



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

Epidemiología matemática para la prevención de muérdago.

Tesis presentada para obtener el título de
Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Laura Cruzado Lima

Directores de Tesis:

Dr. Jesús López Estrada

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna.

Noviembre 2015.

A mi amigo Benjamín y al profe Sergio †.

“ Ahora que se ha empezado a estudiar con serenidad a la naturaleza nos damos cuenta de la amplitud de las preguntas, de la distancia a recorrer para tratar de contestarlas. El gran peligro para la humanidad no es el desarrollo del conocimiento, es la ignorancia.”

Francois Jacob

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme fuerza para terminar la Maestría y por siempre escucharme.

Este trabajo se lo dedico especialmente al profe Sergio que ya no esta con nosotros pero que siempre recordare sus sabios consejos y las visitas a su laboratorio en biología, si no fuera por él tal vez hubiese desertado.

Especialmente, quisiera agradecer con todo mi amor por su apoyo incondicional, su enorme paciencia, por siempre preocuparse y su gran comprensión a los que más han sufrido por verme salir adelante: mi madre, mi padre y mi hermana. Quiero que sepan que éste trabajo es de los cuatro porque todos hemos trabajado muy duro para lograrlo.

De igual manera gracias a mis abuelitos, que siempre están al pendiente de mi, especialmente sus grandes consejos que siempre serán bienvenidos para una novata en la vida que intenta aprender más.

Y particularmente, a todos aquellos que nunca confiaron en éste trabajo, porque gracias a ustedes tuve la fuerza para concluirlo.

Le agradezco la gran ayuda que me proporcionó el Dr. Jesús López Estrada, mi director de tesis por haberme aceptado como su alumna, y a su esposa por su hospitalidad. Además, enseñanzas, paciencia y sobre todo el gran conocimiento que me ha heredado. Será difícil compensarlos.

Gracias al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna quien también es director de tesis por darme la oportunidad de trabajar con usted, por su amabilidad y

su siempre muy buen humor.

Gracias a mis sinodales: Dr. Alexandrov Kuteynikova Vladimir Vasilevich, Dra. Patricia Domínguez Soto, Dra. Blanca Bermúdez Juárez y al Dr. Jacobo Oliveros Oliveros por haber aceptado ser mis sinodales, por sus observaciones y correcciones.

Y por último a la naturaleza por dejarme descubrir las grandes y maravillosos enigmas que me han despertado un gran interés para saber más sobre los secretos que guarda.

Índice general

Índice general	IV
1. Introducción	VII
2. Biología del Muérdago	1
2.1. Antecedentes	1
2.2. Biología del muérdago	2
2.2.1. Polinización y frutas	4
2.2.2. El muérdago como fuente de alimento	6
2.3. El muérdago en México	6
2.3.1. EL muérdago en zonas urbanizadas	8
2.4. Control del muérdago	13
3. Muérdago: Poblacional	15
3.1. Hechos históricos	15
3.2. Descripción del modelo clásico de Lotka-Volterra	16
3.2.1. Análisis cualitativo del modelo L-V	18
3.3. Modelo de Ross-MacDonald	25
3.3.1. Análisis cualitativo del modelo	28
3.3.2. Discusión	31
4. Muérdago: Modelo Epidemiológico con Vector	33
4.1. Análisis del modelo	35
4.1.1. Estabilidad del estado de equilibrio trivial	37
4.1.2. Estabilidad del estado de equilibrio no trivial	41
4.2. Modelo epidemiológico con vector y poda	44

4.2.1. Análisis cualitativo	45
5. Conclusiones	49
A. Diagramas de fases de los sistemas planos	51
B. Definiciones y teoremas	56
B.1. Linealización de sistemas no lineales	57
B.2. Estabilidad para sistemas no lineales: Lyapunov	59
B.3. Criterio de Routh-Hurwitz	61
Bibliografía	63

Resumen

El muérdago es una planta que parasita a los árboles y sus semillas son dispersadas por las aves que se alimentan de sus frutos por tanto, esta relación mutualista promueve la dispersión del muérdago así que para comprender estas interacciones primero se hizo una analogía del modelo de Ross para describir la dinámica de la interacción entre árboles parasitados y aves que han interactuado con muérdago. Se determinó que tiene dos puntos de equilibrio el trivial y endémico, los cuales son estables globalmente. Después se construyó otro modelo de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, pero tomando en cuenta que la población de árboles y aves se divide en dos tipos (susceptibles e infectados para ambos casos) además, se obtienen dos puntos de equilibrio para los que se prueba su estabilidad global usando la teoría de Lyapunov. Por último, a este mismo modelo se le agrega un control de tasa constante, para el que se estudia bajo que condiciones se tienen puntos de equilibrio admisibles.

Capítulo 1

Introducción

*“Un buey se satisface con el pasto de un acre o dos;
uno sería suficiente para bastantes elefantes.
El hombre saquea toda la tierra y el mar...
¿nos ha dado la naturaleza tan insaciable estómago
en tanto que cuerpos tan insignificantes?
No, no es el hambre de nuestros estómagos,
sino esta insaciable codicia, lo que nos cuesta tanto.”*

Séneca.

El muérdago es una planta parásita, la cual se encuentra en la gran mayoría de árboles del mundo tienen un comportamiento único con los árboles que parasitan, ya que puede dañarlos hasta matarlos. Las aves actúan como un “vector de la enfermedad”, al alimentarse de sus frutos, estableciéndose así una relación mutualista beneficiosa con las aves que dispersan sus semillas. La finalidad principal que persigue este trabajo es modelar la dinámica poblacional del muérdago, ya que es un problema natural que afecta a miles de árboles, dañando preferentemente los prados y bosques de las zonas urbanas. De ahí la importancia de modelar la dinámica de interacción del muérdago con los árboles y las aves.

Este trabajo de tesis consta de tres capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el primer capítulo se revisa con detalle la biología del muérdago, los procesos de fructificación, su dispersión por aves, etc.

Sin dejar de reconocer aquí la importancia de la descripción biológica, el propósito es centrar la atención sobre algunos aspectos de la dinámica poblacional y, más sobre algunos modelos deterministas que pretenden predecir el tamaño de la población para cualquier tiempo t .

En el capítulo dos se hace una descripción del modelo clásico de Lotka-Volterra, luego se presenta el modelo de Ross para la malaria, al cual se le dio otra interpretación para adaptarlo al problema del muérdago. Como parte de su estudio, al no tener datos en México, se utilizaron los datos poblacionales de un artículo de Rongsong Liu, Carlos Marínez del Río y Jianhohh Wu para las zonas áridas de E.U.A. concluyendo que no habrá brote epidémico.

Para el tercer y último capítulo se propone un modelo de cuatro poblaciones con vector ya más apegado a la realidad, para el que se obtienen dos puntos de equilibrio: el trivial ó libre de muérdago y el endémico, para el primer punto se demuestra su estabilidad local y global, para la estabilidad global se construyó una función de Lyapunov no-trivial. Mientras que para el punto de equilibrio endémico se prueba la estabilidad local utilizando el criterio de Routh-Hurwitz. Después, se propone otro modelo donde se considera el efecto de la poda a tasa constante ϵ en la población de árboles infectados, el modelo cambia por el nuevo parámetro y se hace un estudio para obtener los puntos de equilibrio que dependan de ϵ .

Para finalizar, se tienen las conclusiones, la cual deja libre algunas ideas para posteriormente darle seguimiento al trabajo, además de incluir anexos, que contienen definiciones y teoremas importantes que se usaron en la tesis, para que el lector tenga una mejor facilidad de la lectura y por último las referencias que se utilizaron para complementar el contenido de los capítulos.

Biología del Muérdago

“ Los hechos que mantenían mi tiempo científicamente ortodoxo son los de adaptación -las masas de polen en Asclepias- el muérdago, con su polen transportado por insectos y sus semillas por las aves- el pájaro carpintero, con sus patas y cola, pico y lengua, le sirve para subir al árbol y atrapar insectos.

Para hablar del clima o el hábito lamarckiano producir dicha adaptación con otros seres orgánicos es inútil. Esta dificultad, creo que he superado ”.

Carta a Asa Gray por Charles Darwin, 1857.

2.1. Antecedentes

Las enfermedades de las plantas se han conocido desde la antigüedad, pero generalmente fueron atribuidas a fuerzas sobrenaturales. La primera enfermedad vegetal que se describió por su origen patológico fue la caries o carbón del trigo producida por *Tilletia caries*.

Los muérdagos han sido durante mucho tiempo una fuente de fascinación para los humanos, y las referencias a estas plantas parásitas se pueden encontrar entre las leyendas y supersticiones de personas en todo el mundo. En algunas culturas se cree que los muérdagos fueron dotados con poderes místicos, ya que crecen en las ramas de otras plantas y porque muchas especies de muérdago dan frutos en invierno, cuando otras plantas de zonas templadas están latentes. La palabra “muérdago ” proviene de las palabras anglosajonas “tan”(rama) y “señol”(estiércol) que significa “excremento en la rama”.

Las interacciones entre muérdagos y animales fueron utilizadas por Darwin como ejemplos iniciales de la adaptación evolutiva [8]. Linne es reconocido como el primero en describir la historia de la vida del muérdago [31], señalando que se forman zarzales con bayas y las semillas pegajosas son expulsadas a los demás árboles. De hecho, la mayoría de las especies de muérdago son dispersadas por los animales, principalmente las aves.

Como Darwin observó los muérdagos también son polinizados por los animales. De hecho, la mayoría de los registros de las interacciones de los animales con el muérdago han sido incidentales, una gran cantidad de información anecdótica está contenida para cada especie en cuentos, estudios y obras de historia natural. En conclusión, las interacciones de muérdago y animales no se han documentado ni apreciado en todo el mundo [31].

2.2. Biología del muérdago

Los muérdagos son un grupo polifilético ¹ de plantas con flores que comprende más de 1300 especies de una amplia gama de hábitats en todos los continentes excepto la Antártida. En concreto, las familias Loranthaceae y Viscaceae están bien estudiadas y se distribuyen en todo el mundo, comprendiendo la mayoría de las especies de muérdago, más del 98%, lo que corresponde aproximadamente 940 y 350 especies, respectivamente. Estas familias no son taxonómicamente hermanas, y se cree que han evolucionado de forma independiente [31], véase la figura 2.1, aunque en las diversas clasificaciones del muérdago hay una que señala que todos los muérdagos pertenecen a la familia Loranthaceae, que reúne unos 40 géneros agrupados en subfamilias Loranthoide (muérdagos gigantes o tropicales) y Viscoidae (muérdagos templados o enanos).

Con base a los fósiles del período Cretácico, se considera a Loranthaceae un género de Gondwana que se dispersó hacia África, Europa y América del Norte. Por el contrario, se cree Viscaceae se originó en el este de Asia, y se irradió a través de Laurasia en el período Terciario temprano y dispersándose a los continentes del sur [4].

¹que no comparten un antepasado común incluido en el grupo.

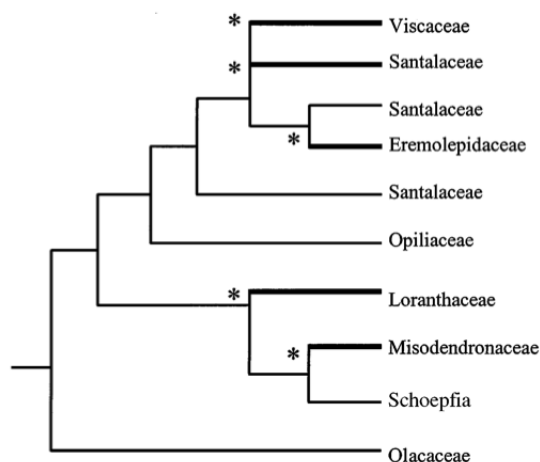


Figura 2.1: Ramas con líneas gruesas indican los taxones muérdago, y los asteriscos indican hipotéticos orígenes evolutivos independientes del hábito hemiparásita aérea.

Actualmente Loranthaceae y Viscaceae se distribuyen ampliamente en toda Europa, las Américas, África, Asia y Australasia (con excepción de Tasmania), que van desde los climas boreales a las zonas templadas, tropicales y áridas, y ausente solamente en regiones extremadamente secas o frías [4].

Son numerosas las especies de vegetales parásitos que viven a expensas de otras plantas bien sobre el pie de planta como el muérdago o en el suelo parasitando las raíces como *Cuscuta epithymum*. Suelen diferenciarse dos tipos de organismo vegetal parásito atendiendo a la presencia o no de clorofila, las plantas holoparásitas son aquella cuya alimentación depende totalmente de su hospedador, al ser incapaz de realizar actividad fotosintética, las hemiparásitas poseen una cierta independencia del hospedador aunque por lo general no pueden sobrevivir sin él, para los muérganos se usa el término hemiparásita, pues la mayoría de ellos realiza la fotosíntesis.

Las semillas del muérdago se adhieren firmemente a la rama usando una conexión vascular denominada *haustorio*, el cual es un disco adhesivo que sirve para conectar la planta del muérdago al huésped, el cual va creciendo a través de los tejidos primarios y secundarios del hospedero, separando la corteza externa, el córtex, el floema, hasta llegar al xilema de donde toma

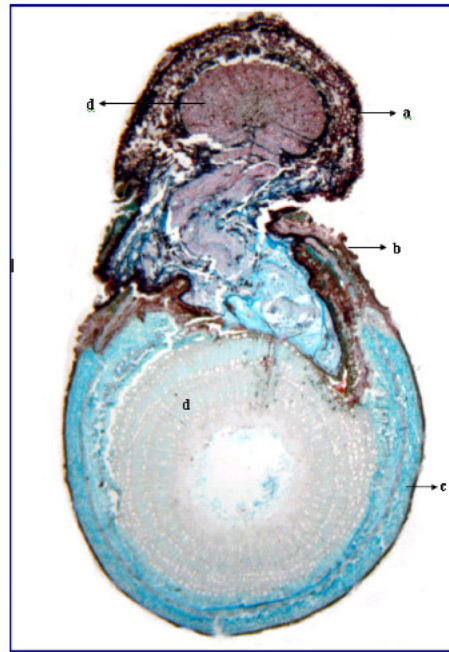


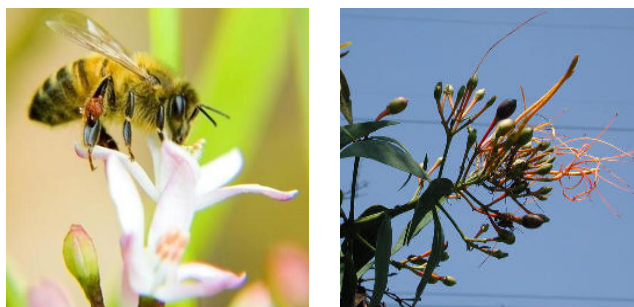
Figura 2.2: Haustorio de *Struthanthus venetus* introduciéndose en una rama de *Fraxinus uhdei* (Fresno) a) muérdago. b) haustorio. c) Fresno. d) xilema.

las sales y el agua esenciales para la vida del árbol [25] (Figura 2.2).

Además de absorber agua y sales minerales del xilema, los haustorios liberan hacia los árboles reguladores de crecimiento que mantienen abiertas las vías de recursos y minimizan las reacciones defensivas del árbol. Si la invasión resultara muy agresiva, la rama podría compartimentar el tejido y la infección fracasaría [23]. Los muérdagos ocasionan daños irreversibles y un lento decaimiento en el hospedero, primero deforman las ramas hasta adueñarse de la copa, después reducen el desarrollo del individuo y por último de acuerdo a su avance, la muerte, que también será la suya propia.

2.2.1. Polinización y frutas

Aunque varias especies de muérdago (en particular en el Viscaceae) utilizan explosión hidrostática para dispersar las semillas, las aves juegan un papel



Cuadro 2.1: Polinización y fruto.

importante en la dispersión a larga distancia y el muérdago generalmente es considerado como *ornitócoras*. Se han hecho evaluaciones que sugieren que los dispersores son vertebrados que pudieron haber desempeñado un papel clave en la diversificación de las especies de muérdagos. La mayoría de los estudios de dispersión de muérdago se han concentrado en un pequeño número de aves altamente especializadas [31].

El muérdago proporciona abundante néctar, se sabe que una amplia gama de especies insectívoras se alimenta del néctar en las flores del muérdago favoreciendo su fecundación. También, se conoce que varios mamíferos se alimentan del néctar de muérdago.

Los frutos de las especies de muérdago muestran una gama de atributos: es grande, dulce y de color muy visible, cuando están maduros. Las composiciones de la pulpa del fruto pueden variar, pero en la mayoría tienen altos contenidos de carbohidratos. Los frutos de algunas especies loranthaceous son ricos en lípidos. Los frutos de las especies viscaceous tienden a tener mucho más altas fracciones de proteínas que otras frutas. Al igual que con otros tejidos del muérdago, sus frutos también contienen altas concentraciones de minerales. A pesar de la reputación de ser venenoso el muérdago, sólo un pequeño número de especies dentro de la Viscaceae presentan toxicidad.

Los periodos de fructificación son muy variados en las distintas especies de muérdago que van desde los que fructifican todo el año como en los bosques nubosos de Colombia, pero también se ha demostrado que la variación depende de los diferentes patrones asociados a los climas regionales.

Considerando que la mayoría de las especies de muérdago son polinizadas por aves, los miembros del Viscaceae son polinizadas principalmente por el viento y los insectos. La familia Loranthaceae es polinizada principalmente por aves [27], y muestran el conjunto típico de características asociadas con la ornitofilia², con gran polinización de flores inodoras que suelen ser de colores vivos (amarillo, naranja, rojo) con corolas³ robustas, pedicelos⁴ cortos, y a menudo en inflorescencias masivas.

2.2.2. El muérdago como fuente de alimento

Las especies de 66 familias de aves y 30 familias de mamíferos que consumen muérdago que se extiende a 12 y 10 órdenes, respectivamente. Aunque en general se acepta que la especie que mas consume los frutos del muérdago son las aves [31].

Según un estudio menciona que las aves prefieren áreas con altos niveles de infestación de muérdago [30], véase figura (2.3).

Dada la disponibilidad durante todo el año de frutos de muérdago en muchas regiones, existe una gran diversidad de especies animales que dependen del muérdago. Muchos de estos consumidores de muérdago actúan como sus dispersores ocasionales.

2.3. El muérdago en México

En nuestro país existen 9 géneros: *Antidaphne* Poepp. y Endl., *Oryctanthus* Eichler, *Phthirusa* Mart., *Arceuthobium* Bienb., *Phoradendron* Nuttall, *Dendrophthora* Eichler, *Cladocolea* van Tieghem, *Struthanthus* Mart. y *Psittacanthus* Mart [9].

²Es la polinización de las flores por parte de las aves.

³Conjunto de pétalos, generalmente coloreados, que están en el interior del cáliz de la flor y protegen los órganos de reproducción.

⁴Columna carnosa que sostiene el sombrerillo de las setas.

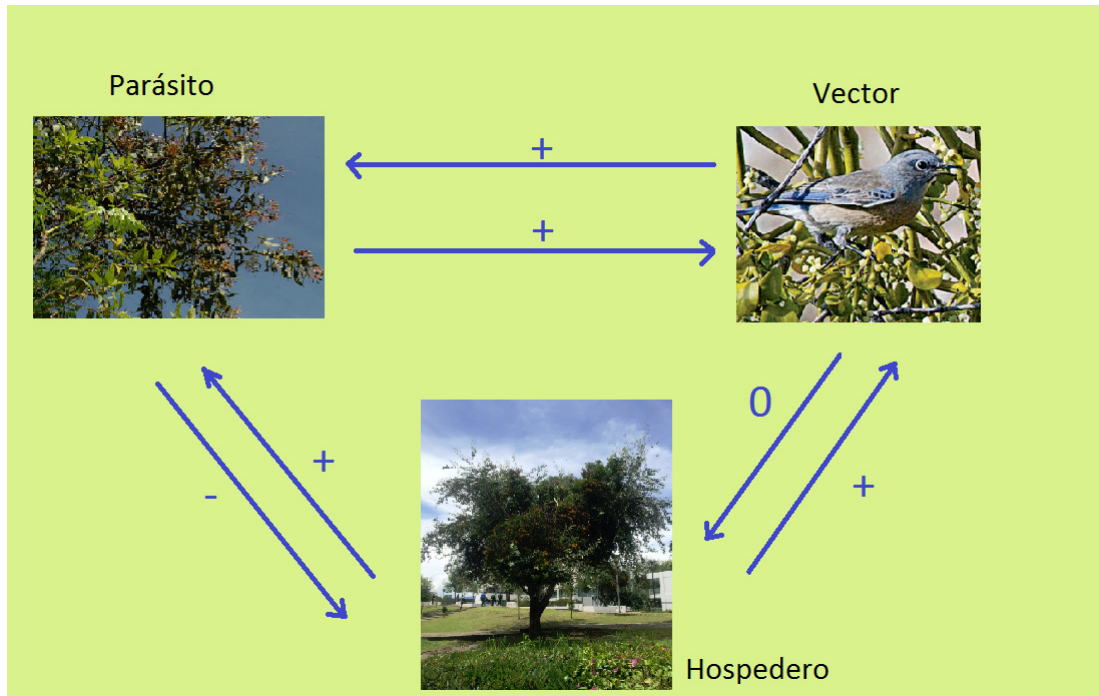


Figura 2.3: Los Muérdagos juegan un papel doble en los sistemas ecológicos. Son mutualistas de sus dispersores (flechas positivas funcionan en ambas direcciones) y parásitos de sus hospederos (flecha de muérdago negativo para el hospedero, flecha positiva para el muérdago). Las aves que consumen sus frutos y dispersan sus semillas son ambos dispersores de semillas y vectores de la enfermedad. En el desierto del suroeste de Norte America ilustrado en la imagen, el parásito es el muérdago del desierto (*Californicum phoradendron*), los vectores son Phainopeplas (*Phainopepla nitens*) y los hospederos son terciopelo mezquite (*Prosopis velutina*) y otros árboles leguminosos [3]

Los muérdagos conocidos como injertos o seca palo son plantas parásitas siendo abundantes e importantes en nuestro país, afectando importantes extensiones de arbolado y con ello la producción de frutos y semillas. A manera de inhibir la altura y volúmen del huésped.

Los muérdagos son el segundo agente biológico de perturbación de los bosques de clima templado; estimándose pérdidas anuales por más de 2 millones de m^3 de madera; sin considerar la muerte natural de arbolado y la creciente susceptibilidad de estos al ataque de plagas y enfermedades forestales, [29].

Estudios realizados sobre plantas parásitas indican presencia de 10 géneros y de 150 especies de muérdago distribuídos en todo el país [10]. Estas plantas constituyen el tercer agente de destrucción de los bosques de clima templado frío, después de los incendios e insectos descortezadores, ya que se encuentran en más del 10% de la superficie arbolada, lo que equivale a cerca de 1.8 millones de hectáreas de bosque de coníferas⁵ y latifoliadas⁶. Por efecto del parasitismo de estos muérdagos se pierde un volumen medio maderable.

Para evaluar el daño en los árboles infectados por muérdago se usa el sistema de evaluación de cuatro niveles propuestas por Gutiérrez, las cuales se describen en la figura (2.4).

2.3.1. EL muérdago en zonas urbanizadas

El arbolado urbano cobra importancia por el beneficio que aporta a la comunidad. Cada ciudad contiene un ecosistema propio que se mantiene equilibrado, si no se excede un determinado nivel de contaminación. El límite aceptable supera muchas veces lo establecido como normal; por lo cual la población tolera demasiado, llegando a una vida que convive con la enfermedad.

En las grandes ciudades se deterioran día a día su ambiente urbano, y al mismo tiempo disminuye la calidad de vida de sus habitantes, como ecosis-

⁵Bosques donde predominan pinos, abetos u oyameles, cedros y enebros, entre otros, donde las especies latifoliadas representan menos de un 20% .

⁶Bosques de especies de hoja ancha, como el encino. Pueden presentar coníferas, pero éstas representan menos del 20% del total.






NIVEL	ESCALA	PORCENTAJE DE INFESTACIÓN	CATEGORÍA
I		0 % respecto al volumen total de la copa y follaje, únicamente del hospedero.	Árbol sano
II		Leve, de 1 a 29 %, respecto al volumen total de la copa, con follaje mixto y hospedero sin ramas apicales secas.	Árbol con daño leve
III		Media, de 30 a 59% respecto al volumen total de la copa, presencia de follaje mixto, hospedero con hojas escasas y cloróticas. Algunas ramas apicales secas.	Árbol con daño medio
IV		Severa, de 60 a 100 % respecto al volumen total de la copa. Follaje únicamente de la parásita. Hospedero con abundantes ramas apicales secas, debilitado en su totalidad.	Árbol con daño severo
V		Árbol muerto por muérdago.	Árbol seco

Figura 2.4: Escala de muérdago verdadero en arbolado.

tema. Uno de esos elementos es el arbolado de las calles, jardines, parques y bosques, que cumplen la función de reconstruir el medio ambiente.

En la ciudad se utiliza el arbolado urbano para marcar límites y zonas, proporcionar aislamiento o crear barreras visuales. El arbolado urbano tiene como elemento de composición al árbol, que puede ser utilizado de manera aislada o formando pequeños grupos, grandes masas o alineaciones en calles.

El árbol es parte de un sistema frágil que aporta considerables mejoras al medio urbano como dar sombra, atenuar la acción de los vientos, suavizar los ruidos, ablandar la rigidez de las edificaciones, refrescar la ciudad, retener la humedad, embellecer la ciudad con sus colores, formas y texturas; en suma, mejorando nuestra calidad de vida. Si queremos que perdure debemos cambiar nuestra actitud hacia este patrimonio.

En nuestras ciudades, se plantan árboles sin una debida planificación, sin una correcta elección de las especies e implantación que respete las medidas mínimas entre árboles y viviendas. Todo esto conlleva a tener árboles

débiles, con formas que entran en conflicto con la urbanización (viviendas, edificios, centro comerciales, metrobus, avenidas, los tendidos eléctricos, las luminarias y otros elementos urbanos). Debido a esta mala planificación, la población opina y actúa contra el árbol argumentando que las hojas caen sobre los techos y tapan las canaletas, las ramas rozan los cables eléctricos, las raíces levantan las banquetas, molesta barrer las hojas, provocan alergia, que por sus ramas entran a la casa cucarachas, ratas y otros bichos, que tapan el cartel de los negocios, etc. Para solucionar estos problemas se realizan “podas drásticas ” que consisten en una abrupta reducción del tamaño de la copa. Este tipo de poda es terriblemente perjudicial, ya que los árboles así podados pierden su porte natural y por lo tanto su belleza, y se los priva de importantes reservas que almacenan en sus ramas, debilitándolos y haciéndolos más vulnerables al ataque de plagas y enfermedades.

Al recorrer varias zonas de la ciudad se concluye que no existen mapeos completos del estado de sus árboles de la ciudad; en consecuencia muchos ejemplares enfermos sin salvación y otros ya decrepitos permanecen en pie y los que se pueden salvar necesitan de un tratamiento adecuado y a tiempo. Hoy en día el arbolado público se encuentra desprotegido, sin políticas adecuadas que lo amparen, sin mantenimiento apropiado, sufriendo podas drásticas e indiscriminadas, con un mal manejo de especies, sin el respeto de una gran parte de la población. Este es un patrimonio colectivo y cultural que todos estamos invitados a conocer para quererlo, disfrutarlo y protegerlo; es nuestro, y nos brinda beneficios a nuestra ciudad y a nuestro medio ambiente.

En este contexto general, el muérdago juega un papel relevante, debido al deterioro que causa sobre estos gigantes. Las imágenes siguientes fueron proporcionadas por Víctor Díaz Coppe y Diana Marchal Valencia quienes cuentan con un gran seguimiento del muérdago de la Ciudad de México, algunas de las cuales se muestran en los cuadros **2.2**, **2.3**, **2.4**, **2.5** y **2.6**.



8 de octubre del 2008



11 de junio del 2009



7 de noviembre del 2010



23 de marzo del 2012

Cuadro 2.2: Alamillos (*Populus tremuloides*) que están en la zona cultural de C.U. El muérdago es *Struthanthus interruptus*.



19 de marzo del 2008



12 de diciembre del 2011



25 de marzo del 2012

Cuadro 2.3: Alamillo de C.U., sobre el circuito Mario de la Cueva. También es *Struthanthus interruptus*.



10 de enero del 2008



22 de noviembre del 2008



25 de marzo del 2012

Cuadro 2.4: Alamillo en el estacionamiento de Investigaciones Jurídicas, al que se le desgajó una rama por el peso del muérdago (*Struthanthus*).



12 de octubre del 2008



4 de abril del 2011



3 de agosto de 2012

Cuadro 2.5: Alamillos en el Circuito Interior, cerca de Chapultepec. Actualmente las puntas de los árboles ya están muertas, y el muérdago (*Struthanthus*) ya está secándose, es visible que varias de las ramas están secas.



13 de octubre del 2008



9 de mayo del 2009



25 de enero del 2012

Cuadro 2.6: Nogal emblemático, en la glorieta de los Coyotes, en Coyoacan. La especie del muérdago es *Cladocolea loniceroides*. En la primera foto, se puede observar el árbol con hojas, y las masas de muérdago. En la segunda, que es cuando el nogal pierde la hoja (en invierno), se ven sólo las masas de muérdago. Después de eso lo desmocharon (la Delegación), y en la del 2012 se puede ver cómo tiene nuevamente muérdago, pero el árbol está muy disminuido.

2.4. Control del muérdago

La mayoría de las especies de muérdago mejor estudiados se clasifican, por los especialistas en forestales, como plagas. El foco de investigación ha sido, y es, la búsqueda de maneras de luchar contra estas plagas. Los muérdagos no sólo son plagas, sino que también contribuyen directa e indirectamente a la biodiversidad [17].

Hay diversos agentes que pueden ayudar a controlar al muérdago como aves, roedores o insectos, en México se han registrado especies de insectos que se alimentan de tallos de muérdago enano, pero que no son considerados efectivos. Existen hongos que destruyen los tallos de los muérdagos, pero la plaga persiste en el interior de las ramas o tallo. Otra posible forma de controlar el muérdago es limitando la fecundación de las flores femeninas, reduciendo la fructificación del muérdago, lo que indica controlar a los polinizadores.

En cuanto al control químico, los mejores resultados se han observado para arbolados jóvenes y de renuevo. Aunque existe un control biológico usando algas diatomeas, pero que ocasionan daños severos por muerte de ramas asperjadas [13].

La poda es otra importante herramienta para el control de los muérdagos que consiste en la eliminación física del parásito. La cual se hace solamente sobre las ramas infectadas. El manual de la Comisión Nacional Forestal [12] indica que para aplicar un control efectivo es necesario podar todas las ramas con muérdago; sin exceder del 50 % de la copa, pues en este caso el árbol muere; procurando también podar las ramas que puedan presentar una infestación. En caso de que el muérdago se encuentre en el tronco, el árbol se debe remover y a su vez realizar una reevaluación del rodal⁷ cada dos años para evitar nuevamente una infección por este parásito. Se recomienda que las podas se realicen en otoño-invierno, ya que esto favorece la cicatrización, y de esta manera se reduce el riesgo de la afectación por otras plagas.

Por otro lado, en estudios realizados en Nueva Zelanda se ha observado una reducción de las densidades de los polinizadores nativos de aves causadas por la introducción de mamíferos carnívoros, así que es probable que se reduzca la densidad de los muérdagos adultos en la siguiente generación [21], además de una disminución en las poblaciones de muérdago en todo el país, causada por insectos herbívoros llevando al declive la población de los muérdagos [28]. Esta medida no es recomendable porque no respeta el ecosistema.

⁷Unidad básica del bosque geográficamente continua, cubierta con árboles de características homogéneas en cuanto a especie, edad, altura y densidad de los árboles, tipo de suelo, pendiente, estructura y volumen.

Muérdago: Poblacional

*“Las comunidades de vegetales no son estáticas
o están en equilibrio, sino que más bien existe
una lucha constante
dentro y entre ellas. De esta forma, cualquier equilibrio es perturbado
por cambio de factores físicos, cambios introducidos
por los animales y/u hongos y luchas entre las plantas”.*

Naturista botánico considerado fundador de la ecología Eugen Warming (1895)

En primera instancia para el estudio de la modelación matemática se hará una revisión del modelo Depredador- Presa de forma general sin hacer analogías con el problema a tratar, de esta manera comprenderá fácilmente el como se debe modelar.

3.1. Hechos históricos

En 1925 el matemático Vito Volterra, quien estaba interesado en ecuaciones diferenciales, tuvo una platica con su futuro yerno, el biólogo marino Umberto D’Áncona. Umberto realizó registros pesqueros en el mar Adriático durante y después de la Primera Guerra Mundial notando que la proporción -en promedio- de peces depredadores había incrementado y de las presas decrementado. Hecho, en principio, contrario al sentido común. Por ello, consultó a Volterra en búsqueda de una explicación matemática de este hecho.

Alfred Lotka había propuesto las mismas ecuaciones en su libro publicado en 1925. Sin embargo, Lotka y Volterra diseñaron sus modelos no como

herramienta de pronóstico cuantitativo, si no para facilitar la comprensión cualitativa de ecosistemas.

3.2. Descripción del modelo clásico de Lotka-Volterra

Los supuestos de modelación son:

1. La especie presa se alimenta del medio con recursos ilimitados.
2. La especie depredadora se alimenta primordialmente de la presa.
3. Ambas poblaciones son homogéneas, es decir, no hay diferenciación de edades y sexos.
4. La distribución poblacional en el medio, para ambas especies, es homogénea.
5. Los encuentros de la especie presa y depredadora son igualmente probables.

De los primeros dos supuestos de modelación se sigue que la población de las presas, en ausencia de depredadores, tiene un crecimiento per cápita constante $a > 0$. Luego, si se denota por $x(t)$ al tamaño de la población de las presas, se tiene que:

$$\frac{1}{x(t)}\dot{x}(t) = a, \quad a > 0$$

o bien que

$$\dot{x}(t) = ax(t).$$

El número de presas en ausencia del depredador crece exponencialmente.

Ahora, tomando en consideración que el depredador se alimenta sólo de la presa en el medio que ambas comparten, resulta natural suponer que la muerte natural de la presa es irrelevante y que es la tasa per cápita de muerte es proporcional al tamaño de la población depredadora, con constante de proporcionalidad b . En consecuencia, la evolución del crecimiento de la población de la presa viene dada por la ecuación:

$$\frac{1}{x(t)}\dot{x}(t) = a - by(t)$$

o bien por

$$\dot{x}(t) = x(t)(a - by(t)). \tag{3.1}$$

Con respecto a la población de depredadores en ausencia de las presas, tendrán un decrecimiento per cápita constante $c > 0$. Si se denota $y(t)$ al tamaño de la población de los depredadores se tiene que:

$$\frac{1}{y(t)}\dot{y}(t) = -c, \quad c > 0$$

o bien que:

$$\dot{y}(t) = -cy(t).$$

Lo que significa que el número de depredadores en ausencia de las presas se desvanece exponencialmente.

Considerando que el depredador se alimenta sólo de la presa en el medio que ambas comparten, es natural suponer que la tasa per cápita de crecimiento es proporcional a la abundancia de presa; i.e., que es proporcional al tamaño de la población presa con constante de proporcionalidad e . En consecuencia, el crecimiento percapita neto de la población del depredador viene dada por la ecuación:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = ex(t) - c,$$

o bien dada por:

$$\dot{y}(t) = y(t)(ex(t) - c). \quad (3.2)$$

Por lo anterior se tiene el modelo de Lotka-Volterra (L-V):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)(a - by(t)) \equiv f(x, y) \\ \dot{y}(t) &= y(t)(ex(t) - c) \equiv g(x, y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

que se puede denotar como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\equiv f(x, y) \\ \dot{y}(t) &\equiv g(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

con dominio de definición con sentido biológico el cuadrante positivo \mathbb{R}_+^2 y los parámetros a , b , c y e , son reales positivos.

3.2.1. Análisis cualitativo del modelo L-V

En esta sección se analiza el comportamiento geométrico de las soluciones del sistema L-V, cuyos puntos de equilibrio son: el trivial $E_0 = (0, 0)$ y el no trivial $E_1 = (x^*, y^*) = \left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right)$.

Para describir el espacio de fases se trazan las líneas , observe que para la recta $x = a/b$ y $y = c/e$ la derivada en x es 0. Y que éstas dividen el primer cuadrante en cuatro subcuadrantes las cuales dividen el primer cuadrante en 4 subcuadrantes, en los que se tienen 4 diferentes comportamientos de $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$ como lo muestra la figura (3.1).

Si $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, t en \mathbb{R}^+ , $\alpha(t)$ es una trayectoria solución del sistema L-V entonces:

$$\dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (x(t)(a - by(t)), y(t)(ex(t) - c)). \quad (3.5)$$

Algunas propiedades inmediatas de $\alpha(t)$ en el cuadrante positivo del plano $x - y$ son:

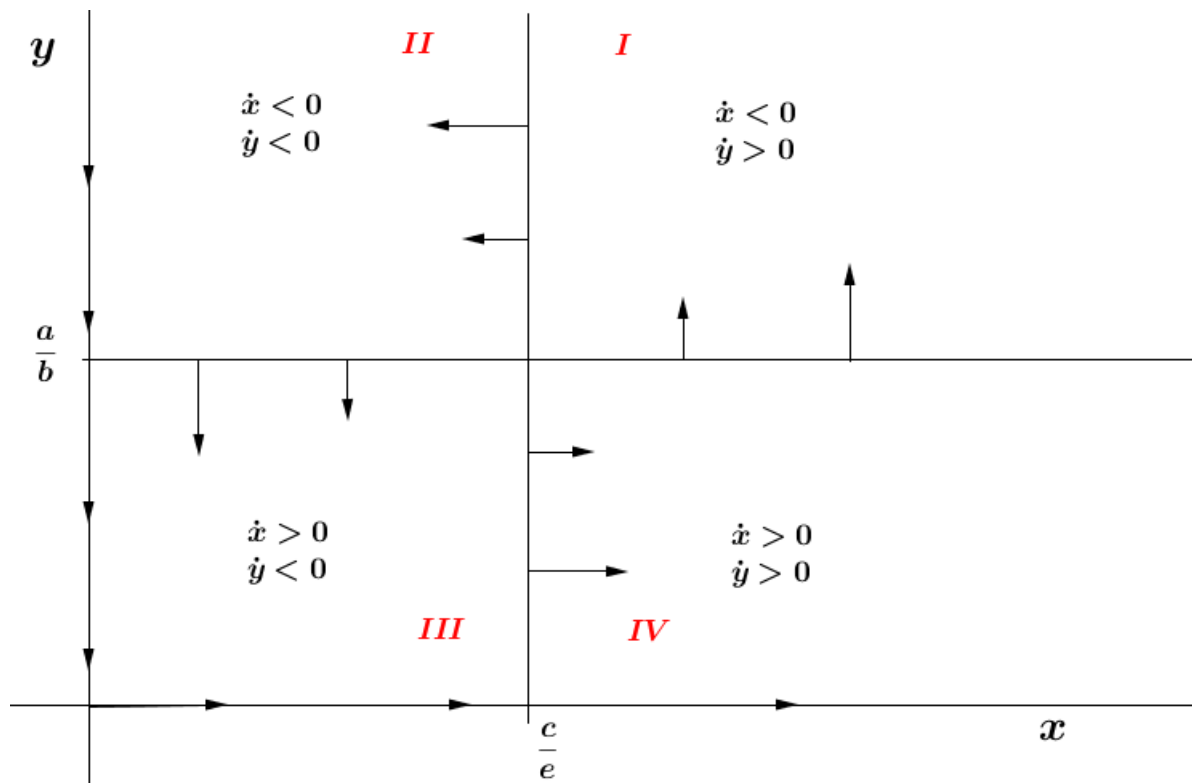


Figura 3.1: Esquema del comportamiento de las derivadas en los subcuadrantes.

1. El eje de las ordenadas es un conjunto invariante bajo el campo vectorial (3.5). Porque sobre este eje el campo vectorial se reduce $\dot{\alpha}(t) = (0, -cy(t))$.
2. En el eje de las abscisas es un conjunto invariante bajo el campo vectorial (3.5). El cual restringido a dicho eje se reduce a: $\dot{\alpha}(t) = (ax(t), 0)$.
3. Sobre el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | x = x^* = c/e, y \geq 0\}$. El campo vectorial (3.5) toma la forma $\dot{\alpha}(t) = (x(t)(a - by(t)), 0)$ de donde se sigue que: si $0 < y < y^*$, entonces $\dot{x} > 0$, lo que significa que el campo vectorial cruza éste conjunto horizontalmente de izquierda a derecha. Y si $y > y^*$, entonces $\dot{x} < 0$, lo que significa que el campo vectorial cruza este conjunto horizontalmente de derecha a izquierda.
4. En el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 | y = y^* = a/b, x \geq 0\}$ se procede de forma análoga al punto anterior. Así, $\dot{y} < 0$ si $0 < x < x^*$; y $\dot{y} > 0$, si $x > x^*$. Lo que significa que el campo vectorial cruza esta semirecta verticalmente de abajo hacia arriba si $x > x^*$ y de arriba hacia abajo si $x < x^*$.

Estabilidad local

La matriz Jacobiana del sistema (3.3) está dada por:

$$J[f(x, y), g(x, y)]_{(x, y)} = \begin{pmatrix} b \left(\frac{a}{b} - y \right) & -bx \\ dy & \left(x - \frac{c}{e} \right) d \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

evaluada en $E_0 = (0, 0)$, se reduce a:

$$J[f, g]_{(0, 0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

de donde se concluye que:

$$\text{tr} J[f, g]_{(0, 0)} = a - c$$

y

$$\det J[f, g]_{(0,0)} = -ac < 0.$$

Por lo que E_0 es localmente un punto silla. Como los valores propios de $J(E_0)$ son reales y diferentes de cero, del Teorema de Hartman-Grobman se concluye que el punto E_0 es un punto silla para el sistema L-V. (Veáse apéndice para el Teorema de Hartman-Grobman).

Haciendo lo mismo para el estado de equilibrio no trivial E_1 , se tiene que:

$$J[f, g]_{\left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{e} \\ \frac{ae}{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

de donde se sigue que:

$$\text{tr} J[f, g]_{\left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right)} = 0$$

y

$$\det J[f, g]_{\left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b}\right)} = ac > 0.$$

Consecuentemente los valores propios son: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ca}$.¹

Como los valores propios de $J(E_1)$ son imaginarios puros, no se aplica el Teorema de Hartman-Grobman. Así que la aproximación lineal no da información sobre el punto de equilibrio E_1 . Por ello, es necesario recurrir a otra herramienta que permita analizar el comportamiento local en E_1 , porque la estabilidad de un punto de equilibrio no hiperbólico es más difícil de determinar. El método de Lyapunov, es muy útil en estos casos. Con la finalidad de construir una función de Lyapunov, para el sistema (3.3), se propone como primera integral del sistema una función U como una suma de dos funciones

¹En este caso el periodo de oscilación viene dado por: $T = 2\pi/\sqrt{ac}$. Resultado conocido como: Teorema de Voleterra. Veáse [11].

$$U(x, y) = F(x) + G(y).$$

Si se calcula la derivada de U a lo largo de las soluciones del sistema (3.3), se obtiene

$$\dot{U}(x, y) = \frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = \frac{dF}{dt} \dot{x} + \frac{dG}{dt} \dot{y}$$

luego

$$\dot{U}(x, y) = x \frac{dF}{dt}(a - by) + y \frac{dG}{dt}(dx - c).$$

Para que las trayectorias solución (3.3) se muevan a lo largo de las curvas de nivel de U se debe cumplir:

$$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = 0.$$

Al separar las variables x y y se tiene que

$$\frac{x \frac{dF}{dx}}{ex - c} = \frac{y \frac{dG}{dy}}{by - a}.$$

Como x y y son variables independientes la igualdad de arriba es posible si, y sólo si los dos términos son una constante, tomando (sin pérdida de generalidad) la constante igual a 1 se tiene:

$$\frac{dF}{dx} = e - \frac{c}{x},$$

$$\frac{dG}{dy} = b - \frac{a}{y}.$$

Integrando se encuentra:

$$\begin{aligned} F(x) &= ex - c \ln(x) \\ G(x) &= by - a \ln(y). \end{aligned}$$

Así, U es de la forma $U(x, y) = ex - c \ln(x) + by - a \ln(y)$, definida para $x > 0$ y $y > 0$.

A partir de esta primera integral U se buscará una función de Lyapunov, por lo que es necesario determinar los puntos críticos de U .

Como

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \left(e - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y} \right)$$

se tiene que el punto crítico de U es $E_1 = (x^*, y^*) = \left(\frac{c}{e}, \frac{a}{b} \right)$.

Para ver que E_1 es un punto de mínimo de U , es suficiente verificar que la matriz Hessiana de U en E_1 es definida positiva.

Como

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Se tiene que, en efecto $H_U(E_1)$ es definida positiva.

Sea

$$m = U(E_1) = ex^* - c \ln(x^*) + by^* - a \ln(y^*)$$

de esta manera,

$$\begin{aligned} V(x, y) &= U(x, y) - m \\ &= \left[e(x - x^*) - c \ln \frac{x}{x^*} \right] + \left[b(y - y^*) - a \ln \frac{y}{y^*} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

es también una primera integral y a su vez una función de Lyapunov en el primer cuadrante para el sistema (3.3). En efecto, observando que la función

$$f(x) = e(x - x^*) - c \ln \frac{x}{x^*} \quad (3.10)$$

tiene la forma que se muestra en el cuadro **3.2.1** inciso (b). La gráfica de V es como la ilustrada en el cuadro **3.2.1** inciso (c).

Por construcción V cumple:

- V.1) $V(x, y)$ es de C^1 .
- V.2) $V(x, y) > 0$ para toda $(x, y) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$, con $(x, y) \neq (x^*, y^*)$.
- V.3) Si $V(x, y) = 0$, entonces $(x, y) = (x^*, y^*)$.
- V.4) $V(x, y)$ tiende a infinito cuando $\|(x, y)\|$ tiende a infinito.
- V.5) $\dot{V}(x, y) = 0$ en \mathbb{R}_+^2 .

Por lo tanto, se ha probado por el Teorema de Estabilidad de Lyapunov que:

Teorema 3.2.1 E_1 es un punto de equilibrio estable del sistema (3.3).

A continuación se proponen y analizan, algunos modelos en donde se intentará modelar la dinámica del crecimiento poblacional del hospedero y parásito, en donde el parásito es el muérdago y el hospedero son los árboles, lo cual se revisará a continuación.



población es suficientemente grande, lo cual para el problema a modelar si se esta considerando, porque si nos referimos a un bosque la población de árboles y aves es demasiado grande.

Es importante recalcar que se está considerando una población uniforme de árboles donde no hay diferencias entre especies como lo hace Liu [26], en este artículo toma en cuenta que las semillas tardan 3 meses en fijarse al árbol, por lo que las matas inmaduras de muérdago crecen rápidamente y florecen, produciendo fruta a los 3 años de edad a partir de ahí el muérdago produce frutos hasta su muerte. La esperanza de vida del muérdago es de un máximo de unos 17 años, es importante aclarar que éstos datos son para la especie de muérdago llamada *Phoradendron californicum*, que es un muérdago del desierto y parasita árboles de la misma región. Pero para una primera aproximación de los modelos que se estudiarán es ésta tesis no se integrarán estos datos.

Que tiene los siguientes supuestos:

- Se considerarán a las poblaciones como constantes.
- No se desprecian los movimientos migratorios.
- No se considerarán nacimientos ni muertes en la población de árboles.
- Si un árbol se enferma y recupera por medio de la poda no adquiere inmunidad y vuelve a ser susceptible.

Se denotará por:

$A \equiv$ Total de la población de árboles.

$P \equiv$ Total de la población de aves.

$u(t) \equiv$ Número de árboles parasitados en el tiempo t .

$v(t) \equiv$ Número de aves que han manipulado muérdago en el tiempo t .

$b \equiv$ Frecuencia con que manipula el ave al muérdago.

$p \equiv$ Probabilidad de que la semilla de muérdago se fije al árbol(es una probabilidad vista como parámetro, sin distribución).

$q \equiv$ Probabilidad de que una ave manipule al muérdago(es una probabilidad vista como parámetro, sin distribución).

$r \equiv$ Tasa de recuperación por árbol parasitado(ya sea por la poda o por su mismo mecanismo de defensa), de tal forma que $\frac{1}{r}$ nos da la duración media del periodo de infección de los árboles.

$\mu \equiv$ Tasa de mortalidad por ave($\frac{1}{\mu}$ nos da la duración media de la vida de las aves).

En este modelo se supone que la tasa de mortalidad de los árboles es insignificante cuando se compara con su tasa de recuperación. La tasa de mortalidad de las aves es la misma, independientemente de que estén infectados o no.

Durante un intervalo pequeño dt , cada ave que ha manipulado muérdago interactúa con bdt árboles, entre una fracción igual a $\frac{A-u}{A}$ que no están parasitados. Tomando en cuenta la probabilidad p , hay $bpv\frac{A-u}{A}dt$ nuevos árboles infectados. Durante el mismo intervalo de tiempo, el número de árboles que se recupera es $rudt$, por lo tanto se tiene:

$$\dot{u}(t) = bpv(t) \left(\frac{A - u(t)}{A} \right) - ru(t). \quad (3.11)$$

Similarmente cada ave que no ha manipulado muérdago, tiene una interacción bdt árboles, entre una fracción igual a $\frac{u}{A}$ que ya están parasitados. Tomando en cuenta la probabilidad q hay $bq(p-v)\frac{u}{A}dt$ nuevas aves que han consumido muérdago. Mientras tanto, se asume que la parasitación no depende de la influencia de la mortalidad, el número de aves que mueren es μvdt . Así se tiene la siguiente ecuación:

$$\dot{v}(t) = bq(t)(p - v(t))\frac{u(t)}{A} - \mu v(t). \quad (3.12)$$

Resumiendo el sistema queda dado por:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= bpv(t) \left(\frac{A - u(t)}{A} \right) - ru(t), \\ \dot{v}(t) &= bq(t)(p - v(t)) \frac{u(t)}{A} - \mu v(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para adimensionar las variables de estado u , v , se toma

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{A}, \\ y &= \frac{v}{P}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se estudiará el sistema en el cuadrado $D = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ y este sistema está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= bpm y(t)(1 - x(t)) - rx(t), \\ \dot{y}(t) &= bqx(t)(1 - y(t)) - \mu y(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $m = P/A$ es el y número de vectores(aves) por árbol.

3.3.1. Análisis cualitativo del modelo

A continuación se hará un análisis del modelo (3.14). Es directo verificar que el campo vectorial sobre la frontera de su dominio D apunta hacia el interior de D .

Este sistema tiene dos puntos de equilibrio: el estado libre de la enfermedad (equilibrio trivial) $E_0 = (0, 0)$ y el estado de equilibrio endémico $E_1 = (x^*, y^*)$, donde

$$x^* = \frac{pqb^2m - \mu r}{qb(pbm + r)} \quad y^* = \frac{rx^*}{bpm(1 - x^*)}. \quad (3.15)$$

E_1 tiene sentido biológico, si $E_1 \in D$. Más específicamente si $0 < x^* < 1$ y $0 < y^* \leq 1$. De esta referencia se sigue que si $y^* \leq 1$ si y sólo si

$$x^* \leq \frac{pbm}{pbm + r} < 1. \quad (3.16)$$

Una consecuencia importante de (3.16) es que el prado o bosque en el caso endémico no se infecta nunca al cien por ciento y que este porcentaje disminuye mientras aumente la poda, mas aún dado un porcentaje γ tolerable en el lugar de estudio, la poda mínima viene dada por:

$$r \geq pb\left(\frac{1 - \gamma}{\gamma}\right)m.$$

Por otro lado, x^* y y^* serán mayores que cero si, y sólo si $pqb^2m > \mu r$ o equivalentemente

$$R_0 = \frac{pqb^2m}{\mu r} > 1.$$

Por lo que el equilibrio endémico existe siempre que $R_0 > 1$. En otro caso, hay un único punto de equilibrio en D que es el trivial.

Estabilidad de E_0

La matriz Jacobiana para el sistema (3.14) está dada por :

$$J[x, y] = \begin{pmatrix} -pbmy - r & (1 - x)pbm \\ qb(1 - y) & -qbx - \mu \end{pmatrix}$$

al evaluarla en $E_0 = (0, 0)$, se tiene:

$$J[0, 0] = \begin{pmatrix} -r & bqm \\ qb & -\mu \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que el polinomio característico de este caso es:

$$\lambda^2 + (r + \mu)\lambda + r\mu(1 - R_0) = 0 \quad (3.17)$$

y el polinomio tendrá raíces negativas o con parte real negativa si los coeficientes de (3.17) son positivos y esto sucede si $R_0 < 1$. En otro caso, se tienen raíces reales de signos contrarios, por lo tanto, se concluye que E_0 es un atractor local si $R_0 < 1$ y un punto silla si $R_0 > 1$.

Para la estabilidad global del estado de equilibrio trivial, se observa que:

$$\partial_x(bpmy(1-x) - rx) + \partial_y(bqx(1-y) - \mu y) \leq -(\mu + r) \quad (3.18)$$

en D , por el criterio negativo de Dulac, este sistema no tiene soluciones periódicas y E_0 es el único estado de equilibrio en D y es localmente asintóticamente estable. Luego como consecuencia del Teorema de Poincaré-Bendixon se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1 *El estado de equilibrio trivial E_0 es globalmente asintóticamente estable en D .*

Estabilidad de E_1

Se evalúa la matriz Jacobiana en E_1 , el cual tiene como determinante:

$$\text{Det}J[x^*, y^*] = \left(-\frac{rx^*}{1-x^*} - r \right) (-qbx^* - \mu) - qb^2pm(1-x^*) \left(1 - \frac{rx^*}{pbm(1-x^*)} \right).$$

Haciendo simplificaciones algebraicas necesarias se obtiene:

$$\text{Det}J[x^*, y^*] = \mu r(R_0 - 1)$$

donde la traza está dada por:

$$\text{Tr}J[x^*, y^*] = -qbx^* - \mu - \frac{rx^*}{1-x^*} - r.$$

Por lo tanto el polinomio característico está dado por:

$$\lambda^2 + (qbx^* + \mu + \frac{rx^*}{1-x^*} + r)\lambda + \mu r(R_0 - 1) = 0, \quad (3.19)$$

donde el polinomio tendrá raíces negativas si los coeficientes de (3.19) son positivos y esto ocurre si, y sólo si $R_0 > 1$, por lo que se concluye que E_1 es un atractor local si $R_0 > 1$ y un punto silla si $R_0 < 1$.

Si $R_0 > 1$, entonces E_1 es asintóticamente estable y E_0 es un punto silla. Y por el criterio de Dulac el sistema (3.14) no admite soluciones periódicas. En consecuencia, por el Teorema de Poincaré-Bendixon se ha probado el siguiente resultado.

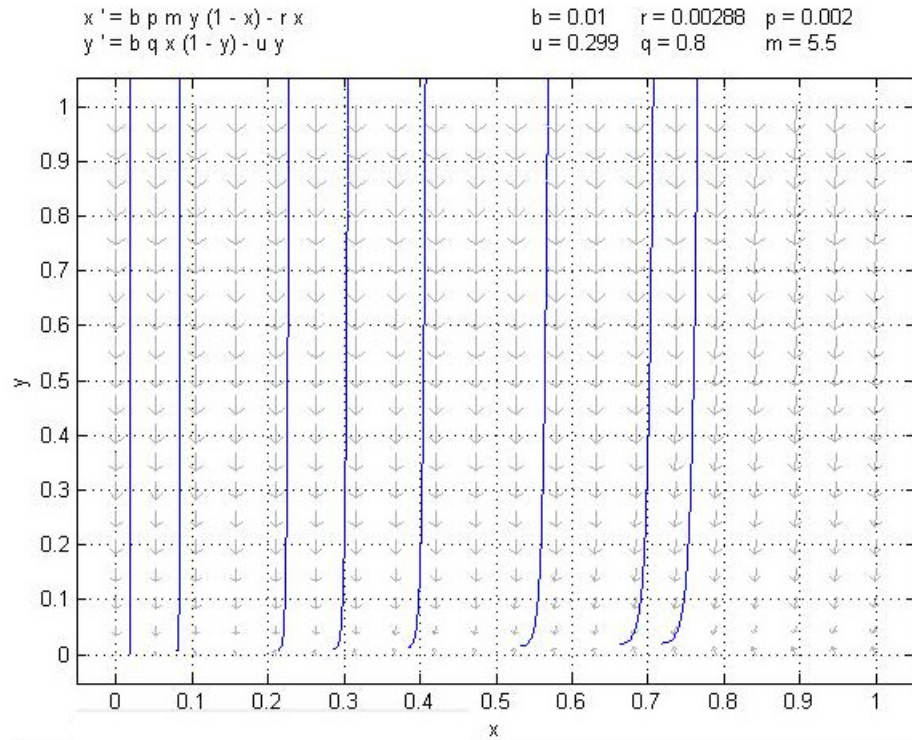
Teorema 3.3.2 *El estado de equilibrio no trivial E_1 es globalmente asintóticamente estable en D .*

Por último es importante notar que los modelos estocásticos generalmente son matemáticamente más complejos. Esto nos indica que los modelos estocásticos se prestan para la simulación y reducción en complejidad matemática pero pierden profundidad analítica. Los procesos estocásticos son conocidos por su aplicabilidad y por eso la computadora y la programación les abren las puertas al modelaje matemático. Contrario al enfoque meramente determinístico [7].

3.3.2. Discusión

Para esta sección, se hacen algunas simulaciones del modelo haciendo uso de datos obtenidos de Aukema y del Rio ([2]), su estudio se centra en las montañas de Silverbell al oeste de Marana, Arizona, EUA. La especie de muérdago que ellos estudian es *Phoradendron californicum* que es un muérdago de desierto, donde el vector es un ave de la especie *Phainopepla nitens*.

Los datos se obtuvieron de transectos de $400m^2$ que incluyeron 168 árboles de los cuales 41 están parasitados. Se asume que hay 924 aves dispersadas uniformemente por lo que están distribuidas 5.5 aves por cada árbol. También se tiene que $b = 0.01$, $p = 0.0002$, $q = 0.8$, $r = 0.00288$ para éste dato se consideró el hecho que se hace una revisión para quitar muérdago cada dos años y por último la tasa de mortalidad per cápita $\mu = 0.299$. El plano fase

Figura 3.2: Plano del fase, donde $R_0 < 1$.

se muestran en la figura 3.2 la cual es graficada con Matlab.

Que para este problema se tiene un $R_0 < 1$, por lo que se deduce que no habrá brote epidémico.

Muérdago: Modelo Epidemiológico con Vector

*“No existe victoria ni derrota en el ciclo de la naturaleza:
existe movimiento”.*

P. C.

En esta sección se desarrolla un modelo epidemiológico que toma en cuenta al vector. Para el caso que nos ocupa, las aves.

Se considera que la población cambia en todo momento, lo que conduce a la forma de crecimiento continuo. El tamaño de la población es suficientemente grande, lo cual para el problema a modelar si se está considerando, porque si nos referimos a un bosque la población de árboles y aves es demasiado grande.

Las poblaciones de árboles y aves se dividen en clases de individuos susceptibles e infecciosos. Teniéndose así cuatro clases que representan las poblaciones de árboles susceptibles, es decir, sin muérdago (S); árboles infestados con muérdago (I); las aves sin haber tenido contacto con el muérdago (U); y las aves que han manipulado muérdago (V). Los árboles susceptibles pueden llegar a ser contagiados cuando tienen interacción con una ave que ingirió muérdago. Las aves susceptibles pueden ingerir muérdago en un árbol infestado. El modelo que se propone es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}\dot{S} &= \frac{\beta_S}{S} - \mu_S - \kappa_S V, \\
\frac{1}{I}\dot{I} &= \kappa_S \frac{SV}{I} - \mu_I, \\
\frac{1}{U}\dot{U} &= \frac{\beta_B}{U} - \mu_B - \kappa_B I, \\
\frac{1}{V}\dot{V} &= \kappa_B \frac{IU}{V} - \mu_B.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Aquí lo importante no es reiterar los detalles de la construcción, sino, más bien, enfatizar su interpretación. Aquí los miembros izquierdos describen la razón de crecimiento por individuo presente en el momento t .

Los supuestos de modelación son muy similares a los supuestos de la sección 2.2 y el lector curioso puede sin dificultad dilucidar, pensando en poblaciones de árboles y aves que han rebasado ya su tasa de máximo crecimiento (i.e., poblaciones con crecimiento desacelerado). Modelo que se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \beta_S - \mu_S S - \kappa_S SV, \\
\dot{I} &= \kappa_S SV - \mu_I I, \\
\dot{U} &= \beta_B - \mu_B U - \kappa_B IU, \\
\dot{V} &= \kappa_B IU - \mu_B V.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde β_S son los nacimientos por unidad de tiempo y μ_S es la muerte per cápita de los árboles susceptibles (el tiempo promedio de vida de un árbol sano es por lo tanto $\frac{1}{\mu_S}$), por lo que el tamaño de la población de árboles es $K = \frac{\beta_S}{\mu_S}$, entonces K es la capacidad de la población de árboles. De forma similar β_B son los nacimientos por unidad de tiempo y μ_B es la muerte per cápita de aves ya sea que hayan manipulado muérdago o no (el tiempo promedio de vida de una ave $\frac{1}{\mu_B}$), por lo que el tamaño de la población de aves es $M = \frac{\beta_B}{\mu_B}$, entonces M es la capacidad de la población de aves. En cuanto a las tasas de parasitación se tiene que κ_S es la parasitación per cápita de los árboles sanos y κ_B como la parasitación per cápita de las aves con árboles parasitados de muérdago.

4.1. Análisis del modelo

Los puntos de equilibrio del sistema (4.2), se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas siguiente:

$$\beta_S - \mu_S S - \kappa_S S V = 0, \quad (4.3)$$

$$\kappa_S S V - \mu_I I = 0, \quad (4.4)$$

$$\beta_B - \mu_B U - \kappa_B I U = 0, \quad (4.5)$$

$$\kappa_B I U - \mu_B V = 0. \quad (4.6)$$

Sumando (4.5) y (4.6), se obtiene

$$\mu_B(U + V) = \beta_B \quad (4.7)$$

y de (4.5) se tiene:

$$U = \frac{\beta_B}{\mu_B + \kappa_B I}. \quad (4.8)$$

De (4.6) se tiene que:

$$V = \frac{\kappa_B}{\mu_B} I U. \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.8) en (4.9) se obtiene:

$$V = \frac{\beta_B}{\mu_B} \left(\frac{\kappa_B I}{\mu_B + \kappa_B I} \right). \quad (4.10)$$

De (4.3) despejando a S :

$$S = \frac{\beta_S}{\mu_S + \kappa_S V}. \quad (4.11)$$

De (4.11) y (4.10) se tiene:

$$S = \frac{\beta_S \mu_B (\mu_B + \kappa_B I)}{\mu_B \mu_S (\mu_B + \kappa_B I) + \beta_B \kappa_B \kappa_S I}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo (4.10) y (4.12) en (4.4) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B I}{\mu_S \mu_B (\mu_B + \kappa_B I) + \beta_B \kappa_B \kappa_S I} - \mu_I I \\ &= -\mu_I \kappa_B (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S) I^2 - (\mu_I \mu_S \mu_B^2 - \beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B) I. \end{aligned}$$

De donde se obtienen dos valores reales para I :

$$I_1^* = 0 \quad (4.13)$$

$$I_2^* = \frac{\mu_S \mu_B (R_0 - 1)}{\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S}, \quad (4.14)$$

donde

$$R_0 = \frac{\beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_I \mu_B^2} \quad (4.15)$$

que es el número reproductivo básico.

Nótese que I_2^* es admisible si, y sólo si $R_0 > 1$. Y que $I_2^* = I_1^*$, si $R_0 = 1$.

Para $I_1^* = 0$ se tiene al punto de equilibrio trivial E_1^* :

$$E_1^* = \left(\frac{\beta_S}{\mu_S}, 0, \frac{\beta_B}{\mu_B}, 0 \right). \quad (4.16)$$

En particular se dirá que el modelo (4.2) admite una interpretación biológica si $(S, I, U, V) \in \Omega$ donde $\Omega = \{(S, I, U, V) \in \mathbb{R}^4 | S \geq 0, I \geq 0, U \geq 0, V \geq 0\}$.

4.1.1. Estabilidad del estado de equilibrio trivial

Para estudiar la estabilidad local del sistema (4.2), considérese a la matriz Jacobiana **asociada a la aproximación lineal de este sistema**, evaluada en el estado equilibrio E_1^* , esto es:

$$J[E_1^*] = \begin{pmatrix} -\mu_S & 0 & 0 & -\kappa_S \frac{\beta_S}{\mu_S} \\ 0 & -\mu_I & 0 & \kappa_S \frac{\beta_S}{\mu_S} \\ 0 & -\kappa_B \frac{\beta_B}{\mu_B} & -\mu_B & 0 \\ 0 & \kappa_B \frac{\beta_B}{\mu_B} & 0 & -\mu_B \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

cuyo polinomio característico es el siguiente determinante.

$$p(\lambda) = \det[J(E_1^*) - \lambda \mathbb{I}] = \begin{vmatrix} -\mu_S - \lambda & 0 & 0 & -\kappa_S \frac{\beta_S}{\mu_S} \\ 0 & -\mu_I - \lambda & 0 & \kappa_S \frac{\beta_S}{\mu_S} \\ 0 & -\kappa_B \frac{\beta_B}{\mu_B} & -\mu_B - \lambda & 0 \\ 0 & \kappa_B \frac{\beta_B}{\mu_B} & 0 & -\mu_B - \lambda \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

Haciendo cálculos sencillos obtenemos:

$$p(\lambda) = (\lambda + \mu_S)(\lambda + \mu_B) \left[(\lambda + \mu_I)(\lambda + \mu_B) - \frac{\beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_B} \right]. \quad (4.19)$$

Si se define a

$$q(\lambda) = \lambda^2 + (\mu_I + \mu_B)\lambda + \mu_I \mu_B - \frac{\beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_B}$$

se puede reescribir a $q(\lambda)$ como:

$$q(\lambda) = \lambda^2 + (\mu_I + \mu_B)\lambda + \mu_I\mu_B(1 - R_0), \quad (4.20)$$

se sigue que la parte real de las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte negativa ¹ si y sólo si las raíces del polinomio $q(\lambda)$ tienen parte real negativa. Y como $q(\lambda)$ es *estable*² si, y sólo si $R_0 < 1$, se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1 *Si $R_0 < 1$, entonces*

- a) *El sistema (4.2) admite como único estado de equilibrio admisible, el estado de equilibrio trivial.*
- b) *El estado de equilibrio trivial del sistema (4.2) es asintóticamente estable localmente.*

Este teorema constituye también un indicio para conjeturar que la estabilidad asintótica del estado de equilibrio trivial es global.

En lo que sigue se construirá una función de Lyapunov que permita inferir sobre la estabilidad del modelo.

Se define una función W , $W : \{(S, I, U, V) \in \Omega \mid S, U > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida:

$$\begin{aligned} W(S, I, U, V) &= S^* \left(\frac{S}{S^*} - \ln \left(\frac{S}{S^*} \right) \right) + I \\ &+ \frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S} U^* \left(\frac{U}{U^*} - \ln \left(\frac{U}{U^*} \right) \right) \\ &+ \frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S} V. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Claramente W es C^1 en el interior de Ω , $W(E_1^*) = 0$ y $W(S, I, U, V) > 0$ si $(S, I, U, V) \neq (S^*, I^*, U^*, V^*)$. La derivada de W a lo largo de las soluciones de (4.2) es la siguiente:

¹Se dice que un polinomio $\rho(\lambda)$ es *estable* si y sólo si todas sus raíces tienen parte real negativa.

²Es bien sabido que el polinomio cuadrático $q(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ es *estable* si, y sólo si b y c son positivas.

$$\begin{aligned}\dot{W}(S, I, U, V) &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \dot{S} + \dot{I} + \frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S} \left(1 - \frac{U^*}{U}\right) \dot{U} \\ &+ \frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S} \dot{V}\end{aligned}\quad (4.22)$$

haciendo el álgebra necesaria se obtiene que:

$$\begin{aligned}\dot{W}(S, I, U, V) &= \beta_S - \mu_S S V - \beta_S \frac{S^*}{S} + \mu_S S^* + \kappa_S S^* V + \kappa_S S V \\ &- \mu_I I + \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \beta_B - \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \mu_B U \\ &- \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \kappa_B I U - \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \beta_B \frac{U^*}{U} \\ &+ \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \mu_B U^* + \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \kappa_B U^* I \\ &+ \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \kappa_B I U - \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \mu_B V.\end{aligned}\quad (4.23)$$

La cual podemos reescribir como:

$$\dot{W}(S, I, U, V) = \dot{W}_1(S, I, U, V) + \dot{W}_2(S, U, U, V) + \dot{W}_3(S, I, U, V), \quad (4.24)$$

donde

$$\dot{W}_1(S, I, U, V) = \beta_S - \mu_S S - \beta_S \frac{S^*}{S} + \mu_S S^* \quad (4.25)$$

$$\dot{W}_2(S, I, U, V) = -\mu_I I + \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \kappa_B U^* I \quad (4.26)$$

y

$$\begin{aligned}\dot{W}_3(S, I, U, V) &= \kappa_S S^* V + \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \beta_B - \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \mu_B V \\ &- \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \mu_B U - \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \beta_B \frac{U^*}{U} \\ &+ \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \mu_B U^*.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Considerando el punto de equilibrio E_1^* , (4.25) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\dot{W}_1(S, I, U, V) &= 2\beta_S - \mu_S S - \frac{\beta_S^2}{\mu_S S} \\ &= -\frac{1}{\mu_S S}(\beta_S - \mu_S S)^2\end{aligned}\quad (4.28)$$

asi que $\dot{W}_1(S, I, U, V) \leq 0$.

Por otro lado, para (4.26) se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{W}_2(S, I, U, V) &= -\mu_I I + \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \kappa_B U^* I \\ &= -\mu_I I + \left(\frac{\kappa_S \beta_S \kappa_B \beta_B}{\mu_B^2 \mu_S}\right) I \\ &= I \left(\frac{\kappa_S \kappa_B \beta_S \beta_B}{\mu_B^2 \mu_S} - \mu_I\right) \\ &= \mu_I I (R_0 - 1)\end{aligned}\quad (4.29)$$

y $\dot{W}_2(S, I, U, V) \leq 0$ si $R_0 \leq 1$.

Ahora para (4.27) se reescribe como:

$$\dot{W}_3(S, I, U, V) = 2 \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \beta_B - \left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \mu_B U - \frac{\left(\frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}\right) \beta_B^2}{\mu_B U}. \quad (4.30)$$

Sea $x = \frac{\kappa_S \beta_S}{\mu_B \mu_S}$ entonces (4.30) se reescribe como:

$$\dot{W}_3(S, I, U, V) = 2x\beta_B - x\mu_B U - \frac{x\beta_B^2}{\mu_B U} \quad (4.31)$$

$$= -\frac{x}{\mu_S S}(\beta_B - \mu_B S)^2. \quad (4.32)$$

Por lo tanto si $R_0 \leq 1$, entonces $\dot{W} \leq 0$.

Nótese que el subconjunto donde $\dot{W} = 0$ es en $S = \frac{\beta_S}{\mu_S}$, $I = 0$ y $U = \frac{\beta_B}{\mu_B}$, entonces que una solución o trayectoria entre en esta región para cuando $t \rightarrow \infty$, significa que $I = 0$ implica que $\dot{I} = 0$, entonces $V = 0$. Por lo tanto la única trayectoria que puede permanecer en $\{(S, I, U, V) \in \Omega | \dot{W} = 0\}$ es $\{E_1^*\}$, donde E_1^* es el punto de equilibrio trivial. Por el Principio de Invarianza de LaSalle se tiene que E_1^* es globalmente asintóticamente estable en Ω .

4.1.2. Estabilidad del estado de equilibrio no trivial

Dado que $I_2^* = \frac{\mu_S \mu_B (R_0 - 1)}{\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S}$ y haciendo el álgebra necesaria se tiene que el punto de equilibrio E_2^* es:

$$\begin{aligned} E_2^* = (S^*, I^*, U^*, V^*) &= \left(\frac{\beta_S \mu_B (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S + \mu_S \kappa_B (R_0 - 1))}{(\mu_S \mu_B + \kappa_B \mu_S (R_0 - 1)) (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S)}, \right. \\ &\frac{\mu_S \mu_B (R_0 - 1)}{\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S}, \frac{\beta_B (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S)}{\mu_B (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S) + \kappa_B \mu_S \mu_B (R_0 - 1)}, \\ &\left. \left(\frac{\beta_B}{\mu_B} \right) \frac{\kappa_B \mu_S (R_0 - 1)}{\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S + \kappa_B \mu_S (R_0 - 1)} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

La matriz jacobiana asociada a la aproximación lineal del sistema (4.2), evaluada en E_2^* es:

$$J(E_2^*) = \begin{pmatrix} -\mu_S - \kappa_S V_2^* & 0 & 0 & -\kappa_S S_2^* \\ \kappa_S V_2^* & -\mu_I & 0 & \kappa_S S_2^* \\ 0 & -\kappa_B U_2^* & -\mu_B - \kappa_B I_2^* & 0 \\ 0 & \kappa_B U_2^* & \kappa_B I_2^* & -\mu_B \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

que es:

$$J(E_2^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_S}{S_2^*} & 0 & 0 & -\kappa_S S_2^* \\ \kappa_S V_2^* & -\mu_I & 0 & \kappa_S S_2^* \\ 0 & -\kappa_B U_2^* & -\frac{\beta_B}{U_2^*} & 0 \\ 0 & \kappa_B U_2^* & \kappa_B I_2^* & -\mu_B \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Para ello se tomaron las siguientes identidades:

$$\mu_S + \kappa_S V^* = \frac{\beta_S}{S_2^*}, \quad (4.36)$$

$$\mu_B + \kappa_B I^* = \frac{\beta_B}{U_2^*}, \quad (4.37)$$

$$\kappa_S S^* V^* = \mu_I I^*, \quad (4.38)$$

$$\kappa_B I^* U^* = \mu_B V^*. \quad (4.39)$$

El polinomio característico del sistema linealizado está dado por:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\frac{\beta_S}{S_2^*} - \lambda & 0 & 0 & -\kappa_S S_2^* \\ \kappa_S V_2^* & -\mu_I - \lambda & 0 & \kappa_S S_2^* \\ 0 & -\kappa_B U_2^* & -\frac{\beta_B}{U_2^*} - \lambda & 0 \\ 0 & \kappa_B U_2^* & \kappa_B I_2^* & -\mu_B - \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Después de hacer los cálculos del determinante se obtiene:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4, \quad (4.41)$$

con

$$a_1 = \frac{\beta_B}{U_2^*} + \frac{\beta_S}{S_2^*} + \mu_B + \mu_I, \quad (4.42)$$

$$a_2 = \frac{\beta_B\beta_S}{S_2^*U_2^*} + \frac{\beta_B\mu_B}{U_2^*} + \frac{\beta_B\mu_I}{U_2^*} + \frac{\beta_S\mu_I}{S_2^*} + \frac{\beta_B\mu_I}{U_2^*}, \quad (4.43)$$

$$a_3 = \kappa_B^2\kappa_S I_2^* S_2^* U_2^* + \kappa_B\kappa_S^2 S_2^* U_2^* V_2^* + \frac{\beta_B\beta_S\mu_B}{S_2^*U_2^*} + \frac{\beta_B\beta_S\mu_I}{S_2^*U_2^*}, \quad (4.44)$$

$$a_4 = \frac{\kappa_B\beta_S\mu_B\mu_I I_2^*}{S_2^*}. \quad (4.45)$$

Usando el Criterio de Routh-Hurwitz, la estabilidad local del punto endémico E_2^* se obtendrá si los coeficientes a_1 , a_2 , a_3 , a_4 del polinomio $P(\lambda)$ son positivos y

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0. \quad (4.46)$$

Es claro que los coeficientes de $P(\lambda)$ son positivos, sólo falta demostrar que $\Delta_3 > 0$. Para ello, es conveniente adoptar la siguiente notación:

$$A = \frac{\beta_B}{U_2^*}, B = \frac{\beta_S}{S_2^*}, C = \mu_B + \mu_I, D = \mu_B\mu_I, L = \kappa_B I \text{ y } F = \kappa_S V.$$

Ahora reescribiendo los coeficientes de (4.41) en términos de la nueva notación, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_1 &= A + B + C, \\ a_2 &= AB + (A + B)C, \\ a_3 &= ABC + D(L + F), \\ a_4 &= BDL. \end{aligned}$$

Después de calcular el determinante se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 &= A^3 B^2 C + A^2 B^3 C + A^2 B C^3 + A B^2 C^3 + A^2 B D F \\
&+ A^2 C D L + A B^2 D F + A^2 C D F + A B C D F + B^2 C D F \\
&+ A B (A^2 C^2 - C D L) + B^2 (2 A^2 C^2 - D L (A + L)) \\
&+ B^3 (A C^2 - D L) + D F (A C^2 - 2 D L) \\
&+ D F (B C^2 - D F) + D L (A C^2 - D L). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

De las identidades (4.36) se pueden obtener las relaciones siguientes:

$$A = L + \mu_B \tag{4.48}$$

$$B = F + \mu_S, \tag{4.49}$$

de las cuales se obtienen las siguientes desigualdades:

$$A C^2 > D L, B C^2 > D F, A^2 C^2 > D L (A + L) \text{ y } A^2 C^2 > C D L.$$

Así, se concluye que (4.47) es positivo. Por lo tanto se ha probado el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2 *Para $R_0 > 1$ el estado endémico E_2^* es localmente asintóticamente estable.*

4.2. Modelo epidemiológico con vector y poda

En ésta sección se propone el mismo modelo de la sección anterior pero con la acción de la poda, es decir, ***se considera que hay jardineros que cortan el muérdago a una tasa constante ϵ*** . De los supuestos ya dados para el modelo (4.2), se obtiene el modelo siguiente:

$$\dot{S} = \beta_S - \mu_S S - \kappa_S S V, \tag{4.50}$$

$$\dot{I} = \kappa_S S V - \mu_I I - \epsilon, \tag{4.51}$$

$$\dot{U} = \beta_B - \mu_B U - \kappa_B I U, \tag{4.52}$$

$$\dot{V} = \kappa_B I U - \mu_B V. \tag{4.53}$$

4.2.1. Análisis cualitativo

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema, se obtiene de la misma manera que el modelo (4.2). Claramente la única diferencia será para la ecuación que depende de ϵ . Ahora bien sustituyendo (4.53), (4.10) y (4.12) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B I}{\mu_S \mu_B (\mu_B + \kappa_B I) + \beta_B \kappa_B \kappa_S I} - \mu_I I - \epsilon \\
 &= -\mu_I \kappa_B (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S) I^2 - (\mu_I \mu_S \mu_B^2 - \beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B \\
 &\quad + \epsilon \kappa_B (\mu_S \mu_B + \beta_S \kappa_S)) I - \epsilon \mu_S \mu_B^2.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

De este modo, hallar los puntos de equilibrio no triviales³ se reduce a hallar las raíces de la ecuación cuadrática (4.54). La cual se puede reescribir como:

$$aI^2 + b_\epsilon I + c_\epsilon = 0, \tag{4.55}$$

donde

$$a = \mu_I \kappa_B (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S),$$

$$b_\epsilon = \mu_I \mu_S \mu_B^2 + \epsilon \kappa_B (\mu_S \mu_B + \beta_S \kappa_S) - \beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B,$$

$$c_\epsilon = \epsilon \mu_S \mu_B^2.$$

Ahora, para que esta ecuación tenga raíces reales es necesario que $\Delta_\epsilon \geq 0$, ($\Delta_\epsilon = b_\epsilon^2 - 4ac_\epsilon$).

Para indagar cuándo $\Delta_\epsilon \geq 0$ es conveniente introducir el número reproductivo básico R_0 , el cual está dado por:

³El lector puede verificar directamente de (4.53), (4.10) y (4.12), que en ausencia de muérdago (i.e., $V \equiv 0$ y $I \equiv 0$), la solución de equilibrio trivial esta dada por $E_0 = (\beta_S/\mu_S, 0, \beta_B/\mu_B, 0)$.

$$R_0 = \frac{\beta_S \beta_B \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_I \mu_B^2}, \quad (4.56)$$

el cual representa el número promedio de contagios secundarios.

Escribiendo a Δ_ϵ en términos de R_0 se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon &= b_\epsilon^2 - 4ac_\epsilon \\ &= (\mu_S \mu_I \mu_B^2)^2 \left[R_0 - \left(1 + \frac{\epsilon}{\mu_I \mu_B} \left(\kappa_B + \frac{\beta_S \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_B} \right) \right) \right]^2 \\ &\quad - 4\mu_I \kappa_B (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S) \mu_S \mu_B^2 \epsilon. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Además, observando que si $R_0 \neq 1$, entonces $\Delta_\epsilon > 0$ cuando $\epsilon = 0$. Ahora, se sigue por continuidad, que $\Delta_\epsilon > 0$ para $0 < \epsilon < \epsilon_c$, para alguna $\epsilon_{c1} > 0$, si $R_0 > 1$. Y que $\Delta_\epsilon > 0$ para $0 < \epsilon$, si $R_0 < 1$.

Claramente ϵ_{c1} es la raíz positiva más pequeña del polinomio cuadrático en $\Delta_\epsilon = 0$, el cual podemos reescribir como sigue:

$$(A - \epsilon B)^2 - C\epsilon = 0,$$

donde $A = R_0 - 1$, $B = \frac{1}{\mu_I \mu_B} \left[\kappa_B + \frac{\beta_S \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_B} \right]$ y $C = 4 \frac{\kappa_B}{\mu_B^2 \mu_I \mu_S} (\mu_S \mu_B + \beta_B \kappa_S)$ cuya raíz positiva más pequeña está dada por:

$$\epsilon_{c1} = \frac{2AB + C - \sqrt{C(4AB + C)}}{2B^2}, \quad (4.58)$$

se llega a que

Afirmación 4.2.1 *Si $R_0 > 1$, entonces $\Delta_\epsilon > 0$, para $0 < \epsilon < \epsilon_{c1}$, donde ϵ_{c1} dado por (4.58).*

El lector puede verificar sin dificultad que $\Delta_\epsilon > 0$, si $R_0 < 1$.

Como

$$0 \leq \Delta_\epsilon = b_\epsilon^2 - 4ac_\epsilon < b_\epsilon^2,$$

se sigue que

$$\sqrt{\Delta_\epsilon} < |b_\epsilon|.$$

Así, el polinomio cuadrático en (4.55) tendrá ambas raíces positivas ($0 < I_1 < I_2$), si $b_\epsilon < 0$, $-b_\epsilon > \sqrt{\Delta_\epsilon}$ y $\Delta_\epsilon \geq 0$.

El lector puede verificar sin dificultad que si $b_\epsilon > 0$, entonces ambas raíces del polinomio cuadrático en (4.55) son ambas negativas.

Ahora, escribiendo a b_ϵ en términos de R_0 se tiene:

$$b_\epsilon = \mu_I \mu_S \mu_B^2 \left[R_0 - \left[1 + \frac{\epsilon}{\mu_I \mu_B} \left(\kappa_B + \frac{\beta_S \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_B} \right) \right] \right], \quad (4.59)$$

así $b_\epsilon \leq 0$, si:

$$R_0 \leq 1 + \frac{\epsilon}{\mu_I \mu_B} \left[\kappa_B + \frac{\beta_S \kappa_S \kappa_B}{\mu_S \mu_B} \right].$$

Es decir, si $R_0 - 1 \leq \epsilon_c$ donde:

$$\epsilon_{c^2} \equiv \frac{\mu_I \mu_B (R_0 - 1)}{\kappa_B \left(1 + \frac{\beta_S \kappa_S}{\mu_S \mu_B} \right)}. \quad (4.60)$$

Nótese que si $b_\epsilon = 0$, entonces el polinomio tiene raíces imaginarias. Por lo tanto no son admisibles. Lo cual no tiene interés biológico.

Resumiendo, se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 *Si $R_0 > 1$, entonces para el modelo de cuatro poblaciones para el muérdago con poda (4.2) tiene dos estados de equilibrio admisibles no triviales $E_{e1} = (S_1^*, I_1^*, U_1^*, V_1^*)$ y $E_{e2} = (S_2^*, I_2^*, U_2^*, V_2^*)$ ($I_1^* < I_2^*$) para $0 < \epsilon < \epsilon_c$ con $\epsilon_c = \min[\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}]$.*

Capítulo 5

Conclusiones

*“Sólo cuando el último árbol esté muerto,
el último río envenenado, y el último pez atrapado,
te darás cuenta que no puedes comer dinero ”.*

Sabiduría indoamericana

El muérdago es una planta parásito compleja que aprovecha el grado de susceptibilidad en la que se encuentran los árboles de las zonas urbanas, ocasionando graves e irreparables daños a sus prados, calles y bosques. Con el propósito de dar protección a los árboles, cuidando con ello el medio ambiente, el estudio de la dinámica del muérdago es fundamental. Y en esta tarea, el desarrollo modelos matemáticos es muy relevante.

Para ello se comenzó revisando el modelo clásico de Volterra, tomando en cuenta que éste modelo no contempla muchos aspectos importantes de la naturaleza de la plaga, se revisó el modelo de Ross para el estudio de la malaria, el cual está más apegado al problema del muérdago, ya que muchos aspectos importantes que hay entre las personas infectadas con malaria y los mosquitos que portan el parásito es muy similar a árboles infectados con muérdago y las aves que lo manipulan. Como parte del estudio de este modelo, se desarrollaron simulaciones con datos tomados de Aukema y del Rio [2], donde se presenta un estudio que se centra en las montañas de Silverbell al oeste de Marana, Arizona, EUA. La especie de muérdago que ellos estudian es *Phoradendron californicum* que es un muérdago de desierto, donde el vector es un ave de la especie *Phainopepla nitens*. En fin, según nuestras simulaciones numéricas con el modelo de Ross, el muérdago eventualmente

desaparecerá en Silverbell.

Por otro lado, la población de las aves forman parte de la dinámica, por tal motivo se desarrolló un modelo epidemiológico, considerando cuatro poblaciones, las de árboles susceptibles e infectados y de las aves que han manipulado muérdago y las que no, éste es un modelo más apegado a la realidad, para el que se realizó su estudio completo, obteniendo los dos resultados siguientes: el primero, si $R_0 \leq 1$, entonces el sistema admite un único estado de equilibrio el trivial, el cual es globalmente asintóticamente estable; y el segundo, si $R_0 > 1$ el punto de equilibrio endémico es localmente asintóticamente estable. Después a este modelo se le incluye el efecto de la poda de árboles parasitados, para el que obtienen los puntos de equilibrio en función también de la poda y el siguiente resultado: si $R_0 > 1$, entonces hay dos puntos de equilibrio admisibles no triviales.

Es importante recalcar que en el caso de México, no hay datos longitudinales, es por ello que se revisó bibliografía de otros países en especial Estados Unidos. Los modelos que se utilizaron a lo largo de éste trabajo de tesis se basaron en artículos y de algunas entrevistas que se tuvieron con biólogos que trabajan muérdago.

Para el desarrollo de trabajos posteriores, se propone abordar la importancia de estudiar semiflujos monótonos, ya que estos resultados son de suma importancia en el estudio del dengue que bien se pueden extender al del muérdago [14]. Además, sería interesante abordar y comprender en su totalidad los nuevos artículos que ha propuesto Rongsong Liu, donde hace uso de estas nuevas herramientas matemáticas. También será importante obtener datos longitudinales de México en especial del estado de Puebla para hacer algunas simulaciones numéricas.

Diagramas de fases de los sistemas planos

El bosquejo del diagrama de fases del sistema lineal homogéneo y autónomo en el plano:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{A.1}$$

está determinado por los autovalores λ_1, λ_2 de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\tag{A.2}$$

o sea, por las raíces de la ecuación característica

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.\tag{A.3}$$

El origen es siempre un **punto de equilibrio** aislado, si $\det(A) \neq 0$.

- Si los autovalores son reales y de distintos signo ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$), entonces el origen es un **punto de silla**. Las dos semirrectas que, junto con el origen, componen el autoespacio $E(\lambda_2)$ son trayectorias que se acercan al origen cuando $t \rightarrow \infty$ mientras que las que componen $E(\lambda_1)$ se alejan de él. Las demás trayectorias son curvas de aspecto hiperbólico que se acercan asintóticamente a $E(\lambda_1)$ cuando $t \rightarrow \infty$ y a $E(\lambda_2)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (figura A.1).

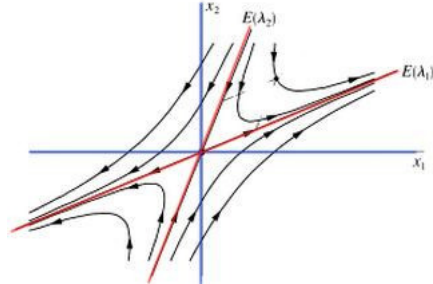


Figura A.1: Punto silla

- Si los autovalores son reales distintos y del mismo signo ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$), el origen es un **nodo**. Dos casos a considerar:
 - (i) Si son ambas negativas ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), se tiene un **nodo estable**. Luego, todas las trayectorias solución del sistema tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Hay cuatro trayectorias especiales que son las semirrectas que componen $E(\lambda_1)$ y $E(\lambda_2)$ y las demás curvas que tienden al origen son tangentes (en el límite) a la recta $E(\lambda_1)$. (figura A.2).

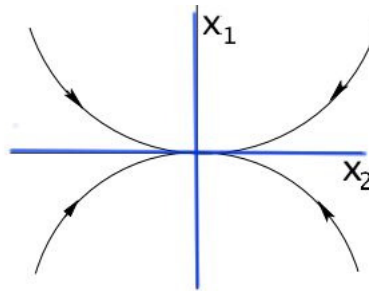


Figura A.2: Nodo estable

- (ii) Si los autovalores son ambos positivos ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$), se tiene que el origen es un **nodo inestable**. Luego, todas las trayectorias solución del sistema se alejan del origen cuando $t \rightarrow \infty$. tangentes a $E(\lambda_2)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (figura A.3).
- Si el polinomio característico $p_A(\lambda)$ tiene una raíz doble λ (i.e., A tiene un autovalor doble) y A es diagonalizable, entonces el sistema (A.4)

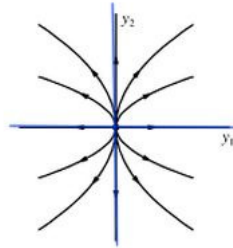


Figura A.3: Nodo inestable

se transforma, en un nuevo sistema de coordenadas determinado por autovectores, en:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

de donde se sigue que el origen es un **punto estrella estable**, si $\lambda < 0$ e **inestable** si $\lambda > 0$ y el diagrama de fases se muestra en la (figura A.4).

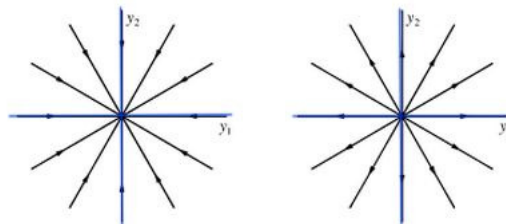


Figura A.4: Puntos estrella

- Si A tiene un autovalor doble λ y **no es diagonalizable** entonces el origen es un **nodo impropio, estable**, si $\lambda < 0$, e **inestable**, si $\lambda > 0$. En el primer caso, todas las trayectorias tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$ y en el segundo, todas se alejan del origen cuando $t \rightarrow \infty$. Aparte del origen, hay dos trayectorias especiales, dos semirrectas que con el origen forman un subespacio invariante $E(\lambda)$ asociado a λ . Las demás trayectorias solución, cuando $\lambda < 0$ (respectivamente, $\lambda > 0$) entran (respectivamente, salen) en el origen tangentes a la recta $E(\lambda)$. (figura A.5).

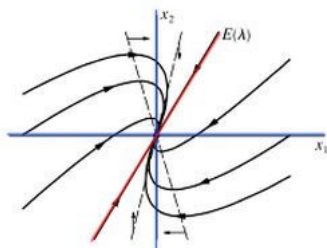


Figura A.5: Nodo impropio estable

- Si los autovalores de A son un par de números complejos conjugados $a \pm ib$, $b > 0$, el origen es un **foco** o **punto espiral**. Las trayectorias aparte del origen son curvas espirales que tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$ si $a < 0$ (**punto espiral estable** Figura A.6) y se alejan de él (cuando $t \rightarrow -\infty$); y si $a > 0$ (**punto espiral inestable**), (véase figura A.7).

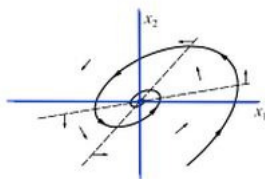


Figura A.6: Espiral estable

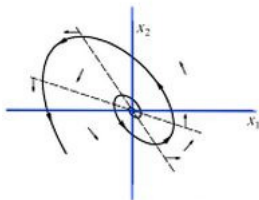


Figura A.7: Espiral inestable

- Si los autovalores son un par de números imaginarios conjugados $\pm ib$, $b > 0$, el origen es un **centro**. Además de éste, las trayectorias del

sistema son elipses de centro en el origen. (figura A.8).

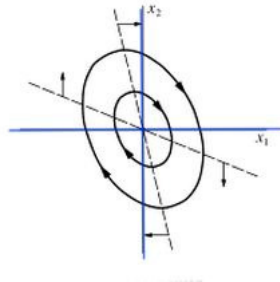


Figura A.8: Centro

En la figura (A.9) se describe esquemáticamente la clasificación del estado de equilibrio del sistema (A.4), en términos de la traza de A ($Tr A$), el determinante de A ($det A$) y el discriminante de A ($\Delta = (Tr A)^2 - 4det A$).

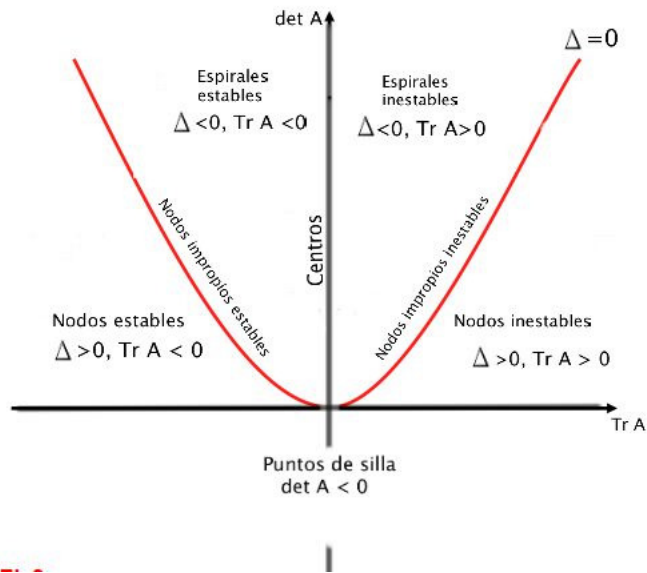


Figura A.9: Tipos de diagramas de fases

Definiciones y teoremas

En el estudio del comportamiento geométrico de las trayectorias solución del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$, sus *puntos de equilibrio* \bar{x} juegan un papel central. Un punto de equilibrio se dice *estable* si las soluciones con condición inicial próximas a él, permanecen próximas para todo instante posterior. Y se dice *asintóticamente estable* si éste es *estable* y toda trayectoria solución con condiciones iniciales próximas a él, convergen a éste cuando $t \rightarrow \infty$. Y se dice que es *globalmente asintóticamente estable* si toda trayectoria solución del sistema converge a éste cuando $t \rightarrow \infty$.

Consideremos el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{B.1}$$

donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de C^1 en el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Se usará la notación $\varphi(t, x_0)$ como la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Definición B.1 La *trayectoria u órbita positiva* de una solución $\varphi(t, x)$ es $\gamma(x_0) = \{\varphi(t, x_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : t \geq 0\}$.

Definición B.2 Un punto $\bar{x} \in \Omega$ es llamado un *punto de equilibrio* de (B.1) si $f(\bar{x}) = 0$.

Definición B.3 Sea \bar{x} un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$. Se dice que \bar{x} es **estable** si, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que si $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$, entonces la solución $\varphi(t, x_0)$ está definida y satisface $\|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Y se dice que \bar{x} es **asintóticamente estable** si es estable y si toda solución $\varphi(t, x_0)$ con $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$ tiende a \bar{x} cuando $t \rightarrow \infty$.

Un punto de equilibrio \bar{x} se dice que es **inestable** si no es estable.

Definición B.4 . Se dice que el conjunto $W \subseteq \Omega$ es **positivamente invariante** si para todo $x_0 \in W$ se tiene $\varphi(t, x_0) \in W$ para toda $t \in [0, w)$. Análogamente, es **negativamente invariante** si $\varphi(t, x_0) \in W$ para todo $t \in (\alpha, 0]$ siempre que $x_0 \in W$. Finalmente, se dice que W es **invariante** si a la vez es positiva y negativamente invariante.

B.1. Linealización de sistemas no lineales

Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio \bar{x} del sistema $\dot{x} = f(x)$ hay que analizar el comportamiento de las soluciones próximas a \bar{x} . Sean las funciones $f_i(x_1, \dots, x_n)$ y $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, \dots, n$ son continuas en el conjunto abierto Ω de \mathbb{R}^n garantiza que las funciones f_i son diferenciables en todo punto de Ω , es decir, que en un entorno de \bar{x} .

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, \dots, x_n) &= f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})h_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x})h_n \\
 &+ g_1(\bar{x}, h_1, \dots, h_n) \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, \dots, x_n) &= f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x})h_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x})h_n \\
 &+ g_n(\bar{x}, h_1, \dots, h_n)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

donde $h = (h_1, \dots, h_n) = (x_1 - \bar{x}_1, \dots, x_n - \bar{x}_n)$ y $g_i(\bar{x}, h)$ son funciones “pequeñas” en un entorno de \bar{x} , concretamente, tales que $g_i(\bar{x}, h) / \|h\| \rightarrow 0$ cuando $\|h\| \rightarrow 0$, o sea, cuando $x \rightarrow \bar{x}$.

En escritura vectorial

$$f(x) = A \cdot (x - \bar{x}) + g(x, \bar{x}) \quad (\text{B.3})$$

teniendo en cuenta que por, por hipótesis, $f(\bar{x}) = 0$, y donde $A = Df(\bar{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})$ es la matriz Jacobiana de $f(x)$ evaluada en \bar{x} y $g = (g_1, \dots, g_n)$ verifica $\lim_{\|x-\bar{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x, \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} = 0$ y teniendo en cuenta que el valor de g es pequeño para x próximo a \bar{x} , es razonable conjeturar, que el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal aproximan a \bar{x} es análogo al de las soluciones del sistema lineal $\dot{x} = A \cdot (x - \bar{x})$.

Para simplificar los argumentos, conviene introducir la variable $y = x - \bar{x}$, que representa la desviación del estado del sistema respecto del estado de equilibrio \bar{x} . El sistema que satisface $y(t) = x(t) - \bar{x}$ es $\dot{y} = Ay + g(y)$, el punto de equilibrio pasa a ser, en la nueva variable, el origen y las propiedades de estabilidad de éste son las mismas que las de \bar{x} como punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

Definición B.5 *Sea \bar{x} un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. El sistema lineal autónomo*

$$\dot{y} = Df(\bar{x}) \cdot y, \quad Df(\bar{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \quad (\text{B.4})$$

*se llama **linealización, aproximación lineal o primera aproximación** de $\dot{x} = f(x)$ en \bar{x} .*

Sistema al cual se recurre para estudiar las propiedades locales de estabilidad del sistema $\dot{x} = f(x)$ alrededor del estado de equilibrio \bar{x} . La justificación de este procedimiento descansa en el siguiente teorema fundamental de la teoría geométrica local de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello, es conveniente antes recordar que un estado de equilibrio \bar{x} del sistema $\dot{x} = f(x)$ se dice que es *hiperbólico* si todos los eigenvalores de la matriz A en su linealización $\dot{y} = Ay$ alrededor de \bar{x} tienen parte real no nula.

Teorema B.1 Hartman-Grobman *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\bar{x} \in \Omega$ y $B_d(\bar{x}) \subset \Omega$ para algún $d > 0$. Sea $f \in C^1(\Omega)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$, $A = Df(\bar{x})$ y \bar{x} un punto de equilibrio hiperbólico. Entonces existen vecindades abiertas $\bar{x} \in U$ y $0 \in V$ y un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ tal que las soluciones $\varphi(t, x_0)$ de la ecuación*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

son topologicamente equivalente a las soluciones de su linealización

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(i.e., $H(\varphi(t, x_0)) = e^{tA}y_0$, $y_0 = H(x_0)$), para todo $x_0 \in U$ y $|t| < 1$.

Para su demostración véase (Hartman Ph. [19]).

En particular, de éste teorema se sigue que si $y = 0$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable del sistema $\dot{y} = Ay$ entonces \bar{x} es un estado de equilibrio localmente asintóticamente estable del sistema $\dot{x} = f(x)$. Y que si $y = 0$ es un estado de equilibrio inestable entonces \bar{x} también lo es.

B.2. Estabilidad para sistemas no lineales: Lyapunov

Definición B.6 Se $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un subconjunto abierto $U \subset \Omega$ de \bar{x} es llamada una **función de Lyapunov** para (B.1) en U si $V(\bar{x}) = 0$, $V(x) > 0$ para $x \neq \bar{x}$, $x \in U$, y

$$\text{grad}V(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad (\text{B.5})$$

para $x \in U$. Si la desigualdad (B.5) es estricta para $x \in U$, $x \neq \bar{x}$, entonces V es llamada **función de Lyapunov estricta** para (B.1) en U .

Teorema B.2 (Estabilidad de Lyapunov). Si V es una función de Lyapunov estricta para (B.1) en un conjunto abierto U que contiene al punto de equilibrio \bar{x} , entonces es **estable**. Si V es una función de Lyapunov estricta, entonces es **asintóticamente estable**.

Teorema B.3 (Barbashin-Krasovsky) Sea \bar{x} un punto de equilibrio de (B.1). Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

i) $V(\bar{x}) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo $x \neq \bar{x}$.

ii) Si $\|x\| \rightarrow \infty$, entonces $V(x) \rightarrow \infty$.

iii) $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \neq \bar{x}$,

entonces \bar{x} es **globalmente asintóticamente estable**.

Teorema B.4 (Principio de invariancia de LaSalle) Sea $W \subset \Omega$ un conjunto que es invariante positivo con respecto a $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos de W donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el mayor conjunto invariante contenido en E , entonces toda solución que comienza en W tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición B.7 Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se llama **simplemente conexo** si cualquier curva cerrada contenida en Ω tiene todo su interior contenido en Ω .

Teorema B.5 (Criterio de Bendixon) Sea $\dot{x} = f(x)$ con $f \in C^1$ donde Ω es un dominio simplemente conexo en \mathbb{R}^2 . Si $\nabla \cdot f$, es distinto de cero y no cambia de signo en Ω , entonces $\dot{x} = f(x)$ no tiene trayectorias cerradas contenidas enteramente en Ω .

Definición B.8 Un punto $p \in \Omega$ es un punto ω -**límite** de la trayectoria $\gamma^+(x_0)$ si existe una sucesión de tiempos $t_k \rightarrow \infty$ tal que $p = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x_0)$. Similarmente, un punto $q \in \Omega$ es un punto α -**límite** de la trayectoria $\gamma^+(x_0)$ si existe una sucesión de tiempos $t_k \rightarrow -\infty$ tal que $q = \lim_{k \rightarrow -\infty} \varphi(t_k, x_0)$.

Teorema B.6 (Poincaré-Bendixon) Sea γ^+ una semiorbita contenida en un suconjunto compacto $K \subset \Omega$ y supóngase que Ω tiene sólo un número finito de puntos críticos entonces se cumple alguno de estos:

- $\omega(\gamma^+)$ consiste de un sólo punto crítico.
- $\omega(\gamma^+)$ es una trayectoria periódica.
- $\omega(\gamma^+)$ tiene un número finito de puntos críticos.

B.3. Criterio de Routh-Hurwitz

Sea la ecuación con coeficientes reales

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (a_0 > 0). \quad (\text{B.6})$$

Se construye la matriz de Hurwitz

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Todas las raíces de la ecuación (B.6) tienen parte negativa si, y sólo si,

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0,$$

donde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ son los sucesivos menores principales de la matriz (B.7) los cuales son:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Veáse en [1] una descripción más detallada del criterio.

Si $n = 4$ las condiciones Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 y Δ_4 son equivalentes a $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ y $\Delta_3 > 0$.

Bibliografía

- [1] Alexandrov V. V., Bolotin V. Yu, et al. (2009). *Introduction to control of dynamic systems*, Primera edición, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [2] Aukema J. E. y Martínez Del R. C. (2002). *Variation in mistletoe seed deposition: effects of intra- and interspecific host characteristics*. *Ecography.*, 25, 139-144.
- [3] Aukema J. E. (2003). *Vectors, viscin and viscaceae: mistletoes as parasites, mutualists and resorces*. *Front. Ecol. Environ.*, I(3), 212-219.
- [4] Barlow BA. (1983). *Biogeography of Loranthaceae and Viscaceae.*, Calder y Bernhardt, 19-46.
- [5] Borrelli R. Courtney S y Coleman. (2004). *Differential equations: A modeling perspective*, Segunda edición, Wiley.
- [6] Brauer F. et al. (2008). *Mathematical epidemiology.*, Springer.
- [7] Brauer F., Chávez C. et al. (2014). *Modelos De La Propagación De Enfermedades Infecciosas*, Universidad Autónoma de Occidente, 16, 141-140.
- [8] Burkhardt F, Smith S. et al. (1990). *The Correspondence of Charles Darwin*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 773 pp.
- [9] Chazaro, B., Huerta M. et al. (1991). *Dendroptthora costaricensis (Loranthaceae), un nuevo registro para la flora de México*. *Acta Botánica Mexicana*, 13, 31-38.

-
- [10] Chazaro, B., Huerta M. et al. (1992). *Los muérdagos (Loranthaceae) de Jalisco, parásitas poco conocidas*. Ciencia y Desarrollo, 17(102), 70-86.
- [11] Cruzado L., López E. y Oliveros O. (2013). *Modelos Epidemiológicos del muérdago*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [12] Comisión Nacional Forestal. (2007). *Manual de Tratamientos Fitosanitarios*. Coordinación General de Conservación y Restauración. Gerencia de Sanidad Forestal. 40-41.
- [13] Coria A., Vázquez C., Muñoz F. y Villa C. (2008). *Utilización de algas (diatomeas) en la supresión del muérdago enano Arceuthobium globosum en Pinus pseudostrobus y muérdago verdadero Psittacanthus calyculatus en Quercus sp.*, Memoria del XV simposio Nacional de Parasitología Forestal, 180-183.
- [14] Esteva L. y Vargas C. (1998). *Analysis of a dengue disease transmission model*, Mathematical Biosciences, 150, 131-151.
- [15] Fariña M. J., Castilla C. J. y Camus P. A. (1997). *Los conceptos de equilibrio y no-equilibrio en ecología de comunidades*, Revista Chilena de Historia Natural, 70, 321-339.
- [16] Fernández P. etl al. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, Thomson.
- [17] Glatzel y Geils B. (2008). *Mistletoe acophysiology: host-parasite interactions*, Botany, 87, 10-15.
- [18] Gutiérrez S. F. y Sánchez G. F. (1998). *Matemáticas para las ciencias naturales.*, SMM.
- [19] Hartman Ph. (2002). *Ordinary Dirrrential Equations*, SIAM.
- [20] Murray J. D. (2008). *Mathematical biology I: An Introduction.*, Tercera edición. Springer.
- [21] Kelly D. Ladley J.J. y Robertson A. W. (2007). *Is the pollen-limited mistletoe Peraxilla tetrapetala (Loranthaceae) also seed limited?*, Austral Ecology, 32, 850-857.
-

-
- [22] Landell NE. *Hur fick han idén*, Stockholm: Univ. Stockholm Press. pp. 14.
- [23] Marchal V. (2009). *El muérdago en la ciudad de México*, Albolama, 2, 10-30.
- [24] Nickrent L. (2001). *Mistletoe phylogenetics: current relationships gained from analysis of DNA sequences*, In Proc. West. Int. For. Dis. Work Conf., ed. B Geils, R Mathiasen, USDA For. Serv., Kona, HI
- [25] Pérez O, Ceja R. y Vela R. (2006). *Árboles y muérdagos: una relación que mata*, Departamento de Biología, UAM-I, 28-34.
- [26] Rongsong Liu, Martínez R. y Wu. J. (2011). *Spatiotemporal variation of mistletoes: a dynamic modeling approach*, Math. Biol., 73, 1794-1811.
- [27] Rödl T. y Ward D. (2002). *Host recognition in a desert mistletoe: early stages of development are influenced by substrate and host origin*, Func. Ecol. 16, 128-134).
- [28] Sessions A. L. y Kelly D. (2001). *Heterogeneity in vertebrate and invertebrate herbivory and its consequences for New Zealand mistletoes*, Austral Ecology, 26, 571-581).
- [29] Vázquez C. I., Villa R. A. y Madrigal H. S. (2006). *Los muérdagos (Loranthaceae)*, Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias, Libro Técnico Núm. 2.
- [30] Ward J. M. y Paton C. D., *Predicting mistletoe seed shadow and patterns of seed rain from movements of the mistletoebird, Dicaeum hirundinaceum*, Austral Ecology, 32, 113-121.
- [31] Watson M. (2001). *Mistletoe- A keystone resource in forests and woodlands worldwide*, Ecol. Syst., 32, 219-49.
-