cumple relativa a M_P y l_P si L es un átomo negado. Por otro lado, Si $(US2)$ se cumple, entonces algún átomo (no-negado) $B \in cuerpo$ ocurre en $U_P(W_P \uparrow \alpha)$. Por tanto, $l_P(B) \leq l_P(A) = \alpha$, y A satisface $(WF2i)$, de la Definición 2.65, respecto a M_P y l_P. Por tanto, se tiene lo pedido para 1.

2. Mostremos mediante inducción transfinita sobre $\alpha = l(A)$ que: si $A \in I$ o $\neg A \in I$, entonces $A \in W_P \uparrow (\alpha + 1)$ ó $\neg A \in W_P \uparrow (\alpha + 1)$ respectivamente.

- Nótese que si $l(A) = 0$, entonces $A \in I$ garantiza que A ocuure como la cabeza de uná cláusula unitaria en $Base(P)$. Por tanto, $A \in W_P \uparrow 1$. Por otro lado, si $\neg A \in I$, entonces considérese el conjunto U que consiste de todos los átomos B con $l(B) = 0$ y $\neg B \in I$. Muéstrese que U es un conjunto infundado de P respecto a $W_P \uparrow 0$, lo cual será suficiente para garantizar que $\neg A \in W_P \uparrow 1$ ya que $A \in U$. En efecto, sean $C \in U$ y $C \leftarrow cuerpo$ una cláusula en $Base(P)$. Dado que $\neg C \in I$ y $l(C) = 0$, se tiene que C satisface $(WF2i)$ respecto a I y l, y por ello la condición $(US2)$ se cumple mostrando que U es un conjunto infundado de P respecto a I.

- Ahora, supóngase que la hipótesis inductiva se cumple para todo $B \in B_P$ con $l(B) < \alpha$.

  (i) $A \in I$, entonces A satisface $(WF1)$ respecto a I y l. Por tanto, existe una cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que $cuerpo \subseteq I$ y $l(K) < \alpha = l(A)$ para todo $k \in cuerpo$. Así, $cuerpo \subseteq W_P \uparrow \alpha$, de ahí que $A \in T'_P(W_P \uparrow \alpha)$.

  (ii) $\neg A \in I$. Considérese al conjunto U formado por todos los átomos B con $l(B) = \alpha$ y $\neg B \in I$. Muéstrese que U es un conjunto infundado de P respecto a $W_P \uparrow \alpha$, lo cual es suficiente dado que se sigue de manera inmediata que $\neg A \in W_P \uparrow (\alpha + 1)$ del hecho que $A \in U$. Así, dados $C \in U$ y $C \leftarrow cuerpo \in Base(P)$. Al tener que $\neg C \in I$, se tiene que C satisface $(WF2)$ respecto a I y l. Si existe una literal $L \in cuerpo$ con $\neg L \in I$ y $l(L) < l(C)$, entonces por la hipótesis inductiva se tiene que $\neg L \in W_P \uparrow \alpha$, y por tanto, se tiene que la condición $(US1)$ se cumple para la cláusula $C \leftarrow cuerpo$ respecto a $W_P \uparrow \alpha$ y U. En los casos restantes, se tiene que C satisface $(WF2i)$, y por ello existe un átomo $B \in cuerpo$ con $\neg B \in I$ y $l(B) = l(C)$. Así, $B \in U$ muestra que la condición $(US2)$ se satisface para la cláusula $C \leftarrow cuerpo$ respecto a $W_P \uparrow \alpha$ y U. Por tanto, U es un conjunto infundado de P respecto a $W_P \uparrow \alpha$.

□

El siguiente Corolario se obtiene de manera inmediata como un caso particular.

Corolario 2.75. *Sea P un programa normal. Entonces P tiene un modelo bien-fundado total si y solo si existe I un modelo total para P y l un mapeo de nivel total tal que P satisface (WF) respecto a I y l.*

Ahora, una de las preguntas que deberían de surgir es la siguiente; ¿qué relación existe entre los modelos bien fundados y los modelos ya vistos? para responder a tal pregunta, podemos iniciar estudiando la relación que existe entre los modelos bien fundados y los modelos débilmente prefectos, que en un principio parecieran ser muy similares pero en general son diferentes.

Proposición 2.76. *Sean P un programa normal, M_1 el modelo débilmente perfecto (parcial) para P y M_2 el modelo bien-fundado para P. Entonces, $M_1 \subseteq M_2$.*

Demostración. Sea l_1 un M_1-mapeo parcial de nivel tal que P satisface (WS) respecto a M_1 y l_1. Entonces, P satisface (WF) respecto a M_1 y l_1, como se hizo notar al principio de esta sección. Luego, por el Teorema 2.74, M_2 es el modelo más grande entre todos los modelos K para los cuales existe l un K-mapeo parcial de nivel para P, tal que P satisface (WF) respecto a K y l. Por tanto, $M_1 \subseteq M_2$. □

Ejemplo 2.77. *Sea P el programa que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$p \leftarrow q, \neg p$$
$$q \leftarrow p$$

Entonces, el reducto de P respecto al conjunto vacío es P mismo, es decir, si $P_1 = P/\emptyset$, entonces $P_1 = P$. Es sencillo verificar que la única componente mínimal de P_1 es el conjunto $\{p, q\}$, y de ahí que la capa inferior de P_1 es P. Por ello, se tiene que modelo débilmente perfecto (parcial) para P es el conjunto $\emptyset$. Sin embargo, aplicando el Teorema 2.74, se observa fácilmente que el conjunto $\{\neg p, \neg q\}$ es el modelo bien-fundao para P. En efecto, de manera directa, se tiene que

$T'_P(\emptyset) = \emptyset$ y $U_P(\emptyset) = \{p, q\}$. Por tanto, $W_P \uparrow 2 = W_P(W_P \uparrow 1) = W_P(\emptyset \cup \{\neg p, \neg q\}) = \{\neg p, \neg q\} = W_P \uparrow 1$. Así, el modelo bien-fundado para P es el conjunto $\{\neg p, \neg q\}$.

Una propiedad irregular de la semántica de los modelos débilmente perfectos es que ciertos cambios en el programa afecta su semántica. Véase el siguiente ejemplo como muestra de que en los modelos bien-fundados, tales deficiencias no se encuentran.

Ejemplo 2.78. *Considérese el programa Tweety4(Ejemplo 2.53), como se hizo notar este programa es una variación del programa Tweety2 (Ejemplo 2.28). Mientras que el programa Tweety2, el cual es localmente estratificado, tiene como modelo débilmente perfecto al discutido en el Ejemplo 2.49, el programa Tweety4 tiene como modelo débilmente perfecto al conjunto exhibido en el Ejemplo 2.53. Por tanto, no se puede determinar si "`bob`" es o no un "`pingüino`". Ahora, observemos que la semántica bien fundada no sufre tal deficiencia. En efecto, resulta ser que su modelo bien fundado es $M \cup \neg(B_P \setminus M)$, donde M es como en el Ejemplo 2.18. Así, en esta semántica "`bob`" no es un "`pingüino`" y "`vuela`".*

Una manera alternativa de caracterizar la semántica de los modelos bien fundados es mediante el operador de Gelfond-Lifschitz de la Sección 2.1.2. Recuérdese que del Teorema 2.26 se tiene que el operador de Gelfond-Lifschitz es antítono. En particular, para cualquier programa P se sigue que el operador GL_P^2, obtenido de aplicar dos veces el operador GL_P, es monótono. Por tanto, por el Teorema A.18, GL_P^2 tiene un mínimo punto fijo, dígase L_P. Además, nótese que $I_{P,2}$ es una lattice completa en el dual del orden de verdad sobre $I_{P,2}$. Por ello, al aplicar el Teorema A.18 una vez más, se obtiene que GL_P^2 tiene un máximo punto fijo, dígase G_P. Como $L_P \subseteq G_P$, se tiene que $L_P \cup \neg(B_P \setminus G_P)$ es una interpretación 3-valuada para P y es, de hecho, un modelo para P el cual es llamado **modelo alternativo de puntos fijos** para P.

Ahora mostremos que el modelo alternativo de puntos fijos coincide con el modelo bien-fundado. Primero, se introducirá algo de notación para un programa P arbitrario.

- $L_0 = \emptyset$ y $G_0 = B_P$.
- Si α es algún ordinal, entonces $L_{\alpha+1} = GL_P(G_\alpha)$ y $G_{\alpha+1} = GL_P(L_\alpha)$.
- Si α es un ordinal límite, entonces $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ y $G_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha}$.

Luego, al tener que $\emptyset \subseteq B_P$ se tiene que $L_0 \subseteq L_1 \subseteq G_1 \subseteq G_0$. Más aún, por inducción transfinita se verifica que: Si $\alpha \subseteq \beta$, entonces $L_\alpha \subseteq L_\beta \subseteq G_\beta \subseteq G_\alpha$.

Teorema 2.79. *Sea P un programa. Entonces, se cumple lo siguiente.*

1.- $L_P = GL_P(G_P)$ y $G_P = GL_P(L_P)$.

2.- Para cada modelo estable (bien-soportado) E de P, se tiene que $L_P \subseteq E \subseteq G_P$.

3.- El modelo bien-fundado para P es $M = L_P \cup \neg(B_P \setminus G_P)$.

Demostración. 1.- Obsérvese lo siguiente, como $GL_P^2(GL_P(L_P)) = GL_P(GL_P^2(L_P)) = GL_P(L_P)$, entonces $GL_P(L_P)$ es un punto fijo de GL_P^2. Así, $L_P \subseteq GL_P(L_P) \subseteq G_P$. Análogamente, se verifica que $L_P \subseteq GL_P(G_P) \subseteq G_P$. Además, al ser GL_P antitonico y del hecho que $L_P \subseteq G_P$, se tiene que $L_P \subseteq GL_P(G_P) \subseteq GL_P(L_P) \subseteq G_P \ldots (1)$. Análogamente, al tener que $GL_P(L_P) \subseteq G_P$, se infiere que $GL_P(G_P) \subseteq GL_P^2(L_P) = L_P \subseteq GL_P(G_P) \ldots (2)$. Por tanto, de (1) y (2) se tiene que $GL_P(G_P) = L_P$. Y por tanto, $G_P = GL_P^2(G_P) = GL_P(L_P)$.

2.- Por el Teorema 2.26, se observa que E es un punto fijo del operador GL_P. Por tanto, E es un punto fijo del operador GL_P^2.

3.- Se probará esta afirmación utilizando el Teorema 2.74, para ello primero defínase l un M-mapeo parcial de nivel donde $M = L_P \cup \neg(B_P \setminus G_P)$. Para facilitar el trabajo se tomará la imagen de l como el conjunto de parejas de ordinales, (α, n), donde $n \leq \omega$ y tal conjunto está dotado con el orden lexicográfico [véase 2.1.4]. Para cada $A \in L_P$, sea $l(A) = (\alpha, n)$ donde α es el mínimo ordinal tal que $A \in L_{\alpha+1}$ y n es el mínimo ordinal tal que $A \in T_{P/G_\alpha} \uparrow (n+1)$. Y, para los átomos $B \notin G_P$, defínase $l(B) = (\beta, \omega)$ donde β es el mínimo ordinal tal que $B \notin G_{\beta+1}$. Ahora, muéstrese mediante inducción transfinita que P satisface (WF) respecto a M y l.

Sea $A \in L_1 = GL_P(B_P) = T_{P/B_P} \uparrow \omega$. Dado que P/B_P consiste unicamente de las cláusulas en $Base(P)$ las cuales no contienen átomos negados en sus *cuerpos*, entonces se tiene que A está contenido en el mínimo modelo 2-valuado para un subprograma definite de P, dígase P/B_P, y por la Proposición 2.21, la condición $(WF1)$ de la Defínción 2.65 se satisface. Ahora, sea $\neg B \in \neg(B_P \setminus G_1)$, es decir, $B \in (B_P \setminus G_1) = B_P \setminus T_{P/\emptyset} \uparrow \omega$. Como $P/\emptyset$ contiene todas las cláusulas de la $Base(P)$ tales que a dichas cláusulas se les removio todas las literales negativas, se obtiene que cada cláusula en $Base(P)$ con cabeza B debe contener una literal-cuerpo positiva $C \notin G_1$, la cual por definición de l debe poseer el mismo nivel de B. Por tanto, la condición $(WF2i)$ de la Definción 2.65 se satisface.

Ahora, supóngase que para algún ordinal α se ha mostrado que para todo $n \leq \omega$ y para todo $A \in B_P$ con $l(A) \leq (\alpha, n)$: A satisface (WF) respecto a M y l.

Sea $A \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha = T_{P/G_\alpha} \uparrow \omega \setminus L_\alpha$, entonces $A \in T_{P/G_\alpha} \uparrow n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, nótese que todas las literales (negativas) que fueron removidas de las cláusulas, por la transformada de Gelfond-Lifschitz, con cabeza A tienen nivel menor que $(\alpha, 0)$. Entonces, por la Proposición 2.21, se tiene que A satisface (WF) respecto a M y l.

Sea $A \in (B_P \setminus G_{\alpha+1}) \cap G_\alpha$. Entonces, $A \notin T_{P/L_\alpha} \uparrow \omega$. Consideremos una cláusula $A \leftarrow A_a, \ldots, A_k, \neg B_1, \ldots, \neg B_m \in \mathit{Base}(P)$. Si $B_j \in L_\alpha$ para algún j, entonces $l(A) > l(B_j)$. De otra manera, al tener que $A \notin T_{P/L_\alpha} \uparrow \omega$, se tiene que existe $A_i \notin T_{P/L_\alpha} \uparrow \omega$, y por tanto, $l(A) \geq l(A_i)$. Por lo cual, se tiene la condición $(WF2)$. Por tanto P satisface (WF) respecto a M y l.

Finalmente, solo resta probar que M es el más grande con esta propiedad. Supóngase que existe $M_1 \neq M$ modelo más grande con tal propiedad, es decir, P satisface (WF) respecto a M_1 y algún l_1 con l_1 un M_1-mapeo parcial de nivel. Considérese $L \in M_1 \setminus M$, y sin pérdida de generalidad, tómese a L de tal manera que $l_1(L)$ es mínimal. Así, se tienen los siguientes dos casos.

(i) Si $L = A$ es un átomo, entonces existe una cláusula $A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ tal que $M_1(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$ y $l_1(A) > l_1(L_i)$ para toda $L_i \in \mathit{cuerpo}$. Por tanto, $M(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$ y $A \leftarrow \mathit{cuerpo}$ se transforma en una cláusula $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in P/G_P$ con $A_i \in L_P = T_{P/G_P} \uparrow \omega$, de lo cual se infiere que $A \in M$, contradiciendo $A \in M_1 \setminus M$.

(ii) Si $L = \neg A \in M_1 \setminus M$ es un átomo negado, entonces $\neg A \in M_1$ y $A \in G_P = T_{P/L_P} \uparrow \omega$, de ahí que $A \in T_{P/L_P} \uparrow n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Véase, por inducción sobre n, que esto lleva a una contradicción para finalizar la prueba.

Si $A \in T_{P/L_P} \uparrow 1$, entonces existe una cláusula unitaria $A \leftarrow inP/L_P$ y cualquier cláusula correspondiente $A \leftarrow \neg B_1, \ldots, \neg B_k \in \mathit{Base}(P)$ satisface que $B_j \notin L_P$. Como $\neg A \in M_1$, se obtiene por el Teorema 2.74 que existe $i \in \{1, \ldots k\}$ tal que $B_i \in M_1$ y $l_1(B_i) < l_1(A)$. Por la minimalidad de $l_1(A)$ se tiene que, $B_i \in M$. Por tanto, $B_i \in L_P$, contradiciendo el hecho que $B_i \notin L_P$.

Ahora, supóngase que no existe $\neg B \in M_1 \setminus M$ con $B \in T_{P/L_P} \uparrow k$ para cualquier $k < n+1$ y sea $\neg A \in M_1 \setminus M$ con $AT_{P/L_P} \uparrow (n+1)$. Entonces, existe una cláusula $A \leftarrow A_1, \ldots, A_m \in P/L_P$ con $A_1, \ldots, A_m \in T_{P/L_P} \uparrow n \subseteq G_P$, y nótese que no es posible tener que $\neg A_i \in M_1 \setminus M$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, m\}$ por la hipótesis de inducción. Además, de la misma manera, no es posible que $\neg A_i \in M$ para algún i, de lo contrario, se debería tener que $A_i \in B_P \setminus G_P$. Por tanto, no es posible tener que $\neg A_i \in M_1$ para algún i. Más aún, existe una cláusula correspondiente a esta, dígase $A \leftarrow A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_{m_1} \in Base(P)$ con $B_1, \ldots, B_{m_1} \notin L_P$. Por tanto, existe $i \in \{1, \ldots, m_1\}$ tal que $B_i \in M_1$ y $l_1(B_i) < l_1(A)$, por el Teorema 2.74. Finalmente, por la minimalidad de $l_1(A)$, se infiere que $B_i \in M$. Por tanto, $B_i \in L_P$ contadiciendo el hecho que $B_i \notin L_P$. Por tanto, M es el modelo más grande con las propiedades citadas.

$\square$

Observación 2.80. *De la parte [2] del Teorema 2.79 se sigue que todo modelo bien fundado total es un modelo estable único. Sin embargo el recíproco no se cumple, para ello basta considerar el programa P de la Observación 2.44 además de notar que $GL_P(\emptyset) = B_P$ y $GL_P(B_P) = \emptyset$, de lo cual se infiere que el modelo bien-fundado para P es el conjunto vacío.*

Como último resultado de esta sección véase la relación que existe entre algunos de los modelos estudiados.

Teorema 2.81. *Sea P un programa con modelo de Fitting total. Entonces, P tiene un modelo bien-fundado total y un modelo débilmente perfecto total. Más aún, P posee unicidad respecto a los modelos estables y soportados. Por último, todos los modelos citados para P coinciden.*

Demostración. Por las Proposiciones 2.56 y 2.76, P tiene un modelo bien-fundado total y un modelo débilmente perfecto total, los cuales coinciden con el modelo de Fitting. Por el Teorema 2.79 [2], P posee un único modelo estable y por la parte [3] del mismo Teorema, se tiene que este coincide con el modelo bien-fundado. Finalmente, por la Proposición 2.44, P posee un único modelo soportado y tal modelo coincide el modelo de Fitting dado para P. $\square$

Capítulo 3

La Topología en la Semantica de la Programación

En este capítulo se estudiará el papel que desempeña la topología en la semántica de la programación lógica, de hecho hay una considerable cantidad de historia mostrando como la topología ha sido usada en las ciencias de la computación, donde gran parte de esta proviene del cómo se desarrolla la topología de Scott en la teoría de dominios y en la semántica de los lenguajes de programación convencionales. Sin embargo, diferentes métodos topológicos han sido usados en diversas áreas de la computación, tales como; la topología digital en el procesamiento de imágenes, ingeniería de software y el uso de espacios métricos en programación concurrente [Véase [61]].

Por lo anterior, se explorará el papel que desempeña la topología en la búsqueda de modelos para programas lógicos y su utilidad como marco de trabajo para la semántica de estos[1]. Por tanto, el estudio que se realice se enfocará en aquellas topologías, así como propiedades en estas, sobre espacios de interpretaciones de la forma $I(X, \mathcal{T})$, donde se trabajará con conjuntos de verdad $\mathcal{T}$ en general siempre que sea posible y únicamente imponiendo condiciones según sea necesario.

Habrá dos topologías que se discutirán en este capítulo y de las cuales se obtendrán importantes propiedades en relación a la semántica de la programación lógica, las cuales serán: la topología de Scott y la topología de "Cantor".

[1] Véase [19] y [32] para más resultados concernientes a caracterizaciones, en términos topológicos, de los distintos modelos estándar presentados en el Capítulo 2.

Más tarde se observará como los resultados mostrados pueden ser empleados en el estudio de programas "aceptables" y, de la misma manera, el hecho que estas topologías son base para las estructuras con puntos fijos. De hecho, las propiedades de convergencia sobre estas topologías serán las que habrán de considerarse como las más importantes y por ello que la noción básica para la discusión sobre estas será la convergencia.

Actualmente, la convergencia "per se" es formalizada completamente mediante el concepto de espacio de convergencia. Por tanto, se tomarán los espacios de convergencia como punto de partida, más precisamente hablando se enfocará sobre una subclase de los espacios de convergencia donde tales subclases están formadas por lo que se conoce como clases de convergencia. Cabe destacar que tal estudio se realizará desde este enfoque por el hecho que las clases de convergencia corresponden a las topologías convencionales, mientras que los espacios de convergencia dan lugar a teorías más generales sobre convergencia que las se requieren en este trabajo.

Como se pudo observar en los resultados del capítulo anterior, la noción de orden no es completamente satisfactoria para la semántica de la programación lógica debido a la falla del operador de un solo-paso presentada en la monotonocidad mediante los ordenes naturales establecidos. Por ello, el orden será expresado a través de convergencia como se exhibirá en este capítulo.

3.1. Espacios de Convergencia

La teoría de convergencia puede basarse sobre redes o filtros, donde estos dos enfoques son equivalentes en el sentido en que cualquier resultado el cual es establecido por uno puede de igual manera ser establecido por el otro. En este trabajo, se optará por el estudio de los espacios de convergencia mediante redes[2], dado que estas describen de manera más intuitiva los tipos de condiciones que se requieren en la programación lógica.

Los resultados básicos sobre topología general pueden consultarse en el Apéndice. Por tanto, comenzaremos definiendo lo que es una red.

Definición 3.1. *Sean D un conjunto diferente del vacío y una relación binaria $\leqq$ sobre D. Se dice que la relación $\leqq$ dirige a D si, se cumple lo siguiente.*

- *Para cualesquiera $m, n, p \in D$, si $m \leqq n$ y $n \leqq p$, entonces $m \leqq p$.*

[2] Nuestra referencia básica para la teoria de redes y filtros serán los libros de [68] y [38].

- *Para todo $m \in D$, $m \leqq m$.*
- *Si $m, n \in D$, entonces existe $p \in D$ tal que $m \leqq p$ y $n \leqq p$.*

Ejemplo 3.2. *Considérese el conjunto de los enteros no-negativos ($\mathbb{N}$), luego basta considerar la relación usual de menor o igual que ($\leq$) sobre este conjunto. Por tanto, $(\mathbb{N}, \leq)$ es un sistema dirigido.*

Otro ejemplo de este tipo de conjuntos es el siguiente, considérese un espacio topológico cualquiera X, luego tómese la familia de todas las vecindades en un punto de X, dígase $\mathcal{F}_x$ con $x \in X$. Entonces, $\mathcal{F}_x$ está dirigido por la inclusión de conjuntos usual, $\supset$.

Definición 3.3. *Una **red** en un conjunto X, es un mapeo $s : (\mathcal{I}, \leq) \to X$ donde $\mathcal{I}$ es un conjunto dirigido[3] y la relación $\leq$ es reflexiva y transitiva. Para cada $i \in \mathcal{I}$, se denota $s(i)$ por s_i y la red $s : \mathcal{I} \to X$ por $(S_i)_{i \in \mathcal{I}}$. Dado una red $(s_i)_{i \in \mathcal{I}} \subseteq X$ y un elemento $i_0 \in \mathcal{I}$, entonces se dice que el conjunto $\{s_i \mid i \geq i_0\}$ es la **cola de la red** $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ y se denota por $(s_i)_{i \geq i_0}$.*

Se dirá que una propiedad se cumple **eventualmente** respecto a una red si esta se cumple para alguna cola de la red.

Definición 3.4. *Una **subred** t de una red $s : \mathcal{I} \to X$, es una red $t : \mathcal{J} \to X$ que satisface los guiente:*

(1) $t = s \circ \varphi$ donde $\varphi : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$.

(2) Para cada $i_0 \in \mathcal{I}$, existe $j_0 \in \mathcal{J}$ tal que $\varphi(j) \geq i_0$ si $j \geq j_0$.

El punto $s \circ \varphi(j)$ generalmente se denotará por s_{i_j} y se referirá a la subred de $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ como $(s_{i_j})_{j \in \mathcal{J}}$.

Definición 3.5. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y una red $(s_i)_{i \in \mathcal{I}} \subseteq X$. Se dice que la red $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ **converge** a x, denotado por $s_i \to x$ ó $\lim_i s_i = x$, si para cada vecindad de x, $U(x)$, existe $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $s_i \in U(x)$ siempre que $i_0 \leq i$. Si $s_i \to x$, entonces se dice que x es el límite de (s_i).*

Observación 3.6. *Dado que el singular de x es una vecindad de x en X dotado con la topología discreta, se sigue que $s_i \to x$ en la topología discreta si y solo si (s_i) es eventualmente constante.*

Otras definiciones que serán básicas a lo largo de este capítulo son las siguientes.

Definición 3.7. *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Se llamará a la pareja $(X, \mathcal{S}) = (X, (\mathcal{S}_s)_{s \in X})$ un **espacio de convergencia** si, para cada $s \in X$, $\mathcal{S}_s$ es una colección no vacía de redes en X que satisface lo siguiente.*

[3] Véase [38] para más detalles sobre los conjuntos dirigidos.

- *Si* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *es una red constante, es decir* $s_i = s \in X$ *para todo* i, *entonces* $s_i \in \mathcal{S}_s$.
- *Si* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{S}_s$ *y* $(t_j)_{j\in\mathcal{J}}$ *es una subred de* $(S_i)_{i\in\mathcal{I}}$, *entonces* $(t_j)_{j\in\mathcal{J}} \in \mathcal{S}_s$.

Si $(s_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathcal{S}_s$, *se dirá que* s_i *converge a* s *donde comunmente se denotará por* $s_i \to s$.

Definición 3.8. *Sean* $X \neq \emptyset$ *un conjunto y supóngase que* $\mathcal{C}$ *es la clase de parejas* $((s_i)_{i\in\mathcal{I}}, s)$ *donde* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *es una red en* X *y* s *es un elemento de* X. *Se dice que* $\mathcal{C}$ *es una* ***clase de convergencia*** *si* $\mathcal{C}$ *satisface las condicones siguientes, en la cual se dirá que,* s_i $(\mathcal{C})$*converge a* s *o, que* $\lim_i s_i \equiv s(\mathcal{C})$ *si y solo si* $((s_i)_{i\in\mathcal{I}}, s) \in \mathcal{C}$.

1/ *(Redes constantes) Si* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *es una red tal que* $s_i = s \in X$ *para todo* i, *entonces* $((s_i)_{i\in\mathcal{I}}, s) \in \mathcal{C}$.

2/ *(Convergencia de Subredes) Si* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ $(\mathcal{C})$*converge a* s, *entonces cada subred de* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *también converge.*

3/ *(No-convergencia) Si* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *no* $(\mathcal{C})$*converge a* s, *entonces existe una subred de* $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$, *la cual no posee subredes* $(\mathcal{C})$*convergentes a* s.

4/ *(Límites iterados[4]) Supóngase que* I *es un conjunto dirigido y que* J_m *es un conjunto dirigido para cada* $m \in I$. *Fórmese el producto fibrado* $F' = I \times_I \bigcup_{m\in I} J_m = \{(m,n) \mid m \in I, n \in J_m\}$ *y supóngase que* $x : F' \to X$. *Sea* F *que denota el producto dirigido[5],* $I \times \prod_{m\in I} J_m$, *y sea* $r : F \to F'$ *definida por* $r(m,f) = (m, f(m))$. *Si* $\lim_m \lim_n x(m,n) \equiv s(\mathcal{C})$, *entonces la red* $x \circ r$ $(\mathcal{C})$*converge a* s.

Uno de los principales resultados sobre clases de convergencia [6] es que cada clase de convergencia $\mathcal{C}$ sobre X induce un operador clausura sobre X el cual a su vez induce una topología sobre X, en donde las redes convergentes y sus límites son precisamente aquellos dados en $\mathcal{C}$. Para ello, habrá que definir lo que es un operador clausura que se define como sigue.

Definición 3.9. *El* ***operador clausura***[7]*(también llamado de* ***Kuratowski****) sobre un conjunto* X *es un mapeo* $\cdot^c : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(X)$ *donde* $\mathcal{P}(X)$ *es el conjunto potencia, y además satisface los siguientes axiomas.*

[4] Véase el Teorema 4 del Cap.2 en [38].
[5] Véase [38] cap. 2, para mas detalles sobre el producto dirigido.
[6] Véase [38] Capítulo 2.
[7] Véase [38] para más sobre este operador.

a. $\emptyset^c = \emptyset$.

b. *Para todo* $A \subseteq X$, $A \subseteq A^c$.

c. *Para cualesquiera* $A, B \subseteq X$, $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

d. *Para todo* $A \subseteq X$, $(A^c)^c = A^c$.

Interesante hecho sucede con la clausura topológica ya que esta noción puede ser tomada como fundamental, de hecho las propiedades características de la clausura son las 4 recién establecidas en el operador clausura, en el sentido siguiente.

Teorema 3.10. *Sean* $X \neq \emptyset$ *un conjunto y* $\cdot^c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *el operador clausura definido sobre* X. *Entonces,* $\tau = \{X \setminus A \mid A \subseteq X, A = A^c\}$ *es una topología sobre* X *llamada la* ***topología asociada con*** ^{c}, *donde* $\overline{A} = A^c$ *para cada* $A \subseteq X$. *Más aún,* A^c *es la clausura topológica en* X *de cada subconjunto* A *de* X *con respecto a la topología* τ *asociada con* $\cdot^c$.

Demostración. Del inciso (a) de la Definición 3.9 el conjunto vacío, $\emptyset$, pertenece a τ. Además, de (c) en la misma Definición, se exhibe que la unión de dos elementos de τ vuelve a ser un elemento de τ. Por tanto, la unión de cualquier subfamilia finita (vacia o no) de elementos de τ es un elemento de τ. Luego, del inciso (b) de la Definición 3.9, se tiene que $X \subseteq X^c$, por tanto $X = X^c$. De lo anterior se sigue, $\bigcup_{E\in\tau} E = X$. Por último, se afirma que la intersección de cualquier subfamilia no vacía de elementos de τ es un elemento de τ. En efecto, primero obsérvese que si $B \subseteq A$ entonces $B^c \subseteq A^c$ dado que $A^c = \big((A\setminus B)\cup B\big)^c = (A\setminus B)^c \cup B^c$. Luego, supóngase que τ' es una subfamilia no vacía de τ y que $B = \bigcap\{A \mid A \in \tau'\}$. Nótese que B se encuentra contenido en cada elemento de la familia τ', y por tanto $B^c \subseteq \bigcap\{A^c \mid A \in \tau'\} = \bigcap\{A \mid A \in \tau'\} = B$. Además, $B \subseteq B^c$ por (b). Por tanto, $B = B^c$ y $B \in \tau$. Así, se sigue del Teorema B.10 que τ es una topología. Ahora, se afirma que $A^c = \overline{A}$. En efecto, por definición $\overline{A}$ es la intersección de todos los conjuntos τ-cerrados, es decir, los elementos de τ que contienen a A. Por (d) de 3.9, $A^c \in \tau$, por tanto $\overline{A} \subseteq A^c$. Más Aún, al tener que $\overline{A} \in \tau$ y $A \subseteq \overline{A}$ se sigue que $A^c \subseteq \overline{A}$. Por tanto, $\overline{A} = A^c$. □

De manera más precisa se tiene el siguiente resultado el cual concluye como la convergencia puede ser tomada como una noción fundamental.

Teorema 3.11. *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase de convergencia en un conjunto no-vacío* X. *Para cada* $A \subseteq X$, *se define* $A^c = \{s \in X \mid \exists\ (s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ *red en* A *con* $((s_i), s) \in \mathcal{C}\}$. *Entonces,* $\cdot^c$ *es un operador clausura sobre* X, *y por tanto, define una topología* τ *sobre* X, *llamada*

la topología asociada con *$\mathcal{C}$. Más aún, se tiene que $((s_i), s) \in \mathcal{C}$ si y solo si $(s_i)_{i\in\mathcal{I}} \to s$ respecto a τ.*

Reciprocamente, supóngase que τ es una topología sobre un conjunto no-vacío X. Sea $\mathcal{C}$ que denota el conjunto de todas las parejas $((s_i)_{i\in\mathcal{I}}, s)$, donde $s \in X$ y $(s_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es una red en X la cual converge a s en la topología τ. Entonces, $\mathcal{C}$ es una clase de convegencia en X cuya topología asociada coincide con τ.

Demostración. Para la primera parte de la prueba, probemos lo siguiente.

1. $\cdot^c$ es un operador clausura sobre X.

2. Si $((s_i), s) \in \mathcal{C}$, entonces $s_i \to s$ respecto a τ.

3. Si $s_i \to s$ respecto a τ, entonces $((s_i), s) \in \mathcal{C}$.

(1) Es claro que $\emptyset^c = \emptyset$. Sean $A \subseteq X$ y $s \in A$. Entonces, se sigue de 1/ de la Definición 3.8 que existe (s_i) red en A tal que s_i $(\mathcal{C})$converge a s. Por tanto, $s \in A^c$. Ahora, considérense $A, B \subseteq X$ y se afirma que $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$. En fecto, $(\supseteq)$. Si $s \in A^c$, entonces de la definición del operador $\cdot^c$ se tiene que $s \in (A \cup B)^c$ para cada $B \subseteq X$. Es decir, $A^c \subseteq (A \cup B)^c$ para cada $B \subseteq X$. Por tanto, $A^c \cup B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Para la otra inclusión, $(\subseteq)$, Sea $s \in (A \cup B)^c$, entonces existe una red $(s_n)_{n\in\mathcal{D}}$ en $A \cup B$ tal que s_n $(\mathcal{C})$converge a s. Si $D_A = \{n \mid n \in \mathcal{D} \ , \ s_n \in A\}$ y $D_B = \{n \mid n \in \mathcal{D} \ , \ s_n \in B\}$, entonces $\mathcal{D} = D_A \cup D_B$. Por tanto, D_A o D_B es cofinal en $\mathcal{D}$, de ahí que $(s_n)_{n\in D_A}$ o, ya sea $(s_n)_{n\in D_B}$, es una subred de $(s_n)_{n\in\mathcal{D}}$ la cual también $(\mathcal{C})$converge a s debido a 2/ en la Definición 3.8. Por tanto, $s \in A^c \cup B^c$. De lo cual se tiene la afirmación. Por último, véase que $A^c = (A^c)^c$. En efecto, es claro que $A^c \subseteq (A^c)^c$. Para la otra contención, considérese $(t_m)_{m\in\mathcal{D}}$ una red contenida en A^c la cual $\mathcal{C}$converge a t, entonces para cada $m \in \mathcal{D}$ existe un conjunto dirigido E_m y una red $(s(m,n))_{n\in E_m}$ la cual $(\mathcal{C})$converge a t_m. Luego, la condición 4/ de la Definición 3.8, garantiza la existencia de una red la cual $(\mathcal{C})$converge a t y, por tanto, $t \in A^c$. De lo cual, se tiene la afirmación. Por todo lo anterior, se tiene que $\cdot^c$ es un operador clausura sobre X.

(2) Supóngase que s_i $(\mathcal{C})$converge a s y $s_i \nrightarrow s$ respecto a τ, donde τ es la topología definida a partir del Teorema 3.10. Entonces, existe una vecinda abierta de s, V_s, tal que $(s_i)_{i\in\mathcal{D}}$ eventualmente no se encuentra en V_s. Por tanto, existe $E \subseteq \mathcal{D}$ cofinal, tal que $s_i \in X \setminus V_s$ con $i \in E$. Luego, dado que $(s_i)_{i\in E}$ es una subred de $(s_i)_{i\in\mathcal{D}}$, se tiene que $\lim_{i\in E} s_i = s(\mathcal{C})$ por la condición 2/ en 3.8. Por tanto, $X \setminus V_s \neq (X \setminus V_s)^c$ y, V_s no es un abierto relativo a τ, lo cual es una contradicción.

(3) Supóngase que $s_i \to s$ respecto a τ y $((s_i), s) \notin \mathcal{C}$. Por la condicion 3/ en la Definición 3.8, existe una subred $T = (t_m)_{m\in\mathcal{D}}$ de (s_i) tal que

para cada subred R de T se tiene que $(R, s) \notin \mathcal{C}$. Para cada $m \in D$, sea $D_m = \{n \in \mathcal{D} \mid n \geq m\}$ y $A_m = T(D_m)$. Obsérvese que D_m es cofinal en $\mathcal{D}$, de ahí se tiene que $T\restriction_{D_m}$ es una subred de T donde $t_k \to s$ respecto a τ si $k \in D_m$, dado que (s_i) y, por tanto T, tiene esta propiedad. Usando los hechos elementales concernientes a redes y la clausura[8], el hecho que el operador $\cdot^c$ define la topología τ y el hecho que $A^c = \overline{A}$ para cada $A \subseteq X$ se concluye que, $s \in (A_m)^c$ para cada $m \in \mathcal{D}$. Por tanto, para cada $m \in \mathcal{D}$ se obtiene una red $U(m, \cdot) = (u(m,n))_{n \in E_m} \subseteq A_m$, es decir $U(m, \cdot) : E_m \to A_m$, donde $(U(m, \cdot), s) \in \mathcal{C}$. Sean F y r como se definieron en 4/ de la Definición 3.8, entonces $(U \circ r, s) \in \mathcal{C}$. Dado que $U \circ r(m, f) \in A_m$, existe $n_{m,f} \in D_m$ con $U \circ r(m, f) = T_{n_{m,f}}$ para todo $(m, f) \in F$. Así, se define $\phi : F \to \mathcal{D}$ por $\phi(m, f) = n_{m,f}$ para todo $(m, f) \in F$ y, se obtiene que $U \circ r = T \circ \phi$. Por último, dado $m \in \mathcal{D}$, se toma cualquier $(m, f) \in F$, es decir para cualquier f. Entonces, si $(m', g) \geq (m, f)$, se tiene $\phi(m', g) = n_{m',g} \geq m' \geq m$. Por tanto, $U \circ r$ es una subred de T y $(U \circ r, s) \in \mathcal{C}$, contradiciendo la hipótesis inicial presentada en la suposición del problema. Por tanto, $((s_i), s) \in \mathcal{C}$.

Para el recíproco, nótese que las propiedades 1/, 2/ y 3/ en la Definición 3.8 de una clase de convergencia son inmediatas para la clase $\mathcal{C}$ por las propiedades elementales de redes convergentes en una topología. La propiedad 4/ de la Definición 3.8 se sigue del Teorema de límites iterados[9]. Por tanto, la clase $\mathcal{C}$ es una clase de convergencia. Por último, sea $A \subseteq X$ arbitrario. Por la definición del operador clausura determinado por $\mathcal{C}$, como se hizo en la primera parte de este Teorema, se tiene que $s \in A^c$ si y solo si existe una red (s_i) en A tal que $s_i \to s$, lo cual es equivalente a $s \in \overline{A}$. Por tanto, la topología asociada a $\mathcal{C}$ coincide con τ. $\square$

Por último, otra de nuestras definiciones básicas la cual establece continuidad entre espacios de convergencia es la siguiente.

Definición 3.12. *Sean $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ espacios de convergencia, $f : X \to Y$ una función y $s \in X$. Entonces, diremos que f es continua en s si $(f(s_i)) \in \mathcal{T}_{f(s)}$ siempre que $s_i \in \mathcal{S}_s$, es decir, $f(s_i)$ converge a $f(s)$ si s_i converge a s.*

Observación 3.13.

1. *Supongamos que $\mathcal{C}$ es una clase de convergencia sobre X. Para cada $s \in X$, denotemos por $\mathcal{S}_s$ a la colección de todas las redes $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ tales que $(s_i, s) \in \mathcal{C}$. Entonces, por las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.8 se muestra que $(X, (\mathcal{S}_s)_{s \in X})$ es un espacio de convergencia.*

[8] Véase [38].
[9] Véase [38] pág. 69.

2. *Por la condición (4) del Teorema B.12, notemos que la noción de continuidad recien definida coincide con la continuidad topológica cuando los espacios de convergencia en cuestión son en realidad clases de convergencia.*

3. *Todas las condiciones de convergencia que consideremos darán lugar a clases de convergencia, y por tanto a topologías mas que a espacios de convergencia.*

3.1.1. La Topología de Scott

La topología de Scott desarrolla un papel importante dentro de la programación lógica pese a que normalmente es encontrada en teoría de dominios. La importancia de esta topología la discutiremos en esta sección iniciando con algunas definiciones básicas para ello.

Definición 3.14. *Sean $(D, \sqsubseteq)$ un cpo y $O \subseteq D$. Entonces, O se llama **abierto de Scott**[10] si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *O es cerrado hacia arriba, es decir, si $x \in O$ y $x \sqsubseteq y$, entonces $y \in O$.*

2. *Si $A \subseteq D$ es dirigido y $\bigsqcup A \in O$, entonces $A \cap O \neq \emptyset$.*

En el caso en que D sea un dominio la topología asociada tiene una descripción bastante simple, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.15. *Sea $(D, \sqsubseteq)$ un dominio. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen.*

*(i) Los conjuntos abiertos de Scott forman una topología sobre D llamada la **topología de Scott**.*

(ii) Si $a \in D_c$, entonces el conjunto $\uparrow a$ es un abierto de Scott, donde $\uparrow x = \{y \in D \mid x \sqsubseteq y\}$ para cualquier $x \in D$.

(iii) La colección $\{\uparrow a \mid a \in D_c\}$ es una base para la topología de Scott sobre D.

Demostración.

(i) Fácilmente se observa que los conjuntos $\emptyset$ y D son abiertos de Scott. Ahora, dados A_1 y A_2 abiertos de Scott si $x \in A_1 \cap A_2$ y $x \sqsubseteq y$, entonces $y \in A_1 \cap A_2$. Luego, supongamos que A es dirigido y $\bigsqcup A \in A_1 \cap A_2$, entonces existen $a_1,\ a_2 \in A$ tal que $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$. Por tanto, al ser A un conjunto dirigido, existe $a_3 \in A$

[10] Véase [1].

tal que $a_1 \wedge a_2 \sqsubseteq a_3$, lo cual implica que $a_3 \in A_1 \cap A_2$, más aún, $A \cap (A_1 \cap A_2) \neq \emptyset$. Por tanto, $A_1 \cap A_2$ es un abierto de Scott. Por último, sin niguna dificultad se muestra que $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ es un conjunto abierto de Scott, donde los A_i son abiertos de Scott para cada $i \in \mathcal{I}$.

(ii) Sea $x \in \uparrow a$ y supóngase que $x \sqsubseteq y$, entonces es claro que $y \in \uparrow a$. Ahora, supongamos que $A \subseteq D$ es dirigido y $\bigsqcup A \in \uparrow a$, entonces $a \sqsubseteq \bigsqcup A$ y al ser a un elemento compacto, existe $a' \in A$ tal que $a \sqsubseteq a'$. Así, se tiene que $a' \in \uparrow a$, más aún, $a' \in A \cap \uparrow a$. Por tanto, $\uparrow a$ es un conjunto abierto de Scott.

(iii) Primero mostremos que la colección $\{\uparrow a \mid a \in D_c\}$ es una base para alguna topología sobre D. Sea $x \in D$, entonces $approx(x)$ es un conjunto dirigido no vacío. Sea $a \in approx(x)$, entonces $a \in D_c$ y $a \sqsubseteq x$, de ahí que $x \in \uparrow a$ y por ello $\bigcup_{a \in D} \uparrow a = D$. Ahora, supongamos que a_1, a_2 son elementos compactos y $z \in \uparrow a_1 \cap \uparrow a_2$. Entonces, $a_1,\ a_2 \in approx(z)$ y al ser éste cojunto dirigido existe $a_3 \in approx(z)$ tal que $a_1, a_2 \sqsubseteq a_3$. Por tanto, $a_3 \in \uparrow a_1 \cap \uparrow a_2$. Además, fácilmente se verifica que $\uparrow a_1 \cap \uparrow a_2$ es cerrado hacia arriba, de ahí que $z \in \uparrow a_3 \subseteq \uparrow a_1 \cap \uparrow a_2$ y $a_3 \in D_c$ obteniendo lo que se quería probar.

Finalmente, mostremos que la colección $\{\uparrow a \mid a \in D_c\}$ es una base para la topología de Scott sobre D. Sean A cualquier abierto de Scott y $x \in A$. Entonces, $approx(x)$ es un conjunto dirigido y se tiene que $\bigsqcup approx(x) = x \in A$. Por tanto, para algún $a \in approx(x)$ se cumple que $a \in A$. Así, se tiene que $a \in D_c$ y $a \sqsubseteq x$. Por tanto $x \in \uparrow a \subseteq A$, donde a es un elemento compacto, lo cual concluye la prueba.

□

Nos referiremos a los elementos de la topología de Scott como abiertos de Scott y a las vecindades las llamaremos vecindades de Scott. A continuación daremos un ejemplo simple de la topología de Scott en el contexto de $I_{P,2}$.

Ejemplo 3.16. *Consideremos a P como el programa definite siguiente.*

$$\begin{array}{rcl} p(a) & \leftarrow & \\ p(s(X)) & \leftarrow & p(X) \end{array}$$

Tal programa tiene la finalidad de computar los números naturales, donde a es el número natural "cero" y s es la función sucesor sobre los números naturales.

Por el Teorema 1.13, el conjunto de todas las interpretaciones 2-valuadas para P, $I_{P,2}$, es un dominio para P y, además, sus elementos compactos son subconjuntos finitos I de B_P. Por tanto, identificaremos de manera usual a una interpretación 2-valuada con el conjunto de átomos-base que sean verdaderos en I, así un abierto básico usual en la topología de Scott sobre I_P es el conjunto $\uparrow I = \{I' \subset B_P \mid I \subseteq I'\}$ de todos los superconjuntos de los conjuntos finitos I.

Otro resultado importante para el desarrollo de este trabajo y el de esta sección es presentar la topología de Scott en términos de convergencia, pero para ello será necesario el siguiente resultado.

Proposición 3.17. *Sea $(D, \sqsubseteq)$ un dominio y supóngase que $A \subseteq D$ es un conjunto dirigido. Entonces, A es una red en D y $A \to \bigsqcup A$ en la topología de Scott. En particular, para cada $d \in D$, $approx(d) \to d$ en la topología de Scott.*

Demostración. Sea $A = \{a_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ para algún conjunto indexado $\mathcal{I}$, el cual lo identificaremos con A. Entonces, es claro que $\mathcal{I}$ es dirigido por el ordenamiento $\leq$ obtenido mediante la restricción de $\sqsubseteq$ hacia A. Por lo tanto, el mapeo inclusión $i : \mathcal{I} \to D$ es una red en D. Ahora, sea $\overline{A} = \bigsqcup A$ y supongamos que V es una vecindad de $\overline{A}$ en la topología de Scott. Así, $\bigsqcup A \in V$ y por tanto existe algún índice i_0 tal que $a_{i_0} \in V$, pero V es cerrado hacia arriba y de ahí que $a_i \in V$ siempre que $i_0 \leq i$. Por tanto, $A \to \overline{A}$. □

Teorema 3.18. *Sean $(D, \sqsubseteq)$ un dominio, (s_i) una red en D y s un elemento en D. Se dice que $\lim_i s_i \equiv s(\mathcal{C})$ si, para cada $a \in approx(s)$ existe un índice i_0 tal que $a \sqsubseteq s_i$ siempre que $i_0 \leq i$. Entonces, la condición recien dada determina una clase de convergencia $\mathcal{C}$ cuya topología asociada es la topología de Scott sobre D. Por tanto, una red (s_i) converge a s en la topología de Scott sobre D si y solo si la red (s_i) satisface la condición recién establecida.*

Demostración. Primero mostremos que las condicones 1,2,3 y 4 en la Definición de clases de convergencia, Definición 3.14, se cumplen respecto a la condición recién establecida.

1. Supongamos que $s_i = s$ para todo $i \in \mathcal{I}$ y sea $a \in approx(s)$. Entonces, a es un elemento compacto tal que $a \sqsubseteq s$. Por tanto, $a \sqsubseteq s_i$ para todo i, es decir $((s_i), s) \in \mathcal{C}$.

2. Supongamos que $((s_i), s) \in \mathcal{C}$ y $(t_j)_{j \in \mathcal{J}}$ es una subred de $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$. Entonces, existe una función $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ que satisface lo siguiente:

   - Para todo $j \in \mathcal{J}$, $t_j = s_{\phi(j)}$.

- Para cada $i_0 \in \mathcal{I}$, existe $j_0 \in \mathcal{J}$ tal que $i_0 \leq \phi(j)$ siempre que $j_0 \leq j$.

Sea $a \in approx(s)$ arbitrario, entonces al tener que $((s_i), s) \in \mathcal{C}$ se garantiza la existencia de $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $a \sqsubseteq s_i$ siempre que $i_0 \leq i$. Luego, dado que t_j es una subred de s_i, existe $j_0 \in \mathcal{J}$ tal que $i_0 \leq \phi(j)$ siempre que $j_0 \leq j$, de lo cual se implica que $a \sqsubseteq s_{\phi(j)} = t_j$ siempre que $j_0 \leq j$. Por tanto, $((t_j), s) \in \mathcal{C}$.

3. Supongamos que $((s_i), s) \notin \mathcal{C}$. Entonces, existe $a \in approx(s)$ tal que para cada índice i_0 existe un índice $j_0 \geq i_0$ con $a \not\sqsubseteq s_{j_0}$. Sea $\mathcal{J}$ que denota la colección de todos estos j_0, lo cual implica que $\mathcal{J}$ es cofinal en $\mathcal{I}$ y, por tanto, $(t_j)_{j \in \mathcal{J}}$ es una subred de $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ donde $t_j = s_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$. Además, es claro que cada subred (r_k) de $(t_j)_{j \in \mathcal{J}}$, satisface que $((r_k), s) \notin \mathcal{C}$.

4. Supongamos que todas las condiciones establecidas en 4/ de la Definición 3.8 se cumplen y que $\text{lím}_m \text{lím}_n x(m, n) \equiv s(\mathcal{C})$ donde $x : F' \to D$. Sea $a \in approx(s)$ arbitrario. Dado que el $\text{lím}_m \text{lím}_n x(m, n) \equiv s(\mathcal{C})$, existe un índice $m_0 \in \mathcal{I}$ tal que $a \sqsubseteq \text{lím}_n x(m, n)$ siempre que $m_0 \leq m$. Nótese que $a \in approx(\text{lím}_n x(m, n))$. Por tanto, para cada $m_0 \leq m$ fijo, existe un índice $n_m \in \mathcal{J}_m$ tal que $a \sqsubseteq x(m, n)$ siempre que $n_m \leq n$. Definamos $f \in \prod_{m \in \mathcal{I}} J_m$ por medio de $f(m) = n_m \in J_m$ siempre que $m_0 \leq m$ y, en otro caso, como $f(m) \in J_m$ arbitrariamente. Supóngase que $(m', g) \geq (m_0, f)$, entonces $m_\prime \geq m_0$ y $g \geq f$, de ahí que $g(m') \geq f(m') = n_{m'}$. Así, $a \sqsubseteq x(m', g(m'))$ siempre que $(m', g) \geq (m_0, f)$ de lo cual se sigue que $(x \circ r, s) \in \mathcal{C}$.

En lo que sigue, verificaremos que la topología inducida sobre D por la condición de convergencia coincide con la topología de Scott sobre D. Sean A un abierto en la topología asociada con la clase de convergencia $\mathcal{C}$, $x \in A$ y supongamos que $x \sqsubseteq y$ y que $y \notin A$, es decir, $y \in D \setminus A$ conjunto cerrado. Entonces, existe una red $s_i \to y$ con $s_i \in D \setminus A$ para todo i. Sea $a \in approx(x)$ elegido arbitrariamente, entonces $a \in approx(y)$ de ahí que $a \sqsubseteq s_i$ eventualmente. Se sigue de esto que $s_i \to x$. Por lo tanto, de (2) del Teorema B.12 vemos que s_i pertenece eventualmente a A, lo cual es una contradicción. Por tanto $y \in A$. Ahora, supongamos que E es un conjunto dirigido con $x = \bigsqcup E \in A$. Entonces, por la Proposición 3.17, tenemos que $E \to x$ como una red. Por lo tanto, E eventualmente se encuentra en A, es decir, $E \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, A es un abierto de Scott.

Recíprocamente, supongamos que A es un abierto de Scott y $x \in A$. Mostremos que A es un abierto en la topología asociada con la clase de convergencia $\mathcal{C}$, estableciendo que, si $s_i \to x$, entonces s_i eventualmente está en A y, por ello, el resultado se sigue del inciso (2) del Teorema B.12. Ahora, $approx(x)$ es un conjunto dirigido y $x = \bigsqcup approx(x) \in A$. Por lo tanto, existe un elemento $a \in approx(x)$ tal que $a \in A$. Luego, como $s_i \to x$ se tiene que existe i_0 tal que para cada $i_0 \leq i$ se tiene $a \sqsubseteq s_i$. Así, al tener que $a \in A$ y A un abierto de Scott se implica que $s_i \in A$ para cada $i \geq i_0$, lo cual finaliza la prueba. □

Otra definición que habremos de considerar básica para este capítulo es la siguiente.

Definición 3.19. *Sean D, E dominios y $f : D \to E$ una función. Entonces, f es llamada **Scoot continua** si, f es continua en las topologías de Scott sobre D y E.*

Algunos resultados inmediatos a partir de esta definición son los siguientes.

Proposición 3.20. *Sean D, E dominios y $f : D \to E$ una función. Si f es Scott continua, entonces para cada $x \in D$, $a \in D_c$ y $a \sqsubseteq x$, se tiene que $f(a) \sqsubseteq f(x)$.*

Demostración. Sea $a \in D_c$. Como f es continua en a, dada cualquier vecindad de Scott V de $f(a)$, existe una vecindad de Scott U de a tal que $f(U) \subseteq V$. Sea $b \in approx(f(a))$ arbitrario. Entonces, $V =\uparrow b$ es una vecindad-Scott para $f(a)$. Además, $\uparrow a$ es una vecindad de Scott para a contenida en cualquier vecindad de Scott U de a. Por lo tanto, $f(\uparrow a) \subseteq\uparrow b$. Así, si $a \sqsubseteq x$ entonces $x \in\uparrow a$. Por tanto, $f(x) \in\uparrow b$, es decir, $b \sqsubseteq f(x)$. Luego, al haber supuesto que $b \in approx(f(a))$ arbitrario, se tiene que $f(a) \sqsubseteq f(x)$. □

Proposición 3.21. *Sean D, E dominios y $f : D \to E$ una función. Si f es Scott continua, entonces f es monotónica.*

Demostración. Supongamos que $x \sqsubseteq y$ en D. Notemos que si $a \in approx(x)$ es elegido arbitrariamente, entonces $a \in D_c$ y $a \sqsubseteq x$, de ahí que $a \sqsubseteq y$. Por la Proposición 3.20, tenemos que $f(a) \sqsubseteq f(y)$. Ahora, $approx(x)$ se puede pensar como una red de la siguiente manera, $approx(x) = \{a_i \mid i \in \mathcal{I}\}$, como en la Proposición 3.17, más aún, $a_i \to x$. Por lo tanto, $f(a_i) \to f(x)$. De este modo, por el Teorema 3.18, para cada $b \in approx(f(x))$ existe un índice i_0 tal que $b \sqsubseteq f(a_i)$ siempre que $i_0 \leq i$. Pero, para cada i se tiene que $a_i \sqsubseteq x \sqsubseteq y$, de ahí que $a_i \sqsubseteq y$ y $f(a_i) \sqsubseteq f(y)$ siempre que $i_0 \leq i$, por nuestra observación hecha. De lo anterior observamos que $b \sqsubseteq f(y)$. Finalmente, tenemos que $f(x) = \bigsqcup\{b \mid approx(f(x))\} \sqsubseteq f(y)$ y por ello que $f(x) \sqsubseteq f(y)$, finalizando la prueba. □

Proposición 3.22. *Sean D, E dominios y $f : D \to E$ una función. Entonces, f es Scott continua si y solo si f tiene un orden continuo en el sentido de la Definición A.12.*

Demostración. Supongamos que f es continua respecto a las topologías de Scott sobre D Y E. Entonces, f es monotónica por la Proposición 3.21. Sean $A \subseteq D$ un subonjunto dirigido y $\overline{A} = \bigsqcup A$. Por la Proposición 3.17, $A = \{a_i \mid i \in \mathcal{I}\} \to \overline{A}$ como una red y, por la hipótesis sobre f, se tiene que $f(a_i) \to f(\overline{A})$. Por lo tanto, por el Teorema 3.18, para cada $b \in approx(f(\overline{A}))$, existe i_0 tal que $b \sqsubseteq f(a_i)$ siempre que $i_0 \leq i$. De lo anterior obtenemos que $f(\overline{A}) = f(\bigsqcup A) = \bigsqcup\{b \mid b \in approx(f(\overline{A}))\} \sqsubseteq \bigsqcup\{f(a_i) \mid i \in \mathcal{I}\} = \bigsqcup f(A)$. Así, $f(\bigsqcup A) \sqsubseteq \bigsqcup f(A)$. Finalmente, de la Proposición A.14 se sigue que f es un orden continuo sobre D y E.

Recíprocamente, supongamos que f es un orden continuo y que $s_i \to s$ en la topología de Scott sobre D. Ahora, f es monotónica. Por lo tanto, notemos que $approx(s)$ es un conjunto dirigido y pensemos a este como una red, dígase $\{a_j \mid j \in \mathcal{J}\}$, de ahí que el conjunto $\{f(a_j) \mid j \in \mathcal{J}\}$ es dirigido y $f(s) = f(\bigsqcup approx(s)) = \bigsqcup f(approx(s)) = \bigsqcup\{f(a_j) \mid j \in \mathcal{J}\}$. Por lo tanto, dado cualquier $b \in approx(f(s))$, existe $j \in \mathcal{J}$ tal que $b \sqsubseteq f(a_j)$, donde $a_j \in approx(s)$. Como $s_i \to s$, del Teorema 3.18 se sigue que existe un índice i_0 tal que $a_j \sqsubseteq s_i$ siempre que $i_0 \leq i$. Por lo tanto, de la monotonocidad de f se tiene que $b \sqsubseteq f(a_j) \sqsubseteq f(s_i)$ siempre que $i_0 \leq i$. En consecuencia, se tiene que $f(s_i) \to f(s)$ en la topología de Scott sobre E, de lo cual se tiene que f es continua en las topologías de Scott. □

Ahora, consideremos el significado del Teorema 3.18 en el caso particular de espacios de Valuaciones $I(X, \mathcal{T})$, donde el conjunto de valores de verdad $(\mathcal{T}, \leq)$ es un dominio. Para ello, supongamos que (v_i) es una red tal que $v_i \to v$ en la topología de Scott sobre el dominio $I(X, \mathcal{T})$. Luego, por el Teorema 3.18 esto solo sucede si y solo si para cada valuación finita u con $u \sqsubseteq v$, existe un índice i_0 tal que $u \sqsubseteq v_i$ siempre que $i_0 \leq i$. De hecho, cuando este Teorema es aplicado a los conjuntos de verdad particulares discutidos en la sección 1.3.1 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.23. *Supóngase que (I_i) es una red de interpretaciones y que I es una interpretación.*

1. *Sea $\mathcal{T} = TWO$. Entonces, en el ordenamiento $\sqsubseteq_t$ sobre $I(X, \mathcal{T})$, se tiene que $I_i \to I$ en la topología de Scott si y solo si siempre que $x \in I$, eventualmente $x \in I_i$.*

2. *Sea $\mathcal{T} = THREE$. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

- *En el ordenamiento* $\sqsubseteq_k$ *sobre* $I(X, \mathcal{T})$*, se tiene que* $I_i \to I$ *en la topología de Scott si y solo si siempre que* $x \in I_{\mathbf{t}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{t}}}$ *y, siempre que* $x \in I_{\mathbf{f}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{f}}}$*.*
- *En el ordenamiento* $\sqsubseteq_t$ *sobre* $I(X, \mathcal{T})$*, se tiene que* $I_i \to I$ *en la topología de Scott si y solo si siempre que* $x \in I_{\mathbf{t}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{t}}}$ *y, siempre que* $x \in I_{\mathbf{u}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{u}}} \cup I_{i_{\mathbf{t}}}$*.*

3. *Sea* $\mathcal{T} = FOUR$*. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

- *En el ordenamiento* $\sqsubseteq_k$ *sobre* $I(X, \mathcal{T})$*, se tiene que* $I_i \to I$ *en la topología de Scott si y solo si siempre que* $x \in I_{\mathbf{t}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{t}}} \cup I_{i_{\mathbf{b}}}$*, siempre que* $x \in I_{\mathbf{f}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{f}}} \cup I_{i_{\mathbf{b}}}$ *y, siempre que* $x \in I_{\mathbf{b}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{b}}}$*.*
- *En el ordenamiento* $\sqsubseteq_t$ *sobre* $I(X, \mathcal{T})$*, se tiene que* $I_i \to I$ *en la topología de Scott si y solo si siempre que* $x \in I_{\mathbf{u}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{u}}} \cup I_{i_{\mathbf{t}}}$*, siempre que* $x \in I_{\mathbf{b}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{b}}} \cup I_{i_{\mathbf{t}}}$ *y, siempre que* $x \in I_{\mathbf{t}}$*, eventualmente* $x \in I_{i_{\mathbf{t}}}$*.*

Demostración. Basta considerar la primera de las afirmaciones en 3. para esta prueba. Sea v que denota a la valuación correspondiente para la interpretación I, también para cada índice i sea v_i que denota la valuación correspondiente para las interpretaciones I_i.

Supongamos que (v_i) converge a v en la topología de Scott sobre $I(X, \mathcal{T})$ y sea $x \in X$. Supongamos que $x \in v_{\mathbf{t}}$, es decir, $v(x) = \mathbf{t}$. Definamos $u(x) = \mathbf{t}$ con $u \in I(X, \mathcal{T})$ y, para cada $y \neq x$, $u(y) = \mathbf{u}$. Entonces u es un elemento finito que satisface $u \sqsubseteq_k v$. Así, por el Teorema 3.18, existe i_0 tal que $u \sqsubseteq_k v_i$ siempre que $i_0 \leq i$ y, por lo tanto, eventualmente se cumple que $v_i(x) = \mathbf{t}$ o $v_i(x) = \mathbf{b}$. De lo anterior se tiene que, eventualmente $x \in v_{i_{\mathbf{t}}} \cup v_{i_{\mathbf{b}}}$. Un argumento similar se cumple en el caso en donde $x \in v_{\mathbf{f}}$ o $x \in v_{\mathbf{b}}$, de lo cual se obtiene la condición pedida.

Recíprocamente, supongamos que las condiciones dadas se cumplen. Sea u una valuación finita tal que $u \sqsubseteq_k v$ y, además, supongamos que u toma el valor $\mathbf{u}$ en todos los puntos de X excepto posiblemente en un punto, digamos x. Primero, supongamos que $u(x) = \mathbf{t}$. Entonces, ya sea que $x \in v_{\mathbf{t}}$ o $x \in v_{\mathbf{b}}$. Entonces, por las condiciones dadas ya sea que eventualmente $x \in V_{i_{\mathbf{t}}} \cup v_{i_{\mathbf{b}}}$ o eventualmente $x \in v_{i_{\mathbf{b}}}$ y, en cualquiera de los casos se tiene que eventualmente $u \sqsubseteq_k v_i$. Un argumento similar se cumple en el caso $u(x) = \mathbf{f}$ o $u(x) = \mathbf{b}$. Luego, usando que el conjunto de índices de la red (v_i) es dirigido, se sigue que, para cualquier valuación finita $u \sqsubseteq_k v$, se tiene que eventualmente $u \sqsubseteq_k v_i$. Por lo tanto, (v_i) converge a v en la topología de Scott sobre $I(X, \mathcal{T})$. □

El resultado anterior nos proporciona una descripción uniforme de redes convergentes en la topología de Scott sobre $(I(X, \mathcal{T}), \sqsubseteq)$, donde $(\mathcal{T}, \leq)$ es alguno de los principales conjuntos de valores de verdad. De hecho, las condiciones de convergencia involucradas son simples, naturales e intuitivas y esto es una de las ventajas que se encuentran para este enfoque sobre el tema mediante la convergencia.

Ejemplo 3.24. *Las siguientes afirmaciones relativas a convergencia en la topología de Scott se cumplen en la lógica 2-valuada [véase [55]].*

1. *Cualquier red (I_λ) de interpretaciones converge a la interpretación vacía.*

2. *Si (I_λ) es una red de interpretaciones la cual es monótona en el sentido que $I_\lambda \subseteq I_\gamma$ siempre que $\lambda \leq \gamma$, entonces (I_λ) converge a $\bigcup_\lambda I_\lambda$.*

3. *Si una red (I_λ) de interpretaciones converge a una interpretación I y $J \subseteq I$, entonces (I_λ) converge a J. Así, en general, una red de interpretaciones puede tener varios límites. Un ejemplo de esto puede ser dado como sigue. Supongamos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer-orden que contiene un símbolo predicado unario "p" un símbolo funcional unario "s" un símbolo constante "a" tal como en el lenguaje base del Ejemplo 3.16. Consideremos la sucesión de interpretaciones (I_n) definida como sigue:*

   - $I_n = \{p(a),\ p(s(a))\}$, *si n es par.*
   - $I_n = \{p(a),\ p(s(a)),\ p(s^2(a))\}$, *si n es impar.*

   Entonces, (I_n) converge a cada una de las interpretaciones siguientes: $\emptyset$, $\{p(a)\}$, $\{p(s(a))\}$, $\{p(a),\ p(s(a))\}$. Pero no converge a $\{p(a),\ p(s(a)),\ p(s^2(a))\}$.

   Una vez más, si I_n es la interpretación definida de la siguiente manera:

   - $I_n = \{p(a),\ p(s(a)), \ldots, p(s^n(a))\}$ *si n es par.*
   - $I_n = \{p(a),\ p(s(a)), \ldots, p(s^{2n}(a))\}$ *si n es impar.*

   Entonces, la sucesión (I_n) converge a la siguiente interpretación $\{p(a),\ p(s(a)),\ p(s^2(a)), \ldots\}$, además notemos que, (I_n) no es monótona en el sentido dado en (2).

A pesar de que se ha tomado la convergencia como concepto base, fácilmente se pueden expresar propiedades de la topología de Scott en otros términos familiares, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.25. *En el contexto sobre espacios de valuaciones, la Proposición 3.15 proporciona una descripción simple de los abiertos básicos en la topología de Scott y, por esta razón, consideraremos brevemente este punto.*

En el caso de TWO*, sea* $A_1, \ldots, A_n \in X$ *y defínase* $\mathcal{G}(A_1, \ldots, A_n) = \{I \in I(X, TWO) \mid A_1, \ldots, A_n \in I\}$*. Por medio de (6) del Teorema 1.11 y (3) de la Proposición 3.15, es claro que los conjuntos* $\mathcal{G}(A_1, \ldots, A_n)$ *forman una base para la topología de Scott sobre* $I(X, TWO)$*. De hecho, los conjuntos* $\mathcal{G}(A) = \{I \in I(X, TWO) \mid A \in I\}$ *forman una subbase para la topología de Scott, dado que* $\mathcal{G}(A_1, \ldots, A_n) = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathcal{G}(A_i)$*.*

Ahora, consideremos el orden "knowledge" sobre $THREE$ *y sean* $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in X$ *tales que,* $m, n \geq 0$ *y* $\mathcal{G}(A_1, \ldots, A_n; B_1, \ldots, B_m) = \{I \in I(X, THREE) \mid A_1, \ldots, A_n \in I_{\mathbf{t}}$ *y* $B_1, \ldots, B_m \in I_{\mathbf{f}}\}$*. Entonces, tales conjuntos forman una base para la topología de Scott sobre* $I(X, THREE)$*. Más aún, los conjuntos* $\mathcal{G}(A; B) = \{I \in I(X, THREE) \mid A \in I_{\mathbf{t}}$ *y* $B \in I_{\mathbf{f}}\}$ *forman una subase para esta topología.*

A continuación pasaremos a estudiar la continuidad del operador consecuencia inmediata en la topología de Scott. Una forma de garantizar la continuidad del operador T_P es mediante el inciso (a) del Teorema 2.13 y por la Proposición 3.22 siempre que P sea un programa definite, es decir, T_P es Scott continuo si P es definite. Sin embargo, se puede resolver el problema sin la necesidad de recurrir a tales Teoremas y de una manera auto-contenida, es decir, con los resultados de este apartado es suficiente para resolver nuestro problema.

Teorema 3.26. *Sea* P *un programa definite. Entonces* T_P *es continuo en la topología de Scott sobre* $I_{P,2}$*.*

Demostración. Sean $I \in I_{P,2}$ e (I_i) una red convergente hacia I en la topología de Scott. Veamos que $T_P(I_i) \to T_P(I)$ en la topología de Scott. Si $T_P(I) = \emptyset$, entonces el resultado se sigue de manera inmediata ya que, por el Teorema 3.18, cada red en un dominio converge en la topología de Scott al elemento bottom. Ahora, Supongamos que $T_P(I) \neq \emptyset$ y sea $A \in T_P(I)$. Entonces, existe una instancia base $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n$ de alguna cláusula en P tal que $I(A_1, \ldots, A_n) = \mathbf{t}$ con $n \geq 0$. Como $I_i \to I$, por (1) del Teorema 3.23, tenemos que eventualmente $I_i(A_1, \ldots, A_n) = \mathbf{t}$. Por lo tanto, $A \in T_P(I_i)$ eventualmente. Por último, del Teorema 3.23 se sigue que $T_P(I_i) \to T_P(I)$ en la topología de Scott. □

El recíproco del resultado anterior no se cumple lo cual no es difícil de ver, para ello considérense los siguientes programas:

- $P_1 = \{p(a) \leftarrow p(a),\ p(a) \leftarrow \neg p(a),\ p(b) \leftarrow p(a)\}$.
- $P_2 = \{p(a) \leftarrow,\ p(b) \leftarrow p(a)\}$.

Basta observar que ambos programas poseen el mismo operador consecuencia inmediata(Scott continuo). Por otro lado, recordemos que el Programa del Ejemplo 2.43 mostró que el operador de Fitting no es un orden continuo, y por lo tanto no es Scott continuo para programas definite. Por tal motivo, el Teorema 3.26 justifica las afirmaciones hechas al principio de esta sección respecto a la topología de Scott y los programas definite.

Otro punto fundamental en este capítulo y que se retomará en secciones posteriores, está relacionado con la convergencia para alguna interpretación I de sucesiones $T_P^n(M)$ de iteraciones del operador T_P sobre una interpretación M y bajo que condiciones I es un modelo para P. Tal problema lo discutiremos brevemente para programas definite y lo retomaremos con más detalle en la siguiente sección para programas normales.

En general, si (v_i) es una red que converge a v en la topología de Scott sobre $I(X, \mathcal{T})$, entonces del Teorema 3.18 (véase el Ejemplo 3.24) (v_i) converge a u siempre que $u \sqsubseteq v$ y por tanto, que el conjunto de límites de (v_i) es cerrado hacia abajo. De hecho, este conjunto no puede ser vacio ya que (v_i) siempre converge al elemento $\perp$. Además, cuando $\mathcal{T}$ denota una laticce completa digamos TWO, se tiene por el Teorema 1.13 que $I(X, \mathcal{T})$ es una laticce completa. Así en tal caso, el supremo del conjunto de todos los limites de una red (v_i) en la topología de Scott, existe y fácilmente se puede inferir por el Teorema 3.23 que también es un límite de (v_i). Nos referiremos a tal límite como "**the greatest limit de** (v_i)" y lo denotaremos por $\mathbf{gl(v_i)}$. De hecho, fácilmente se puede verificar que $gl(v_i)$ toma el valor $\mathbf{t}$ sobre el conjunto de todos los elementos $x \in X$ tal que eventualmente v_i toma el valor $\mathbf{t}$, donde dicha propiedad determina completamente a $gl(v_i)$.

Es claro que una sucesión $T_P^n(M)$ siempre converge a la interpretación vacía, por lo mencionado anteriormente, pero la interpretación vacía no necesariamente es un modelo para P. Sin embargo, se puede obtener el siguiente resultado.

Proposición 3.27. *Sean P un programa lógico definite y M una interpretación para P. Entonces, $gl(T_P^n(M))$ de la sucesión $(T_P^n(M))$ es un modelo para P.*

Demostración. Sea $I = gl(T_P^n(M))$. Entonces la sucesión $(T_P^n(M))$ converge a I en la topología de Scott. Así, por la Scott continuidad de

T_P, la sucesión $(T_P(T_P^n(M)))$ converge a $T_P(I)$. Por lo tanto, $(T_P^n(M))$ converge $T_P(I)$ y tenemos por la definición de "*gl*" que $T_P(I) \subseteq I$. $\square$

Observación 3.28. *Si $M = \bot$ en $I(X, \mathcal{T})$, entonces $gl(T_P^n(M))$ coincide con el mínimo punto fijo de T_P y, por tanto, es el mínimo modelo para el programa definite P*[11]*. Por tanto, la semántica usual 2-valuada para programas definite puede ser completamente determinada por términos de convergencia en la topología de Scott.*

Por último, presentamos el siguiente ejemplo que resalta los puntos principales discutidos previamente.

Ejemplo 3.29. *Sea P el siguiente programa (Ejemplo 3.16).*

$$\begin{array}{rcl} p(a) & \leftarrow & \\ p(s(X)) & \leftarrow & p(X) \end{array}$$

Sea $M = \emptyset$, tomando a M como una interpretación 2-valuada, además consideremos a I_n como la n-ésima iteración de T_P sobre M. Entonces, $I_n = \{p(a), p(s(a)), \ldots, p(s^{n-1}(a))\}$ para cualquier $n \geq 1$. Por la parte (2) del Ejemplo 3.24, la sucesión (I_n) converge en la topología de Scott al conjunto $I = \{p(a), p(s(a)), \ldots, p(s^n(a)), \ldots\}$ de todos los números naturales. Más aún, es claro que $I = gl(I_n)$ y, por la Proposición 3.27, también es un modelo para P.

3.1.2. La Topología de "Cantor"

Tomaremos el mismo problema que en la sección anterior pero en el contexto de programas normales y realizaremos la construcción de ciertos modelos estándar para estos.

Iniciaremos presentando un resultado relacionado con el producto topológico, para lo cual será necesario introducir algo de notación como sigue. Sean X, Y conjuntos arbitrarios y denotamos por $[X \to Y]$ al conjunto de todas las funciones totales que mapean X en Y. Así, cuando Y sea ordenado, por ejemplo dígase como un conjunto de valores de verdad $\mathcal{T}$, entonces también lo es $[X \to Y]$ y como recién se ha visto, se pueden definir importantes topologías sobre $[X \to Y]$ mediante condiciones de convergencia bastante naturales las cuales pueden hacer uso del orden. Sin embargo, mostraremos a continuación algunas topologías que no dependan de algún orden [véase [57]].

Teorema 3.30. *Sean (s_i) una red en $[X \to Y]$ y $s \in [X \to Y]$. Entonces la condición: $\lim_i s_i \equiv s(\mathcal{C})$ si y solo si para cada $x \in X$ eventualmente $s_i(x) = s(x)$, determina una clase de convergencia sobre $[X \to Y]$ cuya topología asociada Q es el producto de X copias de la topología discreta sobre Y.*

[11] Véase [55]

Demostración. Verifiquemos que las condiciones $(1), \ldots, (4)$ en la Definición 3.8 se cumplen respecto al significado dado a $\lim_i s_i \equiv s(\mathcal{C})$. (1) Supongamos que (s_i) es una red constante, entonces $s_i(x) = s(x)$ para todo $x \in X$ y cada i. Por lo tanto, para cada x, eventualmente $s_i(x) = s(x)$. Por tanto, $((s_i), s) \in \mathcal{C}$. (2) Supongamos que $((s_i), s) \in \mathcal{C}$ y $(t_j)_{j \in \mathcal{J}}$ es una subred de $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$. Sean $x \in X$ arbitrario y dado un índice i_0 de tal manera que $s_i(x) = s(x)$ para cada $i \geq i_0$. Como (t_j) es una subred de (s_i), existe $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ y un índice $j_0 \in \mathcal{J}$ tal que $i_0 \leq \phi(j)$ siempre que $j \geq j_0$. Así, si $j \geq j_0$, entonces $t_j(x) = s_{\phi(j)}(x) = s(x)$. Por tanto $((t_j), s) \in \mathcal{C}$. (3) Supongamos que es falso $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}(\mathcal{C})$-converge a s. Entonces existe $x \in X$ y un subconjunto cofinal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$ tal que, para cada $j \in \mathcal{J}$ se tiene que $s_j(x) \neq s(x)$. Sea $t_j = s_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$, entonces (t_j) es una subred de (s_i), más aún, es claro que no hay subred de (t_j) que $(\mathcal{C})$-converge a s. (4) Supongamos que todas las condiciones establecidas en (4) de la Defincíón 3.8 se cumplen y que $\lim_m \lim_n x(m, n) \equiv s(\mathcal{C})$, donde $x : F' \to [X \to Y]$. Considérese la red $x \circ r : F \to [X \to Y]$. Sea $y \in X$ arbitrario. Como $\lim_m \lim_n x(m, n) \equiv s(\mathcal{C})$, existe $m_0 \in \mathcal{I}$ tal que, para todo $m \geq m_0$, $\lim_n x(m, n) \equiv s_m(\mathcal{C})$ para algún $s_m \in [X \to Y]$ y $\lim_m s_m \equiv s(\mathcal{C})$. Por lo tanto, para $m \geq m_0$, existe $n_m \in \mathcal{J}_m$ tal que $x(m, n)(y) = s_m(y)$ para todo $n \geq n_m$, pero para $m \geq m_0$; $s_m(y) = s(y)$. Luego, defínase $f \in \prod_{m \in \mathcal{I}} \mathcal{J}_m$ como:

- $f(m) = n_m \in \mathcal{J}_m$, si $m \geq m_0$.
- $f(m) \in \mathcal{J}_m$ arbitrario, en otro caso.

Ahora, supongamos que $(m, g) \geq (m_0, f)$. Entonces $m \geq m_0$ y $g \geq f$, lo cual implica que $g(m) \geq f(m) = n_m$. Así, tenemos que $x(m, g(m))(y) = s_m(y) = s(y)$, es decir, $(x \circ r)(m, g)(y) = x(m, g(m))(y) = s(y)$ siempre que $(m, g) \geq (m_0, f)$. Por tanto, $(x \circ r)(y)$ es eventualmente igual $s(y)$ y de ahí que $x \circ r(\mathcal{C})$converge a s. Finalmente, basta considerar a $[X \to Y]$ como el producto $\prod_{x \in X} Y_x$ donde $Y_x = Y$ para cada $x \in X$. Luego, recordemos que una red (s_i) converge en tal producto a s si y solo si $s_i(x) \to s(x)$ en Y para cada x (véase Teorema B.17 (5)). Finalmente, como Y es dotado con la topología discreta, esta última condición se cumple si y solo si $s_i(x)$ eventualmente es igual a $s(x)$. Por tanto se tiene el resultado. $\square$

El Teorema 3.30 se sigue satisfaciendo si se tiene que $X = B_P$, donde P es un programa lógico normal y Y es cualquier conjunto de valores de verdad $\mathcal{T}$, en particular se satisface si $\mathcal{T} = TWO$. Con estas elecciones obtenemos el siguiente resultado análogo a la Proposición 3.27, pero aplicada a programas normales en general.

Proposición 3.31. *Sea P un programa lógico normal. Supóngase que $\mathcal{C}$ es cualquier clase de convergencia sobre $I_{P,2}$ cuyos elementos satisfacen las condiciones establecidas en el Teorema 3.30:*

Si $((I_i), I) \in \mathcal{C}$, entoces para cada $A \in B_P$, eventualmente $I_i(A) = I(A)$.

Entonces, siempre que M sea una interpretación para P tal que $((T_P^n(M)), I) \in \mathcal{C}$, se tiene que I es un modelo para P.

Demostración. Por la Proposición2.12, basta garantizar que $T_P(I) \sqsubseteq I$. Por tanto, supongamos que $T_P(I)(A) = \mathbf{t}$, entonces existe una instancia base $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m$ de una cláusula en P tal que $I(A_1 \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_m) = \mathbf{t}$. Tomando la sucesión $T_P^n(M)$, se tiene que, por las propiedades establecidas en la hipótesis (aplicadas a cada literal en la conjunción a considerar) , que eventualmente $T_P^n(M)(A_1 \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_m) = I(A_1 \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_m) = \mathbf{t}$. Por lo tanto, eventualmente $T_P^n(M)(A) = \mathbf{t}$ y, una vez más por las propiedades establecidas en la hipótesis, tenemos que $I(A) = \mathbf{t}$. Así, siempre que $T_P(I)(A) = \mathbf{t}$, se tiene que $I(A) = \mathbf{t}$. Por tanto, $T_P(I) \sqsubseteq I$. □

Observación 3.32.

1. *El Teorema 3.30 muestra que la clase de convergencia más grande $\mathcal{C}$ para la cual se aplica la Proposición 3.31 es la clase de convergencia $\mathcal{C}(Q)$ determinada por la topología Q. Por lo tanto, Q es la topología más gruesa entre todas las topologías determinadas por aquellas clases de convegencia para las cuales la Proposición 3.31 puede ser aplicada.*

2. *En términos topológicos la Proposición 3.31 dice que si M es una interpretación para un programa lógico normal P tal que la sucesión de iteraciones $(T_P^n(M))$ converge en la topología Q en alguna interpretación I para P, entonces I es un modelo para P.*

Nótese que la Proposición 3.31 se cumple en cualquier clase de convergencia contenida en $\mathcal{C}(Q)$, en otras palabras, esto se cumple para cualquier clase de convergencia determinada por una topología más fina que Q. Además, Q no es la única topología natural determinada por una clase de convergencia, donde la Proposición 3.31 se cumple. Por ejemplo, si definimos que $\lim_i v_i \equiv v(\mathcal{C})$ se interpreta como eventualmente $v_i = v$, entonces se obtiene otra clase de convergencia natural para la cual trivialmente se satisface la Proposición 3.31 y esta clase de convergencia genera la topología discreta sobre $I(X, \mathcal{T})$.

A continuación, estudiaremos las propiedades de $I(X, \mathcal{T})$ cuando este es dotado con la topología Q y de hecho, la representación de Q dada en el Teorema 3.30 como un producto de espacios hará relativamente sencillo lo pedido.

Teorema 3.33. *Sean P un programa normal y J una preinterpretación para P con dominio D, $X = B_{P,J}$ y $\mathcal{T}$ un conjunto de verdad dotado con la topología discreta. Entonces en la topología Q sobre $I(X, \mathcal{T})$ se tienen los siguientes resultados.*

1. *Una red (I_i) de interpretaciones converge a una interpretación I si y solo si para cada átomo base A, se tiene que eventualmente $I_i(A) = I(A)$.*
2. *$I(X, \mathcal{T})$ es un espacio Hausdorff totalmente disconexo.*
3. *$I(X, \mathcal{T})$ es compacto si y solo si $\mathcal{T}$ es un conjunto finito.*
4. *$I(X, \mathcal{T})$ es metrizable si y solo si D es contable.*
5. *$I(X, \mathcal{T})$ es segundo numerable si y solo si D y $\mathcal{T}$ ambos son contables.*
6. *Supóngase que D numerable y que $\mathcal{T}$ es finito. Entonces $I(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo al conjunto de Cantor sobre el intervalo unitario cerrado en la recta real.*

Demostración. 1.-Se sigue de manera inmediata a partir del Teorema 3.30. 2.-Por Teorema 13.8, pág. 87 en [68], se tiene que $I(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hasudorff y, por el Teorema 29.3, pág. 210 en [68], es totalmente disconexo. 3.-Se sigue del inciso (4) del Teorema B.17 y del hecho siguiente: un espacio discreto es compacto si y solo si este es finito. 4.-Dado que $\mathcal{T}$ es discreto, entonces es metrizable luego, se sigue del Teorema 22.3, pág. 161 en [68], que $I(X, \mathcal{T})$ es metrizable. 5.-Se sigue del Teorema 16.2, pág.108 en [68], el resultado. 6.-Véase Corolario 30.6, pág. 217 en [68], del cual se obtiene el resultado. □

Así, por el inciso (6) del Teorema anterior (3.33), nos referiremos a la topología Q como la **topología de Cantor**. Además, nótese que $I(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff en la topología Q y, por tanto, el límite de cualquier red convergente en Q es único, situación diferente a la que se mostró con la topología de Scott donde una red convergente tiene diferentes límites (Ejemplo 3.24).

En el caso de interpretaciones 2-valuadas se tiene el siguiente resultado, el cual será usado con frecuencia más en adelante y se sigue de manera inmediata por el inciso (1) del Teorema 3.33.

Proposición 3.34. *Sea (I_i) una red de interpretaciones en $I_{P,2}$. Entonces, I_i converge a I en Q si y solo si siempre que $A \in I$,* *eventualmente $A \in I_i$ y siempre que $A \notin I$, eventualmente $A \notin I_i$. Más Aún, el único límite I coincide con el conjunto $\{A \in B_p \mid A \text{ eventualmente pertenece a } I_i\}$.*

Ejemplo 3.35. *Consideremos, una vez más, el programa del Ejemplo 2.3. Para facilitar su uso denotaremos por P al programa de 2.3 y los símbolos predicados en tal programa por p, obteniendo el siguiente programa P:*

$$\begin{array}{rcl} p(a) & \leftarrow & \\ p(s(X)) & \leftarrow & \neg p(X) \end{array}$$

Consideremos las iteraciones del operador T_P sobre la interpretación $\emptyset$, como sigue.

$$\begin{array}{l}
T_P^0(\emptyset) = \emptyset \\
T_P^1(\emptyset) = \{p(a), p(s(a)), p(s^2(a)), p(s^3(a)), p(s^4(a)), \dots\} \\
T_P^2(\emptyset) = \{p(a)\} \\
T_P^3(\emptyset) = \{p(a), p(s^2(a)), p(s^3(a)), p(s^4(a)), p(s^5(a)), \dots\} \\
T_P^4(\emptyset) = \{p(a), p(s^2(a))\} \\
T_P^5(\emptyset) = \{p(a), p(s^2(a)), p(s^4(a)), p(s^5(a)), p(s^6(a)), \dots\} \\
T_P^6(\emptyset) = \{p(a), p(s^2(a)), p(s^4(a))\} \\
T_P^7(\emptyset) = \{p(a), p(s^2(a)), p(s^4(a)), p(s^6(a)), p(s^7(a)), \dots\} \\
T_P^8(\emptyset) = \{p(a), p(s^2(a)), p(s^4(a)), p(s^6(a))\} \\
\quad \vdots
\end{array}$$

Sean I_n que denota a $T_P^n(\emptyset)$ y denotemos por I al conjunto de los números naturales "pares", es decir $\{p(a), p(s^2(a)), p(s^4(a)), \dots\}$. Nótese que la sucesión (I_n) oscila alrededor de I. Sin embargo, fácilmente se puede verificar por medio de la Proposición 3.34 que (I_n) converge a I en Q. Por tanto, se sigue de la Observación 3.32 que I es un modelo para P. De hecho, I es un punto fijo del operador T_P y es el único modelo soportado para P.

El comportamiento oscilatorio exhibido en el ejemplo anterior en relación al operador de un solo-paso, es típico en programas que poseen la negación. Además, en el ejemplo anterior, T_P no es Scott-continuo y por ello el Teorema A.17 no es aplicable sobre T_P. Así, la teoría desarrollada en el capítulo 2 para la semántica de programas definite no es aplicable.

Ejemplo 3.36. *Por (1) del Teorema 3.23 y la Proposición 3.34, se tiene de manera inmediata que, si una red (I_i) converge a I en Q, entonces (I_i) converge a I en la topología de Scott, lo cual se confirma mediante el Ejemplo 3.25 y el Corolario 3.39 (que se encuentra más adelante), mostrando que la topología Q es más fina que la topología de Scott en el caso de interpretaciones 2-valuadas.*

Por otro lado, la sucesión (I_n) definida en (3) del Ejemplo 3.24 converge en la topología de Scott (a varias interpretaciones), pero no converge en Q (a ninguna interpretación).

Ejemplo 3.37. *En este ejemplo mostraremos lo siguiente, una sucesión (I_n) de interpretaciones 2-valuadas converge a otra interpretación 2-valuada I en Q si y solo si la diferencia simétrica de los conjuntos I_n e I, es decir, $I_n \bigtriangleup I$ puede hacerse arbitrariamente pequeña. De hecho la diferencia simétrica proporciona una métrica simple para la topología Q, como se verá a continuación.*

Sea P un programa lógico normal y para evitar el caso trivial supongamos que el lenguaje base de primer-orden $\mathcal{L}$ de P contiene al menos un símbolo funcional. Así, el conjunto B_P es numerable y podemos suponer que los elementos de B_P están dados mediante alguna lista fija, digamos $B_P = (A_1, A_2, A_3, \dots)$. De hecho, la naturaleza exacta de B_P no desarrolla un rol importante y se podría trabajar igualmente sobre cualquier preinterpretación J para $\mathcal{L}$ cuyo dominio es numerable, de ahí que pueda listarse su colección de elementos.

Sea $d_i \in \mathbb{R}$ tal que $0 < d_i < 1$ para cada i y $\sum_{i=1}^{\infty} d_i = 1$, donde a cada d_i usualmente se le conoce como el peso que se adjunta a los elementos $A_i \in B_P$. Ahora, definamos la métrica d sobre I_P como: $d(I, I') = \sum_{A_i \in I' \bigtriangleup I} d_i$, para $I, I' \in I_P$. Sin ninguna dificultad se puede probar que d en efecto define una métrica sobre I_p. Por tanto, mostraremos que d genera a la topología Q sobre I_P. Para ello, basta demostrar que: dada una sucesión arbitraria (I_n) en I_P, se tiene que I_n converge a I en Q si y solo si (I_n) converge a I en la métrica d.

- *Supongamos que (I_n) es una sucesión de interpretaciones en (I_p) tal que $I_n \to_d I$. Por tanto, $d(I_n, I) \to 0$ si $n \to \infty$. Así, dado $\epsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $d(I_n, I) = \sum_{A_i \in I_n \bigtriangleup I} d_i < \epsilon$. Supongamos que $A_j \in I$. Luego, elíjase ϵ lo suficientemente pequeño de tal manera que $\epsilon < d_j$ y obtengamos el correspondiente n_0 tal que $\sum_{A_i \in I_n \bigtriangleup I} d_i < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Lo cual implica que d_j no ocurre en esta suma para cualquier $n \geq n_0$. En otras palabras, $A_j \in I_n \cap I$ para todo $n \geq n_0$, de ahí que $A_j \in I$ eventualmente. Por otro lado, supongamos que $A_j \notin I$. Si A_j estuviera en una cantidad infinita de I_n, entonces $\sum_{A_j \in I_n \bigtriangleup I} d_i \geq d_j$ para una cantidad infinita de veces, contradiciendo $d(I_n, I) \to 0$. Por tanto, A_j pertenece únicamente a una cantidad finita de I_n, lo cual implica que $A_j \notin I_n$ eventualmente. Finalmente, por la Proposición 3.34, se tiene que convergencia en d implica convergencia en Q.*

- *Supongamos que $I_n \to I$ en Q. Sea $\epsilon > 0$ y elíjase un número natural n_0 lo suficientemente grande tal que $\sum_{i \geq n_0} d_i < \epsilon$ y $n_0' \geq$*

n_0 tan grande que si $n \geq n_0'$, entonces $I_n \triangle I$ únicamente contiene elementos A_j con $j \geq n_0$ ó $I_n \triangle I = \emptyset$ (esta situación puede lograrse por un número finito de aplicaciones de la Proposción 3.34, dado que el conjunto $\{A_j \mid j < n_0\}$ es finito y, de hecho, contiene $n_0 - 1$ elementos). Entonces, siempre que $n \geq n_0'$, se tiene que $d(I_n \triangle I) = \sum_{A_j \in I_n \triangle I} d_j \leq \sum_{i \geq n_0} d_i < \epsilon$ y, por tanto, $I_n \to I$ en la métrica d. Así, d genera Q.

Más aún, notemos en particular que, los pesos d_i pueden ser tomados por $\frac{1}{2^i}$, para cada i, en donde la métrica d tiene la forma $d(I, I') = \sum_{A_i \in I' \triangle I} \frac{1}{2^i}$, para cada $I, I' \in I_P$. En cualquier caso, si $I_n \to I$ en Q, entonces $I_n \to I$ en d y, por tanto, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(I_n, I) = \sum_{A_i \in I_n \triangle I} d_i < \epsilon$ si $n \geq n_0$ y, reciprocamente. Por ello, es en este sentido que la diferencia simétrica $I_n \triangle I$ puede ser hecha arbitrariamente pequeña si $I_n \to I$ en Q.

Dado que Q es un producto topológico, fácilmente se pueden describir los abiertos básicos de $I(X, \mathcal{T})$ en Q como sigue[12]. Sea $t \in \mathcal{T}$, entonces el síngulete $\{t\}$ es un abierto en $\mathcal{T}$ ya que $\mathcal{T}$ es dotado con la topología discreta. Por lo tanto, los abiertos básicos son de la forma $\pi_{i_1}^{-1}(t_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(t_{i_n})$. Los cuales pueden ser escritos en la forma $\mathcal{G}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}; t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = \{I \in I(X, \mathcal{T}) \mid I(A_{i_j}) = t_{i_j} \text{ para } j = 1, \ldots, n\}$, donde $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ son elementos arbitrarios de X, pero fijos.

Por lo anterior, se tiene el siguiente resultado que describe a Q en términos familiares de abiertos básicos el cual se sigue de manera inmediata a partir de los comentarios realizados líneas arriba.

Proposición 3.38. *Con la notación realizada líneas arriba, los abiertos básicos en la topología Q sobre $I(X, \mathcal{T})$ son de la forma $\mathcal{G}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}; t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = \{I \in I(X, \mathcal{T}) \mid I(A_{i_j}) = t_{i_j}$ para $j = 1, \ldots, n\}$, donde $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ son elementos arbitrarios de X pero fijos y $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}$ son elementos arbitrarios de $\mathcal{T}$ pero fijos para todo $j = 1, \ldots, n$. Más aún, los subbásicos para Q son aquellos básicos de la forma $\mathcal{G}(A; t)$, es decir, $n = 1$.*

Por lo mencionado tendremos que $\mathcal{G}$ denota a la subbase para Q la cual consistirá de los conjuntos de la forma $\mathcal{G}(A; t)$, donde $A \in X$ y $t \in \mathcal{T}$. En particular, cuando se este trabajando con el conjunto de verdad TWO, de la Proposición 3.38 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.39. *Si $\mathcal{T} = TWO$, entonces los abiertos básicos en Q son de la forma $\mathcal{G}(A_1, \ldots, A_n; B_1, \ldots, B_m) = \{I \in I(X, \mathcal{T}) \mid A_i \in$*

[12] La naturaleza de X actualmente es irrelevante pese a que está siendo tomada como B_P.

$I \wedge B_j \notin I$ con $i = 1, \ldots, n \wedge j = 1, \ldots, m\}$, donde A_i y B_j son elementos arbitrarios de X pero fijos con $n, m \geq 0$. Además, los elementos de la subbase pueden ser descritos de manera similar si n y m toman el valor de al menos 1 en el conjunto $\mathcal{G}(A_1, \ldots, A_n; B_1, \ldots, B_m)$.

Para finalizar esta sección recordemos que una pregunta a considerar hablaría sobre la continuidad del operador T_P en la topología Q, sin embargo, retrasaremos esta discusión hasta el capítulo 4 (véase la Proposición 4.43). También, se conocen algunos resultados que aseguran la discontinuidad del operador T_P [véase [55]], ejemplo de estos se puede tener el siguiente.

Ejemplo 3.40. *Sea P el programa que consiste solo de la cláusula $p \leftarrow \neg q(X)$, cuyo lenguaje base de primer orden $\mathcal{L}$ se asume que contiene un símbolo constante 0, un símbolo funcional s y símbolos predicados r y t en adición a los símbolos presentados en P. Para cada sucesión binaria(formada por 0's y 1's) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, formese el conjunto $A_a = \{A_1, A_2, \ldots\}$ donde $A_i = r(s^i(0))$, si $a_i = 0$ y $A_i = t(s^i(1))$, si $a_i = 1$. También, definamos el siguiente conjunto $K_n = \{q(0), q(s(0)), \ldots, q(s^n(0))\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces para cada sucesión binaria (a_i), se tiene lo siguiente: $I_n \to I_a$ en Q por el Teorema 3.33, donde $I_n = A_a \cup K_n$ y $I_a = A_a \cup \{q(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, $T_P(I_n) = \{p\}$ mientras que $T_P(I_a) = \emptyset$. Por lo tanto, $T_P(I_n)$ no converge a $T_P(I_a)$ en Q, de ahí que T_P es discontinuo en I_a.

3.1.3. Continuidad de Algunos Operadores Sobre $I(X, \mathcal{T})$

En esta sección discutiremos brevemente aquellos operadores definidos sobre $I(X, \mathcal{T})$, los cuales fueron revisados en la Sección 1.3.3. Como se hizo notar en esa Sección el operador $\neg$ no es un orden continuo y, por tanto, no es Scott continuo relativo al orden $\leq_t$. Sin embargo, veremos más adelante que tal operador es Scott continuo relativo al orden $\leq_k$.

Así, nuestro principal objetivo será el estudio de la continuidad de los operadores $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ relativa a las topologías de Scott y "Cantor" . Una vez más, nos centraremos sobre el conjunto de verdad $FOUR$ por las mismas razones dadas en la Sección 1.3.3.

Teorema 3.41. *Sea $\mathcal{T} = FOUR$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *El operador $\neg : I(X, \mathcal{T}) \to I(X, \mathcal{T})$ es continuo en la topología de Scott relativa al orden $\sqsubseteq_k$, pero no es continuo relativo al orden $\sqsubseteq_t$ (La afirmación se sigue cumpliendo si $\mathcal{T} = THREE$).*

2. *Considérese que $\leq$ es, $\leq_k$ ó $\leq_t$ sobre $FOUR$. Fórmese el dominio $I(X,\mathcal{T})$ con el correspondiente orden puntual $\sqsubseteq$ y el correspondiente dominio producto $I(X,\mathcal{T}) \times I(X,\mathcal{T})$. Entonces, los operadores $\wedge$ y $\vee$: $I(X,\mathcal{T}) \times I(X,\mathcal{T}) \to I(X,\mathcal{T})$ son Scott continuos (La afirmación se cumple si $\mathcal{T} = TWO$ ó $THREE$).*

Demostración.

1. El caso en donde se considera el ordenamiento $\sqsubseteq_t$ ya se revisó. Por tanto, consideremos el orden definido por $\sqsubseteq_k$ y utilicemos el criterio para convergencia presentado en el Teorema 3.23. Sea $v_i \to v$ red convergente sobre $I(X,\mathcal{T})$ respecto a la topología de Scott. Supongamos que $x \in (\neg v)_{\mathbf{t}}$, entonces $(\neg v)(x) = \mathbf{t}$ de ahí que $x \in v_{\mathbf{f}}$. Como $v_i \to v$, se tiene que $x \in V_{i_{\mathbf{f}}} \cup V_{i_{\mathbf{b}}}$ eventualmente, es decir, eventualmente $v_i(x) = \mathbf{f}$ ó $v_i(x) = \mathbf{b}$. Entonces, eventualmente $\neg v_i(x) = \mathbf{t}$ ó $\neg v_i(x) = \mathbf{b}$, lo cual implica que eventualmente $x \in (\neg v_i)_{\mathbf{t}} \cup (\neg v_i)_{\mathbf{b}}$. Los casos restantes se realizan de manera similar, por tanto, la red $(\neg v_i)$ converge a $\neg v$ respecto a la topología de Scott.

2. Basta considerar el caso $\vee$ para esta prueba. Luego, por la Proposición 2.4 en [62] pág.35, se tiene que es suficiente mostrar la continuidad en cada argumento de $\vee$ y, por la conmutatividad, basta con mostrar la continuidad en alguno de los argumentos. Así, fijemos $v \in I(X,\mathcal{T})$ y supongamos que $u_i \to u$ en la topología de Scott sobre $I(X,\mathcal{T})$. Sea $x \in X$, elemento arbitrario. Entonces, $(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x)$. Dado que $u_i \to u$, por el Teorema 3.23, tenemos que eventualmente $u(x) \leq u_i(x)$. Así, por la Proposición 1.16, tenemos que eventualmente $u(x) \vee v(x) \leq u_i(x) \vee v(x)$, lo cual es suficiente, por el Teorema 3.23, para mostrar que $u_i \vee v \to u \vee v$ y con esto finalizando la prueba.

□

Ahora estudiemos los mismos operadores con respecto a la topología Q y finalizando esta sección con el siguiente resultado.

Teorema 3.42. *Sea $\mathcal{T} = FOUR$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. *El operador $\neg$: $I(X,\mathcal{T}) \to I(X,\mathcal{T})$ es continuo en la topología Q. Por tanto, este operador es continuo en Q cuando $\mathcal{T}$ denota a TWO ó $THREE$.*

2. *Los operadores $\wedge$ y $\vee$ son continuos como mapeos de $I(X,\mathcal{T}) \times I(X,\mathcal{T})$ hacia $I(X,\mathcal{T})$, donde $I(X,\mathcal{T}) \times I(X,\mathcal{T})$ está dotado con*

la topología producto de Q consigo misma. Además, el mismo resultado se cumple ya sea para TWO ó $THREE$.

Demostración.

1. Sean $x \in X$ y $v_i \to v$ en $I(X, \mathcal{T})$ respecto a la topología Q. Entonces, eventualmente $v_i(x) = v(x)$. Por lo tanto, eventualmente $(\neg v_i)(x) = (\neg v)(x)$, lo cual implica que $\neg v_i \to \neg v$ en Q. De lo anterior se sigue el resultado.

2. Sea $(u_i, v_i) \to (u, v)$ en la topología producto. Entonces, $u_i \to u$ y $v_i \to v$ ambas en Q. Sea $x \in X$. Entonces existen i_1 e i_2 tales que $u_i(x) = u(x)$ si $i \geq i_1$ y $v_i(x) = v(x)$ si $i \geq i_2$. Dado que los conjuntos de índices son dirigidos, tenemos que existe i_3 tal que si $i \geq i_3$, entonces $u_i(x) = u(x)$ y $v_i(x) = v(x)$. Por lo tanto, siempre que $i \geq i_3$, se tiene que $u_i(x) \vee v_i(x) = u(x) \vee v(x)$ y $u_i(x) \wedge v_i(x) = u(x) \wedge v(x)$. Por lo tanto, $u_i \vee v_i \to u \vee v$ y $u_i \wedge v_i \to u \wedge v$.

□

3.2. Teoría de Punto-Fijo Generalizada

En esta sección consideraremos posibles alternativas a los Teoremas A.18 y A.17 dado que exhibimos la no monotonocidad del operador T_P para programas normales y por ello que no sean aplicables estos Teoremas. Por tanto, discutiremos una gran cantidad de tales resultados sobre punto-fijo y otros más relacionados a estos los cuales serán empleados más adelante.

Las alternativas que presentaremos de los Teoremas A.17 y A.18, en su mayoría hacen uso de funciones distancia durante su formulación y durante sus aplicaciones[13]. La programación lógica no es la excepción a esto y por ello consideraremos una gran cantidad de formas en las cuales dichas funciones distancia pueden ser introducidas de manera natural con sus respectivos Teoremas de punto-fijo. Una gran parte de este proceso consiste en trabajar con funciones distancia muy generales, relajando de alguna manera u otra los axiomas estándar de una métrica y estableciendo los correspondientes Teoremas de punto-fijo análogos al Teorema de contracción desarrollado por Banach. Sin embargo, las aplicaciones se revisarán en un capítulo posterior y los ejemplos que se discutan mostrarán que estas funciones distancia generalizadas son bastante sencillas y surgen naturalmente en nuestro campo de estudio.

[13] Véase [39] para una fuente de información sobre teoría de punto-fijo generalizada.

3.2.1. Funciones Distancia Generalizadas

En un nivel completamente general, una función distancia d definida sobre un conjunto X es un mapeo de $X \times X$ hacia A, donde A es un conjunto adecuado de valores y la distancia entre cualesquiera dos elementos x, y de X está determinada por $d(x, y) \in A$. La noción de que dos elementos se encuentran cercanos puede ser definida en un nivel completamente general, por medio de la asignación que se le hace a cada elemento $x \in X$ de una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{U}_x$. Entonces, dado $y \in X$ tal elemento puede pensarse como un elemento cercano a x si para algún $U \in \mathcal{U}_x$, $y \in U$. Sin embargo, el nivel de generalidad presentado es demasiado alto para ser usado y por tanto se impondrán una serie de restricciones a medida que se vaya procediendo.

Iniciaremos considerando un marco de trabajo uniforme llamado **espacios de continuidad**, dentro de los cuales todas las funciones distancias particulares que se encuentren pueden ser descritas en estos espacios. De hecho, en este marco de trabajo tales nociones de "función distancia" y "estar cerca" son duales cuando se considera al conjunto $\mathcal{U}_x$ como una base de vecindades para x, esto último conecta la topología y las distancias en completa generalidad. Además, los espacios de continuidad proporcionarán una transición sin dificultad de los resultados obtenidos en la sección anterior y los presentados en esta, es decir, los espacios de continuidad serán el puente entre ambas secciones.

Una vez definido el marco de trabajo se establecerán los resultados que serán necesarios para garantizar que cada topología puede ser generada mediante una función distancia adecuada y para ello se iniciará introduciendo algunas definiciones.

Definición 3.43. *Un* ***semigrupo*** *es un conjunto A con una operación binaria asociativa definida sobre A, $+ : A \times A \to A$. Si la operación es conmutativa, entonces el semigrupo es llamado* ***conmutativo o Abeliano****. Un semigrupo $(A, +)$ es llamado* ***semigrupo con identidad*** *si existe un elemento $0 \in A$ tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in A$. Así, un semigrupo Abeliano con identidad también es llamado* ***monoide conmutativo o monoide Abeliano****. Finalmente, se entenderá como* ***semigrupo ordenado con identidad*** *aquel semigrupo A con identidad 0, sobre el cual se define un ordenamiento $\leq$ que satisface:*

- *Para todo $a \in A$, $0 \leq a$.*
- *Para cualesquiera $a_1, a_2, a'_1, a'_2 \in A$; si $a_1 \leq a_2$ y $a'_1 \leq a'_2$, entonces $a_1 + a'_1 \leq a_2 + a'_2$.*

Definición 3.44. *Un* ***semigrupo valuado*** *A es un semigrupo abeliano aditivo (operación) con elemento identidad 0 y elemento absorbente ∞,* *es decir* $\infty + a = a + \infty = \infty$ *para todo* $a \in A$*, donde* $\infty \neq 0$ *y además se satisfacen los siguientes axiomas.*

1. *Para todo* $a, b \in A$*, si* $x + a = b$ *y* $b + y = a$ *para algunos* $x, y \in A$*, entonces* $a = b$ *.*

2. *Para cada* A*, existe un único* $b(= \frac{a}{2}) \in A$ *tal que* $b + b = a$*.*

3. *Para cualesquiera* $a, b \in A$*, el ínfimo de* a *y* b*, relativo al orden parcial* $\leq$ *definido en (1), existe en* A *y es denotado por* $a \wedge b$*.*

4. *Para cualesquiera* $a, b, c \in A$*,* $(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$*.*

Observación 3.45. *Nótese que usando la propiedad (1) se puede definir un orden parcial sobre* A*, dígase* $\leq$*, donde* $a \leq b$ *si y solo si* $b = a + x$ *para algún* $x \in A$*. Y, usualmente se le conoce a* $\leq$ *como el* ***orden parcial inducido sobre*** A ***por la operación*** $+$*. Se verifica, sin ninguna dificultad, que* A *con el orden anterior es un semigrupo ordenado. Además, si* $\{(A_i, +_i, 0_i, \infty_i) \mid i \in \mathcal{I}\}$ *es una familia de semigrupos valuados, entonces también lo es su producto* $(A, +, 0, \infty)$*, donde* $+, 0$ *y* ∞ *son definidos coordenadamente.*

Definición 3.46. *Sea* $P \subseteq A$ *con* A *semigrupo valuado, entonces se dice que* P *es un conjunto* ***positivo*** *en el semigrupo valuado* A *si se satisfacen los siguientes axiomas:*

1. *Si* $r, s \in P$*, entonces* $r \wedge s \in P$*.*

2. *Si* $r \in P$ *y* $r \leq a$*, entonces* $a \in P$*.*

3. *Si* $r \in P$*, entonces* $\frac{r}{2} \in P$*.*

4. *Si para todo* $r \in P$*:* $a \leq b + r$*, entonces* $a \leq b$*.*

Ejemplo 3.47. *Sea* $\mathfrak{R}$ *el conjunto de los numeros reales extendidos, es decir* $[0, \infty]$*. Luego, con la suma usual* $\mathfrak{R}$ *es un semigrupo valuado. Además, el conjunto* $(0, \infty]$ *es positivo sobre* $\mathfrak{R}$ *y el orden parcial inducido* $\leq$ *es el usual sobre* $\mathfrak{R}$*.*

Definición 3.48. *Un* ***espacio de continuidad*** *es una cuadrupla* $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$*, donde* X *es un conjunto no vacío,* A *es un semigrupo valuado,* P *es un conjunto positivo en* A *y* $d : X \times X \to A$ *es una función, llamada función de continuidad y que satisface los siguientes axiomas:*

- *Para todo* $x \in X$*,* $d(x, x) = 0$*.*

- *Para cualesquiera* $x, y, x \in X$*,* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

Ahora se puede definir la topología generada por un espacio de continuidad como sigue.

Definición 3.49. *Sean $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ un espacio de continuidad, $x \in X$ y $b \in P$. Entonces, $B_b(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq b\}$ es llamada la **bola de radio** b **respecto a** x. La topología $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ generada por $\mathcal{X}$ consiste de todos los subconjuntos O de X que satisfacen lo siguiente: si $x \in O$, entonces $B_b(x) \subseteq O$ para algun $b \in P$.*

El resultado principal que concierne a espacios de continuidad se le atribuye a R.Kopperman y cuya demostración se encuentra en [40] pág 94-95.

Teorema 3.50. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de continuidad. Entonces, la colección $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ de subconjuntos de X es una topología sobre X. Recíprocamente, dada una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X, existe un espacio de continuidad $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{X})$.*

Dada una topología $\mathcal{T}$ sobre X, vale la pena notar que el espacio de continuidad $\mathcal{X} = (X, d, A, P)$ tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{X})$ que se utiliza en la prueba del Teorema anterior es obtenida tomando al conjunto A como el producto de $\mathcal{T}$ copias de $\Re$ y el conjunto P como el producto de $\mathcal{T}$ copias $(0, \infty]$. La función de continuidad d es definida por $d(x, y)(S) = d_S(x, y)$ para cada $S \in \mathcal{T}$, donde $d_S(x, y) = 0$ si $x \in S$ implica que $y \in S$ y $d_S(x, y) = q$ en otro caso, donde $q \in (0, \infty]$ fijado.

3.2.2. Generalizaciones de Algunas Métricas

La intención planteada en esta sección[14] es elegir conjuntos de valores adecuados para las funciones distancia por ello se iniciará considerando el conjunto de los reales no negativos.

Definición 3.51. *Sea X conjunto no vacío y $\delta : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ una función distancia, donde $\mathbb{R}_0^+$ denota el número de los reales no negativos. Considérense los siguientes axiomas para δ.*

M_1 *Para todo $x \in X$, $\delta(x, x) = 0$.*

M_2 *Para todo $x, y \in X$, si $\delta(x, y) = \delta(y, x) = 0$ entonces $x = y$.*

M_3 *Para todo $x, y \in X$, $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.*

M_4 *Para todo $x, y, z \in X$, $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.*

M_5 *Para todo $x, y, z \in X$, $\delta(x, y) \leq \max\{\delta(x, z), \delta(z, y)\}$.*

*Si δ satisface las condiciones $M_1 - M_4$ es llamada una **métrica** y es llamada **ultramétrica** si también satisface M_5. Si δ satisface las condiciones M_1, M_3 y M_4 es llamada **pseudométrica**. Si δ satisface M_2, M_3 y M_4 se hace llamar **métrica dislocada (o d-métrica)**. Por último, si δ satisface M_1, M_2 y M_4 es llamada **quasimétrica**.*

	(M_1)	(M_2)	(M_3)	(M_4)	(M_5)
Métrica	✓	✓	✓	✓	
Ultramétrica	✓	✓	✓	(✓)	✓
Pseudométrica	✓		✓	✓	
Pseudo-Ultramétrica	✓		✓	(✓)	✓
Quasimétrica	✓	✓		✓	
Quasi-Ultramétrica	✓	✓		(✓)	✓
Métrica Dislocada		✓	✓	✓	
Ultramétrica Dislocada		✓	✓	(✓)	✓
Quasimétrica Dislocada		✓		✓	
Quasi-Ultramétrica Dislocada		✓		(✓)	✓
Quasi-Pseudométrica	✓			✓	
Quasi-Pseudo-Ultramétrica	✓			(✓)	✓

Cuadro 3.1: Métricas Generalizadas.

La condición M_4 usualmente es llamada la desigualdad triangular. Estas nociones están descritas en el Cuadro 3.2.2, donde (✓) indica que la condición respectiva se satisface automáticamente.

Observación 3.52. *Si una (pseudo-, quasi-, d-) métrica satisface* $M5$*(desigualdad triangular fuerte), entonces esta es llamada (pseudo-, quasi-, d-) ultramétrica. Además, nótese que todas las funciones distancia consideradas, excepto la métrica dislocada, son funciones continuas lo cual se verifica de manera inmediata.*

Probaremos en una sección posterior que esencialmente la misma correspondencia que se da entre funciones distancia y sus topologías se cumple entre espacios de continuidad y sus topologías. De hecho cada métrica da lugar a una métrica asociada y cada ultramétrica generalizada da lugar a una ultramétrica generalizada asociada.

El siguiente Teorema es fundamental en muchas áreas de la matemática y la importancia de presentar este Teorema así como su prueba radica en el hecho que este es un prototipo de una gran número de extensiones y refinamientos, incluidos los que se verán en este apartado. De ahí que, se tiene la importancia de dar con detalle su prueba para futuras referencias.

Teorema 3.53 (Banach). *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $0 \leq \lambda < 1$ y $f : X \to X$ una contracción con factor de contracción λ, es decir f es una función uni-valuada que satisface: $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, f tiene un único punto-fijo, el cual se puede obtener como el límite de la sucesión $(f^n(y))$ para*

[14] La referencia base para esta sección es [39].

cualquier $y \in X$.

Demostración. La prueba, en esencia, consiste en demostrar las siguientes 3 afirmaciones: (1) $(f^n(y))$ es una sucesión de Cauchy para todo $y \in X$. (2) El límite de la sucesión en (1) es un punto fijo de f. (3) El punto fijo encontrado en (2) es único.

1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y supóngase que $m > n$. Sea $k = m - n$, entonces: $d(f^n(y), f^m(y)) = d(f^n(y), f^n(f^k(y))) \leq \lambda^n d(y, f^k(y)) \leq \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} d(f^i(y), f^{i+1}(y)) \leq \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i d(y, f(y)) = \lambda^n d(y, f(y)) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \leq \lambda^n d(y, f(y)) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y, f(y))$. Este último término converge a 0 cuando $n \to \infty$, por tanto se tiene (1).

2. Al ser X un espacio completo se tiene que $(f^n(y))$ converge a algún punto en X, dígase $x \in X$. Así, se tiene por la continuidad de f que, $f(x) = f(\lim f^n(y)) = \lim f^{n+1}(y) = x$. Por tanto x es un punto fijo de f.

3. Supóngase que z también es un punto fijo de f. Entonces, $d(x, z) = d(f(x), f(z)) \leq \lambda d(x, z)$. Luego, al tener que $\lambda < 1$, se implica que $d(x, z) = 0$ y, por último, de la propiedad M_2 se tiene que $x = z$.

□

Nótese que la condición $x \neq y$ no es realmente necesaria en la declaración del resultado previo, pero es incluido para ser consistente con lo que se dice a continuación, esto es que el requerimiento $\lambda < 1$ no puede relajarse en general, lo cual puede ser visto al considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & \text{si } 1 \leq x, \\ 2, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función satisface la condición $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, donde d es la métrica usual sobre $\mathbb{R}$, pero no tiene puntos fijos dado que $f(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si X es compacto el requerimiento sobre λ puede debilitarse.

Teorema 3.54. *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto,* $f : X \to X$ *una función la cual es una contracción estricta, es decir,* f *satisface* $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$*. Entonces,* f *posee un único punto fijo.*

Demostración. Como f es continua se implica que la función $\overline{d}(x) = d(x, f(x))$ es continua, por lo tanto, tiene un mínimo m sobre X. Supóngase que $\overline{d}(x_0) = m > 0$. Entonces, $\overline{d}(f(x_0)) =$

$d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) = \overline{d}(x_0) = m$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $m = 0$ y de ahí que f tiene un punto fijo. Ahora, supóngase que $x \neq y$ son puntos fijos de f, entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, lo cual es falso. Por tanto, f tiene un único punto fijo. □

Principal interés mostraremos en establecer resultados los cuales puedan ser vistos, de alguna manera u otra, como recíprocos del Teorema 3.53[15]. Uno de tales resultados es el siguiente y, así como muchos otros, estos fueron inspirados por ciertas aplicaciones para programación lógica.

Teorema 3.55. *Sean (X, τ) un espacio topológico T_1 y $f : X \to X$ una función la cual tiene un único punto fijo en a y es tal que, para cada $x \in X$: $f^n(x) \to a$ en τ. Entonces, existe una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que (X, d) es un espacio ultramétrico completo y para cualesquiera $x, y \in X$: $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$.*

Demostración. Dividiremos la prueba en varios pasos, enumerados consecutivamente, para facilitar su desarrollo.

1. Sea $x \in X$ y definamos el conjunto $T(x) \subseteq X$ como el subconjunto más pequeño de X el cual es cerrado bajo las siguientes reglas.

   (1.1) $x \in T(x)$.

   (1.2) Si $y \in T(x)$ y $f(y) \neq a$, entonces $f(y) \in T(x)$.

   (1.3) Si $y \in T(x)$ y $y \neq a$, entonces $f^{-1}(y) \subseteq T(x)$.

   Dado que la intersección de la familia formada por todos los conjuntos cerrados bajo estas reglas es cerrada bajo estas reglas se tiene que existe $T(x)$. Más aún, es claro que cada conjunto $T(x)$ es no vacío. Así, consideremos $\mathcal{T} = \{T(x) \mid x \in X\}$ y obsérvese que se cumplen los siguientes hechos para $T(x)$.

   a) $T(a) = \{a\}$. En efecto, notemos que (1,1), (1,2) y (1,3) se cumplen relativos al conjunto $\{a\}$. Por lo tanto, de la minimalidad de $T(a)$ se tiene que $T(a) = \{a\}$.

   b) Si $x \neq a$, entonces $a \notin T(x)$. Para ver esto, considere la regla (1,3) y al suponer que $x \neq a$, se tiene que $a \notin f^{-1}(x)$, de lo contrario $f(a) = x$ y al ser a punto fijo de f se implica que $x = a$, que es una contradicción. Así, las reglas (1,2) y (1,3) aplicadas repetidamente e iniciando con x nunca toman el valor de a en $T(x)$. Finalmente, por minimalidad, el proceso recien descrito genera a $T(x)$, es decir, se genera un conjunto

[15] Véase [39] para más detalles sobre el tema.

cerrado bajo las reglas (1,1), (1,2) y (1,3) que es $T(x)$. Se sigue de la afirmación recien demostrada que $T(a) \cap T(x) = \emptyset$ y, por tanto, ya sea que $T(a) = T(x)$ ó $T(a)$ y $T(x)$ son ajenos.

c) Si $T(x) \neq T(a)$ y $T(y) \neq T(a)$, entonces ya sea que $T(x) = T(y)$ ó $T(x)$ es ajeno $T(y)$. Supóngase que existe $z \in T(x) \cap T(y)$, entonces por el hecho de que f sea función, $T(x) \neq a \neq T(y)$ y de aplicaciones repetidas de las reglas (1,1), (1,2) y (1,3) se garantiza que $x, y \in T(z) \subseteq T(x) \cap T(y)$ y por la minimalidad de $T(x)$ y $T(y)$, se implica que $T(x) = T(x) \cap T(y) = T(y)$.

Así, por a), b) y c) se tiene que la familia $\mathcal{T}$ es una partición de X.

2. A continuación, definiremos recursivamente un mapeo $l : T \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ sobre cada $T \in \mathcal{T}$ de la siguiente manera:

(2.1) Si $T(a) = T$, entonces l se define por $l(a) = \infty$. Si $T(a) \neq T$, elíjase arbitrariamente $x \in T$ por medio de $l(x) = 0$ (con $x \neq a$) y se procede con los siguientes pasos.

(2.2) Para cada $y \in T$ con $f(y) \neq a$ y $l(y) = k$, se tiene $l(f(y)) = k + 1$.

(2.3) Para cada $y \in T$ con $l(y) = k$, se tiene $l(z) = k - 1$ para todo $z \in f^{-1}(y)$.

Asumiremos de ahora en adelante que los puntos (2.1), (2.2) y (2.3) se cumplen para todo $T \in \mathcal{T}$, de ahí que l es una función definida sobre todo X. Es claro que el mapeo l está bien definido dado que (X, τ) es T_1. Debido a que, si existe un ciclo en la sucesión $(f^n(x))$, formada por iteraciones de f sobre algún $x \in X$, entonces se puede adecuar para algún elemento y en esta sucesión que con frecuencia no se encuentre en alguna vecindad de a, utilizando que el espacio es T_1. Lo cual, contradice la convergencia de $(f^n(x))$ hacia a.

3. Defínase un mapeo $\imath : \mathbb{Z} \cup \infty \to \mathbb{R}$ por

$$\imath(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k = \infty, \\ 2^{-k}, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Además, defínanse los mapeos $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(x, y) = \text{máx}\{\imath(l(x)), \imath(l(y))\}$$

y el mapeo $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} \delta(x,y), & \text{si } x \neq y, \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

4. Ahora, véase que (X, d) es un espacio ultramétrico.

   - Para M_1 sea $d(x,y) = 0$ y supóngase que $x \neq y$. Entonces, $\delta(xy) = d(x,y) = 0$, de ahí que $\text{máx}\{\imath(l(x)), \imath(l(y))\} = 0$, lo cual implica que $\imath(l(x)) = \imath(l(y)) = 0$. Por tanto, $l(x) = l(y) = \infty$ y finalmente $x = y = a$ por la construcción de l, lo cual es una contradicción.
   - M_2 se cumple por definición.
   - M_3 se cumple por la simetría en δ y por tanto en d.
   - Para M_5, sean $x, y, z \in X$. Veamos que $d(x,y) \leq \text{máx}\{d(x,z), d(z,y)\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $d(x,z) > d(z,y)$ y $\imath(l(z)) > \imath(l(x))$, entonces $d(x,z) = \imath(l(z))$. Si $\imath(l(x)) > \imath(l(y))$, entonces $d(x,y) = \imath(l(x)) < \imath(l(z)) = d(x,z)$. Si $\imath(l(x)) < \imath(l(y))$, entonces $d(x,y) = \imath(l(y))$. Nótese que es falso $\imath(l(y)) > \imath(l(z))$, de lo contrario $d(x,y) < d(z,y)$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\imath(l(y)) < \imath(l(z))$, lo cual impica que $\imath(l(z)) = d(z,y) < d(x,z)$. Por lo tanto, $d(x,y) < d(x,z)$.

5. Veamos que (X, d) es un espacio métrico completo. Para probar esto considérese la sucesión de Cauchy (x_n) en X. Si (x_n) es eventualmente constante, entonces tal sucesión converge trivialmente. Ahora, supongamos que (x_n) no es eventualmente constante, con ello veamos que (x_n) converge hacia a en d, para lo cual es suficiente probar que $\imath(l(x_n)) \to 0$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$: $d(x_m, x_n) < \epsilon$. En particular se tiene que $d(x_m, x_{n_0}) < \epsilon$ para todo $m \geq n_0$ y como (x_n) no es eventualmente constante, se obtiene que $\imath(l(x_{n_0})) < \epsilon$ y $\imath(l(x_m))\epsilon$ para todo $m \geq n_0$. Por último, al haber tomado ϵ arbitrariamente se tiene que $(\imath(l(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0.

6. Nótese que para cada $f(x) \neq a$, se tiene que $l(f(x)) = l(x) + 1$ por la definición de l y, de ahí que, sin ninguna dificultad se comprueba la siguiente igualdad: $\imath(l(f(x))) == \frac{1}{2}\imath(l(x))$.

7. Finalmente, véase que se cumple lo siguiente: para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x,y)$. Sean $x, y \in X$ y supóngase sin pérdida de generalidad que $x \neq y$.

Ahora, sea $d(x,y) = 2^{-k}$, es decir, que $\text{máx}\{\imath(l(x)), \imath(l(y))\} = 2^{-k}$. Entonces $d(f(x), f(y)) = \text{máx}\{\imath(l(f(x))), \imath(l(f(y)))\} = \frac{1}{2}\text{máx}\{\imath(l(x)), \imath(l(y))\}0\frac{1}{2}d(x,y)$.

□

Nótese que el Teorema 3.55 no es como tal un recíproco del Teorema 3.53, es decir, es ligeramente diferente pero para nuestros propositos es suficiente. A continuación haremos algunas observaciones sobre la relación que existe entre la topología original y la topología generada por la métrica construida en la prueba del Teorema 3.55.

Proposición 3.56. *Se tienen los siguientes resultados con la notación empleada durante la prueba del Teorema 3.55.*

1. *Algún $x \neq a$ es un punto aislado respecto a d, es decir, $\{x\}$ es abierto y cerrado en la topología generada por d.*

2. *Si (x_n) es una sucesión en X la cual converge en d hacia algún $x \neq a$, entonces la sucesión (x_n) es eventualmente constante.*

3. *La métrica d en general no genera a τ, pero las iteracines de f convergen hacia a respecto a τ y d, es decir, $(f^n(x)) \to a$ en τ y d.*

Demostración. 1.- Sean $x \neq a$ y $\imath(l(x)) = 2^{-k}$. Entonces, para cualquier $y \in X$ se tiene que $\delta(x,y) \geq 2^{-k}$, de ahí que para cada $y \neq x$, $d(x,y) \geq 2^{-k}$. Por lo tanto, $\{y \in X \mid d(x,y) leq 2^{-k}\} = \{x\}$ y en consecuencia un abierto en d. La cerradura se sigue de manera inmediata a partir de lo anterior. 2.- Es suficiente mostrar que $\{x\}$ es un abierto respecto a d para cada $x \neq a$, lo cual se sigue de (i) en el paso (1) de la prueba del Teorema 3.55. 3.- De hecho la topología τ, en general, no es metrizable. En la prueba del Teorema de Banach 3.53, se observa que $(f^n(x)) \to a$ respecto a d, además la convergencia respecto a τ se sigue de la hipótesis del Teorema 3.55. □

3.2.3. Ultramétricas Generalizadas

El origen de los espacios ultramétricos se encuentra en la teoría de valuaciones y data a Krasner & Monna, quienes desarrollaron esta teoría para distancias ultramétricas con valores reales. Ralph Kopperman fue el primero en “sugerir”que los Teoremas de punto-fijo sobre espacios ultramétricos desarrollados por Priess-Crampe & Ribenboim[16] deberían de jugar un rol importante dentro de la programación lógica. De hecho,

[16] Véase [50] para más detalles sobre esta sección.

el resultado principal de esta sección es debido a Prieb-Crampe & Ribenboim.

Una de las primeras generalizaciones que consideraremos sobre métricas se obtiene a partir de la Definición 3.51, cambiando el codominio de la función δ por un conjunto parcialmente ordenado y debilitando algunos axiomas, lo cual nos llevará a la noción de "ultramétrica generalizada".

Definición 3.57. *Sean X un conjunto, Γ un COPO con elemento mínimo 0. Diremos que (X, ϱ, Γ) es un* ***espacio ultramétrico generalizado****(gum) si $\varrho : X \times X \to \Gamma$ es una función que satisface lo siguiente para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\gamma \in \Gamma$.*

U_1/ $\varrho(x, x) = 0$.

U_2/ *Si* $\varrho(x, y) = 0$, *entonces* $x = y$.

U_3/ $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.

U_4/ *Si* $\varrho(x, z) \leq \gamma$ *y* $\varrho(z, y) \leq \gamma$, *entonces* $\varrho(x, y) \leq \gamma$.

Si ϱ satisface las condiciones U_2 a U_4 pero no necesariamente U_1, llamaremos a (X, ϱ) un ***espacio ultramétrico generalizado dislocado*** *o simplemente un* ***d-gums****. La condición U_4 la llamaremos la* ***desigualdad fuerte del triángulo para gums****.*

Observación 3.58. *Es claro que cualquier espacio ultramétrico es también un gums y este a su vez un $d - gums$. Sin embargo, en el nivel de generalidad en el que se dieron las definiciones previas, la función ϱ no es continua, es decir, Γ no necesariamente es un semigrupo valuado. Más sin en cambio, en las aplicaciones que estaremos considerando Γ será un semigrupo valuado y de ahí que ϱ será una función continua, lo cual se verá a continuación.*

Sean $\gamma > 0$ un ordinal arbitrario y $\{2^{-\alpha} \mid \alpha < \gamma\} =: \Gamma_\gamma$, entonces Γ_γ es totalmente ordenado por $2^{-\alpha} < 2^{-\beta}$ si y solo si $\beta < \alpha$. Nótese que, Γ_γ no es otro conjunto mas que γ dotado con el dual del ordenamiento usual sobre los ordinales. También, nótese que veremos a γ como comunmente se hace, es decir, γ será el conjunto de todos los ordinales $n \in \gamma$ $(n < \gamma)$. Finalmente, definamos una operación binaria "+" sobre Γ_γ como sigue: $2^{-\alpha} + 2^{-\beta} = \max\{2^{-\alpha}, 2^{-\beta}\}$, notando que 2^0 es el elemento absorbente para esta operación.

Como un caso particular de lo mencionado en la observación 3.58 podemos aplicar tal construcción al ordinal $\gamma + 1$, donde sin ninguna dificultad se garantiza que $2^{-\gamma}$ es el elemento absorbente de $\Gamma_{\gamma+1}$ y el elemento identidad de la operación "+" definida sobre $\Gamma_{\gamma+1}$. Más aún,

$2^{-\gamma} \neq 2^0$ con $\gamma > 0$, donde "0" denota al ordinal cero y resaltemos que en algunas ocasiones se usará "0" para denotar $2^{-\gamma}$, lo cual no deberá causar confusión alguna. Así, $\Gamma_{\gamma+1}$ es un semigrupo valuado en el cual $\frac{a}{2} = a$, donde $a = 2^{-\alpha}$ denota un elemento de $\Gamma_{\gamma+1}$ y, además, el orden parcial inducido sobre $\Gamma_{\gamma+1}$ por "+" coincide con el ya definido. Finalmente, el conjunto $\{2^{-\alpha} \mid \alpha < \gamma\}$ es un conjunto positivo en $\Gamma_{\gamma+1}$. Por ello, el caso que más nos interesa será $\Gamma = \Gamma_{\gamma+1}$, donde en tales casos (X, ϱ, Γ) es un espacio de continuidad. Retomaremos esta discusión más adelante pero con dominios $(D, \sqsubset)$ en espacios ultramétricos generalizados.

A continuación se darán algunas definiciones las cuales nos daran las bases para el resultado principal de este apartado, es decir, el Teorema de punto-fijo sobre *gums*.

Definición 3.59. *Sea (X, ϱ, Γ) un espacio $d - gum$. Entonces, para $0 \neq \gamma \in \Gamma$ y $x \in X$, el conjunto $B_\gamma(x) = \{y \in X \mid \varrho(x, y) \leq \gamma\}$ es llamado una (γ)**-bola en** X **con centro o punto medio en** x. Un espacio $d - gum$ es llamado **esféricamente completo** si para cualquier cadena C (respecto a la inclusión de conjuntos) de bolas no vacias en X, se tiene que $\bigcap C \neq \emptyset$.*

Observación 3.60. *Nótese que cada espacio ultramétrico compacto es esféricamente completo por la propiedad de intersección finita. Sin embargo el recíproco es falso, para ello considérese X un conjunto infinito y d una ultramétrica definida como $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x, x) = 0$, para todo $x \in X$. Entonces, sin ninguna dificultad se verifica que (X, d) no es compacto pero es esféricamente completo.*

Definición 3.61. *Sean (X, ϱ, Γ) un espacio $d - gum$ y $f : X \to X$ una función.*

1. *Si para todo $x, y \in X$: $\varrho(f(x), f(y)) \leq \varrho(x, y)$, entonces f se dice **no-expansiva**.*

2. *Si para cada $x \in X$ con $x \neq f(x)$, $\varrho(f^2(x), f(x)) < \varrho(f(x), x)$, entonces f se dice una **contracción estricta sobre orbitas**, donde una orbita sobre f es un subconjunto de X de la forma $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, para algún $x \in X$.*

3. *Si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y)$, entonces f se dice una **contracción estricta (sobre X)**.*

A continuación daremos algunos resultados básicos para los espacios ultramétricos.

Lema 3.62. *Sea (X, ϱ, Γ) un espacio $d - gum$. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Gamma$ y $x, y \in X$ se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si* $\alpha \leq \beta$ *y* $B_\alpha(x) \cap B_\beta(y) \neq \emptyset$*, entonces* $B_\alpha(x) \subseteq B_\beta(y)$.
2. *Si* $B_\alpha(x) \cap B_\alpha(y) \neq \emptyset$*, entonces* $B_\alpha(x) = B_\alpha(y)$*. En particular, cada elemento de la bola también es su centro.*
3. $B_{\varrho(x,y)}(x) = B_{\varrho(x,y)}(y)$.

Demostración. Para (1), sean $a \in B_\alpha(x)$ y $b \in B_\alpha(x) \cap B_\beta(y)$. Entonces, $\varrho(a, x) \leq \alpha$ y $\varrho(b, x) \leq \alpha$, de ahí que $\varrho(a, b) \leq \alpha \leq \beta$, por U_4. Luego, como $\varrho(b, y) \leq \beta$, se implica que $\varrho(a, y) \leq \beta$. Por tanto, $a \in B_\beta(y)$. Para (2), basta observar que el resultado se sigue por la simetría de ϱ. Y por último, para (3) basta reemplazar $\varrho(x, y)$ por α y aplicar (2). □

El siguiente Teorema, aplicable a ultramétricas generalizadas, es el análogo al Teorema 3.53. La prueba de tal Teorema será omitida por el hecho de que exhibiremos un resultado más general [véase [50]].

Teorema 3.63 (**Prieβ-Crampe y Ribenboim**). *Sean* (X, ϱ, Γ) *un espacio gum esféricamente completo y* $f : X \to x$ *una contracción estricta sobre orbitas y no-expansiva. Entonces* f *tiene un punto fijo. Más aún, si* f *es una contracción estricta sobre* X*, entonces* f *tiene un único punto fijo.*

Otro resultado interesante que se puede encontrar en esta literatura es el siguiente, el cual establece la relación que hay entre completes esférica y completes.

Proposición 3.64. *Sea* (X, d) *un espacio ultramétrico. Si* X *es esféricamente completo, entonces* X *es completo.*

Demostración. Supóngase que (X, d) es esféricamente completo y (x_n) es una sucesión de Cauchy en X. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un mínimo $n_k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq n_k$, se tiene $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{k}$, además, nótese que n_k crece con k. Ahora, considerando al conjunto de bolas $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{k}}(x_{n_k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$, se tiene por U_4 que $\mathcal{B}$ es una cadena decreciente de bolas con intersección no vacía debido a la completes esférica de (X, d), digase B. Sea $a \in B$, entonces fácilmente se verifica que $x_n \to a$. Por tanto, $B = \{a\}$ dado que los límites en (X, d) son únicos y así (X, d) es completo. □

Veamos que el recíproco de la Proposición anterior (3.64) es falso, para ello defínase la siguiente ultramétrica sobre $\mathbb{N}$ como sigue: para $n, m \in \mathbb{N}$, sea $d(n, m) = 1 + 2^{-\min\{n,m\}}$ si $n \neq m$ y $d(n, n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No es difícil probar que la topología inducida por d coincide con la topología discreta sobre $\mathbb{N}$ y las sucesiones de Cauchy respecto a d son las sucesiones que eventualmente son constante. Por tanto, $(\mathbb{N}, d)$ es completo. Luego, considerando la cadena de bolas $B_n = \{m \in \mathbb{N} \mid$

$d(m,n) \leq 1+2^{-n}\}$ se obtiene que $B_n = \{m \mid m \geq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\bigcap B_n = \emptyset$. Además, obsérvese que con esta notación la función sucesor $n \mapsto n+1$ es una contracción estricta, pero esta no tiene puntos fijos.

Por lo mencionado en el parrafo anterior y la Proposición 3.64, observamos que la noción de completes esférica es estrictamente menos general que la de completes pero estrictamente más general que la de compacidad.

Por otro lado la completes esférica puede ser caracterizada por medio de sucesiones transfinitas, como se muestra a continuación.

Definición 3.65. *Sea $(x_\delta)_{\delta<\eta}$ sucesión de elementos (posiblemente transfinita) en (X, ϱ, Γ) un espacio gum. Entonces (x_δ) se dice **pseudo-convergente** si, para cada $\alpha < \beta < \gamma < \eta$, se tiene $\varrho(x_\beta, x_\gamma) < \varrho(x_\alpha, x_\beta)$. Entonces la sicesión transfinita $(\pi_\delta)_{\delta+1<\eta}$, donde $\pi_\delta = \varrho(x_\delta, x_{\delta+1})$ es monótona decreciente. Si η es un ordinal límite, entonces cualquier $x \in X$ con $\varrho(x, x_\delta) \leq \pi_\delta$ para todo $\delta < \eta$ es llamado un **pseudo-límite** de la sucesión transfinita $(x_\delta)_{\delta<\eta}$.*

*El espacio (X, ϱ, Γ) se dice **trans-completo** si cada sucesión transfinita pseudo-convergente $(x_\delta)_{\delta<\eta}$, con η un ordinal límite, posee un pseudo-límite en X.*

Proposición 3.66. *Sea $(x_\delta)_{\delta<\eta}$ una sucesión en X (posiblemente transfinita) y supóngase que x es pseudo-límite de esta sucesión con η ordinal límite. Entonces, el conjunto de todos los pseudo-límites de (x_δ) están dados por $Lim(x_\delta) = \{z \in X \mid \varrho(x,z) < \pi_\delta$ para todo $\delta < \eta\}$.*

Demostración. ($\Leftarrow$)Sea $z \in Lim(x_\delta)$. Luego, al tener que $\varrho(z,x) < \pi_\delta$ y $\varrho(x, x_\delta) \leq \pi_\delta$, se implica que $\varrho(z, x_\delta) \leq \pi_\delta$ para todo δ. Por tanto, z es un pseudo-límite. ($\Rightarrow$) Sea z un pseudo-límite de (x_δ). Como $\varrho(x, x_{\delta+1}), \varrho(z, x_{\delta+1}) \leq \pi_{\delta+1}$ para todo $\delta < \eta$, se tiene que $\varrho(x,z) \leq \pi_{\delta+1} < \pi_\delta$ para todo $\delta < \eta$. ☐

Proposición 3.67. *Sea X un espacio gum. Entonces, X es esféricamente completo si y solo si X es trans-completo.*

Demostración. ($\Leftarrow$)Supóngase que X trans-completo y sea $\mathcal{B}$ una cadena decreciente de bolas en X, sin pérdida de generalidad, se puede sumir que $\mathcal{B}$ no posee un elemento mínimo y, además, sea estrictamente decreciente. Entonces de $\mathcal{B}$ se puede selecionar una cadena coinicial, dígase $(B_\delta)_{\delta<\eta}$, donde η es un ordnial límite, de ahí que $(B_\delta)_{\delta<\eta}$ es una sucesión transfinita de bolas. Como la sucesión transfinita es estrictamente decreciente, se tiene que para cada δ, existe $x_\delta \in B_\delta \setminus B_{\delta+1}$ y la sucesión transfinita $(x_\delta)_{\delta<\eta}$ es pseudo-convergente. Por tanto, esta sucesión posee un pseudo-límite x. Luego, al tener que $\varrho(x, x_\delta) \leq$

$\varrho(x_\delta, x_{\delta+1})$ y $x_\delta, x_{\delta+1} \in B_\delta$, se tiene que $x \in B_\delta$ para todo δ y, por ello, $x \in \bigcap B_\delta$.

($\Rightarrow$) Sean X esféricamente completo y (x_δ) una sucesión pseudo-convergente. Sea $(\pi_\delta) = \varrho(x_\delta, x_{\delta+1})$ y considérese $B_\delta = B_{\pi_\delta}(x_\delta)$. Para $\alpha < \beta$, se tiene que $x_\beta \in B_\alpha \cap B_\beta$ y por ello, a partir del Lema3.62, se tiene que (B_δ) es una cadena decreciente de bolas. Luego, al ser el espacio esféricamente completo, existe algún $x \in \bigcap B_\delta$, donde de manera inmediata se sigue que x es un pseudo-límite de (x_δ). $\square$

Para finalizar con los espacios esféricamente completos, consideremos brevemente como las sucesiones pseudo-convergentes pueden ser generadas cuando se considere que Γ está linealmente ordenado. Así, de ahora en adelante consideraremos que (X, ϱ, Γ) es un espacio *gum* donde Γ está ordenado linealmente.

Lema 3.68. *Sean $x, y, z \in X$ con $\varrho(x,y) < \varrho(y,z)$. Entonces, $\varrho(x,z) = \varrho(y,z)$.*

Demostración. Usando U_4 de la Definición 3.57, tenemos que $\varrho(x,z) \leq \max\{\varrho(x,y), \varrho(y,z)\} \leq \varrho(y,z)$. Ahora, supongamos que $\varrho(y,z) \not\leq \varrho(x,z)$. Entonces, como Γ es linealmente ordenado, se tiene que $\varrho(x,z) < \varrho(y,z)$ y, utilizando U_4 una vez más, tenemos que $\varrho(y,z) \leq \max\{\varrho(x,y), \varrho(x,z)\} < \varrho(y,z)$ lo cual es falso. $\square$

Lema 3.69. *Sea $n \geq 2$ y supóngase que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una n-tupla de elementos de X que satisfacen lo siguiente, $\varrho(x_{i+1}, x_{i+2}) < \varrho(x_i, x_{i+1})$ para $i = 1, \ldots, n-2$. Entonces, $\varrho(x_1, x_n) = \varrho(x_1, x_2)$.*

Demostración. Probemos por inducción sobre n la identidad $\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_1, x_n)$. Trivialmente se cumple para $n = 2$. Supongamos que se cumple para $n > 2$ y que la identaidad se cumple para $n-1$. Entonces, $\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_1, x_{n-1})$, lo cual implica que $\varrho(x_{n-1}, x_n) < \varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_1, x_{n-1})$. Aplicando el Lema 3.68 a los puntos x_1, x_{n-1} y x_n, tenemos que $\varrho(x_1, x_n) = \varrho(x_1, x_{n-1}) = \varrho(x_1, x_2)$. $\square$

Proposición 3.70. *Sean $f : X \to X$ una contracción estricta, $x_0 \in X$ y $x_i =: f^i(x_0)$ para todo $i < \omega$. Entonces, la sucesión $(x_i)_{i<\omega}$ es pseudo-convergente.*

Demostración.
Sea $\alpha < \beta < \gamma < \omega$ y nótese que $(x_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_\beta, \ldots, x_\gamma)$ satisface las hipótesis del Lema 3.69 dado que f es una contracción estricta. De lo anterior se tiene que $\varrho(x_\alpha, x_\beta) = \varrho(x_\alpha, x_{\alpha+1})$ y $\varrho(x_\beta, x_\gamma) = \varrho(x_\beta, x_{\beta+1})$. Así, $\varrho(x_\beta, x_\gamma) = \varrho(x_\beta, x_{\beta+1}) < \varrho(x_\alpha, x_{\alpha+1}) = \varrho(x_{\alpha, x_\beta})$. $\square$

3.2.4. Métricas Dislocadas

Las métricas dislocadas tuvieron su primera aparición en los estudios realizados por S.G. Matthews bajo el nombre de dominios métricos. Ahora, nosotros procederemos a establecer las definiciones necesarias para exponer el Teorema de Matthews[17], resultado principal de esta sección, el cual es el análogo al Teorema 3.53 aplicable a estos espacios.

Definición 3.71. *Sean (X, ϱ) un espacio d-métrico y (x_n) sucesión en X. Entonces se dice que (x_n)* ***converge respecto a ϱ o en ϱ*** *si, existe $x \in X$ tal que $\varrho(x_n, x) \to 0$, cuando $n \to \infty$. En este caso x es llamado un* ***x-límite de (x_n) en ϱ****.*

Proposición 3.72. *Los límites en los espacios d-métricos son únicos.*

Demostración. Supóngase que x, y son límites de la sucesión (x_n) en el espacio (X, ϱ). De las propiedades M_3 y M_4 en la Definición 3.51, se sigue que $\varrho(x, y) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_n, y) \to 0$, cuando $n \to \infty$. Por tanto, $\varrho(x, y) = 0$ y por M_2 en 3.51, se tiene que $x = y$. □

Definición 3.73. *Sean (X, ϱ) un espacio d-métrico y (x_n) sucesión en X. Entonces, (x_n) se dice de* ***Cauchy*** *si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$, se tiene que $\varrho(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Proposición 3.74. *Cada sucesión convergente en un espacio d-métrico es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $x_n \to x$ para algún $x \in (X, \varrho)$. Dado $\epsilon > 0$, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varrho(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Para $m, n \geq n_0$, se obtiene que $\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x) + \varrho(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} \cdot 2 = \epsilon$. Por tanto, (x_n) es una sucesión de Cauchy. □

Definición 3.75. *Sea (X, ϱ) un espacio d-métrico. Entonces, (X, ϱ) es llamado* ***completo*** *si, toda sucesión de Cauchy en X converge respecto a ϱ. Además, una función $f : X \to X$ es llamada una* ***contracción*** *si existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que $\varrho(f(x), f(y)) \leq \lambda\varrho(x, y)$, para todo $x, y \in X$.*

Teorema 3.76 (Matthews). *Sean (X, ϱ) un espacio d-métrico completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. La prueba puede seguir el mismo modelo de la prueba del Teorema 3.53, donde los puntos (1) y (3) son esencialmente los mismos dado que la condición (M_1) no es necesaria. Para el punto (2), usando la misma notación de la prueba 3.53, tenemos que x denota el límite de la sucesión de Cauchy $(f^n(y))$. Luego, para cada

[17] Puede consultarse [47] para más detalles sobre el tema.

$n \in \mathbb{N}$:$\varrho(f(x), x) \leq \varrho(f(x), f^n(x)) + \varrho(f^n(x), x) < \varrho(x, f^{n-1}(x)) + \varrho(f^n(x), x) \leq \varrho(x, f^{n-1}(y)) + \varrho(f^{n-1}(y), f^{n-1}(x)) + \varrho(f^n(x), f^n(y)) + \varrho(f^n(y), x) \leq \varrho(x, f^{n-1}(y)) + \lambda^{n-1}\varrho(y, x) + \lambda^n \varrho(x, y) + \varrho(f^n(y), x)$. Dado que los sumandos de la última parte de la desigualdad anterior convergen a cero, cuando $n \to \infty$, tenemos que $\varrho(f(x), x) = 0$. Por tanto, se sigue de M_3 y M_2 en 3.51 que $f(x) = x$. □

El siguiente Teorema que se presenta muestra una unificación "parcial" del Teorema 3.76 y el Teorema 3.63.

Teorema 3.77. *Sean (X, ϱ, Γ) un espacio $d-gum$ esféricamente completo y $f : X \to X$ una contracción estricta sobre orbitas y no-expansiva. Entonces, f tiene un punto fijo. Más aún, si f es una contracción estricta sobre X, entonces el punto-fijo es único.*

Demostración. Supongamos que f no tiene puntos fijos. Entonces, para todo $x \in X$, $\varrho(x, f(x)) \neq 0$. Consideremos $\mathcal{B} = \{B_{\varrho(x,f(x))}(x) \mid x \in X\}$, donde cada $B_{\varrho(x,f(x))}(x) \neq \emptyset$. Notemos que del Lema 3.62 se sigue que $B_{\varrho(x,f(x))}(x) = B_{\varrho(x,f(x))}(f(x))(*)$. Ahora, sea $\mathcal{C}$ una cadena máximal en $\mathcal{B}$. Como X es esféricamente completo, existe $z \in \bigcap \mathcal{C}$. Probemos que $B_{\varrho(z,f(z))}(z) \subseteq B_{\varrho(x,f(x))}(x)$ para cada $x \in X$ y, por la maximalidad, que $B_{\varrho(z,f(z))}(z)$ es la bola más pequeña en la cadena. Sean $B_{\varrho(x,f(x))}(x) \in \mathcal{C}$ y $x \in X$ arbitrario. Como $z \in B_{\varrho(x,f(x))}(x)$ y por $(*)$, tenemos que $\varrho(z, x) \leq \varrho(x, f(x))$ y $\varrho(z, f(x)) \leq \varrho(x, f(x))$. Además, como f es no-expansiva, se deduce que $\varrho(f(z), f(x)) \leq \varrho(z, x) \leq \varrho(x, f(x))$. Luego, por U_4 en 3.57, se implica $\varrho(z, f(z)) \leq \varrho(x, f(x))$. Por último, del Lema 3.62, tenemos que $B_{\varrho(z,f(z))}(z) \subseteq B_{\varrho(x,f(x))}(x)$, para todo $x \in X$. Ahora, al ser f una contracción estricta sobre orbitas, $\varrho(f(z), f^2(z)) < \varrho(z, f(z))$, por tanto $z \notin B_{\varrho(f(z),f^2(z))}(f(z)) \subseteq B_{\varrho(z,f(z))}(f(z))$. Por el Lema 3.62, lo anterior es equivalente a $z \notin B_{\varrho(f(z),f^2(z))}(f(z)) \subseteq B_{\varrho(z,f(z))}(z)$, lo cual contradice la máximalidad de $\mathcal{C}$. Por tanto f tiene, al menos, un punto-fijo. Por otro lado, si f es una contracción estricta sobre X y supongamos que $x \neq y$ son puntos fijos de f. Entonces, $\varrho(x, y) = \varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y)$, lo cual es falso. Por tanto, f tiene un único punto fijo. □

3.2.5. Cuasimétricas

Las cuasimétricas son una manera de reconciliar métrica y estructura de orden. Además, se establecerá y demostrará el Teorema de Rutten-Smith el cual será el análogo al Teorema 3.53 pero para espacios cuasimétricos. Serán necesarias algunas definiciones relevantes para el tema que se plantean a continuación.

Definición 3.78. *Sean (X, d) un espacio cuasimétrico y (x_n) una sucesion en X. (x_n) es una **sucesión de Cauchy** (progresiva) si, para* *cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m \geq n_0$, se tiene que $d(x_m, x_n) < \epsilon$. La sucesión de Cauchy (x_n) **converge** a x si, para todo $y \in X$, $d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y)$. Finalmente, X es llamado **CS-completo** si, cada sucesión de Cauchy en X converge.*

Notemos que los límites de las sucesiones de Cauchy en los espacios cuasimétricos son únicos. Además, dado un espacio cuasimétrico (X, d), d induce un orden parcial sobre X, dígase $\leq_d$, llamado el **orden parcial inducido por** d, definido como $x \leq_d y$ si y solo si $d(x,y) = 0$. Por último, (x, d^*) es un espacio métrico, donde $d^*(x,y) = \max\{d(x,y), d(y,x)\}$ y d^* es llamada **la métrica inducida por** d. Así, diremos que (X, d) es **totalmente acotado** si, para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $E \subseteq X$ tal que para cada $y \in X$, existe un elemento $e \in E$ con $d^*(e, y) < \epsilon$.

Definición 3.79. *Sean (X, d) un espacio cuasimétrico y $f : X \to X$ una función.*

1. *f se dice **CS-continua** si, para toda sucesión de Cauchy $(x_n) \subseteq X$ la cual converge a x, $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy la cual converge a $f(x)$.*

2. *f se dice **no-expansiva** si, $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ para cada $x, y \in X$.*

3. *f se dice **contractiva** si, existe algun c con $0 \leq c < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y)$ para cada $x, y \in X$.*

Nótese que los mapeos contractivos no necesariamente son CS-continuos, para ello considérese el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con el orden natural y la función distancia

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq y, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 0, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la función f la cual mapea cualquier $n \in \mathbb{N}$ a 0 y ∞ a 1, es contractiva, con factor contractivo $c = \frac{1}{2}$, pero no continua dado que $\lim_{n\in\mathbb{N}} n = \infty$, mientras que el $\lim f(n) = 0 \neq 1 = f(\infty)$.

Teorema 3.80 (Rutten-Smyth). *Sean (X, d) un espacio cuasimétrico CS-completo y $f : X \to X$ no-expansiva.*

1. *Si f es CS-continua y existe $x \in X$ con $x \leq_d f(x)$, entonces f tiene un punto-fijo y este punto fijo es mínimo sobre x respecto a $\leq_d$.*

2. *Si f es CS-continua y contractiva, entonces f tiene un único punto-fijo.*

Demostración. (1) Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$, tenemos que $d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq d(x, f(x)) = 0$, por hipótesis, y $d(f^n(x), f^{n+k}(x)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(f^{n+i}(x), f^{n+i+1}(x)) = 0$. Así, $(f^n(x))$ es una sucesión de Cauchy y al ser X completo tiene un único límite, dígase y. Luego, por la CS-continuidad se tiene que $f(y) = f(\text{lím} f^n(x)) = \text{lím} f(f^n(x)) = \text{lím} f^n(x) = y$, por tanto y es un punto-fijo de f. Ahora, sea z un punto-fijo de f con $x \leq_d z$. Entonces, como $d(f^n(x), f^n(z)) \leq d(x, z) = 0$ ya que f es no-expansiva, tenemos que $d(y, z) = \text{lím}\, d(f^n(x), z) = 0$ ya que z es punto-fijo. Por tanto, $y \leq_d z$. (2) La prueba dada para el Teoerema 3.53 no depende sobre la condición M_3 en 3.51 que no sea implícitamente para derivar la continuidad de f a partir del hecho de que esta función sea una contracción. Como la CS-continuidad es una hipótesis, la prueba del Teorema 3.53 puede realizarse reemplazando "sucesiones de Cauchy" por "s.Cauchy progresiva" y la "continuidad" por la "CS-continuidad" y así con los demás términos. □

Ejemplo 3.81. *Sea $(X, \leq)$ un COPO. Defínase una función $d_{\leq} : X \times X \to \{0, 1\}$ por*

$$d_{\leq}(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \leq y, \\ 1 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, fácilmente se verifica que $(X, d_{\leq})$ es un espacio cuasi-ultramétrico, además llamaremos a "$d_{\leq}$" la ***cuasimétrica discreta sobre** X.*

Observemos que dado un orden parcial $\leq$, se tiene que $\leq_{d_{\leq}}$ coincide con $\leq$, más aún (X, d) es totalmente acotado si y solo si X es un conjunto finito. Así, en virtud de esta Definición y la Definición sobre "$\leq_d$" para una cuasimétrica d, la parte (1) del Teorema 3.80 generaliza al Teorema A.17 y la parte (2), de este mismo Teorema, generaliza al Teorema 3.53.

Lema 3.82. *Sea (I_n) sucesión en $I_{P,2}$. Entonces (I_n) es p.Cauchy relativa a la cuasimétrica discreta d si y solo si (I_n) es eventualmente creciente en el sentido existe un número natural k tal que $I_n \subseteq I_{n+1}$ siempre que $k \leq n$.*

Demostración. ($\Rightarrow$)Sea $(I_{P,2}, \sqsubseteq)$ un *poset* y

$$d_{\leq}(I, K) = \begin{cases} 0 & \text{si } I \sqsubseteq k, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\epsilon > 0$, entonces por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m \geq N$: $d_{\sqsubseteq}(I_m, I_n) < \epsilon$ $(*)$. Supongamos que existe $a \in I_n \setminus I_{n+1}$ con $n \geq N$. Entonces $I_{n+1}(a) = \mathbf{f}$ pero, por $(*)$ tenemos que $I_n(a) = \mathbf{t} \leq \mathbf{f} = I_{n+1}(a)$ (empleando el orden correspondiente), lo cual es una contradicción. Por tanto, $I_n \subseteq I_{n+1}$ si $n \geq N$, es decir (I_n) es eventualmente creciente. $(\Leftarrow)$ Por hipótesis existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq k$: $I_n \subseteq I_{n+1} (**)$. Sea $\epsilon > 0$, luego por $(**)$ tenemos que $I_n(A) \leq I_{n+1}(A)$ para cada $A \in B_P$, entonces $I_n \sqsubseteq I_{n+1}$, lo cual implica que $d_{\sqsubseteq}(I_n, I_{n+1}) = 0$ para cada $n \geq k$. Por último, si $n \geq m \geq k$, entonces $d_{\sqsubseteq}(I_m, I_n) \leq \sum_{i=0}^{n-m-1} d_{\sqsubseteq}(I_{m+i}, I_{m+i+1}) = 0 < \epsilon$. Por lo tanto, (I_n) es p.Cauchy. □

Ejemplo 3.83. *Sea (I_n) la sucesión en $\mathcal{P}(N)$, conjunto potencia de los números naturales, definida como*

$$I_n = \begin{cases} \mathbb{N}, & \textit{si } n \textit{ es par} \\ \{0\}, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, $\{0\}$ es el límite más grande de (I_n), es decir, $\{0\} = \{A \in B_P \mid I_n \to A\}$ y el cual es denotado por $gl(I_n)$. Sin embargo, (I_n) aún no es p.Cauchy respecto a la cuasimétrica discreta, dado que fácilmente se puede verificar que esta sucesión no es eventualmente creciente.

Por el ejemplo anterior no es posible caracterizar directamente la propiedad de ser p.Cauchy relativo a la cuasimétrica discreta, en términos de convergencia respecto a la topología de Scott. Lo anterior contrasta con la situación donde las sucesiones (p.)Cauchy, relativas a la cuasimétrica determinada por un mapeo de nivel 3.94, pueden ser descritas en términos de convergencia en Q (3.93 y 3.97).

Utilizando las observaciones hechas hasta este momento es "sencillo" retomar la semántica "usual" de programas lógicos definite sobre punto-fijo, es decir, retomar el Teorema 2.13 parte (b) en términos de cuasimétricas mediante el empleo del Teorema 3.80 parte (2) y la cuasimétrica discreta sobre $(I_P, \subseteq)$[18]. Para ello consideremos los siguientes resultados que nos ayudarán en esto.

Lema 3.84. *Sea $(I_{P,2}, d)$ un espacio cuasimétrico con d la cuasimétrica discreta y considérese $(I_n) \subseteq I_{P,2}$ sucesión eventualmente creciente. Entonces, existe el $\lim_{n\to\infty} I_n$ y es igual a $\bigcup_{k\leq n} I_n$. Más aún, $(I_{P,2}, d)$ es un espacio CS-completo y si $\lim_{k\leq n} I_n = I$, entonces $I = \bigcup_{n\geq k} I_n$.*

Demostración. El resultado se sigue de manera inmediata a partir del Lema 3.82. □

[18]Véase [56] para más detalles sobre el tema.

De ahora en adelante, o por lo menos para esta sección, consideraremos que $(I_{P,2}, d)$ es un espacio cuasimetrico discreto.

Observación 3.85. *Si $(I_n) \subseteq (I_{P,2}, d)$ sucesión p.Cauchy, entonces $(T_P(I_n))$ es sucesión p.Cauchy. En efecto, Por ser p.Cauchy (I_n), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_n \subseteq I_{n+1}$ para cada $n \geq k$. Luego, como T_P es monótono al ser P definite, tenemos que $T_P(I_n) \subseteq T_P(I_{n+1})$ para cada $n \geq k$. Por tanto, $(T_P(I_n))$ es sucesión p.Cauchy.*

Lema 3.86. *Sea $(I_n) \subseteq I_{P,2}$. Entonces, $gl(I_n) = \{A \in B_P \mid A \text{ eventualmente pertenece a } I_n\}$.*

Demostración. Supongamos que $I = gl(I_n)$ y consideremos $J = \{A \in B_P \mid A \text{ eventualmente pertenece a } I_n\}$. Veamos que $I = J$. $(\subseteq)$ Sea $A \in I$, luego al tener que $I_n \to I$ relativo a la topología de Scott (Teorema 3.23, (1)), tenemos que A eventualmente está en (I_n). Por tanto, $A \in J$. $(\supseteq)$ Sea $A \in J$, A eventualmente está en (I_n), entonces $I_n \to J$ (Teorema 3.23). Así, por la definición de I, tenemos que $A \in I$. □

Proposición 3.87. *Sea (I_n) sucesión P.Cauchy en $(I_{P,2}, d)$, entonces son equivalentes los siguientes resultados.*

1. *$\lim_{n\to\infty} I_n = I$.*
2. *$I_n \to I$ en la topología de Scott e $I = gl(I_n)$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por 3.82 y 3.84 tenemos que (I_n) es eventualmente creciente e $I = \bigcup_{k\leq n} I_n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, dado $A \in I$, se tiene que A eventualmente está en I_n y, por el Teorema3.23, $I_n \to I$ en la topología de Scott. Por último, del Lema 3.86 se sigue que $gl(I_n) = J \subseteq I$ y por como se definieron tenemos que $I \subseteq gl(I_n)$. Por tanto, $gl(I_n) = I$. 2) $\Rightarrow$ 1) Sea $A \in I$, entonces por hipótesis A eventualmete está en I_n, de ahí que $A \in \bigcup_{n\geq k} I_n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $I \subseteq \bigcup_{n\geq k} I_n$. Por otro lado, si $A \in \bigcup_{n\geq k} I_n$, entonces A eventualmente está en I_n, por tanto $A \in gl(I_n) = I$. De todo lo anterior se implica que, $\bigcup_{n\geq k} I_n = I$. Finalmente, por el Lema 3.84, se tiene que $\lim_{n\to\infty} I_n = I$. □

Proposición 3.88. *Sea (I_λ) una red de interpretaciones en I_P.*

1. *Si (I_λ) es monótona creciente, entonces $gl(I_\lambda) = \bigcup_\lambda I_\lambda$.*
2. *Si (I_λ) es monótona decreciente, entonces $gl(I_\lambda) = \bigcap_\lambda I_\lambda$.*

Demostración.

1. (1.a) Supongamos que $gl(I_\lambda) = \emptyset$ y $\bigcap I_\lambda \neq \emptyset$, entonces para algún λ_0: $I_{\lambda_0} \neq \emptyset$. Sea $A \in I_{\lambda_0}$. Entonces, por monotonía $A \in I_\lambda$ si $\lambda \geq \lambda_0$, lo cual implica que $I_\lambda \to I_{\lambda_0}$ que es una contradicción. Por tanto, $\bigcup I_\lambda = \emptyset$, de ahí que $gl(I_\lambda) = \bigcup I_\lambda$. (1.b) Supongamos que $gl(I_\lambda) = I \neq \emptyset$. Sea $A \in I$, luego dado que $I_\lambda \to gl(I_\lambda)$ se implica A eventualmente está en I_λ, entonces $A \in \bigcup I_\lambda$. Por tanto, $I \subseteq \bigcup I_\lambda$. Por otro lado, sea $A \in \bigcup I_\lambda$, entonces $A \in I_\eta$ para algún η, lo cual implica que $A \in I_\lambda$ si $\lambda \geq \eta$. Por tanto, $I_\lambda \to \bigcup I_\lambda$. Así, $\bigcup I_\lambda \subseteq I$. Por todo lo anterior tenemos que $I = \bigcup I_\lambda$.

2. (2.a) Análogo a (1.a). (2.b) Supongamos que $gl(I_\lambda) = I \neq \emptyset$. Sea $A \in I$. Entonces, existe λ_0 tal que $A \in I_\lambda$ si $\lambda \geq \lambda_0$. Luego, sea $\lambda_1 \in \Lambda$ (conjunto dirigido de índices para la red), entonces existe λ_2 con $\lambda_2 \geq \lambda_0$ y $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Por hipótesis, $I_{\lambda_2} \subseteq I_{\lambda_0}$ e $I_{\lambda_2} \subseteq I_{\lambda_1}$. Dado que $A \in I_\lambda$ si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $A \in I_{\lambda_2} \subseteq I_{\lambda_1}$. Es decir, $A \in I_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Así, $A \in \bigcap I_\lambda$ y, de ahí que $gl(I_\lambda) \subseteq \bigcap I_\lambda$. Sin ninguna dificultad se verifica que $\bigcap I_\lambda \subseteq gl(I_\lambda)$. Por todo lo anterior, tenemos que $gl(I_\lambda) = \bigcap I_\lambda$.

□

Proposición 3.89. *Sea P un programa lógico definite. Entonces, T_P es continuo relativo a la cuasimétrica discreta.*

Demostración. Sea $(I_n) \subseteq I_{P,2}$ sucesión de Cauchy y supongamos que $\lim_{n\to\infty} I_n = I$. Por la Observación 3.85 se tiene que $(T_P(I_n))$ es p.Cauchy. Veamos que $\lim_{n\to\infty} T_P(I_n) = T_P(I)$. Se sigue del Lema 3.87 que $I_n \to I$ en la topología de Scott e $I = gl(I_n)$. Luego, por el Teorema 3.26 tenemos que $T_P(I_n) \to T_P(I)$. Así, es suficiente mostrar por la Proposición 3.87 que $T_P(I) = gl(T_P(I_n))$. Luego, por el Lema 3.82 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que (I_n) es eventualmente creciente y por el Lema 3.84 $I = \bigcup_{n\geq k} I_n$. Como P es definite, T_P es monótono y, por tanto, $(T_P(I_n))$ es eventualmente creciente. Entonces, se sigue de la Proposición 3.88 que $gl(T_P(I_n)) = \bigcup_{n\geq k} T_P(I_n)$. Por tanto, habría que probar $\bigcup_{n\geq k} T_P(I_n) = T_P(\bigcup_{n\geq k} I_n)$, es decir, $T_P(lub(I_n)) = lub(T_P(I_n))$ relativa a la inclusión del orden parcial. Observemos que al ser (I_n) dirigido, se implica que $(T_P(I_n))$ es dirigido. Finalmente, dado que T_P es una lattice continua (Teorema2.13) se cumple lo pedido, es decir, $T_P(I) = gl(T_P(I_n))$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} T_P(I_n) = T_P(I)$. □

Retomando los comentarios realizados antes del Lema 3.82 tenemos el siguiente ejemplo que exhibe lo comentado en dichas líneas.

Ejemplo 3.90. *Sean P un programa lógico definite y d la cuasimétrica discreta definida sobre el copo, $(I_{P,2}, \subseteq)$. Entonces, por los resultados* *previos tenemos que* $(I_{P,2}, d)$ *es un espacio cuasimétrico CS-completo y el operador* T_P *es CS-continuo. Ahora, veamos que* T_P *es no-expansivo. En efecto, supongamos que* $d(J,K) = 0$*. Entonces,* $J \subseteq K$ *y por la monotonía de* T_P *se tiene que,* $T_P(J) \subseteq T_P(K)$*. Por tanto,* $d(T_P(J), T_P(K)) = 0$*. Para el otro caso, supongamos que* $d(J,K) = 1$*. Entonces, de manera inmediata se tiene que* $d(J,K) \geq d(T_P(J), T_P(K))$*. Por tanto,* T_P *es no-expansiva relativa a* d*. Nótese que,* T_P *usualmente no es una contracción relativa a alguna métrica o cuasimétrica dado que los puntos fijos de* T_P *usualmente no son únicos. De cualquier manera, ahora estamos en posición de aplicar el Teorema 3.80 dado que tenemos los siguientes hechos.*

- (I_P, d) *es un espacio cuasimétrico CS-completo.*
- *El operador* $T_P : I_{P,2} \to I_{P,2}$ *es CS-continuo y no expansivo.*
- *El conjunto vacío* $\emptyset$ *es un punto en* $I_{P,2}$ *tal que* $d(\emptyset, T_P(\emptyset)) = 0$*.*

Ademas, al revisar su prueba concluimos que T_P *tiene un punto fijo igual a el* $\lim_{n\to\infty} T_P^n(\emptyset)$*, luego por la Proposición 3.87 se tiene que es igual a* $gl(T_P^n(\emptyset))$*, el cual a su vez por la Proposición 3.88 es igual a* $\bigcup T_P^n(\emptyset) = T_P \uparrow \omega$*.*

Ahora, caracterizaremos la continuidad del operador T_P en la topología de Cantor para programas normales usando cuasimétricas [véase [56] para una revisón más extensa del tema].

Definición 3.91. *Sean* $(D, \sqsubseteq)$ *un dominio y* $r : D_c \to \mathbb{N}$ *una función, llamada* ***función rango****, tal que* $r^{-1}(n)$ *es un conjunto finito para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Defínase* $d_r : D \times D \to \mathbb{R}$ *por,*

$$d_r(x,y) := \inf\{2^{-n} \mid (c \sqsubseteq x \Rightarrow c \sqsubseteq y) \textit{para todo } \ c \in D_c \textit{con } \ r(c) < n\}.$$

Entonces, d_r *es llamada la* ***cuasi-ultramétrica inducida por*** r*.*

Observación 3.92. *Es sencillo verificar que* (D, d_r) *es un espacio cuasi-ultramétrico. Más aún,* d_r *induce la topología de Scott sobre* D*.*

Dado que nos interesa la relación que existe entre las cuasimétricas y la topología de "Cantor", sobre espacios de interpretaciones, será necesaría la siguiente Proposición.

Proposición 3.93. *sean* (X,d) *un espacio cuasimétrico totalmente acotado y* (x_n) *una sucesión de Cauchy en* X*. Entonces, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $l, m \geq k$*,* $d^*(x_l, x_m) < \epsilon$*.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Luego, dado que X es totalmente acotado, podemos considerar a $E \subseteq X$ subconjunto finito y un mapeo $h : \mathbb{N} \to E$

de tal manera que $d^*(x_n, h(n)) < \frac{\epsilon}{3}$. Como (x_n) es una sucesión de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq l \geq k_0$, $d(x_l, x_m) < \frac{\epsilon}{3}$. Ahora, consideremos $k_1 \geq k_0$ de tal manera que para cada $e \in E$, se tiene que $h^{-1}(e) \cap \{n \mid n \geq k_1\}$ es, ya sea, un conjunto infinito o vacío. Elíjanse ahora $l, m \geq k_1$ y sea $p \geq l$ mínimo tal que $h(p) = h(m)$. Entonces,

$$d(x_l, x_m) \leq d(x_l, x_p) + d(x_p, h(p)) + d(h(p), x_m) < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3},$$

y finalmente por simetría tenemos que $d^*(x_l, x_m) < \epsilon$. □

A continuación, dado un programa P, se define cuando un espacio cuasi-ultramétrico es totalmente acotado sobre I_P mediante mapeos de nivel y, además, veremos su estrecha relación con la topología de Cantor "Q".

Definición 3.94. *Sean P un programa normal y $l : B_P \to \mathbb{N}$ mapeo de nivel para P tal que $l^{-1}(n)$ es un conjunto finito, para cada $n \in \mathbb{N}$. El mapeo l induce una función rango $r : I_c \to \mathbb{N}$ definida por $r(I) = \max_{A \in I}\{l(A)\}$, donde $I_c = (I_P)_c$ es decir el conjunto de todos los subconjuntos finitos de B_P. Y por la Definición 3.91, r induce una cuasi-ultramétrica d_r sobre I_P.*

Lema 3.95. *(I_P, d_r) es un espacio cuasi-ultramétrico totalmente acotado.*

Demostración. Consideremos $\epsilon = 2^{-n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y sea $E = \{A \subseteq B_P \mid \text{para todo } a \in A, l(a) \leq n\}$. Entonces, E es un conjunto finito por nuestra hipótesis sobre l. Luego, para cada $I \in I_P$ sea e la restricción de I a los átomos de nivel menor o igual que n. Entonces, sin ninguna dificultad se verifica que $d^*(e, I) < \epsilon.3$ □

A continuación daremos una caracterización para sucesiones de Cauchy en I_P.

Proposición 3.96. *Sea (I_n) una sucesión en (I_P, d_r). Entonces, (I_n) es de Cauchy si y solo si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l, m \geq k_n$ se tiene que I_l e I_m coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que n.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon = 2^{-n}$. Como I_P es totalmente acotado, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l, m \geq k_n$, $d_r^*(I_l, I_m) \leq 2^{-n}$. Por como se define d_r, tenemos que I_l e I_m coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que n. ($\Leftarrow$) Se sigue de manera directa sin ninguna dificultad. □

Corolario 3.97. *Sea (I_n) sucesión en (I_P, d_r). Entonces, (I_n) es una sucesión de Cauchy si y solo si $I_n \to I$ en Q para algún I. Más aún, $\lim I_n = I$ lo cual implica que, (I_P, d_r) es completo.*

Demostración. Por las Proposiciones 3.34 y la 3.96 tenemos que, (I_n) es de Cauchy si y solo si (I_n) converge en Q para algún I. Además, ya se mostro que $I = \{A \in B_P \mid A \in I_n \text{ eventualmente}\}$ de lo cual se sigue de manera inmediata que $\lim I_n = \{A \in B_P \mid A \in I_n \text{ eventualmente}\}$. Por tanto, (I_P, d_r) es un espacio completo. □

El resultado anterior nos permite caracterizar la CS-continuidad en términos de Q como sigue.

Proposición 3.98. *Supóngase que $l : B_P \to \mathbb{N}$ es un mapeo de nivel tal que $l^{-1}(n)$ es finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el operador T_P es CS-continuo si y solo si T_P es continuo en Q.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea (I_n) una sucesión arbitraria en I_P la cual converge en Q hacia algún $I \in I_P$. Entonces, (I_n) es una sucesión de Cauchy y, por el Corolario 3.97 se tiene que, $\lim I_n = I$. Luego, dado que T_P es CS-continuo, se implica que $\lim T_P(I_n) = T_P(I)$ y, una vez más, por el Corolario 3.97 se tiene que $T_P(I_n) \to T_P(I)$ en Q. ($\Leftarrow$) Sea (I_n) una sucesión de Cauchy tal que $\lim I_n = I$. Por el Corolario 3.97 $I_n \to I$ en Q y por la continuidad del operador T_P en Q, tenemos que $T_P(I_n) \to T_P(I)$. Finalmente, por 3.97, se tiene que $\lim T_P(I_n) = T_P(I)$. □

En nuestra siguiente proposición mostraremos como ser no-expansivo implica la CS-continuidad.

Proposición 3.99. *Sea $l : B_P \to \mathbb{N}$ es un mapeo de nivel arbitrario tal que $l^{-1}(n)$ es finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Si el operador T_P es no-expansivo, entonces T_P es continuo en Q, más aún, T_P es CS-continuo.*

Demostración. Supongamos que T_P es no-expansivo y consideremos (I_n) sucesion de Cauchy tal que $\lim I_n = I$. Entonces, como T_P es no expansivo y por ser I_P totalmente acotado, tenemos que

$$0 \leq d_r(T_P(I_n), T_P(I)) \leq d_r(I_n, I) \leq d_r^*(I_n, I) < 2^{-n} \to 0,$$

y

$$0 \leq d_r(T_P(I), T_P(I_n)) \leq d_r(I, I_n) \leq d_r^*(I, I_n) < 2^{-n} \to 0.$$

Por como se definio d_r y la Proposición 3.96, se implica que $(T_P(I_n))$ es una sucesión de Cauchy y, por la Proposición 3.34 junto con las inecuaciones previas, tenemos que $T_P(I_n) \to T_P(I)$ en Q. Por tanto, del Corolario 3.97 se sigue que, $\lim T_P(I_n) = T_P(I)$. □

Finalmente cerremos esta sección con algunos ejemplos que ilustren los métodos y resultados presentados, aplicados a programas normales P relativos a T_P definidos sobre I_P. En los ejemplos que presentemos será necesario tener en cuenta las siguientes suposiciones, P es un programa lógico normal, d_r es la cuasimétrica determinada por un mapeo de nivel $l : B_P \to \mathbb{N}$ con la propiedad que $l^{-1}(n)$ es un conjunto finito para todo n y que T_P es CS-continuo relativo a d_r o, equivalentemente, que T_P es continuo en la topología Q.

Ejemplo 3.100. *Sea P el programa del Ejemplo 3.16, es decir,*

$$\begin{array}{rcl} p(a) & \leftarrow & \\ p(s(X)) & \leftarrow & p(X) \end{array}$$

y definamos l sobre B_P como $l(p(s^n(a))) = n$. Entonces, utilizando la Proposición 7 en [56] podemos garantizar, sin mucha dificultad, que $d_r(T_P(I_1), T_P(I_2)) \leq \frac{1}{2} d_r(I_1, I_2)$ para todo $I_1, I_2 \in I_P$. Por lo tanto, T_P es una contracción y es continua en Q y, de ahí que, T_P es CS-continuo. Por todo lo anterior, el Teoerema 3.80 es aplicable obteniendo un único punto fijo para T_P. Es claro que este punto fijo coincide con el producido al considerar las potencias de T_P sobre $\emptyset$, es decir, $T_P^n(\emptyset)$.

Ejemplo 3.101. *Consideremos el programa P definido como sigue,*

$$p(s(X), a) \quad \leftarrow \quad p(s(X), a),$$

con mapeo l definido sobre B_P por $l(p(s^n(X), s^m(X))) = n + m$. Entonces, sin mucha dificultad podemos verificar que T_P es no-expansivo y por tanto continuo en Q pero no es contractivo relativo a la cuasimétrica d_r determinada por l porque podemos encontrar $I_1 \neq I_2$ tales que $d_r(T_P(I_1), T_P(I_2)) = d_r(I_1, I_2)$. Así, el Teorema 3.80 es aplicable produciendo una gran cantidad de puntos fijos para T_P. Por esta razón se tiene que T_P no puede ser una contracción relativa a cualquier métrica. Por tanto, el enfoque usado para la busqueda de puntos fijos basado en métricas y el Teorema de contracción de Banach 3.53 falla inclusive para éste programa tan "simple" .

Ejemplo 3.102. *Sea P el programa del Ejemplo 3.35,*

$$\begin{array}{rcl} p(a) & \leftarrow & \\ p(s(X)) & \leftarrow & \neg p(X) \end{array}$$

y donde se puede verificar que P no es estratificado ni localmente estratificado. Definamos el mapeo l sobre B_P por $l(p(s^n(a))) = n$ para cada n. Notemos que en este caso T_P no es no-expansivo, dado que basta considerar a $I_1 = \{p(a), p(s(a))\}$ e $I_2 = \{p(a), p(s(a)), p(s^2(a))\}$. Luego, $T_P(I_1) = \{p(a), p(s^3(a)), p(s^4(a)), p(s^5(a)), \ldots\}$ y $T_P(I_2) = \{p(a), p(s^4(a)), p(s^5(a)), \ldots\}$, lo cual implica que $d_r(I_1, I_2) = 0$, aún *así* $d_r(T_P(I_1), T_P(I_2)) = 2^{-2}$. *Y, por tanto,* T_P *no es un operador no-expansivo. A continuación, consideremos las potencias* $T_P^n(\emptyset) = I_n$ *las cuales son, como ya hemos visto(3.35), de la siguiente manera:* $I_1 = B_P$, $I_2 = \{p(a)\}$, $I_3 = B_P \setminus \{p(s(a))\}$, $I_4 = \{p(a), p(s^2(a))\}$, $I_5 = B_P \setminus \{p(s(a)), p(s^3(a))\}$, *etc. Por tanto, tenemos que* $d_r(I_n, I_{n+1}) = 0$ *si* n *es par o* $2^{-(n-1)}$ *si* n *es impar. Por lo tanto, la sucesión* (I_n) *es de Cauchy y converge al conjunto* $\{p(a), p(s^2(a)), p(s^4(a)), \ldots\}$ *en* Q*, el cual coincide con* I*. Finalmente, por la continuidad de* T_P *en* Q*, se sigue que* I *es un punto fijo de* T_P *y de hecho* I *es el único punto fijo de* T_P*, como ya se había hecho notar en el Ejemplo 3.35.*

Ejemplo 3.103. *Sea* P *el programa que consiste de las siguientes clausulas,*

$$\begin{array}{rcl} p(X) & \leftarrow & \neg q(X) \\ r(s(X)) & \leftarrow & r(X) \\ q(X) & \leftarrow & q(a), \neg r(X). \end{array}$$

Una vez más, T_P *es continuo relativo a* Q *pero en este caso* T_P *no es un operador no-expansivo para cualquier elección que se realice del mapeo de nivel* l *y su correspondiente cuasimétrica* d_r*. Para garantizar lo anterior, basta considerar a* $I_1 = \{q(a)\}$ *e* $I_2 = T_P(I_1) = \{p(s(a)), p(s^2(a)), \ldots\} \cup \{q(a), q(s(a)), \ldots\}$*. Entonces,* $d_r(I_1, I_2)$ *para cualquier* d_r *dado que* $I_1 \subseteq I_2$*. Como* $T_P(I_2) = \{q(a), q(s(a)), \ldots\}$*, entonces debemos tener que* $d_r(T_P(I_1), T_P(I_2)) > 0$ *para cualquier* d_r*, es decir, para cualquier elección de* l *y su correspondiente* d_r*. De lo anterior se implica que el operador* T_P *no puede ser no-expansivo. Ahora, consideremos a* $I = \{r(a)\}$ *y definamos* $I_n = T_P^n(I)$*, entonces tenemos que* $I_n = \{r(s^n(a))\} \cup \{p(a), p(s(a)), p(s^2(a)), \ldots\}$*. Luego, será claro que* (I_n) *es una sucesión de Cauchy (para cualquier elección del mapeo de nivel con su correspondiente fundión* d_r*) y, además,* $I_n \to \{p(a), p(s(a)), p(s^2(a)), \ldots\}$ *en* Q *siendo este un punto fijo de* T_P*.*

3.3. Relaciones entre Espacios

En esta sección estudiaremos las relaciones que existen entre los espacios que se han introducido en el desarrollo de este trabajo. En particular, nos enfocaremos sobre la representación de ciertas relaciones en términos de otras. Pero, antes de ello, será necesario establecer las relaciones que existen entre los diversos Teoremas de punto-fijo estudiados. Para una revisión a profundidad sobre el tema puede consultarse la siguiente bibliografía, [8], [54], [59] y [60].

3.3.1. Relación entre los Teoremas de Punto-Fijo

En este apartado presentaremos la dependencia que existe entre los diferentes Teoremas de punto-fijo revisados a lo largo del trabajo, para ello presentamos la siguiente Tabla y Figura 3.1 que exhiben los Teoremas y las relaciones entre estos.

Espacio	Nombre del Teorema	Notación
ω-cpo	Kleene A.17	K
cpo	Knaster-Tarski A.18	KT
Métrico completo	Banach 3.53	B
Métrico compacto	– 3.54	cp
gum	Prieβ-Crampe & Ribenboim 3.63	PCR
d-métrico	Matthews 3.76	M
d-gum	– 3.77	dPCR
Cuasimétrico	Rutten-Smyth 3.80	RS

Cuadro 3.2: Resumen sobre Teoremas de punto-fijo.

Antes de exhibir la relación entre los Teoremas presentados en el Cuadro 3.3.1 realicemos la siguiente notación, “cpu” , para denotar a las funciones que son contracciones estrictas sobre espacios ultramétricos compactos y, que además, por el Teorema 3.54 se tiene que estas funciones poseen un único punto-fijo.

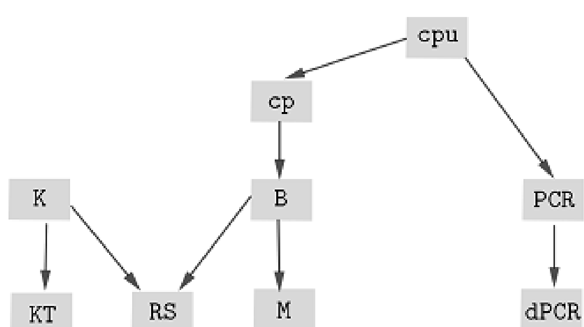

Figura 3.1: Dependencias entre los Teoremas de punto-fijo.

3.3.2. Métricas y d-Métricas

Nuestro objetivo será establecer la relación que existe entre la métrica y la d-métrica, además de examinar los diferentes métodos para obtener una d-métrica a partir de una métrica. Más aún, mostraremos como el Teorema 3.76 puede derivarse del Teorema 3.53.

Es conveniente notar lo siguiente, si f es una contracción con factor contractivo λ sobre un espacio d-métrico, dígase (X, ϱ), entonces se tiene que para todo $x \in X$, $\varrho(f(x), f(x)) \leq \lambda\varrho(x, x)$. Además, si ϱ satisface la propiedad, $\varrho(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, entonces solo nos dirá que la d-métrica ϱ es una métrica. Lo anterior, nos sugiere mostrar interés en el estudio de la función $u_\varrho : X \to \mathbb{R}$ asociada con alguna d-métrica ϱ.

Definición 3.104. *Sea (X, ϱ) un espacio d-métrico. Definimos la función $u_\varrho : X \to \mathbb{R}$ por $u_\varrho(x) = \varrho(x, x)$ para cada $x \in X$, la cual llamaremos **función dislocada de** ϱ[19].*

Los siguientes resultados darán lugar a métodos más generales por medio de los cuales podemos obtener d-métricas partiendo de una métrica.

Proposición 3.105. *Sean (X, d) un espacio métrico, $u : X \to \mathbb{R}_0^+$ una función y $T : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ una función simétrica la cual satisface la desigualdad triangular. Entonces (X, ϱ), donde*

$$\varrho(x, y) = d(x, y) + T(u(x), u(y))$$

para cada $x, y \in X$, es un espacio d-métrico y $u_\varrho(x) = T(u(x), u(x))$ para cada $x \in X$. En particular, si para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$, $T(x, x) = x$, entonces $u_\varrho = u$.

Demostración. De manera inmediata se verifican los axiomas de una d-métrica (Definición 3.51) para ϱ. □

Ahora veamos como la completes también se puede trasladar a estos espacios si algunas condiciones de continuidad son impuestas.

Proposición 3.106. *Usando la notación de la Proposición 3.105. Supongamos que $u : X \to \mathbb{R}_0^+$ es una función continua, donde X es dotado con la topología determinada por d y $\mathbb{R}_0^+$ es dotado con su topología usual y sea $T : (\mathbb{R}_0^+)^2 \to \mathbb{R}_0^+$ otra función continua, donde $(\mathbb{R}_0^+)^2$ es el producto topológico de $\mathbb{R}_0^+$ consigo mismo y además T satisface la siguiente propiedad, $T(x, x) = x$ para cada $x \in X$. Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces (X, ϱ) es un espacio d-métrico completo.*

[19] También se les concoce como funciones peso, véase [67] y [46].

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X, ϱ). Así, para cada $\epsilon > 0$, existe $\nLeftarrow_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ se tiene que $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_n) + T(u(x_m), u(x_n)) = \varrho(x_m, x_n) < \epsilon$. Por tanto, (x_n) es de Cauchy en (X, d) y por ello que esta sucesión tenga un único límite, dígase $x \in (X, d)$. En particular, tenemos que $x_n \to x$ en (X, d), $u(x_n) \to u(x)$ y $T(u(x_n), u(x)) \to T(u(x), u(x)) = u(x)$. Ahora, mostremos que $\varrho(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos lo siguiente, $\varrho(x_n, x) = d(x_n, x) + T(u(x_n), u(x)) \to u(x) = u_\varrho(x)$, por la propiedad adicional en las hipótesis. Por último, observemos que $\varrho(x, x) = 0$, dado que al ser (x_n) una sucesión de Cauchy se implica que $u(x_n) = u_\varrho(x_n) = \varrho(x_n, x_n) \leq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(x_m, x_n) < \frac{2}{n} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Así, por la continuidad de u tenemos que $u(x) = 0$. $\square$

Como ejemplo de una función T que cumpla con los requisitos presentados en las Proposiciones 3.105 y 3.106 tenemos a,

$$T : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \text{ definida por: } (x, y) \to \frac{1}{2}(x + y).$$

Ejemplo 3.107. *Sean d la métrica definida como, $d(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|$ sobre $\mathbb{R}_0^+$, $u : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ como la función identidad y definamos $T(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)$. Entonces la función ϱ, como se definio en la Proposición 3.105, es una d-métrica y $\varrho(x, y) = \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}(x + y) = \max\{x, y\}$ para cada $x, y \in \mathbb{R}_0^+$.*

Ejemplo 3.108. *Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de todos los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Entonces $d : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por*

$$d([a, b], [c, d]) = \frac{1}{2}(|a - c| + |b - d|),$$

sin ninguna dificultad se demuestra que d es una métrica sobre $\mathcal{I}$. Luego, sea $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$u([a, b]) = b - a,$$

y T será definida como se hizo en el Ejemplo 3.107. Entonces, la construcción presentada en la Proposición 3.105 produce una d-métrica ϱ tal que

$$\varrho([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\},$$

para cada $[a, b], [c, d] \in \mathcal{I}$. Veamos que en efecto se cumple la igualdad anterior, realizando lo siguiente: $\varrho([a, b], [c, d]) = d([a, b], [c, d]) + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(|b - d| + b + d + |a - c| - a - c) = \frac{1}{2}(|b - d| + b + d) + \frac{1}{2}(|a - c| - (a + c)) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$.

Ejemplo 3.109. *Sea ϱ definida como $\varrho(x,y) = x+y$. Entonces, $(\mathbb{R}_0^+, \varrho)$ es un espacio d-métrico*

A continuación se presenta una manera alternativa de obtener d-ultramétricas a partir de ultramétricas.

Proposición 3.110. *Sea (X,d) un espacio ultramétrico y considérese $u : X \to \mathbb{R}_0^+$ una función. Entonces, (X,ϱ) es un espacio d-ultramétrico, donde $\varrho(x,y) = \max\{d(x,y), u(x), u(y)\}$ para cada $x, y \in X$ y $\varrho(z,z) = z$ para cada $z \in X$. Si u es continua como una función sobre (X,d), entonces la completes de (X,d) implica completes en (X,ϱ).*

Demostración. Veamos que ϱ satisface la Definición 3.51. M_2 y M_3 son inmediatas, veamos que satisface M_5. Para todo $x, y, z \in X$, se tiene que $\varrho(x,y) = \max\{d(x,y), u(x), u(y)\} \leq \max\{d(x,z), d(z,y), u(x), u(y)\} \leq \max\{d(x,z), d(z,y), u(x), u(z), u(y)\} = \max\{\varrho(x,z), \varrho(z,y)\}$. Ahora, veamos que (X,ϱ) es completo. En efecto, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X,ϱ), entonces (x_n) es de Cauchy en (X,d) y converge para algún $x \in X$. Luego, se tiene que $\varrho(x_n, x) = \max\{d(x_n,x), u(x_n), u(x)\} \to u(x)$ si $n \to \infty$. De manera análoga a lo realizado en la prueba de la Proposición 3.106, tenemos que $u(x) = 0$ y con ello finalizando la prueba. □

Ahora, nos enfocaremos en el estudio de la relación que existe entre el Teorema 3.76 y el Teorema 3.53.

Proposición 3.111. *Sea (X,ϱ) un espacio d-métrico y definamos a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por,*

$$d(x,y) = \begin{cases} \varrho(x,y) & si,\ x \neq y \\ 0 & si,\ x = y. \end{cases}$$

Entonces d es una métrica sobre X.

Demostración. Es claro que $d(x,x) = 0$ para cada $x \in X$, además de la simetría para d. Luego, Si $d(x,y) = 0$ entonces tenemos que $x = y$ ó $\varrho(x,y) = 0$, en ambos casos tenemos que $x = y$. Por último, mostremos que para cualesquiera $x, y, z \in X$: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Si $d(x,z) = \varrho(x,z)$ y $d(z,y) = \varrho(z,y)$, entonces se tiene lo pedido. Por otro lado, si $d(x,z) = 0$ entonces $x = z$ y la desigualdad se reduce a $d(x,y) \leq d(x,y)$, lo cual es cierto. Si $d(z,y) = 0$, es completamente análogo al anterior. Por tanto, d es una métrica. □

Definición 3.112. *La métrica d recien definida a partir de la d-métrica ϱ es llamada la **métrica asociada con** ϱ.*

Notemos que al considerar el paso (3) en la prueba del Teorema 3.55 se verifica sin mucha dificultad que ϱ es una d-ultramétrica, más aún, que d es la métrica asociada a ϱ.

La siguiente Proposición nos permite inferir completes respecto a ϱ, a partir de la completes dada por d.

Proposición 3.113. *Sea (X, ϱ) un espacio d-métrico y supóngase que d denota a la métrica asociada respecto a ϱ. Si la métrica d es completa, entonces ϱ es completa. Si f es una contracción relativa a ϱ, entonces f es una contracción relativa a d con el mismo factor de contracción.*

Demostración. Supongamos que (x_n) es una sucesión de Cauchy en ϱ. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, eciste n_0 tal que $\varrho(x_k, x_m) < \epsilon$ si $k, m \geq n_0$. Lo cual im plica que, $d(x_k, x_m) < \epsilon$ si $k, m \geq n_0$. Como d es completa, la sucesión $x_n \to x$ en d para algún x, de ahí que $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora, véase que $\varrho(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para ello, consideremos dos casos.

- Supóngase que la sucesión (x_n) es tal que existe n_0 con la propiedad que para todo $m \geq n_0$, se tiene que $x_m \neq x$. Entonces $\varrho(x_m, x) = d(x_m, x)$ para todo $m \geq n_0$, lo cual implica que $\varrho(x_m, x) \to 0$. Por tanto, $\varrho(x_n, x) \to 0$.

- Supóngase que existen infinitos $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} = x$. Como (x_n) es de Cauchy respecto a ϱ, se tiene que $\varrho(x_{n_k}, x) < \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$ y, por ello, $\varrho(x, x) = 0$ cuando $n \to \infty$.

Sean $\lambda \in [0, 1)$ y $x, y \in X$ tal que $\varrho(f(x), f(y)) \leq \lambda\varrho(x, y)$ para cada $x, y \in X$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $d(f(x), f(y)) = 0$. Por tanto, $d(f(x), f(y))\lambda d(x, y)$. Luego, si $f(x) \neq f(y)$, entonces $x \neq y$, de ahí que $d(f(x), f(y)) = \varrho(f(x), f(y) \leq \lambda\varrho(x, y) = \lambda d(x, y)$. Finalizando asi la prueba. $\square$

Proposición 3.114. *Sea (X, ϱ) un espacio d-métrico completo y supóngase que d denota a la métrica asociada con ϱ. Entonces la métrica d es completa. Sin embargo, si f es una contracción relativa a d, entonces no necesariamente se sigue que f sea una contracción relativa a ϱ.*

Demostración. Sea (x_n) sucesión de Cauchy en d. Si (x_n) eventualmente es constante, entonces (x_n) converge en d. Supongamos que no sucede tal caso, entonces la sucesión (x_n) contiene una cantidad infinita de puntos distintos, es decir, ésta sucesión no puede ser de Cauchy. Definamos una subsucesión (y_n) de (x_n) la cual se obtiene por remover multiples ocurrencias de puntos en (x_n). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $y_n = x_k$ donde $k = \text{mín}\{l \mid m < n : x_m \neq x_l\}$. Como (y_n) es una subsucesión de la sucesión de Cauchy (x_n), se observa que (y_n) también es de

Cauchy relativa a d, pero, para cualesquiera $y, z \in (y_n)$, se tiene por Defininción de la métrica d que, $d(y,z) = \varrho(y,z)$. Por tanto, (y_n) es de Cauchy en ϱ y, por ello que, $y_n \to y_\omega$ en ϱ para algún $y_\omega \in X$. Así, (y_n) converge en d hacia y_ω. Mostremos que (x_n) converge a y_ω en d. Sea $\epsilon > 0$, como (x_n) es de Cauchy respecto a d, existe n_1 tal que $d(x_k, x_m) < (\epsilon/2)$ para cada $k, m \geq n_1$. Como $y_n \to y_\omega$ en ϱ, entonces podemos garantizar que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ con $y_{n_2} = x_{n_3}$, para algún n_3 con $n_3 \geq n_1$ y $d(y_{n_2}, y_\omega) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, para todo x_n con $n \geq n_3$, se tiene que $d(x_n, y_\omega) \leq d(x_n, x_{n_3}) + d(x_{n_3}, y_\omega) < \epsilon$.

Sea $X = \{0, 1\}$ y definamos el mapeo $f : X \to X$ por $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Supongamos que ϱ es constante e igual a 1. Entonces ϱ es una d-métrica completa y f es una contracción relativa a d. Sin embargo, $\varrho(f(0), f(1)) = \varrho(0,0) = \varrho(0,1)$, lo cual implica que f no es una contracción relativa a ϱ. □

Los resultados recién establecidos nos brindan la oportunidad de presentar una prueba del Teorema 3.76, usando el Teorema 3.53.

Prueba del Teorema 3.76. Sea (X, ϱ) un espacio d-métrico completo y sea f una contracción relativa a ϱ. Considerando a d como la métrica asociada a ϱ, se infiere que d es una métrica completa y f es una contrcción relativa a d. Por tanto, del Teorema 3.53, se sigue que f tiene un único punto-fijo. □

3.3.3. Dominios como gums

La intención que se planteará en esta sección será la de introducir los dominios de Scott en los espacios ultramétricos, donde los dominios usualmente están dotados con la topología de Scott, sin embargo los dominios pueden ser dotados con la estructura de un espacio ultramétrico esféricamente completo. Cabe destacar que tal forma de estudiar los dominios es poco usual en la teoría de dominios pero, como ya se ha mencionado, uno de los principales objetivos que se planteó fue considerar una gran variedad de las funciones distancia (incluyendo ultramétricas generalizadas) las cuales tengan aplicaciones en la programación lógica, así como en otras áreas de las ciencias de la computación.

Remitiéndonos a la Observación 3.58, tenemos que Γ_γ denota al conjunto $\{2^{-\alpha} \mid \alpha < \gamma\}$, ordenado por la relación $2^{-\alpha} < 2^{-\beta}$ si y solo si $\beta < \alpha$. De hecho, como ya se había hecho notar, tal ordenamiento es el dual del orden usual sobre γ. Sin ambargo, se trabajará con el ordenamiento dual del orden usual sobre γ en el conjunto Γ_γ debido a que nos será conveniente trabajar con este orden en el contexto de mapeos contractivos con factor contractivo $\frac{1}{2}$.

Definición 3.115. *Sea $r : D_c \to \gamma$ una función, llamada **función rango**, considérese al conjunto $\Gamma_{\gamma+1}$ y denótese $2^{-\gamma}$ por "0" . Definimos $\varrho_r : D \times D \to \Gamma_{\gamma+1}$ por $\varrho_r(x, y) = \inf\{2^{-\alpha} \mid (c \sqsubseteq x \text{ sii } c \sqsubseteq y) \text{ p.cada } c \in D_c \text{ con } r(c) < \alpha\}$.*

Se verifica que (D, ϱ_r) es un espacio ultramétrico generalizado, por ello que llamaremos a ϱ_r la **ultramétrica generalizada inducida por la función rango** r. La idea de distancia que encontramos en la función ϱ_r es que dados dos elementos en el dominio, díganse x y y, se dice que están relativamente cerca uno del otro si ambos "dominan" los mismos elementos compactos hasta cierto punto, luego mientras mayor sea el rango en el que coinciden más cercanos diremos que se encuentran x y y. Además, mostraremos que (D, ϱ_r) es un espacio esféricamente completo, donde al probar tal afirmación no se utiliza la existencia de un elemento bottom en D, por lo que tal requerimiento puede ser omitido. La idea principal de tal prueba es capturada en el siguiente Lema el cual muestra como cadenas de bolas dan lugar a cadenas de elementos en el dominio. Esto último dependerá de dos hechos principalmente que se siguen de manera inmediata a partir del Lema 3.62:

1. Si $\gamma \leq \delta$ y $x \in B_\delta(y)$, entonces $B_\gamma(x) \subseteq B_\delta(y)$.
2. Si $B_\gamma(x) \subset B_\delta(y)$, entonces $\delta \not\leq \gamma$ (así, $\gamma < \delta$ si Γ es totalmente ordenado).

Como notación para las siguientes pruebas denotaremos la bola $B_{2^{-\alpha}}(x)$ por $B^\alpha(x)$.

Lema 3.116. *Sean $B^\alpha(x)$ y $B^\beta(y)$ bolas arbitrarias en (D, ϱ_r), entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. *Para cada $z \in B^\beta(y)$, tenemos que $\{c \in approx(z) \mid r(c) < \beta\} = \{c \in approx(y) \mid r(c) < \beta\}$.*
2. *$B_\beta = \bigsqcup\{c \in approx(y) \mid r(c) < \beta\}$ y $B_\alpha = \bigsqcup\{c \in approx(x) \mid r(c) < \beta\}$ existen.*
3. *$B_\beta \in B^\beta(y)$ y $B_\alpha \in B^\alpha(x)$.*
4. *Siempre que $B^\alpha(x) \subseteq B^\beta(y)$, entonces $B_\beta \sqsubseteq B_\alpha$.*

Demostración.

1. Como $\varrho_r(z, y) \leq 2^{-\beta}$, entonces de manera inmediata se tiene el resultado, a partir de la Definición de ϱ_r.
2. Como el conjunto $\{c \in approx(z) \mid r(c) < \beta\}$ está acotado por z, para cualquier z y β, entonces al ser D consistentemente completo (A.10) se tiene el resultado.

3. Por Definición, se tiene que $B_\beta \sqsubseteq y$. Luego, como B_β y y coinciden sobre todos los elementos $c \in D_c$ con $r(c) < \beta$, entonces la primera parte de (3) se cumple. Análogamente se cumple la segunda parte en (3).

4. Nótese que $x \in B^\beta(y)$, de ahí que, usando (2) del Lema 3.62 se tiene que $B^\beta(y) = B^\beta(x)$ y, por ello que, la hipótesis puede ser reescrita como $B^\alpha(x) \subseteq B^\beta(x)$. Consideremos los casos siguientes.

   C.1 $\beta \leq \alpha$. Entonces, usndo (1) y el hecho que $x \in B^\beta(y)$, tenemos que $B_\beta = \bigsqcup\{c \in approx(y) \mid r(c) < \beta\} = \bigsqcup\{c \in approx(x) \mid r(c) < \beta\} \sqsubseteq \bigsqcup\{c \in approx(x) \mid r(c) < \alpha\} = B_\alpha$.

   C.2 $\alpha < \beta$. Entonces no es posible tener que $B^\alpha(x) \subset B^\beta(x)$ y, por tanto, $B^\alpha(x) = B^\beta(x)$ de lo cual podemos implicar, usando (3) y (2) del Lema 3.62, $B^\alpha(B_\beta) = B^\beta(B_\beta) = B^\beta(B_\alpha)$. Luego, con el mismo argumento utilizado en C.1 y notando que $y \in B^\alpha(x)$, tenemos que $B_\alpha \sqsubseteq B_\beta$. Mostremos que $B_\alpha = B_\beta$. Supongamos que $B_\alpha \sqsubset B_\beta$, luego dado que cualquier punto en la bola es su centro, podemos tomar $z = B_\beta$ en (2), para tener que $B_\beta = \bigsqcup\{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \beta\}$ y $B_\alpha = \bigsqcup\{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \alpha\}$. Así, por la suposición hecha, tenemos que $\bigsqcup\{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \alpha\} \sqsubset \bigsqcup\{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \beta\}$. Como $\{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \alpha\} \subseteq \{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \beta\}$, existe algún $d \in \{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \beta\}$ tal que $d \not\sqsubseteq \bigsqcup\{c \in approx(B_\beta) \mid r(c) < \alpha\} = B_\alpha$. Por lo tanto, existe un elemento $d \in D_c$ con $r(d) < \beta$ tal que $d \not\sqsubseteq B_\alpha$ y $d \sqsubseteq B_\beta$, lo cual contradice el hecho que $\varrho_r(B_\alpha, B_\beta) \leq 2^{-\beta}$. Así, $B_\alpha \not\sqsubset B_\beta$. Finalmente, al tener que $B_\alpha = B_\beta$, se implica que $B_\beta \sqsubseteq B_\alpha$.

□

Teorema 3.117. *El espacio ultramétrico (D, ϱ_r) es esféricamente completo.*

Demostración. Por el Lema 3.116 podemos garantizar que cada cadena de bolas $(B^\alpha(x_\alpha))$ en D da lugar a una cadena (B_α) en el orden inverso en D. Sean $B = \bigsqcup B_\alpha$ y $B^\alpha(x_\alpha)$ una bola arbitraria en la cadena. Es suficiente mostrar que $B \in B^\alpha(x_\alpha)$. Como $B_\alpha \in B^\alpha(x_\alpha)$, tenemos que $\varrho_r(B_\alpha, x_\alpha) \leq 2^{-\alpha}$, pero ϱ_r es una ultramétrica generalizada, de ahí que es suficiente mostrar que $\varrho_r(B, B_\alpha) \leq 2^{-\alpha}$. Notemos que para cada elemento compacto $c \sqsubseteq B_\alpha$, se tiene que $c \sqsubseteq B$ por la construcción de B. Ahora, sea $c \sqsubseteq B$ con $c \in D_c$ y $r(c) < \alpha$. Veamos que

$c \sqsubseteq B_\alpha$. Dado que c es compacto y $c \sqsubseteq B$, existe B_β en la cadena con $c \sqsubseteq B_\beta$. Si $B^\alpha(x_\alpha) \subseteq B^\beta(x_\beta)$, entonces del Lema 3.116 se tiene que, $B_\beta \sqsubseteq B_\alpha$. Y, por tanto, $c \sqsubseteq B_\alpha$. Si $B^\beta(x_\beta) \subset B^\alpha(x_\alpha)$, entonces $\alpha < \beta$ y, como $c \sqsubseteq B_\beta$, se observa que c es un elemento del conjunto $\{c \in approx(x_\beta) \mid r(c) < \alpha\} = \{c \in approx(x_\alpha) \mid r(c) < \alpha\}$. Como B_α es el supremos de este último conjunto, tenemos que $c \sqsubseteq B_\alpha$, finalizando la prueba. □

3.3.4. GUMS y Cadenas-cpo

En esta sección invertiremos el punto de vista de la sección previa, es decir, asociaremos una cadena-cpo con algún espacio ultramétrico generalizado (X, ϱ, Γ) cuyo conjunto distancia Γ, es un ordinal dotado con el orden dual considerado en la sección anterior. Así, en el desarrollo de este apartado, $\Gamma = \Gamma_{\gamma+1}$ para algún ordinal γ con el ordenamiento descrito en la Observación 3.58. Por último, como notación, llamaremos a tales espacios **gum con distancia ordinal**.

La motivación para adoptar tal punto de vista fue el de proporcionar una prueba, desde el punto de vista de la teoría de dominios, del Teorema de Prieβ-Crampe y Ribenboim (P-C&R). De hecho, probaremos el Teorema P-C&R utilizando el Teorema de Knaster-Tarski en el caso de gums con distancia ordinal. Desde el punto de vista práctico este tipo de espacios serán suficientes para los propositos planteados, dado que en las aplicaciones que se estudien todos los gums que se encuentren tendrán distancia ordinal por el hecho que estos surgen de mapeos de nivel.

El primer objetivo que se plantea es extender la noción de un espacio de bolas formales asociado a un espacio métrico dado [véase [18]], con un gum. Para ello, consideremos a (X, ϱ, Γ) un gums con distancia ordinal y $\mathcal{B}'X$ el conjunto de todas las parejas (x, α), con $x \in X$ y $\alpha \in \Gamma$. Se define una relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathcal{B}'X$ por $(x_1, \alpha_1) \sim (x_2, \alpha_2)$ si y solo si $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\varrho(x_1, x_2) \leq \alpha_1$. El espacio cociente $\mathcal{B}X = \mathcal{B}'X/\sim$, será llamado el **espacio de bolas formales asociado con** (X, ϱ, Γ), el cual lleva un orden $\sqsubseteq$ bien definido (sobre los representantes de las clases de equivalencia) por medio de $(x, \alpha) \sqsubseteq (y, \beta)$ si y solo si $\varrho(x, y) \leq \alpha$ y $\beta \leq \alpha$. Denotaremos la clase de equivalencia de (x, α) por $[(x, \alpha)]$, notando que el uso del mismo símbolo $\sqsubseteq$ entre clases de equivalencia y sus representantes no debe causar confusión alguna.

Proposición 3.118. *El conjunto $\mathcal{B}X$ está ordenado parcialmente por $\sqsubseteq$. Más aún, X es esféricamente completo si y solo si, $\mathcal{B}X$ es una cadena completa.*

Demostración. Sin ninguna dificultad se puede mostrar que $(\mathcal{B}X, \sqsubseteq)$ es un copo. $(\Rightarrow)$ Sea $[(x_\beta, \beta)]$ una cadena ascendente en $\mathcal{B}X$. Entonces

$B_\beta(x_\beta)$ es una cadena de bolas en X con intersección no vacía, digamos $x \in \bigcap B_\beta(x_\beta)$. De donde se implica que $\varrho(x_\beta, x) \leq \beta$, para cada β. Por tanto, la cadena $[(x_\beta, \beta)]$ en $\mathcal{B}X$ tiene a $[(x, 0)]$ como una cota superior. Luego, consideremos el conjunto A de todos los $\alpha \in \Gamma$ tal que $[(x, \alpha)]$ es una cota superior de $[(x_\beta, \beta)]$. Dado que solo se han considerado distancias ordinales, el conjunto A tiene un supremo γ y, por tanto, $[(x, \gamma)]$ es la mínima cota superior de la cadena $[(x_\beta, \beta)]$. $(\Leftarrow)$ Supongamos que $\mathcal{B}X$ es una cadena completa y $(B_\beta(x_\beta))_{\beta\in\Lambda}$ es una cadena de bolas en X, donde $\Lambda \subseteq \Gamma$. Entonces $[(x_\beta, \beta)]$ es una cadena ascendente en $\mathcal{B}X$, la cual tiene una cota superior (x, γ). Luego, por el Lema 3.62 tenemos que $B_\gamma(x) \subseteq B_\beta(x_\beta)$ para todo β. Por tanto, $B_\gamma(x) \subseteq \bigcap_{\beta\in\Lambda} B_\beta(x_\beta)$. □

Proposición 3.119. *Sea $\iota : X \to \mathcal{B}X$ una función, donde $\iota(x) = [(x, 0)]$ para cada $x \in X$. Entonces, ι es inyectiva y $\iota(X)$ es el conjunto de todos los elementos máximales de $\mathcal{B}X$.*

Demostración. La inyectividad de la función ι se sigue de U_2 en 3.57. Por último, basta observar que los elementos máximales de $\mathcal{B}X$ son elementos de la forma $[(x, 0)]$ y, con ello, finalizando la prueba. □

Ahora, supongamos que f es una contracción estricta sobre un gums con distancia ordinal, dígase (X, ϱ, Γ). Usaremos f para inducir un mapeo, $\mathcal{B}f : \mathcal{B}X \to \mathcal{B}X$, definido como

$$\mathcal{B}f(x, 2^{-\alpha}) = \begin{cases} (f(x), 2^{-(\alpha+1)}) & \text{si, } 2^{-\alpha} \neq 0 \\ (f(x), 0) & \text{si, } 2^{-\alpha} = 0. \end{cases}$$

Proposición 3.120. *Si f es una contracción estricta, entonces $\mathcal{B}f$ es monótona.*

Demostración. Sea $(x, 2^{-\alpha}) \sqsubseteq (y, 2^{-\beta})$. Entonces, tenemos que $\varrho(x, y) \leq 2^{-\alpha}$ y $\alpha \leq \beta$. Supongamos que $2^{-\alpha} = 0$, entonces el resultado se sigue de manera inmediata. Ahora, supongamos que $2^{-\alpha} \neq 0$. Bastará probar que $\varrho(f(x), f(y)) \leq 2^{-(\alpha+1)}$, lo cual se sigue a partir del hecho que f es una contracción estricta y los siguientes dos hechos, los cuales se demuestran sin ninguna dificultad:

- Si $2^\beta \neq 0$, entonces $\alpha + 1 \leq \beta + 1$.
- Si $2^{-\beta} = 0$ y $\alpha \neq \beta$, entonces $\alpha + 1 \leq \beta$.

Por tanto, $\mathcal{B}f$ es una función monótona. □

Prueba alternativa del Teorema 3.63. Sean (X, ϱ, Γ) un espacio gum con distancia ordinal esféricamente completo y $f : X \to X$ una contracción estricta. Entonces $\mathcal{B}X$ es una cadena-cpo y $\mathcal{B}f$ es un mapeo monótono sobre $\mathcal{B}X$. Dado $B_0 \in \mathcal{B}X$, denotemos por $\uparrow B_0$ el cono superior de B_0, es decir, el conjunto de todos los $B \in \mathcal{B}X$ tales que $B_0 \sqsubseteq B$.

Sea $x \in X$(arbitrario), supongamos sin pérdida de generalidad que $x \neq f(x)$ y, también, dado $\alpha \in ORD$ tal que $\varrho(x, f(x)) = 2^{-\alpha}$. Entonces, $(x, 2^{-\alpha}) \sqsubseteq (f(x), 2^{-\alpha+1})$ y, por la monotonía de $\mathcal{B}f$ se tiene que, $\mathcal{B}f$ mapea $\uparrow [(x, 2^{-\alpha})]$ en si mismo. Como $\uparrow [(x, 2^{-\alpha})]$ es una cadena-cpo con elemento mínimo (bottom) $[(x, 2^{-\alpha})]$, entonces se sigue del Teorema A.18 que $\mathcal{B}f$ tiene un único punto-fijo en $\uparrow [(x, 2^{-\alpha})]$, el cual denotaremos por B_0. Obsérvese que por la definición de $\mathcal{B}f$, se tiene que B_0 es un elemento máximal en $\mathcal{B}X$ y, por ello, tiene la forma de $[(x_0, 0)]$. Así, a partir de $\mathcal{B}f[(x_0, 0)] = [(x_0, 0)]$, se tiene que $f(x_0) = X_0$, es decir, x_0 es un punto-fijo de f.

Ahora, supongamos que existe $y \neq x_0$ otro punto fijo de f. Entonces $\varrho(x_0, y) = \varrho(f(x_0), f(y)) < \varrho(x_0, y)$ dado que f es una contracción estricta, lo cual es una contradicción. Por tanto, f tiene un único punto-fijo. □

Por último, notemos que las construcciones usadas para emitir dominios en un espacio gum (como se realizo en 3.3.3) y para emitir ultramétricas generalizadas en cadenas-cpo (véase 3.3.4) no son inversas una de la otra. Por ello, la relación "exacta" entre ambas aún queda por ser determinada.

3.3.5. GUMS y d-GUMS

Estudiaremos la relación entre gums y d-gums proporcionando algunos resultados similares a aquellos presentados en el apartado 3.3.2. De hecho, el objetivo principal será estudiar la relación entre el Teorema 3.63 y su versión dislocada 3.77.

Proposición 3.121. *Sea $(X\varrho, \Gamma)$ un d-gums y defínase $d : X \times X \to \Gamma$ como $d(x, y) = \varrho(x, y)$, si $x \neq y$ y $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$. Entonces, d es una ultramétrica generalizada.*

Demostración. A partir de la Proposición 3.110, se cumple $U_1, \ldots, U_4$ de la Definición 3.57. Por tanto, se tiene el resultado. □

Definición 3.122. *La ultramétrica generalizada d (que se definió en 3.121) definida a partir de la d-ultramétrica generalizada ϱ, es llamada la **ultramétrica generalizada asociada con** ϱ.*

Proposición 3.123. *Sea (X, ϱ, Γ) un d-gums y denótese por d a la ultramétrica generalizada asociada con ϱ. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. *Si d es esféricamente completo, entonces ϱ es esféricamente completo.*

2. *Si f es una contracción estricta relativa a ϱ, entonces f es una contracción estricta relativa a d.*

Demostración. Veamos que cada bola no vacía en ϱ contiene a todos sus puntos medios. En efecto, sea $B(x) = \{y \in X \mid \varrho(x,y)\} \neq \emptyset$ una bola no vacía en ϱ con punto medio $x \in X$. Entonces, $\exists z \in B(x)$. Luego, por U_4 de 3.57, se tiene que $\varrho(x,x) \leq \alpha$. De lo anterior se tiene que $x \in B(x)$. Además, se tiene que cada bola no vacía en ϱ es también una bola respecto a d.

1. Sea $\mathfrak{B}$ una cadena no vacía de bolas en ϱ. Entonces, $\mathfrak{B}$ es una cadena de bolas no vacía en d, en donde se posee la propiedad de ser esféricamente completo. Lo cual implica que $\mathfrak{B}$ tiene intersección no vacía.

2. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ y supongamos que $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x,y)$. Si $f(x) = f(y)$, entonces $d(f(x), f(y)) = 0$ y, por tanto, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Si $f(x) \neq f(y)$, entonces $x \neq y$, de lo cual se implica que $d(f(x), f(y)) = \varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x,y) = d(x,y)$. Por tanto, f es una contracción estricta relativa a d.

□

Proposición 3.124. *Sean (X, ϱ, Γ) un d-gums esféricamente completo y d la ultramétrica generalizada asociada con ϱ. Entonces d es esféricamente completo. Sin embargo, si f es una contracción estricta relativa a d, entonces f no necesariamente es una contracción estricta relativa a ϱ.*

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ una cadena de bolas relativas a d. Si $\mathfrak{B}$ contiene una bola, dígase $B = \{x\}$ para algún $x \in X$, entonces $x \in \bigcap \mathfrak{B}$. Supongamos que todas las bolas en $\mathfrak{B}$ tienen más de un punto.

Ahora, sea $B_\gamma(x_m) = \{x \in X \mid d(x, x_m) \leq \gamma\}$ una bola en $\mathfrak{B}$. Consideremos $z \in B_\gamma(x)$ con $z \neq x_m$. Entonces $\varrho(x_m, x_m) \leq \gamma$ dado que $\varrho(z, x_m) = d(z, x_m) \leq \gamma$. Por tanto, $B_\gamma(x) = \{x \mid \varrho(x, x_m) \leq \gamma\}$. Lo anterior implica que $\mathfrak{B}$ también es una cadena de bolas relativa a ϱ y, de ahí que, $\bigcap \mathfrak{B} \neq \emptyset$ por ser el espacio relativo a ϱ esféricamente completo.

Por último, sea $X = \{0,1\}$ y defínase un mapeo $f : X \to X$ por $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Supongamos que ϱ es una constante igual a "1" . Entonces, sin ninguna dificultad se puede mostrar que, $(X, \varrho, \{0,1\})$ con $0 < 1$ es un d-gums esféricamente completo y f es una contracción relativa a d. Sin embargo, $\varrho(f(0), f(1)) = \varrho(0,0) = \varrho(0,1)$, es decir, f no es una contracción estricta relativa a ϱ. □

Prueba alternativa del Teorema 3.77. Utilizando la notación de los Teoremas 3.63 y 3.77 y, usando la Proposición 3.121, se tiene que (X, d, Γ) es un gums. Además, por la Proposición 3.124 este espacio es esféricamente completo. Luego, por la Proposición 3.123, la función f es una contracción estricta relativa a d. Por último, del Teorema 3.63, f tiene un único punto-fijo. $\square$

Proposición 3.125. *Sean (X, ϱ, Γ) un gums con distancia ordinal y $u : X \to \Gamma$ una función. Entonces la función distancia ϱ definida por $\varrho(x, y) = \max\{d(x, y), u(x), u(y)\}$ es una ultramétrica generalizada dislocada sobre X.*

Demostración. U_2 y U_3 de la Definición 3.57 son inmediatas. Para U_4, se sigue de manera análoga a lo realizado en la Proposición 3.110. $\square$

Proposición 3.126. *Sean (X, d, Γ) un gums con distancia ordinal, $z \in X$ y defínase ϱ por $\varrho(x, y) = \max\{d(x, z), d(y, z)\}$. Entonces (X, ϱ, Γ) es un d-gums esféricamente completo.*

Demostración. De manera inmediata se verifica que ϱ es una d-gum. Luego, obsérvese que cada bola no vacía en (X, ϱ, Γ) contiene al punto z, lo cual es suficiente para garantizar que el espacio es esféricamente completo. $\square$

Capítulo 4

Semántica de los Modelos Soportados

A través de las diferentes semánticas para programas normales discutidas en el Capítulo 2, se observa que la semántica de los modelos soportados (en su forma 2 ó 3 valuada) será la de mayor relevancia dado que los modelos estables y perfectos son modelos soportados 2-valuados mientras que los modelos bien-fundados y los débilmente perfectos son modelos soportados 3-valuados. Además, como se mostró en el Teorema 2.81, si el modelo de Fitting para un programa P es total, entonces P tiene un único modelo soportado 2-valuado el cual coincide con el único modelo asignado a P por la semántica de Fitting, la bien-fundada, la débilmente perfecta y la estable.

Por tanto, aquellos programas que posean un único modelo soportado junto con aquellos que tengan un modelo de Fitting total pueden ser considerados como fundamentales en el entendimiento de la semántica de programas lógicos. Los programas con un único modelo soportado los llamaremos **determinados de manera única**, mientras que los que posean un modelo de Fitting total serán llamados **programas ϕ-accesibles**.

4.1. Modelos Soportados 2-valuados

En esta sección consideraremos los modelos soportados 2-valuados y aplicaremos los teoremas de punto-fijo sobre métricas generalizadas para mostrar que algunas clases de programas están determinadas de manera única. Por ello la importancia de tratar con teoremas de punto-fijo más generales ya que estos nos permitirán tratar con clases de programas más generales y de ahí que la jerarquía de los Teoremas de punto-fijo exhibida en el apartado 3.3.1 dará lugar a una jerarquía en las clases de programas, donde cada una de estas tendrán la propiedad siguiente: cada programa en la clase tiene un único modelo soportado. Tales clases de programas serán llamadas **clases de modelos soportados de manera única**.

A partir de la Proposición 2.17 sabemos que los modelos soportados (2-valuados) para un programa P son los puntos fijos del correspondiente operador de un solo paso T_P. Además, del Ejemplo 2.14 se sabe que T_P en general no es monótono. Estos hechos tienen la consecuencia particular que los Teoremas de punto-fijo del Apéndice 1 para operadores monótonos no son aplicables sobre T_P. Así, la alternativa empleada en este trabajo se encuentra mediante la aplicación de los Teoremas de punto-fijo utilizando métricas generalizadas, los cuales son aplicables pese a la no monotonocidad del operador de un solo paso.

4.1.1. Programas Localmente Jerárquicos y Acíclicos

Sea Even del Ejemplo 2.3, sin niguna dificultad se puede computar el operador de un solo paso T_{Even}, obteniendo como resultado (véase el Ejemplo 3.35) lo siguiente:

$$T^{2n}_{Even} = \{even(s^{2k}(0)) \mid 0 \leq k < n\}$$
$$T^{2n+1}_{Even} = B_{Even} \setminus \{even(s^{2k+1}(0)) \mid 0 \leq k < n\}.$$

Se observa que la sucesión de iteraciones se alterna en cierta forma, es decir, las iteraciones con "potencia par" generan los átomos en el modelo soportado $M = \{even(s^{2n}(0)) \mid n \in \mathbb{N}\}$, mientras que las iteraciones con "potencia impar" eliminan aquellos átomos que no pertenecen a M. El orden en el cual los átomos son generados o eliminados es de tal manera que los átomos con más ocurrencias del símbolo funcional "s" son generados o eliminados más adelante. Esto corresponde a la estructura del programa Even, cuyas reglas reflejan lo dicho en el sentido que un átomo en la cabeza de una instancia base, de la segunda cláusula del Programa, siempre contiene uno o más símbolos funcionales que el cuerpo correspondiente de la cláusula. Por tanto, en la siguiente Definición se plasma la idea que se encuantra detrás de lo mencionado, es decir, las iteraciones del operador de un solo paso pueden en cierta forma ser controladas, si existe una dependencia fuerte entre la cabeza de la cláusula y su cuerpo correspondiente.

Definición 4.1. *Sea P un programa normal. P es llamado* ***localmente jerárquico*** *[véase[10]], si para algún ordinal α, existe un mapeo de nivel $l : B_P \to \alpha$ tal que para cada $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ y para todo*

$i = 1, \ldots, n$ se tiene que, $l(A) > l(L_i)$. Además, si $\alpha = \omega$ entonces P es llamado ***acíclico****[véase [11]].*

Como ejemplo de lo anterior se tiene al programa Even el cual es acíclico, como se puede observar al definir $l : B_P \to \omega$ por $l(even(s^k(0))) = k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.2. *Consideremos al programa ExistsEven, el cual puede ser considerado como una extensión del Programa Even, que consiste de las siguientes cláusulas.*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{nat}(0) &\leftarrow \\
\boldsymbol{nat}(s(X)) &\leftarrow \boldsymbol{nat}(X) \\
\boldsymbol{even}(0) &\leftarrow \\
\boldsymbol{even}(s(X)) &\leftarrow \neg \boldsymbol{even}(X) \\
\boldsymbol{existsEven} &\leftarrow \boldsymbol{nat}(X),\ \boldsymbol{even}(X)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que la idea básica del programa es exhibir un esquema en programación del tipo “prueba y genera”. Esto es, si “Prolog” es llamado mediante la pregunta,

$$? \leftarrow \boldsymbol{existseven},$$

entonces el intérprete “genera” todas las instancias de $\boldsymbol{nat}(X)$ y “prueba” para cada instancia de X cuando éste está, o no, al alcance del predicado ***even*** [1]*. Nótese que el subprograma de ExistsEven, que consiste de las primeras 4 cláusulas, es acíclico respecto al mapeo de nivel l con $l(\boldsymbol{even}(s^k(0))) = l(\boldsymbol{nat}(s^k(0))) = k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Más aún, para cualquier mapeo de nivel respecto a el cual este subprograma es acíclico debe tener un codominio infinito. En consecuencia, ExistEven no es acíclico pero es localmente jerárquico como se puede verificar extendiendo el mapeo de nivel por $l(\boldsymbol{existseven}) = \omega$.*

En este momento, el objetivo consiste en aplicar los Teoremas de punto-fijo para métricas generalizadas que se revisaron en el capítulo anterior, sobre los programas localmente jerárquicos y acíclicos, es decir, construir una métrica (generalizada) sobre el conjunto de todas las interpretaciones para un programa de tal manera que el operador correspondiente de un solo paso satisfaga alguna propiedad contractiva. Para ello, nos guiaremos en una construcción dada en el apartado 3.3.3 con breves modificaciones.

Definición 4.3. *Sean P un programa normal y $l : B_P \to \gamma$ un mapeo de nivel para P. Para cada ordinal α consideremos los símbolos $2^{-\alpha}$ y*

[1] Es claro que el generador `nat` y la prueba even pueden ser reemplazados.

defínase $\Gamma_l = \{2^{-\alpha} \mid \alpha \leq \gamma\}$ *(como se realizó en 3.3.3). El conjunto* Γ_l *es ordenado por,* $2^{-\alpha} < 2^{-\beta}$ *si y solo si* $\beta < \alpha$*. Además,* $2^{-\alpha}$ *se denota por* 0*. Con la notación establecida se tiene que* $\Gamma_l = \Gamma_{\gamma+1}$ [2]*. Finalmente, se define un mapeo* $d_l : I_P \times I_P \to \Gamma_l$ *por*

$$d_l(I, J) = \begin{cases} 0, & si\ J = I \\ 2^{-\alpha}, & si\ I \neq J \end{cases},$$

donde I *y* J *difieren sobre algún átomo base de nivel* α *pero coinciden sobre todos los átomos base de nivel* β *con* $\beta < \alpha$*.*

Nótese que en el caso $\gamma = \omega$, podemos identificar cada $2^{-n} \in \Gamma_l$ con la correspondiente potencia negativa de 2, es decir, $2^{-n} = \frac{1}{2^n} \in \mathbb{R}$ y $2^{-\omega} = 0$. Por tanto, d_l toma valores en el conjunto de los números reales.

Proposición 4.4. *Sean* P *un programa normal y* l *un mapeo de nivel. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si* P *es localmente jerárquico respecto a* l*, entonces* d_l *es una gum esféricamente completa.*

2. *Si* P *es acíclico respecto a* l*, entonces* d_l *es una ultramétrica completa.*

Demostración. Basta garantizar (1), lo cual haremos utilizando el Teorema 3.117. Para el mapeo de nivel dado l definimos la función rango r_l por $r_l(\emptyset) = 0$ y $r_l(I) = \max\{l(A) \mid A \in I\}$ para cada $\emptyset \neq I \in (I_P)_c$, donde identificamos cada elemento de $(I_P)_c$ con un subconjunto finito de B_P. La ultramétrica generalizada d_{r_l} inducida por r_l (véase Defınción 3.115) es esféricamente completa por el Teorema 3.117. Los mapeos d_{r_l} y d_l coinciden ya que para cada $I \in I_P$, tenemos que $I = \sup\{\{A\} \mid A \in I\}$ con el supremo siendo tomado respecto a la inclusión de conjuntos usual. $\square$

Ahora, veamos que bajo un estudio similar al que se hizo en 3.2.5 podemos recuperar la topología de "Cantor" a partir de "d_l".

Proposición 4.5. *Sean* P *un programa y* $l : B_P \to \omega$ *un mapeo de nivel tal que* $l^{-1}(n)$ *es un conjunto finito para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces* d_l *induce la topología de "Cantor"* Q *sobre* I_P*.*

Demostración. Sin dificultad alguna se puede mostrar usando la Proposición 3.34 lo siguiente: para cada $(I_n)_{n\in D} \subseteq I_P$, $(I_n)_{n\in D}$ converge en Q si, y solo si, $(I_n)_{n\in D}$ converge respecto a d_l. Por tanto se tiene el resultado. $\square$

[2]Véanse los apartados 3.3.3 y 3.3.4 donde se utilizó esta construcción para gums con distancia ordinal.

Finalmente, mostremos que el operador de un solo paso satisface una condición contractiva la cual nos permitirá aplicar el Teorema de PC-R o el mapeo contractivo de Banach.

Teorema 4.6. *Sean P un programa y l un mapeo de nivel. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. *Si P es localmente jerárquico respecto a l, entonces T_P es una contracción estricta.*

2. *Si P es acíclico respecto a l, entonces T_P es una contracción.*

Además, en ambos casos, T_P tiene un único punto fijo y P tiene un único modelo soportado.

Demostración.

1. Sean $I_1, I_2 \in I_P$ tales que $d_l(I_1, I_2) = 2^{-\alpha}$ para algún ordinal α.

    a) Supongamos que $\alpha = 0$. Sea $A \in T_P(I_1)$ con $l(A) = 0$. Como P es localmente jerárquico, A es la cabeza de alguna cláusula unitaria en la $base(P)$. De lo anterior se tiene que $A \in T_P(I_2)$. Por el mismo argumento, si $A \in T_P(I_2)$ con $l(A) = 0$, se tiene que $A \in T_P(I_1)$. Por tanto, $T_P(I_1)$ y $T_P(I_2)$ coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que 1 y por ello que $d_l(T_P(I_1), T_P(I_2)) \leq 2^{-1} < 2^{-0} = d_l(I_1, I_2)$.

    b) Supongamos que $\alpha > 0$. Entonces I_1 e I_2 difieren en algún elemento en B_P con nivel α pero coinciden sobre todos los átomos base de nivel menor que α. Sea $A \in T_P(I_1)$ con $l(A) \leq \alpha$. Entonces existe $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{l_1} \in Base(P)$, donde $k_1, l_1 \geq 0$ de tal manera que para todo j, k se tiene que $A_k \in I_1$ y $B_j \notin I_1$. Como P es localmente jeráruquico e I_1, I_2 coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que α, se sigue que para todo j, k se tiene que $a_k \in I_2$ y $B_j \notin I_2$. Por tanto, $A \in T_P(I_2)$. Por el mismo argumento, si $A \in T_P(I_2)$ con $l(A) \leq \alpha$, entonces $A \in T_P(I_1)$. Así, se tiene que $T_P(I_1)$ y $T_P(I_2)$ coinciden sobre todos los átomos de nivel menor o igual que α, de ahí que $d_l(T_P(I_1), T_P(I_2)) \leq 2^{-\alpha+1} < 2^{-\alpha} = d_l(I_1, I_2)$.

    Por tanto, T_P es una contracción estricta y por el Teorema 3.63 se tiene que T_P posee un único punto-fijo y, por tanto, P tiene un único modelo soportado.

2. La prueba dada para (1) fácilmente se puede adaptar para obtener (2). El operador T_P resulta ser contractivo, con factor contractivo $\frac{1}{2}$ y aplicando el Teorema 3.53 se tiene el resultado.

□

Ejemplo 4.7. *Sea el programa Tweety1 de los Ejemplos 2.2 y 2.18. De manera inmediata se verifica que Tweety1 es un programa acíclico con mapeo de nivel* $l(\texttt{pingüino}(X)) = 0,\ l(\texttt{ave}(X)) = 1$ *y* $l(\texttt{vuela}(X)) = 2$*, donde* $X \in \{\texttt{bob},\ \texttt{tweety}\}$*. Para* $I_0 = \{\texttt{ave(tweety)}\}$*, se tiene que:*

$$\begin{aligned} I_1 = T_{Tweety1}(I_0) &= \{\texttt{pingüino(tweety), ave(bob),}\\ &\quad \texttt{vuela(tweety)}\}\\ I_2 = T_{Tweety1}(I_1) &= \{\texttt{pingüino(tweety), ave(bob),}\\ &\quad \texttt{ave(tweety), vuela(bob)}\}\\ I_3 = T_{Tweety1}(I_2) &= I_2. \end{aligned}$$

4.1.2. Programas Aceptables

La idea básica que se encuentra en los programas acíclicos fue extendida al tener en cuenta que los sistemas de programación lógica, tales como PROLOG, evalúan los cuerpos de las cláusulas de izquierda a derecha llevando con ello al estudio de los programas aceptables[3], que serán revisados en esta sección. Como se ha mencionado a lo largo del trabajo nos enfocaremos en los aspectos semánticos de los programas aceptables generalizando el enfoque de la sección anterior.

Antes de definir lo que entenderemos por un programa aceptable será necesario definir ciertos conjuntos que se pueden generar a partir de un programa dado. Sea P un programa y utilizando la relación "refiere a" que se definió en 2.48, diremos que A depende sobre B, si la pareja (A, B) pertenece a la clausura transitiva de la relación "refiere a" . Además, se define Neg_P como el conjunto de símbolos predicados en P los cuales ocurren en literales negativas pertenecientes al cuerpo de una cláusula en P. Así, se define $Neg_P^* = Neg_P \cup \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es el conjunto de todos los símbolos predicados en P sobre los cuales dependen los símbolos predicados en Neg_P. Por último, P^- denotará al conjunto de todas las cláusulas en P cuya cabeza contiene símbolos predicados de Neg_P^*.

Definición 4.8. *Sea P un programa. Diremos que P es* ***aceptable*** *respecto a algún ω-mapeo de nivel, $l : B_P \to \omega$, y alguna interpretación $I \in I_P$ si I es un modelo para P cuya restricción a los símbolos predicados en Neg_P^* es un modelo soportado para P^- y se cumple lo siguiente. Para cada $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ y para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que, si $I \models \bigwedge_{j=1}^{i-1} L_j$, entonces $l(A) > l(L_i)$.*

Como un ejemplo de este tipo de programas se puede revisar el Programa "Game" planteado en [34] y [5].

[3]Véase [7] y [4] como referencia base.

Ahora veremos que dado cualquier programa aceptable se puede realizar la construcción de una métrica dislocada completa respecto a la cual el operador de un solo paso, asociado con el programa, es una contracción. Para ello, consideremos a P un programa aceptable respecto al mapeo de nivel l y una interpetación I. Para cualquier $K \in I_P$ denotemos por K' al conjunto K restringido a los símbolos predicados en Neg^*_P. Definimos una función $f : I_P \to \mathbb{R}$ por $f(K) = 0$, si $K \setminus K' \subseteq I$ y como $f(K) = 2^{-n}$, si $K \setminus K' \nsubseteq I$, donde $n \geq 0$ es el entero más pequeño de tal manera que existe $A \in B_P$ con $l(A) = n$, $A \in K \setminus K'$ y $A \notin I$. Ahora, definamos otra función $u : I_P \to \mathbb{R}$[4] por $u(K) = \text{máx}\{f(K), d_l(K', I')\}$, donde d_l es la gum que se definio en 4.3. Finalmente, para cualesquiera $J, K \in I_P$, se define

$$\varrho(J, K) = \text{máx}\{d_l(J \setminus J', K \setminus K'), u(J), u(K)\}.$$

Así, para todo $J, K \in I_P$ se tiene que

$$\varrho(J, K) = \text{máx}\{d_l(J \setminus J', K \setminus K'), f(J), d_l(J', I'), f(K), d_l(K', I')\}.$$

Ahora, veamos que ϱ es una dum completa para lo cual utilizaremos la Proposición 3.110 pero antes se requerirá el siguiente lema.

Lema 4.9. *Sea $u(K) = \text{máx}\, f(K), d_l(K', I')$ para $K \in I_P$. Entonces u es continua como una función de (I_P, d_l) hacia $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $(K_m) \subseteq I_P$ sucesión la cual converge en d_l hacia algún $K \in I_P$. Veamos que $d_l(K'_m), I' \to d_l(K', I')$ y $f(K_m) \to f(K)$ cuando $m \to \infty$. Como $K_m \to K$ respecto a la métrica d_l, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq m_n$, K y K_m coinciden sobre todos los átomos de nivel menor o igual que n. Supongamos que $f(K) = 2^{-n_0}$ y $m \geq m_{n_0}$. Entonces K y K_m coinciden sobre todos los átomos de nivel menor o igual que n_0 y, por tanto, $K \setminus K' \neq \emptyset$ y $K_m \setminus K'_m \neq \emptyset$ coinciden sobre todos los átomos de nivel menor o igual que n_0. Por tanto, tenemos que $f(K_m) = 2^{-n_0} = f(K)$ para todo $m \geq m_{n_0}$. También, si $d_l(K', I') = 2^{-n_0}$, entonces $d_l(K'_m, I') = 2^{-n_0} = d_l(K', I')$ para todo $m \geq m_{n_0}$. De todo lo anterior, se tiene el resultado. □

Para cerrar esta sección veamos que el operador T_P es una contracción respecto a ϱ.

Teorema 4.10. *Sea P un programa el cual es aceptable respecto a algún mapeo de nivel l y una interpretación I. Entonces, ϱ es una dum completa y T_P es una contracción respecto a ϱ. En particular, P tiene un único modelo soportado M, donde $M = \text{lím}\, T^n_P(I_0)$ para cualquier $I_0 \in I_P$.*

[4] Usualmente se le conoce como función peso, véase [67].

Demostración. El mapeo ϱ es una dum completa por el Lema 4.9 y la Proposición 3.110. Por el Teorema 3.76, solo resta mostrar que T_P es una contracción respecto a ϱ. El argumento para esto es esencialmente el mismo que se dará en la prueba del Teoerema 4.12 por ello omitiremos agregarlo y con esto finalizando la prueba. □

4.1.3. Programas ϕ^* Accesibles

En la sección anterior se observó como el Teorema contractivo de Banach puede ser reemplazado por el Teorema de Matthew's al pasar de los programas acíclicos a los aceptables. De la misma manera el Teorema de P-C & R puede ser usado en lugar del Teorema de Banach al pasar de los programas acíclicos a los localmente jerárquicos. De esta manera, surge la pregunta de si se puede describir o no alguna clase de programa la cual generalice tanto a los programas aceptables y los localmente jerárquicos, de tal manera que el Teorema 3.77 (Teorema que generaliza tanto al Teorema de Matthew's y el de P-C&R) pueda ser aplicado. La introducción de tal clase de programa es lo que se revisará en esta sección.

Definición 4.11. *Un programa P es llamado ϕ^*-accesible*[5] *si, y solo si, existe l un mapeo de nivel e I un modelo ambos para P cuya restricción a Neg_P^* es un modelo soportado para P^-, de tal manera que se cumple la siguiente condición: para cada $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ se tiene que $I \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$ y $l(A) > l(L_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ o, ya sea que, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I \not\models L_i$ y $l(A) > l(L_i)$.*

De manera completamente análoga a lo que se realizó en la sección anterior podemos hacer la siguiente construcción. Sea P un programa ϕ^*-accesible respecto al mapeo de nivel $l : B_P \to \gamma$ y una interpretación I. Entonces, se realiza la misma construcción que se realizó en 4.1.2 con las únicas diferencias que las funciones f y u tomen valores en Γ_l. De esta manera se tiene que, para todo $J, K \in I_P$:

$$\varrho(J, K) = \text{máx}\{d_l(J \setminus J', K \setminus K'), f(J), d_l(J', I'), f(K), d_l(K', I')\}.$$

Simplificando la notación, introducimos las funciones d_1 y d_2, donde para todo $J, K \in I_P$, $d_1(J, K) = d_l(J', K')$ y $d_2(J, K) = d_l(J \setminus J', K \setminus K')$. Así, en estos términos, se tiene que para cada $J, K \in I_P$,

$$\varrho(J, K) = \text{máx}\{d_2(J, K), f(J), d_1(J, I), f(K), d_1(K, I)\}.$$

Teorema 4.12. *Sea P un programa normal ϕ^*-accesible. Entonces (I_P, ϱ) es un d-gums esféricamente completo y T_P es una contracción estricta respecto a ϱ. En particular, P tiene un único modelo soportado.*

[5] Véase [34].

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.125 que ϱ es una d-gum. Para vaerificar la completez esférica, sea $(\mathcal{B}_\alpha)$ una cadena decreciente de bolas en I_P con centro en I_α. Sea K el conjunto de todos los átomos básicos que eventualmente se encuentran en I_α. Mostremos que para cada bola $B_{2^{-\alpha}}(I_\alpha)$ en la cadena, tenemos que $d_l(I_\alpha, I) \leq 2^{-\alpha}$, lo cual será suficiente para mostrar que K es la intersección de la cadena. En efecto, fácilmente se verifica por la definición de ϱ que todo I_β con $\beta > \alpha$ coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que α. Así, por como se definio K tenemos que K y I_α coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que α, teniendo lo pedido. En lo que resta mostraremos que T_P es una contracción estricta respecto a ϱ, a partir de ello y utilizando el Teorema 3.77 se tendrá que T_P tiene un único punto fijo, de lo cual se tendra que P posee un único modelo soportado. Para mostrar que T_P es una contracción estricta respecto a ϱ, mostremos que para todo $J, K \in I_P$ con $J \neq K$, se tiene que $\varrho(T_P(J), T_P(K)) < \varrho(J, K)$. En particular se cumplen los siguientes resultados.

1. $d_1(T_P(J), I) < d_1(J, I)$ si $d_1(J, I) \neq 0$ y $d_1(T_P(J), I) = 0$ si $d_1(J, I) = 0$.

2. $f(T_P(J)), f(T_P(K)) < \varrho(J, K)$.

3. $d_2(T_P(J), T_P(K)) < \varrho(J, K)$.

Obsérvese que es suficiente probar (1), (2) y (3) para obtener lo pedido respecto a T_P. Por comodidad, identificaremos Neg_P^* con un subconjunto de B_P que contenga los símbolos predicados de Neg_P^*.

1. Notemos que $d_1(T_P(J), I) = d_l(T_P(J)', I') = d_l(T_{P^-}(J)', I') = d_1(T_{P^-}(J), I)$, dado que d_1 únicamente depende sobre los símbolos predicados en Neg_P^*. Sea $d_l(J', I') = 2^{-\alpha}$, mostremos que $d_l(T_{P^-}(J)', I') \leq 2^{-(\alpha+1)}$. Sabemos que J' e I' coinciden sobre todos los átomos básicos de nivel menor que α y difieren sobre algún átomo de nivel α. Por tanto, es suficiente mostrar que $T_{P^-}(J)'$ e I' coinciden sobre todos los átomos básicos de nivel menor o igual que α. Sea A un átomo básico en Neg_P^* con $l(A) \leq \alpha$ y supongamos que $T_{P^-}(J)$ e I difieren sobre A. Entonces, tenemos los siguientes casos.

   - $A \in T_{P^-}(J)$ y $A \notin I$. Entonces, existe una instancia básica $A \leftarrow L_1, \ldots, L_m$ de una cláusula en P^- tal que $J \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_m$. Como I es un modelo soportado para P^-, entonces I es un punto fijo de T_{P^-}. Luego, usando la Definción 4.11, tenemos que existe k tal que $I \not\models L_k$ y $l(L_k) < \alpha$. Notemos que el símbolo predicado en L_k se encuentra contenido en

Neg^*_P. De lo cual obtenemos que $I \not\models L_k$, $J \models L_k$ y $l(L_k) < \alpha$, contradiciendo nuestra suposición ya que J e I coinciden sobre todos los átomos en Neg^*_P de nivel menor que α.

- $A \in I$ y $A \notin T_{P^-}(J)$. Entonces, existe una instancia base $A \leftarrow L_1, \dots, L_m$ de una cláusula en P^- tal que $I \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_m$ y $l(A) > l(L_1), \dots, l(L_m)$, por la Definición 4.11. Pero, tenemos que $J \models L_1, \dots, L_m$ dado que J e I coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que α y en consecuencia $A \in T_{P^-}(J)$, lo cual contradice lo supuesto al inicio.

Las contradicciones anteriores establecen la primera parte que se garantiza en (1). La segunda parte en (1) se sigue por argumento completamente análogo y notando que $J' = I'$.

2. Basta con mostrar para algún caso, J o K, en nuestro caso consideremos K. Supongamos $\varrho(J, K) = 2^{-\alpha}$. Mostremos que $f(T_P(K)) \leq 2^{-(\alpha+1)}$, para lo cual mostraremos que, para cada $A \in T_P(K)$ que no se encuentre en Neg^*_P con $l(A) \leq \alpha$, se tiene que $A \in I$. Supongamos que $A \notin I$ para tal A. Como $A \in T_P(K)$, existe una instancia base $A \leftarrow L_1, \dots, L_m$ de una cláusula en P tal que $K \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_m$. Como $A \notin I$, existe k con $I \not\models L_k$ y $l(A) > l(L_k)$, por la Defeinción 4.11. Para lo cual tenemos los siguientes casos.

   - Si el símbolo predicado de L_k pertenece a Neg^*_P, entonces, dado que K e I coinciden sobre todos los átomos en Neg^*_P de nivel menor que α, se tiene que $K \not\models L_k$, lo cual contradice que $K \models L_1, \dots, L_m$.
   - Si el símbolo predicado en L_k no pertenece a Neg^*_P, entonces L_k es un átomo y como $f(K) \leq 2^{-\alpha}$, se tiene que $I \models L_k$, lo cual es una contradicción.

3. Sean $\varrho(J, K) = 2^{-\alpha}$. Supongamos que $A \notin Neg^*_P$ con $l(A) \leq \alpha$ y $A \in T_P(J)$. Por simetría, es suficiente mostrar que $A \in T_P(K)$. Como $A \in T_P(J)$, existe una instancia base $A \leftarrow L_1, \dots, L_m$ de una cláusula en P con $J \models L_1, \dots, L_m$. Para lo cual tenemos los siguientes casos.

   - Si $I \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_m$, entonces $l(L_k) < l(A) \leq \alpha$ para todo k y, como J y K coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que α, se tiene que $K \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_m$. Por tanto, $A \in T_P(K)$.
   - Si existe algún L_k tal que $I \not\models L_k$, entonces sin pérdida de generalidad $l(L_k) < l(A) \leq \alpha$ por la Definición 4.11. Ahora,

si el símbolo predicado de L_k pertenece a Neg^*_P, entonces, dado que $d_1(J,I) \leq 2^{-\alpha}$, se tiene que $J \models L_k$ y $I \models L_k$, lo cual es una contradicción. De manera análoga, si el símbolo predicado de L_k no pertenece a Neg^*_P, entonces L_k es un átomo y como $f(J) \leq 2^{-\alpha}$, se tiene que $I \models L_k$, lo cual es también una contradicción.

Por tanto, se tiene (3).

□

4.1.4. Programas ϕ-Accesibles

Como se hizo notar la Definición 4.11, sobre programas ϕ^*-accesibles, está relacionada con una caracterización sobre mapeos de nivel de la semántica de Fitting, dada en una sección anterior en el capítulo 2. En la presente sección trabajaremos con el enfoque presentado en el anterior apartado 4.1.3 pero para programas con un modelo de Fitting total [6]

Definición 4.13. *Un programa es llamado* ***ϕ-accesible*** *si el programa tiene un modelo de Fitting total.*

Por el Corolario 2.41, un programa P es ϕ-accesible si, y solo si, existe I modelo (2-valuado) y l mapeo de nivel (total) para P tal que P satisface (F) respecto a $I \cup \neg(B_P \setminus I)$ y l. La restricción de I al conjunto Neg^*_P es entonces un modelo soportado para P^-, de lo cual se sigue de manera inmediata que cada programa ϕ^*-accesible es ϕ-accesible. Sin embargo, un inconveniente que se encuentra al generalizar la clase de programas se exhibe en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.14. *Sea P el siguiente programa.*

$$\begin{array}{rcl} p(s^2(X)) & \leftarrow & p(X) \\ p(0) & \leftarrow & \\ p(s^4(0)) & \leftarrow & p(s^5(0)) \\ p(s^2(0)) & \leftarrow & p(s^3(0)) \end{array}$$

EL programa P es ϕ-accesible (e inclusive definite) respecto al modelo $B_P = \{p(s^n(0)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ y el mapeo de nivel $l : B_P \to \mathbb{N}$ definidio por $l(p(s^n(0))) = n$. Utilizando ϱ (d-gum) de la sección 4.1.3, tenemos que para cada $K = \{p(s^5(0))\}$ y $J = \{p(s^3(0))\}$, se tiene que $\varrho(K,J) = 2^{-3}$ y $\varrho(T_P(K), T_P(J)) = 2^{-2}$. Así, T_P no es una contracción relativa a ϱ.

Teorema 4.15. *Sea P un programa ϕ-accesible con modelo I y mapeo de nivel l tal que P satisface (F) respecto a $I \cup \neg(B_P \setminus I)$ y l. Entonces T_P es*

[6] Véase [34].

una contracción estricta sobre el d-gums esféricamente completo (I_P, ϱ), *donde para todo* $J, K \in I_P$ *tenemos que* $\varrho(J,K) = \text{máx}\, d_l(J,I), d_l(K,I)$. *En particular,* P *tiene un único modelo soportado.*

Demostración. Por la Proposición 3.126 tenemos que (I_P, ϱ) es un d-gums esféricamente completo. Veamos que T_P es una contracción estricta. Sean $J, K \in I_P$ y supongamos que $\varrho(J,K) = 2^{-\alpha}$. Entonces J, K e I coinciden sobre todos los átomos base de nivel menor que α. Mostremos que $T_P(J)$ e I coinciden sobre todos los átomos base de nivel menor o igual que α. Así, de manera similar se puede mostrar que $T_P(K)$ e I satsfacen lo mismo y, por tanto, basta considerar el primer caso. Sea $A \in T_P(J)$ con $l(A) \leq \alpha$, entonces existe $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ tal que $J \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$. Como I y J conciden sobre todos los átomos de nivel menor que α, no puede suceder (F_2), dado que $I \not\models L_i$ con $l(A) > l(L_i)$. Entonces, $J \not\models L_i$ y de ahí que $J \not\models L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$, lo cual es una contradicción. Recíprocamente, supongamos que $A \in I$. Como $I = T_P(I)$, existe $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ tal que $I \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$. Así, (F_1) se satisface y por ello se puede asumir que la cláusula $A \leftarrow$ también satisface que $l(A) > l(L_i)$ con $i = 1, \ldots, n$. Como I y J conciden sobre todos los átomos base de nivel menor que α, tenemos que $J \models L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$. Por tanto, $A \in T_P(J)$ como se requería. Utilizando el Teorema 3.77 se garantiza que el operador T_P tiene un único punto fijo M, de lo cual se tiene que P posee un único modelo soportado. □

4.2. Modelos Soportados 3-Valuados

En la sección 2.1.3, se obtuvo que los modelos 3-valuados soportados para un programa son los puntos fijos del correspondiente operador de Fitting, donde el mínimo punto fijo del operador, es decir, el mínimo modelo soportado 3-valuado para el programa, fue lo que llamamos el modelo de Fitting. Así, en esta sección, estudiaremos variantes del operador de Fitting y los relacionaremos a las clases de programas estudiadas en la sección anterior. Por tanto, $I_P = I_{P,3}$ y estará ordenado mediante el orden "knowledge" introducido en 1.3.1.

4.2.1. Operadores de Fitting

Iniciaremos con una caracterización alternativa del operador de Fitting, la cual es más sencilla de generalizar en otras lógicas. Esta caracterización involucrará una transformación en el programa, la cual introduciremos a continuación.

Sea P un programa y supongamos que $A \in B_P$, es la cabeza de alguna cláusula en $Base(P)$. Sea $\{A \leftarrow cuerpo_i \mid i \in \Lambda\}$ el conjunto de todas las cláusulas con cabeza A en $Base(P)$, donde Λ es un conjunto adecuado de índices. Entonces, tenemos lo siguiente.

- $A \leftarrow \bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$ será llamado la **pseudo-cláusula asociada con** A, donde A sera llamada cabeza de la pseudo-cláusula.

- $cuerpo_A = \bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$[7] será llamado el **cuerpo de la pseudo-cláusula**.

Notemos que la familia de *cuerpos*, $\{cuerpo_i \mid i \in \Lambda\}$, puede ser numerable y que $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$ está bien definido. A continuación asignaremos valores de verdad a los cuerpos de las pseudo-cláusulas respecto a una interpretación en distintas lógicas 3-valuadas. Digamos, si $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$ es uno de tales cuerpos, entonces $cuerpo_i$ es una conjunción (finita) para cualquier i y puede ser evaluado, de manera usual, por medio de las tablas de verdad para la conjunción. Consideraremos 3 diferentes conjunciones y 2 diferentes disyunciones, las cuales están dadas en las tablas de verdad en 4.2.1[8].

Tenemos lo siguiente respecto $\wedge_i$ y $\vee_j$.

- Para $\vee_1$, $p \vee_1 q$ es falsa si, y solo si, tanto p y q son falsos. $p \vee_1 q$ es cierta si, y solo si, alguno de p y q es cierto. Finalmente, $p \vee_1 q$ es indefinido en otro caso. Por tanto, se puede definir el valor de verdad del cuerpo de una pseudo-cláusula respecto a $\vee_1$ como sigue: El *cuerpo*, $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$, de una pseudo-cláusula es falso si, y solo si, todo $cuerpo_i$ es falso. $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$ es verdadero si, y solo si, uno de los $cuerpo_i$ es verdadero. Por último, $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$ está indefinido en otro caso.

- Para $\vee_2$, $p \vee_1 q$ es falsa si, y solo si, tanto p y q son falsos. $p \vee_1 q$ es indefinida si, y solo si, alguno de p y q es indefinida. Finalmente, $p \vee_1 q$ es verdadera en otro caso. Por tanto, como en el caso anterior, se define el valor de verdad del cuerpo de una pseudo-cláusula respecto a $\vee_2$: El *cuerpo*, $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$, de una pseudo-cláusula es falso si, y solo si, todo $cuerpo_i$ es falso. $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$ es indefinido si, y solo si, uno de los $cuerpo_i$ es indefinido. Por último, $\bigvee_{i\in\Lambda} cuerpo_i$ es verdadero en otro caso.

Como abuso de notación diremos que $A \leftarrow \bigvee_{i\in\emptyset} cuerpo_i$ es la pseudo-cláusula asociada con A, donde A es un átomo el cual no aparece como la cabeza de alguna cláusula en $Base(P)$ y, además, tomaremos que $\bigvee_{i\in\emptyset} cuerpo_i$ es falso tanto para $\wedge_1$ como para $\vee_1$. Así, de manera

[7]Como notación, algunas veces se denotara $cuerpo_i$ por C_i

[8]Nótese que $\wedge_1$ y $\vee_1$ son las exhibidas en la log.3-valuada fuerte de Kleene que encontramos en la tabla 1.2.2.

inmediata se observa que cada elemento $A \in B_P$ es la cabeza de la pseudo-cláusula asociada con A y que esta pseudo-cláusula está determinada de manera única por P para cualquier A dado.

p	q	$p \wedge_1 q$	$p \wedge_2 q$	$p \wedge_3 q$
u	u	u	u	u
u	f	f	u	u
u	t	u	u	u
f	u	f	f	u
f	f	f	f	f
f	t	f	f	f
t	u	u	u	u
t	f	f	f	f
t	t	t	t	t

Cuadro 4.1: Tipos de Conjunción

p	q	$p \vee_1 q$	$p \vee_2 q$
u	u	u	u
u	f	u	u
u	t	t	u
f	u	u	u
f	f	f	f
f	t	t	t
t	u	t	u
t	f	t	t
t	t	t	t

Cuadro 4.2: Tipos de Disyunción

p	$\neg p$
u	u
f	t
t	f

Cuadro 4.3: Negación

De manera conveniente se introduce la siguiente notación respecto a $\wedge_i$ y $\vee_j$. Sean $A \in B_P$, $cuerpo_A$ el cuerpo de la pseudo-cláusula asociada con A e I una interpretación 3-valuada. Entonces denotaremos el valor de verdad bajo I de $cuerpo_A$ respecto $\wedge_j$ y $\vee_k$ con $j = 1, 2, 3$ y $k = 1, 2$ por, $I_{j,k}(cuerpo_A)$.

El siguiente resultado se obtiene de manera inmediata a partir de las definiciones recién expuestas.

Proposición 4.16. *Sea P un programa, $A \in B_P$ e $I \in I_{P,3}$. Entonces $\phi_P(I)(A) = I_{1,1}(cuerpo_A)$, es decir, el valor de verdad asociado a A bajo $\phi_P(I)$ es el mismo dado por $I_{1,1}(cuerpo_A)$.*

Definición 4.17. *Sea P un programa. Para cualquier $j = 1, 2, 3$ y $k = 1, 2$ se define un operador $\phi_{P,j,k} : I_{P,3} \to I_{P,3}$ por $\phi_{P,j,k}(I)(A) = I_{j,k}(cuerpo_A)$.*

La siguiente proposición enumera las propiedades del operador ϕ_{P,j,k^-}, donde usaremos la notación de las interpretaciones 3-valuadas y 2-valuadas como conjuntos indicadores (1.3.2), y como subconjuntos de B_P respectivamente.

Proposición 4.18. *Sean P un programa y $J, K, I \in I_{P,3}$. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. *$\phi_{P,j,k}$ es monótono para cada $j = 1, 2, 3$ y $k = 1, 2$.*
2. *Si $I \subseteq J \subseteq K$, entonces $\phi_{P,3,k}(I) \subseteq \phi_{P,2,k}(J) \subseteq \phi_{P,1,k}(K)$ con $k = 1, 2$.*
3. *$\phi_{P,j,2}(I) \subseteq \phi_{P,j,1}(I)$ con $j = 1, 2, 3$.*
4. *$\phi_{P,j,2}(I)^- = \phi_{P,j,1}(I)^-$.*

Demostración. (1) La prueba es completamente análoga a la realizada en la Proposición 2.34. (2) Apartir de las tablas de verdad exhibidas en 4.2.1 se tiene que $I_{3,k}(cuerpo_A) \subseteq J_{2,k}(cuerpo_A) \subseteq K_{1,k}(cuerpo_A)$, lo cual es suficiente para garantizar lo pedido. (3) Análogo a (2). (4) Por (3) es suficiente mostrar que $\phi_{P,j,1}(I)^- \subseteq \phi_{P,j,2}(I)^-$. Sea $A \in B_P$ tal que $I_{j,1}(cuerpo_A) = I_{j,1}(\bigvee_{i \in \Lambda} cuerpo_i) = \mathbf{f}$. Entonces $I_{j,1}(cuerpo_i) = \mathbf{f}$ para todo i. Por tanto, $I_{j,2}(cuerpo_i) = \mathbf{f}$ para todo i, de ahí que $I_{j,2}(cuerpo_A) = \mathbf{f}$, como se requería. $\square$

La Proposición anterior exhibe que los operadores están encajados, en particular, para cada α ordinal y todo j, k se cumple lo siguiente:

$$\phi_{P,3,k} \uparrow \alpha \subseteq \phi_{P,2,k} \uparrow \alpha \subseteq \phi_{P,1,k} \uparrow \alpha,$$

$$\phi_{P,j,2} \uparrow \alpha \subseteq \phi_{P,j,1} \uparrow \alpha.$$

También podemos relacionar ϕ_P con el operador consecuencia inmediata 2-valuado, T_P, y de este modo extender la Proposición 2.44 como sigue.

Lema 4.19. *Sean P un programa, $I \in I_{P,2}$ y $K \in I_{P,3}$ tal que $K^+ \subseteq I \subseteq B_P \setminus K^-$. Entonces, $\phi_P(K)^+ \subseteq T_P(I) \subseteq B_p \setminus \phi_P(K)^-$. Además, si $K^+ = I = B_P \setminus K^-$, es decir K es total, entonces $\phi_P(K)^+ = T_P(I) = B_p \setminus \phi_P(K)^-$.*

Demostración. Sea $A \in \phi_P(K)^+$, entonces existe A tal que $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{k_2} \in Base(P)$ con $A_i \in K^+$ y $B_j \in K^-$ para todo $i = 1, \ldots, k_1$ y $j = 1, \ldots, k_2$. Por hipótesis se tiene que para estos valores de i y j, $A_i \in I$ y $B_j \notin I$. Por tanto, $A \in T_P(I)$. Para la segunda inclusión mostremos que $\phi_P(K)^- \subseteq B_P \setminus T_P(I)$, lo cual se trata de manera similar a lo mostrado en la primera inclusión, por tanto se omite su prueba. Por último, de la Proposición 2.44 se tiene la afirmación adicional y con ello se concluye la prueba. □

El siguiente Corolario se sigue de manera inmedita a partir del resultado anterior, el cual exhibe la relación que existe entre el operador ϕ, el operador T_P y la convergencia en Q.

Corolario 4.20. *Sean $I_n = T_P^n(I)$ para algún $I \in I_{P,2}$ y $K_n = \phi_P \uparrow n$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $K_n^+ \subseteq I_n \subseteq B_P \setminus K_n^-$.*

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Lema 4.19.

Proposición 4.21. *Sean P un programa y $(I^+, I^-) = I \in I_{P,3}$ interpretación total. Entonces, $I = \phi_P(I)$ si, y solo si, $I^+ = T_P(I^+)$. Más aún, si ϕ_P tiene un único punto fijo total M, entonces M^+ es el único punto fijo de T_P.*

Demostración. ($\Rightarrow$)Sea I un punto fijo de ϕ_P. Entonces $I^+ \subseteq I^+ \subseteq B_P \setminus I^-$ y por el Lema 4.19 tenemos que $I^+ = \phi_P(I)^+ \subseteq T_P(I^+) \subseteq B_P \setminus \phi_P(I)^- = B_P \setminus I^- = I^+$. ($\Leftarrow$) Sea I^+ un punto fijo de T_P. Por el Lema 4.19, tenemos que $\phi_P(I)^+ = T_P(I^+) = I^+ = B_P \setminus I^- = B_P \setminus \phi_P(I)^-$. Por tanto, $\phi_P(I)^+ = I^+$ y $\phi_P(I)^- = I^-$. □

La convergencia sobre iteraciones respecto a la topología de "Cantor" finalmente se puede describir como sigue.

Proposición 4.22. *Sea P un programa y supongamos que $M = \phi_P \uparrow \omega$ es total. Entonces, $T_P^n(\emptyset)$ converge a M en Q y M^+ es el único modelo soportado, M_P, para P.*

Demostración. Usando la notación del Corolario 4.20, tenemos que $M^+ = \bigcup K_n^+$ y $M^- = \bigcup K_n^-$. Como M es total, de las Proposiciones 3.34 y 4.21 tenemos que M^+ es el límite de la sucesión I_n en Q. De la totalidad de M se infiere que este es el único punto fijo de ϕ_P. Por lo tanto $M = (M^+, M^-)$, de ahi que M^+ es el único punto fijo de T_P por la Proposición 4.21. □

Observación 4.23. *Notemos que la Proposición 4.22 nos permite utilizar el Teorema 3.55 de la siguiente manera. Sea P un programa tal que $\phi_P \uparrow \omega$ es total, entonces $T_P^n(I)$ converge a $\phi_P \uparrow \omega$ en Q, para cada I. Además, $\phi_P \uparrow \omega$ es el único punto fijo de T_P. Luego, por el Teorema 3.55 se puede hallar una métrica respecto a la cual T_P es una contracción. Sin embargo, esta métrica en general no coincide con la métrica asociada a ϱ, ultramétrica dislocada a partir del Teorema 4.15,* *respecto a la cual T_P una vez más es una contracción bajo la condición dada sobre P.*

El siguiente Teorema es incluso más fuerte que el resultado mostrado en 4.22.

Teorema 4.24. *Sean P un programa, $j \in \{1, 2, 3\}$ y $k \in \{1, 2\}$. Supóngase que $M = \phi_{P,j,k} \uparrow \alpha$ es total para algún ordinal α. Entonces M^+ es el único modelo soportado 2-valuado para P. Más aún, la sucesión $(\phi_{P,j,k} \uparrow \alpha)_\beta$ converge a M^+ en la topología de "Cantor".*

Demostración. De las Proposiciones 4.18, 4.21 y por la totalidad de M, se tiene que M^+ es un punto fijo de T_P. Por último, la convergencia se sigue de manera análoga a lo que se hizo en la Proposición 4.22. □

Por los resultados exhibidos en líneas anteriores podemos extender el estudio del operador de Fitting, realizado en el apartado 2.1.3, a los operadores $\phi_{P,j,k}$ introducidos en la Definición 4.17. De esta manera tal extensión nos llevará al tratado, una vez más, de las clases de programas presentadas en 4.1.

4.2.2. Programas Acíclicos y Localmente Jerarquicos

Presentaremos la condición análoga a la Definición 2.39, la cual denominaremos como la condición (F_{32}) que se define a continuación.

Definición 4.25. *Sean P un programa, $I \in I_{P,3}$ un modelo para P y l un I-mapeo parcial de nivel para P. Se dice que P satisface (F_{32}) respecto a I y l, si para cada $A \in dom(l)$ y para toda cláusula $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ se tiene que $L_i \in dom(l)$ y $l(A) > l(L_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$ $(*)$. Y, además, para cada $A \in dom(l)$ se satisface una de las siguientes condiciones.*

(F_1) $A \in I$ *y existe* $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ *tal que* $L_i \in I$ *y* $l(A) > l(L_i)$*, para todo* $i = 1, \ldots, n$.

(F_2) $\neg A \in I$ *y para cada* $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ *existe* i *con* $\neg L_i \in I$ *y* $l(A) > l(L_i)$.

Las condiciones (F_1) y (F_2) son "idénticas" a las definidas en 2.39. La diferencia que se puede notar entre aquella definición y la establecida en 4.25, se encuentra claramente en la condición adicional que denominamos $(*)$. Así, considerando lo anterior, se establece el siguiente Teorema cuya prueba es análoga a la presentada en el Teorema 2.40, permitiendo bosquejar la prueba y no entrar a detalle en ella.

Teorema 4.26. *Sean P un programa, M el mínimo punto fijo del operador $\phi_{P,3,2}$. Entonces, en el orden "knowledge" , M es el modelo más grande entre todos los modelos 3-valuados I, para los cuales existe l un I-mapeo parcial de nivel para P tal que P satisface (F_{32}) respecto a I y l.*

Demostración. Sea M_P el mínimo punto fijo del operador $\phi_{P,3,2}$ y definamos l_P el M_P-mapeo parcial de nivel como sigue: $l_P(A) = \alpha$, donde α es el mínimo ordinal tal que A no se encuentra indefinido en $\phi_P \uparrow (\alpha + 1)$. La prueba consistirá en demostrar los siguientes hechos.

1. P satisface (F_{32}) respecto a M y l_P.

2. Si I es un modelo 3-valuado para P y l es un I-mapeo parcial de nivel tal que P satisface (F_{32}) respecto a I y l, entonces $I \subseteq M_P$.

Como se comento antes de enunciar al Teorema, omitiremos los detalles de la prueba. □

Corolario 4.27. *Sea P un programa. Entonces,*

1. *P es localmente jerarquico si, y solo si, $\phi_{P,3,2} \uparrow \alpha$ es total, para algún ordinal α.*

2. *P es acíclico si, y solo si, $\phi_{P,3,2} \uparrow \omega$ es total.*

Demostración. (1) ($\Leftarrow$) Sea P tal que $\phi_{P,3,2} \uparrow \alpha$ es total, para algún ordinal α, entonces por el Teorema 4.26 y la Defineión 4.25 se tiene que P es localmente jerarquico respecto al mapeo de nivel l_P definido como en la prueba del Teorema 4.26. ($\Rightarrow$) Sea P localmente jerarquico con mapeo de nivel l. Entonces, por el Teorema 4.6, P tiene un único modelo soportado M, es decir, M es el único punto fijo del operador T_P. Veamos que P satisface (F_{32}) respecto a $I = M \cup \neg(B_{P \setminus M})$ y l. Es suficiente mostrar que para cada $A \in B_P$, las condiciones (F_1) y (F_2) se satisfacen respecto a I, lo cual se sigue de manera inmediata a partir del hecho que M es un punto fijo de T_P y P es l-jerarquico. (2) El argumento es análogo al anterior y por ello será omitido. □

4.2.3. Programas Aceptables

El estudio realizado en la sección anterior ahora nos lleva al tratado de los denominados programas aceptables realizando breves modificaciones. Sean P un programa, $I \in I_{P,3}$ y l un I-mapeo parcial de nivel, diremos que una cláusula $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n$ es **k-segura** (respecto a I y l) si $L_1, \ldots, L_n \in I$ y $l(A) > l(L_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ o $\neg L_k \in I$, $L_1, \ldots, L_{k-1} \in I$ y $l(A) > l(L_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$. La noción recién definida generaliza lo establecido en la Definición 4.8 en el siguiente sentido: un programa P es aceptable respecto a algún ω-mapeo de nivel l y alguna interpretación $I \in I_{P,2}$ si, y solo si, I es un modelo para P cuya restricción a los símbolos predicados en Neg^*_P es un modelo soportado para P^- y para cada cláusula en $Base(P)$, existe k tal que la cláusula es k-segura (respecto a $I \cup \neg(B_P \setminus I)$ y l).

Definición 4.28. *Sean P un programa, I un modelo para P y l un I-mapeo parcial de nivel para P. Se dice que P satisface (F_{22}) respecto a I y l, si para cada $A \in dom(l)$ y para toda cláusula $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ existe k tal que la cláusula es k-segura. Y, además, para cada $A \in dom(l)$ se satisface una de las siguientes condiciones.*

(F_1) $A \in I$ y existe $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ tal que $L_i \in I$ y $l(A) > l(L_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

(F_2) $\neg A \in I$ y para cada $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ existe i con $\neg L_i \in I$ y $l(A) > l(L_i)$.

La prueba del siguiente Teorema es análoga a la del Teorema 4.26, por tanto será omitida.

Teorema 4.29. *Sean P un programa, M el mínimo punto fijo del operador $\phi_{P,2,2}$. Entonces, en el orden "knowledge" , M es el modelo más grande entre todos los modelos 3-valuados I, para los cuales existe l un I-mapeo parcial de nivel para P tal que P satisface (F_{22}) respecto a I y l.*

Corolario 4.30. *Sea P un programa. Entonces, P es aceptable si, y solo si, $\phi_{P,2,2} \uparrow \omega$ es total.*

Demostración. ($\Leftarrow$)Sea P tal que $\phi_{P,2,2} \uparrow \omega$ es total. Del Teoreama 4.24 sabemos que P posee un único modelo soportado cuya restricción a los símbolos predicados en Neg^{*_P} es un modelo soportado para P^-. Sin ninguna deficultad se puede verificar que P es aceptable apartir del Teoerema 4.26 y la Definición 4.25. ($\Rightarrow$) Análoga a la prueba presentada en el Corolaraio 4.27. □

4.2.4. Programas ϕ^*-Accesibles

Iniciaremos dando la Definición análoga a la presentada en 4.25 para programas ϕ^*-accesibles.

Definición 4.31. *Sean P un programa, I un modelo para P y l un I-mapeo parcial de nivel para P. Se dice que P satisface (F_{12}) respecto a I y l, si para cada $A \in dom(l)$ y para toda cláusula $A \leftarrow L_1, \ldots, L_n \in Base(P)$ una de las siguientes condiciones [(F_{12a}) y (F_{12b})] se cumple. Además, si $A \in I$, debe existir al menos una cláusula la cual satisfaga (F_{12a}) y, si $\neg A \in I$, no existe cláusula que satisfaga (F_{12a}).*

F_{12a}. *$L_i \in I$ y $l(A) > l(L_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

F_{12b}. *Existe i con $\neg L_i \in I$ y $l(A) > l(L_i)$.*

Las pruebas de los siguientes resultados serán omitidas dado que estas son análogas a las presentadas en 4.26 y 4.30, respectivamente.

Teorema 4.32. *Sean P un programa y M el mínimo punto fijo del operador $\phi_{P,1,2}$. Entonces, en el orden "knowledge" , M es el modelo más grande entre todos los modelos 3-valuados I, para los cuales existe l un I-mapeo parcial de nivel para P tal que P satisface (F_{12}) respecto a I y l.*

Corolario 4.33. *Sea P un programa. Entonces, P es ϕ^*-accesible si, y solo si, $\phi_{P,1,2} \uparrow \alpha$ es total, para algún ordinal α.*

Por último, para los programas ϕ-Accesibles nos abstendremos de presentar los resultados dado que estos ya fueron obtenidos en 4.2.4. Solo habremos de notar que el Teorema 4.32 encuentra su análogo en el Teorema 2.40 y el Corolario 4.33 puede hallarse en la Definición 4.13.

4.3. Una Relación entre Programas Lógicos

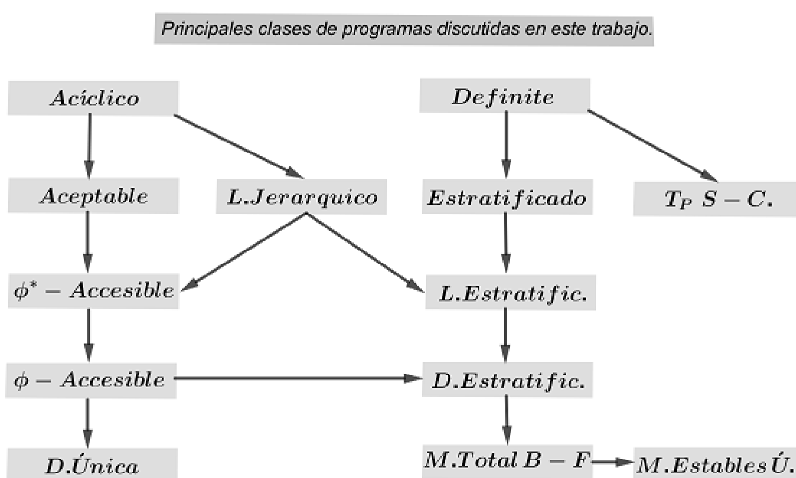

Figura 4.1: Diagrama entre clases.

En esta sección presentaremos un panorama de la relación que existe entre las clases de programas lógicos discutidas hasta el momento que se muestra en el siguiente diagrama (4.1) donde las flechas indican inclusión de clases. Las relaciones presentes en la Figura 4.1 se deducen de los resultados presentados en el Capítulo 2 y en la sección 4.2. Obsérvese que la Scott-Continuidad del operador de un solo paso para programas definite se sigue del Teorema 2.13[9].

4.4. Operador Consecuencia y Operador Estilo Fitting

Cerraremos esta sección estudiando algunas extensiones naturales que daremos de algunos resultados vistos en secciones anteriores. Tales extensiones las obtendremos mediante la implementación de un operador semántico más general, T, modelado sobre el operador de Fitting, el cual a su vez estará definido sobre una lógica abstracta finita $\mathcal{T}$. Dichos operadores serán llamados "**operadores consecuencia**"[10], donde un caso particular, y de interes para este trabajo, es el operador que denominaremos "**operador estilo Fitting**". Por tanto, como objetivo principal tenemos el de estudiar la continuidad de aquellos operadores consecuencia definidos en la topología de "Cantor".

Ahora, consideremos la notación y observaciones que serán de ayuda para el desarrollo de esta sección. $\mathcal{T}$ denotará un conjunto finito de valores de verdad $\{t_1, \ldots, t_n\}$ donde tal conjunto contiene al menos dos valores distinguidos, digamos t_1 y t_n, los cuales serán considerados como los valores de verdad que identificaremos como "falso" y "verdadero", respectivamente. Supondremos que se tienen las tablas de verdad para los conectivos usuales ($\vee$, $\wedge$, $\leftarrow$ y $\neg$). Ahora, dado un programa normal P se tiene que $I_{P,n}$ denota al conjunto de todas las funciones $I : B_P \to \mathcal{T}$, donde omitiremos n en $I_{P,n}$, si el contexto en que se trabaja es claro, es decir, $I_{P,n} = I_P$. Como es usual, cualquier interpretación I puede extenderse, usando las tablas de verdad, para dar un valor de verdad en $\mathcal{T}$ a cualquier fórmula en el leguaje base $\mathcal{L}$ de P. Asumiremos en esta sección, como se hizo anteriormente, que el lenguaje base $\mathcal{L}$ de P contiene al menos un símbolo funcional y por tanto B_P es numerable. Finalmente, dotaremos a $I_{P,n}$ con la topología de "Cantor" Q estudiada en el capítulo 3. Como recordatorio de las propiedades para Q, podemos revisar el Teorema 3.33 y la Proposición 3.38.

Así, por todo lo establecido en el párrafo anterior, podemos definir el operador consecuencia como sigue.

[9]Los cuales fueron llamados ordenes continuos.
[10]Véase [36].

Definición 4.34. *Sea P un programa normal y T un operador sobre I_P. T es llamado un* ***operador consecuencia para*** *P, si para cada $I \in I_P$ se cumple lo siguiente: para cada $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$, donde digamos que $T(I)(A) = t_i$ y $I(cuerpo) = t_j$, entonces se tiene que $t_i \leftarrow t_j$ es verdadero, en otras palabras, que la tabla de verdad para $\leftarrow$ mantiene el valor de verdad t_n.*

Teorema 4.35. *Sea P un programa normal. Si T es un operador consecuencia para P y para cualquier $I \in I_P$ se tiene que $T^m(I)$ converge a M en Q, para algún $M \in I_P$, entonces M es un modelo para P, es decir, para cada $C \in Base(P)$: $M(C) = t_n$. Más aún, si T es continuo, entonces se tiene que M es un punto fijo de T.*

Demostración. Supongamos que $A \in B_P$ y $M(A) = t_i$ para algun i. Sea $A \leftarrow A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_l$. Entonces, de la hipótesis se deduce que para cada $B \in B_P$ eventualmente $T^m(I)(B)$ coincide con $M(B)$. Por tanto, existe k tal que $T(T^k(I))(A) = t_i$. Supongamos que $M(A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_l) = t_j$. Tomando la sucesión $T^k(I)$ y por la propiedad establecida en la hipótesis aplicada a cada uno de los básicos que aparecen en el conjuntando $A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_l$, tenemos que eventualmente $T^k(I)(A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_l) = M(A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_l) = t_j$. Como T es un operador consecuencia, tenemos que $T(T^k(I))(A) \leftarrow T^k(I)(A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_l)$ toma el valor t_n. Así, $M(A \leftarrow A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_l) = t_n$. Finalmente, si T es continuo, entonces $M = \lim T^{n+1}(I) = T(\lim T^n(I)) = T(M)$. Por tanto, M es un punto fijo de T. $\square$

De manera intuitiva podemos decir que el operador consecuencia propaga el valor de verdad a través de los símbolos de implicación que ocurren en el programa. Desde este enfoque nos gustaría que tal propagación dependiera únicamente sobre los cuerpos de las cláusulas relevantes. Por tanto, se introduce la siguiente definición con base en esta idea.

Definición 4.36. *Sean P un programa normal y $A \in B_P$. Denotamos por $\mathcal{B}_A$ al conjunto de todos los átomos que aparecen en los cuerpos de las cláusulas en $Base(P)$ cuya cabeza de tales cláusulas sea A. Así, un operador consecuencia T será llamado (P)-local si para cada $A \in B_P$ y cualesquiera dos interpretaciones $I, K \in I_P$, las cuales coinciden sobre todos los átomos en $\mathcal{B}_A$, se tiene que $T(I)(A) = T(K)(A)$.*

Como se expreso en un principio deseamos estudiar la continuidad del operador consecuencia local en Q, para lo cual será necesaria la siguiente definición.

Definición 4.37. *Sean P un programa normal, $C \in Base(P)$ y $A \in B_P$ tal que A coincide con la cabeza de C. Entonces se define lo siguiente.*

- *C se dice de **tipo finito relativo a** A si C tiene únicamente una cantidad finita de instancias básicas con cabeza A distintas.*
- *P se dice de **tipo finito relativo a** A si cada cláusula en P es de tipo finito relativo a A, es decir, el conjunto de todas las cláusulas en $Base(P)$ con cabeza A es un conjunto finito.*
- *P se dice que es de **tipo finito** si P es de tipo finito relativo a A, para cada $A \in B_P$.*

Proposición 4.38. *Sean P un programa normal de tipo finito y T un operador consecuencia local para P. Entonces T es continuo en Q.*

Demostración. Sean $I \in I_P$ y $G_2 = \mathcal{G}(A, t_i)$ es una vecindad subbásica de $T(I)$ en Q (véase 3.1.2 para notación). Como P es de tipo finito, el conjunto $\mathcal{B}_A$ es finito. Así, se define $G_1 = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_A} \mathcal{G}(B, I(B))$, donde cada elemento de la intersección finita es un abierto y por ello G_1 es un abierto. Luego, dado que cada $K \in G_1$ coincide con I sobre $\mathcal{B}_A$ y como T es local, se tiene que $T(K)(A) = T(I)(A) = t_i$ para cada $K \in G_1$. Por tanto, $T(G_1) \subseteq G_2$ y de ahí que T es continuo en Q. □

Ahora, si P no es de tipo finito nos gustaría poder asegurar mediante alguna otra propiedad de P que la intersección (posiblemente infinita) de elementos de la forma $\mathcal{G}(B, I(B))$ es un abierto, de esta forma la prueba en 4.38 nos llevaría a programas que no son de tipo finito pero que satisfacen la propiedad que se planteó en un inicio. Alternativamente, nos gustaría omitir intersecciones infinitas de estos elementos mediante condiciones las cuales nos aseguren considerar únicamente intersecciones finitas. Por tanto, una manera de hacerlo es mediante la siguiente Definición.

Definición 4.39. *Sean P un programa y T un operador consecuencia sobre I_P.*

- *Se dice que T es (P)-**localmente finito para** $A \in B_P$ **y** $I \in I_P$ si existe un subconjunto finito $S = S(A, I) \subseteq \mathcal{B}_A$ tal que $T(J)(A) = T(I)(A)$ para todo $J \in I_P$ con $J|_S = I|_S$.*
- *Se dice que T es (P)-**localmente finito** si T es localmente finito para $A \in B_P$ y todo $I \in I_P$.*

Es claro que cualquier operador consecuencia localmente finito es local. El recíproco se cumple si P es de tipo finito y notando que para este tipo de programas $\mathcal{B}_A$ es un conjunto finito para cualquier $A \in B_P$. Sin embargo, un resultado más fuerte puede ser demostrado que se da a continuación.

Teorema 4.40. *Un operador consecuencia local T es localmente finito para todo $A \in B_P$ y algún $I \in I_P$ si, y solo si, T es continuo en I respecto a Q.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Prueba análoga a 4.38. ($\Leftarrow$) Sea $A \in B_P$. Entonces $G_2 = \mathcal{G}(A, T(I)(A))$ es una vecindad subbásica abierta de $T(I)$. Por la continuidad de T, existe una vecindad abierta básica $G_1 = \mathcal{G}(B_1, I(B_1)) \cap \cdots \cap \mathcal{G}(B_k, I(B_k))$ de I con $T(G_1) \subseteq G_2$. Es decir, $T(J)(A) = T(I)(A)$ para cada $J \in \bigcap_{B \in S'} \mathcal{G}(B, I(B))$, donde $S' = \{B_1, \ldots, B_k\}$. Como T es local, los valores de $T(J)(A)$ dependen únicamente sobre los valores $J(A)$ de los átomos $A \in \mathcal{B}_A$. Así, si tomamos el conjunto $S = S' \cap \mathcal{B}_A$, entonces $T(J)(A) = T(I)(A)$ para todo $J \in \bigcap_{B \in S} \mathcal{G}(B, I(B))$. Por tanto, T es localmente finito para A e I. Como A fue tomado arbitrario, tenemos que T es localmente finito para I y todo $A \in B_P$. $\square$

Ahora estudiaremos un caso particular del operador consecuencia, el cual llamaremos operador estilo Fitting donde, como en el caso general, estudiaremos su continuidad en Q.

Definición 4.41. *Sea P un programa. Defínase el mapeo $F_P : I_{P,n} \to I_{P,n}$ relativo a una lógica (adecuada) dada con n valores de verdad mediante $F_P(I) = J$, donde para cada $A \in B_P$, $J(A) = I(\bigvee C_i)$ de tal manera que $\bigvee C_i$ es el cuerpo de la pseudo-cláusula $A \leftarrow \bigvee C_i$.*

A los operadores que satisfacen la Definición anterior serán llamados **operadores Estilo Fitting o F_P-operador**. De ahora en adelante supondremos que se satisface la siguiente condición débil para las cláusulas del programa. Supondremos que $t_j \leftarrow t_j$ evalúa al valor de verdad “true”para cada j respecto a la lógica base que se esté considerando. Por lo anterior se obtiene de manera inmediata que cada operador estilo-Fitting es un operador consecuencia local. Obsérvese que, si se considera la lógica clasica (2-valuada), entonces el correspondiente operador estilo-Fitting es el operador conseciencia inmediata (un solo paso) T_P con P un programa cualquiera. Así, si $T_P(I)(A) = \mathbf{t}$, entonces existe $A \leftarrow \mathit{cuerpo} \in \mathit{Base}(P)$ tal que $I(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$ y, por tanto, obtenemos que $T_P(J)(A) = \mathbf{t}$ siempre que $J(\mathit{cuerpo}) = \mathbf{t}$. Las observaciones hechas respecto a los cuerpos de las cláusulas, donde se estableció que estos son conjunciones finitas, nos permite obtener el siguiente Lema de manera inmediata y del cual se omite su prueba.

Lema 4.42. *Sean P un programa, $A \in B_P$ e $I \in I_{P,2}$. Si $T_P(I)(A)\mathbf{t}$, entonces T_P es localmente finito para A e I. Más aún, T_P es continuo en I si, y solo si, T_P es localmente finito para todo A con $T_P(I)(A) = \mathbf{f}$.*

Notemos lo siguiente, el cuerpo de una pseudo-cláusula con cabeza A, digamos $\bigvee C_i$, es falsa en la lógica clásica si, y solo si, todo C_i es falso. Si suponemos que T_P es localmente finito para A e I, entonces debe existir un subconjunto finito $S \subseteq \mathcal{B}_A$ tal que cualquier $J \in I_P$, el cual coincida con I sobre S , haga que a todos los C_i se les asigne el valor de verdad "falso". Recíprocamente si $S \subseteq \mathcal{B}_A$ es un subconjunto finito tal que cualquier $J \in I_P$, el cual coincide con I sobre S, haga a todos los C_i "falso", entonces T es localmente finito para A e I. En otras palabras se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.43. *Sean P un programa e $I \in I_P$. Entonces T_P es continuo en I respecto a Q si, y solo si, siempre que $T_P(I)(A) = \mathbf{f}$, entonces se tiene que no existe cláusula con cabeza A o existe un conjunto finito $S(I, A) = \{A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_m\} \subseteq B_P$ con las siguientes propiedades.*

- *$I(A_i) = \mathbf{t}$ y $I(B_j) = \mathbf{f}$ para todo i y j.*
- *Para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ al menos $\neg A_i$ o B_j ocurren en el cuerpo de la cláusula.*

Notemos que resultados análogos al Lema 4.42 y a la Proposición 4.43, se pueden establecer al considerar la lógica 3-valuada fuerte de Kleene.

Finalmente, exhibiremos una generalización del Teorema 4.6 sobre programas acíclicos. Para ello, consideremos a P un programa acíclico con mapeo de nivel l y T un operador consecuencia local para P. Definamos el mapeo $d : I_P \times I_P \to \mathbb{R}$ por $d(I, J) = 2^{-n}$, donde n es el mínimo natural tal que I y J difieren sobre algún átomo A de nivel n, es decir, $l(A) = n$. Por tanto, de las Proposiciones 3.64 y 4.4 se sigue que d es una ultramétrica completa sobre I_P, lo cual se puede mostrar sin ninguna dificultad.

Proposición 4.44. *Estableciendo como hipótesis lo mencionado en el parrafo anterior se tiene que, cualquier operador consecuencia local T es una contracción respecto a d.*

Demostración. Sean $I, J \in I_P$ y Supongamos que $d(I, J) = 2^{-n}$. Entonces, I y J coinciden sobre todos los átomos de nivel menor que n. Sea $A \in B_P$ con $l(A) = n$, entonces al ser P acíclico se tiene que todos los átomos en el *cuerpo* de la pseudo-cláusula con cabeza A tienen nivel menor que n. Y, por la localidad de T, se tiene que $T(I)(A) = T(J)(A)$. Por tanto, $d(T(I), T(J)) \leq 2^{-(n+1)} = 2^{-1} \cdot d(I, J)$. □

Teorema 4.45. *Sean P un programa acíclico y T un operador consecuencia local para P. Entonces, para cualquier $I \in I_P$, se tiene que $T^n(I)$ converge al único punto fijo de T respecto a Q.*

Demostración. Por lo mencionado en un parrafo anterior se infiere que d es una métrica completa, así podemos aplicar la Proposición 4.44 y el Teorema contractivo de Banach. Por tanto, se tiene la convergencia de $T^n(I)$ a M (punto fijo de T) respecto a Q. Por la Definición de d, la convergencia de la sucesión de valuaciones $T^n(I)$ a M es puntual y, por tanto, esta sucesión también converge respecto a Q. □

4.5. Revisión Semántica de los Modelos Estables y Perfectos

La semántica de modelos estables resulta ser una de las cuales recibe más atención en estos días, es por esto que algunas de las implementaciones más populares sobre los sistemas de razonamiento no monótono están basadas en este tipo de semántica. En esta sección presentaremos medios para interpretar los resultados sobre la semántica de modelos soportados a la semántica de modelos estables. Lo cual se hará mediante lo que llamamos la completación del punto fijo de un programa, esta construcción nos permitirá trabajar, casi sin ningún esfuerzo, varios resultados sobre la semántica de modelos estables. Por último, se discutirán algunas observaciones adicionales sobre la estratificación y la semántica de modelos perfectos.

4.5.1. La Completación del Punto Fijo

De manera superficial podemos decir que la completación del punto-fijo es una transformación del programa, la cual está basada en la noción de despliegue, lo cual podemos entender por, reemplazar los átomos A que ocurren en el "cuerpo" de una cláusula por el "cuerpo" de otra cláusula cuya cabeza sea A. Básicamente, la completación de un programa es obtenida mediante la realización de un despliegue a través de todos los átomos positivos que ocurren en los "cuerpos" de las cláusulas del programa dado, sin tener en cuenta a las cláusulas que después del proceso aún posean átomos positivos en sus respectivos "cuerpos". Formalmente podemos describir este proceso en la siguiente definición.

Definición 4.46. *Una cuasi-interpretación*[11] *es un conjunto de cláusulas de la forma* $A \leftarrow \neg B_1, \ldots, \neg B_m$, *donde* A *y* B_i *son átomos básicos para cada* $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definición 4.47. *Sea* P *un programa y* Q *una cuasi-interpretación. Se define a* $T'_P(Q)$, *la cuasi-interpretación, como el conjunto de todas las*

[11] Noción tomada de [17].

cláusulas de la forma $A \leftarrow cuerpo_1, \ldots, cuerpo_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m$ *para las cuales existe una cláusula* $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m \in Base(P)$ *y cláusulas* $A_1 \leftarrow cuerpo_i \in Q$*, para todo* $i = 1, \ldots, n$.

Notemos que los casos $n = 0$ y $m = 0$, en la Definición 4.47, están bien definidos. También, sin ninguna dificultad, se puede probar que el conjunto de todas las cuasi-interpretaciones es un "*cpo*" respecto a la inclusión de conjuntos, obteniendo el siguiente resultado.

Proposición 4.48. *Sea* P *un programa. Entonces, el operador* T'_P *es Scott-continuo sobre el conjunto de todas las cuasi-interpretaciones.*

Demostración. Habremos de mostrar dos cosas.

1. T'_P es monótono.
2. Dada $\mathcal{Q} = \{Q_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ familia dirigida indexada de cuasi-interpretaciones y, considerando que $Q = \bigsqcup \mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}$, entonces $T'_P(Q) = \bigcup T'_P(\mathcal{Q})$.

(1) Sean $S \subseteq R$ cuasi-interpretaciones y $A \leftarrow cuerpo \in T'_P(S)$. Si $A \leftarrow cuerpo$ resulta del despliegue de alguna cláusula $A \leftarrow cuerpo_0$ en P con algunas cláusulas $B_i \leftarrow cuerpo_i$ en S. Entonces, $B_i \leftarrow cuerpo_i$ están en R para todo i y por la existencia de la cláusula $A \leftarrow cuerpo_0$ en P, tenemos que $A \leftarrow cuerpo$ se encuentra en $T'_P(R)$. Si $A \leftarrow cuerpo \in T'_P(S)$ no resulta de algún despliegue, entonces esta cláusula ya se encuentra contenida en P y, por ello que, ya se encuentra en $T'_P(R)$. Por todo lo anterior, T'_P es monótono.

(2) Dado que el orden a considerar es la inclusión de conjuntos y T'_P es monótono, se infiere que $T'_P(\mathcal{Q})$ es un conjunto dirigido. En base a resultados posteriores a la Definición A.12, solo resta probar que $T'_P(Q) \subseteq \bigcup T'_P(\mathcal{Q})$. Supongamos que $A \leftarrow cuerpo \in T'_P(Q)$. Si está cláusula no resulta de algún despliegue, entonces como en (1) se concluye que también pertenece a $T'_P(\mathcal{Q})$. Si $A \leftarrow cuerpo$ resulta de algún despliegue, digamos $A \leftarrow cuerpo_0$ en P con $B_i \leftarrow cuerpo_i$ en Q. Po ser $\mathcal{Q}$ dirigida e indexada, tenemos que existe λ tal que para todo i, $B_i \leftarrow cuerpo_i$ se encuentran en Q_λ. Por tanto, $A \leftarrow cuerpo \in T'_P(Q_\lambda) \subseteq T'_P(\mathcal{Q})$, finalizando la prueba. $\square$

Definición 4.49. *Sea* P *un programa. Definimos la* ***completación del puntofijo de*** P*,* $fix(P)$*, como* $fix(P) = T'_P \uparrow \omega$.

Ejemplo 4.50. *Consideremos el programa del Ejemplo 2.28, de donde podemos obtener sin ninguna dificultad lo siguiente.*

$T'_{Tweety2} \uparrow 0 = 0$,
$T'_{Tweety2} \uparrow 1 = \{$`pingüino(tweety)←, ave(bob)←`$\}$,
$T'_{Tweety2} \uparrow 2 = T'_{Tweety2} \uparrow 1 \cup \{$`vuela(bob)← ¬pingüino(bob), ave(tweety)←`$\}$,
$T'_{Tweety2} \uparrow 3 = T'_{Tweety2} \uparrow 2 \cup \{$`vuela(tweety)← ¬pingüino(tweety)`$\}$,
$fix(tweey2) = T'_{Tweety2} \uparrow 3$.

La importancia de lo que denominamos la completación del punto fijo se encuentra en que los modelos estables de un programa dado P, son los modelos soportados de $fix(P)$. Más aún, se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 4.51. *Sea P un programa e $I \in I_{P,2}$. Entonces se tiene que $GL_P(I) = T_{fix(P)}(I)$.*

Demostración.

- Veamos que $GL_P(I) \subseteq T_{fix(P)}(I)$, para ello mostremos que para cada $A \in GL_P(I)$, existe una cláusula en $fix(P)$ con cabeza A cuyo *cuerpo* está en I. Dicha tarea lo haremos por inducción sobre las potencias de $T_{P/I}$(Recordemos que $GL_P(I) = T_{P/I} \uparrow \omega$). Para el caso base ($T_{P/I} \uparrow 0 = \emptyset$) no hay nada que probar. Supongamos que para cada $A \in T_{P/I} \uparrow n$ existe una cláusula en $fix(P)$ con cabeza A cuyo cuerpo está en I. Para $A \in T_{P/I} \uparrow (n+1)$, existe $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n$ en P/I tal que $A_i \in T_{P/I} \uparrow n$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, de la construcción de P/I existe $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m \in Base(P)$ con $B_j \notin I$, para cada $j = 1 \ldots, m$. Por hipótesis de inducción, tenemos que para cada i, existe $A_i \leftarrow cuerpo_i$ en $fix(P)$ con $I \models cuerpo_i$. Por tanto, $A_i \in T_{fix(P)}(I)$. Así, por la definición de T'_P, la cláusula $A \leftarrow cuerpo_1, \ldots, cuerpo_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m$ está en $fix(P)$. Como $I \models cuerpo_i$ y $B_j \notin I$, se tiene que $A \in T_{fix(P)}(I)$. Por tanto, $GL_P(I) \subseteq T_{fix(P)}(I)$.

- Ahora probemos que $T_{fix(P)}(I) \subseteq GL_P(I)$. Dado $A \in T_{fix(P)}(I)$, mostremos mediante inducción sobre k que $T_{T'_P \uparrow k}(I) \subseteq GL_P(I)$. Para el caso base, una vez más, no hay nada que probar. Supongamos que $T_{T'_P \uparrow k}(I) \subseteq GL_P(I)$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y sea $A \in T_{T'_P \uparrow (k+1)}(I) \setminus T_{T'_P \uparrow k}(I)$. Entonces, existe $A \leftarrow cuerpo_1, \ldots, cuerpo_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m$ en $T_{T'_P \uparrow (k+1)}(I)$ cuyo *cuerpo* es cierto en I. Así, $B_j \notin I$ para todo $j = 1, \ldots, m$ y para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $A_i \leftarrow cuerpo_i$ en $T'_P \uparrow k(I)$ con $I \models cuerpo_i$. Por tanto, $A_i \in T_{T'_P \uparrow k}(I) \subseteq GL_P(I)$. Además, por la definición de T'_P, existe $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_m \in Base(P)$ y, dado que, $B_j \notin I$, se tiene que $A \leftarrow A_1, \ldots, A_n \in P/I$. Luego, ya sabemos que $A_i \in GL_P(I)$ para cada i, de ahí que $A \in GL_P(I)$. Por todo lo anterior se tiene que, $T_{T'_P \uparrow (k+1)}(I) \subseteq GL_P(I)$. Por tanto, $T_{fix(P)}(I) \subseteq GL_P(I)$.

$\square$

El siguiente Corolario es inmediato a partir de la Definición anterior(4.51).

Corolario 4.52. *Sea P un programa. Entonces M es un modelo estable de P si, y solo si, M es un modelo soportado de $fix(P)$.*

4.5.2. Semántica de Modelos Estables

En esta sección habremos de resaltar la importancia del Teorema 4.51 dado que, tal resultado nos permite trasladar los resultados obtenidos sobre el operador de un solo paso y la semántica de modelos soportados hacia el operador de Gelfond-Lifschitz y la semántica de modelos estables, respectivamente. Comenzaremos con la siguiente proposición, la cual será de relevancia para dar una caracterización de la continuidad del operador GL_P en Q.

Proposición 4.53. *Sean P un programa definite, $A \in B_P$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \in T_P \uparrow n$ si, y solo si, $A \leftarrow$ es una cláusula en $T'_P \uparrow n$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $A \in T_P \uparrow$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción sobre n lo pedido. Si $n = 1$ no hay nada que mostrar. Si $n > 1$, entonces existe $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ tal que todos los átomos B_i, en el cuerpo, están contenidos en $T_P \uparrow (n-1)$. Y, por hipótesis inductiva, existen $B_i \leftarrow$ en $T'_P \uparrow (n-1)$. El despliegue de estas cláusulas con $A \leftarrow cuerpo$ muestra que $A \leftarrow$ también está contenida en $T'_P \uparrow n$. ($\Leftarrow$) Supongamos que existe $A \leftarrow$ en $T'_P \uparrow n$. Una vez más probemos por inducción lo solicitado. El caso base es inmediato. Ahora, supongamos que $n > 1$, entonces existe $A \leftarrow A_1, \ldots, A_m \in Base(P)$ y cláusulas $A_i \leftarrow$ en $T'_P \uparrow (n-1)$. Por la hipótesis de inducción tenemos que $A_i \in T_P \uparrow (n-1)$ para cada i. Por tanto, $A \in T_P \uparrow n$. □

Observación 4.54. *Por el Teorema 4.43, Teoreama 4.51 y observando que no ocurren átomos positivos en el cuerpo de la transformada del programa $fix(P)$, tenemos el siguiente resultado. GL_P es continuo en I si, y solo si, siempre que $GL_P(I)(A) = \mathbf{f}$, entonces ya sea que no exista cláusula con cabeza A en $fix(P)$ o exista un conjunto finito $S(I, A) = \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq B_P$ tal que $I(A_i) = \mathbf{t}$ para todo i y para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ al menos un elemento de la forma $\neg A_i$ ocurre en cuerpo.*

Sea P un programa, luego sabemos por el Teorema 4.51 que GL_P es continuo en algún $I \in I_P$ respecto a Q si y solo si $T_{fix(P)}$ es continuo en I. Lo cual da lugar al siguiente Teorema.

Teorema 4.55. *Sean P un programa e $I \in I_P$. Entonces GL_P es continuo en I respecto a Q si, y solo si, siempre que $GL_P(I)(A) = \mathbf{f}$, entonces ya sea que no exista cláusula con cabeza A en $Base(P)$ o exista un conjunto finito $S(I, A) = \{A_1, \ldots, A_k\} \subseteq B_P$ tal que $I(A_i) = \mathbf{t}$ para* *todo i y para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ al menos $\neg A_i$ o B con $GL_P(I)(B) = \mathbf{f}$, ocurre en el cuerpo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea P tal que GL_P es continuo en I.

- Si no existe clásusula con cabeza A en $Base(P)$ no hay nada que mostrar.

- Supongamos que existe una cláusula en $Base(P)$ con cabeza A. Entonces, existe un conjunto finito $S(I, A) = \{A_1, \ldots, m\} \subseteq B_P$ tal que $I(A_i) = \mathbf{t}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y para cada cláusula $A \leftarrow$ *cuerpo* en $fix(P)$ al menos un $\neg A_i$ ocurren en el *cuerpo*. Ahora, sea $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \neg C_1, \ldots, \neg C_k \in Base(P)$ y consideremos falso que $\neg A_i$ ocurren el *cuerpo*. Mostremos que existe algún $B_i \in$ *cuerpo* con $GL_P(I)(B_i) = \mathbf{f}$. Supongamos que $GL_P(I)(B_i) = \mathbf{t}$ para todo i, entonces para cada B_i, se tiene que $B_i \in GL_P(I) = T_{P/I} \uparrow \omega$. Como en la prueba de la Proposición 4.53, concluimos que existe una cláusula $\mathcal{C} = A \leftarrow \neg D_1, \ldots, \neg D_n, \neg C_1, \ldots, \neg C_k$ en $fix(P)$ con $D_j \notin I$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Como $\mathcal{C}$ está contenidad en $fix(P)$, se tiene que algún átomo del conjunto $S(I, A)$ debe ocurrir en su *cuerpo*. Lo cual no puede ocurrir para algún $D_{j'}$ porque $I(D_j) = \mathbf{f}$ para todo j. Análogamente, no puede ocurrir para $C_{i'}$ por hipótesis. Es decir, se tiene una contradicción y por tanto se tiene el resultado.

($\Leftarrow$) Sea P tal que la condición sobre GL_P en el enucniado del Teorema se cumple. Una vez más haremos uso de la observación hecha antes de enunciar el Teorema. Sea $A \in B_P$ con $GL_P(I)(A) = \mathbf{f}$.

- Si no existe cláusula en $fix(P)$ con cabeza A , entonces no hay nada que probar.

- Si existe cláusula con cabeza A en $fix(P)$, entonces existe cláusula con cabeza A en P y, por hipótesis, existe un conjunto finito $S(I, A) = \{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq B_P$ tal que $I(A_i) = \mathbf{t}$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Además, para cada cláusula $A \leftarrow cuerpo \in Base(P)$ al menos un $\neg A_i$ o algún B con $GL_P(I)(B) = \mathbf{f}$, ocurre en el *cuerpo*. Ahora, dada una cláusula $A \leftarrow \neg B_1, \ldots, \neg B_n$ en $fix(P) = T'_P \uparrow \omega$. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ con $A \leftarrow \neg B_1, \ldots, \neg B_n$ contenida en $T'_P \uparrow k$. Obsérvese que $n = 0$ no es posible dado que esto debería implicar que $GL_P(I)(A) = \mathbf{t}$, lo cual contradice la hipótesis sobre A. Para finalizar, mediante inducción sobre k, probaremos que algún $B_j \in S(I, A)$. Si $k = 1$, entonces $A \leftarrow \neg B_1, \ldots, \neg B_n \in Base(P)$ y, de ahí que, alguno de los B_j pertenece a $S(I, A)$. Si $k > 1$, entonces existe una cláusula $A \leftarrow C_1, \ldots, C_l, \neg D_1, \ldots, \neg D_{l'} \in Base(P)$ y cláusulas $C_i \leftarrow cuerpo_i$ en $T'_P \uparrow (k-1)$ las cuales despliegan a la cláusula $A \leftarrow \neg B_1, \ldots, \neg B_n$. Por hipótesis tenemos dos casos, que $D_j \in S(I, A)$ para algún j, de donde ya no habría nada que mostrar. Y, el otro caso es que $GL_P(I)(C_i) = \mathbf{f}$ para algún i. En este caso obtenemos que $cuerpo_i \neq \emptyset$ por un argumento similar al empleado en la prueba de la Proposición 4.53. Así, por hipótesis, existe un átomo negado en $cuerpo_i$ y, de donde se infiere que este átomo se encuentre en $\{B_1, \ldots, B_m\}$. Por tanto, una vez más, uno de los B_j pertenece a $S(I, A)$, finalizando la prueba.

□

El siguiente resultado es una variante del Teorema 4.35.

Teorema 4.56. *Sea P un programa y supóngase que GL_P es continuo de tal manera que la sucesión de interaciones, $GL_P^n(I)$ converge a algún $M \in I_P$ respecto a Q. Entonces M es un modelo estable para P.*

Demostración. Por la continuidad de GL_P se tiene que M es un punto fijo de GL_P, obteniendo así el resultado. □

También podemos aprovechar nuestro conocimiento sobre la relación entre el operador de un solo paso y el de Fitting.

Proposición 4.57. *Sea P un programa y supóngase que $M = \Phi_{fix(P)} \uparrow \omega$ es total. Entonces $GL_P^n(\emptyset)$ converge a M^+ en Q y M^+ es el único modelo estable para P.*

Demostración. El resultado se obtiene como una consecuencia directa del Teorema 4.51 y Proposición 4.22. □

El enfoque basado en métricas también se traslada a nuestro presente contexto, restringiendo nuestra discusión al siguiente Corolario del Teorema 4.6.

Teorema 4.58. *Sea P un programa localmente estratificado con su correspondiente mapeo de nivel l. Entonces GL_P es una contracción estricta respecto a d_l. Además, si el codominio de l es ω, entonces GL_P es una contracción respecto a d_l. Más aún, en ambos casos, GL_P tiene un único punto fijo y por ello P tiene un único modelo estable.*

Demostración. Si P es localmente estratificado respecto a l, entonces $fix(P)$ es localmente jerarquico respecto a l. Así, basta aplicar los Teoremas 4.6 y 4.51 para tener los resultados. □

4.5.3. Semántica de Modelos Perfectos

En esta sección volveremos a tratar asuntos sobre la estratificación de un programa así como la semántica de modelos perfectos. En particular, describiremos un método iterativo para obtener el modelo perfecto de un programa localmente estratificado[12]. Iniciaremos con una Definición, donde la idea detrás de esta se encuentra en formalizar el concepto de "cortar" a un nivel, dígase n.

Definición 4.59. *Sean P un programa y $l : B_P \to \gamma$ un mapeo de nivel, donde $\gamma > 1$. Para cada n con $0 < n \leq \gamma$, sea $P_{[n]}$ que denota al conjunto de todas las cláusulas en $Base(P)$ para las cuales solo ocurren átomos A con $l(A) < n$ y denotemos por $\mathcal{L}_n$ al conjunto de todos los átomos A de nivel menor que n. Definimos $T_{[n]} : \mathcal{P}(\mathcal{L}_n) \to \mathcal{P}(\mathcal{L}_n)$ por $T_{[n]}(I) = T_{P_{[n]}}(I)$. El mapeo $T_{[n]}$ es llamado **el operador consecuencia inmediata restringido al nivel** n.*

Otra Definición que será relevante a través de esta sección es la siguiente.

Definición 4.60. *Sea P un programa localmente estratificado y $l : B_P \to \gamma$ un mapeo de nivel, donde $\gamma > 1$. Se construye la sucesión transfinita, $(I_n)_{n\in\gamma}$, recursivamente como sigue.*

- *Para cada $m \in \mathbb{N}$, se define $I_{[1,m]} = T^m_{[1]}(\emptyset)$ y el conjunto $I_1 = \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{[1,m]}$.*
- *Si $n \in \gamma$, con $n > 1$, es un ordinal sucesor, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se define $I_{[n,m]} = T^m_{[n]}(I_{n-1})$ y el conjunto $I_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{[n,m]}$.*
- *Si $n \in \gamma$ es un ordinal límite, se define $I_n = \bigcup_{m<n} I_m$. Finalmente definimos $I_{[P]} = \bigcup_{n<\gamma} I_n$.*

Ejemplo 4.61. *Consideremos el programa(Tweety2) del Ejemplo 2.28, donde $l(p(X)) = 0$, $l(a(X)) = 1$ y $l(v(X)) = 2$ para todo $X \in \{\texttt{tweety},\ \texttt{bob}\}$. Entonces obtenemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} I_1 =& \{\texttt{p(tweety)}\} \\ I_2 =& I_1 \cup \{\texttt{a(bob)},\ \texttt{a(tweety)}\} \\ I_3 =& I_2 \cup \{\texttt{v(bob)}\} \\ I_{[Tweety2]} =& I_3 \end{aligned}$$

Ahora, presentamos el siguiente Lema donde para su prueba será conveniente la notación $I_{[n,m]} = I_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$ siempre que n sea

[12] Véase [58].

un ordinal límite. Así, en el inciso (2) del siguiente lema, toma sentido para todo ordinal n. La prueba del siguiente Lema se realiza vía inducción transfinita y por esta razón omitiremos su prueba.

Lema 4.62. *Sea P un programa el cual es localmente estratificado con respecto al mapeo de nivel $l : B_P \to \gamma$, donde $\gamma > 1$. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. *La sucesión $(I_n)_{n\in\gamma}$ es monótona creciente en n.*
2. *Para cada $n \in \gamma$, donde $n \geq 1$, la sucesión $(I_{[n,m]})$ es monótona creciente en m.*
3. *Para cada $n \in \gamma$ con $n \geq 1$, $T_{[n]}(I_n) = I_n$.*
4. *Sea $B \in B_P$. Si $l(B) < n$ y $B \notin I_n$, entonces para cada $m \in \gamma$ con $m > n$ se tiene que $B \notin I_m$ y, por ello que $B \notin I_{[P]}$. En particular, si $l(B) < n$ y $B \notin I_{[n+1,m]}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $B \notin I_n$ y, por tanto, $B \notin I_{[P]}$.*

Demostración. Véase [58] pág.454, Lemma 4.5. □

Se puede observar que la importancia del inciso (4) se tiene en el control que se da sobre la negación en el sentido que I_{k+1} es un modelo soportado para $P_{[k+1]}$. De la misma manera, vale la pena notar que la sucesión monótona creciente que se produce es obtenida a partir de un operador no monótono.

Corolario 4.63. *Supongamos que las hipótesis del Lema 4.62 se cumplen. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. *Para cualesquiera ordinales n, $m \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes ecuaciones recursivas.*

$$\begin{aligned} I_{[n+1,0]} &= I_n, \\ I_{[n+1,m+1]} &= I_n \cup T_{P(n)}(I_{[n+1,m]}). \end{aligned}$$

2. *Si P es localmente jerarquico, entonces para cada ordinal $n \geq 1$, se tiene que $I_{[n+1,m]} = I_n \cup T_{P(n)}(I_{[n+1,m]})$, donde $P(n)$ se define como un subconjunto de $Base(P)$ que consiste de aquellas cláusulas cuya cabeza es de nivel "n". Por tanto, las iteraciones se estabilizan después de un paso.*

Demostración. Véase la Prueba de 4.62. □

El inciso (2) del Corolario 4.63 nos permite calcular de una manera relativamente sencilla las iteraciones a ejecutar en el caso de programas localmente jerárquicos.

Teorema 4.64. *Sea P un programa el cual es localmente estratificado con respecto al mapeo de nivel $l : B_P \to \gamma$. Entonces $I_{[P]}$ es un modelo soportado minimal para P.*

Demostración. Supongamos las hipótesis del Teorema. A partir de la prueba del Lema 4.62 (Véase [58]) se tiene que $I_{[P]}$ es un modelos soportado para P. Por tanto, solo resta mostrar que $I_{[P]}$ es minimal, lo cual haremos probando la siguiente afirmación mediante inducción transfinita. "Si $J \subseteq I_{[P]}$ y $T_P(J) \subseteq J$, entonces $I_n \subseteq J$ para todo $n \in \gamma$, donde $n \geq 1$".

- Para el caso base, tenemos que $T_{[1]}(J) \subseteq T_P(J) \subseteq J$ y, por ello que J es un modelo para $P_{[1]}$. Pero, por como se construyo, I_1 es el mínimo modelo para $P_{[1]}$ dado que $P_{[1]}$ es definite (Véase prueba del Lema 4.62). Por tanto, $I_1 \subseteq J$ y la afirmación se cumple para $n = 1$.

- Supongamos que la afirmación se cumple para todo $n < \alpha$ con α algún elemento en γ y donde $\alpha > 1$. Veamos que la afirmación se cumple si $n = \alpha$.

  - Caso i. α es un ordinal sucesor, es decir, existe $k > 0$ tal que $\alpha = k + 1$. Tenemos que $I_k \subseteq J$. Mostremos mediante inducción sobre m que $I_{[k+1,m]} \subseteq J$. En efecto, si $m = 0$, tenemos que $I_{[k+1,o]} = I_k \subseteq J$. Supongamos que se cumple para algún $m_0 > 0$, $I_{[k+1,m_0]} \subseteq J$. Sea $A \in I_{[k+1,m_{0+1}]} = T_{[k+1]}(T^{m_0}_{[k+1]}(I_k))$. Entonces existe claúsula $A \leftarrow A_1, \ldots, A_{k_1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_{l_1} \in P_{[k+1]}$ tal que $A_i \in T^{m_0}_{[k+1]}(I_k) = I_{[k+1,m_0]}$ para todo $i = 1, \ldots, k_1$ y $B_j \notin I_{[k+1,m_0]}$ para todo $j = 1, \ldots, l_1$. Pero $l(B_j) < k$ para cada j. Aplicando el Lema 4.62 inciso (4), vemos que no hay $B_j \in J$ dado que $J \subseteq I_{[P]}$. Luego, como $I_{[k+1,m_0]} \subseteq J$ (hipótesis), tenemos que $A_i \in J$ para cada i. Por lo tanto, $A \in T_{[k+1]}(J) \subseteq T_P(J) \subseteq J$, de lo cual se infiere que $I_{[k+1,m_0+1]} \subseteq J$, como se requería.
  - Caso ii. α es un ordinal límite. En este caso, $I_\alpha = \bigcup_{n<\gamma} I_n$ e $I_n \subseteq J$ para todo $n < \alpha$ (hipótesis). Por tanto, $I_\alpha \subseteq J$.

  Esto finaliza la inducción y por tanto se tiene el resultado.

□

El Teorema anterior (4.64) puede fortalecerse si se pide que el ordinal γ, respecto al mapeo de nivel, sea contable teniendo como resultado que $I_{[P]}$ es un modelo perfecto para P[13].

[13] Tal resultado puede revisarse en [58], pág.460, Teorema 4.9.

Ejemplo 4.65. *Dado que los programas localmente estratificados son generalizaciones de los programas localmente jerárquicos, es claro que cada programa localmente jerárquico posee un único modelo perfecto. Sin embargo, esto no se cumple para los programas ϕ^*-accesibles. Para ello, obsérvese el siguiente programa.*

$$p \leftarrow \neg q$$
$$q \leftarrow r, \neg p.$$

Este programa es ϕ^*-accesible (incluso es aceptable) con respecto al único modelo soportado $M = \{p\}$. Sin embargo, tomando $I = \{q\}$ el cual también es un modelo para este programa y, además, I es preferible(2.47) a M, donde a su vez, M es preferible a I. Así, P no tiene un modelo perfecto.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha desarrollado un estudio semántico de la programación lógica desde una perspectiva basada en el estudio de algunos operadores vía sus puntos fijos, cubriendo una gran cantidad de material que se encuentra en otras áreas ubicadas fuera del campo de la programación lógica. Además, como se pudo observar en este trabajo, el enfoque usual del análisis semántico de los programas lógicos falla cuando la semántica es expresada mediante puntos fijos de operadores los cuales no son monótonos en general. Por tanto, se optó por el estudio y desarrollo de métodos para este tipo de situaciones logrando ampliar el alcance de aplicación de la semántica dada a través de puntos fijos. De esta manera, una gran parte del trabajo presentado, fue manejado por lo que se denomina el análisis semántico de la programación lógica, donde se presentaron una gran cantidad de resultados los cuales nos permitieron establecer relaciones entre la semántica basada en teoría de dominios y la basada en "métricas", destacando el papel que jugaron las topologías de Scott y la de "Cantor". Finalmente, con el estudio realizado de los teoremas de punto fijo sobre los espacios métricos generalizados se contribuyó a la teoría desarrollada en esta área, proporcionando una gran compilación de extensiones del Teorema de contracción de Banach junto con los resultados concernientes a sus respectivas extensiones. Más aún, se puede plantear la pregunta siguiente: ¿qué tanto se puede debilitar el espacio de trabajo para que aun "soporte" una versión "razonable" del teorema de Banach?. Destacando con ello que aun queda mucho trabajo por hacer en este camino y las aplicaciones que se pueden hacer con este tipo trabajo son nuevas e ingeniosas favoreciendo el desarrollo en otras áreas que uno ni se imagina podrían estar tan apegadas a un desarrollo matemático.

Como ejemplo de lo mencionado en las últimas líneas del parrafo anterior, nos gustaría mencionar una de las principales aplicaciones que tiene este trabajo hoy en día en una área como lo es la inteligencia artificial y, en particular, en el desarrollo de redes neuronales artificiales. De esta manera, podemos decir que una de las principales metas de la inteligencia artificial es la creación de "agentes" con inteligencia "similar" a la humana. Así, un agente dotado con este tipo de inteligencia debería ser capaz de "razonar" y representar datos bien estructurados, tales como los encontrados en lógica, en matemáticas e incluso como los realizados por un humano. Por otro lado, este "agente" también debería poder realizar un razonamiento e interpretación con datos incompletos, además de poder aprender mediante ejemplos y refinar el proceso de razonamiento como resultado de esto. Estos dos aspectos del proceso de razonar y la inteligencia artificial, recién mencionada, son complementarias e integradas en la inteligencia humana. Así, los sistemas simbólicos basados en lógica son buenas implementaciones de lo primero (estilo de razonar) y donde las redes neuronales o sistemas de conexiones son buenas implementaciones de lo segundo. Por lo tanto, estos dos aspectos son buenos candidatos para esta integración con la inteligencia humana. A grandes rasgos podemos decir lo siguiente de estos aspectos mencionados: los sistemas simbólicos usualmente están basados en una lógica de un tipo. Estos sistemas poseen una semántica declarativa y el "conocimiento" puede ser modelado en ellos como si la modelara un humano. Así, su uso facilita el manejo de objetos y el proceso de conocimiento. Desafortunadamente, tales sistemas son difíciles de refinar a partir de datos reales, los cuales usualmente son "ruidosos" y, además de que, son complicados de diseñar si no eres un completo experto en la materia. Por la otra parte, las redes neuronales artificiales son un poderoso enfoque para el aprendizaje automático inspirado por la biología y la neurociencia. Más aún, no importa si los datos son ruidosos e inconsistentes estos son capaces de adaptarse a nuevas situaciones. También se dice que son robustos en el siguiente sentido: pese a la falla de partes en el sistema, este continua funcionando en su totalidad. Sin embargo, estos no poseen una semántica declarativa y tienen dificultades en el manejo de estructura de datos. Además de ser modelados sobre los fenomenos naturales, los sistemas de conexiones son básicamente modelos continuos de computación. En esencia, lo que se puede lograr con lo visto en este trabajo, es ver como los operadores semánticos de los programas lógicos proposicionales, dígase P, pueden ser computados por redes neuronales y como estos mismos operadores pueden ser aproximados en el caso de programas de primer orden.

Apéndice A

Teoría Básica Sobre Orden y Dominios

La teoría de dominios[1] es una teoría matemática demasiado grande con aplicaciones en muchas áreas, por ejemplo; en la semántica denotacional, teoría de tipos, recursividad, etc. Por ello, se elige una perspectiva en particular, es decir, la teoría de dominio como una teoría de aproximación y de cómputo. Así, un dominio es una estructura que modela la noción de aproximación y de cómputo. Un cómputo realizado usa un algoritmo, producto de una cantidad discreta de pasos, después de cada paso hay más información disponible sobre el resultado del cómputo. De esta manera, el resultado obtenido después de cada paso, puede ser visto como una aproximación del resultado final. El resultado final puede ser alcanzado mediante un número finito de pasos, por ejemplo cuando se calcula el máximo común divisor de dos enteros positivos vía el algoritmo de Euclides. Sin embargo, puede suceder el caso de que un computo nunca pare, en tal caso el resultado es la sucesión de aproximación obtenida en cada paso durante el computo. Esta última situación ocurre cuando se computa sobre objetos infinitos, tales como los números reales. Así, un modelo apropiado de aproximación puede verse como un buen modelo de cómputo.

Hablando de manera un poco más precisa, un dominio, es una estructura dotada de una relación binaria $\sqsubseteq$ (orden parcial), en el siguiente sentido: se entiende por $x \sqsubseteq y$, si x es una aproximación de y o y contiene al menos tanta información como x. Para modelos infinitamente computables se requiere que el dominio sea completo, en el sentido de que, cada sucesión creciente de aproximaciones debe ser representada por

[1] Nuestra referencia base para teoría de Dominios será el libro [62]

un elemento en el dominio, en otras palabras, debe poseer un supremo. Este último requerimiento es suficiente para la obtención de puntos fijos en funciones continuas y, la construcción de espacios de funciones.

A.1. COPO'S

Se iniciará presentando la mínima cantidad de teoría que se necesitará de la teoría de conjuntos ordenados [véase [16]].

Definición A.1. *Sea D un conjunto. Una* ***relación binaria*** $\sqsubseteq$ *sobre D, es un subconjunto de $D \times D$.*

Usualmente se escribirá; $x \sqsubseteq y$, en lugar de $(x, y) \in \sqsubseteq$ siempre que $x, y \in D$. Más aún, se denotará por $x \sqsubset y$ cuando se haga referencia a que $x \sqsubseteq y$ y $x \neq y$.

Definición A.2. *Sean D conjunto no vacío y $\sqsubseteq$ una relación binaria sobre D. Se dice que $\sqsubseteq$ es un* ***orden parcial*** *si $\sqsubseteq$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica. En este caso, se dice que la pareja $(D, \sqsubseteq)$ es un* ***conjunto parcialmente ordenado****, un copo o simplemente un* ***orden parcial***[2]*.*

Definición A.3. *Sean $x, y \in D$ con D-copo. Se dice que x y y son* ***comparables****, si se cumple alguno de los siguientes casos; $x \sqsubseteq y$ o $y \sqsubseteq x$. En otro caso, se dice que x y y son* ***incomparables****.*

Si A es un subconjunto no vacío en D, con $(D, \sqsubseteq)$-copo, diremos que A es una **cadena** si para cualesquiera dos elementos de A estos son comparables respecto a $\sqsubseteq$; diremos que $\sqsubseteq$ es un **orden total**, si D en si mismo está totalmente ordenado por $\sqsubseteq$; A es una **ω-cadena**, si A es una sucesión creciente, dígase $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$ con $a_i \in A$, donde ω denota el primer ordinal límite.

Definición A.4. *Sean $A \subseteq D$ subconjunto no vacío y $(D, \sqsubseteq)$-copo. Entonces, A es llamado* ***dirigido*** *si para todo $a, b \in A$, existe $c \in A$ tal que: $a \sqsubseteq c$ y $b \sqsubseteq c$.*

Definición A.5. *Sean $(D, \sqsubseteq)$ conjunto ordenado, $A \subseteq D$ y $d \in D$.*

- *A es un* ***conjunto-superior*** *si dado $a \in A$, $b \in A$ para todo $a \sqsubseteq b$. Se denotará por $\uparrow A$ al conjunto de todos los elementos por encima de algún elemento de A. Si no hay confusión se puede abreviar $\uparrow \{a\}$ como $\uparrow a$. Nociones duales para formar al conjunto-inferior y a $\downarrow A$.*

---

[2]Algunas veces se hace referencia a los conjuntos parcialmente ordenados, $(D, \sqsubseteq)$, como un **conjunto ordenado** y a la relación, $\sqsubseteq$, como un **orden** sobre D.

- *d es llamada una **cota superior (inferior)** para A si, d está por encima (abajo) de cualquier elemento de A. A menudo se denotará por $A \sqsubseteq d$. Se define por $ub(A)\big(lb(A)\big)$ al conjunto de todas las cotas superiores (inferiores) de A.*

- *d es llamado un **elemento máximal (mínimal)** para D si, no existe otro elemento en D sobre (debajo) d, es decir, $\uparrow \{d\} \cap D = \{d\}$. Los elementos minimales (máximales) de $ub(A)\big(lb(A)\big)$ son llamados, cotas superiores (inferiores) minimales (máximales) de A. Denotado tal conjunto por $mub(A)\big(mlb(A)\big)$.*

- *Si todo elemento $x \in D$ cumple que $x \sqsubseteq d\big(d \sqsubseteq x\big)$, entonces d se dice que es el **elemento máximal (mínimo[3])** en D.*

- *Si $ub(A)$ posee un elemento mínimo, dígase d, entonces d es llamado el **supremo (o Join)**. Se denotará por, $d = \sqcup A$. Análogamente para el **ínfimo**, denotado por $d = \sqcap A$ [4].*

- *D es una **$\sqcup$-semilattice ($\sqcap$-semilattice)** si, el supremo (ínfimo) para cada pareja de elementos en D existe. Si D es tanto una $\sqcup$- y $\sqcap$-semilattice, entonces D es llamada una **lattice**. Una lattice es llamada **completa** si, el supremo y el ínfimo existen para cualquier subconjunto en D.*

Definición A.6. *Sea $(D, \sqsubseteq)$ un copo. Entonces se define lo siguiente:*

1. *$(D, \sqsubseteq)$ es un **orden parcial ω-completo** (ω-cpo) si D tiene un elemento bottom y existe $\sqcup A$ en D para cada ω-cadena $A \in D$.*

2. *$(D, \sqsubseteq)$ es una **cadena completa**, si cada cadena en D posee un supremo.*

3. *$(D, \sqsubseteq)$ es un **orden parcial completo** (o cpo), si existe $\sqcup A$ en D para cada A subconjunto dirigido en D y D tiene un elemento bottom.*

4. *$(D, \sqsubseteq)$ es una **semi-lattice superior completa**, si existe $\sqcup A$ en D para cada A subconjunto dirigido en D y existe $\sqcap A$, para cada $A \subseteq D$.*

5. *$(D, \sqsubseteq)$ es una **lattice completa**, si para cada A subconjunto de D existen $\sqcup A$ e $\sqcap A$ en D.*

Observación A.7.

[3]También es llamado el elemento bottom, denotado por $\perp$

[4]Es claro que el supremo de A, $\sqcup A$, es único si este existe, lo cual se sigue de manera inmediata por la antisimetría.

Tomando $A = D$ en la definición anterior se puede probar que una semi-lattice superior completa o una lattice completa siempre poseen un elemento bottom, y que una lattice completa siempre posee un elemento top.

Cada concepto definido en la definición A.6 es aparantemente menos general que el concepto predecesor en la defínción.

Hay varias implicaciones entre las nociones formuladas en la definición A.6 que son evidentes, por ejemplo cada cpo es una cadena completa. Sin embargo, el siguiente hecho es menos trivial el cual se enunciara simplemente pero uno puede dirigirse a [1] para más detalles sobre la prueba y a [45] para una revisión sobre cadenas completas.

Proposición A.8. *Sea $(D, \sqsubseteq)$ un copo. Entonces D es un cpo si, y solo si, D tiene un elemento bottom y es una cadena completa.*

A.2. Dominio de Scott

Muchos aspectos teóricos de las ciencias de la computación dependen de la noción de conjunto parcialmente ordenado. Sin embargo, con frecuencia son requeridas más estructuras, además de las proporcionadas por un orden parcial. Por ejemplo, se necesitan estructuras extras para modelar lenguajes de programación estándar que proporcionen una teoría abstracta de la computabilidad tanto como una teoría viable sobre puntos fijos. En la actualidad, se conoce que la teoría de Scott sobre dominios proporciona un espacio con una estructura adecuada para estudiar los objetivos mencionados.

Definición A.9. *Sean $(D, \sqsubseteq)$ un copo y $a \in D$. Se dice que a es un elemento compacto o finito en D si, siempre que $A \subseteq D$ dirigido y $a \sqsubseteq \sqcup A$, se cumple $a \sqsubseteq x$ para algún $x \in A$. El conjunto de todos los elementos compactos en D, se denota por D_c*[5].

Definición A.10. *Sea $(D, \sqsubseteq)$ un cpo.*

- *D es un **cpo algebraico** si, para cada $x \in D$, el conjunto $approx(x) = \{a \in D_c \mid a \sqsubseteq x\}$ es dirigido y $x = \sqcup approx(x)$.*
- *D es **consistentemente completo** si, el conjunto $\{x, y\} \subset D$ es consistente (es decir, x e y tienen una cota superior en común), entonces $\sqcup\{x, y\}$ existe en D.*

Definición A.11. *Un **dominio de Scott-Ershov**, dominio de Scott o simplemente dominio es un cpo algebraico consistentemente completo.*

[5] $D_c \neq \emptyset$, ya que en un cpo bottom siempre es compacto.

A.3. Funciones monótonas

Sea D un conjunto, $A \subseteq D$ y $f : D \to D$ una función, entonces el conjunto imagen de A bajo f, $\{f(a) \mid a \in A\}$, se denota por $f(A)$. Al hablar de iterar una función, digase f, se puede definir inductivamente de la siguiente manera: para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \in D$, $f^0(x) = x$ y $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.

Definición A.12. *Sean D, E copo's y $f : D \to E$ una función.*

- *f es llamada **monótona**, si para todo $a, b \in D$ con $a \sqsubseteq b$, se tiene que $f(a) \sqsubseteq f(b)$ en E*[6].
- *Si D, E son ω-cpo, entonces f es llamada ω-**continua** si f es monótona y para cada A, ω-cadena en D, se tiene que $\bigsqcup f(A) = f(\bigsqcup A)$.*
- *Si D, E son cpo, entonces f es llamada **continua (u orden continuo)** si f es monótona y para cada subconjunto dirigido A en D se tiene $\bigsqcup f(A) = f(\bigsqcup A)$.*

Observación A.13. *Si f es monotona, entonces la imagen de cualquier ω-cadena (conjunto dirigido) bajo f es una ω-cadena (conjunto dirigido). Por tanto, los dos supremos requeridos en la definición anterior siempre existen.*

Sin mucha dificultad se puede demostrar el siguiente resultado que viene siendo una forma de caracterizar a las funciones continuas entre cpo,s [véase pág.5 de libro-base para la prueba].

Proposición A.14. *Una función entre cpo,s, dígase $f : D \to E$, es continua si, y solo si, f es monotona y para cada cadena A en D, $\bigsqcup f(A) = f(\bigsqcup A)$*[7].

Ahora, se puede definir la **potencia ordinal** $f \uparrow \alpha$ **de una función monótona**, f, sobre un cpo $(D, \sqsubseteq)$ como sigue:

- $f \uparrow 0 = \bot$.
- Para cualquier ordinal α, $f \uparrow (\alpha + 1) = f(f \uparrow \alpha)$.
- Si α es un ordinal límite, $f \uparrow \alpha = \bigsqcup\{f \uparrow \beta \mid \beta \leq \alpha\}$.

Observación A.15. *Las potencias ordinales de f están bien definidas. En efecto, dado que $(D, \sqsubseteq)$ es un cpo, se puede asegurar que $(D, \sqsubseteq)$ es una cadena completa probando que $f \uparrow \beta \sqsubseteq f \uparrow \alpha$ con $\beta \leq \alpha$, via inducción transfinita.*

---

[6] f es llamada antítona si $f(b) \sqsubseteq f(a)$ con $a \sqsubseteq b$.

[7] Diferentes formas de formular la continuidad se pueden encontrar en [45].

De manera más general, los mismos comentarios se aplican a las potencias ordinales, $f^{\alpha}(x)$, para algún (cualquiera) $x \in D$ tal que $x \sqsubseteq f(x)$, de la siguiente manera: $f^0(x) = x$, para cualquier ordinal α $f^{\alpha+1}(x) = f(f^{\alpha}(x))$, y si α es un ordinal límite $f^{\alpha}(x) = \bigsqcup\{f^{\beta}(x) \mid \beta \leq \alpha\}$.

Definición A.16. *Sean D un conjunto y $f : D \to D$ una función.*

- *Si $x \in D$ satisface $f(x) = x$, entonces x es llamado* ***un punto fijo*** *de f.*
- *Si $y \in D$ con $(D, \sqsubseteq)$ copo tal que $y \sqsubseteq f(y)\big(f(y) \sqsubseteq y\big)$, entonces y es llamado* ***un punto post-fijo (un punto pre-fijo)****.*
- *Si x es punto fijo de f, tal que para cualquier punto fijo y de f se tiene $x \sqsubseteq y$, entonces x es llamado el* ***menor punto fijo*** *de f, denotado por $lpf(f) = x$. De manera completamente análoga, se pueden definir el* ***menor punto post-fijo*** *y el* ***menor punto pre-fijo****.*

Los siguientes dos teoremas son fundamentales en el manejo de la semántica de programas lógicos y cuyas pruebas pueden consultarse en [62] y [63].

Teorema A.17 (Kleene)**.** *Sean $(D, \sqsubseteq)$ un $\omega - cpo$ y $f : D \to D$ es ω-continua. Entonces, f tiene un menor punto fijo $x = f \uparrow \omega$ el cual es, también, su menor punto pre-fijo.*

Dado que toda función continua, es ω-continua, el resultado A.17 puede ser aplicado a funciones continuas sobre cpos. Más aún, si la función no es ω-continua pero es monotona, la existencia del menor punto fijo puede garantizarse de la siguiente manera.

Teorema A.18 (Knaster-Tarski)**.** *Sean $(D, \sqsubseteq)$ un cpo, $f : D \to D$ monótona y $x \in D$ tal que $x \sqsubseteq f(x)$. Entonces existe $a \in D$ tal que a es el menor punto fijo de f con $x \sqsubseteq a$, el cual es también el menor punto pre-fijo de f, y existe el menor ordinal α tal que $a = f^{\alpha}(x)$. Más aún, f admite un menor punto fijo a, el cual es también, su menor punto pre-fijo.*

Apéndice B

Fundamentos Sobre Topología General

En este apartado se enunciarán las definiciones básicas respecto a la topología general así como algunos resultados que se ocuparon a lo largo del trabajo dejando de lado la prueba de estos resultados y remitiendo al lector a las referencias base para una mayor revisión de estas, véase [38] y [68].

Definición B.1. *Una* ***topología*** *sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X, dígase τ, donde los elementos de τ son llamados* ***conjuntos abiertos*** *de τ y, además, satisfacen las siguientes propiedades.*

- $\emptyset,\ X \in \tau$.
- *La unión arbitraria de elementos en τ, es un elemento de τ.*
- *La intersección finita de elementos en τ, es un elemento de τ.*

La pareja (X, τ) es llamada ***espacio topológico****.*

Definición B.2. *Sean dos topologías τ_1, τ_2 sobre un conjunto X. Se dice que τ_1 es* ***más debil*** *o* ***más gruesa*** *que τ_2, o que τ_2 es* ***más fuerte*** *o* ***más fina*** *que τ_1, si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*

Ejemplo B.3. *Dado un conjunto arbitrario X, se define la topología más gruesa sobre X como aquella que solo posee a los conjuntos $\emptyset$ y X como abiertos de esta, y se llama* ***la topología indiscreta****. En el otro extremo, se tiene que la topología más fina sobre X es aquella donde todo subconjunto de X es un abierto de esta, llamada* ***la topología discreta****.*

Definición B.4. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces, una vecindad de X es un conjunto V, que contiene un abierto O donde x es un elemento de O, es decir, $x \in O \subseteq V$ con O-abierto. El sistema de vecindades de x, V_x, es la colección de todas las vecindades de x.*

Definición B.5. *Sea X un espacio topológico. Una **base de vecindades en** x, es una subcolección $B_x \subseteq V_x$ tal que, para cada $V \in V_x$ existe $B \in B_x$ con $B \subseteq V$. Así, $V_x = \{V \subseteq X \mid B \subseteq V \text{ para algún } B \in B_x\}$. Los elementos de B_x son llamados **vecindades básicas de** x.*

Teorema B.6. *Sea X un espacio topológico. Para cada $x \in X$, sea B_x una base de vecindades en x. Entonces, se cumple lo siguiente.*

1. *Si $N \in B_x$, entonces $x \in B$.*
2. *Si $N_1, N_2 \in B_x$, entonces existe $N_3 \in B_x$ tal que $N_3 \subseteq N_1 \cap N_2$.*
3. *Si $N \in B_x$, existe algún $N_0 \in B_x$ tal que si $y \in N_0$ entonces existe $P \in B_y$ con $P \subseteq N$.*
4. *$A \subseteq X$ es un abierto si, y solo si, cada punto en A tiene una vecindad básica.*

Recíprocamente, supongase que X es un conjunto y B_x es una colección de subconjuntos de X, llamadas vecindades básicas de x, que se asignan a cada elemento $x \in X$ de tal manera que 1.,2. y 3. (enunciados arriba) se satisfacen. Entonces, si se definen a los conjuntos G de la siguiente manera: G es abierto si, y solo si, G contiene una vecindad básica de cada uno de sus puntos, como en 4., entonces se obtiene una topología sobre X en la cual B_x es una base de vecindades en x para cada $x \in X$.

Definición B.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una **base** para τ*[1] *es una colección de subconjuntos de X, $\mathcal{B} \subseteq \tau$, tal que cada elemento de τ es una unión de elementos en $\mathcal{B}$. Equivalentemente, $\mathcal{B}$ es una base para τ si, y solo si, para cada $V \in \tau$ y $x \in V$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$. Además, una colección $\mathcal{C} \subseteq \tau$ es llamada una **subbase para** τ si la colección de todas las intersecciones finitas de elementos en $\mathcal{C}$ forman una base para τ.*

Teorema B.8. *Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos en un conjunto X es una base para una topología sobre X si, y solo si, las siguientes condiciones se cumplen.*

- $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

[1] Como abuso de terminología se enuncia, una base para X.

- *Para cada B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Además, cualquier colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es una base para alguna topología sobre X, dígase, la topología formada por tomar todas las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$.

Demostración. Véase pág.38, Teorema 5.3 en [68]. □

Teorema B.9. *Sea $\mathcal{B}$ una colección de conjuntos abiertos en un espacio topológico X. Entonces, $\mathcal{B}$ es una base para X si, y solo si, para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ es una base de vecindades en x.*

Demostración. Véase pág.39, Teorema 5.4 en [68]. □

Como se hizo notar en la Definición B.1, dado un espacio topológico (X, τ), los elementos de τ son llamados conjuntos abiertos. De lo anterior, F subconjunto de X se define como **cerrado** si, y solo si, $X \setminus F$, su complemento, es un conjunto abierto. Por tanto, de manera inmediata se tiene que $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados, que la union finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Así, dado $E \subseteq X$ arbitrario, la intersección de todos los conjuntos cerrados en X que contienen a E es un conjunto cerrado, denotado por $\overline{E}$, además, es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a E y es llamado la **clausura** de E. Claramente se tiene que, un conjunto E es cerrado si, y solo si, $E = \overline{E}$. De manera dual, se define el **interior** de un subconjunto U de X, denotado por U°, donde este será el conjunto abierto más grande contenido en U y, también, es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en U. Por último, y de manera clara, se tiene que U es abierto si, y solo si, $U = U^\circ$.

Teorema B.10. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos tal que la unión de una subfamilia finita es un elemento de $\mathcal{F}$, la intersección de una subfamilia arbitraria no vacía es un elemento de $\mathcal{F}$ y $X = \bigcap\{F \mid F \in \mathcal{F}\}$ es un elemento de $\mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos cerrados en X relativa a la topología que consiste de todos los complementos de los elementos de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Véase pág. 40, Teorema 4 en [38]. □

Una noción fundamental que se considerará entre espacios topológicos es la de función continua. Diversas formas de formular este concepto se pueden encontrar en la literatura en cuestión, pero quizas, el siguiente sea uno de los más intuitivos.

Definición B.11. *Sean X, Y espacios topológicos y supóngase que $f : X \to Y$ es una función. Entonces, f es* ***continua en*** *$x \in X$ si, para cada $V(f(x))$ vecindad de $f(x)$ en Y, existe una vecindad $U(x)$ de x en X tal que $f(U) \subseteq V$. Se dice que f es* ***continua*** *si, f es continua en x para cada $x \in X$.*

Teorema B.12. *Sean X, Y espacios topológicos. Entonces, se cumple lo siguiente.*

(1) Sea $A \subseteq X$, entonces $x \in \overline{A}$ si, y solo si, existe una red $(s_i)_{i \in \mathcal{I}} \subseteq A$ tal que $s_i \to x$.

(2) $A \subseteq X$ es abierto de X si, y solo si, siempre que $x \in A$ y (s_i) es una red tal que $s_i \to x$, entonces (s_i) eventualmente se encuentra en A.

(3) Sea $C \subseteq X$. C es cerrado si, y solo si, siempre que (s_i) red en C y $s_i \to x$, entonces $x \in C$.

(4) Una función $f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si, y solo si, para cada $s_i \to x$ en X, se tiene que $f(s_i) \to f(x)$ en Y.

Demostración.

1. Para la suficiencia véase el Ejemplo 11.4 de [68] en la pag. 74. Y, para la necesidad, se sigue el resultado de manera clara.

2. Suficiencia, supógase que $A \subseteq X$ es un abierto y $x \in A$ tal que existe red (s_i) con $s_i \to x$. Entonces, es claro a partir de la definción de convergencia de una red que, s_i eventualmente estará en A. Necesidad, supóngase que se cumplen las condiciones del problema. Se afirma que A contiene una vecindad de cada uno de sus puntos. En efecto, sean $x \in A$ y $\mathcal{V}_x$ el sistema de vecindades de x. Sea $\mathcal{I} = \{(y, V) \mid y \in V \in \mathcal{V}_x\}$ ordenado mediante $(y_1, V_1) \leq (y_2, V_2)$ si, y solo si, $V_2 \subseteq V_1$. De manera inmediata se puede verificar que $(\mathcal{I}, \leq)$ es un conjunto dirigido y, se define la red $s : \mathcal{I} \to X$ mediante $s(y, V) = y$ la cual también se verifica sin ninguna dificulad que $s_{(y,V)} \to x$. Por tanto, se sigue de la hipótesis que, la red eventualmente pertenece a A. Sea (y_0, V_0) de tal forma que $s_{(y,V)} = y \in A$ si $(y_0, V_0) \leq (y, V)$. Por último, como $(y_0, V_0) \leq (y, V_0)$ para todo $y \in V_0$, entonces $x \in V_0 \subseteq A$. Por tanto, A es abierto.

3. Se sigue de manera inmediata a partir de (1) y del hecho que $C = \overline{C}$ si C es cerrado.

4. Véase el Teorema 11.8 en la pag. 75 de [68].

$\square$

Otras propiedades que habrá de considerarse, son aquellas que nos permitan garantizar la separabilidad de puntos distintos en un espacio topológico por medio de conjuntos abiertos. Lo cual, se realiza usualmente por medio de los siguientes axiomas.

Definición B.13. *Sea X un espacio topológico.*

- *Se dice que X es un **espacio** T_0 si, para cualesquiera $x \neq y$ en X, existe un conjunto abierto que contiene a uno, y solo uno, de los dos puntos.*
- *Se dice que X es un **espacio** T_1 si, para cualesquiera $x \neq y$ en X, existe una vecindad de cada punto que no posee al otro.*
- *Se dice que X es un **espacio Hausdorff** o T_2 si, para cualesquiera $x \neq y$ en X, existen vecindades ajenas para x e y.*

Una de las propiedades importantes en los espacios de Hausdorff es el siguiente resultado.

Teorema B.14. *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es Hausdorff si, y solo si, cada red convergente en X converge a lo más a un punto.*

Demostración. Véase pág. 67, Teorema 3 en [38]. $\square$

Por otro lado, muchas veces es necesario no tener una cantidad demasiado grande de conjuntos abiertos, en cierto sentido. Por ello se introduce la siguiente definición.

Definición B.15. *Sea X un espacio topológico. Entonces, una **cubierta abierta** de X es una colección de conjuntos abiertos U_i, dígase $\{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$, tal que $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = X$. Una **subcubierta** de una cubierta abierta $\{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ es una cubierta $\{V_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ donde $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$. Por último, se dice que X es un **espacio topológico compacto** si, cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Finalmente, es momento de hablar sobre distintos metodos para la obtención de nuevos espacios topológicos. En la teoría hay varias formas en que uno puede crear nuevos espacios topológicos a partir de uno dado, de este modo presentaremos dos de tales procesos: el primero formando subespacios de un espacio topológico dado y el segundo mediante el producto de familias de espacios topológicos.

Definición B.16. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $S \subseteq X$ subconjunto de X. Entonces la colección $\tau_S = \{S \cap O \mid O \in \tau\}$ da lugar a una topología sobre S, llamada la **topología relativa** o el **subespacio topológico** para S. El espacio (S, τ_S) es llamado un subespacio de (X, τ), o simplemente subespacio de X.*

A lo largo del trabajo siempre que se tenga un espacio topológico X y un subconjunto S de X, se asumirá que S ha sido dotado con la topología relativa de X a no ser que se establezca lo contrario. Nótese, que los conjuntos $S \cap O$ con O abierto en X, no necesariamente es un abierto en X a menos que S sea un abierto en X.

Ahora, supongamos que X_i es un espacio topológico para cada i, donde $i \in \mathcal{I}$ para algún $\mathcal{I}$ conjunto de índices. Comunmente, denotaremos el producto de la familia $\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ como $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i = \{f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i \mid f(i) \in X_i\}$. Luego, podemos asociar con cualquiera de tales productos los mapeos π_j con $j \in \mathcal{I}$, donde $\pi_j : \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \to X_j$ definido mediante $\pi_j(f) = f(j)$. De hecho, π_j es denominado la **proyección sobre el j-ésimo factor**.

Existe una topología natural definida sobre $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ y determinada por las funciones proyección como sigue. Elíjase cualquier colección finita de elementos en $\mathcal{I}$, dígase $\{i_1, \ldots, i_n\}$ y sus correspondientes conjuntos abiertos $U_{i_j} \in X_{i_j}$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Entonces, tómese la colección de los conjuntos de la forma $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ como una base para la topología sobre $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, llamada la **topología producto** o el **producto topológico Tychonoff**. De hecho, los conjuntos $\pi_i^{-1}(U_i)$ forman una subbase para esta topología, donde $i \in \mathcal{I}$ y U_i es un conjunto abierto en X_i. Por último, es inmediato que cada una de las proyecciones π_i es continua relativa al producto topológico y a la topología dada sobre el factor X_i.

El siguiente Teorema resume algunas de las propiedades para los subespacios y productos topológicos relevantes para el trabajo.

Teorema B.17. *Los siguientes resultados se cumplen.*

1. *Subespacios de T_0 o espacios Hausdorff son respectívamente T_0 o Hausdorff.*

2. *Si X es compacto y $S \subseteq X$, entonces S es compacto (como un espacio topológico en si mismo). Si X es Hausdorff y S es compacto, entonces S es un subconjunto cerrado de X.*

3. *Un producto no vacío $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ es T_0 o Hausdorff si, y solo si, cada espacio X_i es T_0 o Hausdorff para cada i, respectivamente.*

4. *(**Teorema de Tychonoff**) Un producto no vacío $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ es compacto si, y solo si, cada factor X_i es compacto.*

5. *Una red (f_λ) en un espacio producto $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ converge a f si, y solo si, para cada índice $i \in \mathcal{I}$, tenemos que $\pi_i(f_\lambda) \to \pi_i(f)$ en X_i.*

Bibliografía

[1] Abramsky, S., & Jung, A. Domain theory. In Handbook of logic in computer science. Oxford University Press. (1994).

[2] Apt, K. R. From logic programming to Prolog (Vol. 362). London: Prentice Hall. (1997).

[3] Apt, K. R., Blair, H. A., & Walker, A. Towards a theory of declarative knowledge. In Foundations of deductive databases and logic programming (pp. 89-148). (1988).

[4] Apt, K. R., & Bezem, M. Acyclic programs. New generation computing, 9(3-4), 335-363. (1991).

[5] Apt, K. R., & Pedreschi, D. Modular termination proofs for logic and pure Prolog programs. Centrum voor Wiskunde en Informatica. (1993).

[6] Belnap, N. D. A useful four-valued logic. In Modern uses of multiple-valued logic (pp. 5-37). Springer, Dordrecht. (1977).

[7] Bezem, M. A. Characterizing termination of logic programs with level mappings. Department of Computer Science [CS], (R 8912). (1989).

[8] Bonsangue, M. M., Van Breugel, F., & Rutten, J. J. M. M. Alexandroff and Scott topologies for generalized metric spaces. Annals of the New York Academy of Sciences, 806(1), 49-68. (1996).

[9] Bowen, K. A. Programming with full first order logic. School of Computer and Information SCience, Syracuse University. (1980).

[10] Cavedon, L. Continuity, Consistency, and Completeness Properties for Logic Programs. In ICLP (pp. 571-584). (1989, June).

[11] Cavedon, L. Acyclic logic programs and the completeness of SLDNF-resolution. Theoretical Computer Science, 86(1), 81-92. (1991).

[12] Clark, K. L. Negation as failure. In Logic and data bases (pp. 293-322). Springer, Boston, MA. (1978).

[13] cois Fages, F. Consistency of Clark's completion and existence of stable models. Journal of Methods of logic in computer science, 1(1), 51-60. (1994).

[14] Colmerauer, A., Kanoui, H., Pasero, R., & Roussel, P. Un systeme de communication homme-machine en francais. Technical report, Groupe de Intelligence Artificielle Universite de Aix-Marseille II. (1973).

[15] Davis, M., & Putnam, H. A computing procedure for quantification theory. Journal of the ACM (JACM), 7(3), 201-215. (1960).

[16] Davey, B. A., & Priestley, H. A. Introduction to lattices and order. Cambridge university press. (2002).

[17] Dung, P. M., & Kanchanasut, K. A Fixpoint Approach to Declarative Semantics of Logic Programs. In NACLP (Vol. 89, No. 1, pp. 604-625). (1989, October).

[18] Edalat, A., & Heckmann, R. A computational model for metric spaces. Theoretical computer science, 193(1-2), 53-73. (1998).

[19] Ferry, A. P. Topological characterizations for logic programming semantics (Doctoral dissertation, University of Michigan). (1994).

[20] Fitting, M. A Kripke-Kleene semantics for logic programs. The Journal of Logic Programming, 2(4), 295-312. (1985).

[21] Fitting, M. Bilattices and the semantics of logic programming. The Journal of Logic Programming, 11(2), 91-116. (1991).

[22] Fitting, M. Kleene's three valued logics and their children. Fundamenta informaticae, 20(1, 2, 3), 113-131. (1994).

[23] Fitting, M. Fixpoint semantics for logic programming a survey. Theoretical computer science, 278(1-2), 25-51. (2002).

[24] Fitting, M., & Ben-Jacob, M. Stratified, weak stratified, and three-valued semantics. Fundamenta Informaticae, 13(1), 19-33. (1990).

[25] Flagg, B., & Kopperman, R. Continuity spaces: Reconciling domains and metric spaces. Theoretical Computer Science, 177(1), 111-138. (1997).

[26] Gelfond, M., & Lifschitz, V. The stable model semantics for logic programming. In ICLP/SLP (Vol. 88, pp. 1070-1080). (1988, August).

[27] Gilmore, P. C. A proof method for quantification theory: its justification and realization. IBM Journal of research and development, 4(1), 28-35. (1960).

[28] Green, C. Application of theorem proving to problem solving. In Readings in Artificial Intelligence (pp. 202-222). (1981).

[29] Hansson, Å., Haridi, S., & Tärnlund, S. Å. Properties of a logic programming language. Labor., Department, Univ. (1981).

[30] Haridi, S., & Sahlin, D. Evaluation of logic programs based on natural deduction. In Proc. 2nd Workshop on Logic Programming. (1983).

[31] Hayes, P. J. Computation and deduction. (1972).

[32] Heinze, R. Topological Investigations of the Operators of the Well-Founded, and Alternating Fixed-Point Semantics of Normal Logic Programs. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 74, 51-68. (2003).

[33] Hewitt, C. Description and theoretical analysis of PLANNER: A language for proving theorems and manipulating models in a robot (No. AI-TR-258). MASSACHUSETTS INST OF TECH CAMBRIDGE ARTIFICIAL INTELLIGENCE LAB. (1972).

[34] Hitzler, P., & Seda, A. K. Generalized metrics and uniquely determined logic programs. Theoretical Computer Science, 305, 187. (2003).

[35] Hitzler, P., & Seda, A. Mathematical aspects of logic programming semantics. (2010).

[36] Hitzler, P., Hölldobler, S., & Seda, A. K. Logic programs and connectionist networks. Journal of Applied Logic, 2(3), 245-272. (2004).

[37] Iranzo, P. J., & Frasnedo, M. A. Programación lógica. Pearson Educación. (2007).

[38] Kelley, J. L. General topology. Courier Dover Publications. (1975).

[39] Kirk, W., & Sims, B. (Eds.). Handbook of Metric Fixed Point Theory. Springer Science & Business Media. (2001).

[40] Kopperman, R. All topologies come from generalized metrics. The american mathematical monthly, 95(2), 89-97. (1988).

[41] Kowalski, R. Predicate logic as programming language. In IFIP congress (Vol. 74, pp. 569-544). (1974, August).

[42] Kowalski, R. Logic for problem solving (pp. 8-9). Department of Computational Logic, Edinburgh University. (1974).

[43] Kowalski, R. Algorithm= logic+ control. Communications of the ACM, 22(7), 424-436. (1979).

[44] Lloyd, J. W. Foundations of logic programming. Second Edition. Springer, Berlin. (1987).

[45] Markowsky, G. Chain-complete posets and directed sets with applications. Algebra universalis, 6(1), 53-68. (1976).

[46] Matthews, S. G. Partial metric topology. Annals of the New York Academy of Sciences, 728(1), 183-197. (1994).

[47] Matthews, S. G. Metric domains for completeness (Doctoral dissertation, University of Warwick). (1985).

[48] Mendelson, E. Introduction to mathematical logic. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books and Software, CA. (1987).

[49] Prawitz, D. An improved proof procedure. Theoria, 26(2), 102-139. (1960).

[50] Priess-Crampe, S., & Ribenboim, P. Ultrametric spaces and logic programming. The Journal of Logic Programming, 42(2), 59-70. (2000).

[51] Przymusinska, H., & Przymusinski, T. C. Weakly stratified logic programs. Fundamenta Informaticae, 13(1), 51-65. (1990).

[52] Przymusinski, T. C. On the declarative semantics of deductive databases and logic programs. In Foundations of deductive databases and logic programming (pp. 193-216). (1988).

[53] Robinson, J. A. A machine-oriented logic based on the resolution principle. Journal of the ACM (JACM), 12(1), 23-41. (1965).

[54] Rutten, J. J. Elements of generalized ultrametric domain theory. Theoretical Computer Science, 170(1-2), 349-381. (1996).

[55] Seda, A. K. Topology and the semantics of logic programs. Fundamenta Informaticae, 24(4), 359-386. (1995).

[56] Seda, A. K. Quasi-metrics and the semantics of logic programs. Fundamenta Informaticae, 29(1, 2), 97-117. (1997).

[57] Seda, A. K. Some convergence issues in theoretical computer science. INFORMATION-YAMAGUCHI-, 5(4), 447-462. (2002).

[58] Seda, A. K., & Hitzler, P. Topology and iterates in computational logic. In Proceedings of the 12th Summer Conference on Topology and its Applications: Special Session on Topology in Computer Science, Ontario (Vol. 22, pp. 427-469). (1997, August).

[59] Smyth, M. B. Quasi-uniformities: reconciling domains with metric spaces. In International Workshop on Mathematical Foundations of Programming Semantics (pp. 236-253). Springer, Berlin, Heidelberg. (1987, April).

[60] Smyth, M. B. Totally bounded spaces and compact ordered spaces as domains of computation. In Topology and Category Theory in Computer Science (pp. 207-229). Oxford University Press, Inc. (1991, September).

[61] Smyth, M. B., Abramsky, S., Gabbay, D. M., & Maibaum, T. S. (Eds). Topology. In Handbook of logic in computer science volumen 1. Oxford University press, Oxford, UK, 641-761. (1992).

[62] Stoltenberg-Hansen, V., Lindström, I., & Griffor, E. R. Mathematical theory of domains (Vol. 22). Cambridge University Press. (1994).

[63] Tarski, A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. Pacific journal of Mathematics, 5(2), 285-309. (1955).

[64] Van Emden, M. H., & Kowalski, R. A. The semantics of predicate logic as a programming language. Journal of the ACM (JACM), 23(4), 733-742. (1976).

[65] Van Gelder, A., Ross, K. A., & Schlipf, J. S. The well-founded semantics for general logic programs. Journal of the ACM (JACM), 38(3), 619-649. (1991).

[66] Van Heijenoort, J. From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931 (Vol. 9). Harvard University Press. (1967).

[67] Waszkiewicz, P. Quantitative continuous domains (Doctoral dissertation, University of Birmingham). (2002).

[68] Willard, S. General topology. Courier Corporation. Adison-Wesley, Reading, MA. (1970).