Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

La propiedad de Kelley por arcos y la propiedad de Kelley por medios

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta:

José Luis Suárez López

Directores de tesis

Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado
Dra. María de Jesús López Toriz

Puebla, Puebla, 26 de enero de 2024

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

JOSÉ LUIS SUÁREZ LÓPEZ

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 11 de diciembre de 2023, con la tesis titulada:

"La propiedad de Kelley por arcos y la propiedad de Kelley por medios"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 11 de diciembre de 2023

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

D*REC/mtrv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

A la memoria de mis abuelos:
Marcelo López Morales
Martín Suárez Sánchez
"Veni. Vidi. Vici."

Agradecimientos

Primero quiero agradecer al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por aceptarme en el Programa de becas nacionales y otorgarme el apoyo económico sin el cuál no habría sido posible realizar mis estudios de doctorado.

Agradezco a mis asesores, Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado y Dra. María de Jesús López Toriz, quienes con su guía intelectual e infinita paciencia encaminaron este trabajo a lo que es ahora. Gracias por su confianza en este proyecto que me ha dejado demasiadas satisfacciones y aprendizaje, sin duda viendo la labor que realizan me doy cuenta de lo mucho que me falta por recorrer y aprender, son un ejemplo a seguir para mí.

A mis revisores Dr. Raúl Escobedo Conde, Dr. Fernando Macías Romero, Dr. David Herrera Carrasco, Dra. Patricia Domínguez Soto y Dra. Paula Ivon Vidal Escobar, quienes con sus comentarios enriquecieron este trabajo, por sus aportaciones tan concretas que me enseñan que los matemáticos crecen cada día con esfuerzo y dedicación, gracias infinitas.

A Wendy, por mostrarme que el amor empieza por el que se tiene uno mismo. Por todo el apoyo, el amor y las risas, por enseñarme a disfrutar de las pequeñas cosas y sorpresas de la vida. Por esas tardes caminando, viendo una serie o comiendo algo rico. Por mostrarme la importancia de ser uno mismo para ser un buen equipo, por la paciencia, pero sobre todo por el cariño que me muestra con una risa o un simple abrazo, por todas las porras y por creer en mí aún cuando yo mismo dudaba. Espero que la vida me permita estar contigo la mayor cantidad de tiempo posible, te amo bombón azucarado.

A mi familia, a mis padres Luis Suárez Machorro y Emma López Ponce, quienes a pesar de la distancia me han apoyado todos estos años, a mis abuelos, hermanos y sobrinos, quiénes siempre han creído y confiado en mí. A la nueva familia, Leticia Díaz Vázquez y mis cuñados que me han acogido como uno más de ellos, no tengo forma de pagarles todo lo que han hecho por mí.

A mis amigos, Emanuel, Emilio, Iván, Jesús, Josúe, Juan, Julieta y Rafael, que a pesar de la distancia siempre han estado ahí cuando los he necesitado. Pero sobre todo a Emanuel, por escucharme cuando estaba más confundido de lo normal y recordarme que lo que más ignoraba estaba siempre frente a mi nariz.

Finalmente, agradezco a todos mis profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP que han sido mi ejemplo a seguir, espero no defraudarlos y seguir dando algunas sorpresas; además a todos los amigos que se han ido agregando y ahora forman parte de mi vida.

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un hiperespacio de un continuo es una familia de subconjuntos cerrados del continuo con una propiedad en común. El estudio de los modelos geométricos de hiperespacios de un continuo es un tema interesante en la teoría de continuos. Existe una gama amplia de estudios sobre el hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo y del hiperespacio de subcontinuos de un continuo; dado un continuo X, estos hiperespacios son denotados por 2^X y $C(X)$, respectivamente. En 1978, Sam B. Nadler, Jr. [24, pág. 601] propone estudiar la familia de subconjuntos de un continuo X que son arcos, este hiperespacio se denota por $\mathcal{A}(X) = \{A \subset X : A \text{ es un arco en } X\}$. En 1999, Adrián Soto [30] retoma este tema y considera el hiperespacio de arcos y singulares de un continuo X, el cual se denota por $\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup \{\{x\} : x \in X\}$. En ese trabajo se obtienen propiedades de $\mathcal{M}(X)$ cuando el continuo X es un dendroide. En 2002, Alejandro Illanes [12] da una caracterización de las dendritas en términos del hiperespacio de arcos y singulares.

En 2016 Iván Serapio, en su tesis de maestría [29, Definición 2.68], aporta el concepto de punto medio para cada elemento del hiperespacio $\mathcal{M}(X)$ y, con esto, se define la función *punto medio* [29, Definición 2.71], denotada por P_μ donde μ es una función de Whitney, que asigna a cada elemento A de $\mathcal{M}(X)$ su único punto medio $P_\mu(A) \in X$ con respecto de μ. En paralelo, también estudia la función de *puntos extremos* [29, Definición 2.19], la cual asigna a cada elemento A de $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de puntos extremos de A. Entre 2016 y 2019 María de Jesús López, Patricia Pellicer Covarrubias e Iván Serapio obtienen numerosos resultados que se desprenden de [29], entre los cuales se encuentran: (1) una equivalencia para la continuidad de la función de puntos extremos y la función punto medio; (2) condiciones para asegurar que la función de puntos extremos y la función punto medio sean abiertas o cerradas; (3) caracterizaciones de los continuos localmente conexos y de las dendritas en términos de la función de puntos extremos y del hiperespacio $\mathcal{M}(X)$.

Siguiendo esta línea de investigación y en relación con las funciones especiales entre continuos, en 2018 presento en mi tesis de maestría [33] un estudio sobre cuándo la función punto medio y la función de puntos extremos son funciones atómicas, casi monótonas, fuertemente monótonas, libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles. Como consecuencia, obtenemos dos caracterizaciones: una para los continuos libres de arcos y otra para las dendritas (esta parte se encuentra publicada en [19]). Además, demostramos que existe una función continua, suprayectiva y fuertemente localmente inyectiva entre $[0, 1]$ y una gráfica finita X, la cual se utiliza para probar que existe una compactación métrica del intervalo $(0, 1]$, digamos Y, cuyo residuo es homeomorfo a X tal que cualquier función punto medio es continua en el hiperespacio de arcos y singulares $\mathcal{M}(Y)$.

Inspirado naturalmente en la función punto medio y el hiperespacio de arcos y singulares en este proyecto de tesis propongo estudiar las familias siguientes: Dados un continuo X y un punto $p \in X$, consideramos los elementos $A \in \mathcal{M}(X)$ que tienen al punto p, es decir:

$$Arcos(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : p \in A\},$$

llamado *hiperespacio de arcos en* X *que contienen a* p. Estamos interesados en atender la siguiente pregunta:
¿Qué propiedades topológicas tiene, $Arcos(p, X)$, el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p?

Por otro lado, dada una función de Whitney para $C(X)$, μ, sea P_μ la función punto de medio. Para cada punto $p \in X$, consideramos los elementos $A \in \mathcal{M}(X)$ para los cuales $P_\mu(A) = p$, es decir:

$$Medio_\mu(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : P_\mu(A) = p\},$$

llamado el *hiperespacio de arcos en* X *con punto medio* p *respecto de* μ. Estamos interesados en responder la siguiente pregunta:
¿Qué propiedades topológicas tiene el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$, para cada punto $p \in X$?

Este trabajo consta de 8 capítulos. En el Capítulo 1, recopilamos todos los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2, dados un continuo X y $p \in X$ introducimos el hiperespacio de arcos en X que contienen a p, estudiamos los modelos geométricos de $Arcos(p, X)$, cuando X es un arco (Teorema 2.5) o X es una curva cerrada simple (Teorema 2.6) o X es un triodo simple (Teorema 2.7) o X es una paleta (Teorema 2.9). Mostramos algunas propiedades generales de este hiperespacio como son la arco conexidad (Teorema 2.10), además mostramos que la compacidad de este hiperespacio para cada punto caracteriza a las dendritas en la clase de los continuos localmente conexos (Teorema 2.17), cerramos el Capítulo 2 estudiando el hiperespacio de arcos en X que contienen a p cuando X contiene una arco componente que es imagen continua y biyectiva del rayo $[0, \infty)$ o $\mathbb{R}$ (Teoremas 2.26 y 2.31). Como consecuencia de estos resultados obtenemos el modelo geométrico del hiperespacio $Arcos(p, X)$ cuando X es el continuo $sen\frac{1}{x}$ (Corolario 2.30) y el modelo geométrico del hiperespacio $Arcos(p, X)$ cuando X es el Arcoiris de Knaster (Teorema 2.32). Cabe mencionar que este capítulo conforma el artículo *Hyperspaces of arcs containing a point* [4], publicado en la revista Topology Proceedings, Volume 63 (2024), 149–166.

En el Capítulo 3, dados un continuo X, $p \in X$ y una función μ de Whitney para $C(X)$ introducimos el hiperespacio de arcos en X con punto medio p respecto de μ, estudiamos modelos geométricos del hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$, cuando X es un arco (Teorema 3.6) o X es una curva cerrada simple (Teorema 3.10) o X es un triodo simple (Teorema 3.11). Mostramos algunas propiedades generales de este hiperespacio como son la arco conexidad (Teorema 3.12), además mostramos que la compacidad de este hiperespacio para cada punto caracteriza a las dendritas en la clase de los continuos localmente conexos (Teorema 3.18), cerramos el Capítulo 3 estudiando el hiperespacio de arcos en

X con punto medio p respecto de μ, cuando X contiene una arco componente que es imagen continua y biyectiva del rayo $[0, \infty)$ o $\mathbb{R}$ (Teoremas 3.20 y 3.22). Como consecuencia de estos resultados obtenemos el modelo geométrico del hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ cuando X es el continuo $sen\frac{1}{x}$ (Teorema 3.21) y el modelo geométrico del hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ cuando X es el Arcoiris de Knaster (Teorema 3.23).

En el Capítulo 4, introducimos la *propiedad de Kelley por arcos*; dado un continuo X decimos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos si para cada $p \in X$, para cada $A \in Arcos(p, X)$ y para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (Definición 4.4), mostramos ejemplos de continuos que tiene la propiedad de Kelley por arcos, como son el arco (Teorema 4.7), la curva cerrada simple (Teorema 4.8), el triodo simple (Ejemplo 4.12) y la 2-celda (Teorema 4.18). El Ejemplo 4.12 muestra que la propiedad de Kelley no implica la propiedad de Kelley por arcos, por otro lado, el Ejemplo 4.13 muestra que la propiedad de Kelley por arcos no implica la propiedad de Kelley. Mostramos que la propiedad de Kelley por arcos caracteriza al arco y a la curva cerrada simple en la clase de las gráficas finitas (Teorema 4.15), mientras en la clase de las dendritas caracteriza al arco (Teorema 4.16). Mostramos que los continuos homogéneos tienen la propiedad de Kelley por arcos (Teorema 4.27). Cerramos el Capítulo 4 mostrando que en la clase de las dendritas la propiedad de Kelley por arcos caracteriza al arco (Corolario 4.56). Cabe mencionar que este capítulo conforma el artículo *The property of Kelley by arcs* [5], el cual ha sido enviado al Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.

En el Capítulo 5, estudiamos la propiedad de Kelley por arcos en compactaciones métricas del intervalo $[0, 1)$, mostramos que dicha propiedad caracteriza al continuo $sen\frac{1}{x}$ y $(SP)_1 = S^1 \cup \{(1 + \frac{1}{t})(\cos t, sent) : t \in [2\pi, \infty)\}$ en la clase de las compactaciones con residuo gráfica finita (Teorema 5.14), por otro lado, en las compactaciones con residuo dendrita caracteriza solo al continuo $sen\frac{1}{x}$ (Teorema 5.15).

En el Capítulo 6, dados un continuo X y un subconjunto A de X tal que $Arcos(p, X)$ es compacto, para cada $p \in A$, consideramos la siguiente colección

$$KA(A, X) = \{Arcos(p, X) : Arcos(p, X) \text{ es compacto, para cada } p \in A\}.$$

Mostramos que en la clase de las dendritas la compacidad del hiperespacio $KA(X, X)$ es equivalente a ser arco, a que X tenga la propiedad de Kelley por arcos y a que la función $\alpha_X : X \to KA(X, X)$ que asigna a cada punto $p \in X$ su respectivo hiperespacio $Arcos(p, X)$ (Definición 6.2) sea continua (Teorema 6.9).

En el Capítulo 7, dados un continuo X y μ una función de Whitney para $C(X)$, diremos que X tiene la *propiedad de Kelley por medios* si para cada $p \in X$, para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p y para cada $A \in Medio(p, X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (Definición 7.1). Mostramos ejemplos de continuos que tiene la propiedad de Kelley por arcos, como son el arco (Teorema 7.5), la curva cerrada simple (Teorema 7.6) y el triodo simple (Ejemplo 7.8). El Ejemplo 7.8 muestra que la propiedad de Kelley no implica la propiedad de Kelley por medios, por otro lado, el Ejemplo 7.9 muestra que la propiedad de Kelley por medios no implica la propiedad de Kelley, además este mismo ejemplo muestra que la propiedad de Kelley por medios no implica la propiedad de Kelley por arcos. Mostramos que la propiedad de Kelley por medios caracteriza al arco y a la curva cerrada simple en la clase de las gráficas finitas (Teorema 7.10), por otro lado en la clase de las dendritas la propiedad de Kelley por medios caracteriza al arco (Teorema 7.11).

Finalmente, en el Capítulo 8, dados un continuo X, μ una función de Whitney para $C(X)$ y A un subconjunto de X tal que $Medio_\mu(p, X)$ es compacto para cada $p \in A$, definimos la siguiente colección

$$KM(A, X) = \{Medio_\mu(p, X) : Medio_\mu(p, X) \text{ es compacto, para cada } p \in A\}.$$

Mostramos que en la clase de las dendritas la compacidad del hiperespacio $KM(X, X)$ es equivalente a ser arco, a que X tenga la propiedad de Kelley por medios y a que la función $\eta_X : X \to KM(X, X)$ que asigna a cada punto $p \in X$ su respectivo hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ (Definición 8.2) sea continua (Teorema 8.8).

José Luis Suárez López
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
26 de enero de 2024

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Para un espacio topológico X y $A \subset B \subset X$. Denotamos por $cl_B(A)$, $int_B(A)$ y $fr_B(A)$, la cerradura, el interior y la frontera de A en B, respectivamente. En caso de que $B = X$, simplemente omitiremos el subíndice. La cardinalidad de X la denotamos por $|X|$.

1.1 Continuos

Este trabajo se desarrolla dentro de la teoría de los continuos y sus hiperespacios. Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un subconjunto de un continuo que a la vez es un continuo. Uno de los continuos más conocidos es el llamado *arco* que es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Estos continuos tienen la propiedad de que todos sus subcontinuos propios y no degenerados (espacios con más de un punto) son arcos. Existe una gran variedad de continuos, desde los más simples, hasta los más complejos, a continuación mencionaremos algunos de ellos que serán tratados en el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1. *Sean X un espacio topológico, $p \in X$ y β un número cardinal. Diremos que el punto p tiene* **orden menor o igual** *que β en X, lo cual se denotará por $ord(p, X) \leq \beta$, si para cada subconjunto abierto U en X con $p \in U$, existe un subconjunto abierto V en X tal que $p \in V \subseteq U$ y $|fr_X(V)| \leq \beta$. El punto p es de* **orden** *β en X, lo cual denotaremos por $ord(p, X) = \beta$, si $ord(p, X) \leq \beta$ y $ord(p, X) \nleq \alpha$ para cualquier $\alpha < \beta$.*

Definición 1.2. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Diremos que:*

(i) El punto p es un **punto extremo** *de X, si $ord(p, X) = 1$. El conjunto de puntos extremos de X lo denotamos por $E(X)$.*

(ii) El punto p es un **punto ordinario** *de X, si $ord(p, X) = 2$. El conjunto de puntos ordinarios de X lo denotamos por $O(X)$.*

(iii) El punto p es un **punto de ramificación** *de X, si $ord(p, X) \geq 3$. El conjunto de puntos de ramificación de X lo denotamos por $R(X)$.*

Definición 1.3. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Diremos que X es un* **n-odo** *si existe un subcontinuo B de X tal que $X \setminus B$ es la unión de n conjuntos abiertos en X, no vacíos y ajenos entre sí. En este caso, diremos que B es un núcleo de X. Más aún, si $n = 3$, diremos simplemente que X es un* **triodo**.

Definición 1.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, un* **n-odo simple** *es un continuo que es la unión de n arcos que se intersectan dos a dos, en un punto el cual es punto extremo de cada uno de los n arcos. Si Y es un n-odo simple, entonces el único punto de orden mayor o igual a tres en Y es llamado* **vértice** *de Y. Si $n = 3$, entonces Y es llamado* **triodo simple**.

Otros continuos importantes son las denominadas *gráficas finitas.*

Definición 1.5. *Una* **gráfica finita** *es un continuo que se puede representar como la unión de una cantidad finita de arcos de manera que cualesquiera dos de ellos o bien son ajenos o bien se intersectan en alguno de sus puntos extremos.*

Definición 1.6. *Una gráfica finita es un* **árbol** *si no contiene curvas cerradas simples.*

En lo que sigue citamos algunos resultados, y damos una referencia para ver una demostración de éstos.

Proposición 1.7. *[25, Proposición 9.4] Si X es un continuo tal que para cada $x \in X$, $ord(x, X)$ es finito, entonces cada subcontinuo de X es un continuo localmente conexo.*

Proposición 1.8. *[25, Proposición 9.5] Sea X un continuo no degenerado. Para cada $x \in X$, $ord(x, X) \leq 2$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Corolario 1.9. *[25, Corolario 9.6] Un continuo X es un curva cerrada simple si y sólo si para cada $x \in X$, $ord(x, X)$=2.*

Definición 1.10. *Un espacio topológico X es* **arco conexo** *si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un arco que une a x con y. Un espacio topológico X es* **únicamente arco conexo** *si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un único arco que une a x con y.*

Proposición 1.11. *[29, Corolario 2.65] Un continuo es únicamente arco conexo si y sólo si es arco conexo y no contiene curvas cerradas simples.*

Una definición importante es la siguiente:

Definición 1.12. *Un continuo X es* **unicoherente** *si A y B son subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 1.13. *Una* **dendrita** *es un continuo localmente conexo el cual no contiene curvas cerradas simples.*

Definición 1.14. *Un* **dendroide** *es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.*

Definición 1.15. *Sean X un dendroide y $p \in X$. Diremos que X es* **suave** *en p, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, se tiene que la sucesión de arcos $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco px.*

Una prueba del resultado que sigue se encuentra en [7, Corolario 4] y [7, Corolario 5].

Teorema 1.16. *Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita, si y sólo si, X es suave en todos sus puntos.*

1.2 Hiperespacios

Los hiperespacios de un continuo X son ciertas familias de subconjuntos de X, con alguna característica particular. Los más conocidos son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},\\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \text{ y, para cada } n \in \mathbb{N},\\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\} \text{ y}\\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

Observación 1.17. *Por la forma en que se definen $C(X)$, $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X, además $C(X) = C_1(X)$, $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$ y $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.18. *Dados X un espacio metrizable con métrica d, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, se define:*

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } y \in A \text{ tal que } d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Al conjunto $N_d(\varepsilon, A)$ se le conoce como la **nube** *de radio ε alrededor de A en X.*

Notación 1.19. *De ahora en adelante escribiremos $N(\varepsilon, A)$ para hacer referencia a $N_d(\varepsilon, A)$.*

Proposición 1.20. *[33, Proposición 2.3] Sean X un espacio métrico compacto con métrica d, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene que:*

(a) $N(\varepsilon, A) = \bigcup\limits_{x\in A} B(\varepsilon, x)$;

(b) $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ *para* $\delta \in (0, \varepsilon]$;

(c) $N(\varepsilon, A) = \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, A)$;

(d) si U es un conjunto abierto en X y $A \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$;

(e) si $E \in 2^X$ es tal que $A \cap E = \emptyset$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \cap N_d(\delta, E) = \emptyset$.

Notación 1.21. *Sea X un espacio métrico compacto. Para cada par de elementos $A, B \in 2^X$ definamos el siguiente conjunto:*

$$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Ya que hemos definido lo que es una nube, definamos ahora la métrica para 2^X conocida como *métrica de Hausdorff* de la forma siguiente:

Definición 1.22. *Dados X un espacio métrico compacto y $A, B \in 2^X$, se define la distancia $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como:*

$$H(A, B) = \text{ínf}\, E(A, B),$$

H es llamada la **métrica de Hausdorff** *para 2^X.*

La prueba de que H es una métrica puede ser consultada en [16, Teorema 2.2].

Lema 1.23. *Sean X un espacio métrico compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si, y sólo si, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$] Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Luego, existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$. Por la *Proposición 1.20*, que $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ y $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$. Además, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Por lo tanto, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

$\Leftarrow$] Recíprocamente, si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$ entonces por la *Proposición 1.20 (c)*, tenemos que $A \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, B)$. Dado que A es compacto existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = \text{máx}\,\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Luego, $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así $\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subseteq N(\alpha, B)$. Luego, $A \subset N(\alpha, B)$. De forma análoga, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $0 < \gamma < \varepsilon$ tal que $B \subset N(\gamma, A)$. Sea $\beta = \text{máx}\{\alpha, \gamma\}$. De aquí, tenemos que $\beta < \varepsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Así $\beta \in E(A, B)$, por lo tanto $H(A, B) \leq \beta < \varepsilon$. Por esto $H(A, B) < \varepsilon$. $\square$

Teorema 1.24. *[13, Teorema 4.2] Para cualquier continuo X el hiperespacio 2^X es compacto.*

Teorema 1.25. *Para cualquier continuo X el hiperespacio $C(X)$ es un continuo.*

Demostración. Se sigue de [13, Corolario 4.3], [13, Corolario 6.11] y del hecho que $C(X)$ es subespacio de 2^X. $\square$

Con lo hecho anteriormente, sabemos que 2^X, así como sus subespacios son espacios métricos. Para introducir una noción topológica sobre espacios, hablaremos de la llamada *Topología de Vietoris*. Para ello, introduzcamos la siguiente notación.

Notación 1.26. *Sean X un espacio métrico compacto no vacío, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Definimos la siguiente colección de subconjuntos de 2^X:*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Teorema 1.27. *[16, Teorema 1.2] Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N}$ y U_i es abierto para cada $i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para una topología del hiperespacio 2^X.*

Nota 1.28. *La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V, es conocida como* **topología de Vietoris**.

Teorema 1.29. *[16, Teorema 3.1] Sea X un espacio métrico compacto. En el hiperespacio 2^X la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden.*

Recordemos algunos resultados importantes de la convergencia de sucesiones de conjuntos.

Definición 1.30. *Sea X un espacio topológico. El* **límite inferior** *y el* **límite superior** *de una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, denotados por $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$, respectivamente, se definen de la siguiente manera:*

(a) $\liminf A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X que contiene al punto x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N\}$.*

(b) $\limsup A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X que contiene al punto x existe un conjunto infinito, $J \subseteq \mathbb{N}$, tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J\}$.*

Proposición 1.31. *[2, Proposición 2.4] Si X es un espacio topológico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos de X, entonces*

(a) $x \in \liminf A_n$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

(b) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si existen una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que la sucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Lema 1.32. *[16, Lema 4.3] Sea (X, T) un espacio topológico. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. Entonces $\lim A_n = A$ si y sólo si $A \subset \liminf A_n$ y $\limsup A_n \subseteq A$.*

Dado un continuo X, uno de los resultados fundamentales en la teoría de los hiperespacios es el que garantiza la existencia de funciones de Whitney para 2^X.

Definición 1.33. *Sea X un continuo. Una* **función de Whitney** *para 2^X es una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\mu(\{p\}) = 0$, para cada $p \in X$;

(b) $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A, B \in 2^X$ y $A \subsetneq B$.

Nota 1.34. *Cuando se hable de una función de Whitney para $C(X)$, sólo haremos referencia a una función continua de $C(X)$ en $[0, \infty)$ que satisface las condiciones (a) y (b) de la Definición 1.33. De la misma forma, hablaremos de una función de Whitney para $\mathcal{H} \subseteq 2^X$.*

Teorema 1.35. *[13, Teorema 13.4] Si X es un espacio topológico compacto, entonces existe una función de Whitney para cualquier hiperespacio de X.*

Observación 1.36. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$.*

Lema 1.37. *[13, Lema 6.8] Sean X un continuo, A y B subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$. Si $\mu : C(X) \to [0, \mu(X)]$ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subseteq C \subseteq B$ y $\mu(C) = t$.*

Definición 1.38. *Sea X un continuo. Un subconjunto $\mathcal{A}$ de $C(X)$ se llama* **ordenado** *si para todo par de elementos $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.*

Definición 1.39. *Sea X un continuo. Un* **arco ordenado** *$\mathcal{A}$ en $C(X)$ es un subcontinuo ordenado (posiblemente degenerado) de $C(X)$, si los extremos de $\mathcal{A}$ son E y F, con $E \subseteq F$, diremos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de E a F.*

Uno de los resultados importantes acerca del hiperespacio segundo producto simétrico y que usaremos en nuestro trabajo es el siguiente.

Proposición 1.40. *[29, Proposición 1.33] Sean X un continuo, $B \in F_2(X)$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $F_2(X)$. Si $B = \{p, q\}$ entonces $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B si y sólo si existen sucesiones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X convergentes a p y q, respectivamente, tales que $B_n = \{p_n, q_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Dado que los hiperespacios son espacios métricos, la definición de sucesión y el criterio de convergencia de sucesiones, es el mismo que conocemos en cualquier espacio métrico.

Lema 1.41. *[32, Lema 1.85] Sea X un continuo. Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) Si $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.

(b) $\lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B$.

(c) Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

En 2003, Patricia Pellicer, introdujo en [27] los hiperespacios anclados en un punto. Definimos los hiperespacios anclados de la siguiente manera:

Definición 1.42. *Sea X un continuo. El* **hiperespacio de los subcontinuos de X anclados en un continuo** $A \in C(X)$ *es el subespacio de $C(X)$ dado por $C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. En particular nos interesa este tipo de espacios cuando $A = \{p\}$, es decir, estamos interesados en los hiperespacios de continuos anclados en un punto denotados de la siguiente manera $C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$.*

Dos resultados importantes acerca de estos hiperespacios son:

Teorema 1.43. *[27, Teorema 3.17] Sean X un arco con puntos extremos x y y. Consideremos $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(a) Si $p \in \{x, y\}$, entonces $C(p, X)$ es un arco.

(b) Si $p \notin \{x, y\}$, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda.

Teorema 1.44. *[27, Teorema 3.18] Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(p, X)$ es una 2-celda para cada $p \in X$.*

En 1999, Adrián Ulises Soto, estudia en [30] acerca del hiperespacio de arcos y singulares, el cual definimos a continuación:

Definición 1.45. *Para todo continuo X se definen los siguientes subespacios de $C(X)$:*

$$\mathcal{A}(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es un arco}\} \text{ y}$$
$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup F_1(X).$$

Estos espacios son el **hiperespacio de arcos** *de X y el* **hiperespacio de arcos y singulares** *de X, respectivamente.*

Observación 1.46. *[20, Lema 3.1] Si X es un arco, entonces el hiperespacio $\mathcal{M}(X)$ es $C(X)$.*

Teorema 1.47. *[24, Teorema (19.21)] El hiperespacio de arcos y singulares de una dendrita es compacto.*

Observación 1.48. *Si X es una curva cerrada simple, entonces el hiperespacio de arcos y singulares no es compacto ya que contiene arcos que convergen a X.*

Ahora definimos las funciones de puntos extremos y punto medio en continuos, de la siguiente forma

Definición 1.49. *Dados un continuo X y $L \in \mathcal{M}(X)$ se define el conjunto de puntos extremos de L como:*

$$E(L) = \begin{cases} \{p \in L : p \text{ es un punto extremo de } L\}, & \text{si } L \in \mathcal{A}(X), \\ \\ L, & \text{si } L \in F_1(X). \end{cases}$$

Observemos que $E(L)$ es un conjunto de uno o dos puntos, es decir, $E(L) \in F_2(X)$. Consideremos la función $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ que a cada elemento del hiperespacio de arcos y singulares le asigna el conjunto de sus puntos extremos. A esta función se le nombrará **función de puntos extremos** *de X.*

Para una prueba del *Teorema 1.50* puede ver [21, Teorema 5.3] o bien [29, Teorema 3.41].

Teorema 1.50. *Un continuo es una dendrita si y sólo si su función de puntos extremos es un homeomorfismo.*

Definición 1.51. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y A un arco en X. Diremos que $p \in X$ es un* **punto medio** *de A respecto de μ, si existen K y L subcontinuos de A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. En el caso en que $A = \{p\}$, diremos que p es el punto medio de A.*

Teorema 1.52. *[20, Teorema 4.6] Si A es un arco y μ es una función de Whitney definida en $C(A)$, entonces A admite un único punto medio respecto de μ. Más aún, el punto medio de A respecto de μ no es punto extremo de A.*

Observación 1.53. *Dados un continuo X y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si A es un arco con puntos extremos a y b en X cuyo punto medio es p respecto de μ, K es el arco en A con puntos extremos a y p y L es el arco en A con puntos extremos p y b, entonces $\mu(K) = \mu(L)$ y $K \cap L = \{p\}$.*

Definición 1.54. *Dados un continuo X y una función de Whitney μ para $C(X)$ consideramos la función $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ que asigna a cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ su único punto medio respecto de μ tal y como lo asegura el Teorema 1.52. A esta función la llamaremos* **función punto medio** *de X respecto de μ.*

Teorema 1.55. *[20, Teorema 4.12] Sea X un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *existe una función de Whitney μ tal que la función punto medio de X es continua,*

(2) *para toda función de Whitney μ, la función punto medio de X es continua,*

(3) *la función de puntos extremos de X es continua.*

Corolario 1.56. *[20, Corolario 2.76] Sea X un arco. Para toda función de Whitney para $C(X)$, la función punto medio es continua.*

Corolario 1.57. *[21, Corolario 4.7] Las dendritas tienen función de puntos extremos continua.*

Capítulo 2

El hiperespacio $Arcos(p, X)$ en continuos

Parte de este trabajo es definir y analizar el hiperespacio $Arcos(p, X)$ para un continuo X y un punto $p \in X$, el cual definimos a continuación.

Definición 2.1. *Sean X un continuo y un punto $p \in X$, el* **hiperespacio de arcos en X anclados en el punto** *p, denotado por $Arcos(p, X)$, es el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{M}(X)$ que tienen al punto p, es decir,*

$$Arcos(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : p \in A\}.$$

Este hiperespacio lo consideraremos como subespacio del hiperespacio $C(X)$ con la métrica de Hausdorff, así su topología será la heredada de $C(X)$. Se define este hiperespacio con la finalidad de explorar la siguiente pregunta, dados un continuo X y un punto $p \in X$:

Pregunta 2.2. *¿Qué propiedades topológicas tiene, $Arcos(p, X)$, el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p?*

2.1 Algunos modelos geométricos del hiperespacio $Arcos(p, X)$

Es un tema interesante en la teoría de los hiperespacios conocer modelos geométricos de continuos. En esta sección estudiamos los modelos geométricos de $Arcos(p, X)$, cuando X es un arco o X es una curva cerrada simple o X es un triodo simple o X es una paleta.

Definición 2.3. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. La* **función inducida asociada a** *f es la función $C(f) : C(X) \to C(Y)$ definida por $C(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in C(X)$.*

Teorema 2.4. *Sean X, Y continuos y $p \in X$. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $Arcos(h(p), Y)$.*

Demostración. Consideremos la función $C(h) : C(X) \to C(Y)$ definida por $C(h)(A) = h(A)$, para cada $A \in C(X)$. Como h es un homeomorfismo, por [32, Lema 2.3], la función $C(h)$ es un homeomorfismo, así $C(h)|_{Arcos(p,X)} : Arcos(p, X) \to C(h)(Arcos(p, X))$ es un homeomorfismo. Probemos que

$$C(h)(Arcos(p, X)) = Arcos(h(p), Y).$$

Si $A \in Arcos(p, X)$, entonces $C(h)(A) \in Arcos(h(p), Y)$. Se sigue que

$$C(h)(Arcos(p, X)) \subset Arcos(h(p), Y).$$

Ahora, sea $B \in Arcos(h(p), Y)$, luego $C(h^{-1})(B) \in Arcos(p, X)$, de aquí $Arcos(h(p), Y) \subset C(h)(Arcos(p, X))$. Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $Arcos(h(p), Y)$. $\square$

El resultado que sigue nos proporciona un modelo geométrico de $Arcos(p, X)$, donde X es el arco $[0, 1]$.

Teorema 2.5. *Sea X el arco $[0, 1]$. Entonces $Arcos(p, X)$ es un arco si $p \in \{0, 1\}$, y $Arcos(p, X)$ es una 2-celda si $p \in X \setminus \{0, 1\}$.*

Demostración. Por [13, Ejemplo 3.1] el hiperespacio de continuos del intervalo $[0, 1]$ puede ser representado por el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ que es el triángulo acotado por el eje de las ordenadas, la diagonal y la recta cuya segunda coordenada es igual a 1. Como se muestra en la siguiente *Figura 2.1*:

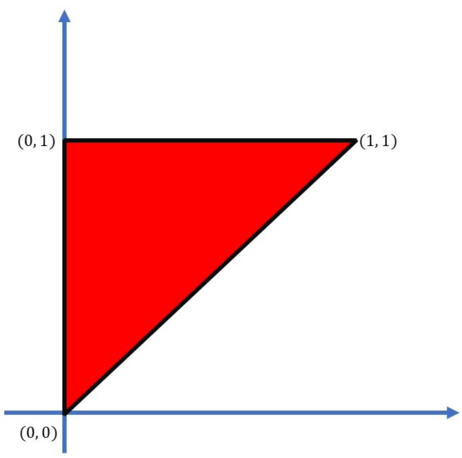

Figura 2.1: El conjunto D.

Consideremos la función $f : D \to C(X)$ definida por $f((x, y)) = [x, y]$, para cada $(x, y) \in D$, el cual es un homeomorfismo por [23, Teorema 3.2].

Supongamos que $p \in \{0, 1\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p = 0$. Sea $Z = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ subconjunto de D, note que Z es un arco con puntos extremos $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Observemos que, si A es un arco en X que contiene a 0, entonces $A = [0, y]$, para algún $y \in X$, así $f(Z) = Arcos(p, X)$. Note que $f((0, 0)) = \{p\}$ y $f((0, 1)) = X$. Como f es un homeomorfismo, se tiene que Z y el hiperespacio $Arcos(p, X)$ son homeomorfos, por lo tanto $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a un arco con puntos extremos $\{p\}$ y X. Por otro lado, si $A, B \in Arcos(p, X)$, se tiene que A y B son comparables, así $Arcos(p, X)$ es un conjunto ordenado. Concluimos que $Arcos(p, X)$ es un arco ordenado de $\{p\}$ hasta X. De forma similar se prueba que $Arcos(p, X)$ es un arco ordenado desde $\{p\}$ hasta X si $p = 1$.

Ahora, supongamos que $p \in X \setminus \{0, 1\}$. Consideramos la 2-celda $W = [0, p] \times [p, 1]$ contenida en D. Observemos que si $A \in Arcos(p, X)$, entonces existen $x \in [0, p]$ y $y \in [p, 1]$ tales que $A = [x, y]$, así $f(W) = Arcos(p, X)$. Como f es un homeomorfismo, tenemos que W y el hiperespacio $Arcos(p, X)$ son homeomorfos, por lo tanto $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda. □

El resultado que sigue nos proporciona un modelo geométrico de $Arcos(p, X)$, donde X es una curva cerrada simple.

Teorema 2.6. *Sea X el circulo unitario en $\mathbb{R}^2$. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p es homeomorfo a una 2-celda sin un punto en la frontera.*

Demostración. Dado que los subcontinuos propios de X son arcos o singulares, se sigue que $C(p, X) = Arcos(p, X) \cup \{X\}$, luego $Arcos(p, X) = C(p, X) \setminus \{X\}$. Por el *Teorema 1.44*, tenemos que $C(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda. Por la última línea de la página 3 y la primera línea de la página 4 de [15] X es un punto de la frontera de $C(p, X)$ en $C(X)$ (véase *Figura 2.2*). Así, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda sin un punto en la frontera. □

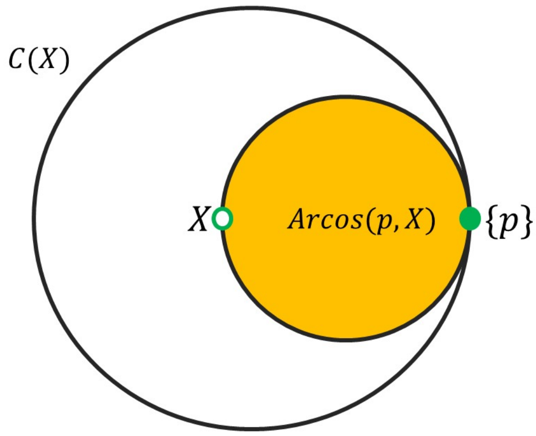

Figura 2.2: Hiperespacio $Arcos(p, X)$ visto en el hiperespacio $C(X)$.

El resultado que sigue nos proporciona un modelo geométrico de $Arcos(p, X)$, donde X es un triodo simple.

Teorema 2.7. *Sea $X = \{(x, 0) : x \in [-1, 1]\} \cup \{(0, y) : y \in [0, 1]\}$ un triodo simple contenido en $\mathbb{R}^2$. Sea $p \in X$, se tienen las siguientes afirmaciones:*

(1) Si $p = (0, 0)$, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda.

(2) Si $p \in \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a un triodo simple.

(3) Si $p \in X \setminus \{(-1,0),(0,1),(1,0),(0,0)\}$, entonces $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $X \times [0,1]$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in X$, denotemos por xy el arco contenido en X con puntos extremos x y y. Sean $A_1 = \{(t,0) : t \in [-1,0]\}$, $A_2 = \{(0,t) : t \in [0,1]\}$ y $A_3 = \{(t,0) : t \in [0,1]\}$. Consideremos los arcos $J_1 = A_2 \cup A_3$, $J_2 = A_1 \cup A_3$ y $J_3 = A_1 \cup A_2$.

Probaremos el inciso (1). Supongamos que $p = (0,0)$. Por el *Teorema 2.4* y el *Teorema 2.5*, sabemos que $Arcos(p, J_i)$ es homeomorfo a una 2-celda, para cada $i \in \{1,2,3\}$.

Note que si $M \in Arcos(p,X)$ entonces $M \subseteq J_1$, $M \subseteq J_2$ ó $M \subseteq J_3$, así que $Arcos(p,X) = Arcos(p,J_1) \cup Arcos(p,J_2) \cup Arcos(p,J_3)$. Note que

- $Arcos(p,J_1) \cap Arcos(p,J_2) = Arcos(p,A_3)$,
- $Arcos(p,J_2) \cap Arcos(p,J_3) = Arcos(p,A_1)$ y
- $Arcos(p,J_3) \cap Arcos(p,J_1) = Arcos(p,A_2)$.

Por el *Teorema 2.4* y el *Teorema 2.5*, tenemos que $Arcos(p,A_i)$ es homeomorfo a un arco con puntos extremos $\{p\}$ y A_i, para cada $i \in \{1,2,3\}$. De tal forma que existe un homeomorfismo $h_i : [0,1] \to Arcos(p,A_i)$ tal que $h_i(0) = \{p\}$ y $h_i(1) = A_i$, para cada $i \in \{1,2,3\}$. Consideremos la función $f : [0,1]^3 \to C(p,X)$ definida por $f((x,y,z)) = h_1(x) \cup h_2(y) \cup h_3(z)$, para cada $(x,y,z) \in [0,1]^3$. Veamos que f es un homeomorfismo. Basta probar que f es continua y biyectiva. Notemos que f es inyectiva, ya que si consideramos (a,b,c) y (x,y,z) puntos distintos en $[0,1]^3$, podemos suponer que $a \neq x$, como h_1 es inyectiva se tiene que $h_1(a) \neq h_1(x)$, luego $h_1(a) \cup h_2(b) \cup h_3(c) \neq h_1(x) \cup h_2(y) \cup h_3(z)$, así $f((a,b,c)) \neq f((x,y,z))$. Por otro lado, f es suprayectiva ya que si $T \in C(p,X)$, basta descomponer a T en tres subcontinuos digamos $B_1 = T \cap A_1$, $B_2 = T \cap A_2$ y $B_3 = T \cap A_3$ de esta manera $B_i \in Arcos(p,A_i)$, para cada $i \in \{1,2,3\}$, como h_i es sobreyectiva, existen $x,y,z \in [0,1]$ tales que $h_1(x) = B_1$, $h_2(y) = B_2$ y $h_3(z) = B_3$, de esta forma $f((x,y,z)) = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = T$. Ahora probemos que f es una función continua, para ello consideremos $\{(x_n,y_n,z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a (x,y,z) en $[0,1]^3$. Tenemos que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a x, y y z, respectivamente. Como h_i es continua para cada $i \in \{1,2,3\}$, se sigue que $\{h_1(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{h_2(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{h_3(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a $h_1(x)$, $h_2(y)$ y $h_3(z)$, respectivamente. Luego, por la *Lema 1.41*, $\{h_1(x_n) \cup h_2(y_n) \cup h_3(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h_1(x) \cup h_2(y) \cup h_3(z)$, es decir, $\{f((x_n,y_n,z_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f((x,y,z))$ y así f es una función continua. Por lo tanto, $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a una 2-celda, como la mostrada en la Figura 2.3.

Ahora probaremos el inciso (2). Sea $p \in \{(-1,0),(0,1),(1,0)\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p = (1,0)$. Consideremos la función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$. Por el *Teorema 1.50*, tenemos que E es un homeomorfismo. Como p es punto extremo de X, los arcos que tienen a p son de la forma px, para algún punto $x \in X$. Denotemos por $\mathcal{C}_p = \{\{p,x\} : x \in X\}$

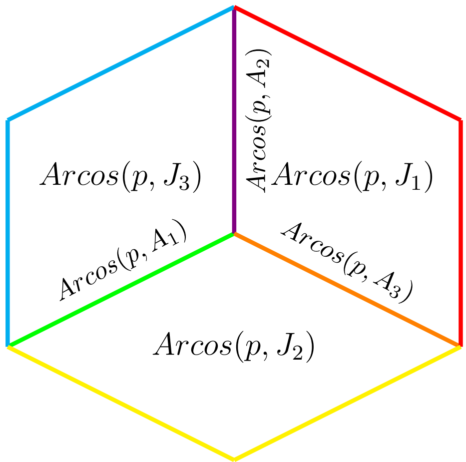

Figura 2.3: $Arcos(p, X)$ cuando $p = (0, 0)$ y X es un trido simple.

subconjunto de $F_2(X)$. Se tiene que $E|_{Arcos(p,X)} : Arcos(p, X) \to \mathcal{C}_p$ es un homeomorfismo.

Ahora, consideremos la función $g : X \to \mathcal{C}_p$ definida por $g(x) = \{p, x\}$, para cada $x \in X$. Vamos a probar que g es un homeomorfismo. Es claro que g es biyectiva. Veamos que la función g es continua. En efecto: sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a algún punto $x \in X$. Por la *Proposición 1.40*, se tiene que la sucesión $\{\{p, x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $\{p, x\} \in \mathcal{C}_p$. Esto es, la sucesión $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $g(x)$. Concluimos que g es continua. Por otra parte, veamos que la función g^{-1} es continua. En efecto: sea $\{\{p, x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $\mathcal{C}_p$ que converge a algún punto $\{p, x\} \in \mathcal{C}_p$. Se sigue de la *Proposición 1.40*, que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto x. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(\{p, x_n\}) = x_n$ y $g^{-1}(\{p, x\}) = x$. Esto prueba que la función g^{-1} es continua. Por lo tanto, g es un homeomorfismo.

Por otro lado, consideremos la función $h : X \to Arcos(p, X)$ definida por $h(x) = (E|_{Arcos(p,X)})^{-1}(g(x)) = px$, para cada $x \in X$. Es claro que h es un homeomorfismo. Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a un triodo simple.

Finalmente, probaremos el inciso (3). Sea $p \in X \setminus \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$. Sabemos que $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Sin perder generalidad supongamos que $p \in A_1$. Notemos que $e_1 = (-1, 0)$ y $v = (0, 0)$ son los puntos extremos del arco A_1. Consideremos el arco $A = e_1p$ y el triodo simple $T = pv \cup A_2 \cup A_3$ en X. Por el inciso *(1)* $Arcos(p, A)$ es un arco y por el inciso *(2)* $Arcos(p, T)$ es un triodo simple, tenemos que $Arcos(p, A)$ y $Arcos(p, T)$ son homeomorfos a $[0, 1]$ y T, respectivamente. Consideremos la función

$$F : Arcos(p, T) \times Arcos(p, A) \to Arcos(p, X) \text{ definida por}$$
$$F((K, L)) = K \cup L,$$

para cada $(K, L) \in Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$.
Probaremos que F es un homeomorfismo. Como $Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$ es compacto y $Arcos(p, X)$ es Hausdorff, basta probar que F es continua y biyectiva. Veamos que F es sobreyectiva, dado $M \in Arcos(p, X)$, consideremos

$K = M \cap T \in Arcos(p, T)$ y $L = M \cap A \in Arcos(p, A)$. Note que $M = K \cup L$, luego $F((K, L)) = K \cup L = M$, es decir, F es sobreyectiva. Vemos que F es inyectiva, sean $(K, L), (R, S) \in Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$ puntos distintos, podemos considerar $q \in K \setminus R$, se sigue que $q \in K \cup L$ y $q \notin R \cup S$, luego $F((K, L)) \neq F((R, S))$, es decir, F es inyectiva. Ahora probemos que F es una función continua. Consideremos $\{(K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a (K, L) en $Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$, tenemos que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a K y L, respectivamente. Luego por la *Lema 1.41*, se sigue que $\{K_n \cup L_n\}_{n\in\}_{k\in\mathbb{N}}}$ converge a $K \cup L$, es decir, $\{F((K_n, L_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $F((K, L))$, por lo tanto F es continua.
Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $Arcos(p, T) \times Arcos(p, A)$, así $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $T \times A$, luego $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $X \times [0, 1]$. □

Lema 2.8. *Sea X una gráfica finita y p un punto de corte de X tal que p no es punto de ramificación de X. Si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X tales que $A \cap B = \{p\}$, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $Arcos(p, A) \times Arcos(p, B)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : Arcos(p, A) \times Arcos(p, B) \to Arcos(p, X)$ la función definida por $h(K, L) = K \cup L$, para cada $(K, L) \in Arcos(p, A) \times Arcos(p, B)$. Probaremos que h es un homeomorfismo. Como $K \cap L = \{p\}$, tenemos que $K \cup L$ es un arco, así, h está bien definida. Por [16, Exercise 1.23], h es una función continua. Si $M \in Arcos(p, X)$, entonces definimos $K = M \cap A$ y $L = M \cap B$. Notemos que $K \in Arcos(p, A)$ y $L \in Arcos(p, B)$ son tales que $M = K \cup L$, de aquí h es una función suprayectiva. Veamos que h es inyectiva. Sean $(K_1, L_1), (K_2, L_2) \in Arcos(p, A) \times Arcos(p, B)$ tales que $(K_1, L_1) \neq (K_2, L_2)$. Asumamos que $K_1 \neq K_2$, existe $k \in K_1 \setminus K_2$, luego $k \in K_1 \cup L_1$ y $k \notin K_2 \cup L_2$. Se sigue que $K_1 \cup L_1 \neq K_2 \cup L_2$. En consecuencia, $h(K_1, L_1) \neq h(K_2, L_2)$. Concluimos que h es una función inyectiva. Finalmente, sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Arcos(p, X)$ convergente a $M \in Arcos(p, X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n \in Arcos(p, A)$ y $L_n \in Arcos(p, B)$ tales que $M_n = K_n \cup L_n$. Sea $K \in Arcos(p, A)$ y $L \in Arcos(p, B)$ tales que $M = K \cup L$. Como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M y $C(X)$ es un continuo, por [11, Theorem 4.1.17], existe una subsucesión $\{K_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a K. Así, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a K. Similarmente, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L. Concluimos que $\{h^{-1}(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(M)$. Se sigue que h^{-1} es una función continua.
Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $Arcos(p, A) \times Arcos(p, B)$. □

El resultado que sigue nos proporciona un modelo geométrico de $Arcos(p, X)$, donde X es una paleta.

Teorema 2.9. *Sean $J = [1, 2] \times \{0\}$ y $X = S^1 \cup J$ la paleta. Entonces:*

(1) si $p = (2, 0)$, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a un triodo simple sin dos de sus puntos extremos;

(2) si $p \in J \setminus \{(1, 0), (2, 0)\}$, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $T \times [0, 1]$, donde T es un triodo simple sin dos de sus puntos extremos;

(3) si $p = (1, 0)$, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1$ y $y \leq 0\} \cup ((-1, 1) \times [0, 1])$;

(4) si $p \in S^1 \setminus \{(1,0)\}$, entonces Arcos$(p,X)$ es homeomorfo a $((D \setminus \{(-1,0)\}) \times \{0\}) \cup \{(x, x+1, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1,0]$ y $z \in [0,1]\} \cup \{(x, x-1, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1,0]$ y $z \in [0,1]\}$, donde D es el disco unitario.

Demostración. Para cada $-2\pi < t \leq 0$, sea

$$R_t = \{(\cos x, \operatorname{sen} x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [t,0]\}$$

y para cada $0 \leq t < 2\pi$, sea

$$L_t = \{(\cos x, \operatorname{sen} x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,t]\}.$$

Probaremos *(1)*. Supongamos que $p = (2,0)$. Observemos que, si A es un arco en X tal que $p \in A$, entonces A está contenido en J o $A = J \cup R_t$, para algún $-2\pi < t \leq 0$, o $A = J \cup L_t$, para algún $0 \leq t < 2\pi$. Denotemos por

$$\mathcal{A}_1 = Arcos(p,J),$$

$$\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{M}(X) : A = J \cup R_t, \text{ para algún } -2\pi < t \leq 0\} \text{ y}$$
$$\mathcal{A}_3 = \{A \in \mathcal{M}(X) : A = J \cup L_t, \text{ para algún } 0 \leq t < 2\pi\}.$$

Por el *Lema 2.4* y el *Teorema 2.5*, tenemos que *Arcos*(p,J) es un arco. Notemos que $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$ son homeomorfos a los intervalos $(-2\pi,0]$ y $[0,2\pi)$, respectivamente. Más aún, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \{J\}$, para cada $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$. Así, *Arcos*$(p,X) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$, por lo tanto, *Arcos*$(p,X)$ es un triodo simple sin dos de sus puntos extremos.

Probemos *(2)*. Supongamos que $p \in J \setminus \{(1,0),(2,0)\}$. Sean

$$e = (2,0), v = (1,0), A = ep \text{ y } Y = pv \cup S^1.$$

Note que p es un punto de corte de X, p no es un punto de ramificación de X y $Y \cap A = \{p\}$, por el *Lema 2.8*, *Arcos*(p,X) es homeomorfo a *Arcos*$(p,Y) \times$ *Arcos*(p,A). Notemos que Y es una paleta en X y p es punto extremo de Y. Por *(1)* y el *Lema 2.4*, *Arcos*(p,Y) es homeomorfo a T sin dos de sus puntos extremos. Por el *Lema 2.4* y el *Teorema 2.5*, *Arcos*(p,A) es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, *Arcos*(p,X) es homeomorfo a $T \times [0,1]$, donde T es un triodo simple sin dos de sus puntos extremos.

Ahora, probemos *(3)*. Supongamos que $p = (1,0)$. Si A es un arco en X tal que $p \in A$, entonces A está contenido en S^1, o $A = ([1,\alpha] \times \{0\}) \cup R_t$, para algún $\alpha \in [1,2]$ y para algún $-2\pi < t \leq 0$, o $A = ([1,\alpha] \times \{0\}) \cup L_t$, para algún $\alpha \in [1,2]$ y para algún $0 \leq t < 2\pi$. Denotemos por

$$\mathcal{B}_1 = Arcos(p,S^1),$$

$$\mathcal{B}_2 = \{A \in \mathcal{M}(X) : A = ([1,\alpha] \times \{0\}) \cup R_t, \text{ para algún } \alpha \in [1,2] \text{ y}$$
$$\text{para algún } -2\pi < t \leq 0\},$$

$$\mathcal{B}_3 = \{A \in \mathcal{M}(X) : A = ([1,\alpha] \times \{0\}) \cup R_t, \text{ para algún } \alpha \in [1,2] \text{ y}$$
$$\text{para algún } 0 \leq t < 2\pi\},$$

$$\mathcal{R} = \{R_t : -2\pi < t \leq 0\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{L} = \{L_t : 0 \leq t < 2\pi\}.$$

Observe que $Arcos(p, X) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{R}$ y $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3 = \mathcal{L}$. Por el *Lema 2.4* y el *Teorema 2.6*, $\mathcal{B}_1$ es homeomorfo a $D \setminus \{(-1, 0)\}$. Sea $j : \mathcal{B}_1 \to D \setminus \{(-1, 0)\}$ un homeomorfismo. Se sigue que $j(\mathcal{R} \cup \mathcal{L}) = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. Por otro lado, notemos que $D \setminus \{(-1, 0)\}$ es homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1 \text{ y } y \leq 0\}$. Sea $h_1 : \mathcal{B}_1 \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1 \text{ y } y \leq 0\}$ es un homeomorfismo. Como una consecuencia, $h_1(\mathcal{R} \cup \mathcal{L}) = (-1, 1) \times \{0\}$. Sea $h_2 : \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \to ((-1, 1) \times [0, 1])$ definida por $h_2(A) = h_1(A \cap S^1) + (0, \alpha - 1)$, para cada $A \in \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, donde $\alpha \in [1, 2]$ es tal que $A \cap J = [1, \alpha] \times \{0\}$. Notemos que h_2 es un homeomorfismo. Tenemos que $\mathcal{B}_1 = C(S^1) \cap Arcos(p, X)$. Así, $\mathcal{B}_1$ es un subconjunto cerrado de $Arcos(p, X)$. Además, $bd_{Arcos(p,X)}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{R} \cup \mathcal{L}$; se sigue que $\mathcal{B}_1 \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{L})$ es un subconjunto abierto de $Arcos(p, X)$. Observemos que $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = Arcos(p, X) \setminus (\mathcal{B}_1 \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{L}))$, de aquí que $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ es un subconjunto cerrado de $Arcos(p, X)$. Adicionalmente, $\mathcal{B}_1 \cap (\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3) = \mathcal{R} \cup \mathcal{L}$, se sigue que $h_1|_{\mathcal{B}_1 \cap (\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3)} = h_2|_{\mathcal{B}_1 \cap (\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3)}$. Sea $h : Arcos(p, X) \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1 \text{ y } y \leq 0\} \cup ((-1, 1) \times [0, 1])$ definida por

$$h(A) = \begin{cases} h_1(A), & si \quad A \in \mathcal{B}_1, \\ h_2(A), & si \quad A \in \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3. \end{cases}$$

Como h_i es un homeomorfismo, para cada $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $h_1(\mathcal{B}_1)$ y $h_2(\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3)$ son cerrados de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1 \text{ y } y \leq 0\} \cup ((-1, 1) \times [0, 1])$. Consecuentemente, h es un homeomorfismo. Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1 \text{ y } y \leq 0\} \cup ((-1, 1) \times [0, 1])$.

Finalmente, probemos *(4)*. Supongamos que $p \in S^1 \setminus \{(1, 0)\}$; así $p = (\cos y, \sin y)$, para algún $y \in (0, 2\pi)$. Sea $v = (1, 0)$. Para cada $0 < t \leq y$, sea $W_t = \{(\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [t, 2\pi]\}$, y para cada $y \leq t < 2\pi$, sea $V_t = \{(\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, t]\}$. Si A es un arco X tal que $p \in A$, entonces A está contenido en S^1, o $A = K \cup W_t$ para algún $K \in Arcos(v, J)$ y para algún $0 < t \leq y$, o $A = K \cup V_t$ para algún $K \in Arcos(v, J)$ y para algún $y \leq t < 2\pi$. Denotemos por

$$\mathcal{C}_1 = Arcos(p, S^1),$$

$$\mathcal{C}_2 = \{A \in \mathcal{M}(X) : A = K \cup W_t, \text{ para algún } K \in Arcos(v, J) \text{ y}$$
$$\text{para algún } 0 < t \leq y\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \{A \in \mathcal{M}(X) : A = K \cup V_t, \text{ para algún } K \in Arcos(v, J) \text{ y}$$
$$\text{para algún } y \leq t < 2\pi\},$$

$$\mathcal{W} = \{W_t : 0 < t \leq y\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{V} = \{V_t : y \leq t < 2\pi\}.$$

Notemos que $Arcos(p, X) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{W}$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \mathcal{V}$ y $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \emptyset$. Observemos que $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ son homeomorfos a $(0, y]$ y $[y, 2\pi)$, respectivamente. Por el *Lema 2.4* y el *Teorema 2.5*, $Arcos(v, J)$ es homeomorfo a $[0, 1]$. Notemos que la función $h : \mathcal{W} \times Arcos(v, J) \to \mathcal{C}_2$ definida por $h(A, B) = A \cup B$, para cada $(A, B) \in \mathcal{W} \times Arcos(v, J)$ es un homeomorfismo. Consecuentemente, $\mathcal{C}_2$ es homeomorfo a $\mathcal{W} \times Arcos(v, J)$. Similarmente, $\mathcal{C}_3$ es homeomorfo a $\mathcal{V} \times Arcos(v, J)$. Por el *Lema 2.4* y *Teorema 2.6*, $Arcos(p, S^1)$ es homeomorfo a $(D \setminus \{(-1, 0)\}) \times \{0\}$. Más aún, por [15, Section 3], el homeomorfismo $h : Arcos(p, S^1) \to (D \setminus \{(-1, 0)\}) \times \{0\}$ puede ser dado de tal forma que $h(\{p\}) = (1, 0, 0)$, $h(W_y) = (0, 1, 0)$, $h(V_y) = (0, -1, 0)$, $h(\mathcal{W}) = \{(x, x + 1, 0) : x \in (-1, 0]\}$ y $h(\mathcal{V}) = \{(x, x - 1, 0) : x \in (-1, 0]\}$. Así, $\mathcal{W} \times Arcos(v, J)$ y $\mathcal{V} \times Arcos(v, J)$ son homeomorfos a $\{(x, x + 1, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1, 0]$ y $z \in [0, 1]\}$ y $\{(x, x - 1, z) : x \in (-1, 0]$ y $z \in [0, 1]\}$, respectivamente. Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $((D \setminus \{(-1, 0)\}) \times \{0\}) \cup \{(x, x + 1, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1, 0]$ y $z \in [0, 1]\} \cup \{(x, x - 1, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (-1, 0]$ y $z \in [0, 1]\}$. $\square$

2.2 Propiedades generales del hiperespacio $Arcos(p, X)$

Es de nuestro interés conocer propiedades topológicas que tiene el hiperespacio $Arcos(p, X)$, tales como la conexidad y la compacidad. El siguiente resultado muestra que el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es arco conexo, para cualesquiera continuo X y punto $p \in X$.

Teorema 2.10. *Sea X es un continuo. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es arco conexo.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $A \in Arcos(p, X)$ con $A \neq \{p\}$. Por el *Lema 2.4* y el *Teorema 2.5*, existe un arco ordenado contenido en $Arcos(p, A)$ cuyos puntos extremos son $\{p\}$ y A. Como $Arcos(p, A) \subset Arcos(p, X)$ tenemos que $Arcos(p, X)$ es arco conexo. $\square$

Corolario 2.11. *Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es conexo.*

Lema 2.12. *Sean X un continuo y Y un subcontinuo de X. Si $p \in Y$, entonces $Arcos(p, Y)$ es un subconjunto cerrado de $Arcos(p, X)$.*

Demostración. Sea $p \in Y$. Notemos que $Arcos(p, Y) = Arcos(p, X) \cap C(Y)$. Como $C(Y)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$, se sigue que $Arcos(p, Y)$ es un subconjunto cerrado de $Arcos(p, X)$. $\square$

Proposición 2.13. *Sea X un continuo. Si X contiene una curva cerrada simple, entonces existe $p \in X$ tal que $Arcos(p, X)$ no es compacto.*

Demostración. Supongamos que X contiene una curva cerrada simple Y. Sea $p \in Y$. Por *Teorema 2.6*, $Arcos(p, Y)$ no es compacto. Además por el *Lema 2.12*, tenemos que $Arcos(p, Y)$ es un subconjunto cerrado de $Arcos(p, X)$. Por lo tanto, $Arcos(p, X)$ no es compacto. $\square$

De la *Proposición 2.13* es natural preguntarse lo siguiente:

Pregunta 2.14. *¿Si X es un continuo que no contiene curvas cerradas simples, entonces, para cada $p \in X$, se cumple que $Arcos(p, X)$ es compacto?*

La respuesta a esta pregunta es negativa, como muestra el siguiente ejemplo en el cual $Arcos(p, X)$ no es compacto, para cada $p \in X$.

Ejemplo 2.15. *Sean $a = (-1, 0)$ y $b = (1, 0)$ puntos de $\mathbb{R}^2$. Sea $B = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \frac{1}{2}]\}$. Sea $T = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (-1, \frac{1}{2^n})$ y $b_n = (1, \frac{1}{2^n})$. Sea d la métrica en $\mathbb{R}^2$, definida por $d((x, y), (x'.y')) = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y \geq 0$ y $d((x, y), T) = r_n\}$. Sea $X = T \cup B \cup (\bigcup\{J_n : n \in \mathbb{N}\})$, véase la Figura 2.4, se sabe que X es un dendroide.*

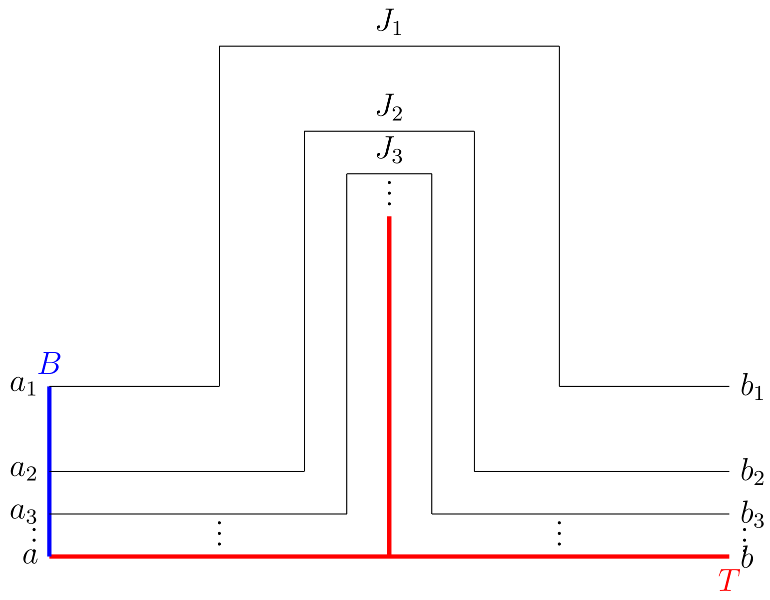

Figura 2.4: Dendroide X

Probemos que $Arcos(p, X)$ no es compacto, para cada $p \in X$. Sea $p \in X$, tenemos los siguientes tres casos:

Caso 1. Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p \in J_i$.
Para cada $n \geq i+1$, sea $B_n = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^i}]\}$. Observemos que la sucesión $\{J_n\}_{n \geq i+1}$ converge a T. Para cada $n \geq i+1$, sea $A_n = J_i \cup B_n \cup J_n$, claramente A_n es un arco en X que contiene a p, para cada $n \geq i+1$. Por otro lado, tenemos que la sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y converge a $B' = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \frac{1}{2^i}]\}$. Tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} J_i \cup \lim_{n \to \infty} B_n \cup \lim_{n \to \infty} J_n = J_i \cup B' \cup T,$$

por lo tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ no es un arco ya que contiene a T.

Caso 2. $p \in B$.
Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}]\}$. Para cada $n \geq i+1$, sea $B_n = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^i}]\}$. Notemos que la sucesión $\{J_n\}_{n \geq i+1}$ converge a T. Para cada $n \geq i+1$, sea $A_n = J_i \cup B_n \cup J_n$, de forma similar al *Caso 1* tenemos que $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ no es un arco ya que contiene a T.

Caso 3. $p \in T$.

Para este caso tenemos los siguientes dos subcasos:

Subcaso 3.1. $p \in \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\}$. Sea $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $B_n = \{(-1,y) : y \in [0, \frac{1}{2^n}]\}$ y $A_n = A \cup B_n \cup J_n$. Observemos que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de arcos que converge a $\{a\}$, luego

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A \cup \lim_{n\to\infty} B_n \cup \lim_{n\to\infty} J_n = A \cup \{a\} \cup T = T,$$

claramente $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ no es un arco.

Subcaso 3.2. $p \in \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1]\}$. Sean $C = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1]\}$ y $A' = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0]\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $B_n = \{(-1,y) : y \in [0, \frac{1}{2^n}]\}$ y $A_n = C \cup A' \cup B_n \cup J_n$. Observemos que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de arcos que converge a $\{a\}$, luego

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} C \cup \lim_{n\to\infty} A' \cup \lim_{n\to\infty} B_n \cup \lim_{n\to\infty} J_n = C \cup A' \cup \{a\} \cup T = T.$$

Tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ no es un arco ya que contiene a T.

Finalmente, del *Caso 1*, el *Caso 2* y el *Caso 3*, concluimos que $Arcos(p,X)$ no es compacto, para cada $p \in X$.

Teorema 2.16. *Si X es una dendrita, entonces para cada $p \in X$, el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $p \in X$. Por el *Teorema 1.47*, $\mathcal{M}(X)$ es compacto, probemos que el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es compacto, para ello probaremos que dicho hiperespacio es cerrado en $\mathcal{M}(X)$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Arcos(p,X)$, convergente a A, para algún $A \in C(X)$. Como $Arcos(p,X) \subseteq \mathcal{M}(X)$ tenemos que $A_n \in \mathcal{M}(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el *Teorema 1.47*, tenemos que $A \in \mathcal{M}(X)$. Más aún, como $p \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $p \in A$. Concluimos que $p \in A$, luego $A \in Arcos(p,X)$. Así $Arcos(p,X)$ es cerrado en el compacto $\mathcal{M}(X)$, por lo tanto $Arcos(p,X)$ es compacto. $\square$

Observemos que el dendroide descrito en el *Ejemplo 2.15*, tiene la particularidad de ser no localmente conexo, por ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.17. *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X es una dendrita, si y sólo si $Arcos(p,X)$ es compacto, para cada $p \in X$.*

Demostración. Supongamos que X es una dendrita, por el *Teorema 2.16*, para cada $p \in X$, $Arcos(p,X)$ es compacto. Supongamos ahora que $Arcos(p,X)$ es compacto para cada $p \in X$, por contrarrecípoca de la *Proposición 2.13*, X no contiene curvas cerradas simples, luego como X es localmente conexo, concluimos que X es una dendrita. $\square$

Teorema 2.18. *Sea X una dendrita. Si p es punto extremo de X, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a X.*

DEMOSTRACIÓN. Dados x y y puntos en X, denotaremos al arco con puntos extremos x y y por xy. Del *Teorema 1.50*, sabemos que la función de puntos extremos $E : \mathcal{M} \to F_2(X)$ es un homeomorfismo. Sean p un punto extremo de X y $\mathcal{C}_p = \{\{p, x\} : x \in X\} \subseteq F_2(X)$. Notemos que si $A \in Arcos(p, X)$, entonces $A = px$ para algún $x \in X$, así $E(A) = \{p, x\}$, tenemos que $E(Arcos(p, X)) = \mathcal{C}_p$. Luego, $E|_{Arcos(p,X)} : Arcos(p, X) \to \mathcal{C}_p$ es un homeomorfismo. Más aún, $\mathcal{C}_p$ es homeomorfo a X. Por lo tanto, X es homeomorfo a $Arcos(p, X)$. □

Lema 2.19. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si Y es un subcontinuo de X, tal que para todo $A \in Arcos(p, X)$, se tiene que $A \subseteq Y$, entonces $Arcos(p, X) = Arcos(p, Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $Y \subseteq X$, tenemos que $Arcos(p, Y) \subseteq Arcos(p, X)$. Ahora, sea $A \in Arcos(p, X)$. Por hipótesis, $A \subseteq Y$ y así $A \in Arcos(p, Y)$. Por lo tanto, $Arcos(p, X) = Arcos(p, Y)$. □

Veamos otra condición suficiente para que un continuo X tenga puntos en los cuales sus hiperespacios $Arcos(p, X)$ no sean compactos. Pero antes recordamos la siguiente definición.

Definición 2.20. *Sea X un espacio topológico. Si $p \in X$, definimos la* **arco componente** *de p en X, de la siguiente manera:*

$$a(p) = \{x \in X : \text{ existe un arco que contiene a } x \text{ y } p\}.$$

Observación 2.21. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Claramente, la arco componente $a(p)$ para $p \in X$ es un subconjunto conexo, ya que es arco conexo.*

Teorema 2.22. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si la arco componente de p en X, $a(p)$, es compacto, entonces $Arcos(p, X) = Arcos(p, a(p))$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $a(p)$ es un conjunto compacto, se sigue que $a(p)$ es un subcontinuo de X, así $Arcos(p, a(p))$ está bien definido. Claramente, si $A \in Arcos(p, X)$, entonces $A \subseteq a(p)$. Por el *Lema 2.19*, $Arcos(p, X) = Arcos(p, a(p))$. □

Corolario 2.23. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si la arco componente de p en X, $a(p)$, es un arco, entonces:*

(1) Si p es punto extremo de su arco componente, entonces $Arcos(p, X)$ es un arco.

(2) Si p no es punto extremo de su arco componente, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a una 2- celda.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de los *Teoremas 2.22* y *2.5*. □

Corolario 2.24. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si la arco componente de p en X es una curva cerrada simple, entonces $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda sin un punto de su frontera.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de los *Teoremas 2.22* y *2.6*. □

Lema 2.25. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $t \in \mathbb{R}$. Si Y es un subconjunto de X únicamente arco conexo tal que $p \in Y$ y existe una función continua y biyectiva $f : [t, \infty) \to Y$ tal que $f(t) = p$, entonces $\{A \in Arcos(p, X) : A \subset Y\} \cup \{cl_X(Y)\}$ es un arco ordenado.*

Demostración. Primero, probemos la siguiente afirmación:

Afirmación 2.25.1. *Si $A \in Arcos(p, X)$ tal que $A \subseteq Y$, entonces existen puntos $t_1, t_2 \in [t, \infty)$ tales que $A = f([t_1, t_2])$.*

Prueba de la Afirmación 2.25.1. Sea $A \in Arcos(p, X)$ un arco con puntos extremos a y b tal que $A \subset Y$. Como f es una función suprayectiva, existen $t_1, t_2 \in [t, \infty)$ tales que $f(t_1) = a$ y $f(t_2) = b$. Supongamos que $t_1 \leq t_2$, luego, $f([t_1, t_2])$ es un arco con puntos extremos a y b contenido en Y. Como Y es únicamente arco conexo tenemos que $A = f([t_1, t_2])$. Así queda demostrada la Afirmación 2.25.1.

Denotemos $\mathcal{C} = \{A \in Arcos(p, X) : A \subset Y\} \cup \{cl_X(Y)\}$. Notemos que si $A \in Arcos(p, X)$ tal que $A \subseteq Y$, entonces $A = f([t, t_A])$ con $t_A \in [t, \infty)$, ya que p es punto extremo de A. Probaremos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado, para ello, probaremos que la familia $\mathcal{C}$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$ y un continuo.

Afirmación 2.25.2. *La familia $\mathcal{C}$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$.*

Prueba de la Afirmación 2.25.2. Note que si $A \in Arcos(p, X)$ tal que $A \subseteq Y$, entonces $A \subseteq cl_X(Y)$. Sean $A, B \in Arcos(p, X)$ tales que $A, B \subseteq Y$, así existen $t_A, t_B \in [0, \infty)$ tales que $A = f([t, t_A])$ y $B = f([t, t_B])$. Como $t_A, t_B \in [t, \infty)$ tenemos que $t_A \leq t_B$ o $t_B \leq t_A$, así $[t, t_A] \subseteq [t, t_B]$ o $[t, t_B] \leq [t, t_A]$. Luego, $f([t, t_A]) \subseteq f([t, t_B])$ o $f([t, t_B]) \subseteq f([t, t_A])$, es decir, $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Por lo que $\mathcal{C}$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$. Queda probada la Afirmación 2.25.2.

Como $\mathcal{C} \subseteq C(X)$ tenemos que $\mathcal{C}$ es un espacio métrico, más aún, como $cl_X(Y) \in \mathcal{C}$, se sigue que $\mathcal{C}$ es no vacío.

Afirmación 2.25.3. *El conjunto $\mathcal{C}$ es compacto.*

Prueba de la Afirmación 2.25.3. Probaremos que la familia $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}$ convergente a A, para algún $A \in C(X)$. Como $p \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $p \in A$, así $A \in C(p, X)$. Probaremos que $A \in \mathcal{C}$. Observemos que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $A_n = cl_X(Y)$ para una infinidad de índices se tiene que $A = cl_X(Y)$ y así $A \in \mathcal{C}$. Sin perder generalidad podemos suponer que $A_n = f([t, t_n])$ con $t_n \in [0, \infty)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la *Afirmación 2.25.2*, los elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son comparables, existe una subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_{n_i} \subseteq A_{n_{i+1}}$ o $A_{n_{i+1}} \subseteq A_{n_i}$, es decir, la sucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso I. La sucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

En este caso, tenemos que $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}$. En particular $A \subseteq A_{n_1}$, luego $A \in Arcos(p,X)$ tal que $A \subseteq Y$, concluimos que $A \in \mathcal{C}$.
Caso II. La sucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente.
En este caso $A = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i})$. Por otro lado, como $A_{n_i} = f([t,t_{n_i}])$, para cada $i \in \mathbb{N}$, luego, la sucesión $\{t_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente, tenemos los siguientes dos casos:
(a) La sucesión $\{t_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente.
Como la sucesión $\{t_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente, entonces la sucesión $\{t_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $r = \sup\{t_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$. Probaremos que:

$$f([t,r]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}])).$$

Como $r \geq t_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $[t,t_{n_i}] \subseteq [t,r]$, para cada $i \in \mathbb{N}$, así $f([t,t_{n_i}]) \subseteq f([t,r])$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}]) \subseteq f([t,r])$. Como $f([t,r])$ es cerrado, tenemos que

$$cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}])) \subseteq f([t,r]).$$

Ahora, veamos que la contención contraria se cumple, es decir

$$f([t,r]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}])).$$

Sea $x \in f([t,r])$, existe $t_x \in [t,\infty)$ tal que $f(t_x) = x$. Observemos que $t_x \leq r$. Así, si $t_x = r$, como la sucesión $\{t_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a r y f es una función continua, entonces la sucesión $\{f(t_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $f(r) = x$, es decir, $x \in cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}]))$. Por otro lado, si $t_x < r$, como $r = \sup\{t_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $t_x \leq t_{n_m}$ y así, $t_x \in [t,t_{n_m}]$, luego:

$$x = f(t_x) \in f([t,t_{n_m}]) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}])).$$

Por lo tanto, $f([t,r]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}])) = A$, es decir, $A \in Arcos(p,X)$ tal que $A \subseteq Y$, por lo tanto $A \in \mathcal{C}$.
(b) La sucesión $\{t_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.
Así tenemos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[t,t_{n_i}] = [t,\infty)$. Se sigue que, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t,t_{n_i}]) = f([t,\infty))$. Por otro lado, $f([t,\infty)) = Y$, luego, $cl_x(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}) = cl_X(Y)$, por lo que $A = cl_X(Y)$ y así, $A \in \mathcal{C}$.
Por lo tanto tenemos que $A \in \mathcal{C}$, así $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$, luego $\mathcal{C}$ es compacto. Queda demostrada la Afirmación 2.25.3

Afirmación 2.25.4. *El conjunto $\mathcal{C}$ es conexo.*

Prueba de la Afirmación 2.25.4. Primero probaremos que la familia $\mathcal{B} = \{A \in Arcos(p, X) : A \subset Y\}$ es conexo. Sean $A, B \in \mathcal{B}$, Por la *Afirmación 2.25.2*, $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Sin perder generalidad, supongamos que $A \subseteq B$. Como p es punto extremo de B, por el *Teorema 2.5*, tenemos que $Arcos(p, B)$ es un arco, luego existe un arco α en $Arcos(p, B)$ cuyos puntos extremos son A y B. Se sigue que α es un arco en $\mathcal{B}$ con puntos extremos A y B, es decir, $\mathcal{B}$ es arco conexo y así conexo. Para ver que la familia $\mathcal{C}$ es conexo, probaremos que $\mathcal{C} = cl_{C(X)}(\mathcal{B})$.

Por lo hecho en (i), tenemos que $cl_{C(X)}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{C}$. Basta probar que $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(\mathcal{B})$. Sea $A \in \mathcal{C}$, se sigue que $A \in \mathcal{B}$ o $A = cl_X(Y) = cl_X(f([t, \infty)))$. Notemos que si $A \in \mathcal{B}$, entonces $A \in cl_{C(X)}(\mathcal{B})$. Supongamos que $A = cl_X(Y)$. Consideremos la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}$ tal que $A_n = f([t, t+n])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $A_n \subseteq A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. Por otro lado, $[t, \infty) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[t, t + n]$, así $f([t, \infty)) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f([t, t + n]) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Se sigue que $cl_X(f([t, \infty))) = cl_X(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = A$, así $A = cl_X(f([t, \infty))) \in cl_{C(X)}(\mathcal{B})$. Por lo tanto, $\mathcal{C} = cl_{C(X)}(\mathcal{B})$, es decir, $\mathcal{C}$ es conexo. Así queda probada la Afirmación 2.25.4.

De la *Afirmación 2.25.2*, la *Afirmación 2.25.3* y la *Afirmación 2.25.4*, concluimos que $\mathcal{C}$ es un continuo. Luego, la familia $\mathcal{C}$ es un arco ordenado. $\square$

Teorema 2.26. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si la arco componente de p en X, $a(p)$, es únicamente arco conexo y existe una función continua y biyectiva $f : [0, \infty) \to a(p)$, entonces:*

(1) Si $p = f(0)$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1)$.
(2) Si $p \neq f(0)$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1)$.

Demostración. Observemos que si $A \in Arcos(p, X)$, entonces $A \subseteq a(p)$. Probemos la siguiente Afirmación:

Afirmación 2.26.1. *Si $A \in Arcos(p, X)$, entonces existen puntos $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ tales que $A = f([t_1, t_2])$.*

Prueba de la Afirmación 2.26.1. Sea $A \in Arcos(p, X)$ y sean a y b los puntos extremos de A. Claramente, $A \subseteq a(p)$, luego como f es una función suprayectiva, existen $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ tales que $f(t_1) = a$ y $f(t_2) = b$. Supongamos que $t_1 \leq t_2$, luego, $f([t_1, t_2])$ es un arco con puntos extremos a y b contenido en $a(p)$. Como $a(p)$ es únicamente arco conexo tenemos que $A = f([t_1, t_2])$. Así queda demostrada la Afirmación 2.26.1.

Tenemos los siguientes casos:

(1) Supongamos que $p = f(0)$. Notemos que si $A \in Arcos(p,X)$, entonces $A = f([0,t_A])$ con $t_A \in [0,\infty)$, ya que p es punto extremo de A. Sea $\mathcal{C} = Arcos(p,X) \cup cl_X(a(p))$. Note que si $A \in Arcos(p,X)$, entonces $A \subseteq a(p)$. Por el *Lema 2.25*, tenemos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado. Luego, existe un homeomorfismo $\alpha : [0,1] \to \mathcal{C}$ tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = cl_X(a(p))$. Sea $\alpha|_{Arcos(p,X)} : [0,1) \to Arcos(p,X)$, claramente $\alpha|_{Arcos(p,X)}$ es un homeomorfismo.

(2) Supongamos que $p \neq f(0)$. Existe $t_p \in (0,\infty)$ tal que $f(t_p) = p$. Sea $M = f([0,t_p])$. Por el *Teorema 2.5*, existe un homeomorfismo $h_1 : [0,1] \to Arcos(p,M)$ tal que $h_1(0) = \{p\}$ y $h_1(1) = M$. Sea $\mathcal{B} = \{B \in Arcos(p,X) : B \subseteq f([t_p,\infty))\}$. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{cl_X(f([t_p,\infty)))\}$, por el *Lema 2.25*, es un arco ordenado. Luego, existe un homeomorfismo $g : [0,1] \to \mathcal{C}$ tal que $g(0) = \{p\}$ y $g(1) = cl_X(f([t_p,\infty)))$. Consideremos $h_2 = g|_{\mathcal{B}} : [0,1) \to \mathcal{B}$, tenemos que h_2 es un homeomorfismo. Observemos que si $A \in Arcos(p,X)$, entonces $A = K \cup L$ con $K \in Arcos(p,M)$ y $L \in \mathcal{B}$. Sea $h : [0,1] \times [0,1) \to Arcos(p,X)$ la función definida por $h((x,y)) = h_1(x) \cup h_2(y)$. Probaremos que h es un homeomorfismo. Tenemos que, h es una función continua y suprayectiva, ya que h_1 y h_2 lo son. Basta con probar que h es una función inyectiva y h^{-1} es continua.

(a) La función h es inyectiva: Sean $(x,y),(r,s) \in [0,1] \times [0,1)$ con $(x,y) \neq (r,s)$. Luego, $x \neq r$ o $y \neq s$, así como h_1 y h_2 son funciones inyectivas, tenemos que $h_1(x) \neq h_1(r)$ o $h_2(y) \neq h_2(s)$. Sin perder generalidad, supongamos que $h_1(x) \neq h_1(r)$, luego, existe $q \in h_1(x)$ tal que $q \notin h_2(r)$, se sigue que $q \in h_1(x) \cup h_2(y)$ y $q \notin h_1(r) \cup h_2(s)$. Se sigue que $h_1(x) \cup h_2(y) \neq h_1(r) \cup h_2(s)$, es decir, $h((x,y)) \neq h((r,s))$. Por lo que h es una función inyectiva.

(b) La función $h^{-1} : Arcos(p,X) \to [0,1] \times [0,1)$ es continua: Consideremos una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $Arcos(p,X)$ convergente a A, para algún $A \in Arcos(p,X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $(x_n,y_n) \in [0,1] \times [0,1)$ tal que $h^{-1}(A_n) = (x_n,y_n)$; de forma similar, sea $(x,y) \in [0,1] \times [0,1)$, tal que $h^{-1}(A) = (x,y)$. Probaremos que la sucesión $\{h^{-1}(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(A) = (x,y)$.
Supongamos que la sucesión $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a (x,y). Probaremos que existe una subsucesión $\{(x_{n_i},y_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a (a,b), para algún $(a,b) \in [0,1] \times [0,1)$ con $(a,b) \neq (x,y)$. Tenemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no convergen. Sin perder generalidad, supongamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $[0,1]$, existe una subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente. Sea $a = \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}$. Consideremos la subsucesión $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probaremos que la subsucesión $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge, supongamos que la subsucesión $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no converge, como $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ está en $[0,1)$, existen subsucesiones $\{y_{n_{i_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{y_{n_{j_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergentes a y_1 y y_2, para algunos $y_1,y_2 \in [0,1)$ tales que $y_1 \neq y_2$; además $y_1 \neq 1$ y $y_2 \neq 1$, ya que de otra forma, $cl_X(f([t_p,1))) \subseteq A$, lo cual no puede pasar ya que A es un arco en X. Consideremos las sucesiones $\{(x_{n_{i_m}},y_{n_{i_m}})\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{(x_{n_{j_m}},y_{n_{j_m}})\}_{m\in\mathbb{N}}$, claramente $\{(x_{n_{i_m}},y_{n_{i_m}})\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a (a,y_1) y $\{(x_{n_{j_m}},y_{n_{j_m}})\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a (a,y_2), como h es una función continua, tenemos que $\{h((x_{n_{i_m}},y_{n_{i_m}}))\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $h((a,y_1))$ y $\{h((x_{n_{j_m}},y_{n_{j_m}}))\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $h((a,y_2))$, luego $A = h_1(x) \cup h_2(y_1) = h_1(x) \cup h_2(y_2)$, como A se puede expresar únicamente como $h_1(x) \cup h_2(y)$, entonces $h_2(y_1) = h_2(y_2)$, como

h_2 es una función inyectiva, se sigue que $y_1 = y_2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto deducimos que la subsucesión $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge, así basta con tomar $b = \lim_{i\to\infty} y_{n_i}$. Como ya vimos, existe una subsucesión $\{(x_{n_i}, y_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a (a, b), donde $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1)$, con $(a, b) \neq (x, y)$. Luego, como h es una función continua, tenemos que $\{h((x_{n_i}, y_{n_i}))\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $h((a, b))$, es decir, $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $h_1(a) \cup h_2(b)$, pero $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{R}}$ converge a A y A se puede representar únicamente como $h_1(x) \cup h_2(y)$, se sigue que $h_1(a) \cup h_2(b) = h_1(x) \cup h_2(y)$, por lo que, $h_1(x) = h_1(a)$ y $h_2(y) = h_2(b)$, como h_1 y h_2 son inyectivas, se sigue que $x = a$ y $y = b$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x, y). Luego, $\{h^{-1}(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(A)$, es decir h^{-1} es una función continua.

Concluimos que h es un homeomorfismo entre $[0, 1] \times [0, 1)$ y $Arcos(p, X)$. $\square$

Definición 2.27. *Un* **rayo** *R es un espacio topológico homeomorfo al intervalo semiabierto* $(0, 1]$.

Definición 2.28. *Un espacio topológico compacto Y es una* **compactación del intervalo** $(0, 1]$ *si existe un homeomorfismo $h : (0, 1] \to h((0, 1]) \subseteq Y$ tal que $h((0, 1])$ es denso en Y. Al homeomorfismo h se le llama encaje y a $X = Y \setminus h((0, 1])$ se le denomina residuo.*

El siguiente resultado muestra un modelo geométrico de $Arcos(p, Y)$ cuando Y es una compactación del intervalo $(0, 1]$ con residuo arco. Estas compactaciones serán retomadas en el Capítulo 5.

Teorema 2.29. *Sean Y una compactación del intervalo* $(0, 1]$ *con residuo un arco X. Sean a y b los puntos extremos de X. Sea $h : (0, 1] \to h((0, 1]) \subseteq Y$ un homeomorfismo. Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si $p = h(1)$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, Y)$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1)$.

(2) Si $p \in h((0, 1]) \setminus \{h(1)\}$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, Y)$ es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1)$.

(3) Si $p \in \{a, b\}$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, Y)$ es un arco.

(4) Si $p \in X \setminus \{a, b\}$, entonces el hiperespacio $Arcos(p, Y)$ es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1]$.

Demostración. Primero probemos el inciso *(1)*, sea $p = h(1)$, como $h((0, 1])$ es únicamente arco conexo y es imagen continua y biyectiva del $[0, \infty)$, por el *Teorema 2.26*, $Arcos(p, Y)$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1)$.

Ahora, probemos el inciso *(2)*, sea $p \in h((0, 1]) \setminus \{h(1)\}$, como $h((0, 1])$ es únicamente arco conexo y es imagen continua y biyectiva del $[0, \infty)$, por el *Teorema 2.26*, inciso *(1)*, $Arcos(p, Y)$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1] \times [0, 1)$.

Probemos el inciso *(3)*. Supongamos que $p \in \{a, b\}$. Notemos que X es la arco componente de p en Y. Por el *Lema 2.19*, $Arcos(p, Y) = Arcos(p, X)$. Por el *Lema 2.4* y el *Teorema 2.5*, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a un arco. Por lo tanto, $Arcos(p, Y)$ es homeomorfo a un arco.

Finalmente, probemos el inciso *(4)*. Supongamos que $p \in X \setminus \{a, b\}$. Notemos que X es arco componente de p en Y. Por el *Lema 2.19*, $Arcos(p, Y) = Arcos(p, X)$. Por el *Lema 2.4* y el *Teorema 2.5*, $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda. Por lo tanto, $Arcos(p, Y)$ es homeomorfo a una 2-celda. □

El siguiente ejemplo muestra otro continuo que no contiene curvas cerradas simples para el cual existe un punto p tal que el hiperespacio de arcos en X que contienen a p no es compacto y su prueba es una consecuencia inmediata del *Teorema 2.29*.

Corolario 2.30. *Sean* $X = \{0\} \times [-1, 1]$ *y* $W = \{(x, \mathrm{sen}(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$. *Sea* $Y = X \cup W$, *el continuo* $\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$. *Si* $p \in Y$, *entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si $p = (1, \mathrm{sen}(1))$, *entonces el hiperespacio* $Arcos(p, Y)$ *es homeomorfo al intervalo* $[0, 1)$.

(2) Si $p \in W \setminus \{(1, \mathrm{sen}(1))\}$, *entonces el hiperespacio* $Arcos(p, Y)$ *es homeomorfo a* $[0, 1] \times [0, 1)$.

(3) Si $p \in \{(0, 1), (0, -1)\}$, *entonces el hiperespacio* $Arcos(p, Y)$ *es un arco.*

(4) Si $p \in X \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$, *entonces el hiperespacio* $Arcos(p, Y)$ *es homeomorfo a* $[0, 1] \times [0, 1]$.

Teorema 2.31. *Sean* X *un continuo y* $p \in X$. *Si la arco componente de* p *en* X, $a(p)$, *es únicamente arco conexo y existe una función continua y biyectiva* $f : \mathbb{R} \to a(p)$, *entonces el hiperespacio* $Arcos(p, X)$ *es homeomorfo a* $[0, 1) \times [0, 1)$.

Demostración. Sea $a(p)$ la arco componente de p en X. Sea $t_p \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_p) = p$. Sean:

$$\mathcal{C}_1 = \{A \in Arcos(p, X) : A \subseteq f((-\infty, t_p])\} \text{ y}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{A \in Arcos(p, X) : A \subseteq f([t_p, \infty))\}.$$

Afirmación 2.31.1. *Si* $A \in Arcos(p, X)$, *entonces existen* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *tales que* $A = f([t_1, t_2])$.

Prueba de la Afirmación 2.31.1. Sea $A \in Arcos(p, X)$ y sean a y b sus puntos extremos. Claramente, $A \subseteq a(p)$. Como f es una función suprayectiva, existen $t_a, t_b \in \mathbb{R}$ tales que $f(t_a) = a$ y $f(t_b) = b$. Note que $[t_a, t_b]$ es un continuo, así $f([t_a, t_b])$ es un continuo contenido en $a(p)$. Claramente, $f|_{[t_a,t_b]} : [t_a, t_b] \to f([t_a, t_b])$ es un homeomorfismo, luego $f(t_a) = a$ y $f(t_b) = b$ son puntos extremos de $f([t_a, t_b])$. Como $a(p)$ es únicamente arco conexo, se sigue que $A = f([t_a, t_b])$. Basta con tomar $t_a = t_1$ y $t_b = t_2$. Con lo que queda demostrada la Afirmación 2.31.1.

Notemos que si $A \in \mathcal{C}_1$, entonces p es punto extremo de A, luego $A = f([t_A, t_p])$, para algún $t_A \in (-\infty, t_p]$. De forma análoga, si $B \in \mathcal{C}_2$, entonces $B = f([t_p, t_B])$, para algún $t_B \in [t_p, \infty)$. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{C}_1 \cup \{cl_X(f((-\infty, t_p]))\}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$. Por el *Lema 2.25*, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos ordenados.

Probemos que si $A \in Arcos(p, X)$, entonces $A = K \cup L$ con $K \in \mathcal{C}_1$ y $L \in \mathcal{C}_2$. En efecto, si $A \in Arcos(p, X)$, entonces existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f([t_1, t_2]) = A$. Como $t_p \in [t_1, t_2]$, tenemos que $[t_1, t_2] = [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2]$, se sigue que $f([t_1, t_2]) = f([t_1, t_p]) \cup f([t_p, t_2])$. Sean $K = f([t_1, t_p])$ y $L = f([t_p, t_2])$. Notemos que $K \in \mathcal{C}_1$ y $L \in \mathcal{C}_2$.

Sea $h : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to Arcos(p, X)$ la función definida por $h(K, L) = K \cup L$, para cada $K \in \mathcal{C}_1$ y $L \in \mathcal{C}_2$.

Afirmación 2.31.2. *La función h es un homeomorfismo.*

Prueba de la Afirmación 2.31.2. (a) La función h es continua: Sean $(K, L) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ y $\{(K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a (K, L). Notemos que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a K y $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L. Así la sucesión $\{K_n \cup L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $K \cup L$, es decir, $\{h(K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h(K, L)$, por lo tanto h es una función continua.

(b) La función h es inyectiva: Sean $(K_1, L_1), (K_2, L_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ tales que $(K_1, L_1) \neq (K_2, L_2)$, se sigue que $K_1 \neq K_2$ o $L_1 \neq L_2$. Sin perder generalidad, supongamos que $K_1 \neq K_2$, entonces existe $y \in K_1$ y $y \notin K_2$. Como $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{\{p\}\}$, entonces $y \neq p$. Luego, $y \in K_1 \cup L_1$ y $y \notin K_2 \cup L_2$. Se sigue que $K_1 \cup L_1 \neq K_2 \cup L_2$ y así:

$$h(K_1, L_1) = K_1 \cup L_1 \neq K_2 \cup L_2 = h(K_2, L_2).$$

Concluimos que h es inyectiva.

(c) La función h es suprayectiva: Sea $A \in Arcos(p, X)$, sabemos que $A = K \cup L$ con $K \in \mathcal{C}_1$ y $L \in \mathcal{C}_2$. Luego, $h(K, L) = K \cup L = A$, es decir, h es suprayectiva.

(d) La función $h^{-1} : Arcos(p, X) \to \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ es continua: Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Arcos(p, X)$ convergente a A, para algún $A \in Arcos(p, X)$. Probaremos que la sucesión $\{h^{-1}(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(A)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $(K_n, L_n) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, tal que $h^{-1}(A_n) = (K_n, L_n)$; de forma análoga, sea $(K, L) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ tal que $h^{-1}(A) = (K, L)$. Probemos que la sucesión $\{(K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $h^{-1}(A) = (K, L)$.

Supongamos lo contrario, es decir, que la sucesión $\{(K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge. Probaremos que existe una subsucesión $\{(K_{n_i}, L_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge al punto (R, T) con $(R, T) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ de tal forma que $(R, T) \neq (K, L)$, tenemos que la sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge o la sucesión $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge. Sin perder generalidad, supongamos que la sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, observemos que dicha sucesión está en $\mathcal{C}_1$, además es sucesión de $\mathcal{A} = \mathcal{C}_1 \cup \{cl_X(f((-\infty, t_p]))\}$ el cual es compacto. Como $\mathcal{A}$ es subconjunto de $C(X)$ se sigue que es primero numerable, luego $\mathcal{A}$ es un espacio sequencialmente compacto. Por lo que existe una subsucesión convergente $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$. Sea $R = \lim\limits_{i\to\infty} K_{n_i}$, observemos que $R \neq cl_X(f((-\infty, t_p]))$, ya que de lo contrario, tendríamos que $cl_X(f((-\infty, t_p])) \subseteq M$ con M un arco, lo cual es una contradicción. Consideremos la subsucesión $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. La subsucesión $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge: en este caso basta con tomar $T = \lim\limits_{i\to\infty} L_{n_i}$, de forma similar a R, tenemos que $T \neq cl_X(f([t_p, \infty)))$.

Caso 2. La subsucesión $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no converge: observemos que dicha sucesión está en $\mathcal{C}_2$, además es sucesión de $\mathcal{B} = \mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p,\infty)))\}$ el cual es compacto. Como $\mathcal{B}$ es subconjunto de $C(X)$ se sigue que es primero numerable, luego $\mathcal{B}$ es un espacio secuencialmente compacto. Luego existe una subsucesión convergente $\{L_{n_{i_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Sea $T = \lim_{j\to\infty} L_{n_{i_j}}$. Basta considerar la subsucesión $\{(K_{n_{i_j}}, L_{n_{i_j}})\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge al punto (R,T).

Así existe una subsucesión $\{(K_{n_i}, L_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente al punto (R,T) con $(R,T) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ y $(R,T) \neq (K,L)$, luego como h es una función continua, tenemos que la sucesión $\{h(K_{n_i}, L_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $h(R,T)$, es decir, $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $R\cup T$, pero la sucesión $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a A y $A = K\cup L$ de forma única, así $K\cup L = R\cup T$, se sigue que $K = R$ y $L = T$, lo cual contradice que $(R,T) \neq (K,L)$. Luego, la sucesión $\{(K_{n_i}, L_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge al punto (K,L) lo cual es una contradicción. De tal manera que la sucesión $\{(K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto (K,L). Concluimos que la sucesión $\{h^{-1}(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(A)$, así h^{-1} es una función continua. Queda demostrada la Afirmación 2.31.2.

Finalmente, tenemos que h es un homeomorfismo entre $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ y $Arcos(p,X)$. Sea $g : [0,1)\times[0,1) \to \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ un homeomorfismo. Basta considerar, $H : [0,1)\times[0,1) \to Arcos(p,X)$ definida por $H = h\circ g$, claramente H es un homeomorfismo entre $[0,1)\times[0,1)$ y $Arcos(p,X)$. □

Vimos que para el continuo $sen(\frac{1}{x})$, existen puntos cuyos hiperespacios anclados en un punto no son compactos. Es decir, el recíproco de *Proposición 2.13* no se cumple. Veamos un ejemplo más con el continuo conocido como *Arcoiris de Knaster* el cual está definido en [14].

Teorema 2.32. *Sean X el arcoiris de Knaster, e el punto extremo de X y $\kappa(e)$ la composante de e en X. Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si $p = e$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo al intervalo $[0,1)$.

(2) Si $p \in \kappa(e)\setminus\{e\}$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $[0,1]\times[0,1)$.

(3) Si $p \in X\setminus\kappa(e)$, entonces el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $[0,1)\times[0,1)$.

Demostración. Como los únicos subcontinuos propios de X son arcos, tenemos que las arco componentes del arcoiris de Knaster coinciden con sus composantes, es decir, que para $p \in X$, $a(p) = \kappa(p)$. Además, existe una función continua y biyectiva $f : [0,\infty) \to \kappa(e)$ (véase [31] página 2), tenemos que:

(1) Si $p = e = f(0)$, entonces por el *Teorema 2.26* inciso (1), tenemos que $Arcos(p,X)$ es homeomorfo al intervalo $[0,1)$.

(2) Si $p \in \kappa(e)\setminus\{e\}$, entonces $p \neq f(0)$, por el *Teorema 2.26* inciso (2), tenemos que $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $[0,1]\times[0,1)$.

Por otro lado, para el inciso *(3)*, si $p \in X\setminus\kappa(e)$, entonces existe una función continua y biyectiva $f : \mathbb{R} \to \kappa(p)$ (véase [31] página 2). Por el *Teorema 2.31*, se tiene que $Arcos(p,X)$ es homeomorfo a $[0,1)\times[0,1)$. □

Teorema 2.33. *Sea X un continuo tal que para todo $p \in X$ el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es compacto. Si la arco componente de p en X, $a(p)$, es únicamente arco conexo, entonces $a(p)$ no es imagen continua y biyectiva de* $[0, \infty)$ *o* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $p \in X$. Supongamos que la arco componente de p en X, $a(p)$, es únicamente arco conexo y existe una función continua y biyectiva $f : [0, \infty) \to a(p)$, tenemos dos casos:

Caso 1. Supongamos que $p = f(0)$, entonces por el *Teorema 2.26* inciso (1), el hiperesapcio $Arcos(p, X)$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1)$.

Caso 2. Supongamos que $p \neq f(0)$, entonces por el *Teorema 2.26* inciso (2), el hiperepacio $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1)$.

En ambos casos, $Arcos(p, X)$ no es compacto, lo cual es una contradicción.

Ahora, supongamos que $a(p)$ es únicamente arco conexo y existe una función continua y biyectiva $f : \mathbb{R} \to a(p)$, entonces por el *Teorema 2.31*, el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es homeomorfo a $[0, 1) \times [0, 1)$, el cual no es compacto, lo cual es una contradicción. Así, X no contiene arco componentes únicamente arco conexos que sean imagen continua y biyectiva de $[0, \infty)$ o $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 2.34. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si $Arcos(p, X)$ es un subconjunto ordenado compacto de $C(X)$, entonces $Arcos(p, X)$ es un arco.*

Demostración. Como $Arcos(p, X) \subseteq C(X)$, se tiene que $Arcos(p, X)$ es un espacio métrico, además es no vacío ya que $\{p\} \in Arcos(p, X)$. Por otro lado, por el *Corolario 2.11*, $Arcos(p, X)$ es conexo, luego $Arcos(p, X)$ es un continuo. Como $Arcos(p, X)$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$, tenemos que $Arcos(p, X)$ es un arco ordenado, así existe un homeomorfismo $h : [0, 1] \to Arcos(p, X)$, concluimos que $Arcos(p, X)$ es un arco. $\square$

Teorema 2.35. *Sea X un continuo. Si $\mathcal{M}(X)$ es compacto, entonces el hiperespacio $Arcos(p, X)$ es compacto, para cada $p \in X$.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Arcos(p, X)$ convergente a A. Note que $A \in C(p, X)$, ya que $p \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $A_n \in \mathcal{M}(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{M}(X)$ es compacto, tenemos que $A \in \mathcal{M}(X)$ y así, $A \in Arcos(p, X)$. Concluimos que $Arcos(p, X)$ es compacto. $\square$

Capítulo 3

El hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ en continuos

En este capítulo introducimos el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ para un continuo X, un punto $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(X)$, el cual definimos a continuación.

Definición 3.1. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$. Para cada punto $p \in X$, definimos y denotamos el* **hiperespacio de arcos en X con punto medio p respecto de** μ, *esto es,*

$$Medio_\mu(p, X) = \{A \in \mathcal{M}(X) : P_\mu(A) = p\},$$

donde $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ es la función punto medio de X con respecto de μ.

Este hiperespacio lo consideramos como subespacio del hiperespacio $C(X)$ con la métrica de Hausdorff, así su topología será la heredada de $C(X)$.
De ahora en adelante μ representa una función de Whitney para $C(X)$.
El hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ surge de manera natural del estudio del hiperespacio $Arcos(p, X)$ y la función punto medio en continuos. Dado un continuo X, un punto $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(X)$:

Pregunta 3.2. *¿Qué propiedades topológicas tiene, $Medio_\mu(p, X)$, el hiperespacio de arcos en X con punto medio p respecto de μ para cada punto $p \in X$?*

3.1 Algunos modelos geométricos del hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$

Es un tema interesante en la teoría de los hiperespacios conocer modelos geométricos de continuos. En esta sección estudiamos modelos geométricos del hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$, cuando X es un arco o X es una curva cerrada simple o X es un triodo simple.

Lema 3.3. *Sean X y Y continuos. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney, entonces $\mu \circ C(h)^{-1} : C(Y) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney.*

Demostración. Como h es un homeomorfismo, sabemos que $C(h)^{-1} : C(Y) \to C(X)$ es un homeomorfismo, así $\mu \circ C(h)^{-1} : C(Y) \to [0, \infty)$ es una función continua. Basta probar que se cumplen las condiciones (1) y (2) de la *Definición 1.33*.

(1) Probaremos que $\mu \circ C(h)^{-1}(\{y\}) = 0$, para cada $y \in Y$. Sea $y \in Y$, note que $C(h)^{-1}(\{y\}) = \{h^{-1}(y)\}$, luego $\mu(\{h^{-1}(y)\}) = 0$, ya que μ es una función de Whitney. Se sigue que $\mu \circ C(h)^{-1}(\{y\}) = 0$.

(2) Sean $A, B \in C(Y)$ tales que $A \subsetneq B$. Como $C(h)^{-1}$ es un homeomorfismo tenemos que $C(h)^{-1}(A) \subsetneq C(h)^{-1}(B)$ y como μ es una función de Whitney para $C(X)$, tenemos que $\mu \circ C(h)^{-1}(A) = \mu(C(h^{-1})(A)) \leq \mu(C(h^{-1})(B)) = \mu \circ C(h)^{-1}(B)$.

Por lo tanto, $\mu \circ C(h)^{-1}$ es una función de Whitney para $C(Y)$. $\square$

Teorema 3.4. *Sean X, Y continuos y $p \in X$. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $Medio_\mu(p, X)$ es homeomorfo a $Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$.*

Demostración. Consideremos la función $C(h) : C(X) \to C(Y)$ tal que $C(h)(A) = h(A)$, para cada $A \in C(X)$. Como h es un homeomorfismo, por [32, Lema 2.3] la función $C(h)$ es un homeomorfismo. Notemos que, por el *Lema 3.3*, $\mu \circ C(h)^{-1}$ es una función de Whitney para $C(Y)$.

Probaremos que $C(h)(Medio_\mu(p, X)) = Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$. Consideremos $B \in C(h)(Medio_\mu(p, X))$, así existe $A \in Medio_\mu(p, X)$ tal que $C(h)(A) = B$ y existen K y L subcontinuos de A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Se sigue que, $B = h(A) = h(K) \cup h(L)$ y $h(K) \cap h(L) = \{h(p)\}$. Por otro lado, por el Lema 3.3, tenemos que $\mu \circ C(h)^{-1}$ es una función para $C(Y)$, además $(\mu \circ C(h)^{-1})(h(K)) = \mu(K) = \mu(L) = (\mu \circ C(h)^{-1})(h(L))$. Por lo tanto $B \in Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$. Para la contención contraria, sea $B \in Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$, luego existen K y L subcontinuos de B tales que $B = K \cup L$, $K \cap L = \{h(p)\}$ y $(\mu \circ C(h)^{-1})(K) = (\mu \circ C(h)^{-1})(L)$. Sea $A = h^{-1}(B)$, se sigue que $A = h^{-1}(K) \cup h^{-1}(L)$ y $h^{-1}(K) \cap h^{-1}(L) = \{p\}$. Además $\mu(h^{-1}(K)) = (\mu \circ C(h)^{-1})(K) = (\mu \circ C(h)^{-1})(L) = \mu(h^{-1}(L))$. Luego, $A \in Medio_\mu(p, X)$. Note que $B = h(A) \in C(h)(Medio_\mu(p, X))$.

Como $C(h)$ es un homeomorfismo, $Medio_{\mu \circ C(h)^{-1}}(h(p), Y)$ y $Medio_\mu(p, X)$ son homeomorfos. $\square$

Teorema 3.5. *Sea X un árbol. Si p es punto extremo de X, entonces p es punto extremo de cada subcontinuo que lo contenga.*

Demostración. Sea p un punto extremo de X. Sea Y un subcontinuo de X que contiene a p, por [25, Teorema 10.13], basta probar que $Y \setminus \{p\}$ contiene solo una componente. Supongamos lo contrario, es decir, existen B y C componentes de $Y \setminus \{p\}$. Por [25, Proposición 6.3] tenemos que $B \cup \{p\}$ y $C \cup \{p\}$ son subcontinuos de Y. Podemos considerar $b \in B$ y $c \in C$ tales que el arco $bp \subseteq B \cup \{p\}$ y el arco $cp \subseteq C \cup \{p\}$. Como p no es punto extremo del arco bc en Y, se sigue que $ord(p, bc) = 2$, lo cual es una contradicción ya que $ord(p, bc) \leq ord(p, X) = 1$. Se sigue que $Y \setminus \{p\}$ contiene una sola componente y así $ord(p, Y) = 1$. $\square$

El Teorema 3.6 muestra el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en un arco X con punto medio p, para cualquier $p \in X$.

Teorema 3.6. *Sea X el arco $[0,1]$. Consideremos un punto $p \in X$, se tienen las siguientes afirmaciones:*

(1) si $p \in \{0,1\}$, entonces $Medio_\mu(p,X) = \{\{p\}\}$;

(2) si $p \in X \setminus \{0,1\}$, entonces $Medio_\mu(p,X)$ es homeomorfo a un arco.

DEMOSTRACIÓN. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ la función punto medio de X respecto de μ.

(1) Sea $p \in \{0,1\}$. Como p es punto extremo de X, por el *Teorema 3.5*, si A es un arco en X que contiene a p, entonces p es punto extremo de A, así por el *Teorema 1.52*, tenemos que $Medio_\mu(p,X) = \{\{p\}\}$.

(2) Sea $p \in X \setminus \{0,1\}$. Sea $m = \text{mín}\{\mu([0,p]), \mu([p,1])\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $m = \mu([0,p])$. Sea $g : Medio_\mu(p,X) \to [0,p]$ definida por $g(A) = \text{mín}(A)$, para cada $A \in Medio_\mu(p,X)$. Probaremos que g es un homeomorfismo. Por [20, Lema 2.4] la función mín es continua en 2^X, así g es una función continua al ser una restricción de la función mín al $Medio_\mu(p,X)$. Probaremos que g es una función biyectiva y que $g^{-1} : [0,p] \to Medio_\mu(p,X)$ es continua.

(a) La función g es inyectiva: Sean A y B elementos de $Medio_\mu(p,X)$ tales que $g(A) = g(B)$. Como A y B son arcos en X, podemos hallar $y_1, y_2 \in [0,1]$ tales que $A = [g(A), y_1]$ y $B = [g(B), y_2]$. Dado que $A, B \in Medio_\mu(p,X)$, se tiene que $p \in A$ y $p \in B$, así $p \leq y_1$ y $p \leq y_2$. Como $g(A) = g(B)$ tenemos que $[g(A), p] = [g(B), p]$, por tanto $\mu([g(A),p]) = \mu([g(B),p])$. Por la *Observación 1.53*, se sigue que $\mu([p,y_1]) = \mu([g(A),p]) = \mu([g(B),p]) = \mu([p,y_2])$. Por otro lado, $y_1 \leq y_2$ o $y_2 \leq y_1$ y así $[p,y_1]$ y $[p,y_2]$ son comparables respecto a la inclusión de conjuntos, por la *Observación 1.36*, tenemos que $[p,y_1] = [p,y_2]$. Por tanto, $y_1 = y_2$, luego $A = B$.

(b) La función g es suprayectiva: Sea $t \in [0,p]$, tenemos que $\mu([t,p]) \leq \mu([0,p])$. Como $\{p\} \subsetneq [p,1]$ y $\mu([t,p]) \in [0, \mu([p,1])]$, por el *Lema 1.37*, existe C un subcontinuo tal que $\{p\} \subseteq C \subseteq [p,1]$ y $\mu(C) = \mu([t,p])$, así existe $r \in [p,1]$ tal que $C = [p,r]$. Sea $A = [t,r]$, se sigue que $A \in Medio_\mu(p,X)$. Además $g(A) = \text{mín}(A) = t$.

(c) La función g^{-1} es continua: Sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,p]$ convergente a t, para algún $t \in [0,p]$. Por el *Teorema 1.50*, la sucesión $\{[t_n,p]\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco $[t,p]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu([t_n,p]) \leq \mu([0,p])$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{p\} \subsetneq [p,1]$ y $\mu([t_n,p]) \in [0,\mu([p,1])]$, por el *Lema 1.37*, existe C_n un subcontinuo tal que $\{p\} \subseteq C_n \subseteq [p,1]$ y $\mu(C_n) = \mu([t_n,p])$, así existe $r_n \in [p,1]$ tal que $C = [p,r_n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\{p\} \subsetneq [p,1]$ y $\mu([t,p]) \in [0,\mu([p,1])]$, por el *Lema 1.37*, existe C un subcontinuo tal que $\{p\} \subseteq C \subseteq [p,1]$ y $\mu(C) = \mu([t,p])$, luego existe $r \in [p,1]$ tal que $C = [p,r]$. Como $[p,1]$ es compacto, podemos suponer que existe $\{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al punto s, para algún $s \in [p,1]$. Por el *Teorema 1.50*, tenemos que la sucesión $\{[p,r_{n_k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $[p,s]$, más aún, como μ es una función continua, se sigue que $\{\mu([p,r_{n_k}])\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu([p,s])$. Por otro lado, $\mu([t_{n_k},p]) = \mu([p,r_{n_k}])$, para cada $k \in \mathbb{N}$, pasando al límite tenemos que $\mu([t,p]) = \mu([p,s])$, por lo tanto $\mu([p,r]) = \mu([p,s])$, así $r = s$. Observemos que $\{t_n, r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{t,r\}$. Si definimos $A_n = [t_n, r_n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el *Teorema 1.50*, tenemos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco $A = [t, r]$. Como g es biyectiva, tenemos que g^{-1} es biyectiva, así $g^{-1}(t_n) = A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g^{-1}(t) = A$, por lo tanto g^{-1} es una función continua.

Concluimos que g es una función continua, biyectiva y con inversa continua, por lo tanto g es un homeomorfismo. $\square$

Observación 3.7. *Sea X un arco con puntos extremos a y b. Si p no es punto extremo del arco X, entonces $Medio_\mu(p, X)$ es un arco ordenado donde $\{p\}$ es uno de sus puntos extremos y el otro punto extremo es un arco A en X que satisface que a es un punto extremo de A o b es un punto extremo de A.*

Lema 3.8. *Sean X el circulo unitario en $\mathbb{R}^2$ y un punto $p \in X$. Para cualesquiera $A, B \in Medio_\mu(p, X)$, se tiene que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.*

Demostración. Por el *Teorema 3.4*, podemos suponer que $p = (1, 0)$. Sean $A, B \in Medio_\mu(p, X)$. Sean $\alpha_1 \in [0, 2\pi)$ y $\alpha_2 \in (-2\pi, 0]$ tales que $A = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\alpha_2, \alpha_1]\}$. Sean $\beta_1 \in [0, 2\pi)$ y $\beta_2 \in (-2\pi, 0]$ tales que $B = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\beta_2, \beta_1]\}$. Sean $a_1 = (\cos\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1)$ y $a_2 = (\cos\alpha_2, \operatorname{sen}\alpha_2)$ los puntos extremos de A; $b_1 = (\cos\beta_1, \operatorname{sen}\beta_1)$ y $b_2 = (\cos\beta_2, \operatorname{sen}\beta_2)$ los puntos extremos de B. Sean $A_1 = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, \alpha_1]\}$ y $A_2 = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\alpha_2, 0]\}$; además, sean $B_1 = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, \beta_1]\}$ y $B_2 = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\beta_2, 0]\}$. Observemos que A_1 y B_1 son comparables y también A_2 y B_2 son comparables. Note que $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \{p\}$, $B = B_1 \cup B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \{p\}$. Por la *Definición 1.51*, $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ y $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. $\beta_1 < \alpha_1$. Se sigue que $B_1 \subsetneq A_1$ (véase la *Figura 3.1*), por tanto $\mu(B_1) < \mu(A_1)$, como $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ y $\mu(B_1) = \mu(B_2)$, se tiene que $\mu(B_2) < \mu(A_2)$. Como A_2 y B_2 son comparables se tiene que $B_2 \subsetneq A_2$. Concluimos que $B \subseteq A$.

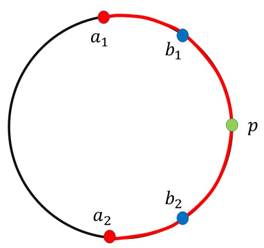

Figura 3.1: *Caso 1.*

Caso 2. $\alpha_1 \leq \beta_1$. Se sigue que $A_1 \subseteq B_1$ (véase la *Figura 3.2*), por tanto $\mu(A_1) \leq \mu(B_1)$, como $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ y $\mu(B_1) = \mu(B_2)$, se tiene que $\mu(A_2) \leq \mu(B_2)$. Como A_2 y B_2 son comparables se tiene que $A_2 \subseteq B_2$. Concluimos que $A \subseteq B$.

En ambos casos concluimos que A y B son comparables respecto a la contención de conjuntos. $\square$

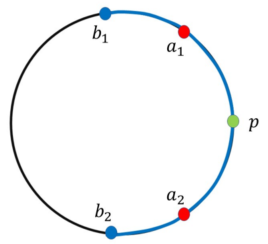

Figura 3.2: *Caso 2.*

Lema 3.9. *Sean X una curva cerrada simple y $\mu : C(X) \to [0, \mu(X)]$ una función de Whitney para $C(X)$. Dados $x \in X$ y $s \in [0, \mu(X))$, existe $K \in \mathcal{M}(X)$ tal que $P_\mu(K) = x$ y $\mu(K) = s$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el *Teorema 3.4*, podemos suponer que $p = (1, 0)$. Sean $\alpha \in (-2\pi, 0]$ y $\beta \in [0, 2\pi)$, definimos $A_\alpha = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\alpha, 0]\}$ y $B_\beta = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, \beta]\}$. Sean $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in (-2\pi, 0]\} \cup \{X\}$ y $\mathcal{B} = \{B_\beta : \beta \in [0, 2\pi)\} \cup \{X\}$. Observemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos ordenados en $C(X)$. Probaremos que $\mathcal{B}$ es un arco. Sea $g : [0, 2\pi] \to X$ definida por $g(t) = (cost, sent)$, para cada $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que g es una función continua, y así $C(g) : C([0, 2\pi]) \to C(X)$ definida por $C(g)(A) = g(A)$, para cada $A \in C([0, 2\pi])$, es una función continua. Sea $\mathcal{G} = \{[0, t] : t \in [0, 2\pi]\}$, note que $\mathcal{G} \subseteq C([0, 2\pi])$, se tiene que $C(g)|_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to \mathcal{B}$ es una función continua. Sea $h : [0, 2\pi] \to \mathcal{G} \subseteq C([0, 2\pi])$ definida por $h(t) = [0, t]$, para cada $t \in [0, 2\pi]$. Note que h es una función continua. Definimos $F : [0, 2\pi] \to \mathcal{B}$ definida por $F(t) = (C(g)|_{\mathcal{G}} \circ h)(t)$, para cada $t \in [0, 2\pi]$. Probaremos que F es un homeomorfismo, basta probar que F es una función continua y biyectiva. Observemos que F es una función continua por ser composición de funciones continuas. Probemos que F es una función inyectiva, sean $t, r \in [0, 2\pi]$ distintos, se tiene que $t < r$ o $r < t$, por lo que $B_t \subsetneq B_r$ o $B_r \subsetneq B_t$, en ambos casos tenemos que $F(t) = B_t \neq B_r = F(r)$, por lo que F es una función inyectiva. Ahora, probemos que F es una función suprayectiva, sea $B \in \mathcal{B}$, observemos que si $B = X$, entonces basta considerar $t = 2\pi$, ya que $F(2\pi) = (C(g)|_{\mathcal{G}} \circ h)(2\pi) = C(g)|_{\mathcal{G}}([0, 2\pi]) = X$. Supongamos que $B \neq X$, existe $\beta \in [0, 2\pi)$ tal que $B = B_\beta$, se tiene que $F(\beta) = (C(g)|_{\mathcal{G}} \circ h)(\beta) = C(g)|_{\mathcal{G}}([0, \beta]) = B_\beta = B$. Por lo tanto, F es una función suprayectiva. Así, F es un homeomorfismo entre $[0, 2\pi]$ y $\mathcal{B}$, por lo tanto $\mathcal{B}$ es un arco. De forma similar se prueba que $\mathcal{A}$ es un arco. Luego, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos ordenados desde $\{p\}$ hasta X.

Por [16, Lemma 14.2], sean $\phi : [0, \mu(X)] \to \mathcal{A}$ y $\psi : [0, \mu(X)] \to \mathcal{B}$ los homeomorfismos tales que $\mu(\phi(t)) = t$ y $\mu(\psi(t)) = t$, para todo $t \in [0, \mu(X)]$. Sea $f : [0, \mu(X)] \to [0, \mu(X)]$ definida por $f(t) = \mu(\phi(t) \cup \psi(t))$, para todo $t \in [0, \mu(X)]$. Observemos que f es una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f(\mu(X)) = \mu(X)$. Dado $s \in (0, \mu(X))$, por el Teorema del valor intermedio existe $t \in (0, \mu(X))$ tal que $f(t) = \mu(\phi(t) \cup \psi(t)) = s$. Sea $K = \phi(t) \cup \psi(t)$, como $s \in (0, \mu(X))$ y $\mu(K) = s$, se tiene que K es un arco. Por otro lado, como $t \in (0, \mu(X))$ se tiene que $\phi(t) \in \mathcal{A}$ y $\psi(t) \in \mathcal{B}$ son arcos, luego $\phi(t) \cap \psi(t) = \{p\}$, así el punto medio de K es p. $\square$

Ahora veamos el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en una curva cerrada simple X con punto medio p, para cualquier $p \in X$.

Teorema 3.10. *Sea X una curva cerrada simple. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es homeomorfo al intervalo $[0,1)$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Consideremos μ una función de Whitney para $C(X)$ y consideremos la función punto medio de X respecto de μ, $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$.

Denotemos por σ la función restricción de μ al espacio $Medio_\mu(p,X)$, es decir, $\sigma = \mu|_{Medio_\mu(p,X)}$. Vamos a probar que $\sigma : Medio_\mu(p,X) \to [0,\mu(X))$ es un homeomorfismo. Se tiene que σ es una función continua. Por el *Lema 3.8*, tenemos que σ es inyectiva.

Para ver que la función σ es suprayectiva, probemos que $\mu(Medio_\mu(p,X)) = [0,\mu(X))$. En efecto: si $A \in Medio_\mu(p,X)$, entonces $0 \leq \mu(A) < \mu(X)$. Ahora, sea $s \in [0,\mu(X))$. Por el *Lema 3.9*, existe $K \in Medio_\mu(p,X)$ tal que $\mu(K) = s$. De la definición de la función σ tenemos que es suprayectiva.

Resta probar que $\sigma^{-1} : [0,\mu(X)) \to Medio_\mu(p,X)$ es continua. Para esto consideremos una sucesión, $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en $[0,\mu(X))$ que converge al punto $r \in [0,\mu(X))$. Se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $A_n \in Medio_\mu(p,X)$ tal que $\sigma(A_n) = r_n$, también existe un único $A \in Medio_\mu(p,X)$ tal que $\sigma(A) = r$. Vamos a probar que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, es decir, la sucesión $\{\sigma^{-1}(r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma^{-1}(r)$. Como $C(X)$ es compacto, consideremos una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B, para algún $B \in C(X)$. Como μ es una función continua, tenemos que $\{\mu(A_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(B)$ y como $\mu(A_{n_k}) = r_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{\mu(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a r, así $\mu(B) = r = \mu(A)$, como $r < \mu(X)$, se sigue B es un arco. Por [20, Teorema 3.15], la función P_μ es continua, luego la sucesión $\{P_\mu(A_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $P_\mu(B)$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $P_\mu(A_{n_k}) = p$, se sigue que $P_\mu(B) = p$, esto implica que $B \in Medio_\mu(p,X)$. Por el *Lema 3.8*, tenemos que $B \subset A$ o $A \subset B$. Finalmente, como $\mu(A) = \mu(B)$, por la Ob*servación 1.36*, tenemos que $A = B$. Por lo tanto, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A y así la función σ^{-1} es continua. $\square$

Finalmente, veamos el modelo geométrico del hiperespacio de arcos en X con punto medio p respecto de μ, cuando X es un triodo simple.

Teorema 3.11. *Sean $A_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-1,0]\}$, $A_2 = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$ y $A_3 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$. Considérese el triodo simple $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y $\mu : C(X) \to [0,\infty)$ una función de Whitney. Para cada $i \in \{1,2,3\}$, sean p_i el punto medio de A_i respecto de μ, S_i el arco en X con puntos extremos p_i y $(0,0)$, L_i el arco en X con puntos extremos p_i y e_i, donde e_i es el punto extremo de A_i distinto de $(0,0)$, sea $T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Dado un punto $p \in X$, se tienen las siguientes afirmaciones:*

(1) si $p \in \{e_1,e_2,e_3\}$, entonces $Medio_\mu(p,X) = \{\{p\}\}$;

(2) si $p \in (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \setminus \{e_1,e_2,e_3\}$, entonces $Medio_\mu(p,X)$ es un arco;

(3) si $p \in T \setminus \{p_1,p_2,p_3\}$, entonces $Medio_\mu(p,X)$ es un triodo simple.

Demostración. Sea $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ la función de punto medio de X con respecto de μ.

Probaremos el inciso *(1)*. Sea $p \in \{e_1, e_2, e_3\}$. Note que $\{p\} \in Medio_\mu(p, X)$. Por otro lado, si A es un arco que contiene al punto p, entonces por el *Teorema 3.5*, $A = px$, para algún $x \in X$, además p es punto extremo de A. Por el *Teorema 1.52*, tenemos que p no es punto medio de A. Por lo tanto $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$.

Sean $J_1 = A_2 \cup A_3$, $J_2 = A_1 \cup A_3$ y $J_3 = A_1 \cup A_2$.
Ahora, probemos el inciso *(2)*. Sea $p \in (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in A_1$, se tiene que $p \in (A_1 \setminus S_1) \cup \{p_1\}$ y $p \neq e_1$. Si $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $M \subseteq J_2$ o bien $M \subseteq J_3$. Luego,

$$Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, J_2) \cup Medio_\mu(p, J_3).$$

Sea R el arco en A_1 con puntos extremos e_1 y p; sea S el arco en A_1 con puntos extremos p y $(0, 0)$. Note que $R \subseteq L_1$ y $S_1 \subseteq S$, como μ es una función de Whitney tenemos que $\mu(R) \leq \mu(L_1) = \mu(S_1) \leq \mu(S)$, se sigue que $\mu(R) \leq \mu(S)$.
Veamos que $Medio_\mu(p, J_2) \subseteq Medio_\mu(p, A_1)$. Sea $M_0 \in Medio_\mu(p, J_2)$, existen $K \in Arcos(p, R)$ y $L \in Arcos(p, S \cup A_3)$ tales que $M_0 = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Probaremos que S no está contenido propiamente en L, para esto supongamos lo contrario, es decir, $S \subsetneq L$, así $\mu(S) < \mu(L)$. Por otro lado $\mu(K) \leq \mu(R) \leq \mu(S) < \mu(L)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto S no está contenido propiamente en L. Además, como L y S son arcos en el arco $S \cup A_3$ con punto extremo p, se sigue que L y S son comparables, así $L \subseteq S \subseteq A_1$. Además $K \subseteq R$ y así $K \subseteq A_1$. Luego $M_0 \in Medio_\mu(p, A_1)$.
De forma similar, se prueba que $Medio_\mu(p, J_3) \subseteq Medio_\mu(p, A_1)$. Como

$$Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, J_2) \cup Medio_\mu(p, J_3) \subseteq Medio_\mu(p, A_1)$$

$$\subseteq Medio_\mu(p, X).$$

Luego, $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, A_1)$, por la *Observación 3.7*, $Medio_\mu(p, A_1)$ es un arco, por lo tanto el $Medio_\mu(p, X)$ es un arco.

Finalmente, probaremos el inciso *(3)*. Sea $p \in T \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. Sea $p = (0, 0)$. Observemos que, si $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $M \subseteq J_1$ o bien $M \subseteq J_2$ o bien $M \subseteq J_3$, luego $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, J_1) \cup Medio_\mu(p, J_2) \cup Medio_\mu(p, J_3)$. Dado que p no es punto extremo del arco J_i, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, por el *Teorema 3.6* y la *Observación 3.7*, se tiene que $Medio_\mu(p, J_i)$ es homeomorfo a un arco ordenado donde $\{p\}$ es punto extremo de cada uno de ellos. Note que, si $M \in Medio_\mu(p, J_i) \cap Medio_\mu(p, J_l)$, para algunos $i, l \in \{1, 2, 3\}$ distintos, entonces $M \subseteq J_i \cap J_l$, por tanto $M \subseteq A_k$, para algún $k \in \{1, 2, 3\}$ donde $k \neq i$ y $k \neq l$. Como $P_\mu(M) = p$, se sigue que $M = \{p\}$, pues p es punto extremo de A_k. De esta manera, $Medio_\mu(p, J_i) \cap Medio_\mu(p, J_l) = \{\{p\}\}$, para cualesquiera $i, l \in \{1, 2, 3\}$ distintos. Por lo tanto, el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un triodo simple.

Caso 2. Sea $p \in T \setminus \{p_1, p_2, p_3, (0,0)\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in A_1$. Si $M \in Medio_\mu(p,X)$, entonces $M \subseteq J_2$ o bien $M \subseteq J_3$. Luego,

$$Medio_\mu(p,X) = Medio_\mu(p,J_2) \cup Medio_\mu(p,J_3).$$

Además,

$$Medio_\mu(p,J_2) \cap Medio_\mu(p,J_3) = Medio_\mu(p,A_1). \tag{3.1}$$

Por la *Observación 3.7*, $Medio_\mu(p,J_2)$, $Medio_\mu(p,J_3)$ y $Medio_\mu(p,A_1)$ son arcos ordenados donde $\{p\}$ es punto extremo de cada uno de ellos.
Sea R el arco en A_1 con puntos extremos e_1 y p; sea S el arco en A_1 con puntos extremos p y $(0,0)$. Como $p \neq p_1$, tenemos que $S \subsetneq S_1$. Note que $L_1 \subsetneq R$. Luego, como μ es una función de Whitney se sigue que $\mu(S) < \mu(R)$. Por otro lado, como $\{p\} \subsetneq R$ y $\mu(S) \in [0, \mu(R)]$, por el *Lema 1.37*, existe $C \in C(X)$ tal que $\{p\} \subseteq C \subseteq R$ y $\mu(C) = \mu(S)$. Observemos que $S \cup C \in Medio_\mu(p,A_1)$. Si $M \in Medio_\mu(p,A_1)$, entonces existen $K \in Arcos(p,R)$ y $L \in Arcos(p,S)$ tales que $M = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Probaremos que $M \subseteq S \cup C$. Supongamos lo contrario, es decir $M \not\subseteq S \cup C$. Note que si $\mu(C) < \mu(K)$, entonces $\mu(S) < \mu(L)$, por otro lado $L \in Arcos(p,S)$ y como μ es una función de Whitney se tiene que $\mu(L) \leq \mu(S)$, lo cual es una contradicción. Así $M \subseteq S \cup C$. Por lo tanto $Medio_\mu(p,A_1)$ es un arco ordenado con puntos extremos $\{p\}$ y $S \cup C$. Sean

$$\mathcal{A} = (Medio_\mu(p,J_2) \setminus Medio_\mu(p,A_1)) \cup \{S \cup C\} \text{ y}$$

$$\mathcal{B} = (Medio_\mu(p,J_3) \setminus Medio_\mu(p,A_1)) \cup \{S \cup C\}.$$

Observemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos ordenados que tienen como un punto extremo a $S \cup C$. Además, $\mathcal{A} \cap Medio_\mu(p,A_1) = \{S \cup C\}$ y $\mathcal{B} \cap Medio_\mu(p,A_1) = \{S \cup C\}$. Veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{S \cup C\}$. Tenemos que $\{S \cup C\} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Por otro lado, sea $N \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ con $N \neq S \cup C$, así $N \in (Medio_\mu(p,J_2) \setminus Medio_\mu(p,A_1) \cap (Medio_\mu(p,J_3) \setminus Medio_\mu(p,A_1)$, de aquí se sigue que

$$N \in Medio_\mu(p,J_2) \cap Medio_\mu(p,J_3) \text{ y } N \notin Medio_\mu(p,A_1),$$

esto contradice la Ecuación (3.1). Por lo tanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{S \cup C\}$.
Finalmente, observemos que:

$$Medio_\mu(p,X) = Medio_\mu(p,A_1) \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B},$$

donde $Medio_\mu(p,A_1)$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos que se intersectan dos a dos en el punto $S \cup C$. Concluimos que $Medio_\mu(p,X)$ es un triodo simple. $\square$

3.2 Propiedades generales del hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$

Es de nuestro interés conocer las propiedades topológicas que tiene el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$, tales como la conexidad y la compacidad, además estudiamos modelos geométricos para el hiperespacio de arcos en X que tienen como punto medio a p con respecto de μ, cuando la arco componente de p en X es únicamente arco conexo y es imagen continua y biyectiva del intervalo $[0,\infty)$ o de $\mathbb{R}$. A continuación veremos que dicho hiperespacio es arco conexo.

Teorema 3.12. *Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces $Medio_\mu(p, X)$ es arco conexo.*

Demostración. Sean $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(X)$. Sean A y B elementos de $Medio_\mu(p, X)$ distintos. Observemos que si $B = \{p\}$, entonces A es un arco que contiene a p y p no es punto extremo de A, luego, por el *Teorema 3.6* inciso *(2)*, el hiperespacio $Medio_\mu(p, A)$ es un arco, así existe $\alpha : [0, 1] \to Medio_\mu(p, A)$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = B = \{p\}$ y $\alpha(1) = A$. Por otro lado, supongamos que A y B son arcos, por definición, p no es punto extremo de A ni de B. Por el *Teorema 3.6* inciso *(2)*, los hiperespacios $Medio_\mu(p, A)$ y $Medio_\mu(p, B)$ son arcos en $Medio_\mu(p, X)$. Sean $\alpha : [0, 1] \to Medio_\mu(p, A)$ y $\beta : [-1, 0] \to Medio_\mu(p, B)$ homeomorfismos tales que $\beta(-1) = B$, $\beta(0) = \{p\} = \alpha(0)$ y $\alpha(1) = A$. Consideremos $\gamma : [-1, 1] \hookrightarrow Medio_\mu(p, X)$ el encaje definido por:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \beta(x) & si \quad x \in [-1, 0], \\ \\ \alpha(x) & si \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Claramente, γ es un homeomorfismo tal que $\gamma(-1) = B$ y $\gamma(1) = A$, es decir, existe un arco contenido en $Medio_\mu(p, X)$ cuyos puntos extremos son A y B. Se sigue que $Medio_\mu(p, X)$ es arco conexo. □

Como consecuencia del *Teorema 3.12* tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.13. *Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es conexo.*

Teorema 3.14. *Sea X un arco. Si $p \in X$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es compacto.*

Demostración. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Por la *Observación 1.46*, sabemos que $\mathcal{M}(X)$ es homeomorfo a $C(X)$, se sigue que $\mathcal{M}(X)$ es compacto. Probaremos que el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es cerrado en $\mathcal{M}(X)$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Medio_\mu(p, X)$ convergente, sea $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Como $\mathcal{M}(X)$ es compacto y $A_n \in \mathcal{M}(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $A \in \mathcal{M}(X)$. Por otro lado, como X es un arco, por el *Corolario 1.56*, tenemos que la función punto medio $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ es continua, luego $\{P_\mu(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $P_\mu(A)$, como $P_\mu(A_n) = p$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $P_\mu(A) = p$. Concluimos que p es punto medio de A y así, $A \in Medio_\mu(p, X)$. Así, $Medio_\mu(p, X)$ es un subconjunto cerrado del hiperespacio $\mathcal{M}(X)$. Por lo tanto, $Medio_\mu(p, X)$ es un conjunto compacto. □

Teorema 3.15. *Sea X un continuo. Si para todo $p \in X$ el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es compacto, entonces X no contiene curvas cerradas simples.*

Demostración. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos que X contiene una curva cerrada simple, Y, sea $\sigma = \mu|_{C(Y)} : C(Y) \to [0, \mu(Y)]$ la restricción de μ al hiperespacio $C(Y)$. Notemos que σ es una función de Whitney para $C(Y)$. Sea $p \in Y$. Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, \mu(Y))$ convergente a $\mu(Y)$.

Por el *Lema 3.9*, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{M}(Y)$ tal que $P_\mu(A_n) = p$ y $\sigma(A_n) = \mu(A_n) = s_n$. Notemos que $A_n \in Medio_\mu(p,X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y. Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge A, con A un subcontinuo de Y. Luego, como σ es una función continua tenemos que $\{\sigma(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma(A)$, se sigue que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma(A)$, así $\sigma(A) = \mu(Y)$, es decir, $\sigma(A) = \mu(A) = \mu(Y)$, por lo tanto $A = Y$. Concluimos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y. Sin embargo, $Y \notin Medio_\mu(p,X)$, así $Medio_\mu(p,X)$ no es compacto. □

En virtud del *Teorema 3.15* es natural preguntarse lo siguiente, dados X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $p \in X$:

Pregunta 3.16. *¿Cuáles son las condiciones suficientes y necesarias sobre X para que $Medio_\mu(p,X)$ sea compacto?*

En relación con la Pregunta 3.16 tenemos una respuesta en la clase de las dendritas.

Teorema 3.17. *Si X es una dendrita, entonces para cada $p \in X$ el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(X)$. Probemos que $Medio_\mu(p,X)$ es compacto. Por el *Teorema 2.16*, el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es compacto. Notemos que $Medio_\mu(p,X)$ es subespacio del hiperespacio de $Arcos(p,X)$, así bastará probar que el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es cerrado en el hiperespacio $Arcos(p,X)$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Medio_\mu(p,X)$ convergente a A, para algún $A \in C(X)$. Como el hiperespacio $Arcos(p,X)$ es compacto, se sigue que $A \in Arcos(p,X)$. Por el *Lema 1.57*, sabemos que $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ es continua, se sigue que $\{P_\mu(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $P_\mu(A)$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_\mu(A_n) = p$, tenemos que $P_\mu(A) = p$. Concluimos que $A \in Medio_\mu(p,X)$. Por lo tanto, $Medio_\mu(p,X)$ es cerrado en el compacto $Arcos(p,X)$ y así $Medio_\mu(p,X)$ es compacto. □

Del *Teorema 3.15* y el *Teorema 3.17* obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.18. *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X es una dendrita si y sólo si $Medio_\mu(p,X)$ es compacto para cada $p \in X$.*

Lema 3.19. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si $Y \in Medio_\mu(p,X)$ es tal que para cada $A \in Medio_\mu(p,X)$ se tiene que $A \subseteq Y$, entonces $Medio_\mu(p,X) = Medio_\mu(p,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $Y \subseteq X$ tenemos que $Medio_\mu(p,Y) \subseteq Medio_\mu(p,X)$. Para probar la otra contención, sea $A \in Medio_\mu(p,X)$, como $A \subseteq Y$, tenemos que $A \in Medio_\mu(p,Y)$. Concluimos que $Medio_\mu(p,X) = Medio_\mu(p,Y)$. □

Teorema 3.20. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si la arco componente de p en X, $a(p)$, es únicamente arco conexo y existe una función continua y biyectiva $f : [0,\infty) \to a(p)$, entonces:*

(1) Si $p = f(0)$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es un singular.

(2) Si $p \neq f(0)$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es homeomorfo a un arco o al intervalo $[0,1)$.

Demostración. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$.
(1) Sea $p = f(0)$. Primero probemos la siguiente afirmación:

Afirmación 3.20.1. *Si $A \in Arcos(p, X)$, entonces existe un punto $t_A \in [0, \infty)$ tal que $A = f([0, t_A])$.*

Prueba de la Afirmación 3.20.1. Sea $A \in Arcos(p, X)$ y sean a y b los puntos extremos de A. Claramente, $A \subsetneq a(p)$, como f es una función suprayectiva, existen $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ tales que $f(t_1) = a$ y $f(t_2) = b$. Supongamos que $t_1 \leq t_2$. luego, $f([t_1, t_2])$ es un arco con puntos extremos a y b contenido en $a(p)$. Como $a(p)$ es únicamente arco conexo tenemos que $A = f([t_1, t_2])$. Finalmente, como $p \in A$, tenemos que $0 \in [t_1, t_2]$, así $t_1 \leq 0$ y $0 \leq t_1$, concluimos que $t_1 = 0$. Por lo tanto $A = [0, t_2]$. Sea $t_2 = t_A$. Queda demostrada la Afirmación 3.20.1.

Por la *Afirmación 3.20.1*, si $A \in Arcos(p, X)$, entonces p es punto extremo de A. Así, $\{p\}$ es el único elemento de $Arcos(p, X)$ cuyo punto medio es p . Luego $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$. Así concluye la prueba de *(1)*.

(2) Sea $p \neq f(0)$. Sea $t_p \in [0, \infty)$ tal que $f(t_p) = p$. Note que $f(0) \neq f(t_p)$, como f es una función inyectiva tenemos que $0 \neq t_p$, así $0 < t_p$. Sean A el arco $f([0, t_p])$ y $\mathcal{B} = \{B \in Arcos(p, X) : B \subseteq f([t_p, \infty))\}$. Note que si $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces existen $K_M \in Arcos(p, A)$ y $L_M \in \mathcal{B}$ tales que $M = K_M \cup L_M$, $K_M \cap L_M = \{p\}$ y $\mu(K_m) = \mu(L_M)$.

Afirmación 3.20.2. *Si $M, N \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $M \subseteq N$ o $N \subseteq M$.*

Prueba de la Afirmación 3.20.2. Sean $M, N \in Medio_\mu(p, X)$. Como M y N son arcos que contienen a p, por la *Afirmación 2.26.1*, existen $r, s, t, u \in [0, \infty)$ tales que $M = f([r, s])$ y $N = f([t, u])$. Como $p \in M$, $p \in N$, y f es una función biyectiva tenemos que $t_p \in (r, s)$ y $t_p \in (t, u)$. Luego, $r, t \in [0, t_p]$, más aún $r \leq t$ o $t \leq r$. Sin perder generalidad, supongamos que $t \leq r$, luego $[r, t_p] \subseteq [t, t_p]$ y así $f([r, t_p]) \subseteq f([t, t_p])$. Probaremos que $u \leq s$, supongamos que $s < u$, tenemos que $[t_p, s] \subseteq [t_p, u]$, luego, $f([t_p, s]) \subseteq f([t_p, u])$. Como μ es una función de Whitney, se sigue que $\mu((f([t_p, s]))) \leq \mu(f([t_p, u]))$, pero esto es una contradicción ya que $\mu(f([r, t_p])) = \mu(f([t_p, s]))$ y $f([r, t_p]) \subseteq f([t, t_p])$. Tenemos que $u \leq s$, luego $[t_p, u] \subseteq [t_p, s]$ y así, $f([t_p, u]) \subseteq f([t_p, s])$. Se sigue que $N = f([t, u]) \subseteq f([r, s]) = M$. De forma análoga se prueba que si $r \leq t$, entonces $M \subseteq N$. Con lo cual queda demostrada la Afirmación 3.20.2.

Para probar *(2)* tenemos los siguientes dos subcasos:

Subcaso 2.1. $\mu(A) < \mu(cl_X(f[t_p, \infty)))$.
Sea $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$. Por el *Lema 2.25*, $\mathcal{C}$ es un arco ordenado. Como $0 < \mu(A) < \mu(cl_X(f[t_p, \infty)))$, existe un arco $A_1 \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) = \mu(A_1)$. Sea $R = A \cup A_1$, como $A_1 \in \mathcal{B}$, se sigue que $A \cap A_1 = \{p\}$ y así $R \in Medio_\mu(p, X)$.

Afirmación 3.20.3. *Si $J \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $J \subseteq R$.*

Prueba de la Afirmación 3.20.3. Supongamos lo contrario, es decir, existe $J \in Medio_\mu(p, X)$ tal que $R \subsetneq J$. Sean $K_J \in Arcos(p, A)$ y $L_J \in \mathcal{B}$ tales que $J = K_J \cup L_J$, $K_J \cap L_J = \{p\}$ y $\mu(K_J) = \mu(L_J)$. Como $R \subsetneq J$, se sigue que

$A \subseteq K_J$, luego $\mu(A) \leq \mu(K_J)$. Por otro lado $\mu(K_J) \leq \mu(A)$, se tiene que $\mu(A) = \mu(K_J)$. Por la *Observación 1.36*, $A = K_J$. De forma similar, $A_1 = L_J$, se sigue que $R = J$, lo cual contradice que $R \subsetneq J$. Queda probada la Afirmación 3.20.3.

Por el *Lema 3.19*, tenemos que $Medio_\mu(p, X) = Medio_\mu(p, R)$, luego, por la *Teorema 3.6*, concluimos que $Medio_\mu(p, X)$ es un arco.

Subcaso 2.2. $\mu(A) \geq \mu(cl_X(f[t_p, \infty)))$.
Observemos que existe un arco $B \in Arcos(p, A)$ tal que $\mu(B) = \mu(cl_X(f[t_p, \infty)))$. Sea $t_B \in [0, t_p)$, tal que $f([t_B, t_p]) = B$. Sea $Z = cl_X(f([t_p, \infty))) \cup B = cl_X(f([t_B, \infty)))$. Sea $\mathcal{C} = Medio_\mu(p, X) \cup \{Z\}$. Probaremos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado.

Afirmación 3.20.4. *La familia* $\mathcal{C}$ *es un subconjunto ordenado de* $C(X)$.

Prueba de la Afirmación 3.20.4. Por la *Afirmación 3.20.2*, para cualesquiera $M, N \in Medio_\mu(p, X)$ son comparables respecto a la inclusión de conjuntos. Ahora, sea $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces existen $K_M \in Arcos(p, A)$ y $L_M \in \mathcal{B}$ tales que $M = K_M \cup L_M$, $K_M \cap L_M = \{p\}$ y $\mu(K_M) = \mu(L_M)$. Note que $L_M \subset cl_X(f([t_p, \infty)))$, concluimos que $M \subseteq Z$. Queda probada la Afirmación 3.20.4.

Como $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $C(X)$ tenemos que $\mathcal{C}$ es un espacio métrico. Además, es no vacío, ya que $\{Z\} \in \mathcal{C}$.

Afirmación 3.20.5. *La familia* $\mathcal{C}$ *es compacto.*

Prueba de la Afirmación 3.20.5. Probemos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado en $C(X)$. Sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}$ convergente a M, para algún $M \in C(X)$. Probaremos que $M \in \mathcal{C}$. Como $p \in M_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $p \in M$, así $M \in C(p, X)$. Como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, existe una subsucesión $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $M_{n_i} \subseteq M_{n_{i+1}}$ o $M_{n_{i+1}} \subseteq M_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, es decir, la subsucesión $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente.
Caso I. La sucesión $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente.
En este caso, tenemos que $M = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_{n_i}$, así $M \in C(M_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Notemos que si M es un singular, entonces $M = \{p\}$, luego $M \in Medio_\mu(p, X)$, por lo que $M \in \mathcal{C}$. Supongamos que M es un arco. Como $M_{n_i} = K_{n_i} \cup L_{n_i}$ con $K_{n_i} \in Arcos(p, B)$, $L_{n_i} \in \mathcal{B}$, $K_{n_i} \cap L_{n_i} = \{p\}$ y $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Observemos que $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones decrecientes y así $\lim_{i\to\infty} K_{n_i} = \bigcap_{i\in\mathcal{N}} K_{n_i} = K$ y $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} = \bigcap_{i\in\mathcal{N}} L_{n_i} = L$. Luego, como $\{M_{n_i}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, tenemos que $M = K \cup L$. Por otro lado, como $K \subseteq K_{n_i}$ y $L \subseteq L_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $K \cap L \subseteq K_{n_i} \cap L_{n_i} = \{p\}$, es decir, $K \cap L = \{p\}$. Por otro lado, como $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a K y$\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a L, y μ es una función continua, entonces $\{\mu(K_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(K)$ y $\{\mu(L_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(L)$, además $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu(K) = \mu(L)$. Luego $M \in Medio_\mu(p, X)$, y así $M \in \mathcal{C}$.
Caso II. La sucesión $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente.

En este caso, tenemos que $M = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_{n_i})$. Por otro lado, como $M_{n_i} = f([x_{n_i}, y_{n_i}])$, con $x_{n_i}, y_{n_i} \in [0,\infty)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Observemos que, $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, además, como $t_B \leq x_{n_i} \leq t_p$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $x = \text{ínf}\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, entonces tenemos los siguientes casos:

(a) La sucesión $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente: En este caso tenemos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[x_{n_i}, y_{n_i}] = [t_B, \infty)$. De donde $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_{n_i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}]) = f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[x_{n_i}, y_{n_i}]) = f([t_B,\infty))$. Se sigue que $cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_{n_i}) = cl_X(f([t_B,\infty))) = Z$. Así, $M = Z$, es decir, $M \in \mathcal{C}$.

(b) La sucesión $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente: sea $y = \sup\{y_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$, con $y \in (t_p, \infty)$, tenemos que $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a y. Probaremos que:

$$f([x,y]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}])).$$

Como $x_{n_i}, y_{n_i} \in [x,y]$, tenemos que $[x_{n_i}, y_{n_i}] \subseteq [x,y]$, se sigue que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[x_{n_i}, y_{n_i}] \subseteq [x,y]$, luego como f es continua, tenemos que $cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}])) \subseteq f([x,y])$. Probemos que $f([x,y]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}]))$. Sea $r \in f([x,y])$, existe $t_r \in [x,y]$ tal que $f(t_r) = r$. Si $t_r = x$, entonces

$$x \in cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}])),$$

ya que es punto límite de la sucesión $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y f es una función continua. De forma similar si $t_r = y$, entonces $y \in cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}]))$, . Supongamos que $t_r \in (x,y)$, como $t_r \neq \text{ínf}\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ y $t_r \neq \sup\{y_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_m} \leq t_r \leq y_{n_m}$. Luego, $t_r \in [x_{n_m}, y_{n_m}]$ y así:

$$r = f(t_r) \in f([x_{n_m}, y_{n_m}]) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}]))$$

Concluimos que $f([x,y]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([x_{n_i}, y_{n_i}]))$, por lo que $M = f([x,y])$. Como $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, se sigue que $M_{n_i} \in C(M)$, luego por el [28, Teorema 3.25], tenemos que la función $P_\mu|_M : \mathcal{M}(M) \to M$ es una función continua, y así $\{P_\mu|_M(M_{n_i})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $P_\mu|_M(M)$, es decir, $P_\mu|_M(M) = \{p\}$. Concluimos que $M \in Medio_\mu(p,X)$, es decir, $M \in \mathcal{C}$. Finalmente, tenemos que $\mathcal{C}$ es compacto. Queda probada la Afirmación 3.20.5.

Afirmación 3.20.6. *La familia* $\mathcal{C}$ *es conexo.*

Prueba de la Afirmación 3.20.6. Por el *Corolario 3.13*, $Medio_\mu(p,X)$ es conexo, así basta probar que $\mathcal{C} = cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X))$. Por la Afirmación 3.20.5:

$$cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X)) \subseteq \mathcal{C}.$$

Probaremos que $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$. Sea $M \in \mathcal{C}$ tenemos que $M \in Medio_\mu(p, X)$ o $M = Z$. Si $M \in Medio_\mu(p, X)$, entonces

$$M \in cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X)).$$

Supongamos que $M = Z$, basta considerar la sucesión $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $M_{n_i} = f([x_{n_i}, y_{n_i}])$, donde $t_B = \text{ínf}\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ y $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente. Sabemos que $\{M_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a Z, luego $Z \in cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$. Por lo tanto, $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$ y así $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$, por lo que $\mathcal{C}$ es conexo. Queda probada la Afirmación 3.20.6.

De las Afirmaciones 3.20.4, 3.20.5 y 3.20.6, concluimos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado. Luego, $\sigma = \mu|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to [0, \mu(Z)]$ es un homeomorfismo, bastará considerar, $\sigma|_{Medio_\mu(p,X)} : Medio_\mu(p, X) \to [0, \mu(Z))$. Es decir, $Medio_\mu(p, X)$ es homeomorfo a $[0, 1)$. $\square$

El resultado que sigue proporciona un modelo geométrico de $Medio_\mu(p, X)$, donde X es el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$. Por otro lado, el *Teorema 3.15*, muestra que si el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es compacto para un continuo X y para cada $p \in X$, entonces X no contiene curvas cerradas simples, el inverso del *Teorema 3.15* no es verdadero, como mostramos a continuación.

Teorema 3.21. *Sean $Y = \{0\} \times [-1, 1]$ y $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$. Sea $X = Y \cup W$ el continuo* $\text{sen}(\frac{1}{x})$. *Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si $p = (1, sen(1))$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un singular.

(2) Si $p \in W \setminus \{(1, sen(1))\}$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un arco o es homeomorfo a $[0, 1)$.

(3) Si $p \in \{(0, 1), (0, -1)\}$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un singular.

(4) Si $p \in Y \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un arco.

Demostración. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $p \in X$, tenemos los siguientes cuatro casos:

(1) Sea $p = (1, sen(1))$. Notemos que W es imagen continua y biyectiva de $[0, \infty)$, por el *Teorema 3.20*, tenemos que $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$.

(2) Sea $p \in W \setminus \{(1, sen(1))\}$. Notemos que W es imagen continua y biyectiva de $[0, \infty)$, por el *Teorema 3.20*, tenemos que $Medio_\mu(p, X)$ es homeomorfo a un arco o al intervalo $[0, 1)$.

(3) Supongamos que $p \in \{(0, 1), (0, -1)\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p = (0, 1)$. Observemos que si $A \in Arcos(p, X)$, entonces $A \subseteq Y$. Se sigue que para todo $A \in Arcos(p, X)$, p es punto extremo de A. Luego, $\{p\}$ es el único elemento de $Arcos(p, X)$ tal que $P_\mu(\{p\}) = p$. Por lo tanto, $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$.

(4) Supongamos que $p \in Y \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$. Sea A el arco en Y con puntos extremos p y $(0,1)$ y B el arco en Y con puntos extremos p y $(0,-1)$. Sea $r = \text{mín}\{\mu(A),\mu(B)\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $r = \mu(A)$, existe $A_1 \in C(B)$ tal que $\mu(A_1) = \mu(A)$. Sea $M = A \cup A_1$, claramente $M \in Medio_\mu(p,X)$. Probaremos que para cada $N \in Medio_\mu(p,X)$, $N \subseteq M$. Supongamos que existe $N \in Medio_\mu(p,X)$, tal que $M \subsetneq N$. Sea $N = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$, se sigue que $A \subseteq K$ o $A \subseteq L$, luego, como μ es una función de Whitney, tenemos que $\mu(A) \leq \mu(K)$ o $\mu(A) \leq \mu(L)$. Por la definición de A, se sigue que, $\mu(A) = \mu(K)$ o $\mu(A) = \mu(L)$, luego $A = K$ o $A = L$. Si $A = K$, entonces $A_1 = L$ o si $A = L$, entonces $A_1 = K$. Concluimos que $M = N$, lo cual contradice que $M \subsetneq N$. Por lo tanto, para todo $N \in Medio_\mu(p,X)$, $N \subseteq M$. Por el *Lema 3.19*, tenemos que $Medio_\mu(p,X) = Medio_\mu(p,Y)$. Luego, por el *Teorema 2.5*, se sigue que $Medio_\mu(p,X)$ es un arco. □

Teorema 3.22. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si la arco componente de p en X, $a(p)$, es únicamente arco conexo y existe una función continua y biyectiva $f : \mathbb{R} \to a(p)$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$, es homeomorfo a $[0,1)$.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0,\mu(X)]$ una función de Whitney para $C(X)$. Sea $t_p \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_p) = p$. Probemos la siguiente Afirmación:

Afirmación 3.22.1. *Si $A \in Medio_\mu(p,X)$, entonces $K_A = f([a,t_p])$ y $L_A = f([t_p,b])$ cumplen que $A = K_A \cup L_A$, $K_A \cap L_A = \{p\}$ y $\mu(K_A) = \mu(L_A)$, para algunos $a,b \in \mathbb{R}$.*

Prueba de la Afirmación 3.22.1. Sean a y b puntos en $\mathbb{R}$, tales que $A = f([a,b])$. Como p es punto medio de A, entonces $t_p \in (a,b)$, consideremos $K_A = f([a,t_p])$ y $L_A = f([t_p,b])$. Observemos que $A = f([a,b]) = f([a,t_p]) \cup f([t_p,b])$. Por otro lado, como f es una función inyectiva, tenemos que $f([a,t_p]) \cap f([t_p,b]) = \{f(t_p)\} = \{p\}$. Probaremos que $\mu(f([a,t_p])) = \mu(f([t_p,b]))$. Supongamos lo contrario, es decir, que $\mu(f([a,t_p])) \neq \mu(f([t_p,b]))$, luego, p no es punto medio de A, pero esto contradice que $A \in Medio_\mu(p,X)$, por lo que $\mu(f([a,t_p])) = \mu(f([t_p,b]))$. Así queda demostrada la Afirmación 3.22.1.

Sean

$$\mathcal{C}_1 = \{A \in Arcos(p,X) : A \subseteq f((-\infty,t_p])\} \text{ y}$$
$$\mathcal{C}_2 = \{A \in Arcos(p,X) : A \subseteq f([t_p,\infty))\}.$$

De la *Afirmación 3.22.1*, podemos notar que $K_A \in \mathcal{C}_1$ y $L_A \in \mathcal{C}_2$. Tenemos los siguientes casos:

(I) $\mu(cl_X(f((-\infty,t_p]))) = \mu(cl_X(f([t_p,\infty))))$.

En este caso, consideremos la familia $\mathcal{C} = Medio_\mu(p,X) \cup \{cl_X(a(p))\}$. Probaremos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado, para ello veamos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$ y un continuo.

Afirmación 3.22.2. *La familia $\mathcal{C}$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$.*

Prueba de la Afirmación 3.22.2. Es claro que si $A \in Medio_\mu(p, X)$, entonces $A \subseteq cl_X(a(p))$. Ahora, sean $A, B \in Medio_\mu(p, X)$. Probaremos que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Sabemos por el *Teorema 2.31*, que $\mathcal{C}_1 \cup \{cl_X(f((-\infty, t_p]))\}$ y $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$ son arcos ordenados, así existen $K_A, K_B \in \mathcal{C}_1$ y $L_A, L_B \in \mathcal{C}_2$ tales que $A = K_A \cup L_A$, $K_A \cap L_A = \{p\}$ y $\mu(K_A) = \mu(L_A)$; $B = K_B \cup L_B$, $K_B \cap L_B = \{p\}$ y $\mu(K_B) = \mu(L_B)$. Notemos que $K_A \subseteq K_B$ o $K_B \subseteq K_A$. Probaremos que si $K_A \subseteq K_B$, entonces $L_A \subseteq L_B$. Observemos que si $L_B \subsetneq L_A$, entonces como μ es una función de Whitney, tenemos que $\mu(K_A) = \mu(L_A) > \mu(L_B) = \mu(K_B)$, pero esto es una contradicción ya que $K_A \subseteq K_B$, se sigue que $L_A \subseteq L_B$. Luego, $A = K_A \cup L_A \subseteq K_B \cup L_B = B$. Por otro lado, si $K_B \subseteq K_A$, entonces $L_B \subseteq L_A$ y así, $B \subseteq A$. Por tanto, tenemos que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Es decir, $\mathcal{C}$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$. Queda probada la *Afirmación 3.22.2*.

Como $\mathcal{C} \subseteq C(X)$, se sigue que $\mathcal{C}$ es un espacio métrico. Por otro lado, como $cl_X(a(p)) \in \mathcal{C}$, se sigue que $\mathcal{C}$ es no vacío.

Afirmación 3.22.3. *La familia $\mathcal{C}$ es compacto.*

Prueba de la Afirmación 3.22.3. Probaremos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}$ convergente a A, para algún $A \in C(X)$. Probaremos que $A \in \mathcal{C}$.

Como $p \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $p \in A$. Luego, $A \in C(p, X)$. Si $A = cl_X(a(p))$, entonces $A \in \mathcal{C}$ por definición. Como los elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son comparables, existe una subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente o decreciente.

Caso I. La subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Tenemos que $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}$, así $A \in C(A_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$. En particular, $A \in C(A_{n_1})$, luego, $A = \{p\}$ o A es un arco que contiene a p. Si $A = \{p\}$, entonces $A \in Medio_\mu(p, X)$. Supongamos que A es un arco que contiene a p, como $A_{n_i} = K_{n_i} \cup L_{n_i}$ con $K_{n_i} \in \mathcal{C}_1$, $L_{n_i} \in \mathcal{C}_2$, $K_{n_i} \cap L_{n_i} = \{p\}$ y $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces existen $K, L \in C(A)$ tales que la subsucesión $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a K y la subsucesión $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a L. Como la sucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a A, tenemos que $A = K \cup L$. Por otro lado, como μ es una función continua, tenemos que la sucesión $\{\mu(K_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(K)$ y la sucesión $\{\mu(L_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(L)$, luego $\mu(K) = \mu(L)$. Veamos que $K \cap L = \{p\}$, para ello probaremos la siguiente Afirmación:

Afirmación 3.22.4. *Las subsucesiones $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ son decrecientes.*

Prueba de la Afirmación 3.22.4. Observemos que $K_{n_i} \in \mathcal{C}_1$, para cada $i \in \mathbb{N}$, de manera similar $L_{n_i} \in \mathcal{C}_2$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{p\}$. Por otro lado, como $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente, se tiene que $A_{n_{i+1}} \subseteq A_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, así $K_{n_{i+1}} \cup L_{n_{i+1}} \subseteq K_{n_i} \cup L_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, $K_{n_{i+1}} \subseteq K_{n_i}$ y $L_{n_{i+1}} \subseteq L_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Concluimos que las subsucesiones $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ son decrecientes. Así queda demostrada la Afirmación 3.22.4.

Luego, $K = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i}$ y $L = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}$, observemos que $p \in K_{n_i}$ y $p \in L_{n_i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, así $p \in K$ y $p \in L$, luego, $\{p\} \subseteq K \cap L$. Por otro lado, $K \cap L \subseteq K_{n_i} \cap L_{n_i} = \{p\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $K \cap L = \{p\}$. Finalmente, tenemos que $A \in Medio_\mu(p, X)$ y así $A \in \mathcal{C}$.

Caso II. La subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente.

En este caso tenemos que $A = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i})$. Como $A_{n_i} = f([a_i, b_i])$ con $a_i \in (-\infty, t_p)$ y $b_i \in (t_p, \infty)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Por la *Afirmación 3.22.1* se sigue que $K_{n_i} = f([a_i, t_p])$ y $L_{n_i} = f([t_p, b_i])$, para cada $i \in \mathbb{N}$, como $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión creciente, tenemos que las subsucesiones $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ también son crecientes, así la sucesión $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $K = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i})$ y la sucesión $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $L = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i})$. Tenemos los siguientes casos:

(i) La sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente.

En este caso, tenemos que la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $a = \inf\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ y la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $b = \sup\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$. Probaremos que:

$$f([a, t_p]) = cl_X(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])) = cl_X(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_{n_i}) = K.$$

Notemos que como $a_i \geq a$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $f([a_i, t_p]) \subseteq f([a, t_p])$, luego $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]) \subseteq f([a, t_p])$, luego, $cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])) \subseteq f([a, t_p])$. Veamos la contención contraria, es decir, que:

$$f([a, t_p]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])).$$

Sea $x \in f([a, t_p])$, entonces existe $t_x \in [a, t_p]$ tal que $f(t_x) = x$. Note que, si $t_x = a$, entonces $x \in cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]))$, ya que la sucesión $\{f(a_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $f(t_x) = x$. Supongamos que $t_x > a$, entonces t_x no es cota inferior de la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, es decir, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_x \geq a_j$, se sigue que $t_x \in [a_j, t_p]$, luego $x \in f([a_j, t_p]) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]))$. Concluimos que $x \in cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]))$. Finalmente, tenemos que $f([a, t_p]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i})$. De forma similar, se prueba que $f([t_p, b]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t_p, b_i]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}) = L$. Luego:

$$f([a, b]) = f([a, t_p]) \cup f([t_p, b]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i}) \cup cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}). \tag{3.2}$$

Como $A_{n_i} = K_{n_i} \cup L_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $f([a,b]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}) = A$, es decir, A es una arco. Más aún, de las igualdades de la *Ecuación 3.2*, tenemos que $A = K \cup L$. Como $[a,t_p] \cap [t_p,b] = \{t_p\}$ y f es una función inyectiva $K \cap L = f([a,t_p]) \cap f([t_p,b]) = \{f(t_p)\} = \{p\}$. Además, como $\lim_{ito\infty} K_{n_i} = K$, $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} = L$ y μ es una función continua, tenemos que $\lim_{i\to\infty} \mu(K_{n_i}) = \mu(K)$ y $\lim_{i\to\infty} \mu(L_{n_i}) = \mu(L)$, luego como $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu(K) = \mu(L)$. Por lo que $A \in Medio_\mu(p,X)$ y así $A \in \mathcal{C}$.

(ii) La sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada inferiormente y la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente.

En este caso, tenemos que la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $-\infty$ y la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a ∞. Por otro lado, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i,t_p] = (-\infty,t_p]$ y $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}[t_p,b_i] = [t_p,\infty)$. Luego, $a(p) = f(\mathbb{R}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i,b_i]) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}$. Así, $cl_X(a(p)) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}) = A$. Tenemos que $A \in \mathcal{C}$.

Observemos que el caso en que la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente, o viceversa no es posible. Ya que por el contrario si la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada superiormente, entonces por lo hecho en *(i)* tenemos que $\lim_{i\to\infty} K_{n_i} = f([a,t_p])$, mientras que por lo hecho en *(ii)*, tenemos que $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} = cl_X(f([t_p,\infty)))$. Luego, como $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y μ es una función continua, tenemos que $\mu(f([a,t_p])) = \mu(cl_X(f([t_p,\infty)))) = \mu(cl_X(f((-\infty,t_p])))$, lo cual es una contradicción, ya que $f([a,t_p]) \subsetneq f((-\infty,t_p])$. Concluimos que $\mathcal{C}$ es cerrado en $C(X)$ y así compacto. Queda probada la Afirmación 3.22.3.

Afirmación 3.22.5. *La familia* $\mathcal{C}$ *es conexo.*

Prueba de la Afirmación 3.22.5. Por el *Corolario 3.13*, sabemos que el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es conexo, basta probar que $\mathcal{C} = cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X))$. Por lo hecho en (i), tenemos que $cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X)) \subseteq \mathcal{C}$. Probaremos que $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X))$. Sea $C \in \mathcal{C}$, se sigue que $C \in Medio_\mu(p,X)$ o $C = cl_X(a(p))$. Si $C \in Medio_\mu(p,X)$, entonces $C \in cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X))$. Supongamos que $C = cl_X(a(p))$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión tal que $A_n = f([t_p - n, t_p])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(f((-\infty,t_p]))$. Por otro lado, como $\mu(A_n) < \mu(cl_X(f((-\infty,t_p])))$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f[t_p,\infty))\}$ es un arco ordenado, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in \mathcal{C}_2$ tal que $\mu(A_n) = \mu(B_n)$. Consideremos la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_2$. Probaremos que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(f([t_p,\infty)))$.

Observemos que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p,\infty)))\}$. Sabemos que $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p,\infty)))\}$ es compacto, además al ser un subconjunto de $C(X)$ es primero numerable, tenemos que $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p,\infty)))\}$ es secuencialmente compacto. Luego, existe una subsucesión convergente $\{B_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $B = \lim_{i\to\infty} B_{n_i}$. Como $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p,\infty)))\}$ es compacto, tenemos que $B \in \mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p,\infty)))\}$. Por otro lado, sea $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ la subsucesión de

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu(A_{n_i}) = \mu(B_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(f((-\infty, t_p]))$ y μ es una función continua, tenemos que $\{\mu(A_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(cl_X(f((-\infty, t_p])))$, luego,

$$\mu(B) = \mu(cl_X(f((-\infty, t_p]))) = \mu(cl_X(f([t_p, \infty)))).$$

Además como $B \subseteq cl_X(f([t_p, \infty)))$, se sigue que $B = cl_X(f([t_p, \infty)))$. Así tenemos que la sucesión $\{B_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(f([t_p, \infty)))$ y por lo tanto la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(f([t_p, \infty)))$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $R_n = A_n \cup B_n$. Notemos que $A_n \cap B_n = \{p\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mu(A_n) = \mu(B_n)$, se sigue que $R_n \in Medio_\mu(p, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además:

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n = \\ cl_X(f((-\infty, t_p])) \cup cl_X(f([t_p, \infty))) = cl_X(f(\mathbb{R})) = cl_X(a(p)).\end{gathered}$$

Se sigue que $cl_X(a(p)) \in cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$. Así, $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$. Concluimos que $\mathcal{C} = cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$ y por lo tanto $\mathcal{C}$ es conexo. Queda probada la Afirmación 3.22.5.

Finalmente tenemos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado, consideramos la restricción $\sigma = \mu|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to [0, \mu(cl_X(a(p)))]$ es un homeomorfismo, de tal manera que $\sigma|_{Medio_\mu(p,X)} : Medio_\mu(p, X) \to [0, \mu(cl_X(a(p)))$ es un homeomorfismo. Sea $g : [0, \mu(cl_X(a(p))) \to [0, 1)$ un homeomorfismo, de tal forma que $H = g \circ \sigma|_{Medio_\mu(p,X)}$ es un homeomorfismo entre el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ y el intervalo $[0, 1)$.

(II) $\mu(cl_X(f((-\infty, t_p]))) \neq \mu(cl_X(f([t_p, \infty))))$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\mu(cl_X(f((-\infty, t_p]))) < \mu(cl_X(f([t_p, \infty)))).$$

Por la prueba del *Teorema 2.31*, sabemos que $\mathcal{B} = \mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$ es un arco ordenado, luego existe $Y \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(cl_X(f((-\infty, t_p]))) = \mu(Y)$, más aún, tenemos que $Y \neq cl_X(f([t_p, \infty)))$, así Y es un elemento de $\mathcal{C}_2 - \{\{p\}\}$, por lo que $Y = f([t_p, y])$, para algún $y \in (t_p, \infty)$. Sea $Z = cl_X(f((-\infty, t_p])) \cup Y$.

En este caso, consideremos la familia $\mathcal{C} = Medio_\mu(p, X) \cup \{Z\}$. Probaremos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado.

Afirmación 3.22.6. *La familia* $\mathcal{C}$ *es un subconjunto ordenado de* $C(X)$

Prueba de la Afirmación 3.22.6. Sea $A \in Medio_\mu(p, X)$. Probaremos que $A \subseteq Z$. Notemos que $A = f([a, b])$, para algunos $a \in (-\infty, t_p]$ y $b \in [t_p, \infty)$. Por la *Afirmación 3.22.1*, $A = f([a, t_p]) \cup f([t_p, b])$. Como $[a, t_p] \subsetneq (-\infty, t_p]$, se sigue que $f([a, t_p]) \subsetneq f((-\infty, t_p])$. Así $f([a, t_p]) \subsetneq cl_X(f((-\infty, t_p]))$. Probemos que $f([t_p, b]) \subsetneq f([t_p, y])$, supongamos lo contrario, es decir, que $f([t_p, b])$ no está contenido propiamente en $f([t_p, y])$ como $f([t_p, b]), f([t_p, y]) \in \mathcal{C}_2$ son comparables entre sí, de tal forma que $f([t_p, y]) \subseteq f([t_p, b])$. Por otro lado, como μ es una función de Whitney para $C(X)$, se sigue que $\mu(f([t_p, y])) \leq \mu(f([t_p, b]))$, por la *Afirmación 3.22.1*, sabemos que $\mu(f([a, t_p])) = \mu(f([t_p, b]))$ y por definición tenemos que $\mu(cl_X(f((-\infty, t_p]))) = \mu(f([t_p, y]))$, luego

$$\mu(cl_X(f((-\infty, t_p]))) \leq \mu(f([a, t_p])),$$

lo cual es una contradicción, ya que $f([a, t_p]) \subsetneq cl_X(f((-\infty, t_p]))$ y μ es una función de Whitney. Se sigue que $f([t_p, b]) \subsetneq f([t_p, y])$. Finalmente, tenemos que $A = f([a, t_p]) \cup f([t_p, b]) \subsetneq cl_X(f((-\infty, t_p])) \cup Y = Z$.

Ahora, sean $A, B \in Medio_\mu(p, X)$. Probaremos que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. De la *Afirmación 3.22.1*, existen $K_A, K_B \in \mathcal{C}_1$ y $L_A, L_B \in \mathcal{C}_2$ tales que $A = K_A \cup L_A$, $K_A \cap L_A = \{p\}$ y $\mu(K_A) = \mu(L_A)$; $B = K_B \cup L_B$, $K_B \cap L_B = \{p\}$ y $\mu(K_B) = \mu(L_B)$. Sabemos por la prueba del *Teorema 2.31*, que $\mathcal{C}_1 \cup \{cl(f((-\infty, t_p]))\}$ es un arco ordenado, así que $K_A \subseteq K_B$ o $K_B \subseteq K_A$. Probaremos que si $K_A \subseteq K_B$, entonces $L_A \subseteq L_B$. Si $L_B \subsetneq L_A$, entonces como μ es una función de Whitney, tenemos que $\mu(K_A) = \mu(L_A) > \mu(L_B) = \mu(K_B)$, pero esto es una contradicción ya que $K_A \subseteq K_B$, se sigue que $L_A \subseteq L_B$. Luego, $A = K_A \cup L_A \subseteq K_B \cup L_B = B$. De forma análoga, si $K_B \subseteq K_A$, entonces $L_B \subseteq L_A$ y así, $B \subseteq A$. Por tanto, tenemos que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Queda probada la Afirmación 3.22.6.

Como $\mathcal{C} \subseteq C(X)$, se sigue que $\mathcal{C}$ es un espacio métrico. Además, como $Z \in \mathcal{C}$, se sigue que $\mathcal{C}$ es no vacío.

Afirmación 3.22.7. *La familia $\mathcal{C}$ es compacto .*

Prueba de la Afirmación 3.22.7. Probaremos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}$ convergente a A, para algún $A \in C(X)$. Probaremos que $A \in \mathcal{C}$.

Como $p \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $p \in A$. Luego, $A \in C(p, X)$. Si $A = Z$, entonces $A \in \mathcal{C}$ por definición. Como los elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son comparables, existe una subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente o decreciente.

Caso I. La subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Tenemos que $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}$, se tiene que $A \in C(A_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$. En particular, $A \in C(A_{n_1})$, luego, $A = \{p\}$ o A es un arco que contiene a p. Si $A = \{p\}$, entonces $A \in Medio_\mu(p, X)$. Supongamos que A es un arco que contiene a p, como $A_{n_i} = K_{n_i} \cup L_{n_i}$ con $K_{n_i} \in \mathcal{C}_1$, $L_{n_i} \in \mathcal{C}_2$, $K_{n_i} \cap L_{n_i} = \{p\}$ y $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces existen $K, L \in C(A)$ tales que la subsucesión $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a K y la subsucesión $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a L. Como la sucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a A, tenemos que $A = K \cup L$. Por otro lado, como μ es una función continua, tenemos que la sucesión $\{\mu(K_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(K)$ y la sucesión $\{\mu(L_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(L)$, luego $\mu(K) = \mu(L)$. Veamos que $K \cap L = \{p\}$, para ello probaremos la siguiente Afirmación:

Afirmación 3.22.8. *Las subsucesiones $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ son decrecientes.*

Prueba de la Afirmación 3.22.8. Observemos que $K_{n_i} \in \mathcal{C}_1$, para cada $i \in \mathbb{N}$, de manera similar $L_{n_i} \in \mathcal{C}_2$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{p\}$. Por otro lado, como $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente, se sigue que $A_{n_{i+1}} \subseteq A_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, así $K_{n_{i+1}} \cup L_{n_{i+1}} \subseteq K_{n_i} \cup L_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, $K_{n_{i+1}} \subseteq K_{n_i}$ y $L_{n_{i+1}} \subseteq L_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Concluimos que las subsucesiones $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ son decrecientes. Así queda demostrada la Afirmación 3.22.8.

Luego, $K = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i}$ y $L = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}$, observemos que $p \in K_{n_i}$ y $p \in L_{n_i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, así $p \in K$ y $p \in L$, luego, $\{p\} \subseteq K \cap L$. Por otro lado, tenemos que $K \cap L \subseteq K_{n_i} \cap L_{n_i} = \{p\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $K \cap L = \{p\}$. Finalmente, tenemos que $A \in Medio_\mu(p, X)$ y así $A \in \mathcal{C}$.

Caso II. La subsucesión $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente.

En este caso tenemos que $A = cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i})$. Como $A_{n_i} = f([a_i, b_i])$ con $a_i \in (-\infty, t_p)$ y $b_i \in (t_p, \infty)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Por la *Afirmación 3.22.1*, se sigue que $K_{n_i} = f([a_i, t_p])$ y $L_{n_i} = f([t_p, b_i])$, para cada $i \in \mathbb{N}$, como $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión creciente, se tiene que las subsucesiones $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ también son crecientes. Por lo que la sucesión $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $K = cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i})$ y la sucesión $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $L = cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i})$. Tenemos los siguientes casos:

(i) La sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente.

En este caso, tenemos que la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $a = \text{ínf}\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$. Además, la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente por y, así $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $b = \sup\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$. Probaremos que:

$$f([a, t_p]) = cl_X(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])) = cl_X(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_{n_i}) = K.$$

Notemos que como $a_i \geq a$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $f([a_i, t_p]) \subseteq f([a, t_p])$, luego $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]) \subseteq f([a, t_p])$, luego, $cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])) \subseteq f([a, t_p])$. Veamos la contención contraria, es decir, que:

$$f([a, t_p]) \subseteq cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])).$$

Sea $x \in f([a, t_p])$, existe $t_x \in [a, t_p]$ tal que $f(t_x) = x$. Note que, si $t_x = a$, entonces $x \in cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]))$, ya que la sucesión $\{f(a_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $f(t_x) = x$. Así, supongamos que $t_x > a$, tenemos que t_x no es cota inferior de la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, es decir, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_x \geq a_j$, se sigue que $t_x \in [a_j, t_p]$, luego $x \in f([a_j, t_p]) \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]) \subseteq cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]))$. Concluimos que $x \in cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p]))$. Finalmente, tenemos que $f([a, t_p]) = cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([a_i, t_p])) = cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i})$. De forma similar,se prueba que $f([t_p, b]) = cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f([t_p, b_i]) = cl_X(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}) = L$. Luego:

$$f([a, b]) = f([a, t_p]) \cup f([t_p, b]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i}) \cup cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}). \tag{3.3}$$

Como $A_{n_i} = K_{n_i} \cup L_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $f([a,b]) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}) = A$, es decir, A es una arco. Más aún, de las igualdades de la *Ecuación 3.3*, tenemos que $A = K \cup L$. Como $[a,t_p] \cap [t_p,b] = \{t_p\}$ y f es una función inyectiva $K \cap L = f([a,t_p]) \cap f([t_p,b]) = \{f(t_p)\} = \{p\}$. Además, como $\lim_{i\to\infty} K_{n_i} = K$, $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} = L$ y μ es una función continua, tenemos que $\lim_{i\to\infty} \mu(K_{n_i}) = \mu(K)$ y $\lim_{i\to\infty} \mu(L_{n_i}) = \mu(L)$, luego como $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu(K) = \mu(L)$. De tal forma que $A \in Medio_\mu(p,X)$, y así $A \in \mathcal{C}$.

(ii) La sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no está acotada inferiormente.

En este caso, tenemos que la sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $-\infty$. Por otro lado, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [a_i,t_p] = (-\infty,t_p]$. Luego, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i,t_p]) = f((-\infty,t_p])$, así

$$K = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i}) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([a_i,t_p])) = cl_X(f((-\infty,t_p])) \tag{3.4}$$

Además, sabemos que la sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $b = \sup\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$. De tal forma que,

$$L = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}) = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f([t_p,b_i])) = f([t_p,b]) \tag{3.5}$$

Como $\lim_{i\to\infty} K_{n_i} = K$, $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} = L$ y μ es una función continua, entonces $\lim_{i\to\infty} \mu(K_{n_i}) = \mu(K)$ y $\lim_{i\to\infty} \mu(L_{n_i}) = \mu(L)$. Como $\mu(K_{n_i}) = \mu(L_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu(K) = \mu(L)$, y así $\mu(cl_X(f((-\infty,t_p]))) = \mu(f([t_p,b]))$. Como $\mu(cl_X(f((-\infty,t_p]))) = \mu(Y)$, se sigue que $\mu(Y) = \mu(f([t_p,b]))$, además como $b \in [t_p,y]$, se sigue que $f([t_p,b]) \subseteq Y$, así que $Y = f([t_p,b])$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} A = cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n_i}) &= cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{n_i}) \cup cl_X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_{n_i}) = K \cup L \\ &= cl_X(f((-\infty,t_p])) \cup Y = Z \end{aligned} \tag{3.6}$$

Luego $A = Z$ y así $A \in \mathcal{C}$. Concluimos que $\mathcal{C}$ es cerrado en $C(X)$ y así compacto. Queda demostrada la Afirmación 3.22.7.

Afirmación 3.22.9. *La familia $\mathcal{C}$ es conexo.*

Prueba de la Afirmación 3.22.9. Por el *Corolario 3.13*, sabemos que el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es conexo, basta probar que $\mathcal{C} = cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X))$. Por lo hecho en (i), tenemos que $cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X)) \subseteq \mathcal{C}$. Probaremos que $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X))$. Sea $C \in \mathcal{C}$, se sigue que $C \in Medio_\mu(p,X)$ o $C = Z$. Si $C \in Medio_\mu(p,X)$, entonces $C \in cl_{C(X)}(Medio_\mu(p,X))$. Supongamos que $C = Z$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión tal que $A_n = f([t_p - n, t_p])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(f((-\infty,t_p]))$. Por otro lado, como

$$\mu(A_n) < \mu(cl_X(f((-\infty,t_p]))) = \mu(Y) \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

y Y es un arco con p como punto extremo, existe $B_n \in Arcos(p, Y)$ tal que $\mu(A_n) = \mu(B_n)$. Consideremos la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$. Probaremos que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y.

Observemos que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$. Sabemos que $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$ es compacto, además al ser un subconjunto de $C(X)$ es primero numerable, tenemos que $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$ es secuencialmente compacto. Luego, existe una subsucesión convergente $\{B_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $B = \lim\limits_{i\to\infty} B_{n_i}$. Como $\mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$ es compacto, tenemos que $B \in \mathcal{C}_2 \cup \{cl_X(f([t_p, \infty)))\}$. Por otro lado, sea $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la subsucesión tal que $\mu(A_{n_i}) = \mu(B_{n_i})$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $\{A_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $cl_X(f((-\infty, t_p]))$ y μ es una función continua, tenemos que $\{\mu(A_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu(cl_X(f((-\infty, t_p])))$, luego, $\mu(B) = \mu(cl_X(f((-\infty, t_p]))) = \mu(Y)$, además como $B \subseteq Y$, se sigue que $B = Y$. Por lo que la sucesión $\{B_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a Y y así la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $R_n = A_n \cup B_n$. Notemos que $A_n \cap B_n = \{p\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mu(A_n) = \mu(B_n)$, se sigue que $R_n \in Medio_\mu(p, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n = cl_X(f((-\infty, t_p])) \cup Y = Z.$$

Se sigue que $Z \in cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$. Así, $\mathcal{C} \subseteq cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$. Concluimos que $\mathcal{C} = cl_{C(X)}(Medio_\mu(p, X))$ y por lo tanto $\mathcal{C}$ es conexo. Queda probada la Afirmación 3.22.7.

Tenemos que $\mathcal{C}$ es un arco ordenado, consideramos la restricción $\sigma = \mu|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to [0, \mu(Z)]$ es un homeomorfismo y así $\sigma|_{Medio_\mu(p,X)} : Medio_\mu(p, X) \to [0, \mu(Z))$ es un homeomorfismo. Consideramos un homeomorfismo $g : [0, \mu(Z)) \to [0, 1)$, de tal forma que $H = g \circ \sigma|_{Medio_\mu(p,X)}$ es un homeomorfismo entre el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ y el intervalo $[0, 1)$. □

Como consecuencia del *Teorema 3.20* y el *Teorema 3.22*, tenemos el siguiente resultado que muestra un modelo geométrico del hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$, cuando X es el *continuo de Knaster* definido en [25, Ejemplo 2.9].

Teorema 3.23. *Sean X el arcoiris de Knaster, e el punto extremo de X y $\kappa(e)$ la composante de e en X. Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si $p = e$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un singular.

(2) Si $p \in \kappa(e) \setminus \{e\}$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es un arco o es homeomorfo a $[0, 1)$.

(3) Si $p \in X \setminus \kappa(e)$, entonces el hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1)$.

Demostración. Como los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos tenemos que las arco componentes de X coinciden con sus composantes, es decir, que para $p \in X$, $a(p) = \kappa(p)$. Además, existe una función continua y biyectiva $f : [0, \infty) \to \kappa(e)$ (véase [31] página 2).

(1) Si $p = e$, entonces por el *Teorema 3.20* inciso (1), tenemos que $Medio_\mu(p,X)$ es un singular.

(2) Si $p \in \kappa(e)\setminus\{e\}$, entonces por el *Teorema 3.20*, tenemos que el hiperespacio $Medio_\mu(p,X)$ es un arco o es homeomorfo a $[0,1)$.

(3) Si $p \in X \setminus \kappa(e)$, entonces existe una función continua y biyectiva $f : \mathbb{R} \to \kappa(p)$ (véase [31] página 2). Luego, por el *Teorema 3.22*, se tiene que $Medio_\mu(p,X)$ es homeomorfo a $[0,1)$. $\square$

Teorema 3.24. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si $Medio_\mu(p,X)$ es subconjunto ordenado y compacto de $C(X)$, entonces $Medio_\mu(p,X)$ es un arco.*

Demostración. Como $Medio_\mu(p,X) \subseteq C(X)$, se tiene que $Medio_\mu(p,X)$ es un espacio métrico, además es no vacío ya que $\{p\} \in Arcos(p,X)$. Por otro lado, por el *Corolario 3.13*, $Medio(p,X)$ es conexo, luego $Medio(p,X)$ es un continuo. Como $Medio(p,X)$ es un subconjunto ordenado de $C(X)$, tenemos que $Medio(p,X)$ es un arco ordenado, así existe un homeomorfismo $h : [0,1] \to Medio(p,X)$, concluimos que $Medio(p,X)$ es un arco. $\square$

Capítulo 4

La propiedad de Kelley por arcos

Existen propiedades interesantes que cumplen los continuos y que sirven para estudiar su estructura, así como sus propiedades topológicas. Una de estas propiedades interesantes es la *Propiedad de Kelley* introducida por J. L. Kelley como la *Propiedad 3.2* in [17, pág. 9], la cual mencionamos a continuación:

Definición 4.1. *Sea X un continuo. Diremos que X tiene la* **propiedad de Kelley**, *si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que depende de ε, tal que para cualesquiera dos puntos p y q de X con $d(p,q) < \delta$ y, para cada subcontinuo A de X que contiene al punto p, existe un subcontinuo B de X que contiene a q y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Las pruebas del *Teorema 4.2* y el *Teorema 4.3* pueden ser consultadas en [1, Teorema 2.7] y [1, Teorema 4.1], respectivamente.

Teorema 4.2. *Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley en p.

(2) Para todo $A \in C(p,X)$ y para toda sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in C(p_n,X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.3. *Si X es un continuo localmente conexo en un punto $p \in X$, entonces X tiene la propiedad de Kelley en p.*

Inspirados en la *Definición 4.1* y el estudio del hiperespacio de arcos en X que contienen al punto $p \in X$, damos la siguiente definición:

Definición 4.4. *Sean X un continuo y $p \in X$. Diremos que X tiene la* **propiedad de Kelley por arcos** *en p, si para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p y para cada $A \in Arcos(p,X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n,X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Diremos que X tiene la* **propiedad de Kelley por arcos** *si la tiene en cada uno de sus puntos.*

En este capítulo, estudiamos esta definición y damos ejemplos de continuos que tienen la propiedad de Kelley por arcos.

4.1 Aspectos generales de la propiedad de Kelley por arcos

En esta sección mostramos ejemplos de continuos que tiene la propiedad de Kelley por arcos, como son el arco, la curva cerrada simple, el triodo simple y la 2-celda. Mostramos que la propiedad de Kelley por arcos caracteriza al arco y a la curva cerrada simple en la clase de las gráficas finitas, por otro lado, en la clase de las dendritas caracteriza al arco. Finalmente cerramos la sección mostrando que los continuos homogéneos tienen la propiedad de Kelley por arcos.

Teorema 4.5. *Si X es un continuo que no contiene arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un continuo que no contiene arcos. Note que el hiperespacio $Arcos(p, X) = \{\{p\}\}$, para cada $p \in X$. Sean $p \in X$, $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Observemos que $A = \{p\}$, basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Un continuo interesante es el *pseudoarco* el cual está definido en [25, Ejercicio 1.23]. El pseudoarco es un continuo indescomponible y sus subcontinuos propios y no degenerados son homeomorfos a él.

Corolario 4.6. *El pseudoarco tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Teorema 4.7. *Si X es un arco, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un arco y $p \in X$. Sean $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p. Como X es un arco, en particular es un espacio localmente conexo, por el *Teorema 4.3*, X tiene la propiedad de Kelley, así existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como los subcontinuos de X son arcos o singulares se tienen que $C(p_n, X) = Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $A_n \in Arcos(p_n, X)$. Así, X tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Teorema 4.8. *Si X es una curva cerrada simple, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X una curva cerrada simple, $p \in X$, $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p en X. Como X es localmente conexo, por el *Teorema 4.3*, X tiene la propiedad de Kelley, así existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que, A_n es un arco de X, para toda $n \in \mathbb{N}$ salvo una cantidad finita de índices. Sea $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_{n_k} \in Arcos(p_{n_k}, X)$, como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, se sigue que la subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a A. Para los índices donde $A_n = X$, basta considerar un $B_n \in Arcos(p_n, X)$, así, existe una sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $C_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, X tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Proposición 4.9. *La propiedad de Kelley por arcos es una propiedad topológica entre continuos.*

Demostración. Sean X y Y continuos tales que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Probaremos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sean $y \in Y$, $B \in Arcos(y, Y)$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y convergente a y. Notemos que $h^{-1}(B) \in Arcos(h^{-1}(y), X)$. Por otro lado, como h^{-1} es una función continua y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, se tiene que $\{h^{-1}(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h^{-1}(y)$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $h^{-1}(B)$ tal que $A_n \in Arcos(h^{-1}(y_n), X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\{h(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h(h^{-1}(B)) = B$, note que $h(A_n) \in Arcos(y_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

Recordemos la siguiente definición.

Definición 4.10. *Sean X un continuo y Y un subcontinuo de X. Diremos que Y es un* **n-odo simple libre** *si Y es n-odo simple y $Y \setminus E(Y)$ es un conjunto abierto en X.*

Teorema 4.11. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Si X contiene un n-odo simple libre, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sean Y el n-odo simple libre contenido en X y p el vértice de Y. Sean $A_1, \ldots, A_n$ los arcos en X tales que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ y $A_i \cap A_j = \{p\}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $y_i \in A_i$ el punto extremo de A_i, distinto de p. Sea $\mathcal{U} = Y \setminus E(Y)$. Sean $x_1 \in A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $x_2 \in A_2 \setminus \{p, y_2\}$, consideramos los arcos $B_1 = px_1$ y $B_2 = px_2$ contenidos propiamente en A_1 y A_2, respectivamente. Sea $M = B_1 \cup B_2$. Note que M es un arco que contiene a p contenido en U. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p tal que $p_n \in A_3 \setminus \{p, y_3\}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que U, $A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $A_2 \setminus \{p, y_2\}$ son abiertos en X, como consecuencia existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_N \subset U$, $M_N \cap (A_1 \setminus \{p, y_1\}) \neq \emptyset$ y $M_N \cap (A_2 \setminus \{p, y_2\}) \neq \emptyset$. Más aún, $A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $A_2 \setminus \{p, y_2\}$ son arco componentes de $U \setminus \{p\}$, así $p \in M_N$. Se sigue que p es un punto de ramificación de M_N, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

El *Ejemplo 4.12* muestra que la propiedad de Kelley no implica la propiedad de Kelley por arcos.

Ejemplo 4.12. *Sea X un triodo simple. Por el Teorema 4.11, X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. Por [24, Ejemplo (16.11)], X tiene la propiedad de Kelley.*

Como el pseudoarco es un continuo indescomponible, por [25, teoremas 11.15 y 11.17], el pseudoarco tiene una cantidad no numerables composantes densas. Por otro lado, el *Ejemplo 4.13* muestra que la propiedad de Kelley por arcos no implica la propiedad de Kelley.

Ejemplo 4.13. *Sean P y Q dos pseudoarcos tales que $P \cap Q = \{q\}$ y sea $X = P \cup Q$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) X tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(2) X no tiene la propiedad de Kelley.

DEMOSTRACIÓN. Primero probamos (1). Notemos que X no contiene arcos. Como consecuencia del *Teorema 4.5*, X tiene la propiedad de Kelley por arcos.

Ahora, probemos (2). Observamos que P es un subcontinuo de X tal que $q \in P$. Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a q tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $q_n \in Q$ y la composante de q_n en Q es diferente de la composante de q en Q.

Supongamos que X tiene la propieda de Kelley, en particular, X tiene la propiedad de Kelley en q. Así, existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a P tal que $q_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4.13.1. *existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $q \in K_n$, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 4.13.1. Sea $x \in P \setminus \{q\}$. Como $P \setminus \{q\}$ es un subconjunto abierto de X y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a P, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap (P \setminus \{q\}) \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Notemos que $\{q\}$ separa a $P \setminus \{q\}$ y $Q \setminus \{q\}$ en X, se sigue que $q \in K_n$, para cada $n \geq N$. Queda probada la *Afirmación 4.13.1.*

Afirmación 4.13.2. *$K_n \cap Q$ es conexo, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 4.13.2. Sean $n \geq N$, $U = K_n \cap (P \setminus \{q\})$ y $V = K_n \cap (Q \setminus \{q\})$. Notemos que U y V son subconjuntos abiertos de $K_n \setminus \{q\}$, $K_n \setminus \{q\} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$. Así, U y V está mutuamente separados en $K_n \setminus \{q\}$. Por [25, Proposición 6.3], $V \cup \{q\}$ es conexo. Observemos que $V \cup \{q\} = (K_n \cap (Q \setminus \{q\})) \cup \{q\} = K_n \cap Q$. Queda probada la *Afirmación 4.13.2.*

Finalmente, por la *Afirmación 4.13.2*, para cada $n \geq N$, $K_n \cap Q$ es un subcontinuo de Q. Como $q, q_n \in K_n \cap Q$ y los puntos q y q_n están en diferentes composantes de Q, se sigue que $K_n \cap Q = Q$. De donde $Q \subset \lim_{n\to\infty} K_n = P$, lo cual contradice que $P \cap Q = \{q\}$. Por lo tanto, X no tiene la propiedad de Kelley. □

Proposición 4.14. *Si X es una gráfica finita con al menos un punto de ramificación, entonces X contiene un n-odo simple libre, para algún $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, donde A_i es un arco, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, y cualquiera par de ellos se intersecta en uno o ambos puntos extremos. Sea p un punto de ramificación de X y $n = ord(p, X) \geq 3$. Sin perder generalidad, supongamos que $p \in A_j$ si y sólo si $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $x_j \in A_j$ tal que x_j no es un punto extremo de A_j, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $Y = \bigcup_{j=1}^{n} px_j$, donde px_j es el arco en A_j con puntos finales p y x_j, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos que Y es un n-odo simple libre. □

Teorema 4.15. *Sea X una gráfica finita. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. La suficiencia se sigue del *Teorema 4.7* y el *Teorema 4.8.* Para la necesidad, supongamos que X no es un arco ni una curva cerrada simple, por la *Proposición 1.8*, se tiene que existe $p \in X$ tal que $ord(p, X) \geq 3$, luego por la *Proposición 4.14*, se tiene que X contiene un n-odo simple libre. Así, por el *Teorema 4.11*, tenemos que X no tiene la propiedad de Kelley por arcos, lo cual es una contradicción. Concluimos que X es un arco o una curva cerrada simple. □

Teorema 4.16. *Sea X una dendrita. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos si y sólo si X es un arco.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos y que no es un arco. Así, existe $p \in X$ tal que $ord(p, X) \geq 3$. Luego, existen arcos en X, A_1, A_2 y A_3, tales que p es punto extremo de A_i y $A_i \cap A_j = \{p\}$, para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, sea $a_i \in A_i$ el punto extremo de A_i tal que $p \neq a_i$.

Sea $M = A_1 \cup A_2$. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $A_3 \setminus \{p, a_3\}$ convergente a p. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea U_{a_1}, U_{a_2} y U_{a_3} componentes se a_1, a_2 y a_3 en $X \setminus \{p\}$, respectivamente. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(a_1, \varepsilon) \subseteq U_{a_1}$ y $B(a_2, \varepsilon) \subseteq U_{a_2}$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in B(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap M_N$ y $y_N \in B(a_2, \frac{\varepsilon}{2}) \cap M_N$. Probaremos que $p \in M_N$. Supongamos que $p \notin M_N$. Tenemos que M_N es un conjunto conexo en $X \setminus \{p\}$ que contiene a x_N y a y_N, de aquí que x_N y y_N están en la misma arco componente de $X \setminus \{p\}$ lo cual contradice que $x_N \in U_{a_1}$ y $y_N \in U_{a_2}$. Se sigue que $p \in M_N$.

Como $p_N \in A_3 \setminus \{p\}$, tenemos que $p_N a_3 \subseteq A_3 \setminus \{p\}$, así $p_N \in U_{a_3}$. Se sigue que M_N es un arco que contiene a p tal que $M_N \cap U_{a_1} \neq \emptyset$, $M_N \cap U_{a_2} \neq \emptyset$ y $M_N \cap U_{a_3} \neq \emptyset$, luego p es un punto de ramificación de M_N, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es un arco. La suficiencia se sigue del *Teorema 4.7.* □

El siguiente resultado muestra que la unión de continuos que tienen la propiedad de Kelley por arcos no necesariamente tiene la propiedad de Kelley por arcos.

Proposición 4.17. *Sean P el pseudoarco, $p \in P$, Y un arco tal que $P \cap Y = \{p\}$ y p es punto extremo de Y. Si $X = P \cup Y$, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Notemos que $Y \in Arcos(p, X)$. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p tal que $p_n \in P \setminus \{p\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $Arcos(p_n, X) = \{\{p_n\}\}$. Se tiene que la única sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$ es la que tiene a cada elemento como un singular, es decir, $A_n = \{p_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\} \neq Y$, por lo que X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Teorema 4.18. *Las $2-$celdas tienen la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Sabemos por la *Proposición 4.9*, que la propiedad de Kelley por arcos es una propiedad topológica, por ello basta considerar $X = [0,1] \times [0,1]$. Sean $p \in X$, $A \in Arcos(p,X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Sean a y b los puntos extremos de A. Tenemos los siguientes dos casos:

(1) p es punto extremo de A.

Sin perder generalidad, supongamos que $p = a$. Sea $\varepsilon > 0$, consideremos $B(p,\varepsilon)$, como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in B(p,\varepsilon)$, para cada $n \geq N$. Para toda $n \geq N$, sea B_n el segmento de recta que une a p con p_n, sea $f_n : [0,1] \to B_n$ el homeomorfismo tal que $f_n(t) = p_n + t(p - p_n)$, para cada $n \geq N$. Observemos que $f_n(0) = p_n$ y $f_n(1) = p$, para cada $n \geq N$. Sean $t_n = \text{ínf}\{t \in [0,1] : f_n(t) \in A\}$ y $r_n = f_n(t_n)$, para cada $n \geq N$. Observemos que $r_n \in A$, para cada $n \geq N$. Consideremos el segmento de recta que une a p_n con r_n, sea K_n dicho segmento, para cada $n \geq N$. Claramente $K_n \subseteq B_n$, para cada $n \geq N$. Ahora, como $r_n \in A$, para cada $n \geq N$, sea L_n el arco contenido en A con puntos extremos r_n y b, para cada $n \geq N$. Sea $M_n = K_n \cup L_n$, para cada $n \geq N$.

Afirmación 4.18.1. *$\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A.*

Prueba de la Afirmación 4.18.1. Como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, entonces la subsucesión $\{p_n\}_{n\geq N}$ también converge a p, luego la sucesión de arcos $\{B_n\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$. Como $K_n \subseteq B_n$, para cada $n \geq N$, se tiene que la sucesión $\{K_n\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$ y así la sucesión de puntos $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p. Por otro lado, como A es un arco, también es una dendrita y la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida A, luego por el *Teorema 1.16*, A es suave en todos sus puntos, en particular en b, así la sucesión de arcos $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco pb en A y así dicha sucesión converge a A. Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \lim\limits_{n\to\infty} K_n \cup \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \{p\} \cup A = A$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$, con lo cual queda demostrada la Afirmación 4.18.1.

Se tiene que, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n = \{p_n\}$, para cada $n \in \{1,\ldots,N-1\}$ y $A_n = M_n$, para cada $n \geq N$. Luego, $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(2) p no es punto extremo de A.

Observemos que si $p_n \in A$, para cada $n \in \mathbb{N}$, basta considerar la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n = A$, para cada $n \in \mathbb{N}$, la cual converge a A y es tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \notin A$, para cada $n \geq k$. Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A convergente a p tal que $q_n \neq p$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$, consideremos $B(p,\varepsilon)$, como las sucesiones $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{p_n\}_{n\geq k}$ convergen a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n, q_n \in B(p,\varepsilon)$, para cada $n \geq N$. Tenemos los siguientes dos subcasos:

(2.1) Para cada $n \geq N$, los puntos p_n, q_n y p no son colineales.

Para cualesquiera puntos x y y en X, denotemos al segmento de recta que une a x y y por $\overline{xy}$. Sean $B_n = \overline{pp_n}$ y $C_n = \overline{q_n p_n}$, para cada $n \geq N$. Tenemos que $B_n \subseteq B(p,\varepsilon)$, $C_n \subseteq B(p,\varepsilon)$ y $B_n \cap C_n = \{p_n\}$, para cada $n \geq N$. Ahora, para toda $n \geq N$, sean $f_n : [0,1] \to B_n$ y $g_n : [0,1] \to C_n$ los homeomorfismos tales que:

$$f_n(r) = p_n + r(p - p_n) \text{ y } g_n(s) = p_n + s(q_n - p_n).$$

Notemos que $f_n(0) = p_n = g_n(0)$, $f_n(1) = p$ y $g_n(1) = q_n$, para cada $n \geq N$. Sean $r_n = \text{ínf}\{r \in [0,1] : f_n(r) \in A\}$ y $s_n = \text{ínf}\{s \in [0,1] : g_n(s) \in A\}$. Definimos $x_n = f_n(r_n)$ y $y_n = g_n(s_n)$, para cada $n \geq N$. Como $\{p_n\}_{n\geq N}$ converge a p, tenemos que la sucesión $\{B_n\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$. De forma similar, si $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de arcos en A tal que $D_n = pq_n$, entonces la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$.

Afirmación 4.18.2. *La sucesión* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $\{p\}$.

Prueba de la Afirmación 4.18.2. Como la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, se tiene que $\{p\} \subseteq \lim_{n\to\infty} C_n$. Probaremos que $\lim_{n\to\infty} C_n \subseteq \{p\}$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $q \in \lim_{n\to\infty} C_n$ tal que $q \neq p$. Como $q \in \lim_{n\to\infty} C_n$, existe una sucesión de puntos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a q, tal que $c_n \in C_n$, para cada $n \geq N$. Luego, existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ y $g_n(t_n) = c_n$, para cada $n \geq N$. Así

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (p_n + t_n(q_n - p_n) = p + t(p - p) = p,$$

por lo que $p = q$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $\lim_{n\to\infty} C_n \subseteq \{p\}$, así $\lim_{n\to\infty} C_n = \{p\}$, con lo que queda demostrada la Afirmación 4.18.2.

Por otro lado, como $p_n \notin A$ y $B_n \cap C_n = \{p_n\}$, para cada $n \geq N$, se tiene que $x_n \neq y_n$, para cada $n \geq N$. Sea $h : [0,1] \to A$ un homeomorfismo tal que $h(0) = a$ y $h(1) = b$. Como $x_n \neq y_n$, para cada $n \geq N$, tenemos que $h^{-1}(x_n) \neq h^{-1}(y_n)$, sin perder generalidad, supongamos que $h^{-1}(x_n) < h^{-1}(y_n)$, para cada $n \geq N$. Definimos, para toda $n \geq N$, los arcos $M_n = ax_n \cup \overline{x_n p_n} \cup \overline{p_n y_n} \cup y_n b$, donde ax_n y $y_n b$ son arcos contenidos en A, para cada $n \geq N$. Como las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a p y A es suave en cada uno de sus puntos, se tiene que las sucesiones $\{ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n b\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a los arcos ap y pb contenidos en A. Por otro lado, observemos que $\overline{x_n p_n} \subseteq B_n$ y $\overline{p_n y_n} \subseteq C_n$, para cada $n \geq N$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \overline{x_n p_n} = \{p\} = \lim_{n\to\infty} \overline{p_n y_n}$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} ax_n \cup \lim_{n\to\infty} \overline{x_n p_n} \cup \lim_{n\to\infty} \overline{p_n y_n} \cup \lim_{n\to\infty} y_n b = ap \cup \{p\} \cup \{p\} \cup pb = A$$

Así, de forma similar al caso (1), existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A, tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(2.2) Para cada $n \geq N$, los puntos p_n, q_n y p son colineales.
Para cada $n \geq N$, sea R_n la recta en $\mathbb{R}^2$ tal que p_n, q_n y p están en R_n. Tenemos los siguientes tres subcasos:

(2.2.1) $p_n \in \overline{pq_n}$, para cada $n \geq N$.
En este caso, sean $B_n = \overline{pp_n}$ y $C_n = \overline{q_n p_n}$, para cada $n \geq N$. Notemos que $B_n \cap C_n = \{p_n\}$, para cada $n \geq N$. Para cada $n \geq N$, sean $f_n : [0,1] \to B_n$ y $g_n : [0,1] \to C_n$ los homeomorfismos tales que

$$f_n(r) = p_n + r(p - p_n) \text{ y } g_n(s) = p_n + s(q_n - p_n).$$

Notemos que $f_n(0) = p_n = g_n(0)$, $f_n(1) = p$ y $g_n(1) = q_n$, para cada $n \geq N$. Sean $r_n = \inf\{r \in [0,1] : f_n(r) \in A\}$ y $s_n = \inf\{s \in [0,1] : g_n(s) \in A\}$, definimos $x_n = f_n(r_n)$ y $y_n = g_n(s_n)$, para cada $n \geq N$. Como $B_n \cap C_n = \{p_n\}$, para cada $n \geq N$, se tiene que $x_n \neq y_n$. Sea $h : [0,1] \to A$ un homeomorfismo tal que $h(0) = a$ y $h(1) = b$. Sin perder generalidad, supongamos que $h^{-1}(x_n) < h^{-1}(y_n)$, para cada $n \geq N$. Definamos $M_n = ax_n \cup \overline{x_n p_n} \cup \overline{p_n y_n} \cup y_n b$, para cada $n \geq N$. Observemos que, como la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, la sucesión de segmentos de recta $\{\overline{q_n p}\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$, así las sucesiones $\{\overline{x_n p_n}\}_{n\geq N}$ y $\{\overline{p_n y_n}\}_{n\geq N}$, también convergen a $\{p\}$. Por otro lado, como A es un arco, se tiene que es suave en cada uno de sus puntos en particular en a y b, de tal forma que las sucesiones de arcos en A, $\{ax_n\}_{n\geq N}$ y $\{y_n b\}_{n\geq N}$ convergen a los arcos ap y pb en A. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} ax_n \cup \lim_{n\to\infty} \overline{x_n p_n} \cup \lim_{n\to\infty} \overline{p_n y_n} \cup \lim_{n\to\infty} y_n b = ap \cup \{p\} \cup \{p\} \cup pb = A.$$

Con lo que queda probado el caso (2,2,1).

Para los siguientes casos, consideremos una sucesión $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X convergente a p tal que $m_n \notin A$ y $m_n \notin R_n$, para cada $n \geq N$. Sin perder generalidad, supongamos que $m_n \in B(p,\varepsilon)$, para cada $n \geq N$.

(2.2.2). $q_n \in \overline{pp_n}$, para cada $n \geq N$.

Sean $Y_n = \overline{p_n m_n}$ y $Z_n = \overline{m_n p}$, para cada $n \geq N$. Observemos que, como $m_n \notin A$ y $m_n \notin R_n$, para cada $n \geq N$, se tiene que:

$$R_n \cap Y_n = \{p_n\},\ Y_n \cap Z_n = \{m_n\} \text{ y } Z_n \cap R_n = \{p\}.$$

Más aún, como $\{m_n\}_{n\geq N}$ converge a p, se tiene que $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$, de forma similar la sucesión $\{B_n\}_{n\geq N}$ tal que $B_n = \overline{pp_n}$ converge a $\{p\}$. Para cada $n \geq N$, sea $f_n : [0,1] \to B_n$ el homeomorfismo tal que $f_n(r) = p_n + r(p - p_n)$. Observemos que $f_n(0) = p_n$ y $f_n(1) = p$, para cada $n \geq N$. De forma similar consideramos los homeomorfismos $g_n : [0, \frac{1}{2}] \to Y_n$ y $h_n : [\frac{1}{2}, 1] \to Z_n$, tales que

$$g_n(s) = p_n + 2s(m_n - p_n) \text{ y } h_n(s) = m_n + (2s-1)(p - m_n), \text{ para cada } n \geq N.$$

Definimos la función $j_n : [0,1] \to Y_n \cup Z_n$ tal que

$$j_n(s) = \begin{cases} g_n(s), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ h_n(s), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tenemos que j_n es un homeomorfismo tal que $j_n(0) = p_n$ y $j_n(1) = p$, para cada $n \geq N$. Observemos que $B_n \cap (Y_n \cup Z_n) = \{p_n, p\}$, para cada $n \geq N$. Sean $r_n = \inf\{r \in [0,1] : f_n(r) \in A\}$ y $s_n = \inf\{s \in [0,1] : j_n(s) \in A\}$, definimos $x_n = f_n(r_n)$ y $y_n = j_n(s_n)$, para cada $n \geq N$. Observemos que $x_n \neq y_n$, ya que $q_n \in R_n$, para cada $n \geq N$. Sean $p_n y_n \subseteq Y_n \cup Z_n$ arco y el segmento $\overline{p_n x_n} \subseteq B_n$, para cada $n \geq N$. Definamos $M_n = ax_n \cup \overline{x_n p_n} \cup p_n y_n \cup y_n b$, donde ax_n y $y_n b$ son arcos contenidos en A. Notemos que, como $\{B_n\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$, se tiene que la sucesión $\{\overline{x_n p_n}\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$, de forma similar, la sucesión de arcos $\{p_n y_n\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$, de tal forma que las sucesiones $\{x_n\}_{n\geq N}$ y $\{y_n\}_{n\geq N}$ convergen a p. Observemos que como A es suave en cada uno de sus puntos, en particular lo es en a y b, luego las sucesiones de arcos $\{ax_n\}_{n\geq N}$ y $\{y_n b\}_{n\geq N}$ convergen a los arcos ap y pb en A, respectivamente. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} ax_n \cup \lim_{n\to\infty} \overline{x_n p_n} \cup \lim_{n\to\infty} p_n y_n \cup \lim_{n\to\infty} y_n b = ap \cup \{p\} \cup \{p\} \cup pb = A.$$

(2.2.3) $p_n \notin \overline{pq_n}$ y $q_n \notin \overline{pp_n}$, para cada $n \geq N$.

Consideremos los segmentos de recta $Y_n = \overline{p_n m_n}$ y $W_n = \overline{m_n q_n}$, para cada $n \geq N$. Observemos que, como $m_n \notin A$ y $m_n \notin R_n$, para cada $n \geq N$, se tiene que:

$$R_n \cap Y_n = \{p_n\},\ Y_n \cap W_n = \{m_n\} \text{ y } W_n \cap R_n = \{q_n\}.$$

Más aún, como $\{m_n\}_{n\geq N}$ converge a p, se tiene que $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\}$, de forma similar la sucesión $\{B_n\}_{n\geq N}$ tal que $B_n = \overline{pp_n}$ converge a $\{p\}$. Para cada $n \geq N$, sea $f_n : [0,1] \to B_n$ el homeomorfismo tal que $f_n(r) = p_n + r(p - p_n)$. Observemos que $f_n(0) = p_n$ y $f_n(1) = p$, para cada $n \geq N$. De forma similar consideramos los homeomorfismos $g_n : [0, \frac{1}{2}] \to Y_n$ y $h_n : [\frac{1}{2}, 1] \to W_n$, tales que

$$g_n(s) = p_n + 2s(m_n - p_n) \text{ y } h_n(s) = m_n + (2s-1)(q_n - m_n), \text{ para cada } n \geq N.$$

Definimos la función $j_n : [0,1] \to Y_n \cup W_n$ tal que

$$j_n(s) = \begin{cases} g_n(s), & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ h_n(s), & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tenemos que j_n es un homeomorfismo tal que $j_n(0) = p_n$ y $j_n(1) = q_n$, para cada $n \geq N$. Observemos que $B_n \cap (Y_n \cup W_n) = \{p_n\}$, para cada $n \geq N$. Sean $r_n = \inf\{r \in [0,1] : f_n(r) \in A\}$ y $s_n = \inf\{s \in [0,1] : j_n(s) \in A\}$, definimos $x_n = f_n(r_n)$ y $y_n = j_n(s_n)$, para cada $n \geq N$. Observemos que $x_n \neq y_n$, para cada $n \geq N$. Consideremos el arco $p_n y_n \subseteq Y_n \cup W_n$ y el segmento $\overline{p_n x_n} \subseteq B_n$, para cada $n \geq N$. Definamos $M_n = ax_n \cup \overline{x_n p_n} \cup p_n y_n \cup y_n b$, donde ax_n y $y_n b$ son arcos contenidos en A. Notemos que, como $\{B_n\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$, se tiene que la sucesión $\{\overline{x_n p_n}\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$, de forma similar, la sucesión de arcos $\{p_n y_n\}_{n\geq N}$ converge a $\{p\}$, de tal forma que las sucesiones $\{x_n\}_{n\geq N}$ y $\{y_n\}_{n\geq N}$ convergen a p. Observemos que como A es suave en cada uno de sus puntos, en particular lo es en a y b, luego las sucesiones de arcos $\{ax_n\}_{n\geq N}$ y $\{y_n b\}_{n\geq N}$ convergen a los arcos ap y pb en A, respectivamente. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} ax_n \cup \lim_{n\to\infty} \overline{x_n p_n} \cup \lim_{n\to\infty} p_n y_n \cup \lim_{n\to\infty} y_n b = ap \cup \{p\} \cup \{p\} \cup pb = A.$$

De los subcasos (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3), y de forma análoga al caso (1), tenemos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por los casos (1) y (2) concluimos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

Definición 4.19. *Sea X un continuo. Diremos que X es un* **arco continuo**, *si todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.*

Teorema 4.20. *Sea X un arco continuo. El continuo X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley. Notemos que si X es un arco, entonces por el *Teorema 4.7* y el *Lema 4.9*, tenemos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Supongamos que X no es un arco. Sean $p \in X$, $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Si $A = \{p\}$, entonces consideramos $A_n = \{p_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que A es un arco. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que A_n es un arco para todos salvo una cantidad finita de n; así, X tiene la propiedad de Kelley por arcos.

Ahora, supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sean $p \in X$, $A \in C(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Como X es un arco continuo, tenemos que A es un arco o un singular o $A = X$. Si A es un singular, entonces consideramos $A_n = \{p_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $A = X$, entonces consideramos $A_n = X$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, si A es un arco, entonces por hipótesis existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, X tiene la propieda de Kelley. □

El *solenoide diádico* está definido en [25, 2.8], este continuo es un arco continuo con la propiedad de Kelley (véase [8, Teorema 3.4] y [9, Teorema 2]). Por otro lado, el continuo de Knaster es un arco continuo con la propiedad de Kelley (véase [8, Teorema 3.3] y [9, Teorema 2]).
Como una consecuencia del *Teorema 4.20* tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.21. *El arcoiris de Knaster y el solenoide diádico tienen la propiedad de Kelley por arcos.*

Proposición 4.22. *Sean X un continuo y $p \in X$. Sean $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p y $B \in cl_{C(X)}(Arcos(p, X))$. Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos en p, entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $B \in cl_{C(X)}(Arcos(p, X))$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p, existe una sucesión $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $Arcos(p, X)$ convergente a B. Para toda $k \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $\{B_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B_k tal que $B_n^k \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $N_k \in \mathbb{N}$, tal que $H(B_n^k, B_k) < \frac{1}{k}$, para cada $n \geq N_k$. Podemos suponer que $N_k < N_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue:

(1) $A_n = B_n^1$, para cada $n < N_1$.

(2) Sea $n \geq N_1$. Elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $N_k \leq n < N_{k+1}$. Así $H(B_n^k, B_k) < \frac{1}{k}$. Sea $A_n = B_n^k$. Observemos que $H(A_n, B_k) < \frac{1}{k}$.

Probaremos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B. Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a B, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $H(B_k, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $k \geq L$. Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{M} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $J = \text{máx}\{L, M\}$, se sigue que para todo $k \geq J$, $H(B_k, B) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como la sucesión $\{B_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B_k, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego $H(A_n, B_k) < \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, si $N_k \leq n < N_{k+1}$ y $k \geq J$.
Vamos a probar que $H(A_n, B) < \varepsilon$, para toda $n \geq N_J$. Sea $n \geq N_J$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N_k \leq n < N_{k+1}$. Probemos que $k \geq J$, de lo contrario, si $k < J$,

tenemos que $N_k < N_J$, luego $N_{k+1} \leq N_J$, así $n < N_J$, lo cual contradice que $n \geq N_J$. De donde $H(A_n, B_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B_k, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $H(A_n, B) \leq H(A_n, B_k) + H(B_k, B) < \varepsilon$. Concluimos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B. $\square$

Teorema 4.23. *Sean X un continuo y $p \in X$. El continuo X tiene la propiedad de Kelley por arcos en p si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier punto $q \in X$ con $d(p,q) < \delta$, y para cada $A \in Arcos(p,X)$, existe $B \in Arcos(q,X)$ con $H(A,B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos en p y que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda $\delta > 0$, existen $q \in X$ con $d(p,q) < \delta$ y $A \in Arcos(p,X)$ tal que para todo $B \in Arcos(q,X)$, $H(A,B) \geq \varepsilon$. Sean $\delta_n = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $p_n \in X$ con $d(p,p_n) < \delta_n$ y $A_n \in Arcos(p,X)$ tal que para todo $B \in Arcos(p_n,X)$ se tiene que $H(A_n,B) \geq \varepsilon$. Claramente la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p. Sea $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $D = \lim_{k\to\infty} A_{n_k}$. Por otro lado

$$\text{para todo } k \in \mathbb{N},\ H(A_{n_k}, B) \geq \varepsilon, \text{ para cada } B \in Arcos(p_{n_k}, X). \tag{4.1}$$

Como $D \in cl_{C(X)}(Arcos(p,X))$ y la sucesión $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a p, por la Proposición 4.22, existe una sucesión $\{B_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a D tal que $B_{n_k} \in Arcos(p_{n_k}, X)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a D, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_{n_k}, D) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $k \geq N_1$. De forma similar existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que $H(B_{n_k}, D) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $k \geq N_2$. Sea $K = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que $H(A_{n_K}, B_{n_K}) < \varepsilon$, lo cual contradice la Ecuación (4.1). Así queda probada la necesidad.

Sean $p \in X$, $A \in Arcos(p,X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Probaremos que existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, existe $\delta_k > 0$, tal que para cualquier punto $q \in X$ con $d(p,q) < \delta_k$, existe $B \in Arcos(q,X)$ con $H(A,B) < \varepsilon_k$. Por otro lado, como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, como $\delta_k > 0$, existe $N_k \in \mathbb{N}$, tal que $d(p_n, p) < \delta_k$, para cada $n \geq N_k$. Podemos suponer que $N_k < N_{k+1}$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue:

(1) $A_n = \{p_n\}$, para cada $n < N_1$.

(2) Si $n \geq N_1$, elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $N_k \leq n < N_{k+1}$. Así $d(p_n, p) < \delta_k$, elegimos $A_n \in Arcos(p_n, X)$ con $H(A, A_n) < \varepsilon_k$.

Probaremos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A. Sea $\varepsilon > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_j < \varepsilon$. Tomemos $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \varepsilon_j < \varepsilon$, para toda $N_j \leq n < N_{j+1}$. Además, para cualquier $i \geq j$, tenemos que $\varepsilon_i \leq \varepsilon_j$, luego $H(A, A_n) < \varepsilon_i \leq \varepsilon_j < \varepsilon$, así $H(A, A_n) < \varepsilon$, para cada $n \geq N_j$, concluimos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por arcos en p. $\square$

Definición 4.24. *Sean (X,d) un espacio métrico, $\mathcal{H}(X)$ el grupo de homeomorfismos de X en X. Diremos que X tiene la* **Propiedad de Effros** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ y $d(x,y) < \delta$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(x) = y$ y $d(z, h(z)) < \varepsilon$, para cada $z \in X$. Un homeomorfismo $h \in \mathcal{H}(X)$ que satisface que $d(z, h(z)) < \varepsilon$, para cada $z \in X$ será llamado ε-homeomorfismo.*

Definición 4.25. *Un continuo X es* **homogéneo** *probando que para cualquier par de puntos x y y de X, existe $h : X \to X$ un homeomorfismo tal que $h(x) = y$.*

Teorema 4.26. *[22, Theorem 4.2.31] Sea X un continuo. Si X es homogéneo, entonces X tiene la propiedad de Effros.*

Teorema 4.27. *Sea X un continuo. Si X es homogéneo, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por el *Teorema 4.26*, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in X$ con $d(p,q) < \delta$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(p) = q$ y $d(z, h(z)) < \varepsilon$, para cada $z \in X$. Sea $A \in Arcos(p, X)$, notemos que $h(A) \in Arcos(q, X)$. Más aún, $H(A, h(A)) < \varepsilon$ ya que $d(a, h(a)) < \varepsilon$, para cada $a \in A$. Por lo tanto, por el *Teorema 4.23*, concluimos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

4.2 La propiedad de Kelley por arcos en dendroides

En esta sección estudiamos la propiedad de Kelley por arcos en dendroides, mostramos que el arco es el único dendroide que tiene la propiedad de Kelley por arcos.

Teorema 4.28. *Sea X un dendroide. Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces para cualesquiera dos puntos x y y de X de conexidad local, el arco $A = xy$ no contiene puntos de ramificación en $A \setminus \{x, y\}$.*

Demostración. Hagamos esta prueba por contradicción, supongamos que existen dos puntos de conexidad local de X, x_1 y x_2 tales que el arco $A = x_1x_2$ y $A \setminus \{x_1, x_2\}$ contiene un punto de ramificación, dígamos p. Como p es punto de ramificación de X, existen C_1, C_2 y C_3 arco componentes de $X \setminus \{p\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $x_1 \in C_1$ y $x_2 \in C_2$. Consideramos una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p tal que $p_n \in C_3$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sean U_1 y U_2 abiertos en X tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$, como x_1 y x_2 son puntos de conexidad local, existen abiertos y conexos en X, V_1 y V_2 tales que $x_1 \in V_1 \subseteq U_1$ y $x_2 \in V_2 \subseteq U_2$. Observemos que $V_1 \subseteq C_1$ y $V_2 \subseteq C_2$. Por otro lado, como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap V_1 \neq \emptyset$ y $A_n \cap V_2 \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$.

Afirmación 4.28.1. *Para toda $n \geq N$, $p \in A_n$.*

Prueba de la Afirmación 4.28.1. Sean $a_{1n} \in A_n \cap V_1$ y $a_{2n} \in A_n \cap V_2$, para cada $n \geq N$. Luego, A_n es un conjunto conexo que contiene a los puntos a_{1n} y a_{2n}, para cada $n \geq N$. Note que $C_1 \neq C_2$, $A_n \cap C_1 = \emptyset$ y $A_n \cap C_3 \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. De aquí tenemos que $p \in A_n$, para cada $n \geq N$. Así queda demostrada la Afirmación 4.28.1.

Finalmente, A_n es un arco que intersecta a tres componentes distintas de $X \setminus \{p\}$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $A \setminus \{x_1, x_2\}$ no contiene puntos de ramificación. $\square$

El recíproco del *Teorema 4.28* no se cumple, para ello veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.29. *Sean $p = (0,0)$ y $q = (1,0)$ en $\mathbb{R}^2$. Sea A el segmento de recta que une a p con q. Sea B el segmento de recta que une al punto $(-1,1)$ con el punto $(-1,-1)$; y el segmento de recta D que une al punto $(2,1)$ con el punto $(2,-1)$. Consideramos el conjunto de Cantor de tercio medio tanto en B como en D, los cuales llamamos $\mathcal{C}_1 \subseteq B$ y $\mathcal{C}_2 \subseteq D$. Para cada $b \in \mathcal{C}_1$, consideremos el segmento de recta $b+t(p-b)$, con $t \in [0,1]$; y para cada $d \in \mathcal{C}_2$, consideramos el segmento de recta $d + t(q-d)$, con $t \in [0,1]$. Obtenemos el dendroide de la Figura 4.1.*

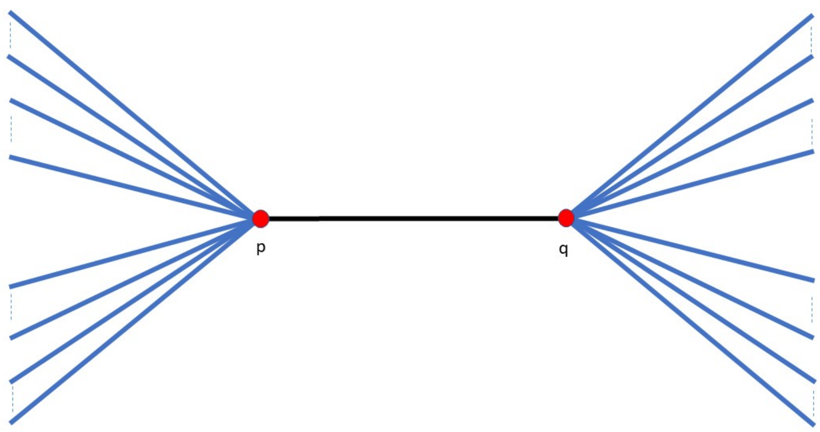

Figura 4.1: Dendroide

Observemos que A contiene todos los puntos de conexidad local de X. Veamos que X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. Consideremos los punto $b_1 = (-1,1)$ y $b_2 = (-1,-1)$, sean $B_1 = b_1p$ y $B_2 = b_2p$. Sea $M = B_1 \cup B_2$, claramente $M \in Arcos(p, X)$. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p tal que $p_n \in A \setminus \{p\}$, para $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos, así existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a M tal que $M_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Observemos que $B(b_1, \varepsilon) \cap B(b_2, \varepsilon) = \emptyset$, $p \notin B(b_1, \varepsilon)$ y $p \notin B(b_2, \varepsilon)$. Como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n \cap B(b_1, \varepsilon) \neq \emptyset$ y $M_n \cap B(b_2, \varepsilon) \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Así, M_n intersecta a tres arco componentes distintas de p en $X \setminus \{p\}$, lo cual es una contradicción. Concluimos que X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.

A continuación damos algunos resultados para dendroides respecto a la *propiedad de Kelley por arcos*.

Lema 4.30. *Sean X un árbol y $p \in X$. Si $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es el conjunto de puntos extremos de X, entonces $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ donde $A_i = x_i p$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Demostración. Es claro que $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \subseteq X$. Sea $x \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_m, p\}$. Como X no es punto extremo de X, entonces existen $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_p$ componentes de $X \setminus \{x\}$ tal que $\mathcal{U}_p$ es la componente de p en $X \setminus \{x\}$. Notemos que $\mathcal{U}_1 \cap \{x_1, \ldots, x_m\} \neq \emptyset$, así existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x_j \in \mathcal{U}_1$. Consideramos los arcos $x_j x$ y xp. Como X es únicamente arco conexo, $A_j = x_j p = x_j x \cup xp$, se sigue que $x \in A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Lo cual prueba que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. □

Lema 4.31. *Sean X un dendroide, $n \in \mathbb{N}$ y $p \in X$. Si $A_1, \ldots, A_n$ son arcos en X tales que $p \in A_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es un árbol.*

Demostración. Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Note que Y es un subcontinuo de X, así Y es un dendroide. Además Y es localmente conexo. Luego Y es una dendrita. Por [25, Ejercicio 10.48] Y es un árbol. □

Lema 4.32. *Sean X un dendroide, $p \in X$, K un árbol en X tal que $p \in K$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p. Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos en p, entonces existe $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a K tal que K_n es árbol y $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_m$ los puntos extremos de K. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea $A_i = x_i p$. Por el *Lema 4.30*, $K = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Por otro lado, $A_i \in Arcos(p, X)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dado que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p y X tiene la propiedad de Kelley por arcos, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe una sucesión $\{A_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A_i tal que $A_n^i \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = \bigcup_{i=1}^{m} A_n^i$. Por el *Lema 4.31*, K_n es un árbol, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty}(\bigcup_{i=1}^{m} A_n^i) = \bigcup_{i=1}^{m}(\lim_{n\to\infty} A_n^i) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = K$. □

Teorema 4.33. *Sea X un dendroide. Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sean $p \in X$, $Y \in C(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p. Probaremos que, existe una sucesión $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a Y tal que $Y_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4.33.1. *Existe una sucesión $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a Y tal que $p \in K_j$ y K_j es un árbol, para cada $j \in \mathbb{N}$.*

Prueba de la Afirmación 4.33.1. Note que existe un conjunto denso $\{k_j : j \in \mathbb{N}\}$ en Y. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $K_j = \bigcup_{i=1}^{j} pk_i$. Por el L*ema 4.31*, K_j es un árbol, para cada $j \in \mathbb{N}$. Observemos que $Y = cl_X(\{k_j : j \in \mathbb{N}\}) \subseteq cl_X(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) \subseteq Y$, luego $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a Y, con lo que queda demostrada la Afirmación 4.33.1.

Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos en p, por el *Lema 4.32*, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $\{K_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a K_j tal que K_n^j es un árbol y $p_n \in K_n^j$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{K_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a K_j, existe $R_j \in \mathbb{N}$ tal que $H(K_n^j, K_j) < \frac{1}{j}$, para cada $n \geq R_j$. Podemos suponer que $R_j < R_{j+1}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida como sigue

(1) Si $n < R_1$, sea $Y_n = K_n^1$.

(2) Si $n \geq R_1$, elegimos $j \in \mathbb{N}$ tal que $R_j \leq n < R_{j+1}$. Sea $Y_n = K_n^j$.

Probaremos que la sucesión $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y. Sea $\varepsilon > 0$, como $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a Y, existe $L \in \mathbb{N}$ con $L > \frac{\varepsilon}{2}$ tal que $H(K_j, Y) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $j \geq L$. Sea $n \geq R_L$, existe $j \in \mathbb{N}$ con $j \geq L$ tal que $R_j \leq n < R_{j+1}$. Así, $H(K_n^j, K_j) < \frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Se sigue que $H(K_n^j, Y) \leq H(K_n^j, K_j) + H(K_j, Y) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y. □

Una propiedad importante en dendroides es la de ser suave, la cual recordamos a continuación.

Definición 4.34. *Sea X un dendroide. Diremos que X es* **suave** *si existe $s \in X$ tal que para cada sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X con $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} sx_n = sx$.*

Corolario 4.35. *Sea X un dendroide. Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X es suave.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del *Teorema 4.33*. $\square$

Es de nuestro interés saber si los dendroides tienen la propiedad de Kelley por arcos, por ello analizamos el siguiente resultado.

Proposición 4.36. *Sea X un dendroide con la propiedad de Kelley por arcos tal que $R(X) \neq \emptyset$. Si $R(X)$ tiene un punto aislado r, entonces X es localmente arco conexo en r.*

Demostración. Sea r el punto aislado de $R(X)$. Supongamos que X no es localmente arco conexo en r, existe U un abierto en X con $r \in U$ tal que para cada abierto V con $r \in V \subseteq U$ se tiene que V no es arco conexo. Consideremos $V_0 = U$. Podemos suponer que U no tiene más puntos de ramificación, distintos de r. Sea C la arco componente de U que contiene a r.

Afirmación 4.36.1. *$int(C) = \emptyset$.*

Prueba de la Afirmación 4.36.1. Por contradicción, supongamos que $int(C) \neq \emptyset$, es decir, existe $t \in int(C)$. Por otro lado, como $C \subsetneq U$, tenemos que C no es abierto en X, luego existe $t' \in C \setminus int(C)$. Note que $t, t' \in C$, se sigue que $tt' \subseteq C$. Como $t' \in C \setminus int(C)$, sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a t' tal que $t_n \in U \setminus C$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente al arco tt' tal que $T_n \in Arcos(t_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $t \in int(C)$, como $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco tt', existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T_n \cap int(C) \neq \emptyset$ y $T_n \in \langle U \rangle$, para cada $n \geq N$. Ahora, como $T_N \cap int(C) \neq \emptyset$, entonces $T_N \cap C \neq \emptyset$ y dado que $T_N \subseteq U$, además de que C es arco componente de U, se sigue que $T_N \subseteq C$, luego $t_N \in C$ y $t_N \in U \setminus C$, lo cual es una contradicción a la elección t_N. De esta forma queda demostrada la Afirmación 4.36.1.

Por otro lado, como $r \in R(X)$, sean A, B y D tres arcos que forman un triodo simple libre con vértice r y además $A \cup B \cup D \subseteq U$. Dado que $int(C) = \emptyset$ y $r \in C$. Sea $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a r tal que $r_n \in U \setminus C$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existen sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes a A, B y D, respectivamente, tales que $A_n, B_n, D_n \in Arcos(r_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $A_n, B_n, D_n \subseteq U$, para cada $n \geq N$. Observemos que, como $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, $A_n \cap D_n \neq \emptyset$ y $B_n \cap D_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$, se tiene que cada una de dichas intersecciones es no degenerada, ya que de lo contrario, tendríamos que $r_n \in R(X)$, para cada $n \geq N$, lo cual contradice la elección de U. Dado que X es hereditariamente unicoherente, se sigue que cada una de las intersecciones $A_n \cap B_n$, $A_n \cap D_n$ y $B_n \cap D_n$ es un arco, para cada $n \geq N$. Luego, $A_n \cup B_n \cup D_n$ es un arco y la unión de dos de ellos contiene al tercero, para cada $n \geq N$. Podemos considerar una subsucesión $\{D_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $D_{n_k} \subseteq A_{n_k} \cup B_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$D = \lim_{k\to\infty} D_{n_k} \subseteq \lim_{k\to\infty} A_{n_k} \cup \lim_{k\to\infty} B_{n_k} = A \cup B.$$

Lo cual contradice la elección de D. Concluimos que r es un punto de arco conexidad local de X. $\square$

Tenemos el siguiente resultado para los dendroides llamados **abanicos** los cuáles contienen un único punto de ramificación.

Teorema 4.37. *Si X es un abanico, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que X es un abanico con la propiedad de Kelley por arcos. Sea r el punto de ramificación de X, se sabe que $X = \bigcup_{e \in E(X)} er$. Sean $A = re_1$, $B = re_2$ y $C = re_3$, con $e_1, e_2, e_3 \in E(X)$. Sean $M = A \cup B$ y $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a r tal que $r_n \in C \setminus \{r\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a M tal que $M_n \in Arcos(r_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean U_1 y U_2 abiertos en X tales que $e_1 \in U1$, $e_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cap C = \emptyset$ y $U_2 \cap C = \emptyset$. Como la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n \cap U_1 \neq \emptyset$ y $M_n \cap U_2 \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$.

Afirmación 4.37.1. *$r \in M_n$, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 4.37.1. Supongamos que existe $k \geq N$, tal que $r \notin M_k$. Como $r_k \in M_k$ y $M_k \subseteq X \setminus \{r\}$, se sigue que M_k está contenido en la arco componente de $X \setminus \{r\}$ que contiene a r_k, así $M_k \subseteq C \setminus \{r\}$, lo cual contradice que $U_1 \cap C = \emptyset$. Así queda demostrada la Afirmación 4.37.1.

Como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, existen sucesiones $\{a_n\}_{n\geq N}$ y $\{b_n\}_{n\geq N}$ convergentes a e_1 y e_2, respectivamente, tales que $a_n, b_n \in M_n$, $a_n \in U_1$ y $b_n \in U_2$, para cada $n \geq N$.

Afirmación 4.37.2. *Los puntos a_n y b_n están en la misma arco componente de $X \setminus \{r\}$, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 4.37.2. Como $r \in M_n$, para cada $n \geq N$, existen K_n y L_n arcos en M_n tales que $M_n = K_n \cup L_n$ y $K_n \cap L_n = \{r\}$, para cada $n \geq N$. Luego, como $r_n \in M_n$, para cada $n \geq N$, se sigue que $r_n \in K_n$ o $r_n \in L_n$, para cada $n \geq N$. Sin perder generalidad, supongamos que $r_n \in K_n$, así $K_n \subseteq C$, por lo que $a_n, b_n \in L_n \setminus \{r\}$, luego $a_n b_n \subseteq L_n \setminus \{r\}$. Por lo tanto, a_n y b_n están en la misma arco componente de $X \setminus \{r\}$, para cada $n \geq N$. Así queda demostrada la Afirmación 4.37.2.

Como $a_n b_n \subseteq M_n$, para cada $n \geq N$ y $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, existe una subsucesión$\{a_{n_k} b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} \subseteq M$. Además como $e_1, e_2 \in \lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k}$, se sigue que $M = e_1 e_2 \subseteq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k}$, luego, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} = M$. Sea $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a r tal que $q_{n_k} \in a_{n_k} b_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, consideremos V un abierto en X tal que $r \in V$ y $e_1, e_2, e_3 \notin V$. Por la *Proposición 4.36*, existe V_0 abierto arco conexo tal que $r \in V_0 \subseteq V$. Por otro lado como la sucesión $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a r, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $q_{n_k} \in V_0$, para cada $k \geq L$. Como V_0 es arco conexo, se sigue que el arco $q_{n_k} r \subseteq V_0$, para cada $k \geq L$. Observemos que $a_{n_k} \in q_{n_k} r$ o $b_{n_k} \in q_{n_k} r$, para cada $k \geq L$, sin perder generalidad supongamos que $b_{n_k} \in q_{n_k}r$, para cada $k \geq L$. Se sigue que $e_2 \in V_0$, lo cual es una contradicción a la elección de V_0. Concluimos que X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

Lema 4.38. *Sean X un dendroide y $r \in R(X)$. Si U es un abierto tal que $U \cap R(X) = \{r\}$, entonces para cualesquiera x y y en la misma arco componente de $U \setminus \{r\}$ se tiene que los arcos xr y yr son comparables.*

Demostración. Sea $a(x)$ la arco componente de x en $U \setminus \{r\}$. Como y está en la misma arco componente de $U \setminus \{r\}$, tenemos que $y \in a(x)$, así el arco $xy \subseteq a(x) \subseteq U \setminus r$. Consideremos el arco yr, como X es hereditariamente unicoherente y $xr \cap xy \neq \emptyset$, se sigue que $xr \cap xy$ es un singular o un arco contenido en U. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. $xr \cap xy$ es un singular. En este caso, tenemos que $xr \cap xy = \{x\}$, luego, como X es únicamente arco conexo, se sigue que $yr = xr \cup xy$ y así $xr \subseteq yr$.

Caso 2. $xr \cap xy$ es un arco. Probaremos que $xr \cap xy = xy$, supongamos lo contrario, es decir, existe $z \in xr \cap xy$ distinto de r, x e y tal que $xr \cap xy = xz$. Observemos que $xr = xz \cup zr$ y $xy = xz \cup zy$, como $zr \cap zy = \{z\}$, se sigue que xz, zr y zy forman un triodo simple con vértice z contenido en U. Como $U \cap R(X) = \{r\}$, se sigue que $z = r$, así $r \in a(x) \subseteq U \setminus \{r\}$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $xr \cap xy = xy$, así $y \in xr$, luego $yr \subseteq xr$. $\square$

Proposición 4.39. *Sea X un dendroide tal que $R(X) \neq \emptyset$. Si X contiene un punto de ramificación aislado de $R(X)$, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Hagamos la prueba por contradicción, supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sea $r \in R(X)$ aislado de $R(X)$, así existe U un abierto en X tal que $U \cap R(X) = \{r\}$. Por otro lado, ya que $r \in R(X)$, existe $T = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ tal que $A_i \cap A_j = \{r\}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $T \subseteq U$. Sea $a_i \in A_i$ el punto extremo de A_i distinto de r, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Sea $M = A_1 \cup A_2$, sea $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a r tal que $r_n \in A_3 \setminus \{r\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a M tal que $M_n \in Arcos(r_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $a_1, a_2 \in U$ y A_3 es un cerrado, existen abiertos U_1 y U_2 tales que:

(1) $a_1 \in U_1$ y $a_2 \in U_2$.

(2) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(3) $U_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $U_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Dado que la sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a M existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n \in \langle U \rangle$, $M_n \cap U_1 \neq \emptyset$ y $M_n \cap U_2 \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$.

Afirmación 4.39.1. *Existe $k \geq N$, tal que $r \in M_n$, para cada $n \geq k$.*

Prueba de la Afirmación 4.39.1. Supongamos lo contrario, para todo $n \geq N$, $r \in M_n$. Como X es hereditariamente unicoherente, tenemos que $M_n \cap A_3$ es un subcontinuo de X. Como M_n y A_3 están contenidos en U, se sigue que M_n y A_3 no contienen puntos de ramificación distintos de r, luego $M_n \cap A_3$ es un arco, para cada $n \geq N$, así $M_n \cup A_3$ es un arco, para cada $n \geq N$. Se sigue que $a_3 \in M_n \cap A_3$, para cada $n \geq N$, luego $a_3 \in M_n$, para cada $n \geq N$, y así $a_3 \in M$, lo cual es una contradicción, por lo tanto existe $k \geq N$, tal que $r \in M_n$, para cada $n \geq k$. Con lo que queda demostrada la Afirmación 4.39.1.

Como $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M, existen subsucesiones $\{b_n\}_{n\geq k}$ y $\{c_n\}_{n\geq k}$ convergentes a a_1 y a_2, respectivamente, tales que $b_n \in U_1$ y $c_n \in U_2$, para cada $n \geq k$.

Afirmación 4.39.2. *Existe $k_1 \geq k$ tal que r no es punto extremo de M_n, para cada $n \geq k_1$.*

Prueba de la Afirmación 4.39.2. Supongamos lo contrario, es decir, que r es un punto extremo de M_n, para cada $n \geq N$. Luego, $r, r_n \in M_n \cap A_3$, para cada $n \geq k$ y U no contiene puntos de ramificación distintos de r. Por el *Lema 4.38*, M_n y A_3 son comparables, para cada $n \geq k$. Por otro lado, como $M_n \cap U_1 \neq \emptyset$ y $M_n \cap U_2 \neq \emptyset$, para cada $n \geq k$, tenemos que $A_3 \subseteq M_n$, para cada $n \geq k$, se sigue que $A_3 \subseteq M$ lo cual es una contradicción. Así, existe $k_1 \geq k$ tal que r no es punto extremo de M_n, para cada $n \geq k_1$, con lo que queda demostrada la Afirmación 4.39.2.

Afirmación 4.39.3. *Existe $k_2 \geq k_1$ tal que $c_n b_n \subseteq U \setminus \{r\}$, para cada $n \geq k_2$.*

Prueba de la Afirmación 4.39.3. Supongamos que $r \in c_n b_n$, para cada $n \geq k_1$. Más aún, r no es punto extremo del arco $c_n b_n$, para cada $n \geq k_1$, así c_n y b_n no están en la misma arco componente de $U \setminus \{r\}$, luego, c_n está en la misma arco componente de r_n en $U \setminus \{r\}$ o b_n está en la misma arco componente de r_n en $U \setminus \{r\}$, para cada $n \geq k_1$. Sin perder generalidad, supongamos que c_n está en la misma arco componente de r_n en $U \setminus \{r\}$, para cada $n \geq k_1$. Así por la *Afirmación 4.39.2*, tenemos que $c_n r$ y A_3 son comparables, para cada $n \geq k_1$, es decir, $c_n r \subseteq A_3$ o $A_3 \subseteq c_n r$, para cada $n \geq k_1$. Si $c_n r \subseteq A_3$, para cada $n \geq k_1$, entonces $c_n \in A_3$, lo cual contradice la elección de c_n, para cada $n \geq k_1$. Por otro lado, si $A_3 \subseteq c_n r$, para cada $n \geq k_1$, se sigue que $A_3 \subseteq M$, lo cual es una contradicción a la elección de M. Por lo tanto, existe $k_2 \geq k_1$ tal que $c_n b_n \subseteq U \setminus \{r\}$, para cada $n \geq k_2$. Así queda demostrada la Afirmación 4.39.3.

Observemos que $c_n b_n \subseteq M_n$, para cada $n \geq k_2$, luego $\lim_{n\to\infty} c_n b_n \subseteq M$. Por otro lado, por [6, Corolario 1], $M = a_1 a_2 \subseteq \liminf c_n b_n = \lim_{n\to\infty} c_n b_n$, por lo que $\lim_{n\to\infty} c_n b_n = M$. Sea $\{q_n\}_{n\geq k_2}$ sucesión convergente a r tal que $q_n \in c_n b_n$, para cada $n \geq k_2$. Por la *Proposición 4.36*, sabemos que X es localmente arco conexo en r, así existe V_0 abierto y arco conexo tal que $r \in V_0 \subseteq U \setminus \{a_1, a_2\}$. Luego, como $\{q_n\}_{n\geq k_2}$ converge a r, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \in V_0$, para cada $n \geq N_1$. Como V_0 es arco conexo, se sigue que $q_n r \subseteq V_0$, para cada $n \geq N_1$.

Note que $c_n \in q_n r$ o $b_n \in q_n r$, para cada $n \geq N_1$, así $a_1 \in V_0$ o $a_2 \in V_0$, lo cual es una contradicción, concluimos que X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. □

Lema 4.40. *Sea X un dendroide. Si X es suave en $s \in X$, entonces X es localmente arco conexo en s.*

Demostración. Sea $s \in X$ tal que X es suave en s. Sea U un abierto en X tal que $s \in U$. Sea V la arco componente de U que contiene a s. Probaremos que V es un conjunto abierto en X. Sea $q \in V$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a q. Como $s, q \in V$, tenemos que $sq \subset V \subset U$. Por otro lado, como X es suave en s, se sigue que $\lim_{n\to\infty} sq_n = sq$. Así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $sq_n \subset U$, para cada $n \geq N$. Luego, como V es la arco componente de U que contiene a s se sigue que $q_n \in V$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que V es un conjunto abierto. Por lo tanto, X es localmente arco conexo en s. □

De los artículos [7] y [18] sabemos que se puede definir un orden parcial sobre los dendroides, adaptamos este concepto considerando dendroides suaves de la siguiente forma:

Definición 4.41. *Sea X un dendroide suave en $s \in X$, definimos una relación $\leq_s$ en X de la siguiente forma, para $x, y \in X$, diremos que $x \leq_s y$, si $x \in sy$. Diremos que $x <_s y$, si $x \leq_s y$ y $x \neq y$. Además, diremos que x y y son comparables en X si $x \leq_s y$ o $y \leq_s x$.*

Tenemos los siguientes resultados conocidos.

Lema 4.42. *Si X es un dendroide suave en $s \in X$, entonces $\leq_s$ es un orden parcial.*

Demostración. Sean $x, y, z \in X$.

(1) La relación $\leq_s$ es reflexiva: como $x \in sx$, se tiene que $x \leq_s x$.

(2) La relación $\leq_s$ es antisimétrica: Supongamos que $x \leq_s y$ y $y \leq_s x$. Como $x \in sy$ y $y \in sx$ tenemos que $sx \subseteq sy$ y $sy \subseteq sx$. Luego $sx = sy$ y así $x = y$.

(3) La relación $\leq_s$ es transitiva: Supongamos que $x \leq_s y$ y $y \leq_s z$. Tenemos que $x \in sy$ y $y \in sz$. Además $x \in sy \subseteq sz$, por lo tanto $x \leq_s z$.

Por lo tanto, la relación $\leq_s$ es un orden parcial. □

De ahora en adelante, dado un dendroide X suave en $s \in X$ la notación $\leq_s$ denotará un orden parcial en X respecto del punto s.

Lema 4.43. *Sean X un dendroide suave en $s \in X$ y $x, y \in X$. Si $x \leq_s y$, entonces para cada $z \in xy$, $x \leq_s z \leq_s y$.*

Demostración. Sea $z \in xy$. Como $x \leq_s y$, se tiene que $x \in sy$. Luego, $xy \subseteq sy$ y así $z \in sy$, por lo que $z \leq_s y$. Para probar que $x \leq_s y$, veamos que $sz = sx \cup xz$. Como sy es un arco y $x \in sy$, se tiene que $sy = sx \cup xy$. Por otro lado $z \in xy$, de aquí se sigue que $xz \subseteq xy$. Notemos que $sx \cap sx = \{x\}$. Luego, $sx \cup xz$ es un arco en X con puntos extremos s y z. Como X es un dendroide $sz = sx \cup xz$. Por lo tanto $x \in sz$ y así $x \leq_s z$. □

Lema 4.44. *Sean X un dendroide suave en $s \in X$ y $x, y \in X$. Si $x \leq_s y$, entonces para cada $w, z \in xy$, w y z son comparables.*

Demostración. Como $w \in xy$, por el *Lema 4.43* tenemos que $x \leq_s w \leq_s y$, además tenemos que $xy = xw \cup wy$. Como $z \in xy$ se tiene que $z \in xw$ o $z \in wy$. Si $z \in xw$, entonces por el *Lema 4.43*, se tiene que $x \leq_s z \leq_s w$, así $z \leq_s w$. Ahora, si $z \in wy$, entonces por el *Lema 4.43*, se tiene que $w \leq_s z \leq_s y$, así $w \leq_s z$. Por lo tanto, w y z son comparables. □

Definición 4.45. *Sean X un dendroide suave en $s \in X$ y A un arco en X con puntos extremos a y b. Diremos que A tiene* **doblez en** $x \in X$*, si $x \in A$, $x <_s a$ y $x <_s b$.*

Observación 4.46. *Si A tiene doblez en x, entonces x no es punto extremo de A.*

Lema 4.47. *Sean X un dendroide suave, A un arco en X y $x, y \in X$. Si x y y son puntos de doblez de A, entonces $x = y$.*

Demostración. Sea $s \in X$ punto de suavidad de X. Sean a y b puntos extremos de A. Como $x \in A$ tenemos que $A = ax \cup xb$. Por otro lado, $y \in A$, así $y \in ax$ o $y \in xb$. Sin perder generalidad, supongamos que $y \in ax$. Por el *Lema 4.43*, se tiene que $x \leq_s y \leq_s a$. Como $y \in A$, se tiene que $A = ay \cup yb$, así $x \in ay$ o $x \in yb$. Si $x \in ay$, entonces por el *Lema 4.43*, $y \leq_s x \leq_s a$. Como $x \leq_s y$ y $y \leq_s x$ implica que $x = y$. Si $x \in yb$, entonces por el *Lema 4.43* $y \leq_s x \leq_s b$. Como $x \leq_s y$ y $y \leq_s x$ implica que $x = y$. □

Lema 4.48. *Sean X un dendroide suave en $s \in X$ y A un arco en X con puntos extremos a y b. Entonces a y b no son comparables respecto de $\leq_s$ si y sólo si A tiene doblez.*

Demostración. Supongamos que a y b no son comparables respecto de $\leq_s$. Como X es un dendroide tenemos que $sa \cap sb$ es un arco o es $\{s\}$. Si $sa \cap sb = \{s\}$, entonces consideremos $d = s$. Si $sa \cap sb$ es un arco, entonces d es el punto extremo de $sa \cap sb$ distinto de s. En cualquiera de los dos casos $ab = ad \cup db$. Se tiene que $d \in A$. Probemos que $d <_s a$ y $d <_s b$. Notemos que $d \in sa$ y $d \in sb$, así $d \leq_s a$ y $d \leq_s b$. Si $d = a$, entonces $a \in sb$ y así a y b son comparables, lo cual es una contradicción, concluimos que $d \neq a$. De forma similar se prueba que $d \neq b$. Luego $d <_s a$ y $d <_s b$. Por lo tanto, A tiene doblez en d. Ahora supongamos que A tiene doblez, así por el *Lema 4.43*, a y b no son comparables respecto de $\leq_s$. □

Lema 4.49. *Sea X un dendroide suave. Sean A y B arcos en X con $A \subseteq B$. Si A tiene doblez en x, entonces B tiene doblez en x.*

Demostración. Sea $s \in X$ punto de suavidad de X. Sean a y b los puntos extremos de A, por el *Lema 4.48*, a y b no son comparables en X respecto de $\leq_s$. Sean c y d los puntos extremos de B, supongamos que c y d son comparables, luego $c \leq_s d$ o $d \leq_s c$. Sin perder generalidad, supongamos que $c \leq_s d$, como $a, b \in cd$, por el *Lema 4.44*, a y b son comparables respecto de $\leq_s$, lo cual es una contradicción, concluimos que c y d no son comparables respecto de $\leq_s$.

Como $sc \cup sd$ es un dendroide tenemos que $B = cd \subset sc \cup sd$, así $a, b \subset sc \cup sd$, se sigue que $a \in sc$ o $a \in sd$ y $b \in sc$ o $b \in sd$. Sin perder generalidad, supongamos que $a \in sc$, por el *Lema 4.44*, se tiene que $b \notin sc$, así $b \in sd$. Note que $a \leq_s c$ y $b \leq_s d$. Como A tiene doblez en x, $x <_s a$ y $x <_s b$, luego $x <_s c$ y $x <_s d$. Por otro lado, como $A \subset B$, se sigue que $x \in B$. Por lo tanto B tiene doblez en x. □

Lema 4.50. *Sea X un dendroide suave en $s \in X$. Sea A un arco en X con doblez y con puntos extremos a y b. Si $z \in X$ y $a \leq_s z$, entonces $A \subset bz$.*

Demostración. Sea $z \in X$ que satisface $a \leq_s z$. Notemos que $\{a\} \subset A \cap az$. Probaremos que $A \cap az = \{a\}$. Sea $x \in A \cap az$. Como $x \in az$, por el *Lema 4.43*, $a \leq_s x \leq_s z$. Sea $d \in X$ punto de doblez de A. Como $d \in A$ tenemos que $A = ad \cup db$. Si $x \in db$, entonces por el *Lema 4.43*, tenemos que $d \leq_s x \leq_s b$. Como $d <_s a$, se sigue que $d <_s a \leq_s x \leq_s b$, así a y b son comparables, lo cual contradice el *Lema 4.48*. Concluimos que $x \notin bd$. Luego $x \in ad$, entonces por el *Lema 4.43*, $d \leq_s x \leq_s a$. Se tiene que $a \leq_s x$ y $x \leq_s a$, así $x = a$. Por lo tanto, $A \cap az = \{a\}$. Como A y az son arcos cuya intersección es un punto extremo de ambos, se sigue que $A \cup az = bz$. Por lo tanto, $A \subset bz$. □

Lema 4.51. *Sea X un dendroide suave en $s \in X$. Si $x \in X$ no es punto extremo de X, entonces existe $y \in X$ tal que $x <_s y$.*

Demostración. Sea $x \in X$ no es punto extremo de X. Sea M un arco en X tal que x no es punto extremo de M. Sean a y b los puntos extremos de M. Tenemos dos casos:

Caso I. a y b no son comparables respecto de $\leq_s$.
Por el *Lema 4.48*, M tiene doblez en un punto $d \in M$. Como $d \in M$, se sigue que $M = ad \cup db$. Como $x \in M$ tenemos que $x \in ad$ o $x \in db$. Sin perder generalidad, supongamos que $x \in ad$, como $d <_s a$, por el *Lema 4.43*, $d \leq_s x \leq_s a$. Como x no es punto extremo de M y a es punto extremo de M tenemos que $x \neq a$, así $x <_s a$. Basta tomar $y = a$.

Caso II. a y b son comparables respecto de $\leq_s$.
Sin perder generalidad, supongamos que $a \leq_s b$. Como $x \in M$, por el *Lema 4.43*, $a \leq_s x \leq_s b$. Como x no es punto extremo de M y b es punto extremo de M tenemos que $b \neq x$, así $x <_s b$. Basta tomar $y = b$.
Por lo tanto, existe $y \in X$ tal que $x <_s y$. □

Teorema 4.52. *Sea X un dendroide. Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X tiene conjunto de puntos extremos cerrado.*

Demostración. Buscando una contradicción, supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos y tiene conjunto de puntos extremos no cerrado. Por el *Teorema 4.33*, X tiene la propiedad de Kelley, así por [10, Corollary 5] X es suave. Sea $s \in X$ punto de suavidad de X. Como X tiene conjunto de puntos extremos no cerrado, existe $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $E(X)$ convergente a $p \in X \setminus E(X)$.

Para probar el teorema consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. Existe $x \in X$ tal que p y x no son comparables respecto de $\leq_s$.

Por el *Lema 4.51*, existe $y \in X$ tal que $p <_s y$. Como p y x no son comparables, por el *Lema 4.48*, el arco px tiene doblez. Por el *Lema 4.50*, se tiene que $px \subset xy$. Sea $A = xy$, note que $p \in A$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(e_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes a x y y, respectivamente, tales que $x_n, y_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como e_n es punto extremo de A_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $e_nx_n \subset e_ny_n$ o $e_ny_n \subset e_nx_n$. Supongamos que existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathbb{N}$ tal que $e_{n_k}x_{n_k} \subset e_{n_k}y_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $sy_{n_k} \cup se_{n_k}$ es un subcontinuo de X y $e_{n_k}, y_{n_k} \in sy_{n_k} \cup se_{n_k}$, así $e_{n_k}y_{n_k} \subset sy_{n_k} \cup se_{n_k}$, luego $x_{n_k} \in sy_{n_k} \cup se_{n_k}$. Se sigue que $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in \lim\limits_{k\to\infty} sy_{n_k} \cup se_{n_k} = sy \cup sp = sy$. Luego, $x \in sy$, tenemos que $x \in sp$ o $x \in py$. Si $x \in sp$, entonces x y p son comparables, lo cual es una contradicción. Por otro lado, si $x \in py$, entonces $py = px \cup xy$, más aún, $px \cap xy = \{x\}$, lo cual contradice que $px \subset xy$. Ahora, supongamos que existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathbb{N}$ tal que $e_{n_k}y_{n_k} \subset e_{n_k}x_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $sx_{n_k} \cup se_{n_k}$ es un subcontinuo de X y $e_{n_k}, x_{n_k} \in sx_{n_k} \cup se_{n_k}$, así $e_{n_k}x_{n_k} \subset sx_{n_k} \cup se_{n_k}$, luego $y_{n_k} \in sx_{n_k} \cup se_{n_k}$. Se sigue que $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \in \lim\limits_{k\to\infty} sx_{n_k} \cup se_{n_k} = sx \cup sp$. Luego, $y \in sx$ o $y \in sp$. Si $y \in sx$, entonces $sy \subset sx$, más aún, como $p \in sy$, tenemos que $p \in sx$, luego p y x son comparables lo cual es una contradicción. Por otro lado, si $y \in sp$, entonces $y \leq_s p$, lo cual contradice que $p <_s y$.

Caso 2. Para cada $x \in X$, p y x son comparables respecto de $\leq_s$.

Tenemos los siguientes dos subcasos:

Subcaso 2.1. $s = p$.

Sea M un arco tal que $p = s \in M$ y p no es punto extremo de M. Sean a y b los puntos extremos de A. Note que $p = s \leq_s a$ y $p = s \leq_s b$. Como $p \neq a$ y $p \neq b$ tenemos que $p <_s a$ y $p <_s b$, luego M tiene doblez en p, así por el *Lema 4.48*, tenemos que a y b no son comparables respecto de $\leq_s$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a M tal que $M_n \in Arcos(e_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes a a y b, respectivamente, tales que $a_n, b_n \in M_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión creciente en $\mathbb{N}$ tal que las sucesiones $\{e_{n_k}a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{e_{n_k}b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes en $C(X)$. Como e_{n_k} es punto extremo de M_{n_k}, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $e_{n_k}a_{n_k} \subset e_{n_k}b_{n_k}$ o $e_{n_k}b_{n_k} \subset e_{n_k}a_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $e_{n_k}a_{n_k} \subset e_{n_k}b_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y así $\lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k}a_{n_k} \subset \lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k}b_{n_k}$.

Afirmación 4.52.1. $\lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k}b_{n_k} \subset sb.$

Prueba de la Afirmación 4.52.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $B_k = se_{n_k} \cup sb_{n_k}$. Observe que $e_{n_k}b_{n_k} \subset B_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego $\lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k}b_{n_k} \subset \lim\limits_{k\to\infty} B_k = \lim\limits_{k\to\infty} se_{n_k} \cup sb_{n_k}$, como X es suave en s tenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} se_{n_k} \cup sb_{n_k} = \{s\} \cup sb = sb$. Luego, $\lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k}b_{n_k} \subset sb$. Así queda demostrada la Afirmación 4.52.1.

Note que $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \in \lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k}a_{n_k} \subset \lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k}b_{n_k} \subset sb$, luego $a \in sb$. Por el *Lema 4.43*, tenemos que $a \leq_s b$, así a y b son comparables, lo cual es una contradicción.

Subcaso 2.2. $s \neq p$.

Notemos que $s \leq_s x$, para cada $x \in X$, en particular $s \leq_s p$ y $p \neq s$, así $s <_s p$. Por el *Lema 4.51*, existe $y \in X$ tal que $p <_s y$. Sea $A = sy$, así $p \in A$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(e_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes a s y y, respectivamente, tales que $s_n, y_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es suave en $s \in X$, por el *Lema 4.40*, X es localmente arco conexo en s, luego existe V un abierto y arco conexo en X tal que $s \in V$ y $p \notin V$.

Afirmación 4.52.2. *Si* $v \in V$, *entonces* $v <_s p$.

Prueba de la Afirmación 4.52.2. Sea $v \in V$. Supongamos que no se cumple que $v <_s p$, es decir, $p \leq_s v$, así $p \in sv$. Como $s \in V$ y V es arco conexo tenemos que $sv \subset V$, así $p \in cl_X(V)$, lo cual es una contradicción. Queda demostrada la Afirmación 4.52.2.

De la *Afirmación 4.52.2*, tenemos que $V \subset sp$. Como $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in V \subset sp \setminus \{p\}$, para cada $n \geq J$.

Afirmación 4.52.3. *Existe* $K \in \mathbb{N}$ *tal que* $p <_s e_n$, *para cada* $n \geq K$.

Prueba de la Afirmación 4.52.3. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $K \in \mathbb{N}$ existe $n \geq K$ tal que $p <_s e_n$ es falso, como p y e_n son comparables respecto de $\leq_s$ se tiene que $e_n \leq_s p$. Así, existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathbb{N}$ tal que $e_{n_k} \leq_s p$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como e_{n_k} es punto extremo de X, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene e_{n_k} es punto extremo del arco sp, así $e_{n_k} = s$ o $e_{n_k} = p$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como p no es punto extremo de X, se tiene que $e_{n_k} = s$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, $s = \lim\limits_{k\to\infty} e_{n_k} = p$, lo cual es una contradicción, ya que $s \neq p$. Queda demostrada la Afirmación 4.52.3.

Afirmación 4.52.4. *Existe* $L \in \mathbb{N}$ *tal que* $p <_s y_n$, *para cada* $n \geq L$.

Prueba de la Afirmación 4.52.4. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $L \in \mathbb{N}$ existe $n \geq L$ tal que $p <_s y_n$ es falso, como p y y_n son comparables respecto de $\leq_s$ se tiene que $y_n \leq_s p$. Así, existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que $y_{n_k} \leq_s p$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que $y_{n_k} \in sp$, para cada $k \in \mathbb{N}$, así $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in sp$, luego $y \leq_s p$ lo cual es una contradicción ya que $p <_s y$. Queda demostrada la Afirmación 4.52.4.

Afirmación 4.52.5. *Existe* $I \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n \notin e_n s_n$, *para cada* $n \geq I$.

Prueba de la Afirmación 4.52.5. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $I \in \mathbb{N}$ existe $n \geq I$ tal que $y_n \in e_n s_n$. Así, existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que $y_{n_k} \in e_{n_k} s_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $n_k \geq J$ y $n_k \geq K$, entonces $s_{n_k} \in sp$ y $p <_s e_{n_k}$; así $s_{n_k} \leq_s p$ y $p <_s e_{n_k}$, por transitividad tenemos que $s_{n_k} <_s e_{n_k}$; como $s_{n_k} \in se_{n_k}$, tenemos que $ss_{n_k} \cup e_{n_k}s_{n_k} = se_{n_k}$. Luego, $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \in \lim\limits_{k\to\infty} ss_{n_k} \cup e_{n_k}s_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} se_{n_k} = sp$, así $y \leq_s p$, lo cual es una contradicción ya que $p <_s y$. Queda demostrada la Afirmación 4.52.5.

Sea $N = \text{máx}\{J, K, L, I\}$. Como e_n es punto extremo de X, tenemos que que e_n es punto extremo del A_n, por la *Afirmación 4.52.5*, tenemos que $e_n s_n \subset e_n y_n$, para cada $n \geq N$. Note que $s_n \in e_n y_n$, para cada $n \geq N$, además $s_n <_s p <_s e_n$, así $p \in e_n s_n \subset e_n y_n$. Como $s_n <_s p <_s y_n$, se sigue que el arco $e_n y_n$ tiene doblez en los puntos s_n y p, para cada $n \geq N$. Por el *Lema 4.47*, tenemos que $p = s_n$, para cada $n \geq N$, lo cual es una contradicción, ya que $s_n \neq p$, para cada $n \geq N$.

De los Casos 1 y 2 se concluye que X tiene conjunto de puntos extremos cerrado. $\square$

Lema 4.53. *Sea X un dendroide suave y $E(X)$ el conjunto de puntos extremos de X. Si $s \in X$ es punto de suavidad de X, entonces $X = \bigcup\limits_{e \in E(X)} se$.*

Demostración. Como X es un dendroide y $s, e \in X$, tenemos que $se \subset X$, luego $\bigcup\limits_{e \in E(X)} se \subset X$. Veamos la contención contraria. Para cada $w \in X$, sea $Y_w = \{y \in X : w \leq_s y\}$.

Afirmación 4.53.1. *Para cada $w \in X$, Y_w es compacto y no vacío.*

Prueba de la Afirmación 4.53.1. Sea $w \in X$, tenemos que $w \leq_s w$ y así $Y_w \neq \emptyset$. Probaremos que Y_w es cerrado en X. Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Y_w convergente a $y \in X$. Como X es suave en $s \in X$, tenemos que la sucesión $\{sy_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a sy. Por otro lado, como $w \in sy_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $w \in sy$, concluimos que $y \in Y_w$. Por lo tanto, Y_w es un conjunto cerrado en el compacto X, concluimos que Y_w es compacto. Queda demostrada la Afirmación 4.53.1.

Sean $x \in X$ y C una cadena no vacía en Y_x.

Afirmación 4.53.2. *C está acotado superiormente.*

Prueba de la Afirmación 4.53.2. Sean c_1 y c_2 puntos en C, sin perder generalidad, supongamos que $c_1 \leq_s c_2$. Probaremos que $Y_{c_2} \subset Y_{c_1}$. Si $y \in Y_{c_2}$, entonces $c_2 \leq_s y$. Luego, por transitividad $c_1 \leq_s y$ y así $y \in Y_{c_1}$. Concluimos que $Y_{c_2} \subset Y_{c_1}$. Sea $\mathcal{Y} = \{Y_c : c \in C\}$, como cualesquiera dos elementos de $\mathcal{Y}$ son comparables respecto a la inclusión, se sigue que $\mathcal{Y}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Luego, existe $x_0 \in \bigcap\limits_{c \in C} Y_c$, y así $c \leq_s x_0$, para cada $c \in C$. Queda probada la Afirmación 4.53.2.

Como cada cadena en Y_x tiene una cota superior, por el axioma de elección Y_x tiene un elemento maximal y_0. Probaremos que y_0 es punto extremo de X. Supongamos lo contrario, es decir y_0 no es punto extremo de X, por el *Lema 4.51*, existe $z \in X$ tal que $y_0 <_s z$, por transitividad $x \leq_s z$ así $z \in Y_x$, lo cual es una contradicción ya que y_0 es un elemento maximal de Y_x. Concluimos que $y_0 \in E(X)$. Finalmente, como $y_0 \in Y_x$ se tiene que $x \leq_s y_0$, así $x \in sy_0 \subset \bigcup\limits_{e \in E(X)} se$. $\square$

Lema 4.54. *Si X es un dendroide suave y no es un arco, entonces $|E(X)| > 2$.*

Demostración. Buscando una contradicción, supongamos que $|E(X)| \leq 2$. Sea $s \in X$ un punto de suavidad de X. Por el *Lema 4.53*, $X = \bigcup_{e \in E(X)} se$. Sea $x \in X$ tal que $x \neq s$, luego existe $e_1 \in E(X)$ tal que $x \in se_1$. Note que $e_1 \neq s$, ya que si $e_1 = s$, entonces $se_1 = \{s\}$ y así $x = s$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $e_1 \neq s$. Ahora, como X no es un arco, sea $y \in X \setminus se_1$. Así existe $e_2 \in E(X)$ tal que $y \in se_2$. Note que $e_2 \neq e_1$, ya que si $e_2 = e_1$, entonces $se_1 = se_2$ y así $y \in se_1$ lo cual es una contradicción. Además $e_2 \neq s$, ya que de lo contrario si $e_2 = s$, entonces $se_2 = \{s\}$, luego $y = s$ y así $y \in se_1$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $e_2 \neq s$. Como $|E(X)| \leq 2$ se sigue que $E(X) = \{e_1, e_2\}$. Por el *Lema 4.53*, tenemos que $X = se_1 \cup se_2$. Como X es un dendroide se tiene que $se_1 \cap se_2$ es un arco o un singular. Si $se_1 \cap se_2$ es un arco, entonces X es un triodo simple, luego s es punto extremo de X, lo cual es una contradicción ya que $s \notin E(X)$. Finalmente, si $se_1 \cap se_2$ es un singular, entonces X es un arco, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|E(X)| > 2$.
□

Teorema 4.55. *Sea X un dendroide. Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X es un arco.*

Demostración. Buscando una contradicción, supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos y que X no es un arco. Por el *Teorema 4.37*, X no es un abanico. Por el *Teorema 4.52*, tenemos que $E(X)$ es un conjunto cerrado. Por el *Teorema 4.33*, X tiene la propiedad de Kelley y así por [10, Corollary 5] X es suave. Sea $s \in X$ un punto de suavidad de X. Para cada $x \in X$, sea $E_x = \{e \in E(X) : x \in se\}$.

Afirmación 4.55.1. *Para cada $x \in X$, E_x es un conjunto cerrado y no vacío.*

Prueba de la Afirmación 4.55.1. Sea $x \in X$. Por el *Lema 4.53*, se tiene que $X = \bigcup_{e \in E(X)} se$, luego existe $e \in E(X)$ tal que $x \in se$, así $E_x \neq \emptyset$. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E_x convergente a $e \in X$. Note que $e \in E(X)$. Como X es suave en s, se tiene que la sucesión $\{se_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a se. Como $x \in se_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x \in se$ y así $e \in E_x$. Por lo tanto E_x es un conjunto cerrado. Queda probada la Afirmación 4.55.1.

Sea $f : X \to 2^{E(X)}$ la función definida por $f(x) = E_x$, para cada $x \in X$.

Afirmación 4.55.2. *Existe $p \in X$ tal que f no es continua en p y $p \neq s$.*

Prueba de la Afirmación 4.55.2. Como X no es un abanico y no es un arco $|R(X)| \geq 2$. Sea $r \in R(X)$ distinto de s. Por el *Lema 4.53*, existe $e_1 \in E(X)$ tal que $r \in se_1$. Como $r \in R(X)$, existe $t \in X$ distinto de r tal que $rt \cap se_1 = \{r\}$. Por el *Lema 4.53*, existe $e_2 \in E(X)$ tal que $t \in se_2$. Como $r \in se_1$ y $r \in R(X)$, tenemos que $r <_s e_1$. Note que $r \in st$, como $r \neq t$ tenemos que $r <_s t$. Así el arco $rt \cup re_1$ tiene doblez en r. Como $t \leq_s e_2$, por el *Lema 4.50*, tenemos que $te_1 \subset e_1e_2$. Como el arco $rt \cup re_1$ tiene doblez en r, por el

Lema 4.49, el arco e_1e_2 tiene doblez en r. Como $r \neq s$, tenemos que $s <_s r$. Por otro lado, si $x \in e_1e_2$, entonces $x \in re_1$ o $x \in re_2$, luego por el *Lema 4.43*, tenemos que $r \leq_s x$. Se sigue que $s \notin e_1e_2$. Sea $A = e_1e_2$, probaremos que la función $f|_A$ no es continua. Supongamos lo contrario, es decir, $f|_A$ es continua. Probaremos que $f|_A$ es una función constante. Primero veamos que $E(X)$ es totalmente disconexo, supongamos que Y es un subcontinuo de X no degenerado, es decir, con más de un punto, contenido en $E(X)$, así existen a y b puntos en Y distintos. Luego, $ab \subset Y \subset E(X)$. Si $v \in ab \setminus \{a, b\}$, entonces $v \notin E(X)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, Y es degenerado y así $E(X)$ es un conjunto totalmente disconexo. Como $E(X)$ es un conjunto compacto y totalmente disconexo se puede encajar en el conjunto de Cantor. Sean $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor y $g : E(X) \to \mathcal{C}$ un encaje, se tiene que $2^g : 2^{E(X)} \to 2^{\mathcal{C}}$ la función definida por $2^g(F) = g(F)$, para cada $F \in 2^{E(X)}$, es un encaje. Luego, $2^g \circ f|_A : A \to 2^{\mathcal{C}}$ es una función continua, así $(2^g \circ f|_A)(A)$ es un continuo en $2^{\mathcal{C}}$, por [26, Corollary 1] $2^{\mathcal{C}}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$. Como $2^{\mathcal{C}}$ es totalmente disconexo, se tiene que todo subcontinuo de $2^{\mathcal{C}}$ es degenerado. Como A es un continuo y $(2^g \circ f|_A)(A)$ es conjunto singular de $2^{\mathcal{C}}$, se tiene que $(2^g \circ f|_A)(A) = \{C\}$, para algún $C \in 2^{\mathcal{C}}$. Para cada $x \in A$, $2^g(f|_A(x)) = C$, luego $g(f|_A(x)) = C$ y así $f|_A(x) = g^{-1}(C)$. Por lo tanto, $f|_A$ es una función constante. Luego, $f|_A(e_1) = f|_A(e_2)$ y así $\{e_1\} = \{e_2\}$, lo cual es una contradicción ya que $e_1 \neq e_2$. Por lo tanto, $f|_A$ no es una función continua. Luego, existe $p \in A$ tal que $f|_A$ no es continua en p. Note que f no es continua en p. Como $s \notin A$, se tiene que $p \neq s$. Queda probada la Afirmación 4.55.2.

Como f no es continua en p, existe $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p tal que $\{f(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(p)$, así la sucesión $\{E_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a E_p. Tomando subsucesiones de ser necesario podemos suponer que $\{E_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y que $\lim_{n\to\infty} E_{p_n} \neq E_p$.

Afirmación 4.55.3. $\lim_{n\to\infty} E_{p_n} \subsetneq E_p$.

Prueba de la Afirmación 4.55.3. Sea $e \in \lim_{n\to\infty} E_{p_n}$, así existe $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a e tal que $e_n \in E_{p_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es suave en s, la sucesión $\{se_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a se, además $p_n \in se_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $p \in se$, luego $e \in E_p$. Como $\lim_{n\to\infty} E_{p_n} \neq E_p$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} E_{p_n} \subsetneq E_p$. Queda demostrada la Afirmación 4.55.3.

Afirmación 4.55.4. *p no es punto extremo de X.*

Prueba de la Afirmación 4.55.4. Si p es punto extremo de X, entonces $E_p = \{p\}$. Como $\lim_{n\to\infty} E_{p_n} \subsetneq E_p$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} E_{p_n} = \emptyset$, lo cual es una contradicción ya que $\lim_{n\to\infty} E_{p_n}$ es un conjunto cerrado no vacío de X. Queda demostrada la Afirmación 4.55.4.

Sea $a \in E_p \setminus \lim_{n\to\infty} E_{p_n}$.

Afirmación 4.55.5. *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X convergente a a, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que p_n y a_n no son comparables respecto de $\leq_s$, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 4.55.5. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $p_n \leq_s a_n$ o $a_n \leq_s p_n$. Luego, existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que ocurre uno de los siguientes dos casos:

Caso 5.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $p_{n_k} \leq_s a_{n_k}$.

Consideremos una sucesión $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que $e_k \in E_{a_{n_k}}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $p_{n_k} \leq_s a_{n_k}$ y $a_{n_k} \leq_s e_k$, por transitividad se tiene que $p_{n_k} \leq_s e_k$, así $p_{n_k} \in se_k$, luego $e_k \in E_{p_{n_k}}$. Tomando subsucesiones de ser necesario, supongamos que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $e \in E(X)$. Como X es suave en s, tenemos que $\{se_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a se. Note que $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \in \lim\limits_{k\to\infty} se_k = se$. Como a es punto extremo de X se tiene que $a = e$ o $a = s$. Si $a = e$, entonces $a \in \lim\limits_{n\to\infty} E_{p_n}$, lo cual contradice que $a \in E_p \setminus \lim\limits_{n\to\infty} E_{p_n}$. Si $a = s$, entonces $sa = \{s\}$, como $p \in sa$ se tiene que $p = a$, lo cual contradice la Afirmación 4.55.4.

Caso 5.2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} \leq_s p_{n_k}$.

En este caso, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $a_{n_k} \in sp_{n_k}$. Luego, $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \in \lim\limits_{k\to\infty} sp_{n_k} = sp$. Como a es punto extremo de X, se tiene que a es punto extremo de sp así $a = s$ o $a = p$. Si $a = s$, entonces $a \leq_s p$, lo cual contradice que $a \in E_p$. Si $a = p$, entonces $p \in E(X)$ lo cual contradice la Afirmación 4.55.4. Queda demostrada la Afirmación 4.55.5.

Para probar el teorema consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. Existe $b \in X$ tal que p y b no son comparables respecto de $\leq_s$.

Como p y b no son comparables, por el *Lema 4.48*, el arco pb tiene doblez. Por el *Lema 4.50*, se tiene que $pb \subset ab$. Sea $A = ab$, note que $p \in A$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a a tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la *Afirmación 4.55.5*, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que p_n y a_n no son comparables respecto de $\leq_s$, para cada $n \geq N$. Luego por el *Lema 4.48*, para $n \geq N$, existe $d_n \in X$ tal que d_n es doblez del arco $p_n a_n$. Por el *Lema 4.49*, d_n es doblez de A_n, para cada $n \geq N$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean x_n y y_n los puntos extremos de A_n. Sin perder generalidad, podemos suponer que $p_n \in d_n x_n$, para cada $n \geq N$. Así, $a_n \in d_n y_n$, para cada $n \geq N$. Tomando subsucesiones de ser necesario, podemos suponer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a x y y puntos en A. Observemos que $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \lim\limits_{n\to\infty} sy_n = sy$, como a es punto extremo de X, tenemos que $a = y$.

Sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a b tal que $b_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4.55.6. *Existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $b_k \in d_k x_k$, para cada $k \geq K$.*

Prueba de la Afirmación 4.55.6. Supongamos que, para cada $K \in \mathbb{N}$ existe $k \geq K$ tal que $b_k \notin d_k x_k$. Así existe una sucesión $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ creciente en $\mathbb{N}$ tal que $b_{k_j} \in d_{k_j} y_{k_j} \subset sy_{k_j}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Se sigue que $b = \lim\limits_{j\to\infty} b_{k_j} \in \lim\limits_{j\to\infty} sy_{k_j} = sy = sa$. Como $a \in E_p$ tenemos que $p \in sa$. Por el *Lema 4.44*, p y b son comparables, lo cual es una contradicción. Queda demostrada la Afirmación 4.55.6.

Notemos que la subsucesión $\{b_k\}_{k\geq K}$ de $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a b. Luego, $b = \lim_{k\to\infty} b_k \in \lim_{k\to\infty} d_k x_k \subset \lim_{k\to\infty} sx_k = sx$. Así $b \in sx$. Por otro lado, $p = \lim_{k\to\infty} p_{n_k} \in \lim_{k\to\infty} d_{n_k} x_{n_k} \subset \lim_{k\to\infty} sx_{n_k} = sx$. Por el *Lema 4.44*, se sigue que p y b son comparables lo cual es una contradicción.

Caso 2. Para cada $b \in X$, p y b son comparables respecto de $\leq_s$.

Recordemos que $a \in E_p \setminus \lim_{n\to\infty} E_{p_n}$. Sea $A = sa$. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a a tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4.55.7. *Existe $I \in \mathbb{N}$ tal que $p <_s a_n$, para cada $n \geq I$.*

Prueba de la Afirmación 4.55.7. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $I \in \mathbb{N}$ existe $n \geq I$ tal que $p <_s a_n$ es falso, como p y a_n son comparables respecto de $\leq_s$ se tiene que $a_n \leq_s p$. Así, existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \leq_s p$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que $a_{n_k} \in sp$, para cada $k \in \mathbb{N}$, así $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in sp$, luego $a \leq_s p$ lo cual es una contradicción ya que $p <_s a$. Queda demostrada la Afirmación 4.55.7.

Afirmación 4.55.8. *Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $p <_s p_n$, para cada $n \geq M$.*

Prueba de la Afirmación 4.55.8. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $M \in \mathbb{N}$ existe $n \geq M$ tal que $p <_s p_n$ es falso, como p y p_n son comparables respecto de $\leq_s$ se tiene que $p_n \leq_s p$. Así, existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathbb{N}$ tal que $p_{n_k} \leq_s p$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego $E_p \subset E_{p_{n_k}}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, así $E_p \subset \lim_{k\to\infty} E_{p_{n_k}}$, lo cual contradice la *Afirmación 4.55.3.* Queda demostrada la Afirmación 4.55.8.

Como X es suave en s, por el *Lema 4.40*, X es localmente arco conexo en s, existe V un abierto arco conexo en X tal que $s \in V$ y $p \notin V$.

Afirmación 4.55.9. *Si $v \in V$, entonces $v <_s p$.*

Prueba de la Afirmación 4.55.9. Sea $v \in V$. Supongamos que no se cumple que $v <_s p$, es decir, $p \leq_s v$, así $p \in sv$. Como $s \in V$ y V es un subcontinuo de X tenemos que $sv \subset V$, así $p \in V$, lo cual es una contradicción. Queda demostrada la Afirmación 4.55.9.

De la *Afirmación 4.55.9*, tenemos que $V \subset sp$. Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a s tal que $s_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in V \subset sp \setminus \{p\}$, para cada $n \geq J$. Como V es arco conexo tenemos que $ss_n \subset V \subset sp \setminus \{p\}$, para cada $n \geq J$. Por la *Afirmación 4.55.5*, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que p_n y a_n no son comparables respecto de $\leq_s$, para cada $n \geq N$. Luego por el *Lema 4.48*, para $n \geq N$, existe $d_n \in X$ tal que d_n es doblez del arco $p_n a_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean x_n y y_n los puntos extremos de A_n. Por el *Lema 4.49*, d_n es doblez de A_n, para cada $n \geq N$. Como $s_n \in A_n$, para cada $n \geq N$, se tiene que $d_n \leq_s s_n$, así $d_n \in ss_n \subset sp \setminus \{p\}$. Sea $L = \max\{I, M, J, N\}$. Por las *Afirmaciones 4.55.7*, *4.55.8* y *4.55.9*, para cada $n \geq L$, $d_n <_s p <_s p_n$ y

$d_n <_s p <_s a_n$, se sigue que el arco $p_n a_n$ tiene doblez en los puntos d_n y p, para cada $n \geq L$. Por el *Lema 4.47*, tenemos que $p = d_n$, para cada $n \geq L$, lo cual es una contradicción, ya que $d_n \neq p$, para cada $n \geq N$.
De los Casos 1 y 2, tenemos que X es un arco. □

Como con consecuencia de los *Teoremas 4.7* y *4.55* obtenemos una caracterización del arco.

Corolario 4.56. *Sea X un dendroide. Entonces X es un arco si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Capítulo 5

La propiedad de Kelley por arcos en compactaciones métricas del rayo

Del *Teorema 4.15* en la clase de las gráficas finitas solo los arcos y las curvas cerradas simples tienen la propiedad de Kelley por arcos; por otro lado, del *Corolario 4.56* en la clase de los dendroides solo los arcos tienen la propiedad de Kelley por arcos. El siguiente resultado muestra otro continuo que tiene la propiedad de Kelley por arcos el cual no es dendroide ni gráfica finita.

Teorema 5.1. *El continuo $sen(\frac{1}{x})$ tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Sean $Y = \{0\} \times [-1, 1]$ y $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$. Sea $X = Y \cup W$ el continuo $sen(\frac{1}{x})$. Sea $p \in X$, tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. $p \in W$. Tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 1.1. $p = (1, sen(1))$.

Sean $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Observemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq k$, $p_n \in W$. Notemos que si $A = \{p\}$, entonces basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A. Supongamos que A es un arco, tenemos que $A = wp$, para algún $w \in W$. Sea $\varepsilon = d(p, w)$, como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $p_n \in B(p, \frac{\varepsilon}{2})$, como $B(p, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq A$, tenemos que $p_n \in A$, para cada $n \geq N$. Se tiene que la subsucesión $\{p_n\}_{n\geq N}$ está contenida en A y converge a p, notemos que $A \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \geq N$, luego, basta considerar la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la siguiente forma $A_n = A$, para cada $n \geq N$ y $A_n = \{p_n\}$, para cada $n < N$. Concluimos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por arcos en el punto $(1, sen(1))$.

Subcaso 1.2. $p \in W \setminus \{(1, sen(1))\}$.

Sea $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Supongamos que $A = w_1w_2$ con $w_1, w_2 \in W$. Tenemos los siguientes dos casos:

(1. 2. 1) $p \in \{w_1, w_2\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $p = w_1$, sea $\varepsilon = d(w_1, w_2)$, como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $n \geq N$. Así basta considerar una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

definida como sigue $A_n = p_n w_2$, para cada $n \geq N$ y $A_n = \{p_n\}$, para cada $n < N$. Por lo tanto, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(1. 2. 2) $p \notin \{w_1, w_2\}$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{d(w_1, p), d(w_2, p)\}$, como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$, luego, basta considerar la sucesión $\{A_n\}_n \in \mathbb{N}$ definida por $A_n = A$, para cada $n \geq N$ y $A_n = \{p_n\}$, para $n < N$. Por lo que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A.

Caso 2. $p \in Y$.

Sean $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p en X. Notemos que $Arcos(p, X) = Arcos(p, Y)$. Si $p_j \in Y$, para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $Arcos(p_j, X) = Arcos(p_j, Y)$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $p_n \in Y$, para cada $n \geq N$, por el *Teorema 4.7*, como Y es un arco, entonces tiene la propiedad de Kelley por arcos, así existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $B_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq k$, $p_n \in W$. Tenemos los siguientes subcasos:

Subcaso 2.1. $A = \{p\}$. En este caso basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A.

Subcaso 2.2. A es un subarco propio de Y. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a A tal que $A_n \in C(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 5.1.1. *Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $A_n \in Arcos(p_n, X)$.*

Prueba de la Afirmación 5.1.1. Observemos que $A_n \in C(X)$, así A_n es homeomorfo a X o es un arco o un singular. Supongamos que A_n no es arco, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que A_n es homeomorfo a X o un singular. Observemos que si A_n es un singular, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A_n = \{p_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{p\} \neq A$ lo cual es una contradicción. Por otro lado, si A_n es homeomorfo a X, para cada $n \in \mathbb{N}$ y como A_n es subcontinuo de X, se sigue que $Y \subseteq \lim_{n\to\infty} A_n = A$, implica que $Y = A$, lo cual también es una contradicción. Se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $A_n \in Arcos(p_n, X)$, con lo cual queda demostrada la Afirmación 5.1.1.

Luego, existe $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a A tal que $B_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ y $B_n = A_n$, para cada $n \geq N$. Luego, $B_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Subcaso 2.3. $A = Y$. Como para toda $n \geq k$, $p_n \in W$. Consideremos la subsucesión $\{p_n\}_{n\geq k}$, se tiene que la subsucesión $\{p_n\}_{n\geq k}$ converge a p. Sean $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{r_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $(0,1)$ tales que $t_m = \frac{2}{(4m+1)\pi}$ y $r_m = \frac{2}{(4m-1)\pi}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Note que $sen(\frac{1}{t_m}) = 1$ y $sen(\frac{1}{r_m}) = -1$, para cada $m \in \mathbb{N}$; sean $x_m = (t_m, sen(\frac{1}{t_m}))$ y $w_m = (r_m, sen(\frac{1}{r_m}))$, para cada $m \in \mathbb{N}$, claramente las sucesiones $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergen a los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$, respectivamente. Sea $\rho : W \to (0,1]$ la proyección tal que $\rho((x, sen(\frac{1}{x}))) = x$. Sin perder generalidad, supongamos que la subsucesión $\{p_n\}_{n\geq k}$ es tal que $\rho(p_n) \leq \rho(w_1)$.

Note que, para toda $n \geq k$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in A_n = x_n w_n$. Observemos que $A_n = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in [r_n, t_n]\}$ o $A_n = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in [t_n, r_n]\}$. Probaremos que la sucesión $\{A_n\}_{n \geq k}$ converge a Y, por el *Lema 1.32*, basta probar que $\limsup A_n \subseteq Y$ y $Y \subseteq \liminf A_n$.

(a) $\limsup A_n \subseteq Y$.
Sea $a \in \limsup A_n$, se tiene que existen una subsucesión $\{A_{n_u}\}_{u \in \mathbb{N}}$ y $a_{n_u} \in A_{n_u}$, tal que la sucesión $\{a_{n_u}\}_{u \in \mathbb{N}}$ converge a a. Note que $a \in Y$ o $a \in W$. Observemos que, como $a_{n_u} \in A_{n_u}$, para cada $u \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_{n_u} = (x_{n_u}, sen(\frac{1}{x_{n_u}}))$ con $r_{n_u} \leq x_{n_u} \leq t_{n_u}$ o $t_{n_u} \leq x_{n_u} \leq r_{n_u}$ por la forma en que se definen r_{n_u} y t_{n_u}, se tiene que $\lim_{u \to \infty} r_{n_u} = 0$ y $\lim_{u \to \infty} t_{n_u} = 0$, luego $\lim_{u \to \infty} x_{n_u} = 0$. De donde $\lim_{u \to \infty} a_{n_u} = a \in Y$.

(b) $Y \subseteq \liminf A_n$.
Sea $a \in Y$, luego existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a a tal que $a_n \in W$. Sea $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ la subsucesión tal que $\rho(a_{n_j}) \leq \rho(w_1)$. Se tiene que, para toda a_{n_j} existen r_{n_j} y t_{n_j} tales que $a_n(j) \in A_{n_j} = r_{n_j} t_{n_j}$. Luego, como $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es subsucesión de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se sigue que $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a a, tenemos que $a \in \liminf A_n$.

De (a) y (b) tenemos que $Y = \lim_{n \to \infty} A_n$. Basta considerar la sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida como sigue $M_n = A_n$, para cada $n \geq k$ y $A_n = \{p_n\}$, para cada $n < k$. La sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A y $M_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 5.2. *Si X es el círculo de Varsovia, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Sean $Y = \{0\} \times [-2, 1]$, $Z_1 = [0, 1] \times \{-2\}$, $Z_2 = \{1\} \times [-2, sen(1)]$ y $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$. Definimos $X = Y \cup Z_1 \cup Z_2 \cup W$ el círculo de Varsovia. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sean $p = (0, -1)$, $A = Y$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión en X definida por $p_n = (x_n, sen(\frac{1}{x_n}))$ con $x_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a p. Como X tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{4}$, note que $B((0, -2), \varepsilon) \cap \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \emptyset$. Por otro lado, como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $A_n \cap B((0, -2), \varepsilon) \neq \emptyset$. Note que si $a_n \in A_n \cap B((0, -2), \varepsilon)$, entonces existe un arco con puntos extremos a_n y p_n, para cada $n \geq N$. Luego, $Z_2 \subseteq A_n$, para cada $n \geq N$. Luego, si consideramos la subsucesión $\{A_n\}_{n \geq N}$ de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que la sucesión $\{A_n\}_{n \geq N}$ converge a A y así, $Z_2 \subseteq A$, lo cual es una contradicción ya que $A \cap Z_2 = \emptyset$. Concluimos que X no tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

Vamos a estudiar la propiedad de Kelley por arcos para compactaciones métricas del rayo, para ello recordemos las siguientes definiciones.

Definición 5.3. *Un* **rayo** *R es un espacio topológico homeomorfo al intervalo semiabierto* $(0, 1]$.

Definición 5.4. *Un espacio topológico compacto Y es una* **compactación métrica del intervalo** $(0, 1]$ *si existe un homeomorfismo* $h : (0, 1] \to h((0, 1])$

$\subseteq Y$ tal que $h((0,1])$ es denso en Y. Al homeomorfismo h se le llama encaje y a $X = Y \setminus h((0,1])$ se le denomina residuo.

Observación 5.5. *Notemos que en la Definición 2.28, $h((0,1])$ es un espacio homeomorfo a $(0,1]$. Así $h((0,1])$ es un rayo.*

Lema 5.6. *Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X. Si Y tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Sean $p \in X$, $A \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y y Y tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $A_n \cap X \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, así X tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

Del *Teorema 4.33* en la clase de los dendroides tenemos que la propiedad de Kelley por arcos implica la propiedad de Kelley, veamos que esto mismo pasa para las compactaciones métricas del rayo con residuo arco.

Teorema 5.7. *Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X un arco. Si Y tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces Y tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sean $p \in Y$, $B \in C(p, Y)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y convergente a p. Probaremos que existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B tal que $B_n \in C(p_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que B puede ser un singular, un arco o un espacio homeomorfo a Y. Si B es un singular o un arco, entonces como Y tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B, tal que $B_n \in Arcos(p_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que B es un espacio homeomorfo a Y. Sean $R = Y \setminus X$. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. $p \in X$. Observemos que $X \subseteq int(B)$, así existe U un abierto en Y tal que $p \in U \subseteq B$, como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in U$, para cada $n \geq N$. Se sigue que $p_n \in B$, para cada $n \geq N$. Basta considerar la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $B_n = \{p_n\}$, si $n < N$ y $B_n = B$, para cada $n \geq N$.

Caso 2. $p \in B \setminus X$. Como p es un punto de conexidad local de Y, por el *Teorema 4.3*, se tiene que Y tiene la propiedad de Kelley en p, luego existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B tal que $B_n \in C(p_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Concluimos que Y tiene la propiedad de Kelley. $\square$

El siguiente resultado nos dice que el continuo $sen(\frac{1}{x})$ es la única compactación del intervalo $[0,1)$ con residuo arco que tiene la propiedad de Kelley.

Teorema 5.8. *[24, Teorema 16.28] Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X un arco. Entonces Y tiene la propiedad de Kelley si y sólo si X es homeomorfo al continuo $\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$.*

Teorema 5.9. *Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X un arco. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) Y tiene la propiedad de Kelley por arcos.
(2) Y es homeomorfo al continuo $sen(\frac{1}{x})$.

Demostración. Para la necesidad, supongamos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. Por el *Teorema 5.7*, Y tiene la propiedad de Kelley. Así, por el *Teorema 5.8*, Y es homeomorfo al continuo $sen(\frac{1}{x})$. La suficiencia se sigue del *Teorema 5.1.* □

Teorema 5.10. *Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X una curva cerrada simple. Si Y tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces Y tiene la propiedad Kelley.*

Demostración. Sean $p \in Y$, $B \in C(p,Y)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y convergente a p. Probaremos que existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B tal que $B_n \in C(p_n,Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que B puede ser un singular, un arco, una curva cerrada simple o un espacio homeomorfo a Y. Si B es un singular o un arco, entonces como Y tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B, tal que $B_n \in Arcos(p_n,Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que B es un espacio homeomorfo a Y. Tenemos los siguientes dos casos:
Caso 1. $p \in X$. Observemos que $X \subseteq int(B)$, así existe U un abierto en Y tal que $p \in U \subseteq B$, como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in U$, para cada $n \geq N$. Se sigue que $p_n \in B$, para cada $n \geq N$. Basta considerar la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $B_n = \{p_n\}$, si $n < N$ y $B_n = B$, para cada $n \geq N$.
Caso 2. $p \in B\backslash X$. Como p es un punto de conexidad local de Y, por el *Teorema 4.3*, se tiene que Y tiene la propiedad de Kelley en p, luego existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B tal que $B_n \in C(p_n,Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, suponga que B es una curva cerrada simple, se sigue que $B = X$. Tenemos los siguientes dos casos:
Caso 1. Para cada $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ está contenida en X. Notemos que $X \in cl_Y(Arcos(p,Y))$. Por la *Proposición 4.22*, existe una sucesión de $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a B tal que $B_n \in Arcos(p_n,Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Caso 2. Existe una subsucesión $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Basta considerar la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que B_n es homeomorfo a Y y p_n es punto extremo de B_n. La sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B.
Concluimos que Y tiene la propiedad de Kelley. □

El resultado siguiente muestra que la única compactación con residuo curva cerrada simple que tiene la propiedad de Kelley es $(SP)_1$.

Teorema 5.11. *[3, Teorema 4.1] Salvo homeomorfismos, existe una única compactación del intervalo $[0,\infty)$ con residuo curva cerrada simple con la propiedad de Kelley, a saber $(SP)_1$.*

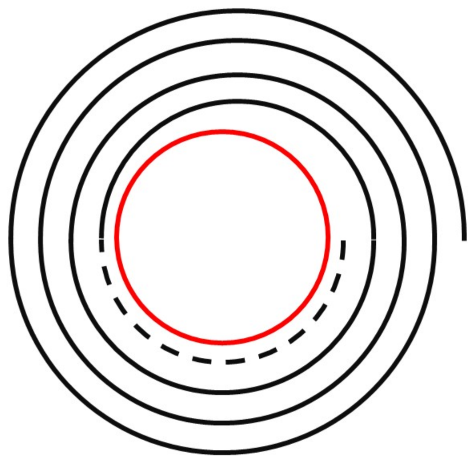

Figura 5.1: $(SP)_1 = S^1 \cup \{(1+\frac{1}{t})(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [2\pi, \infty)\}$

Teorema 5.12. *Si* $(SP)_1 = S^1 \cup \{(1+\frac{1}{t})(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [2\pi, \infty)\}$*, entonces* $(SP)_1$ *tiene la propiedad de Kelley por arcos.*

Demostración. Sean $p \in (SP)_1$, $A \in Arcos(p, (SP)_1)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(SP)_1$ convergente a p. Probaremos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Arcos(p_n, (SP)_1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea d la métrica en $(SP)_1$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $p \in \{(1+\frac{1}{t})(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [2\pi, \infty)\}$. Tenemos los siguientes dos subcasos:

Subcaso 1.1. $p = (1+\frac{1}{2\pi}, 0)$. Observemos que $A = yp$ con $y \in \{(1+\frac{1}{t})(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [2\pi, \infty)\}$. Sea $\varepsilon = d(p, y)$. Observemos que $B(p, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq A$. Como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in B(p, \frac{\varepsilon}{2})$, para cada $n \geq N$. De esta forma basta considerar la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $A_n = p_n y$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Subcaso 1.2. $p \in \{(1+\frac{1}{t})(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [2\pi, \infty)\} \setminus \{(1+\frac{1}{2\pi}, 0)\}$. Observemos que A puede ser de dos formas, $A = py$ para algún $y \in \{(1+\frac{1}{t})(cost, sent) : t \in [2\pi, \infty)\}$ o $A = y_1 y_2$ tal que $y_1, y_2 \in \{(1+\frac{1}{t})(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [2\pi, \infty)\}$ y $p \notin \{y_1, y_2\}$. Si $A = py$, entonces basta considerar la sucesión de arcos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $A_n = p_n y$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que, supongamos que $A = y_1 y_2$ y $p \notin \{y_1, y_2\}$. Sea $\varepsilon = \min\{d(p, y_1), d(p, y_2)\}$, como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in B(p, \varepsilon)$, para cada $n \geq N$. Basta considerar la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $A_n = \{p_n\}$ para cada $n < N$ y $A_n = A$, para cada $n \geq N$. La cual converge a A.

Caso 2. $p \in S^1$. Observemos que, si existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in S^1$, para cada $n \geq k_1$, dado que S^1 tiene la propiedad de Kelley por arcos, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $B_n \in Arcos(p_n, S^1)$, para cada $n \geq k_1$. Así basta considerar la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A definida por $A_n = \{p_n\}$, para cada $n < k_1$, y $A_n = B_n$, para cada $n \geq k_1$. Supongamos que existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in \{(1+\frac{1}{t})(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [2\pi, \infty)\}$, para cada $n \geq k_2$. Por el *Teorema 5.11*, $(SP)_1$ tiene la propiedad de Kelley, luego, existe $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $B_n \in C(p_n, (SP)_1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 5.12.1. *Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \in Arcos(p_n, (SP)_1)$, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 5.12.1. Observemos que B_n puede ser un singular, un arco, una curva cerrada simple o un espacio homeomorfo a $(SP)_1$, para cada $n \geq N$. Notemos que B_n no puede ser S^1, para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $p_n \in \{(1 + \frac{1}{t})(cost, sent) : t \in [2\pi, \infty)\}$, para cada $n \geq k_2$. Supongamos que B_n no es un arco para cada $n \in \mathbb{N}$. Así tenemos dos casos:

Subcaso 2.1. B_n es un singular, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A, se sigue que $\{p\} = A$, lo cual es una contradicción, ya que A es arco.

Subcaso 2.2. B_n es homeomorfo a $(SP)_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $S^1 \subseteq B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, así $S^1 \subseteq \lim\limits_{n\to\infty} B_n = A \subseteq S^1$, es decir, $A = S^1$, lo cual contradice que A es un arco. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \in Arcos(p_n, (SP)_1)$, para cada $n \geq N$. Con lo que queda demostrada la Afirmación 5.12.1.

Luego, basta considerar las sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A definida por $A_n = \{p_n\}$, para cada $n < N$ y $A_n = B_n$, para cada $n \geq N$.

Concluimos que $(SP)_1$ tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

Teorema 5.13. *Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0, 1]$ con residuo X una curva cerrada simple. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Y tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(2) Y es homeomorfo a $(SP)_1$.

Demostración. Para la necesidad, supongamos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. Por el *Teorema 5.10*, Y tiene la propiedad de Kelley. Así, por el *Teorema 5.11*, Y es homeomorfo a $(SP)_1$. La suficiencia se sigue del *Teorema 5.12*. $\square$

Teorema 5.14. *Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0, 1]$ con residuo X una gráfica finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Y tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(2) Y es homeomorfo a $sen(\frac{1}{x})$ o al continuo $(SP)_1$.

Demostración. Para la necesidad, supongamos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. Por el *Lema 5.6*, X tiene la propiedad de Kelley por arcos, luego, por el *Teorema 4.15*, X es un arco o una curva cerrada simple. Se sigue de los *Teoremas 5.9* y *5.13*, que Y es homeomorfo al continuo $sen(\frac{1}{x})$ o a $(SP)_1$. La suficiencia se sigue de los *Teoremas 5.1* y *5.12*. $\square$

Teorema 5.15. *Sea Y una compactación métrica del intervalo $(0, 1]$ con residuo X una dendroide. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Y tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(2) Y es homeomorfo al continuo $sen(\frac{1}{x})$.

DEMOSTRACIÓN. Para la necesidad, supongamos que Y tiene la propiedad de Kelley por arcos. Por el *Lema 5.6*, X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Por el *Corolario 4.56*, X es un arco. Se sigue del *Teorema 5.9*, que Y es homeomorfo al continuo $sen(\frac{1}{x})$. La suficiencia se sigue del *Teorema 5.1*. $\square$

Capítulo 6

El hiperespacio $KA(X)$ y la propiedad de Kelley por arcos

En el Capítulo 2, dados un continuo X y $p \in X$ estudiamos algunas propiedades del hiperespacio $Arcos(p, X)$. Dados un continuo X y A un subconjunto de X tal que $Arcos(p, X)$ es compacto, para cada $p \in A$, definimos la siguiente colección:

$$KA(A, X) = \{Arcos(p, X) : Arcos(p, X) \text{ es compacto, para cada } p \in A\}.$$

Denotaremos a $KA(X, X)$ simplemente por $KA(X)$. Al conjunto $KA(X)$ lo consideramos como subespacio de $C(C(X))$. En este capítulo, vamos a explorar la siguiente pregunta:

Pregunta 6.1. *¿Qué propiedades topológicas tiene el hiperespacio $KA(A, X)$?*

En esta sección, estudiamos la compacidad de dicho hiperespacio.

Una función que está fuertemente relacionada con la propiedad de Kelley por arcos es la que definimos a continuación.

Definición 6.2. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X tal que, para cada $p \in A$, $Arcos(p, X)$ es compacto. Definimos la función $\alpha_A : A \to KA(A, X)$ dada por $\alpha_A(p) = Arcos(p, X)$, para cada $p \in A$.*

Proposición 6.3. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X tal que, para cada $p \in A$, $Arcos(p, X)$ es compacto. La función $\alpha_A : A \to KA(A, X)$ dada por $\alpha_A(p) = Arcos(p, X)$, para cada $p \in A$, es biyectiva.*

Demostración. Primero probemos que α_A es una función inyectiva. Sean $p, q \in A$ tales que $p \neq q$. Notemos que $\{p\} \in Arcos(p, X)$ y $\{q\} \notin Arcos(p, X)$, luego:

$$\alpha_A(p) = Arcos(p, X) \neq Arcos(q, X) = \alpha_A(q),$$

así α_A es inyectiva.

Ahora, probemos que α_A es una función suprayectiva. Note que $Arcos(p, X) \in KA(A, X)$, si $p \in A$. Luego, $\alpha_A(p) = Arcos(p, X)$ y así, α_A es suprayectiva.

Concluimos que la función α_A es biyectiva. □

Proposición 6.4. *Sea X un continuo. Si A es un subconjunto tal que, para cada $p \in A$, $Arcos(p, X)$ es compacto, entonces la función $\alpha_A^{-1} : KA(A, X) \to A$ definida por $\alpha_A^{-1}(Arcos(p, X)) = p$ es continua.*

Demostración. Sean $\{Arcos(p_n, X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $KA(A, X)$ que converge al punto $Arcos(p, X)$ en $KA(A, X)$. Como $\{p_n\} \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \{p_n\} \in Arcos(p, X)$, dado que el hiperespacio $F_1(X)$ es cerrado, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \{p_n\} = \{p\}$, de esta forma la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p. Concluimos que la función α_A^{-1} es continua. $\square$

Definición 6.5. *Sea X un continuo. Definimos el hiperespacio*

$$K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}.$$

En 1977, Roger W. Wardle prueba en [34, Teorema 2.2] que para un continuo X la función $\kappa : X \to K(X)$ definida por $\kappa(p) = C(p, X)$, para cada $p \in X$ es continua si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley. Bajo esa temática, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 6.6. *Si X es un arco, entonces la función $\alpha_X : X \to KA(X)$ definida por $\alpha_X(p) = Arcos(p, X)$, para cada $p \in X$, es continua.*

Demostración. Observemos que cada subcontinuo de X es un arco, así $C(p, X) = Arcos(p, X)$. De esta forma la función $\alpha_X = \kappa$ y como X tiene la propiedad de Kelley, se sigue que la función α_X es continua. $\square$

Teorema 6.7. *Sea X un continuo tal que $\mathcal{M}(X)$ es compacto. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por arcos si y sólo si la función $\alpha_X : X \to KA(X)$ definida por $\alpha_X(p) = Arcos(p, X)$, para cada $p \in A$, es continua.*

Demostración. Como $\mathcal{M}(X)$ es compacto, por el *Teorema 2.35*, tenemos que $Arcos(p, X)$ es compacto, para cada $p \in X$, así la función α_X está bien definida.

Para la necesidad, supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Sean $p \in X$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Probaremos que la sucesión $\{\alpha_X(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha_X(p)$.

Sabemos que $\alpha_X(p_n) = Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_X(p) = Arcos(p, X)$. Queremos probar que $\lim_{n\to\infty} Arcos(p_n, X) = Arcos(p, X)$. Por *Lema 1.32*, basta probar que:

$$Arcos(p, X) \subseteq \liminf Arcos(p_n, X) \text{ y } \limsup Arcos(p_n, X) \subseteq Arcos(p, X).$$

(1) Probemos que $Arcos(p, X) \subseteq \liminf Arcos(p_n, X)$.

Sea $L \in Arcos(p, X)$. Como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p y X tiene la propiedad de Kelley por arcos, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $L_n \in Arcos(p_n, X)$ tal que la sucesión $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L y $L_n \in Arcos(p_n, X)$. Por la *Proposición 1.31*, tenemos que $L \in \liminf L_n$.

(2) $\limsup Arcos(p_n, X) \subseteq Arcos(p, X)$.

Sea $L \in \limsup Arcos(p_n, X)$, entonces existe una subsucesión $\{Arcos(p_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{Arcos(p_n, X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $L_{n_k} \in Arcos(p_{n_k}, X)$ tal que la sucesión $\{L_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a L. Observemos que L es un subcontinuo de X y $\lim_{n\to\infty} L_{n_k} = L$, como $\mathcal{M}(X)$ es compacto se sigue que $L \in \mathcal{M}(X)$, más aún como $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a p y $p_{n_k} \in L_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $L \in Arcos(p, X)$.

Por (1) y (2), $\lim_{n\to\infty} Arcos(p_n, X) = Arcos(p, X)$, es decir, $\{\alpha_X(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha_X(p)$ y así la función α_X es continua.

Para la suficiencia, supongamos que la función α es continua. Sean $p \in X$, $M \in Arcos(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Como la función α_X es continua, tenemos que $\{\alpha_X(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha_X(p)$, es decir, la sucesión $\{Arcos(p_n, X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Arcos(p, X)$ en $KA(X)$. Como $M \in Arcos(p, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \in Arcos(p_n, X)$ tal que la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M. Concluimos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. $\square$

Teorema 6.8. *Sea X una dendrita. Entonces X es un arco si y sólo si la función $\alpha : X \to KA(X)$ definida por $\alpha_X(p) = Arcos(p, X)$, para cada $p \in X$, es continua.*

Demostración. La necesidad se sigue de la *Proposición 6.6*. Para la suficiencia, por el *Teorema 1.47*, como X es una dendrita, tenemos que $\mathcal{M}(X)$ es compacto. Además, supongamos que la función α_X es continua, luego por el *Teorema 6.7*, tenemos que X tiene la propiedad de Kelley por arcos. Así, por el *Teorema 4.16* tenemos que X es un arco. $\square$

Conjuntando los resultados de este capítulo obtenemos la siguiente caracterización del arco.

Teorema 6.9. *Sea X una dendrita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es un arco.

(2) X tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(3) La función $\alpha_X : X \to KA(X)$ definida por $\alpha_X(p) = Arcos(p, X)$, para cada $p \in A$, es continua.

(4) $KA(X)$ es compacto.

Demostración. La equivalencia entre (1) y (2) es el *Teorema 4.16*. Como X es dendrita por el *Teorema 1.47*, $\mathcal{M}(X)$ es compacto, luego la equivalencia entre (2) y (3) es el *Teorema 6.7*. La equivalencia entre (1) y (3) es el *Teorema 6.8*. Basta probar que (1) es equivalente a (4). Para ver que (1) implica (4), supongamos que X es un arco, por el *Teorema 2.5*, $Arcos(p, X)$ es compacto, para cada $p \in X$, así de la *Proposición 6.3*, tenemos que α_X es biyectiva. Por la *Proposición 6.6*, la función α_X es continua. Así, α_X es un homeomorfismo, luego $KA(X)$ es compacto. Ahora, para ver (4) implica (1), supongamos que $KA(X)$ es compacto. Por la *Proposición 6.4*, la función α_X^{-1} es continua. Por la *Proposición 6.3*, tenemos que la función α_X^{-1} es biyectiva, luego α_X^{-1} es un homeomorfismo. De aquí α_X es continua. Como X es una dendrita, por el *Teorema 6.8*, se sigue que X es un arco. $\square$

Capítulo 7

La propiedad de Kelley por medios

De forma similar al Capítulo 4, inspirados en la *Definición 4.1* y en el estudio del hiperespacio de arcos en X que contienen a p como punto medio, $Medio_\mu(p, X)$, introducimos el siguiente concepto:

Definición 7.1. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Diremos que X tiene la* **propiedad de Kelley por medios***, si para cada punto $p \in X$, para cada $A \in Medio_\mu(p, X)$ y para cada sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 7.2. *Si X es un continuo que no contiene arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios.*

Demostración. Sea X un continuo que no contiene arcos. Notemos que $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$, para cada $p \in X$. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Notemos que $A = \{p\}$, así basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a $\{p\}$. De donde X tiene la propiedad de Kelley por medios. $\square$

Corolario 7.3. *El pseudoarco tiene la propiedad de Kelley por medios.*

Teorema 7.4. *La propiedad de Kelley por medios es una propiedad topológica entre continuos.*

Demostración. Sean X y Y continuos tal que X tiene la propiedad de Kelley por medios. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Probaremos que Y tiene la propiedad de Kelley por medios. Sea μ una función de Whitney para $C(Y)$. Consideremos $y \in Y$, $B \in Medio_\mu(p, Y)$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y convergente a y. Como h es un homeomorfismo, tenemos que $h^{-1}(y) \in X$ y $h^{-1}(B) \in Arcos(h^{-1}(y), X)$. Sea $C(h) : C(X) \to C(Y)$ la función definida por $C(h)(A) = h(A)$, se sabe que $C(h)$ es un homeomorfismo, ya que h lo es. Definamos $\gamma : C(X) \to [0, 1]$ tal que $\gamma = \mu \circ C(h)$. Por el *Lema 3.3*, γ es una función continua, más aún γ es una función de Whitney para $C(X)$.

Afirmación 7.4.1. *$h^{-1}(y)$ es punto medio de $h^{-1}(B)$ con respecto de γ.*

Prueba de la Afirmación 7.4.1. Como $B \in Medios_\mu(p, X)$, sean K y L arcos en B tales que $B = K \cup L$, $K \cap L = \{y\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Observemos que $h^{-1}(B) = h^{-1}(K \cup L) = h^{-1}(K) \cup h^{-1}(L)$, además $h^{-1}(K) \cap h^{-1}(L) = h^{-1}(K \cap L) = h^{-1}(\{y\}) = \{h^{-1}(y)\}$. Como h es un homeomorfismo, $h^{-1}(K)$ y $h^{-1}(L)$ son arcos. Por otro lado, tenemos que

$$\gamma(h^{-1}(K)) = \mu(C(h)(h^{-1}(K))) = \mu(h(h^{-1}(K))) = \mu(K) = \mu(L) = \\ \mu(h(h^{-1}(L))) = \mu(C(h)(h^{-1}(L))) = \gamma(h^{-1}(L)).$$

Por lo que $h^{-1}(y)$ es punto medio de $h^{-1}(B)$ respecto de γ, y así queda demostrada la Afirmación 7.4.1.

Se sigue que $h^{-1}(B) \in Medio_\mu(h^{-1}(y), X)$, como X tiene la propiedad de Kelley por medios, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $h^{-1}(B)$ tal que $A_n \in Medio_\mu(h^{-1}(y_n), X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 7.4.2. *$h(A_n) \in Medio_\mu(y_n, Y)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba de la Afirmación 7.4.2. Como $A_n \in Medio(h^{-1}(y_n), X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen K_n y L_n subcontinuos de A_n tales que $A_n = K_n \cup L_n$, $K_n \cap L_n = \{h^{-1}(y_n)\}$ y $\gamma(K_n) = \gamma(L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $h(A_n) = h(K_n) \cup h(L_n)$, $h(K_n)$ y $h(L_n)$ son subcontinuos de $h(A_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\gamma(K_n) = \gamma(L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mu(C(h)(K_n)) = \mu(C(h)(L_n))$ y así, $\mu(h(K_n)) = \mu(h(L_n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Falta probar que $h(K_n) \cap h(L_n) = \{y_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $h(h^{-1}(y_n)) \in h(K_n) \cap h(L_n)$, así $y_n \in h(K_n) \cap h(L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, sea $q \in h(K_n) \cap h(L_n)$, se sigue que $h^{-1}(q) \in h^{-1}(h(K_n)) \cap h^{-1}(h(L_n))$, luego $h^{-1}(q) \in K_n \cap L_n$, luego $h^{-1}(q) = h^{-1}(y_n)$, finalmente como h^{-1} es inyectiva, se tiene que $q = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $h(K_n) \cap h(L_n) = \{y_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, así $h(A_n) \in Medio_\mu(y_n, Y)$. Con lo que queda demostrada la Afirmación 7.4.2.

Por otro lado, como h es una función continua y la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $h^{-1}(B)$, se sigue que $\{h(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a B, por lo tanto, Y tiene la propiedad de Kelley por medios. □

Teorema 7.5. *Si X es un arco, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios.*

DEMOSTRACIÓN. Por el *Teorema 7.4*, basta considerar a $X = [0, 1]$. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. p es punto extremo de X.

En este caso, por el *Teorema 3.6*, $Medio_\mu(p, X) = \{\{p\}\}$, luego $A = \{p\}$, entonces basta considerar $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A.

Caso 2. p no es punto extremo de X.

Notemos que $p \in X \setminus \{0, 1\}$. Sea $r = \text{mín}\{\mu([0, p]), \mu([p, 1])\}$, sin perder generalidad, supongamos que $r = \mu([0, p])$, existe $t \in (p, 1)$ tal que $r = \mu([p, t])$.

Sea $R = [0, t]$, claramente $R \in Medio_\mu(p, X)$, más aún, por el *Lema 3.19*, sabemos que $Medio_\mu(p, R) = Medio_\mu(p, X)$. Sea $A \in Medio_\mu(p, R)$ tal que $A = [a, b]$, observemos que $a \in [0, p]$ y $b \in [p, t]$. Sea $\varepsilon = \mu([a, p])$, como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in [a, b]$, para cada $n \geq N$. Para cada $n \geq N$, sea $r_n = \text{mín}\{\mu([a, p_n]), \mu([p_n, b])\}$.

Afirmación 7.5.1. *Si* $p_{n_m} \in \{p_n\}_{n\geq N}$ *tal que* $r_{n_m} = \mu([a, p_{n_m}])$, *entonces existe una sucesión* $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ *convergente a* A *tal que* $B_{n_m} \in Medio_\mu(p_{n_m}, X)$*, para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Prueba de la Afirmación 7.5.1. Se tiene que existe $q_{n_m} \in [p_{n_m}, b]$ tal que $r_{n_m} = \mu([p_{n_m}, q_{n_m}])$. Sea $B_{n_m} = [a, q_{n_m}]$, claramente $B_{n_m} \in Medio_\mu(p_{n_m}, X)$. Probaremos que la sucesión $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a A. Como A es un arco, por el [7, Corolario 4], A es suave en cada uno de sus puntos, en particular en a, luego como la sucesión $\{p_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a p, la sucesión $\{[a, p_{n_m}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $[a, p]$. Por otro lado, existe $q \in [a, b]$ tal que la sucesión $\{q_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a q, luego, como A es suave en q, se tiene que la sucesión $\{[p_{n_m}, q_{n_m}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge al arco $[p, q]$. Además como μ es una función continua tenemos que $\{\mu([p_{n_m}, q_{n_m}])\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $\mu([p, q])$, así, dado que $\mu([a, p_{n_m}]) = \mu([p_{n_m}, q_{n_m}])$, se sigue que $\mu([p, q]) = \mu([a, p]) = \mu([p, b])$ y $[p, q] \subseteq [p, b]$, se sigue que $[p, q] = [p, b]$. Luego la sucesión $\{B_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $[a, b] = A$.

Similarmente, si $p_{n_k} \in \{p_n\}_{n\geq N}$ tal que $r_{n_k} = \mu([p_{n_k}, b])$, entonces existe una sucesión $\{B_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $B_{n_k} \in Medio_\mu(p_{n_k}, X)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Queda demostrada la Afirmación 7.5.1.

Ahora, definimos la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue: para cada $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, sea $A_n = B_{n_m}$ si $r_{n_m} = \mu([a, p_{n_m}])$ o $A_n = B_{n_k}$, si $r_{n_k} = \mu([p_{n_k}, b])$, para cada $n \geq N$. Luego, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A y $A_n \in Arcos(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 7.6. *Si* X *es una curva cerrada simple, entonces* X *tiene la propiedad de Kelley por medios.*

Demostración. Por el *Teorema 7.4*, basta considerar $X = S^1$. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Observemos que si $A = \{p\}$, entonces basta considerar $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A. Supongamos que A es un arco con puntos extremos a y b. Sean K y L arcos en A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Sea $\varepsilon = \mu(K)$, sin perder generalidad, supongamos que $K = ap$ y $L = pb$ en A. Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in A$, para cada $n \geq N$. Sean $\{p_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_{n_k} \in K$. Para cada $n_k \in \mathbb{N}$, consideremos $q_{n_k} \in R_{n_k} = p_{n_k}b$ arco en A tal que la sucesión $\{q_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a q y $\mu(ap_{n_k}) = \mu(p_{n_k}q_{n_k})$. Observemos que la sucesión de arcos $\{aq_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, así de forma similar al *Teorema 4.8*, podemos probar que la sucesión $\{aq_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A.

De forma similar, para la subsucesión $\{p_{n_l}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_{n_l} \in L$, existe una sucesión de arcos $\{t_{n_l}b\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $t_{n_l}b \in Medio_\mu(p, X)$. Concluimos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Proposición 7.7. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Si X contiene un n-odo simple libre, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por medios.*

DEMOSTRACIÓN. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Supongamos lo contrario, es decir que X tiene la propiedad de Kelley por medios. Sean Y el n-odo simple libre contenido en X y p el vértice de Y. Sean $A_1, \ldots, A_n$ los arcos en X tales que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ y $A_i \cap A_j = \{p\}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $y_i \in A_i$ el punto extremo de A_i, distinto de p. Sean $x_1 \in A_1 \backslash \{p, y_1\}$ y $x_2 \in A_2 \backslash \{p, y_2\}$, consideramos los arcos px_1 y px_2 contenidos propiamente en A_1 y A_2, respectivamente, tales que $\mu(px_1) = \mu(px_2)$. Sea $M = px_1 \cup px_2$ se sigue que $M \in Medio_\mu(p, X)$, sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p tal que $p_n \in A_3 \setminus \{p, y_3\}$. Como X tiene la propiedad de Kelley por medios, existe $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como Y es un n-odo simple libre, tenemos que $Y \setminus E(Y)$ es un conjunto abierto en X. Sea $\mathfrak{U} = \langle Y \setminus E(Y) \rangle$, observemos que $M \in \mathfrak{U}$. Así, como $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a M, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n \in \mathfrak{U}$, para cada $n \geq N$. Se sigue que $M_n \subseteq Y \setminus E(Y)$, para cada $n \geq N$.

Afirmación 7.7.1. *Existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $p \in M_n$, para cada $n \geq l$.*

Prueba de la Afirmación 7.7.1. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_1, \varepsilon) \subseteq A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $B(x_2, \varepsilon) \subseteq A_2 \setminus \{p, y_2\}$, como $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a M, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$M_n \cap B(x_1, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ y } M_n \cap B(x_2, \varepsilon) \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geq N_1.$$

Luego

$$M_n \cap A_1 \neq \emptyset \text{ y } M_n \cap A_2 \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geq N_1.$$

Observemos que $A_i \setminus \{p\}$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, son las arcos componentes de $Y \setminus \{p\}$, como $B(x_1, \varepsilon) \subseteq A_1 \setminus \{p, y_1\}$ y $B(x_2, \varepsilon) \subseteq A_2 \setminus \{p, y_2\}$, se tiene que

$$M_n \cap (A_1 \setminus \{p\}) \neq \emptyset \text{ y } M_n \cap (A_2 \setminus \{p\}) \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geq N_1.$$

Como $A_1 \setminus \{p\} \neq A_2 \setminus \{p\}$, se sigue que $p \in M_n$, para cada $n \geq N_1$. Sea $l = \max\{N, N_1\}$, de esta forma $p \in M_n$, para cada $n \geq l$. Con lo cual queda demostrada la Afirmación 7.7.1.

Finalmente, como $M_n \cap (A_1 \setminus \{p\}) \neq \emptyset$, $M_n \cap (A_2 \setminus \{p\}) \neq \emptyset$ y $p \in M_n$, para cada $n \geq l$, se sigue que $M_n \subseteq A_1 \cup A_2 \setminus \{y_1, y_2\}$, esto implica que $p_n \notin M_n$, para cada $n \geq l$, lo cual es una contradicción ya que p_n es punto medio de M_n, para cada $n \geq N$. Concluimos que X no tiene la propiedad de Kelley por medios. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la propiedad de Kelley no implica la propiedad de Kelley por medios.

Ejemplo 7.8. *Sea X un triodo simple. Por la Proposición 7.7, X no tiene la propiedad de Kelley por medios. Por [24, Ejemplo (16.11)], X tiene la propiedad de Kelley.*

El siguiente ejemplo muestra que la propiedad de Kelley por medios no implica la propiedad de Kelley por arcos ni la propiedad de Kelley.

Ejemplo 7.9. *Sea P un pseudoarco, $p \in P$, Y un arco tal que p es punto extremo de Y y $P \cap Y = \{p\}$. Sea $X = P \cup Y$, las siguientes afirmaciones se cumplen*

(1) X no tiene la propiedad de Kelley por arcos.

(2) X tiene la propiedad de Kelley por medios.

(3) X no tiene la propiedad de Kelley.

Demostración. El inciso *(1)* es la *Proposición 4.17.*
Ahora, probemos el inciso *(2)*. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Sea $q \in X$, tenemos los siguientes tres casos:

Caso 1. $q \in Y \setminus \{p\}$.
Notemos que $Medio(q, X) = Medio(q, Y)$, ya que $\{q\} \in Y$ y si A es un arco que tiene a q como punto medio, entonces $A \subseteq Y$. Sea $M \in Medio(q, X)$ y $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a q. Sea $\varepsilon = d(p, q)$, como la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a q, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(q, q_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $n \geq N$. Se tiene que $q_n \in Y$, para cada $n \geq N$. Consideremos la subsucesión $\{q_n\}_{n\geq N}$, la cual converge a q y está contenida en Y, como Y es un arco, en particular tiene la propiedad de Kelley por medios, luego existe una sucesión $\{M_n\}_{n\geq N}$ convergente a M tal que $M_n \in Medio(q_n, X)$, para cada $n \geq N$. Así, X tiene la propiedad de Kelley por medios en q.

Caso 2. $q \in P \setminus \{p\}$.
Observemos que $Medio(q, X) = \{\{q\}\}$. Así, si $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a a, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \in P$, para cada $n \geq N$. Luego, la subsucesión $\{q_n\}_{n\geq N}$ está contenida en P, luego, basta considerar la sucesión $\{\{q_n\}\}_{n\geq N}$ la cual converge a $\{q\}$. Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley por medios en cada punto de $P \setminus \{p\}$.

Caso 3. $q = p$.
Observemos que $Medio(q, X) = \{\{q\}\}$, luego, si $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X convergente a a, basta considerar la sucesión $\{\{q_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a $\{q\}$.

De los *Casos 1*, *2* y *3*, concluimos que X tiene la propiedad de Kelley por medios.

Finalmente, probemos el inciso *(3)*. Observamos que Y es un subcontinuo de X tal que $p \in Y$. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a p tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in P$ y la composante de p_n en P es diferente de la composante de p en P.
Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley, en particular, X tiene la propiedad de Kelley en p. Así, existe una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a Y tal que $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 7.9.1. *existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p \in K_n$, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 7.9.1. Sea $x \in Y \setminus \{p\}$. Como $Y \setminus \{p\}$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap (Y \setminus \{p\}) \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Notemos que $\{p\}$ separa a $Y \setminus \{p\}$ y $P \setminus \{p\}$ en X, se sigue que $p \in K_n$, para cada $n \geq N$. Queda probada la *Afirmación 7.9.1.*

Afirmación 7.9.2. *$K_n \cap P$ es conexo, para cada $n \geq N$.*

Prueba de la Afirmación 7.9.2. Sean $n \geq N$, $U = K_n \cap (Y \setminus \{p\})$ y $V = K_n \cap (P \setminus \{p\})$. Notemos que U y V son subconjuntos abiertos de $K_n \setminus \{p\}$, $K_n \setminus \{p\} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$. Así, U y V está mutuamente separados en $K_n \setminus \{p\}$. Por [25, Proposición 6.3], $V \cup \{p\}$ es conexo. Observemos que $V \cup \{p\} = (K_n \cap (P \setminus \{p\})) \cup \{p\} = K_n \cap P$. Queda probada la *Afirmación 7.9.2.*

Finalmente, por la *Afirmación 7.9.2*, para cada $n \geq N$, $K_n \cap P$ es un subcontinuo de P. Como $p, p_n \in K_n \cap P$ y los puntos p y p_n están en diferentes composantes de P, se sigue que $K_n \cap P = P$. De donde $P \subset \lim_{n\to\infty} K_n = Y$, lo cual contradice que $Y \cap P = \{p\}$. Por lo tanto, X no tiene la propiedad de Kelley. □

El siguiente resultado proporciona una caracterización del arco y la curva cerrada simple en la clase de las gráficas finitas.

Teorema 7.10. *Sea X una gráfica finita. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Para la necesidad, supongamos que X no es arco ni curva cerrada simple y que X tiene la propiedad de Kelley por medios, por la *Proposición 1.8*, se tiene que existe $p \in X$ tal que $ord(p, X) \geq 3$. Luego, por la *Proposición 4.14*, tenemos que X contiene un n-odo simple libre. Así, por la *Proposición 7.7*, X no tiene la propiedad de Kelley por medios, lo cual es una contradicción. Concluimos que X es un arco o una curva cerrada simple. La suficiencia se sigue del *Teorema 7.5* y el *Teorema 7.6.* □

Teorema 7.11. *Sea X una dendrita. Entonces X es un arco si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley por medios.*

Demostración. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. La necesidad se sigue de la *Proposición 7.5.* Para probar la suficiencia, sea d una métrica convexa para X. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por medios y que X no es un arco. Por [25, 8.40 (a)], existe un punto p en X tal que $ord(p, X) \geq 3$, luego existen arcos en X, A_1, A_2 y A_3, tales que p es punto extremo de A_i y $A_i \cap A_j = \{p\}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos. Sean $a_i \in A_i$ el punto extremo de A_i distinto de p, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $\mu(A_1) < \mu(A_2)$, así existe $x \in A_2$ tal que $B_1 = px$ arco en A_2 y $\mu(A_1) = \mu(B_1)$.

Sea $M = A_1 \cup B_1$, note que a_1 y x son los puntos extremos de M. Sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A_3 \setminus \{p, a_3\}$ convergente a p. Como X tiene la propiedad de Kelley por medios, existe $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a M tal que $M_n \in Medio(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sean x_n y y_n los puntos extremos de M_n. Consideramos la función de puntos extremos $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$. Como X es dendrita por el *Lema 1.57*, la función E es continua. Luego la sucesión $\{E(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $E(M)$, es decir, la sucesión $\{\{x_n, y_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{x, a_1\}$. Sin perder generalidad, supongamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a_1. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{d(a_1, A_3), d(x, A_3), d(a_1, x)\}$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $y_n \in B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$. Como d es una métrica convexa, se tiene que $B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ son conexos, de tal forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $A_n = x_n x$ y $B_n = y_n a_1$ arcos en X tales que $A_n \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B_n \subseteq B(a_1, \frac{\varepsilon}{2})$. Probemos la siguiente afirmación:

Afirmación 7.11.1. *Para cada $n \geq N$, $p \in M_n$.*

Prueba de la Afirmación 7.11.1. Supongamos que existe $k \geq N$ tal que $p \notin M_k$. Tenemos que $A_k \cup B_k \cup M_k$ es un conjunto conexo en $X \setminus \{p\}$ que contiene tanto a a_1 como a x lo cual es una contradicción ya que p separa a a_1 de x, es decir, $X \setminus \{p\}$ es disconexo. Así queda demostrada la Afirmación 7.11.1.

Sean U_{a_1}, U_x y U_{a_3} las componentes de los puntos a_1, a_2 y a_3, respectivamente. Como $x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, para cada $n \geq N$ y $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ es un conexo, tenemos que $x_n \in U_x$, para cada $n \geq N$. De forma similar se prueba que $y_n \in U_{a_1}$, para cada $n \geq N$. Como $p_n \in A_3 \setminus \{p\}$, existe un arco $C_n = p_n a_3 \subseteq A_3 \setminus \{p\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así $p_n \in U_{a_3}$, para cada $n \geq N$. Se sigue que M_n es un arco contiene a p tal que $M_n \cap U_{a_1} \neq \emptyset$, $M_n \cap U_{a_2} \neq \emptyset$ y $M_n \cap U_{a_3} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es un arco. $\square$

Hemos visto que en las dendritas, tener un punto de ramificación implica que el continuo no tiene la propiedad de Kelley por medios, sin embargo, existen continuos que no tienen puntos de ramificación y que tampoco tienen la propiedad de Kelley por medios, como veremos a continuación.

Teorema 7.12. *El continuo sen$(\frac{1}{x})$ tiene la propiedad de Kelley por medios.*

Demostración. Sean $X = Y \cup W$, donde $Y = \{0\} \times [-1, 1]$ y $W = \{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\}$ y μ una función de Whitney para $C(X)$. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a p, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $p \in \{(0, -1), (0, 1), (1, sen(1))\}$.
Sabemos que si $p \in \{(0, -1), (0, 1), (1, sen(1))\}$, entonces para cada $A \in Medio_\mu(p, X)$ tenemos que p es punto extremo de A. Sean $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a p. Note que $A = \{p\}$, basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A.

Observemos que, si $A \in Medio_\mu(p, X)$ tal que $A = \{p\}$, entonces como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ basta considerar la sucesión $\{\{p_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a A, de ahora en adelante, supongamos que A es un arco en X.

Caso 2. $p \in W \setminus \{(1, sen(1))\}$.

Supongamos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq j$, $p_n \in W$. Sean K y L subcontinuos de A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$, sea $\varepsilon = \mu(K)$, como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$, luego $p_n \in A$, para cada $n \geq N$. Consideremos la subsucesión $\{p_n\}_{n\geq N}$ contenida en A, como A es un arco por el *Teorema 3.6*, A tiene la propiedad de Kelley por medios, así existe $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a A tal que $B_n \in Medio_\mu(p_n, A)$, para cada $n \geq N$. Como $Medio_\mu(p_n, A) \subseteq Medio_\mu(p_n, X)$, se tiene que $B_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \geq N$. Ahora, definimos la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue: $A_n = \{p_n\}$, para cada $n < N$ y $A_n = B_n$, para cada $n \geq N$. Claramente, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Caso 3. $p \in Y \setminus \{y_1, y_2\}$ con $y_1 = (0, 1)$ y $y_2 = (0, -1)$.
Observemos que, si la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en Y, dado que Y es un arco por el *Teorema 3.6*, tenemos lo deseado. Así, supongamos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in W$, para cada $n \geq j$. Como $A \in Medio_\mu(p, X)$ es un arco, existen K y L subcontinuos de A tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$. Como $A \subseteq Y$, sin perder generalidad supongamos que $K \subseteq py_1$ y $L \subseteq py_2$. Sea $\varepsilon = \mu(K)$, como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \varepsilon$ y $p_n \in W$, para cada $n \geq N$. Sea $e = (1, sen(1))$. Para todo $n \geq N$, sea $Z_n = Y \cup \{(t, sen(\frac{1}{t})) : t \in (0, t_n]$ con $(t_n, sen(\frac{1}{t_n})) = p_n\}$ y $M_n = p_n e$ el arco contenido en W con puntos extremos p_n y e. Como la sucesión $\{p_n\}_{n\geq N}$ converge a p, sin perder generalidad, podemos suponer que $\mu(Z_n) \leq \mu(M_n)$, para cada $n \geq N$. Se sigue que, como $K \subsetneq Z_n$, para cada $n \geq N$, tenemos que $\mu(K) < \mu(Z_n)$, para cada $n \geq N$. Luego, $\mu(K) < \mu(M_n)$, para cada $n \geq N$.

Afirmación 7.12.1. *Para todo $n \geq N$, existen arcos R_n y S_n tales que $R_n \subseteq M_n$, $S_n \in Z_n$ y $\mu(R_n) = \mu(K) = \mu(S_n)$.*

Prueba de la Afirmación 7.12.1. Observemos que $\{p_n\} \subsetneq M_n$ y $\{p_n\} \subsetneq Z_n$, para cada $n \geq N$. Como $\mu(K) \in [\mu(\{p_n\}), \mu(M_n)]$ y $\mu(K) \in [\mu(\{p_n\}), \mu(Z_n)]$, para cada $n \geq N$, por el *Lema 1.37*, existen subcontinuos R_n y S_n, tales que $\{p_n\} \subseteq R_n \subseteq M_n$ y $\{p_n\} \subseteq S_n \subseteq Z_n$. Claramente R_n es un arco, para cada $n \geq N$, probaremos que S_n es un arco contenido en Z_n, para cada $n \geq N$, supongamos que existe $k \geq N$, tal que S_k no es un arco, tenemos que S_k es un singular o es homeomorfo a Z_k, como $\mu(S_k) = \mu(K) > 0$, se sigue que S_k no es un singular, luego, como $p_k \in S_k$ y es homeomorfo a Z_k, se tiene que $S_k = Z_k$, y así $\mu(S_k) > \mu(K)$, lo cual es una contradicción. Así S_n es un arco, para cada $n \geq N$. De esta forma queda demostrada la Afirmación 7.12.1.

Observemos que $R_n \cap S_n = \{p_n\}$, para cada $n \geq N$. Además que tanto S_n y R_n, pueden ser como se muestra en la siguiente *Figura 7.1*:
Sean s_n el punto extremo de S_n diferente de p_n y r_n el punto extremo de R_n diferente de p_n, para cada $n \geq N$. Sea $\pi_2 : X \to Y$ la proyección de X sobre Y. Sean $\{K_n\}_{n\geq N}$ y $\{L_n\}_{n\geq N}$ las sucesiones definidas por:

$$K_n = \begin{cases} R_n, & si \quad \pi_2(r_n) \subseteq py_1, \\ S_n, & si \quad \pi_2(s_n) \subseteq py_1. \end{cases}$$

$$L_n = \begin{cases} R_n, & si \quad \pi_2(r_n) \subseteq py_2, \\ S_n, & si \quad \pi_2(s_n) \subseteq py_2. \end{cases}$$

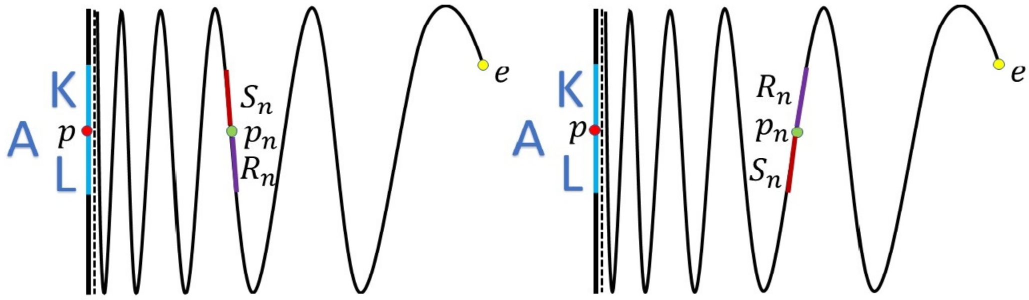

Figura 7.1: Arcos S_n y R_n

Así, $\{K_n\}_{n\geq N}$ y $\{L_n\}_{n\geq N}$ son sucesiones en $C(X)$, podemos considerar subsucesiones convergentes $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{K_n\}_{n\geq N}$ y $\{L_n\}_{n\geq N}$, respectivamente. Como la sucesión $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Y, tenemos que $\lim_{n\to\infty} S_n \subseteq Y$. También se puede probar que la sucesión $\lim_{n\to\infty} R_n \subseteq Y$. Luego, $\lim_{i\to\infty} K_{n_i} \subseteq Y$ y $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} \subseteq Y$. Además, por la forma en que se construyeron las sucesiones $\{K_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{L_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que $p, e_1 \in \lim_{i\to\infty} K_{n_i}$, donde $e_1 = \lim_{i\to\infty} k_i$ y k_i es el punto extremo de K_{n_i} diferente de p_{n_i}, para cada $i \in \mathbb{N}$. De modo que $e_1 \in py_1$. De forma similar se prueba que $e_2 \in py_2$, con $e_2 = \lim_{i\to\infty} l_i$ y l_i es el punto extremo de K_{n_i} diferente de p_{n_i}. Luego, $\lim_{i\to\infty} K_{n_i} \subseteq py_1$ y $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} \subseteq py_2$. Tenemos que $\lim_{i\to\infty} K_{n_i}$ es un arco con puntos extremos p y e_1, por otro lado, $\lim_{i\to\infty} L_{n_i}$ es un arco con puntos extremos p y e_2, como μ es una función continua se sigue que $\mu(\lim_{i\to\infty} K_{n_i}) = \mu(K)$ y $\mu(\lim_{i\to\infty} L_{n_i}) = \mu(L)$, además, K y $\lim_{i\to\infty} K_{n_i}$ son comparables, de modo que $\lim_{i\to\infty} K_{n_i} = K$, de forma similar se prueba que $\lim_{i\to\infty} L_{n_i} = L$. Así, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que $H(A, B_{n_i}) \leq \varepsilon$, para cada $n_i \geq N_1$, donde $B_{n_i} = K_{n_i} \cup L_{n_i}$. Claramente $B_{n_i} \in Medio_\mu(p_{n_i}, X)$, para cada $n_i \geq N_1$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida como sigue: $A_n = \{p_n\}$, para $n < N_1$ y $A_n = B_{n_i}$, si $n \geq N_1$, la cual converge a A y es tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 7.13. *Si X es el círculo de Varsovia, entonces X no tiene la propiedad de Kelley por medios.*

Demostración. Sean $Y = \{0\} \times [-2, 1]$, $Z_1 = [0, 1] \times \{-2\}$, $Z_2 = \{1\} \times [-2, \text{sen}(1)]$ y $W = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$. Definimos $X = Y \cup Z_1 \cup Z_2 \cup W$ el círculo de Varsovia. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Sea $p = (0, -1)$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ tal que A es arco y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión en X definida por $p_n = (x_n, \text{sen}(\frac{1}{x_n}))$ con $x_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p. Como A es un arco, tenemos que $A \subseteq \{0\} \times [-2, 1]$. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por medios, luego, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean a y b los puntos extremos de A, sin perder generalidad, supongamos que $b \in \{0\} \times [-2, 1)$. Sea $\varepsilon = d(b, p)$. Como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap B(b, \varepsilon) \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. De forma similar, al *Teorema 5.2*, tenemos que $Z_2 \subseteq A_n$, para cada $n \geq N$, luego $Z_2 \subseteq A$, lo cual es una contradicción a la elección de A. Por lo tanto X no tiene la propiedad de Kelley por medios. $\square$

Proposición 7.14. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. La familia $\mathcal{N} = \{Medio_\mu(p, X) : p \in X\}$ forma una partición del hiperespacio $\mathcal{M}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que, para cada $p \in X$, $Medio_\mu(p, X) \neq \emptyset$, ya que $\{p\} \in Medio_\mu(p, X)$. Además, si p y q son puntos distintos de X, entonces $Medio_\mu(p, X) \cap Medio(q, X) = \emptyset$, en efecto, si $A \in Medio_\mu(p, X) \cap Medio(q, X)$, entonces p y q son punto medio de A, así $p = q$, lo cual es una contradicción. Además, $\bigcup \mathcal{N} = \mathcal{M}(X)$, si $A \in \bigcup \mathcal{N}$, entonces, existe $p \in X$ tal que $A \in Medio_\mu(p, X)$, luego por definición tenemos que $A \in \mathcal{M}(X)$. Por otro lado, si $A \in \mathcal{M}(X)$ y q es el punto medio de A, entonces $A \in Medio(q, X)$, por lo que $A \in \bigcup \mathcal{N}$. Concluimos que $\mathcal{N}$ es una partición de $\mathcal{M}(X)$. $\square$

Capítulo 8

El hiperespacio $KM(X)$ y la propiedad de Kelley por medios

En el Capítulo 3, para X un continuo, $p \in X$ y una μ función de Whitney para $C(X)$ estudiamos algunas propiedades del hiperespacio $Medio_\mu(p, X)$. Dados un continuo X, μ una función de Whitney para $C(X)$ y A un subconjunto de X tales que $Medio_\mu(p, X)$ es compacto para cada $p \in A$, definimos la siguiente colección:

$$KM(A, X) = \{Medio_\mu(p, X) : Medio_\mu(p, X) \text{ es compacto, para cada } p \in A\}.$$

Denotaremos a $KM(X, X)$ simplemente por $KM(X)$. A la colección $KM(X)$ lo consideramos como subespacio de $C(C(X))$. En este capítulo, vamos a explorar la siguiente pregunta:

Pregunta 8.1. *¿Qué propiedades topológicas tiene el hiperespacio $KM(A, X)$?*

En esta sección, estudiamos la compacidad de dicho hiperespacio.

Una función que está fuertemente relacionada con la propiedad de Kelley por medio es la que definimos a continuación.

Definición 8.2. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X tal que, para cada $p \in A$, $Medio_\mu(p, X)$ es compacto. Definimos la función*

$$\eta_A : A \to KM(A, X) \text{ dada por } \eta_A(p) = Medio_\mu(p, X), \text{ para cada } p \in A.$$

Proposición 8.3. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X tal que, para cada $p \in A$, $Medio_\mu(p, X)$ es compacto. La función $\eta_A : A \to KM(A, X)$ definida por $\eta_A(p) = Medio_\mu(p, X)$, para cada $p \in A$, es biyectiva.*

Demostración. Probaremos que la función η_A es inyectiva. Sean $p, q \in A$ tales que $p \neq q$. Notemos que $\{p\} \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{q\} \notin Medio(q, X)$, luego $\eta_A(p) = Medio_\mu(p, X) \neq Medio(q, X) = \eta_A(q)$, así η_A es inyectiva.

Ahora, probemos que función η_A es suprayectiva. Note que $Medio_\mu(p, X) \in KM(A, X)$, si $p \in A$. Luego, $\eta_A(p) = Medio_\mu(p, X)$ y así, η_A es suprayectiva. Concluimos que la función η_A es biyectiva. $\square$

Teorema 8.4. *Sea X un continuo. Si A es un subconjunto tal que, para cada $p \in A$, $Medio_\mu(p, X)$ es compacto, entonces la función $\eta_A^{-1} : KM(A, X) \to A$ definida por $\eta_A^{-1}(Medio_\mu(p, X)) = p$, para cada $Medio_\mu(p, X) \in KM(A, X)$, es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{Medio_\mu(p_n, X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $KM(A, X)$ convergente al punto $Medio_\mu(p, X)$ en $KM(A, X)$. Como $\{p_n\} \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \{p_n\} \in Medio_\mu(p, X)$. Dado que el hiperespacio $F_1(X)$ es cerrado, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \{p_n\} = \{p\}$, luego la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p. Concluimos que la función η_A^{-1} es continua. $\square$

Teorema 8.5. *Si X es un arco, entonces la función $\eta_X : X \to KM(X)$ definida por $\eta_X(p) = Medio_\mu(p, X)$, para cada $p \in X$, es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Sean $p \in X$ y una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a p. Probaremos que la sucesión $\{\eta_X(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\eta_X(p)$.

Observemos que $\eta_X(p) = Medio_\mu(p, X)$ y $\eta_X(p_n) = Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Deseamos probar que la sucesión $\{Medio_\mu(p_n, X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Medio_\mu(p, X)$, por el *Lema 1.32*, basta probar que

$$\limsup Medio_\mu(p_n, X) \subseteq Medio_\mu(p, X) \text{ y}$$
$$Medio_\mu(p, X) \subseteq \liminf Medio_\mu(p_n, X).$$

(1) $\limsup Medio_\mu(p_n, X) \subseteq Medio_\mu(p, X)$.

Consideremos $A \in \limsup Medio_\mu(p_n, X)$, entonces existen $n_k \in \mathbb{N}$ y $A_{n_k} \in Medio_\mu(p_{n_k}, X)$ tales que $H(A, A_{n_k}) < \frac{1}{k}$. En particular, tenemos que la sucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a A, más aún, como A es un subcontinuo de X tenemos que A es un arco. Como $p_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $p \in A$. Por otro lado, como X es un arco, se tiene que la función punto medio $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ respecto de μ es continua, así, la sucesión $\{P_\mu(A_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $P_\mu(A)$. Note que $P_\mu(A_{n_k}) = p_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} P_\mu(A_{n_k}) = P_\mu(A)$, esto es $\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p$ así $P_\mu(A) = p$ de donde $A \in Medio_\mu(p, X)$. Concluimos que $\limsup Medio_\mu(p_n, X) \subseteq Medio_\mu(p, X)$.

(2) $Medio_\mu(p, X) \subseteq \liminf Medio_\mu(p_n, X)$.

Sea $A \in Medio_\mu(p, X)$. Como $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p y como X es un arco, por la *Proposición 7.5*, X tiene la propiedad de Kelley por medios, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a A tal que $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $A_n \in \liminf Medio_\mu(p_n, X)$.
Por lo tanto, $\lim Medio_\mu(p_n, X) = Medio_\mu(p, X)$, y así la función η_X es continua. $\square$

Teorema 8.6. *Sea X una dendrita. Entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios si y sólo si la función $\eta_X : X \to KM(X)$ tal que $\eta_X(p) = Medio_\mu(p, X)$, para cada $p \in X$, es continua.*

Demostración. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Para la necesidad, supongamos que X tiene la propiedad de Kelley por medios. Como X es una dendrita, por la *Proposición 7.11*, se tiene que X es un arco, luego, por el *Teorema 8.5*, se tiene que la función η_X es continua. Para la suficiencia, supongamos que la función $\eta_X : X \to KM(X)$ definida por $\eta_X(p) = Medio_\mu(p, X)$ es continua. Sean $p \in X$, $A \in Medio_\mu(p, X)$ y $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente a p. Como la función η_X es continua, $\{\eta_X(p_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\eta_X(p)$, así, la sucesión $\{Medio_\mu(p_n, X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Medio_\mu(p, X)$. Se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in Medio_\mu(p_n, X)$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, luego X tiene la propiedad de Kelley por medios. $\square$

Como una consecuencia del *Teorema 8.5* y el *Teorema 8.6* obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 8.7. *Sea X una dendrita. Entonces X es un arco si y sólo si la función $\eta_X : X \to KM(X)$ tal que $\eta_X(p) = Medio_\mu(p, X)$ es continua.*

Conjuntando los resultados de este capítulo obtenemos la siguiente caracterización del arco.

Teorema 8.8. *Sea X una dendrita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es un arco.

(2) X tiene la propiedad de Kelley por medios.

(3) La función $\eta_X : X \to KM(X)$ tal que $\eta_X(p) = Medio_\mu(p, X)$ es continua.

(4) $KM(X)$ es compacto.

Demostración. La equivalencia entre (1) y (2) es el *Teorema 7.11*. La equivalencia entre (2) y (3) es el *Teorema 8.6*. La equivalencia entre (1) y (3) es el *Teorema 8.5*. Basta probar que (1) es equivalente a (4). Para ver que (1) implica (4), supongamos X es un arco. Por el *Teorema 8.5*, la función $\eta_X : X \to KM(X)$ es continua. Por la *Proposición 8.3*, η_X^{-1} es biyectiva, así η_X es biyectiva. Se sigue que η_X es un homeomorfismo, luego $KM(X)$ es compacto. Ahora, probemos que (4) implica (1), supongamos que $KM(X)$ es compacto. Por el *Teorema 8.4*, la función η_X^{-1} es continua. Por la *Proposición 8.3*, tenemos que la función η_X^{-1} es un homeomorfismo, luego η_X es una función continua. Como X es una dendrita, por el *Corolario 8.7*, se sigue que X es un arco. $\square$

Preguntas

Del presente trabajo se desprenden las siguientes preguntas.

1. ¿Qué propiedades topológicas tiene, $Arcos(p, X)$, el hiperespacio de arcos en X anclados en el punto p?

2. Dado un continuo X. ¿Cuáles son condiciones necesarias y suficientes sobre X para que $Arcos(p, X)$ sea compacto, para cada $p \in X$?

3. Dado un continuo X. ¿Cuáles son condiciones necesarias y suficientes sobre X para que $Arcos(p, X)$ sea homeomorfo a X, para algún $p \in X$?

4. ¿Qué propiedades topológicas tiene, $Medio_\mu(p, X)$, el hiperespacio de arcos en X con punto medio p respecto de μ para cada punto $p \in X$?

5. Dados un continuo X y una función μ de Whitney para $C(X)$. ¿Cuáles son condiciones necesarias y suficientes sobre X para que $Medio_\mu(p, X)$ sea compacto, para cada $p \in X$?

6. Dados un continuo X y una función μ de Whitney para $C(X)$. ¿Cuáles son condiciones necesarias y suficientes sobre X para que $Medio_\mu(p, X)$ sea homeomorfo a X, para algún $p \in X$?

7. Para un continuo X. ¿Si X tiene la propiedad de Kelley por arcos, entonces X tiene la propiedad de Kelley por medios?

Bibliografía

[1] Acosta, G. *La propiedad de Kelley y la contractibilidad de los hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas, 31, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.

[2] Barragán, F.; López, M. de J. *Funciones especiales entre continuos* Capítulo 5 en Topología y sistemas dinámicos III. Editores: J. Juan Angoa, José Arrazola, Raúl Escobedo, Alejandro Illanes, Mauricio Osorio, Julio Poisot, Guillermo Sienrra, Ángel Tamariz, Dirección General de Publicaciones, Manuales y Textos BUAP, 2010.

[3] Beane, R. A. and Charatonik, W. J. *Kelley Remainders of* $[0, \infty)$, Topology Proceedings, volume 32, 101–114, 2008.

[4] Chacón-Tirado, M.; López, M. de J.; Suárez-López, J. L. *Hyperspaces of arcs containing a point*, Topology Proc. 63 (2024), 149–166.

[5] Chacón-Tirado, M., López, M. de J., Suárez-López, J. L. *The property of Kelley by arcs*, (Pre-print)

[6] Charatonik, J. J. *On fans*, Dissertationes Mathematicae, 1967.

[7] Charatonik, J. J. and Eberhart C. *On smooth dendroids*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 67, 291–322, 1970.

[8] Charatonik, J. J. *Inverse limits of arcs and of simple closed curves with confluent bonding mappings*, Period. Math. Hungar. 16 (1985), no. 4, 219–236.

[9] Charatonik, W. J. *Inverse limits of smooth continua*, Comment. Math. Univ. Carolin. 23 (1982), no. 1, 183–191.

[10] Czuba, S. T. On Dendroids with Kelley's Property Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 102, No. 3 (Mar., 1988), 728–730.

[11] Engelking, R. *General Topology*, Sigma Series, 6, Heldermann Verlang, 1989.

[12] Illanes, A. *Hyperspaces of arcs and two-point sets in dendroids*, Topology Appl., 117 (3) (2002), 307–317.

[13] Illanes, A. *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[14] Illanes, A. *Conjuntos espectaculares del plano y el espacio*, Miscelánea Matemática 64, 51–77, (2017).

[15] Illanes, A. *Models of hyperspaces.* Topology Proc., Vol. 41 (2013), 1–26.

[16] Illanes, A., Nadler Jr., S. B. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol.216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[17] Kelley, J. L. *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52(1942), 22–36.

[18] Koch, R. J. and Krule, I. S. *Weak cutpoint ordering on hereditarily unicoherent continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) 879–681.

[19] López, M. de J.; Pellicer Covarrubias, P.; Suárez López, J. L *Las funciones punto medio y de puntos extremos en relación con algunas funciones especiales entre continuos.* Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones 8. Editores: J. Juan Angoa Amador, Raúl Escobedo Conde, Manuel Ibarra Contreras, Agustín Contreras Carreto. Dirección General de Publicaciones, Manuales y textos, BUAP, 2021. http://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/publicaciones/Topologia-y-sus-aplicaciones-8.pdf

[20] López, M.; Pellicer-Covarrubias, P.; Serapio Ramos, I. *Introducción a la función punto medio en continuos*, Integración - UIS [online]. (2016), vol. 34, n. 1, 109–123. ISSN 0120-419X. http://dx.doi.org/10.18273/revint.v34n1-2016007.

[21] López, M. Pellicer-Covarrubias, P. Serapio, I. *A midpoint function and an end point function in continua*, Topology and its Applications 235, (2018), 167–184.

[22] Macías, S. *Topics on continua*, Pure on Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.

[23] Macías Prado, M. del R. *Sobre algunos modelos de hiperespacios de continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B. Universidad Autónoma de Puebla, 28 de agosto 2013. http://www.fcfm.buap.mx/docencia/tesis/licenciatura-m

[24] Nadler, Jr., S. B. *Hyperspaces of sets*, Mongraphs and Textbooks in Pure an Applied Mathematics, 49, Marcel Dekker, New York, 1978.

[25] Nadler, Jr., S. B. *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[26] Oka, Sh. *The topological types of hyperspaces of* 0*-dimensional compacta*, Topology Appl. 149(2005), no.1-3, 227–237.

[27] Pellicer-Covarrubias, P. *The hyperspaces* $C(p, X)$, Top. Proc., 27 (1) (2003), 259–285.

[28] Serapio Ramos, I. *Funciones y propiedades de Whitney*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2014.

[29] Serapio Ramos, I. *Funciones punto medio en continuos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2016.

[30] Soto Bañuelos, A. *El hiperespacio de arcos de un continuo*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre de 1999 (http://132.248.9.195/pd2000/283734/Index.html).

[31] Stimac, S. *Homeomorphisms of composants of Knaster continua*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 171, (2002).

[32] Suárez López, J. L. *Hiperespacios de continuos anclados en un punto*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 17 de abril de 2015. http://www.fcfm.buap.mx/docencia/tesis/licenciatura-m

[33] Suárez López, J. L. *Propiedades e interrelaciones de las funciones punto medio y de puntos extremos en continuos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2018.

[34] Wardle, Roger W. *On a property of J. L. Kelley*, Houston Journal of Mathematics, Vol. 3, No. 2, 291–299, (1977).

Índice alfabético