



# **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**

## **Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas**

Cálculo numérico del patrón de difracción de Fresnel de una  
abertura circular.

Tesis Presentada al

**Colegio de Física**

como requisito para la obtención del grado de:

**Licenciado en Física Aplicada**

Presenta:

Pedro Armando Moreno Acosta

Asesorado por:

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla, Pue.

Diciembre 2020





# **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**

## **Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas**

Cálculo numérico del patrón de difracción de Fresnel de una  
abertura circular.

Tesis Presentada al

**Colegio de Física**

como requisito para la obtención del grado de:

**Licenciado en Física Aplicada**

Presenta:

Pedro Armando Moreno Acosta

Asesorado por:

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla, Pue.

Diciembre 2020

Título: Cálculo numérico del patrón de difracción de Fresnel de una  
abertura circular.

Estudiante: Pedro Armando Moreno Acosta

## COMITÉ

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Presidente

---

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría  
Secretario

---

Dra. Rosibel Carrada Legaria  
Vocal

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Asesor



# Agradecimientos

A mi madre María del Carmen por su ayuda y cariño durante todos estos años.

A mi hermano Miguel Angel por ser un apoyo y un gran amigo.

A mi padre Pedro por anhelar lo mejor para mí.

A mi asesor el Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco por su paciencia y apoyo.

A mis sinodales la Dra. Maricela Maribel Méndez Otero, el Dr. Miguel Ángel Olvera Santamarina y la Dra. Rosibel Carrada Legaria, por revisar este trabajo y por sus comentarios.

A todos mis amigos y compañeros que formaron parte de este proceso.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por brindarme un lugar para desarrollarme.

# Índice general

Resumen.....	1
Introducción.....	2
1. Fundamentos Teóricos.....	5
1.1 Transformada de Fourier bidimensional y sus propiedades.....	5
1.2 Ecuación de onda y ecuación de Helmholtz. ....	7
1.3 Teorema de Green.....	8
1.4 Teoría Escalar.....	9
1.5 Integral de difracción de Fresnel y Fraunhofer.....	16
2. Fundamentos Computacionales.....	22
2.1 Discretización de funciones bidimensionales y condiciones de muestreo. ...	22
2.2 Discretización de la transformada de Fourier bidimensional. ....	24
2.3 Digitalización de la Transformada de Fourier usando el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier en MATLAB.....	25
2.4 Código para la simulación de difracción por una abertura circular.....	28
2.4.1 Función de transferencia. ....	28
2.4.2 Propagación de dos pasos. ....	30
2.4.3 Difracción a través de una abertura circular. ....	35
3. Análisis de resultados.....	38
4. Conclusiones.....	61
Apéndice A: Demostración del Teorema de Green.....	62
Bibliografía .....	63

# Resumen.

Uno de los fenómenos más importantes en el estudio de la óptica es la difracción de campos ópticos usando la aproximación llamada Teoría Escalar, en la cual se omite el carácter vectorial de la luz. Esta teoría logra describir acertadamente un gran número de resultados experimentales; con la condición de que los elementos difractivos sean más grandes comparados con la longitud de onda de la luz. Sin embargo, existen ciertos ejemplos, como la abertura circular, que presentan complejidad para resolverse de manera analítica, por lo que se utilizan programas de simulación para poder observar los efectos de difracción.

En este trabajo se estudia la Teoría Escalar hasta llegar a las soluciones de difracción de Rayleigh-Sommerfeld; las cuales permiten obtener la integral de difracción de Fresnel. Además, se menciona la similitud entre esta integral con la transformada de Fourier y la función convolución.

Después, se realiza una revisión sobre los elementos necesarios para discretizar funciones continuas, haciendo énfasis en la transformada discreta de Fourier (DFT por sus siglas en inglés). Posteriormente, se estudia la digitalización de funciones discretas en MATLAB y se implementan rutinas que permitan realizar la DFT empleando el algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés).

Finalmente, utilizando como base la integral de difracción Fresnel y el algoritmo de transformada rápida de Fourier, se elabora un programa en MATLAB para calcular numéricamente el patrón de difracción de campo cercano del campo óptico que pasa por una abertura circular utilizando dos procedimientos: la función de transferencia y la propagación de dos pasos. Los resultados obtenidos se analizan en base a los métodos propuestos en la literatura.

Palabras clave: Integral de difracción de Fresnel, Transformada de Fourier, Función de Transferencia, Propagación a dos pasos y abertura circular.

# Introducción.

La naturaleza de la luz ha sorprendido al ser humano desde el inicio de los tiempos, siendo sujeto de estudio por muchos pensadores, filósofos y científicos. De estos estudios nace una rama de la física llamada óptica, la cual tiene como objetivo describir el comportamiento de la luz y sus propiedades; así como el estudio de los dispositivos que interactúan con ella [1]. Dentro de la óptica sobresale el fenómeno llamado difracción; el cual se define como cualquier variación de los rayos de luz que no puede ser interpretado como una reflexión o refracción [2].

La primera persona en observar y estudiar la difracción fue Francesco María Grimaldi quien reporto, en 1665, unas bandas de luz dentro de la sombra de una varilla iluminada por una pequeña fuente [3]. Las bandas resultaban difíciles de explicar para la teoría predominante de la época, la teoría corpuscular de la luz. Esta teoría había sido propuesta por Isaac Newton y definía a la luz como un conjunto de rayos que se mueven de manera recta a través de cualquier medio [4]. Con ella se lograron encontrar las leyes de reflexión y refracción; así como el estudio de instrumentos ópticos como lentes, espejos, etc. [5, 6].

Casi al mismo tiempo que Newton expandía su teoría corpuscular, Christian Huygens propuso, en 1678, la teoría ondulatoria de la luz [7, 8]. Huygens afirmo que cada punto en un frente de una perturbación debía ser considerado como una nueva fuente de perturbación secundaria esférica. Lo que permitía reconstruir el frente de onda en cualquier momento posterior construyendo la envolvente de las perturbaciones secundarias. Con esta afirmación Huygens fue capaz de demostrar las leyes de reflexión y refracción, a pesar de ello sus ideas no fueron tomadas en cuenta ya que la mayoría de los científicos optaron por apoyar la teoría corpuscular sobre la ondulatoria, esto debido principalmente al peso que Newton tenía dentro de la comunidad científica. Por lo que el trabajo de Huygens permaneció en el olvido por casi un siglo.

Fue hasta el siglo XIX cuando Thomas Young y Augustin Fresnel retomaron la teoría ondulatoria y definieron, de manera independiente uno del otro, el concepto de interferencia [9]. Con esta idea, Fresnel completo las ideas de Huygens, estableció que la propagación de una onda primaria era vista como la sucesión de ondas secundarias esféricas, que se superponen e interfieren para reformar la onda primaria, tal y como aparecería un instante después [10, 11]; esta idea se conoce como el principio de Huygens-Fresnel y permitió a Fresnel calcular patrones de difracción generados por varios obstáculos y aberturas.

El debate entre si la luz es una onda o un corpúsculo quedo aclarado, al menos momentáneamente, en 1860 cuando James Clerk Maxwell identifico a la luz como una onda electromagnética y describió su comportamiento en cuatro ecuaciones [12, 13]. Tomando en cuenta este hecho Gustav Kirchhoff, en 1882, formalizo matemáticamente las ideas Fresnel basando su formulación en dos suposiciones sobre las condiciones de frontera que incide en un obstáculo, sentando así las bases de lo que se conoce hoy en día como la Teoría Escalar [14, 15]; además, como su nombre lo indica, se hace una aproximación ya que se ignora el carácter vectorial de los campos ópticos. A pesar de ello, se pueden describir acertadamente algunos fenómenos experimentales [16]. Tiempo después, Sommerfeld demostró que las suposiciones de frontera hechas por Kirchhoff eran inconsistentes por lo que modifico la teoría y elimino la inconsistencia, dando paso a los que se conoce como la teoría de difracción de Rayleigh-Sommerfeld [17, 18].

Usando las soluciones de Sommerfeld se puede encontrar la integral de difracción de Fresnel y la integral de difracción de Fraunhofer [19]. Estas integrales permiten explicar la propagación de campos ópticos a través de aberturas u obstáculos, donde se tienen dos regiones de difracción: campo cercano (región de Fresnel) y campo lejano (región de Fraunhofer). La región de campo lejano cuenta con bastantes ejemplos resueltos, debido a que la integral de Fraunhofer se puede interpretar como una transformada de Fourier ligeramente modificada [20, 21]. Por el contrario, en la región de campo cercano, aunque se puede interpretar la integral de difracción de Fresnel como una función convolución, solo permite resolver algunos casos muy concretos de forma analítica. Es en este punto cuando toman gran importancia las computadoras, las cuales permiten realizar simulaciones numéricas.

Desde finales del siglo pasado e inicios de este siglo, se han realizado simulaciones numéricas en la propagación de campos ópticos utilizando diferentes métodos numéricos [22-25]. A inicios de la década pasada se dio gran importancia a simulaciones basadas en el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier [26, 27], las cuales implementan la transformada de Fourier en su forma discreta [28]. Este algoritmo se encuentra implementado en diferentes lenguajes de programación como Matlab [29-32].

En particular, para el caso de la abertura circular la integral de difracción de Fresnel correspondiente no tiene solución de manera analítica, aunque se puede estimar su patrón de difracción usando la teoría vectorial de Lommel [33] o las zonas de Fresnel [34]. De manera más sencilla se han generado algoritmos que permiten visualizar el patrón de difracción de manera computacional [35, 36].

Este trabajo de tesis se enfoca en el estudio y desarrollo de un programa en MATLAB, basado en la Teoría Escalar, que permita calcular la propagación libre de campos ópticos en la región de Fresnel. Este tipo de programas son de gran interés ya que permiten contrastar resultados experimentales, además de que son la base para simulaciones más complejas como propagación en medios con turbulencia [26] o propagación en medios dispersivos [37, 38].

El objetivo principal de este trabajo es elaborar un programa en Matlab que calcule numéricamente el patrón de difracción del campo óptico que pasa a través de una abertura circular al propagarse en espacio libre a campo cercano. Este programa está basado en la integral de difracción de Fresnel y en el algoritmo Fast Fourier Transform (FFT). Por lo que se debe estudiar la teoría de trasfondo para encontrar las integrales de difracción, así como la digitalización y discretización de funciones en MATLAB.

En el capítulo uno se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del programa como lo son la transformada de Fourier, las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de onda y el teorema de Green. Una vez definidas estas ideas se plantea la teoría escalar desde las suposiciones de Kirchhoff, pasando por las soluciones de Rayleigh-Sommerfeld, hasta obtener la integral de Fresnel y Fraunhofer.

En el capítulo dos se aborda la discretización de funciones continuas, haciendo especial énfasis en la transformada de Fourier para obtener la transformada discreta de Fourier y el uso del algoritmo de transformada rápida de Fourier, lo que permite generar las subrutinas correspondientes. Al mismo tiempo, se muestra el proceso de digitalización de funciones en MATLAB partiendo desde la generación de vectores y matrices. Posteriormente, se generan los códigos de propagación usando los métodos función de transferencia y propagación de dos pasos. Estos programas se aplican a una abertura circular para encontrar el patrón de difracción.

En el capítulo tres se despliegan los resultados del programa de propagación. Se hace el análisis comparando los métodos de propagación, observando las limitaciones debido a las condiciones de muestreo y las limitaciones de la misma teoría escalar. Además, se contrastan los resultados con resultados que se encuentran en la literatura. Finalmente se dan las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

## 1. Fundamentos Teóricos

La teoría escalar permite describir el fenómeno de difracción tomando en cuenta tres condiciones: (1) se desprecia el carácter vectorial de la luz, (2) la abertura debe ser mucho más grande que la longitud de onda y (3) los campos difractados no deben observarse muy cerca de la abertura. Utilizando esta teoría se encuentra la integral de difracción de Fresnel; la cual tiene una similitud a una transformada de Fourier bidimensional, así como con la función de convolución.

Para entender esta teoría se deben abordar algunos conceptos matemáticos; estos conceptos se mencionan en las tres primeras secciones de este capítulo. Una vez sentadas las bases se desarrolla, en la cuarta sección, la teoría escalar para encontrar las integrales de difracción.

### 1.1 Transformada de Fourier bidimensional y sus propiedades

Primero, se escoge una función bidimensional llamada  $g(x, y)$  y se define la transformada de Fourier de la función  $g(x, y)$  como [15]

$$G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (1.1)$$

donde el símbolo  $\mathcal{F}\{g\}$  denota la transformada de Fourier de la función  $g$ . De igual manera, se define la transformada inversa de Fourier de  $G(f_x, f_y)$  como

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y, \quad (1.2)$$

$\mathcal{F}^{-1}\{G\}$  representa la transformada inversa de Fourier de la función  $G$ . Para que las integrales definidas en Ecu. (1.1) y Ecu. (1.2) sean realizables matemáticamente,  $g(x, y)$  debe cumplir las condiciones de existencia [20]:

- $g$  debe ser integrable en todo el plano  $(x, y)$ .

- $g$  debe tener un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito.
- $g$  no debe tener infinitas discontinuidades.

Para los propósitos de este trabajo, todas las funciones que se utilizan posteriormente cumplen con estas tres condiciones. La transformada de Fourier cumple con los siguientes teoremas [21]:

1. Linealidad. – Sean  $g(x, y)$  y  $h(x, y)$  dos funciones bidimensionales;  $\alpha$  y  $\beta$  dos constantes, se tiene que:

$$F\{\alpha g(x, y) + \beta h(x, y)\} = \alpha F\{g(x, y)\} + \beta F\{h(x, y)\}. \quad (1.3)$$

2. Similaridad. – Si  $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$ , entonces:

$$F\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right). \quad (1.4)$$

3. Shift. – Si  $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$ , entonces:

$$F\{g(x - a, y - b)\} = G(f_x, f_y) \exp[-i2\pi(f_x a + f_y b)]. \quad (1.5)$$

4. Teorema de Rayleigh. – Si  $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$ , entonces:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 df_x df_y. \quad (1.6)$$

5. Teorema de Convulación. – Si  $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$  y  $F\{h(x, y)\} = H(f_x, f_y)$ , entonces:

$$F\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y). \quad (1.7)$$

6. Teorema de Autocorrelación. – Si  $F\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$ , entonces:

$$F\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\} = |G(f_x, f_y)|^2. \quad (1.8)$$

7. Teorema Fourier Integral. – En cada punto de  $g(x, y)$  donde se tenga continuidad:

$$FF^{-1}\{g(x, y)\} = F^{-1}F\{g(x, y)\} = g(x, y). \quad (1.9)$$

En el caso que  $g(x, y)$  sea una función separable, es decir,  $g(x, y) = g_x(x)g_y(y)$ ; la transformada de Fourier bidimensional de la Ecu. (1.1) se convierte en el producto de dos transformadas de Fourier unidimensionales:

$$F\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_x(x)e^{-i2\pi f_x x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g_y(y)e^{-i2\pi f_y y} dy. \quad (1.10)$$

## 1.2 Ecuación de onda y ecuación de Helmholtz.

Las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento de la luz son las ecuaciones de Maxwell, para un medio sin carga libre las ecuaciones son [8, 12]

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0, \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0, \quad (1.14)$$

donde  $\vec{E}$  representa el campo eléctrico,  $\vec{H}$  representa el campo magnético,  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica del medio,  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio. Tanto  $\vec{E}$  como  $\vec{H}$  son funciones de la posición  $(x, y, z)$  y del tiempo.

Aplicando el operador rotacional  $(\nabla \times)$  ambos lados de la Ecu. (1.11) y utilizando la Ecu. (1.12) se encuentra la ecuación de onda para  $\vec{E}$  [13]

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.15)$$

donde  $n = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  y  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ , esta ecuación describe el comportamiento del campo eléctrico en el material. De manera similar se puede encontrar una ecuación de onda para  $\vec{H}$ .

En general el campo  $\vec{E}$  tiene tres componentes espaciales ( $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ), entonces de la Ecu. (1.15) se obtienen tres ecuaciones de onda escalares para cada componente. Por ejemplo, para  $E_x$

$$\nabla^2 E_x - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (1.16)$$

Al igual que esta ecuación existen ecuaciones similares para  $E_y$ ,  $E_z$  y para las tres componentes del campo  $\vec{H}$ . Es posible describir el comportamiento de todas las componentes en una sola ecuación escalar

$$\nabla^2 u(P, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u(P, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.17)$$

$u(P, t)$  representa cualquier componente del campo eléctrico o magnético. Para el caso de luz monocromática, la solución a la Ecu. (1.17) está dada por [7]

$$u(P, t) = A(P) \cos[2\pi vt + \phi(P)], \quad (1.18)$$

aquí  $A(P)$  es la amplitud de la onda,  $\phi(P)$  es la fase de la onda y  $v$  es la frecuencia óptica. Una forma más compacta de expresar la Ecu. (1.18) es utilizando la notación compleja

$$u(P, t) = U(P) \exp(-2\pi vt), \quad (1.19)$$

donde  $U(P)$  se conoce como la amplitud compleja y tiene la forma

$$U(P) = A(P) \exp[-i\phi(P)], \quad (1.20)$$

sustituyendo la Ecu. (1.19) en la Ecu. (1.17) se obtiene la Ecu. de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)U(P) = 0, \quad (1.21)$$

con  $k = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda$  se conoce como el número de onda. A pesar de ser una ecuación puramente escalar, la Ecu. (1.21) ha sido ampliamente estudiada para diferentes sistemas de coordenadas [5, 10, 13].

### 1.3 Teorema de Green.

Ahora, se menciona el Teorema de Green, el cual será empleado más adelante para resolver el problema de difracción de una abertura.

El teorema de Green es un caso especial del Teorema de Gauss, se define de la siguiente manera [11, 34]: Sean  $U(P)$  y  $G(P)$  dos funciones complejas y  $S$  una superficie cerrada que rodea un volumen  $V$ . Si  $U(P)$ ,  $G(P)$ , sus primeras y sus segundas derivadas son continuas en  $S$ , entonces:

$$\iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dv = \iint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (1.22)$$

donde  $\nabla^2$  representa el laplaciano y  $\frac{\partial}{\partial n}$  la derivada parcial cuya dirección es normal hacia afuera de la superficie  $S$ . Este teorema es la parte fundamental de la teoría escalar; se debe escoger adecuadamente la función auxiliar  $G$  y la superficie cerrada  $S$ . En el apéndice A se encuentra la demostración del teorema de Green.

Con estas matemáticas preliminares se puede abordar el problema de difracción desde el punto de vista escalar, empezando con la teoría de difracción de Kirchhoff.

## 1.4 Teoría Escalar.

Kirchhoff propuso su teoría de difracción de la siguiente manera [17]: Se tiene el punto de observación  $P_0$  y  $S$  una superficie arbitraria que rodea a  $P_0$ , se puede expresar la perturbación en  $P_0$  en términos de sus valores sobre  $S$  (figura 1.1). Para resolver esto, Kirchhoff empleó el teorema de Green utilizando como función auxiliar una onda esférica de amplitud unitaria, el valor de esta función en un punto arbitrario  $P_1$  está dado de la siguiente manera [7]:

$$G(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \quad (1.23)$$

$r_{01}$  representa la longitud del vector  $\vec{r}_{01}$  que apunta de  $P_0$  a  $P_1$ .

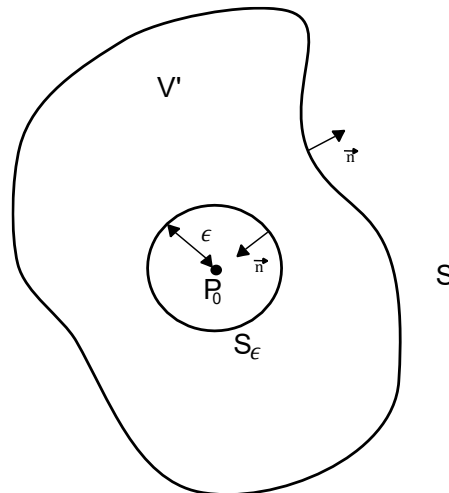


Figura 1.1.- Superficie de integración.

Sin embargo, para poder usar la función  $G(P_1)$  se debe eliminar la discontinuidad que presenta en  $P_0$ , ya que tanto la función como sus derivadas deben ser continuas dentro del volumen encerrado  $V$ . Para lograr esto se construye una esfera de superficie  $S_\epsilon$  de radio  $\epsilon$  como se muestra en la figura 1. Por lo que el teorema de

Green se aplica en el volumen  $V'$  encerrado entre  $S$  y  $S_\epsilon$ , siendo la superficie de integración  $S' = S + S_\epsilon$ . La función  $G(P_1)$  es una solución a la ecuación de Helmholtz [6] por lo que cumple:

$$\nabla^2 G = -k^2 G. \quad (1.24)$$

La función  $U$  de la Ecu. (1.22) representa, en este caso, la perturbación óptica en  $P_0$ , por lo que es factible suponer que cumple también con la ecuación de Helmholtz por lo que:

$$\nabla^2 U = -k^2 U. \quad (1.25)$$

Utilizando la Ecu. (1.24) y Ecu (1.25), el término del lado izquierdo de la Ecu. (1.22) se convierte en

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = - \iiint_V (UGk^2 - GUk^2) dv = 0. \quad (1.26)$$

Por otro lado, dado que se tiene un volumen delimitado por dos superficies, el termino del lado izquierdo de la Ecu. (1.22) es

$$\iint_{S'} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \iint_{S_\epsilon} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds + \iint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (1.27)$$

Entonces utilizando la Ecu. (1.26) y la Ecu. (1.27) se obtiene el teorema de Green para este caso

$$\iint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = - \iint_{S_\epsilon} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (1.28)$$

Dada la forma de  $G$  es claro que

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left( ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}, \quad (1.29)$$

donde  $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$  representa el coseno del ángulo entre la normal  $\vec{n}$  y el vector  $\vec{r}_{01}$ . Para el caso específico de  $P_1$  sobre la superficie  $S_\epsilon$ ,  $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -1$ . Por lo que las ecuaciones para este caso son

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left( \frac{1}{\epsilon} - ik \right) \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon}, \quad (1.30)$$

$$G(P_1) = \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon}. \quad (1.31)$$

Usando la Ecu. (1.30) y Ecu. (1.31), el término derecho de la Ecu. (1.28) se convierte en

$$\iint_{S_\epsilon} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \iint_{S_\epsilon} \left( U \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} - ik \right) - \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (1.32)$$

Tomando  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño, la continuidad de  $U$  y su derivada en  $P_0$  se puede tomar el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero en la Ecu. (1.32)

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \left( U \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} - ik \right) - \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi\epsilon^2 \left[ U(P_0) \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} - ik \right) - \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Al realizar la multiplicación por  $\epsilon^2$  y aplicar el límite, se eliminan todos los términos excepto por primer término del lado derecho de la Ecu. (1.33), por lo que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \left( U \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} - ik \right) - \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 4\pi U(P_0). \quad (1.34)$$

Sustituyendo la Ecu. (1.34) en la Ecu. (1.28) y despejando  $U(P_0)$  se tiene

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} ds. \quad (1.35)$$

La Ecu (1.35) es conocida como el teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff [14]; con este teorema se observa que el campo en  $P_0$  se puede expresar en términos de los valores de frontera de la onda en cualquier superficie que rodea este punto.

Ahora se aplica el teorema integral a un caso específico, se considera la difracción producida por una abertura en una pantalla opaca infinita (figura 1.2).

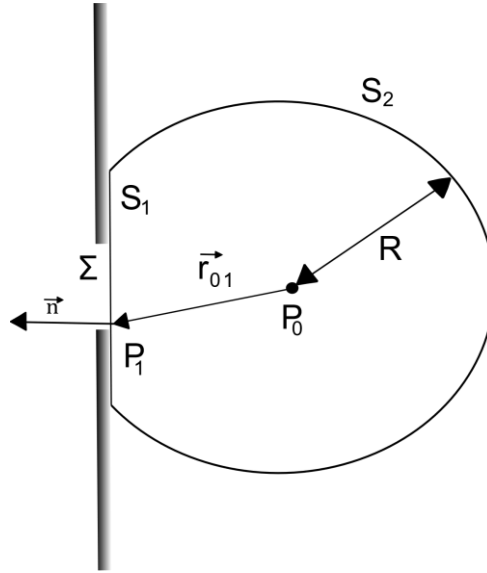


Figura 1.2.- Difracción de Kirchhoff por una abertura plana.

Para este caso se escoge una superficie  $S$  que consiste en dos partes, una superficie plana  $S_1$  que se encuentra justo después de la abertura y una superficie  $S_2$  que es una capa esférica de radio  $R$  centrada en  $P_0$ . Entonces en este caso la Ecu. (1.35) es

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} ds. \quad (1.36)$$

Para la superficie  $S_2$ , que es una semiesfera de radio  $R$ , es claro que

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] = \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] = \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ikR)}{R}, \quad (1.37)$$

aproximando para una  $R$  muy grande

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right] \approx ik \frac{\exp(ikR)}{R} = ikG; \quad (1.38)$$

por lo que la integral de  $S_2$  se reduce a

$$\iint_{S_2} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} G - U ikG \right\} ds = \int_{\Omega} G \left( \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) R^2 d\omega, \quad (1.39)$$

$\Omega$  es el ángulo sólido sustentado por  $S_2$  y  $P_0$ . La cantidad  $|RG|$  es uniforme en toda la superficie  $S_2$ . Además, la perturbación cumple con

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) R = 0. \quad (1.40)$$

La Ecu. (1.40) se conoce la condición de radiación de Sommerfeld [2]. Esta condición se satisface si  $U$  se desvanece tan rápido como una onda esférica divergente. Entonces la contribución de la integral de esta superficie es cero y la Ecu. (1.36) solo depende de la integral en  $S_1$

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right\} ds. \quad (1.41)$$

Para continuar con el desarrollo de la teoría, se debe adoptar las condiciones de frontera de Kirchhoff, las cuales son [19]:

1. A través de la superficie  $\Sigma$ ,  $U$  y  $\frac{\partial U}{\partial n}$  son exactamente las mismas que serían si la pantalla no existiera.
2. En la porción de  $S_1$  que está en la sombra geométrica de la pantalla,  $U$  y  $\frac{\partial U}{\partial n}$  son cero.

Con estas condiciones la Ecu. (1.41) queda como

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (1.42)$$

En general la distancia  $r_{01}$  que va del punto  $P_0$  a la apertura  $P_1$  (figura 1.3) es muy grande comparada con la longitud de onda por lo que  $k \gg 1/r_{01}$ ; entonces la Ecu. (1.29) se tiene

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}. \quad (1.43)$$

Sustituyendo la Ecu. (1.43) en la Ecu. (1.42)

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} G \left( \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \right) ds. \quad (1.44)$$

Se puede suponer que la abertura es iluminada por una onda esférica proveniente de  $P_2$  que se encuentra a una distancia  $r_{21}$  de  $P_1$  como se muestra en la figura 1.3, por lo que

$$U(P_1) = \frac{A \exp(ikr_{21})}{r_{21}}, \quad (1.45)$$

y su derivada es

$$\frac{\partial U(P_1)}{\partial n} = Aik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{02}) \frac{\exp(ikr_{21})}{r_{21}}. \quad (1.46)$$

Entonces la Ecu. (1.44) se convierte en

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r_{21} + r_{01})]}{r_{21}r_{10}} \left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{02})}{2} \right] ds. \quad (1.47)$$

La Ecu. (1.47) se conoce como la fórmula de difracción Fresnel-Kirchhoff [10].

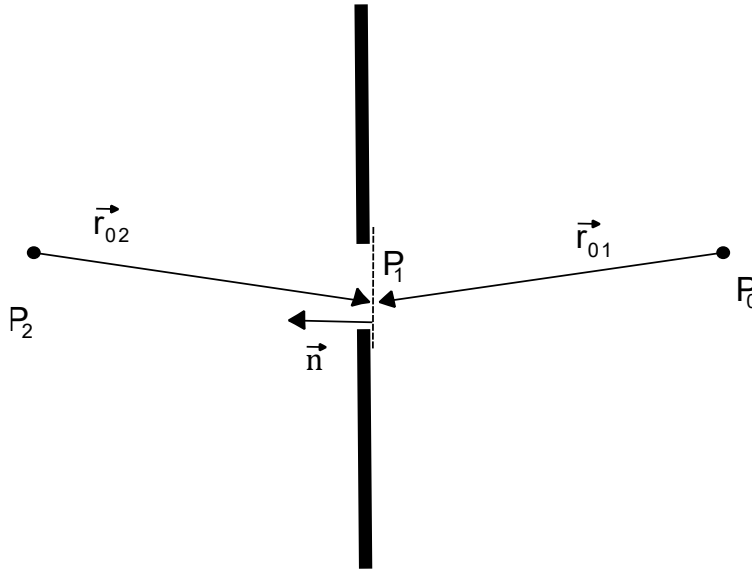


Figura 1.3 Abertura en una pantalla.

Aunque la formulación de Kirchhoff demostró ser bastante acertada experimentalmente [16], presenta grandes problemas en su formulación debido a las restricciones impuestas en el campo y su derivada. Se sabe que, si una solución tridimensional a la ecuación de onda y su derivada normal se desvanecen en un segmento finito de superficie, se debe desvanecer en todo el espacio [2], por lo que usando las condiciones de frontera de Kirchhoff implicaría que el campo detrás de la abertura es cero.

Sommerfeld fue el encargado de solucionar estos problemas dando paso a una nueva teoría de difracción. Para esto propuso una nueva función de Green compuesta por dos ondas esféricas siendo una la imagen espejo de la otra (figura 1.4), estas fuentes son de la misma longitud de onda y la fuente en  $\widetilde{P}_0$  oscila desfasada  $180^\circ$  respecto la fuente en  $P_0$  [7]

$$G_-(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} - \frac{\exp(ik\tilde{r}_{01})}{\tilde{r}_{01}}. \quad (1.48)$$

Es claro que justo en la abertura  $G_{P_1} = 0$ , por lo que la integral de la Ecu. (1.41) se reduce a

$$U(P_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{\partial G_-}{\partial n} ds. \quad (1.49)$$

Esta integral se conoce como la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld [17, 36].

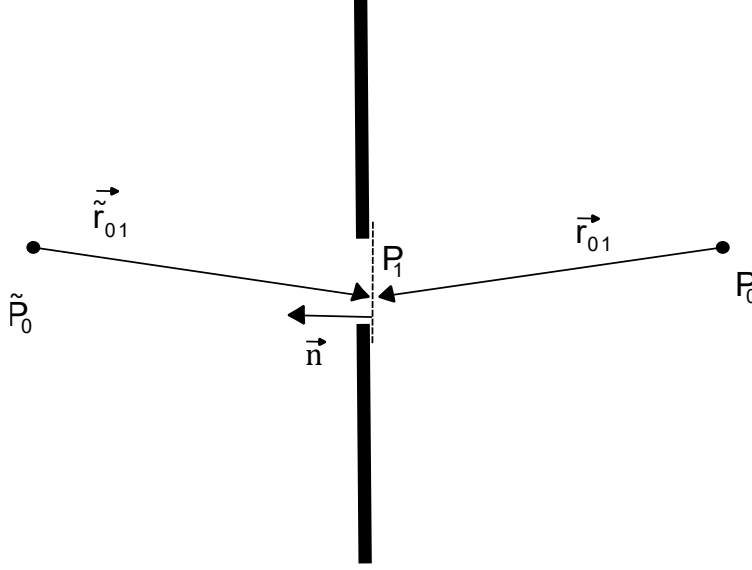


Figura 1.4.- Función auxiliar de Green utilizada por Sommerfeld.

La Ecu. (1.47) se puede desarrollar un poco más si se considera la derivada  $G_-$ , siguiendo el análisis previo se tiene que la derivada es

$$\frac{\partial G_-}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left( ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left( ik - \frac{1}{\tilde{r}_{01}} \right) \frac{\exp(ik\tilde{r}_{01})}{\tilde{r}_{01}}. \quad (1.50)$$

De la figura 1.4 se observa que las magnitudes de los vectores  $\vec{r}_{01}$  y  $\vec{r}_{01}$ , cumplen con la relación  $r_{01} = \tilde{r}_{01}$  para cualquier punto en la pantalla y  $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$ ; tomando en consideración que  $r_{01} \gg \lambda$ , la Ecu. (1.49) se reduce a

$$\frac{\partial G_-}{\partial n} = 2ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}. \quad (1.51)$$

El factor  $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$  se conoce como el factor de oblicuidad. Recordando que  $k = 2\pi/\lambda$  y sustituyendo la Ecu. (1.51) en la Ecu. (1.49) se tiene

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds. \quad (1.52)$$

Ahora las condiciones de frontera de Kirchhoff se aplican solamente en  $U$  y no en su derivada, por lo que ya no hay inconsistencias en la teoría.

Al igual que se hizo con la solución de Kirchhoff, se estudia el caso donde una onda esférica divergente ubicada en  $P_2$  ilumina la abertura (figura 3); nuevamente  $U(P_1)$  tiene la forma de la Ecu. (1.45), al sustituir en la Ecu. (1.52) se obtiene que

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp ik(r_{21} + r_{01})}{r_{21}r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds, \quad (1.53)$$

esta ecuación se conoce como la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld [19].

Por último, si la onda esférica divergente que ilumina la abertura esta infinitamente lejos, se produce incidencia normal en la pantalla; simplificando  $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = \cos \theta$  donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{n}$  y  $\vec{r}_{01}$ . La Ecu. (1.53) es entonces

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp ik(r_{21} + r_{01})}{r_{21}r_{01}} \cos \theta ds. \quad (1.54)$$

Siguiendo esta idea se puede expresar a Ecu. (1.52) como

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos \theta ds. \quad (1.55)$$

La Ecu (1.55) expresa el campo observado  $U(P_0)$  como una superposición de ondas esféricas divergentes que se encuentran en cada punto  $P_1$  de la abertura  $\Sigma$ . Esto es el principio de Huygens-Fresnel predicho por la solución de Rayleigh-Sommerfeld [5].

La fuente secundaria en  $P_1$  tiene las siguientes propiedades:

1. Tiene amplitud compleja proporcional a la amplitud de excitación  $U(P_1)$  en el punto correspondiente.
2. Tiene amplitud inversamente proporcional a  $\lambda$ .
3. Tiene un desfase de  $+90^\circ$  respecto de la onda incidente, tal y como indica el factor  $1/i$ .
4. Cada fuente secundaria tiene un patrón de directividad  $\cos \theta$ .

## 1.5 Integral de difracción de Fresnel y Fraunhofer.

Se puede expresar de manera más explícita la Ecu (1.55) en coordenadas rectangulares. Se calcula el campo  $U(P_0)$  ubicado en el plano  $(x, y)$  generado por el campo en la abertura  $U(P_1)$  ubicado en el plano  $(\xi, \eta)$  (figura 1.5). Ambos planos son paralelos y están alejados a una distancia  $z$  respecto del otro.

Observando la figura 1.5, se tiene que el termino cosenoidal de la Ecu. (1.55) es  $\cos \theta = z/r_{01}$ , con esto la integral se convierte en

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (1.56)$$

donde la distancia  $r_{01}$  es

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (1.57)$$

Factorizando  $z$  en Ecu. (1.57)

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}. \quad (1.58)$$

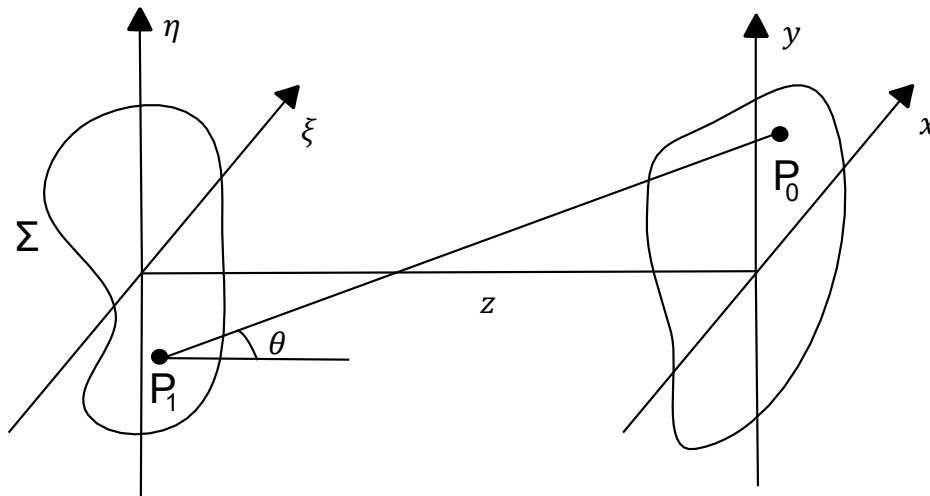


Figura 1.5.- Geometría de difracción.

Dada la forma de Ecu. (1.58) se puede hacer otra aproximación. Se sabe que si se tiene un número  $b$  mucho menor que la unidad y considerando la forma  $\sqrt{1+b}$ , entonces se puede hacer expansión binomial de la siguiente manera [18]

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8} + \dots, \quad (1.59)$$

tomando como  $b$  a los dos últimos términos de la Ecu. (1.58) se puede hacer una expansión binomial con lo que se tiene

$$r_{01} \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right]. \quad (1.60)$$

Aquí se ha tomado solo los primeros dos términos de la expansión. Antes de sustituir este resultado en la Ecu. (1.56) es importante analizar el valor de  $r_{01}$  tanto para el denominador como para el argumento de la exponencial. Para el caso de  $r_{01}^2$  del denominador, despreciar todos los términos de la Ecu. (1.60) menos  $z$  genera un error bastante pequeño. Sin embargo, para  $r_{01}$  que se encuentra en el argumento de la exponencial los errores que se pueden producir son más grandes, esto debido a que en el argumento aparece el número de onda  $k$  que en general es bastante grande ( $k \sim 10^7$  para el visible) y porque un cambio de fase aun siendo pequeño puede cambiar el valor de la exponencial considerablemente; por lo que se deben considerar todos los términos de la Ecu. (1.60). Tomando en cuenta esto se tiene

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (1.61)$$

en este caso los límites de la abertura están dados en la definición de  $U(\xi, \eta)$ . Otra forma útil de ver esta integral se logra desarrollando los factores dentro del argumento de la exponencial en la integral de tal manera que se obtiene

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta, \quad (1.62)$$

se observa que  $U(x, y)$  es casi la transformada de Fourier de  $U(\xi, \eta)$ , este hecho será de gran importancia en el capítulo 2. Tanto la Ecu. (1.61) como la Ecu. (1.62) se conocen como la integral de difracción de Fresnel [15, 23]. Se dice que el observador está en la región de Fresnel o en la región de campo cercano. Esta fórmula describe adecuadamente la propagación libre de cualquier campo óptico, así como la difracción de la luz debido a una abertura.

Además, se hace la aproximación de campo lejano o aproximación de Fraunhofer [20]

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2}. \quad (1.63)$$

Con esto se puede despreciar la exponencial de fase cuadrática dentro de la integral en la Ecu. (1.62) y se tiene que

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta, \quad (1.64)$$

lo cual es una transformada de Fourier con frecuencias  $f_x = x/\lambda z$  y  $f_y = y/\lambda z$  multiplica por los factores de afuera de la integral. Al ocupar la Ecu. (1.64) se dice que se está en la región de Fraunhofer o la región de campo lejano.

Se restringirá el uso de las integrales de difracción para el caso de una abertura circular iluminada por una onda plana de amplitud unitaria. Considerando que la abertura tiene radio  $w$  y coordenada radial en plano de la abertura  $q$ , la transmitancia de la abertura es [10]

$$t_A(q) = \text{circ}\left(\frac{q}{w}\right). \quad (1.65)$$

Para el caso de campo lejano; sustituyendo en la Ecu. (1.64) y resolviendo se tiene que el campo a una distancia  $z$  de la abertura es

$$U(r) = e^{ikz} e^{i\frac{kr^2}{2z}} \frac{A}{i\lambda z} \left[ 2 \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z} \right], \quad (1.66)$$

donde  $A = \pi w^2$  representa el área de la abertura,  $r$  es la coordenada radial en el plano de observación y  $J_1(r)$  representa la función Bessel de orden uno; dada la Ecu. (1.66) se tiene que la intensidad es

$$I(r) = \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \left[ 2 \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z} \right]^2. \quad (1.67)$$

La figura 1.6 muestra el patrón de difracción de Fraunhofer para la abertura circular.

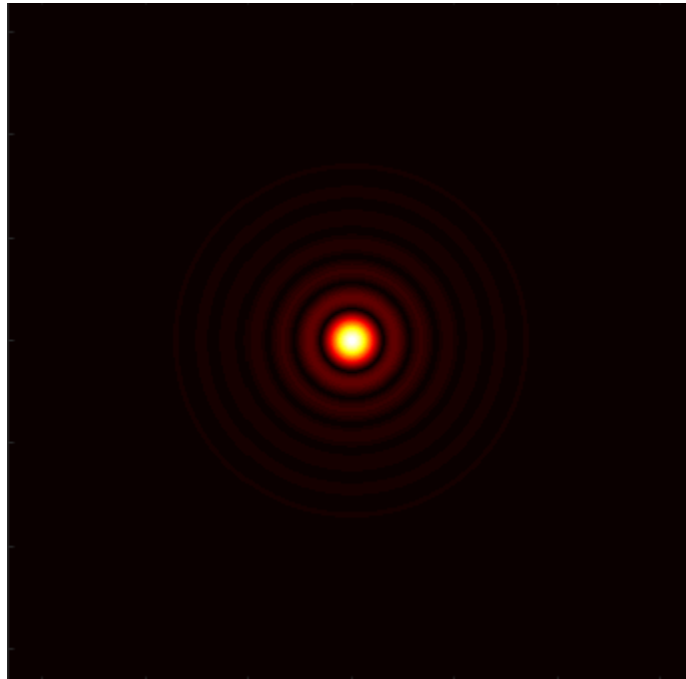
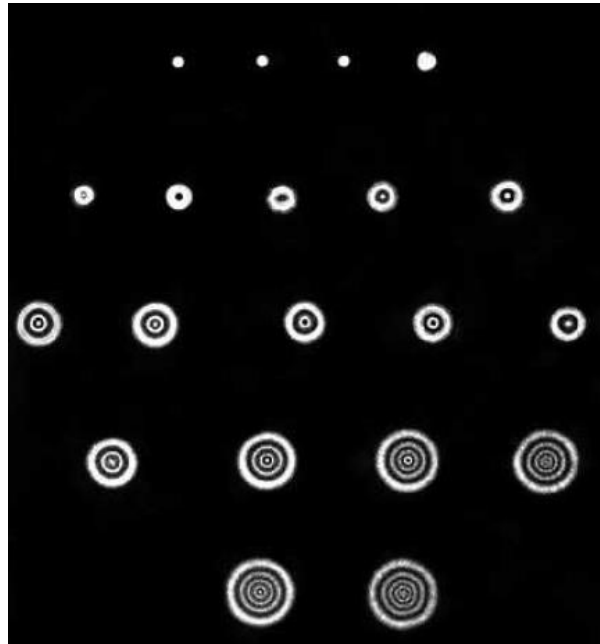


Figura 1.6.- Patrón de difracción de Fraunhofer para una abertura circular.

A pesar de ser un problema bastante conocido para la difracción de campo lejano, la abertura circular no tiene una solución teórica para la región de campo cercano usando la teoría escalar, esto debido a la complejidad de la integral de difracción de Fresnel.

Sin embargo, existen diferentes técnicas que permiten intuir cuantitativamente el patrón de difracción en esta región. La primera es usando las zonas de Fresnel para el estudio de la propagación de un frente de onda esférico [5, 11]; la segunda es utilizando la teoría vectorial de Lommel [33, 35]. En ambas se llega a la conclusión de que el patrón de difracción en la región de campo cercano está compuesto por anillos brillantes y oscuros, esto debido a la simetría de la simetría circular de la abertura. La figura 1.7 muestra imágenes experimentales del patrón de difracción.

a)



b)

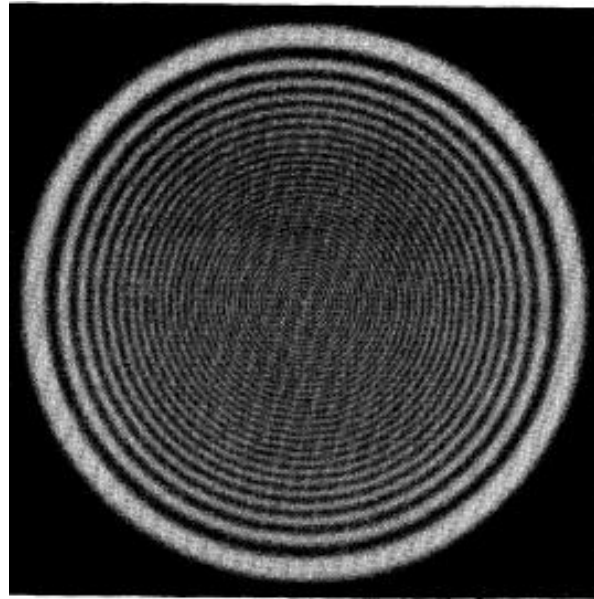


Figura 1.7.- Imágenes experimentales del patrón de difracción de una abertura circular a) [5] y b) [33].

# Capítulo dos

## 2. Fundamentos Computacionales.

En el capítulo uno se han sentado la teoría que servirá como base para el programa de MATLAB. Antes de abordar el desarrollo del programa primero se debe entender como discretizar funciones continuas de manera adecuada y el uso del algoritmo de transformada rápida de Fourier. Estos temas se cubren en las primeras tres secciones de este capítulo.

En la sección 2.4 se desarrollan los ficheros de función para la abertura y los propagadores. Posteriormente, se elabora el programa principal que desplegara las imágenes del patrón de difracción para la abertura circular.

### 2.1 Discretización de funciones bidimensionales y condiciones de muestreo.

Al igual que en el capítulo 1, se considera una función bidimensional arbitraria  $g(x, y)$  muestreada uniformemente tal y como se muestra en la figura 2.1 en ambas direcciones; entonces la función se denota de la siguiente manera

$$g(x, y) \rightarrow g(m\Delta x, n\Delta y), \quad (2.1)$$

$\Delta x$  y  $\Delta y$  representan el intervalo de muestreo en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. El espacio de muestreo es finito, compuesto por  $M$  muestras en la dirección  $x$  y  $N$  muestras en la dirección  $y$ ;  $m$  y  $n$  se definen como [27]

$$m = \frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (2.2)$$

como se observa en la figura 2.1, el muestreo ocupa un área  $L_x \times L_y$ , donde  $L_x$  representa la longitud a lo largo del eje  $x$  del espacio de muestreo y  $L_y$  la longitud a lo largo del eje  $y$ ; estas longitudes están relacionadas con el muestreo de la siguiente manera

$$L_x = M\Delta x, \quad L_y = N\Delta y. \quad (2.3)$$

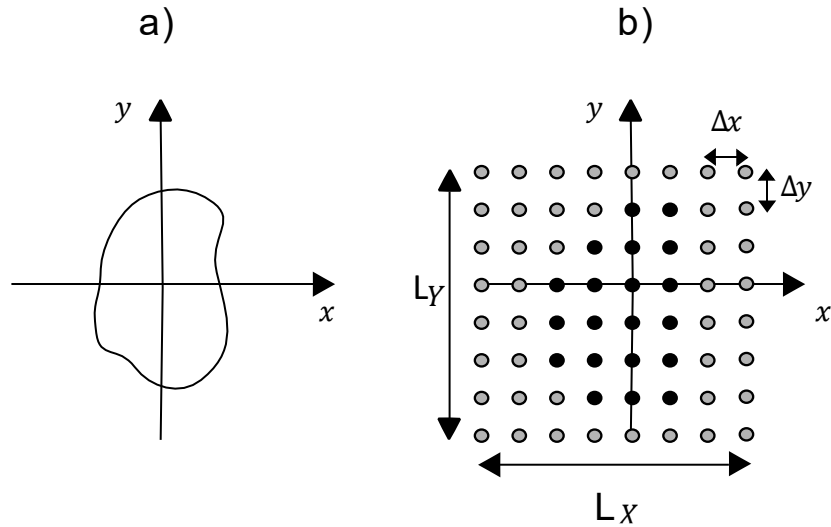


Figura 2.1.- a) Función bidimensional y b) muestreo de la función.

Es necesario considerar las longitudes de muestreo lo suficientemente grandes para abarcar los valores más significativos de  $g(x, y)$ , considerando un soporte  $D_x$  el cual contiene los valores significativos de la función en la dirección  $x$  al igual que un soporte  $D_y$  para los valores en  $y$ , una condición para un muestreo adecuado es

$$D_x < L_x, \quad D_y < L_y. \quad (2.4)$$

Por otro lado, es importante considerar el tamaño de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . El teorema de Shannon-Nyquist dice que, para funciones de banda limitada, una función continua puede ser recuperada de manera exacta de un muestreo si el intervalo de muestreo es menor que un cierto valor [26], en dos dimensiones estos valores son

$$\Delta x < \frac{1}{2B_x}, \quad \Delta y < \frac{1}{2B_y}, \quad (2.5)$$

donde  $B_x$  es el ancho de banda del espectro de una función continua a lo largo del eje  $x$  y  $B_y$  es el ancho de banda en la dirección  $y$ . La figura 2.2 muestra el ancho de banda en la dirección  $x$  para una función arbitraria. Otro parámetro es la frecuencia de Nyquist dada por [17]

$$f_{NX} = \frac{1}{2\Delta x}, \quad f_{NY} = \frac{1}{2\Delta y}. \quad (2.6)$$

Estas frecuencias representan la mitad de la frecuencia de muestreo y corresponden a la máxima frecuencia espacial que se puede representar dado los intervalos  $\Delta x$  o  $\Delta y$ .

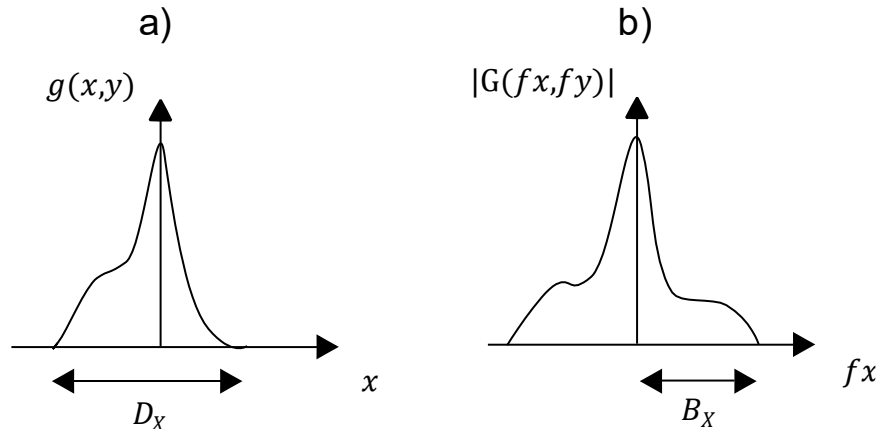


Figura 2.2.- a) soporte de la función y b) ancho de banda efectivo.

La función círculo (Ecu. (1.65)) no es una función de banda limitada, sin embargo, tiene un ancho de banda efectivo que permite encontrar un intervalo de muestreo lo suficientemente pequeño para representar la función analítica con un bajo efecto de solapamiento. En este caso el ancho de banda efectivo  $B$  es [27]

$$B \approx \frac{5}{w}, \quad (2.7)$$

donde  $w$  representa el radio de la función círculo, sustituyendo este resultado en la Ecu. (2.5) se obtiene que la condición en el intervalo de muestreo es

$$\Delta x \leq \frac{w}{10}. \quad (2.8)$$

Esta condición establece que al menos diez muestras a lo largo de la función son requeridas para mantener el ancho de banda efectivo.

## 2.2 Discretización de la transformada de Fourier bidimensional.

Recordando la forma de la transformada de Fourier del capítulo 1, se tiene

$$G(f_x, f_y) = F\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy. \quad (2.9)$$

Suponiendo que  $g(x, y)$  se muestrea de la forma dada por Ecu. (2.1) y Ecu. (2.2); el primer paso para discretizar la transformada de Fourier es aproximar las integrales como sumas de Riemann [28]

$$G(f_{px}, f_{qy}) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} g(m\Delta x, n\Delta y) e^{-i2\pi(f_{px}m\Delta x + f_{qy}n\Delta y)} \Delta x \Delta y, \quad (2.10)$$

donde  $f_{px}$  y  $f_{qy}$  representan las frecuencias discretizadas. Dada la discretización en las coordenadas  $x$  y  $y$ ; la discretización en las frecuencias es

$$f_{px} \rightarrow \frac{p}{M\Delta x}, \quad f_{qy} \rightarrow \frac{q}{N\Delta y}, \quad (2.11)$$

con  $p = \frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$  y  $q = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ ; esto debido a que el arreglo de frecuencias tiene el mismo número de elementos que el arreglo espacial. Dada la Ecu. (2.11) los intervalos de muestreo para la frecuencia son

$$\Delta f_{px} = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{L_x}, \quad \Delta f_{qy} = \frac{1}{N\Delta y} = \frac{1}{L_y}. \quad (2.12)$$

Incorporando Ecu. (2.11) y Ecu. (2.12) en Ecu. (2.10) se tiene

$$G\left(\frac{p}{M\Delta x}, \frac{q}{N\Delta y}\right) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} g(m\Delta x, n\Delta y) e^{-i2\pi\left(\frac{pm}{M} + \frac{qn}{N}\right)} \Delta x \Delta y. \quad (2.13)$$

Esta ecuación es la transformada de Fourier discreta [26]. Siguiendo un razonamiento similar se deduce la forma de la transformada inversa, la cual es

$$g(m\Delta x, n\Delta y) = \sum_{q=-N/2}^{N/2-1} \sum_{p=-M/2}^{M/2-1} G\left(\frac{p}{M\Delta x}, \frac{q}{N\Delta y}\right) e^{i2\pi\left(\frac{pm}{M} + \frac{qn}{N}\right)} \Delta f_{px} \Delta f_{qy}. \quad (2.14)$$

## 2.3 Digitalización de la Transformada de Fourier usando el algoritmo de Transformada Rápida de Fourier en MATLAB.

Actualmente diversos programas cuentan con algoritmos para realizar la Transformada Discreta de Fourier. Particularmente MATLAB cuenta con un algoritmo llamado Transformada Rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) [30, 31], el cual realiza las transformadas discretas unidimensionales o bidimensionales; sin embargo, hay ciertas consideraciones que se deben tomar en cuenta para emplear adecuadamente la transformada discreta.

La primera está relacionada con la eficiencia del algoritmo FFT en MATLAB; aunque no hay una restricción acerca de los valores que se pueden usar para  $N$  y  $M$ , se ha mostrado que al utilizar valores de potencias de dos el algoritmo obtiene la máxima

eficiencia posible [25, 26], es decir,  $N = 2^n$  y  $M = 2^m$  con  $n$  y  $m$  naturales. El tiempo de cómputo para valores diferentes a los mencionados es similar, aun así, en este trabajo se ocuparán los valores de mayor eficiencia. Además, en la práctica es más conveniente trabajar con arreglos cuadrados, eso implica que  $N = M$ ,  $\Delta x = \Delta y$  y  $L_x = L_y$ .

La segunda es el escalamiento, el algoritmo en MATLAB es capaz de realizar lo estipulado en la Ecu. (2.13) utilizando la instrucción “fft2”, excepto por la multiplicación de los factores constantes  $\Delta x \Delta y$ , por lo que se deben incluir manualmente en el programa. Algo similar ocurre con la transformada inversa; en este caso la instrucción es “ifft2” realiza la operación de la Ecu. (2.14) excepto la multiplicación de los factores constantes  $\Delta f_{px} \Delta f_{qy}$ .

La última consideración es el corrimiento de índices al utilizar “fft2” o “ifft2”. Dada la discretización realizada al inicio de este capítulo en la función  $g(x, y)$ , utilizando la notación de MATLAB se tiene que el rango de la coordenada  $x$  es

$$x \rightarrow \left[ -\frac{L}{2} : \Delta x : \frac{L}{2} - \Delta x \right], \quad (2.15)$$

esto indica que  $x$  va de  $-L/2$  a  $L/2 - \Delta x$  en pasos de tamaño  $\Delta x$  como se muestra en la figura 2.3 inciso a. La coordenada  $y$  se define de manera similar. Para el espacio de frecuencias se tiene

$$f_x \rightarrow \left[ -\frac{1}{2\Delta x} : \frac{1}{L} : \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{L} \right], \quad (2.16)$$

de manera similar para la coordenada  $f_y$ .

MATLAB es un software que trabaja con arreglos de vectores y matrices que llevan asociados índices [29, 32], en este caso para la coordenada  $x$  están enumerados del 1 a  $M$ ; en la figura 2.3 inciso b, se observa como el valor de coordenada cero está asociado con el índice  $(M/2) + 1$ . Esto debido a la manera en la que se busca visualizar la imagen desplegada.

Para el algoritmo FFT la coordenada cero se asocia con el índice uno y al realizar la transformada genera un cambio en el orden de la función desplegada como se muestra en la figura 2.3 inciso b. Para corregir esto existe una función en MATLAB llamada “fftshift” la cual reordena la imagen.

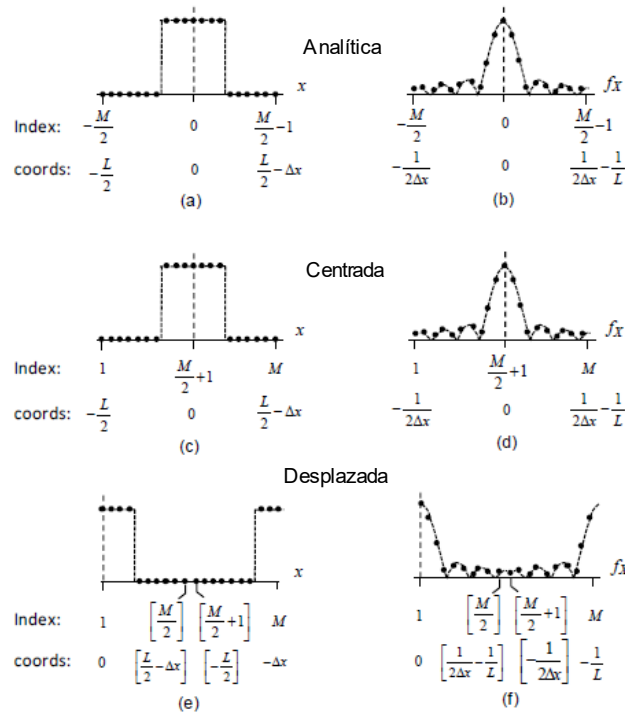


Figura 2.3.- Comparación, en una dimensión, de muestreo al utilizar el algoritmo FFT en MATLAB. a) función analítica muestreada y b) su transformada de Fourier analítica; c) función analítica centrada y d) su transformada de Fourier; e) función corrida al usar FFT y f) su transformada de Fourier desplegada usando FFT [27].

Considerando estos tres puntos se elaboró un fichero de función (Function file en inglés) llamado “ft2” que permite realizar la transformada de Fourier bidimensional discreta de manera adecuada. De la misma manera se elaboró una subrutina para la transformada inversa de Fourier. En ambas subrutinas se considera el reordenamiento y escalamiento de los algoritmos FFT.

```
function G = ft2(g, delta)
% function ft2 realiza una transformada discreta de fourier en 2D
% ambos fftshift corrigen el campo para poder desplegar la imagen
G = fftshift(fft2(fftshift(g))) * delta^2;
End
```

Lista 2.1.- Fichero de función para la transformada de Fourier bidimensional.

Con la rutina creada para la transformada discreta de Fourier y su inversa, el siguiente paso es abordar el problema de la simulación de la integral de Fresnel.

```
function G = ift2(g, delta)
% realiza una transformada inversa discreta de fourier en 2D
% ambos ifftshift corrigen el campo para poder desplegar la imagen
G = ifftshift(ifft2(ifftshift(g))) / delta^2;
End
```

Lista 2.2.- Fichero de función para la transformada inversa de Fourier bidimensional.

## 2.4 Código para la simulación de difracción por una abertura circular.

En esta sección se explican dos maneras para programar la integral de difracción de Fresnel usando como base la transformada de Fourier discreta. La primera hace uso del teorema de la convolución para realizar los cálculos; la segunda realiza la transformada de Fourier directamente como se mencionó en la sección 1.4. Se generan subrutinas para cada uno de los métodos; estas subrutinas son llamadas desde el programa principal.

Posteriormente se aplican los programas al caso particular de una abertura circular como campo de entrada.

### 2.4.1 Función de transferencia.

El primer método utiliza la función de transferencia, para ello es necesario recordar la forma de la integral de Fresnel definida en el capítulo uno

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U_1(\xi, \eta) \exp\left\{i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} d\xi d\eta. \quad (2.17)$$

Por otro lado, se define la convolución bidimensional de dos funciones  $g_1$  y  $h$  como [21]

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.18)$$

simbólicamente la convolución se representa como

$$g_2 = g_1 \otimes h. \quad (2.19)$$

Comparando esta definición con la Ecu. (2.17); se define la función respuesta impulso como [13]

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2)\right], \quad (2.20)$$

entonces el campo observado es

$$U(x, y) = U_1 \otimes h. \quad (2.21)$$

Aplicando el teorema de la convolución descrito en la Ecu. (1.7)

$$G(f_x, f_y) = G_1(f_x, f_y)H(f_x, f_y), \quad (2.22)$$

donde  $G$  y  $G_1$  representan la transformada de Fourier de  $U$  y  $U_1$  respectivamente. La función  $H$  se conoce como la función de transferencia y representa la transformada de Fourier de la función respuesta impulso. Dada la forma de  $h$  en la Ecu. (2.20), su transformada de Fourier es [25]

$$H(f_x, f_y) = e^{ikz} \exp[-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)], \quad (2.23)$$

realizando la operación de transformada inversa ambos lados de la Ecu. (2.22) se obtiene

$$U(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G_1(f_x, f_y)H(f_x, f_y)\}. \quad (2.24)$$

Se generó un fichero de función (Lista 2.3) en MATLAB para la Ecu. (2.24); en esta subrutina se emplean los ficheros de la transformada de Fourier discreta y la transformada inversa discreta. Este propagador ha mostrado buenos resultados para el caso de una abertura rectangular [26, 27].

```

1 function[Uout]= fun_fresnel_propFT(Uin,L,lambda,Dz)
2 %propagación usando funcion de transferencia
3 M=size(Uin,1);
4 dx=L/M; %espaciado
5
6 fx=-1/(2*dx):1/L:1/(2*dx)-1/L; fy=fx; %coordenadas en el espacio de
7 frecuencias
8 [FX,FY]=meshgrid(fx,fy); %Matriz de vectores
9
10 H=exp(-1i*pi*lambda*Dz*(FX.^2+FY.^2)); %funcion de transferencia
11 U1=ft2(Uin,dx); %transformada de Fourier discreta
12 U2=H.*U1;
13 Uout=ift2(U2,dx); %campo observado usando la transformada inversa
14
15 end

```

Lista 2.3.- Código para la función de transferencia.

En el renglón 1 se especifica que se necesitan cuatro variables de entrada:  $U_{in}$  es el campo de entrada  $U_1(x, y)$ ,  $L$  es el tamaño de la malla empleada,  $\lambda$  es el valor de longitud de onda y  $Dz$  es la distancia de propagación desde la abertura. También se especifica la función de salida  $U_{out}$ .

Las coordenadas en el espacio de frecuencias se generan en el renglón 6, tal y como se especificó en la sección 2.1. Una vez generada la matriz de vectores del renglón 8, se procede a realizar la operación descrita en la Ecu. (2.24).

En el renglón 10 se genera la función de transferencia, se hace la transformada de discreta de Fourier del campo incidente en el renglón 11 y finalmente se obtiene  $U_{out}$  al sacar la transformada inversa discreta del producto de la transformada de Fourier discreta de  $U_{in}$  con la función de transferencia.

Al discretizar funciones continuas se tiene un efecto de solapamiento también conocido en inglés como aliasing [25]. Este efecto causa que las señales continuas, al ser discretizadas y digitalizadas, se distorsionen. Debido a esto hay ciertos criterios en el muestreo que se deben cumplir, como los mencionados en la sección 2.1.

En la Ecu. (2.24) la función de transferencia es la que ocasiona el efecto de solapamiento; para que la subrutina de la lista 2.3 muestre resultados adecuados el criterio en el muestreo es [22]

$$\Delta x \geq \frac{\lambda z}{L}. \quad (2.25)$$

Se puede notar de la Ecu. (2.25) que al aumentar  $z$  se llega al punto de muestreo crítico  $\Delta x = \lambda z/L$  y después el criterio deja de cumplirse. Por lo que la función de transferencia tiene un límite y los resultados posteriores tendrán un efecto de solapamiento. Sin embargo, el propagador muestra resultados aceptables aun cuando el criterio de la Ecu. (2.25) no se cumpla, siempre y cuando se cumpla el criterio de “ancho de banda de la fuente” [27], el cual está dado por

$$B \geq \frac{L}{2\lambda z}, \quad (2.26)$$

donde  $B$  es el ancho de banda efectivo dado por la Ecu. (2.7).

De la lista 2.3 se nota que tanto  $U_{in}$  como  $U_{out}$  tienen las mismas dimensiones, es decir,  $L$  es el mismo para los dos. En algunas situaciones es deseable que  $U_{out}$  tenga un valor diferente para  $L$  [24], esto se logra con el método de propagación a dos pasos.

## 2.4.2 Propagación de dos pasos.

En el capítulo uno se mencionó que la integral de Fresnel tiene una gran similitud con la transformada de Fourier bidimensional cuando se escribe de la siguiente manera

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta. \quad (2.27)$$

Utilizando el operador  $\mathcal{F}$  que denota la operación de transformada de Fourier, se puede reescribir la Ecu. (2.26) como

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\}, \quad (2.28)$$

donde las frecuencias  $f_x$  y  $f_y$  son

$$f_x = \frac{x}{\lambda z} \quad f_y = \frac{y}{\lambda z}. \quad (2.29)$$

La Ecu. (2.27) se puede programar de manera directa tomando en cuenta la forma que tienen las frecuencias en la Ecu. (2.29).

Se puede realizar la propagación del plano objeto al plano imagen directamente usando la Ecu. (2.28), este propagador se conoce como el propagador de un paso y presenta resultados similares a la función de transferencia [26]. Un propagador alternativo que sigue la idea de la Ecu. (2.28) es el propagador de dos pasos; en este propagador el tamaño de las mallas en el plano objeto y plano imagen son diferentes lo que permite mejorar la propagación seleccionando el tamaño de las mallas adecuadamente. La idea principal que utiliza este método es realizar una propagación “intermedia” en algún plano intermedio y de este plano propagar al plano imagen. Para la primera propagación se tienen tres posibilidades: se puede propagar a un plano intermedio entre el plano de la abertura y el plano de observación; se puede propagar a un plano posterior al plano de observación; se puede propagar a un plano posterior al plano de la abertura. Sin embargo, en la práctica solo se pueden tomar dos de las tres opciones [27]; en este trabajo se utiliza un plano que se encuentre atrás del plano de observación o atrás del plano de la abertura como se muestra en la figura 2.4.

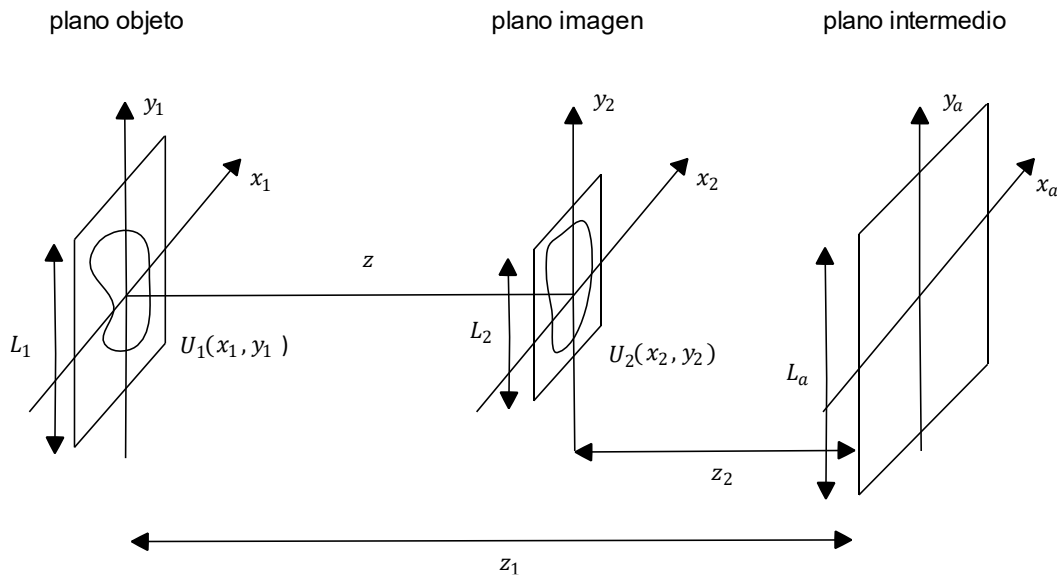


Figura 2.4.- Planos en la propagación de dos pasos.

Se toman en cuenta tres planos diferentes: el plano de observación con coordenadas  $(x_1, y_1)$  para el campo de entrada  $U_1$  y longitud de malla  $L_1$ ; el plano de observación con longitud de malla  $L_2$  y coordenadas  $(x_2, y_2)$  para el campo a observar  $U_2$ ; el plano “intermedio” con coordenadas  $(x_a, y_a)$  para el campo intermedio  $U_a$  y longitud de malla  $L_a$ . El plano intermedio se encuentra a una

distancia  $z_1$  del plano objeto y a una distancia  $z_2$  del plano imagen; por lo que la distancia real de propagación  $z$  entre los planos objeto e imagen es

$$z = z_1 - z_2. \quad (2.30)$$

Utilizando la Ecu (2.28) se tiene que la propagación desde el plano objeto hasta el plano intermedio es

$$U_a(x_a, y_a) = \frac{e^{ikz_1}}{i\lambda z_1} e^{i\frac{k}{2z_1}(x_a^2 + y_a^2)} \mathcal{F} \left\{ U_1(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2z_1}(x_1^2 + y_1^2)} \right\}, \quad (2.31)$$

en este caso las frecuencias están dadas de la siguiente manera

$$f_{X1} = \frac{x_a}{\lambda z_1} \quad f_{Y2} = \frac{y_a}{\lambda z_1}. \quad (2.32)$$

Por otro lado, la propagación desde el plano imagen hasta el plano intermedio es

$$U_a(x_a, y_a) = \frac{e^{ikz_2}}{i\lambda z_2} e^{i\frac{k}{2z_2}(x_a^2 + y_a^2)} \mathcal{F} \left\{ U_2(x_2, y_2) e^{i\frac{k}{2z_2}(x_2^2 + y_2^2)} \right\}, \quad (2.33)$$

con frecuencias

$$f_{X2} = \frac{x_a}{\lambda z_2} \quad f_{Y2} = \frac{y_a}{\lambda z_2}. \quad (2.34)$$

Igualando la Ecu. (2.31) y la Ecu. (2.33) se tiene

$$\mathcal{F} \left\{ U_2 e^{i\frac{k}{2z_2}(x_2^2 + y_2^2)} \right\} = \frac{z_2}{z_1} e^{ik(z_1 - z_2)} e^{i\frac{k}{2}(x_a^2 + y_a^2)\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)} \mathcal{F} \left\{ U_1 e^{i\frac{k}{2z_1}(x_1^2 + y_1^2)} \right\}. \quad (2.35)$$

Realizando la transformada de Fourier inversa y utilizando la Ecu. (2.28)

$$U_2 = \frac{z_2}{z_1} e^{ikz} e^{-i\frac{k}{2z_2}(x_2^2 + y_2^2)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{i\frac{k}{2}(x_a^2 + y_a^2)\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)} \mathcal{F} \left\{ U_1 e^{i\frac{k}{2z_1}(x_1^2 + y_1^2)} \right\} \right\}. \quad (2.36)$$

De las ecuaciones (2.32) y (2.34) se tiene que para  $x_a$

$$x_a = \lambda z_1 f_{X1} = \lambda z_2 f_{X2}. \quad (2.37)$$

Las longitudes de malla para el plano objeto y el plano imagen son

$$L_1 = N\Delta x_1 \quad L_2 = N\Delta x_2. \quad (2.38)$$

Siguiendo la Ecu (2.11), las frecuencias tienen la forma  $f_{X1} = p/2\Delta x_1$  y  $f_{X2} = p/2\Delta x_2$ ; con  $p$  un índice que va de  $-N/2$  hasta  $N/2 - 1$ . Por lo que, utilizando la Ecu. 2.37, se cumplen las siguientes relaciones

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{f_{X2}}{f_{X1}} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{L_1}{L_2}. \quad (2.39)$$

De esta ecuación se puede despejar tanto  $z_1$  como  $z_2$  en términos de las longitudes de mallas, sustituyendo estos valores en la Ecu. (2.30) se obtiene

$$z_1 = z \left( \frac{L_1}{L_1 - L_2} \right) \quad z_2 = z \left( \frac{L_2}{L_1 - L_2} \right). \quad (2.40)$$

Estos valores se pueden sustituir en la Ecu. (2.36), en particular para el argumento de la exponencial que multiplica a la transformada de Fourier

$$\frac{k}{2} (x_a^2 + y_a^2) \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) = \frac{k}{2} (\lambda^2 z_1^2 f_{X1}^2 + \lambda^2 z_1^2 f_{Y1}^2) \left( \frac{1}{z} \right) \left( \frac{L_1 - L_2}{L_1} - \frac{L_1 - L_2}{L_2} \right), \quad (2.41)$$

realizando las operaciones se tiene

$$\frac{k}{2} (x_a^2 + y_a^2) \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) = -\pi z \lambda \left( \frac{L_1}{L_2} \right) (f_{X1}^2 + f_{Y1}^2). \quad (2.42)$$

Finalmente, la Ecu. (2.36) se puede reescribir como

$$U_2 = \frac{L_2}{L_1} e^{ikz} e^{-i\frac{k}{2z} \left( \frac{L_1 - L_2}{L_2} \right) (x_2^2 + y_2^2)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-i\pi z \lambda \left( \frac{L_1}{L_2} \right) (f_{X1}^2 + f_{Y1}^2)} \mathcal{F} \left\{ U_1 e^{i\frac{k}{2z} \left( \frac{L_1 - L_2}{L_2} \right) (x_1^2 + y_1^2)} \right\} \right\}. \quad (2.43)$$

Como se puede observar el campo en el plano imagen depende del campo en el plano objeto  $U_1(x_1, y_1)$ , las coordenadas del plano objeto  $(x_1, y_1)$ , las coordenadas del plano imagen  $(x_2, y_2)$ , las frecuencias  $(f_{X1}, f_{Y1})$  relacionadas con las coordenadas  $(x_1, y_1)$ , los parámetros constantes del problema y la longitud de las mallas.

De Ecu. (2.40) se tienen que cuando  $L_1 > L_2$  el plano intermedio está detrás del plano objeto. Si  $L_2 > L_1$ , tanto  $z_1$  como  $z_2$  son negativos y el plano intermedio está a atrás del plano objeto.

La Ecu. (2.43) se programó como un fichero de función llamado "fun\_fresnel\_dos\_pasos\_prop"; la lista 2.4 muestra el código en MATLAB.

```

1 function[u2, x4, y4]=fun_fresnel_dos_pasos_prop(u1,L1,L2,lambda,Dz)
2 % difraccion de fresnel por el metodo de dos pasos
3
4 M=size(u1,1);
5 k=2*pi/lambda; % numero de onda
6
7 % plano objeto
8 dx1=L1/M; % espaciado
9 x1=-L1/2:dx1:L1/2-dx1; % coordenadas
10 [X,Y]=meshgrid(x1,x1); % matriz de coordenadas
11 u=u1.*exp(1i*k/(2*Dz*L1)*(L1-L2)*(X.^2+Y.^2)); % función de entrada
12 % multiplicada por el factor exponencial

```

```

13 u=ft2(u,dx1); % transformada de Fourier
14
15 % coordenadas frecuenciales
16 fx1=-1/(2*dx1):1/L1:1/(2*dx1)-1/L1; % frecuencias
17 [FX1,FY1]=meshgrid(fx1,fx1); % mallado de frecuencias
18 u=exp(-1i*pi*lambda*Dz*L1/L2*(FX1.^2+FY1.^2)).*u; % factor exponen
19 % multiplicado por la funció u
20 u=ift2(u,dx1); % transformada inversa
21
22 % plano imagen
23 dx2=L2/M; % espaciado
24 x4=-L2/2:dx2:L2/2-dx2; y4=x4; % coordenadas
25 [X,Y]=meshgrid(x4,y4); % matriz de coordenadas
26 u2=(L2/L1)*u.*exp(-1i*k/(2*Dz*L2)*(L1-L2)*(X.^2+Y.^2)); % salida
26 end

```

Lista 2.4.- Código para la función de propagación a dos pasos.

El programa necesita cuatro parámetros de entrada: u1 el campo en el plano objeto, L1 la longitud de la malla en el plano objeto, L2 la longitud de la malla en el plano imagen, la longitud de onda lambda y la distancia de propagación Dz.

A diferencia del fichero de función para la función de transferencia, se tienen tres salidas: u2 es el campo en el plano imagen, mientras que x4 y y4 representan las coordenadas en el plano imagen. Este cambio entre los dos ficheros se debe a que, al cambiar el tamaño de la rejilla para la función de dos pasos, el espaciado se modifica por lo cual las coordenadas cambian como se puede observar en la línea 24.

Las coordenadas de los planos objeto e imagen se generan en las líneas 9 y 24, respectivamente; las coordenadas frecuenciales se generan en la línea 16. Las operaciones matemáticas se realizan en las líneas 11, 18, 20 y 26.

Al igual que la función de transferencia, existen ciertos criterios en el muestreo que deben cumplirse para evitar el efecto de solapamiento. Estos criterios están relacionados a las exponenciales que aparecen en la Ecu. (2.43). Para la exponencial que depende de las coordenadas del plano objeto  $(x_1, y_1)$ , el criterio es

$$\Delta x_1 \leq \frac{\lambda z}{|L_1 - L_2|}. \quad (2.44)$$

En el caso de la exponencial con dependencia de las coordenadas  $(x_2, y_2)$ , el criterio es

$$\Delta x_1 \leq \frac{L_1}{L_2} \frac{\lambda z}{|L_1 - L_2|}. \quad (2.45)$$

Por último, para la exponencial que depende de  $(f_{x1}, f_{y1})$ , el criterio es

$$\Delta x_1 \geq \frac{\lambda z}{L_2}. \quad (2.46)$$

El caso de muestreo crítico, las ecuaciones (2.44) y (2.45) se vuelven igualdades, de estas igualdades se deriva que  $L_1 = L_2$ . Esto implica que el muestreo crítico para la Ecu. (2.46) es  $\Delta x_1 \geq \lambda z/L_1$ , lo cual es el mismo criterio que se tiene para la función de transferencia. Este resultado es de esperarse ya que para  $L_1 = L_2$ , la Ecu. (2.43) se reduce a

$$U_2 = e^{ikz} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-i\pi z \lambda (f_{x_1}^2 + f_{y_1}^2)} \mathcal{F}\{U_1\} \right\}, \quad (2.47)$$

lo cual es, en esencia, el método de la función de transferencia.

### 2.4.3 Difracción a través de una abertura circular.

Los métodos descritos en las secciones 2.4.1 y 2.4.2 se pueden usar para describir la propagación de cualquier campo  $U_1$ , como pueden ser haces de luz o la difracción por algún tipo de abertura [10, 11]. Para este trabajo de tesis se considera el caso de una abertura circular. Una abertura circular de la Ecu. (1.65), se tiene que

$$U_1(\xi, \eta) = \text{circ} \left( \frac{q}{w} \right). \quad (2.48)$$

```

1 function c = fun_circulo(x, y, D)
2 % funcion circulo. D es diametro de la apertura.
3 r = sqrt(x.^2+y.^2);
4 z = double(r<D/2);
5 z(r==D/2) = 0.5;
6 end

```

Lista 2.5.- Función circulo.

Se generó un fichero de función llamada “fun\_circulo” para utilizar la función  $U_1$  en los programas. Para este fichero se necesitan tres variables de entrada, las coordenadas  $(x, y)$  en el plano objeto y el diámetro de la abertura; con esta información se crea una variable  $r$  que representa el radio para cada par de coordenadas. En la línea 4, se crea una condición: para todas las  $r$  que estén por debajo del radio de la abertura, “double” devolverá un uno, en caso contrario se devuelve cero. La línea 5 se utiliza para los valores que están justo sobre el radio de la abertura. Usando el fichero se obtiene una abertura circular binaria como se muestra en la figura 2.5.

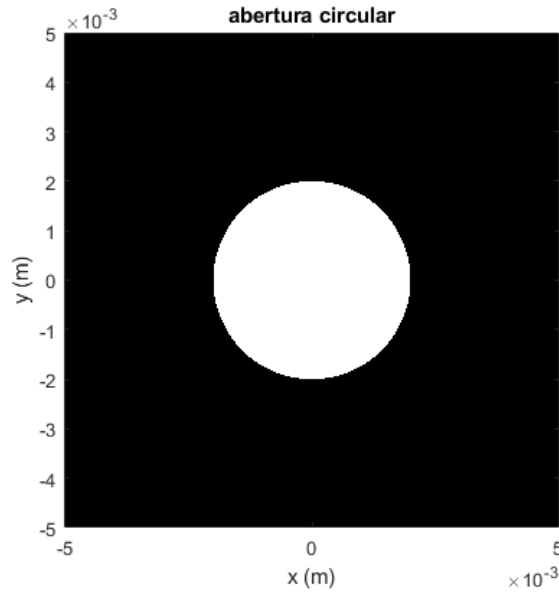


Figura 2.5.- Abertura circular de cinco milímetros generada por la lista 2.5.

Esta abertura es una abertura binaria compuesta por elementos 1 y 0. Ahora se tienen todos los elementos para simular la difracción de una abertura circular; la lista 2.6 muestra el programa principal.

```

1 % simulacion de propagacion de fresnel de una abertura circular
2 clc
3 clear
4 clf
5
6 %% CONSTANTES INICIALES
7 L1=.01; %longitud de la cuadrícula [m] plano objeto
8 L2=.03; %longitud de la cuadrícula plano imagen [m] metodo 2 pasos
9 N=1024; %numero de muestras
10 d1=L1/N; %espaciado de la cuadrícula plano objeto
11 d2=L2/N; %espaciado de la cuadrícula plano imagen metodo 2 pasos
12 lambda=0.632e-6; %longitud de onda [m]
13 k=2*pi/lambda; %numero de onda
14 D=0.004; %diametro de la abertura [m]
15 Dz=.3; %distancia del plano imagen
16
17
18 %% ABERTURA
19 x1=-L1/2:d1:L1/2-d1; y1=x1; %coordenas de la abertura
20 [X1,Y1]=meshgrid(x1,y1);
21 Uin=fun_circulo(X1, Y1, D); %campo en la abertura
22 I1=abs(Uin.^2);
23
24 figure(1) %grafica de la abertura
25 imagesc(x1,y1,I1);
26 axis square; axis xy;

```

```

27 axis([-0.005 0.005 -0.005 0.005]); %zoom
28 colormap('gray'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
29 title('z= 0 m');
30
31 %% PROPAGACION
32
33 %Two Step
34 [Uout,x4,y4]=fun_fresnel_two_step_prop(Uin,L1,L2,lambda,Dz);
35
36 I2=abs(Uout.^2); %Intensidad en el plano de observacion
37 I2=abs(I2)/max(max(abs(I2))); %Normalización del campo
38 figure(2) %Imagen del patron de difraccion
39 imagesc(x4,y4,I2);
40 axis square; axis xy;
41 axis([-0.005 0.005 -0.005 0.005]);
42 colormap('hot'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
43 title(['Two Step simulacion (z= ',num2str(Dz),' m)']);
44
45 %funcion de transferencia
46 [Uout] = fun_fresnel_propFT(Uin, L1, lambda, Dz);
47
48 x3=x1; y3=y1; %coordenadas plano de observacion
49 I3=abs(Uout.^2); %Intensidad en el plano de observacion
50 I3=abs(I3)/max(max(abs(I3))); %Normalización del campo
51 figure(3) %Imagen del patron de difraccion
52 imagesc(x3,y3,I3);
53 axis square; axis xy;
54 axis([-0.005 0.005 -0.005 0.005]);
55 colormap('hot'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
56 title(['F.T. simulacion (z= ',num2str(Dz),' m)']);

```

Lista 2.6.- Programa para abertura circular.

El programa se divide esencialmente en tres partes. En la primera que va de la línea 6 a la 17 se tienen las constantes iniciales necesarias para el programa como lo son el tamaño de las mallas, el número de muestras a utilizar, el espaciado, la longitud de onda, el número de onda, el diámetro de la abertura y la distancia que hay entre los planos objeto e imagen.

La segunda parte (línea 18 a 30) consiste en definir el campo de entrada, en este caso la abertura circular. Se definen las coordenadas y se utiliza la subrutina `fun_circulo` para generar la abertura. Los comandos de las líneas 24 a 29 se usan para graficar la forma de la abertura.

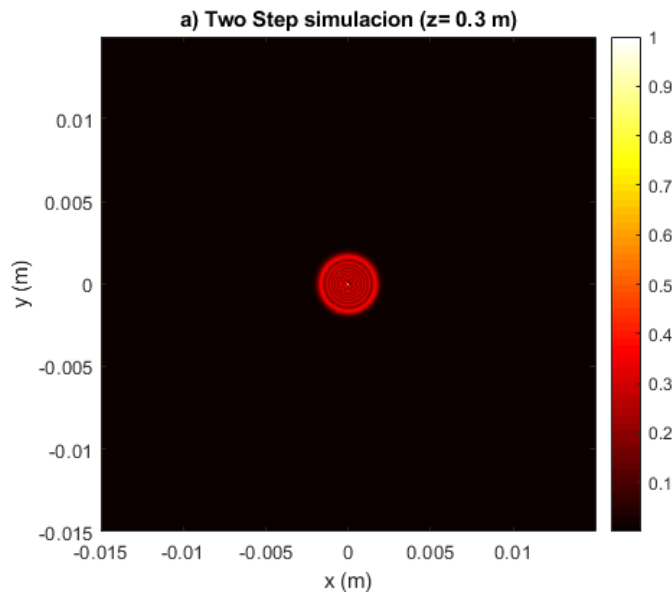
La tercera parte abarca de la línea 31 a la 56; se utiliza las subrutinas de los propagadores para encontrar el campo difractado por la abertura a la distancia  $Dz$ . Los resultados de este programa se muestran en el siguiente capítulo.

# Capítulo tres

## 3. Análisis de resultados.

En este capítulo se muestran los resultados del programa de la lista 2.6 para diferentes distancias de propagación. Se contrasta los resultados para la función de transferencia y la propagación de dos pasos. Así mismo se muestra el efecto de solapamiento para ambos propagadores cuando las condiciones de muestreo no se cumplen.

Las imágenes desplegadas por el programa de la lista 2.6 para el campo en el plano imagen se muestran en la Fig. 3.1. Tal y como se mencionó en el capítulo uno, el campo difractado tiene una distribución de anillos brillantes y oscuros; debido a la simetría de la abertura. El inciso a) muestra el campo simulado por el propagador de dos pasos, se puede apreciar como el tamaño de la malla es tres veces más grande que la malla en el inciso c) que representa el campo simulado con la función de transferencia, lo cual es de esperarse dado el método del propagador de dos pasos. Para contrastar mejor los resultados, el inciso b) muestra la intensidad del inciso a) ajustando la imagen para tener las mismas dimensiones del inciso c); esta ajuste es solo un “zoom” al inciso a); de esta manera se pueden apreciar y comparar los resultados de ambos propagadores. De aquí en adelante se hará este mismo zoom para todas las imágenes de intensidad del propagador de dos pasos, pero se debe tener en cuenta que el tamaño de las mallas es diferente.



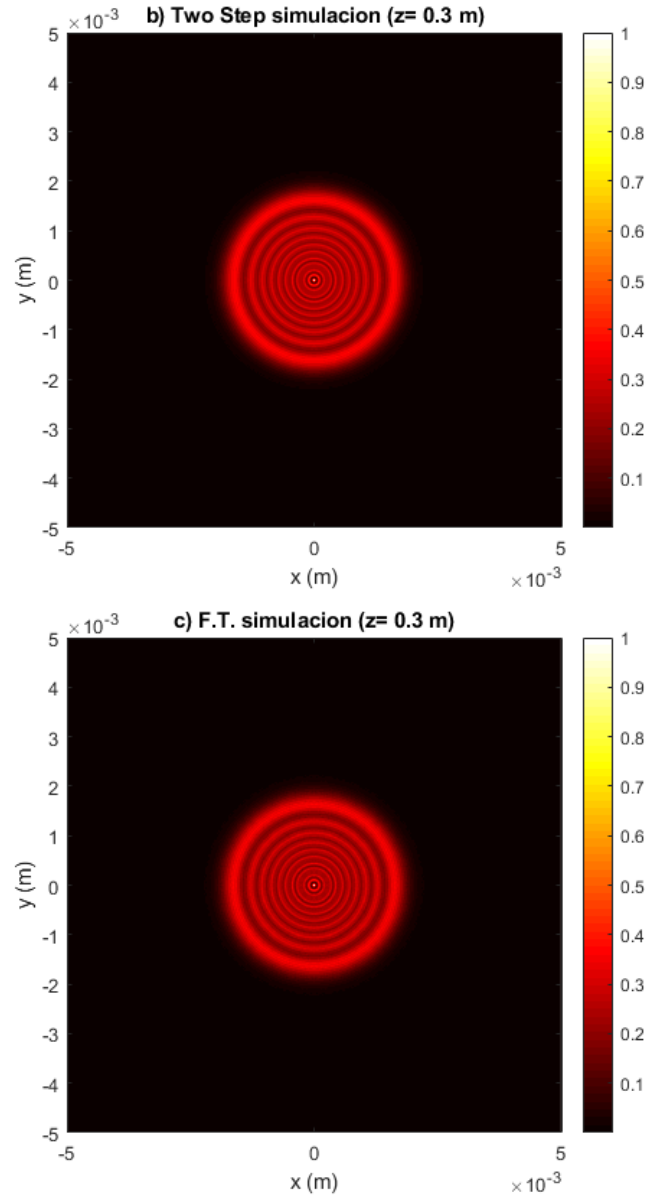


Figura 3.1.- Campo difractado por una abertura circular de dos milímetros de radio a una distancia de 30 centímetros; a) propagador de dos pasos b) zoom al propagador de pasos y c) función de transferencia.

Existen ciertas diferencias al ocupar los propagadores, esto debido a los criterios de solapamiento que se mencionan en el capítulo dos. Para distancias relativamente cortas, donde se cumple el criterio de solapamiento dado por la Ecu. (2.25), se tienen mejores resultados para la función de transferencia en comparación con el propagador de dos pasos, ya que los dos primeros criterios de solapamiento para el propagador de dos pasos dados por las ecuaciones (2.44) y (2.45) no se cumplen,

pero el tercer criterio de la Ecu. (2.46) se cumple. Esto produce que la simetría circular se rompa y se obtenga una forma cuadrada en el patrón de difracción.

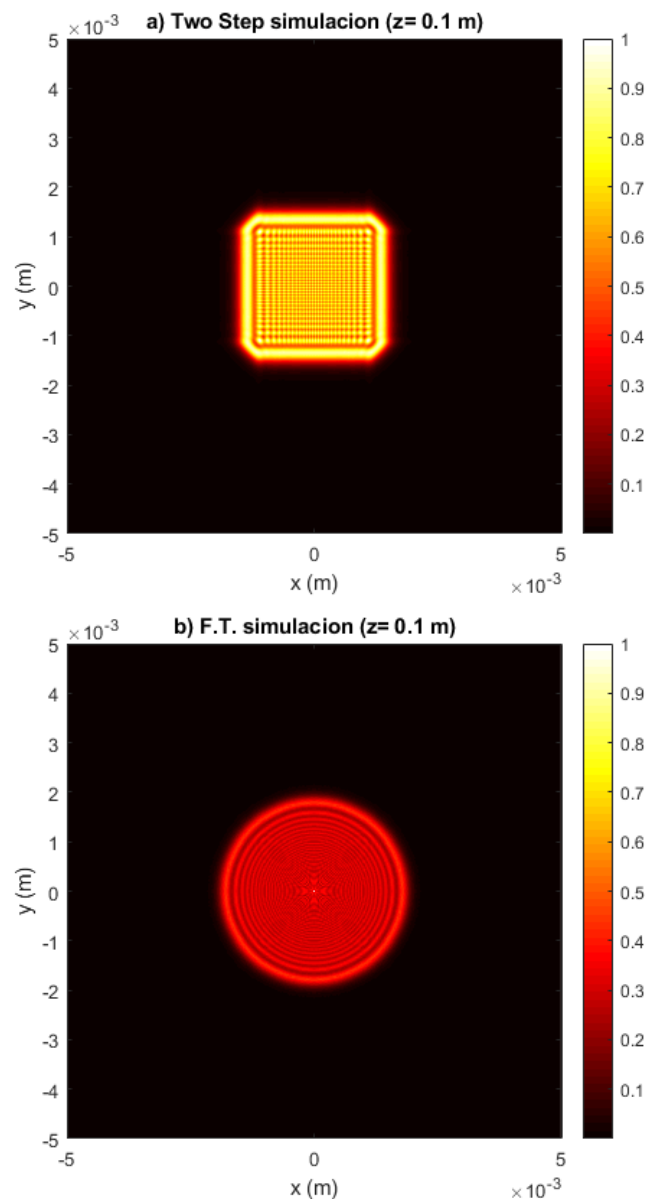
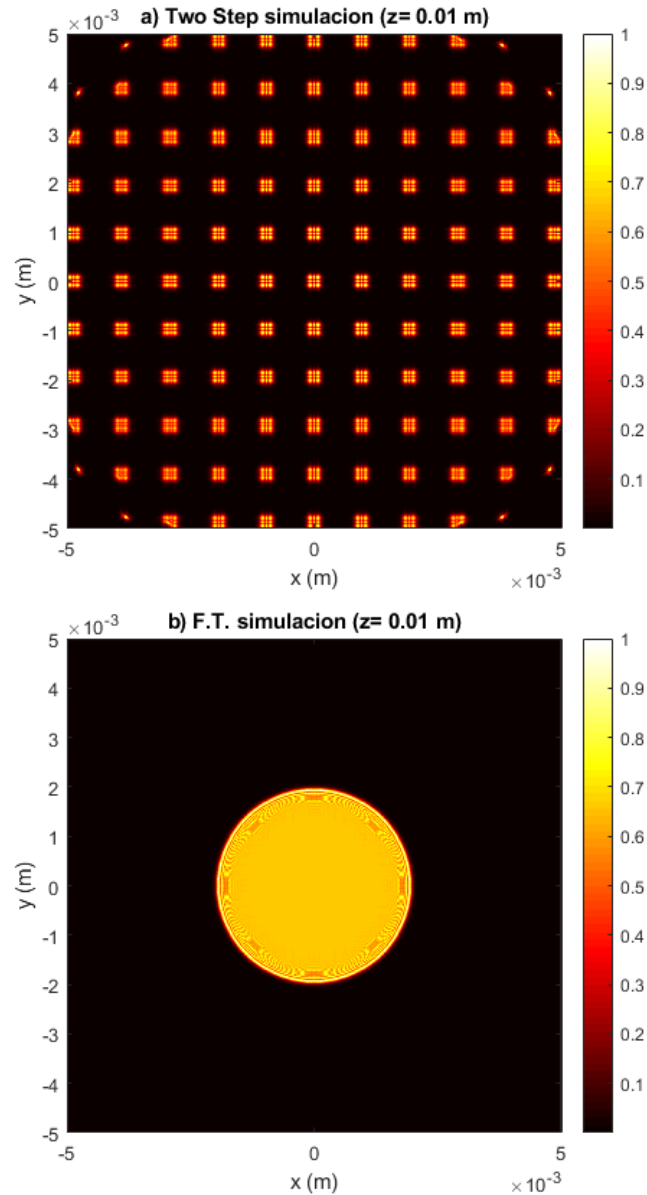


Figura 3.2.- Campo difractado por una abertura circular de dos milímetros de radio a una distancia de 10 centímetros; a) propagador de dos pasos y b) función de transferencia.

Se observa que la ventaja principal de la función de transferencia se encuentra en la propagación de distancias pequeñas. Sin embargo, no es posible realizar propagaciones tan pequeñas como se deseen, la causa principal es la aproximación del factor de oblicuidad que permite obtener la integral de Fresnel a partir de la solución de Rayleigh-Sommerfeld. Esto se evidencia en los propagadores distorsionando la imagen del patrón de difracción. En el caso del propagador de dos

pasos, se observan copias del cuadrado que aparece en la Fig. 3.2, mientras más cerca se esté del plano objeto más copias aparecen. Para la función de transferencia se mantiene la simetría circular pero el patrón de difracción se va generando poco a poco. Los resultados se muestran en la Fig. 3.3.



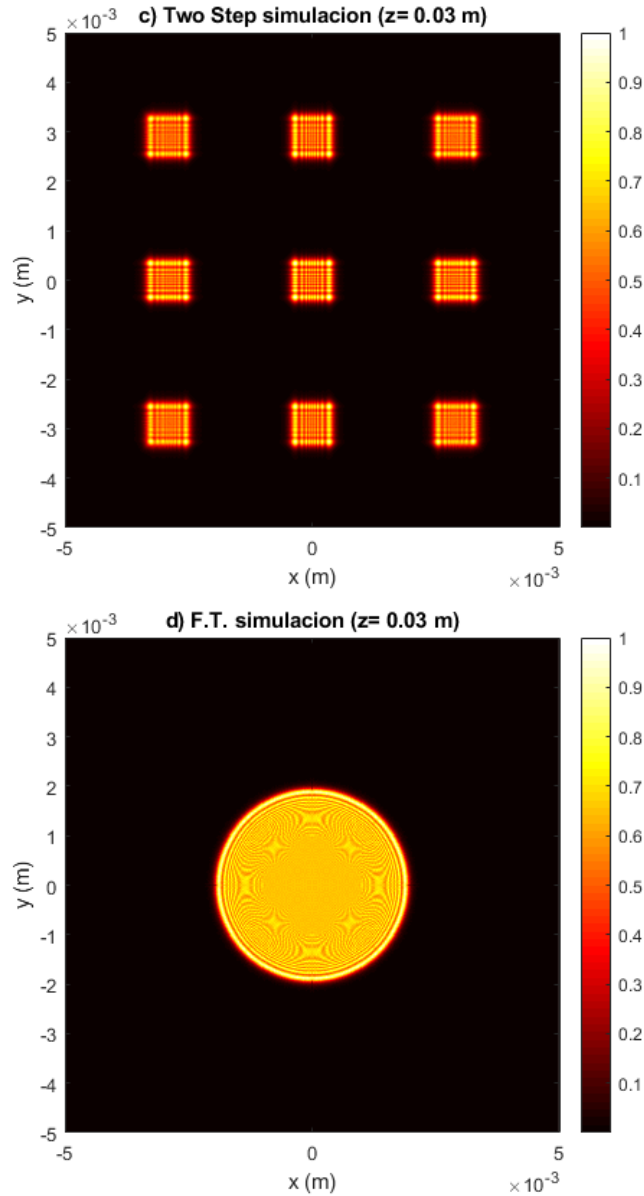
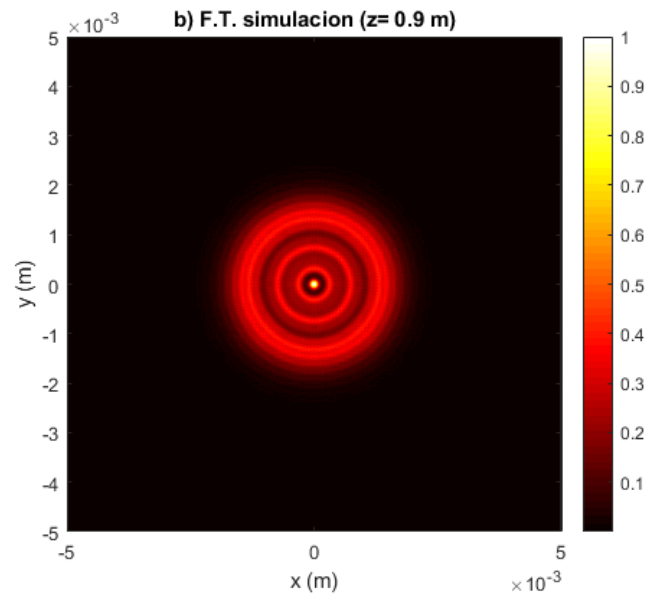
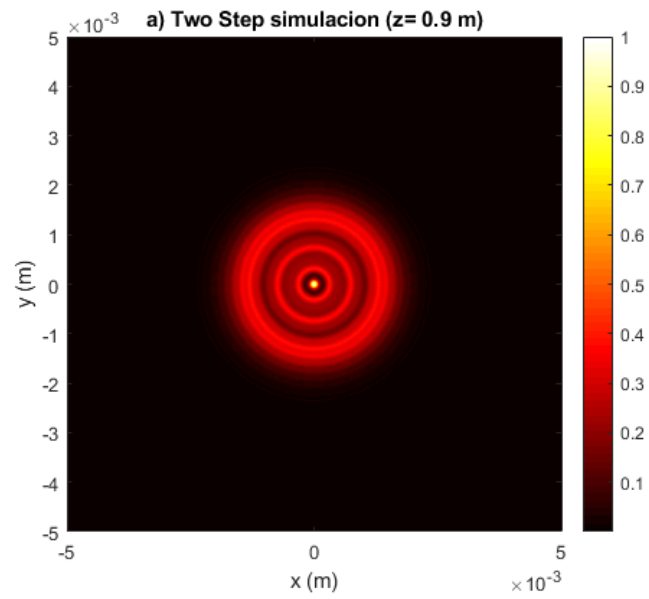
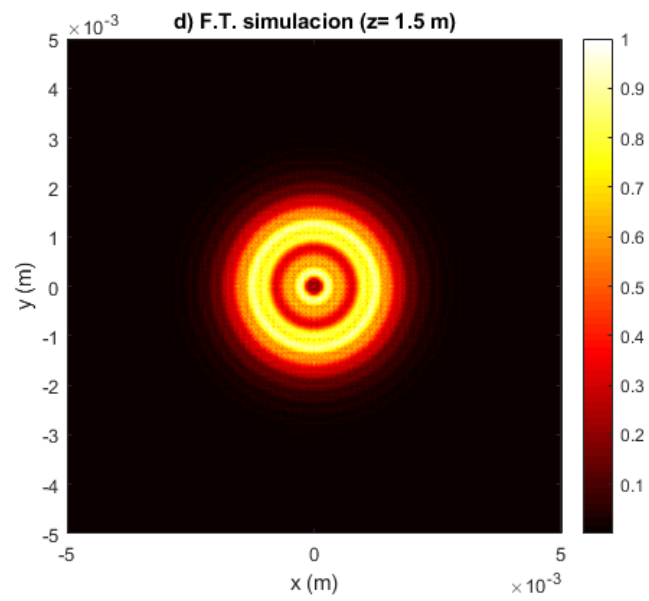
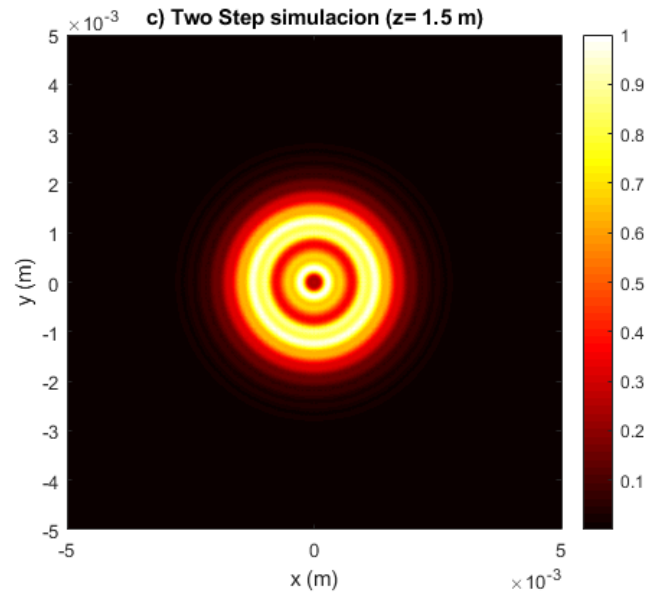


Figura 3.3.- Campo difractado por una abertura circular de dos milímetros de radio a una distancia de 1 centímetro: a) propagador de dos pasos y b) función de transferencia. Campo difractado por la misma abertura a una distancia de 3 centímetros: c) propagador de dos pasos y d) función de transferencia.

Al aumentar la distancia de propagación ambos propagadores tienden a tener resultados similares como se muestra en la figura 3.1. Esto a pesar de que el primer criterio de solapamiento para la función de transferencia no se cumple, pero se cumple el criterio de ancho de banda de la fuente de la Ecu. (2.25). Mientras más grande sea la distancia  $z$  que hay entre los planos objeto e imagen, ambos criterios de solapamiento para la función de transferencia dejan de cumplirse y el patrón de difracción se va degradando. Para estas distancias grandes los dos primeros criterios de solapamiento para el propagador de dos pasos se cumplen y el patrón

de difracción desplegado es bastante mejor. El cumplimiento de los criterios de solapamiento se muestra en la tabla 3.1 y tabla 3.2.





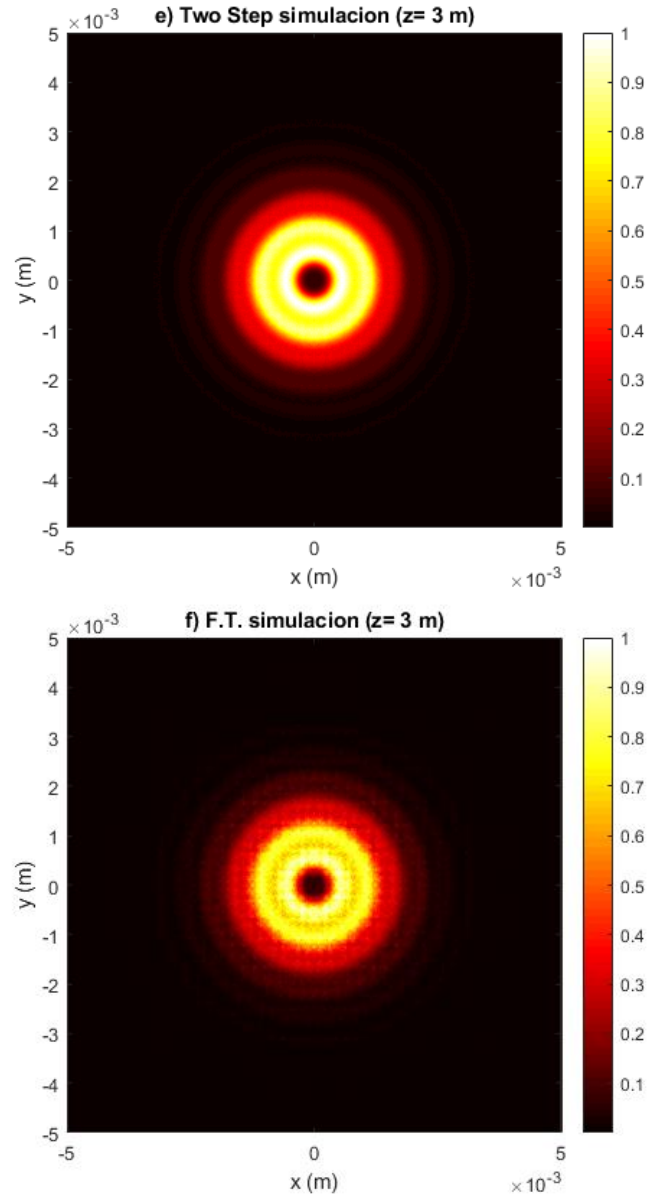


Figura 3.4.- Campo difractado por una abertura circular de dos milímetros de radio a una distancia de .9 metros: a) propagador de dos pasos y b) función de transferencia; a una distancia de 1.5 metros: c) propagador de dos pasos y d) función de transferencia; y a una distancia de 3 metros: e) propagador de dos pasos y f) función de transferencia.

<b>z</b>	$\Delta x_1 \leq \frac{\lambda z}{ L_1 - L_2 }$	$\Delta x_1 \leq \frac{L_1}{L_2} \frac{\lambda z}{ L_1 - L_2 }$	$\Delta x_1 \geq \frac{\lambda z}{L_2}$
<b>3 m</b>	1	1	0
<b>1.5 m</b>	1	1	0
<b>90 cm</b>	1	1	0
<b>30 cm</b>	0	1	1
<b>10 cm</b>	0	0	1
<b>3 cm</b>	0	0	1

Tabla 3.1.- Criterios de solapamiento del propagador Two Step para diferentes distancias de propagación. 1 y 0 representan que el criterio se cumple o no respectivamente.

<b>z</b>	$\Delta x \geq \frac{\lambda z}{L}$	$B \geq \frac{L}{2\lambda z}$
<b>3 m</b>	0	1
<b>1.5 m</b>	0	1
<b>90 cm</b>	0	1
<b>30 cm</b>	0	1
<b>10 cm</b>	1	1
<b>3 cm</b>	1	1

Tabla 3.2.- Criterios de solapamiento de la función de transferencia para diferentes distancias de propagación. 1 y 0 representan que el criterio se cumple o no respectivamente.

Para conocer la región de validez del programa desarrollado, se tiene que tomar en cuenta el número de Fresnel

$$F = \frac{a^2}{z\lambda}, \quad (3.1)$$

donde  $a$  es el radio de la abertura,  $z$  es la distancia de propagación y  $\lambda$  es la longitud de onda. Para valores de  $F \gg 1$  se está en la región de campo cercano y se debe utilizar el método del espectro angular para calcular el patrón de difracción de la abertura, para valores  $F \sim 1$  se está en la región donde la aproximación de Fresnel

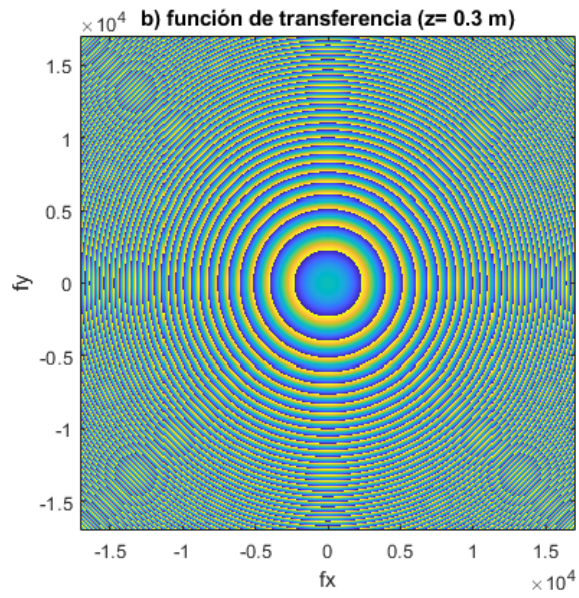
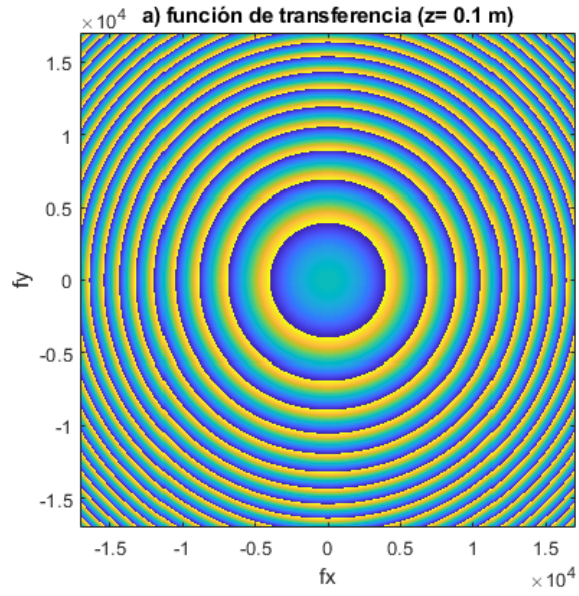
es válida y para valores  $F \ll 1$  se está en la región de difracción de Fraunhofer. Los números de Fresnel correspondientes a las propagaciones realizadas con el programa se muestran en la tabla 3.3.

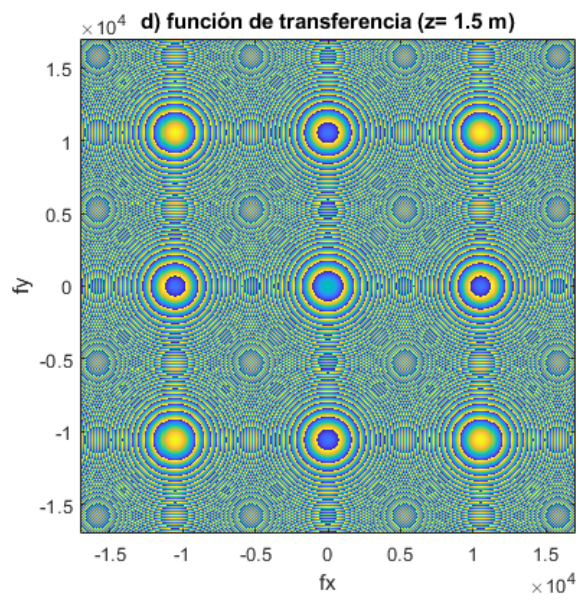
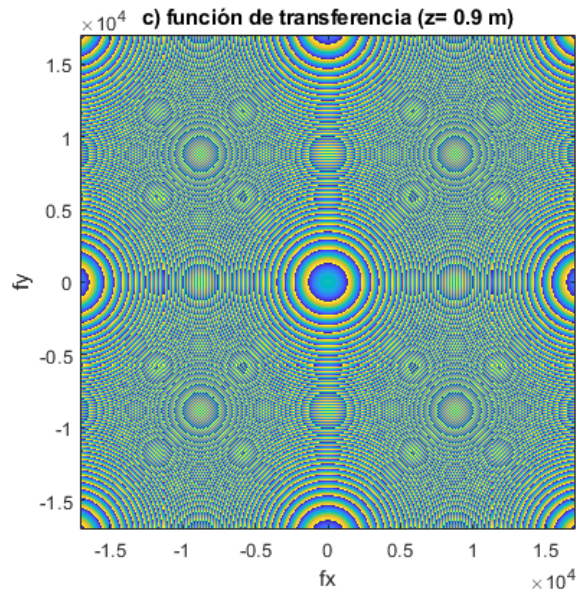
De aquí se puede observar que, para distancias menores a 30 cm, los números de Fresnel ya son mucho mayores que 1 por lo que el programa, aunque mantiene la geometría de difracción de anillos brillantes y oscuros, no despliega un patrón de difracción que se puede contrastar con resultados experimentales. A medida que la distancia de propagación aumenta el número de Fresnel disminuye y el programa empieza a ser válido. Entonces la validez del programa se tiene para valores de  $F < 7.5$ .

<b>Distancia de propagación (z)</b>	<b>Número de Fresnel</b>
<b>3 m</b>	2.11
<b>1.5 m</b>	4.22
<b>90 cm</b>	7.03
<b>30 cm</b>	21.1
<b>10 cm</b>	63.29

Tabla 3.3.- Distancias de propagación y su correspondiente número de Fresnel.

Ahora se analiza el solapamiento debido a las exponenciales en los propagadores; en el caso de la función de transferencia, al calcular el patrón de difracción se multiplican la transformada de Fourier de la función círculo con la función de transferencia. Observar que tan bien muestreada esta la fase de la función de transferencia permite tener una idea del efecto de solapamiento. La figura 3.5. muestra el área efectiva de la fase que es multiplicada; para distancias pequeñas la fase esta muestreada adecuadamente por lo que los resultados desplegados son bastante buenos, aunque la fase empieza a generar copias de sí misma (inciso b). Conforme se aumenta la distancia de propagación la fase deja de estar bien muestreada (inciso c-e) y las copias comienzan a multiplicar la transformada de Fourier de la función círculo. Esto es lo que genera que el efecto de solapamiento.





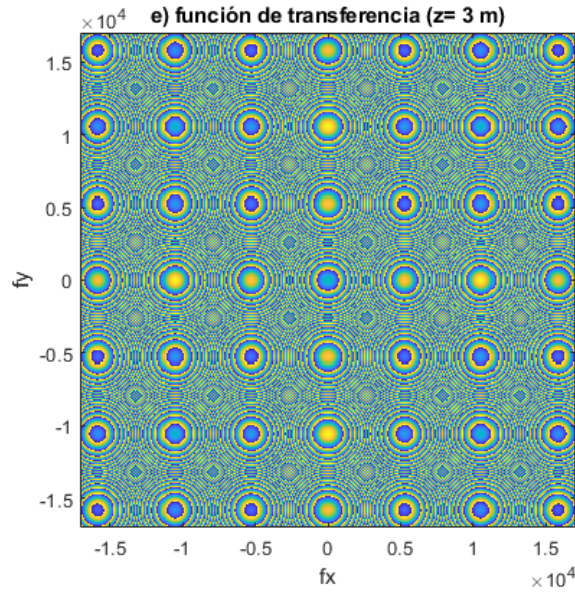


Figura 3.4.- Fase de la función de transferencia para distintas distancias de propagación: a) 10 cm, b) 30 cm, c) 90 cm, d) 1.5 m y e) 3 m.

Los efectos de solapamiento para el caso del propagador de dos pasos no son tan sencillos de visualizar como en la función de transferencia debido a que se tienen tres exponenciales (Ecu. (2.43)), pero se puede observar cómo contrarrestar este efecto modificando la longitud de las mallas  $L_1$  y  $L_2$ . Para el caso cuando  $L_1 = L_2$  el propagador se reduce a la función de transferencia, desplegando los mismos resultados (Figura 3.5). Al aumentar  $L_2$  el solapamiento empieza a disminuir, teniendo los mejores resultados cuando  $L_2 = 3L_1$ ; no obstante, al seguir aumentando  $L_2$  el efecto vuelve a manifestarse debido a que el criterio dado por la Ecu. (2.45) deja de cumplirse, de hecho, el efecto es más evidente como se muestra en la figura 3.6 c).

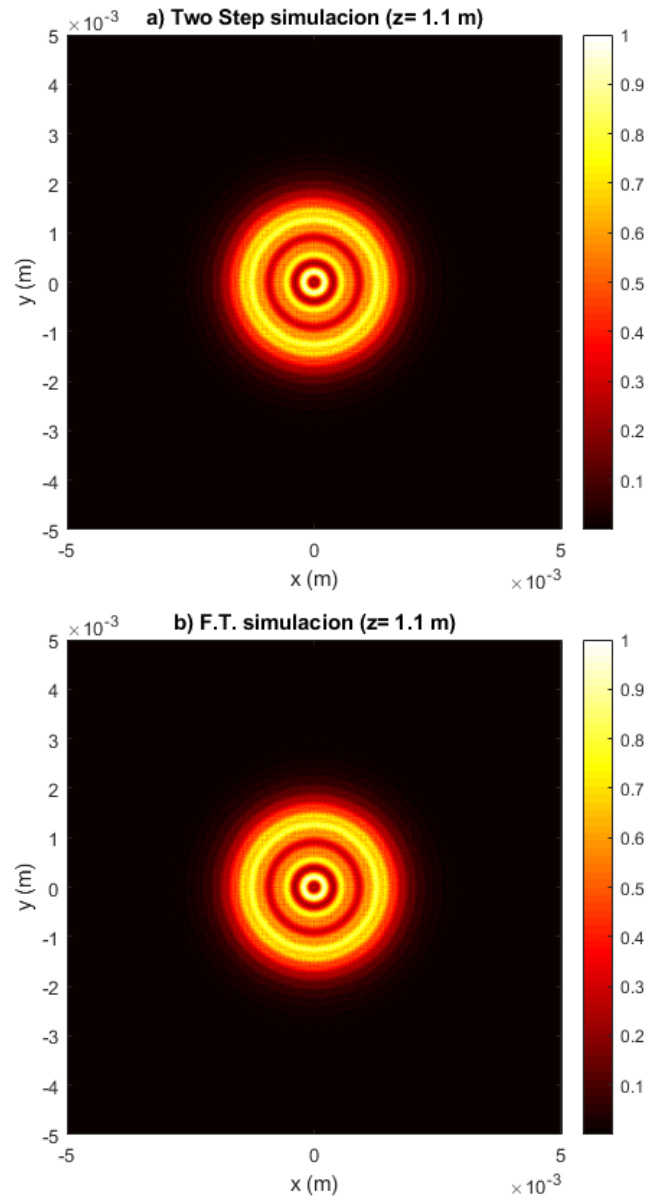
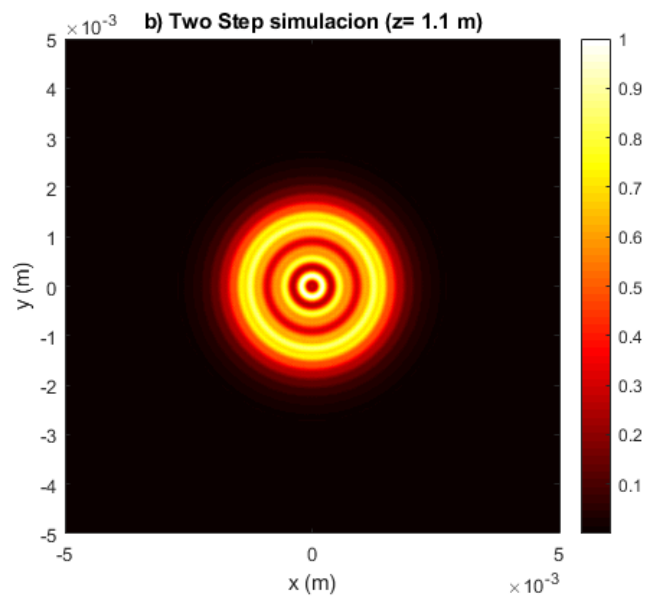
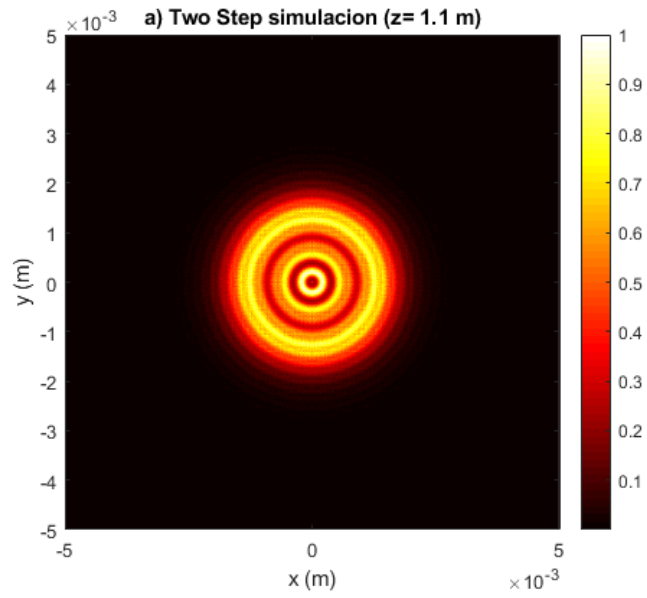


Figura 3.5.- Campo difractado por una abertura circular de dos milímetros de radio a una distancia de 1.1 metros: a) propagador de dos pasos ( $L_1 = L_2$ ) y b) función de transferencia



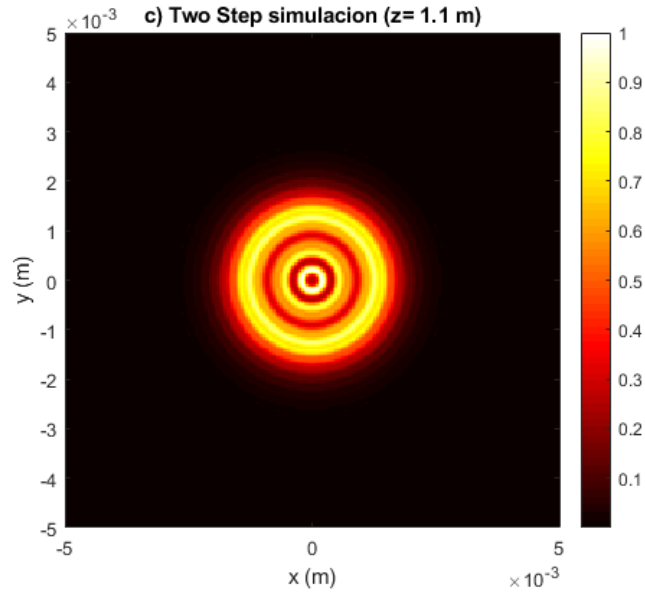
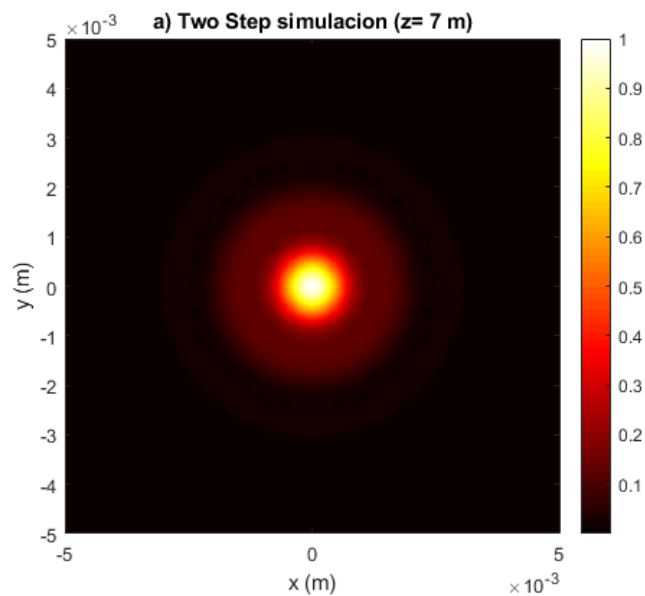


Figura 3.6.- Campo difractado por una abertura circular de dos milímetros de radio a una distancia de 1.1 metros: a) propagador de dos pasos ( $L_1 = L_2$ ), b) propagador de dos pasos ( $L_2 = 3L_1$ ) y c) propagador de dos pasos ( $L_2 = 5L_1$ ).

Al continuar propagando, se llega a la región de campo lejano y esto se observa en las imágenes de intensidad ya que el patrón de difracción no cambia de forma, solo cambia de tamaño como se tiene en la fig. 3.7. En esta región los resultados de los propagadores ya no son adecuados por lo que se debe considerar otro programa que simule la difracción de Fraunhofer directamente.



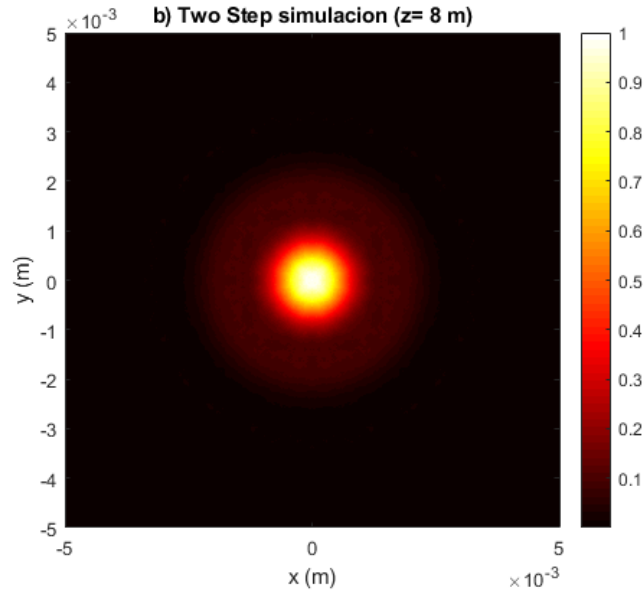
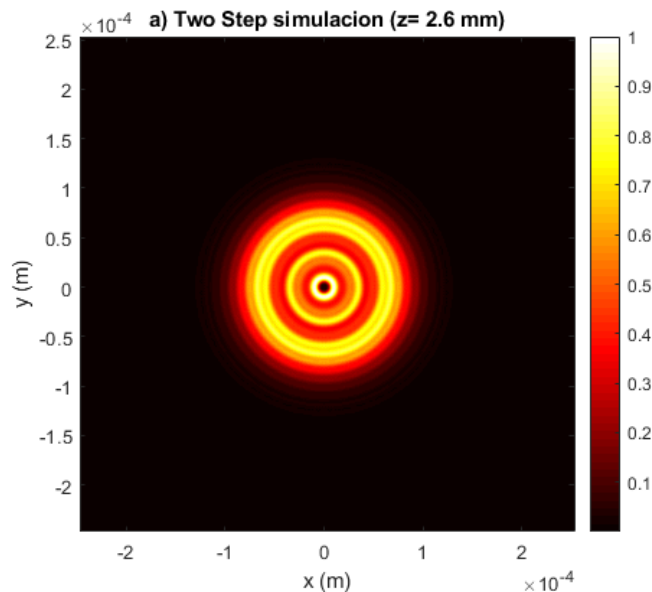


Figura 3.7.- Campo difractado por una abertura circular de dos milímetros de radio usando el propagador de dos pasos, a una distancia de a) 7 m y b) 8 m.

Como una manera de observar que pasa para diferentes tamaños de aberturas, se modificó el diámetro de la abertura en la lista 2.6; los incisos a) y b) de la figura 3.8 corresponde al campo difractado por a una abertura de 100 micras a una distancia de 2.6 mm y con  $F = 6.07$ . El inciso c) corresponde al campo propagado a una distancia de 30 mm donde ya está presente el patrón de difracción de Fraunhofer, como era de esperarse al disminuir el tamaño de la abertura, también disminuye la distancia para obtener difracción de campo lejano.



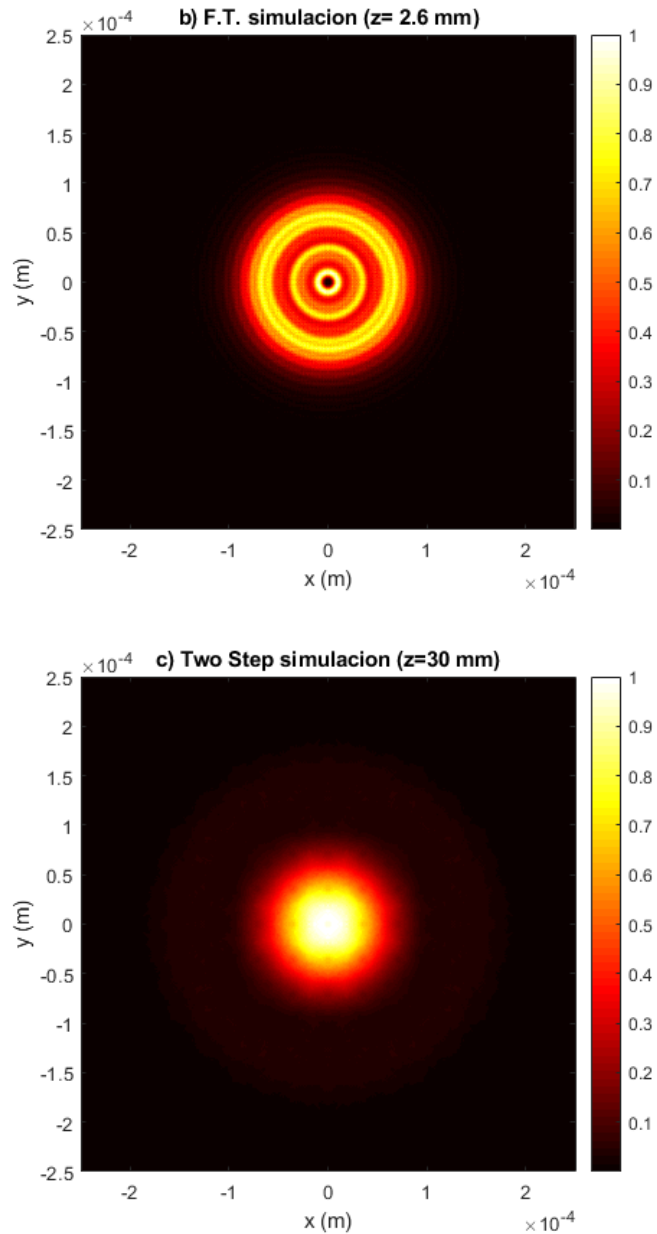
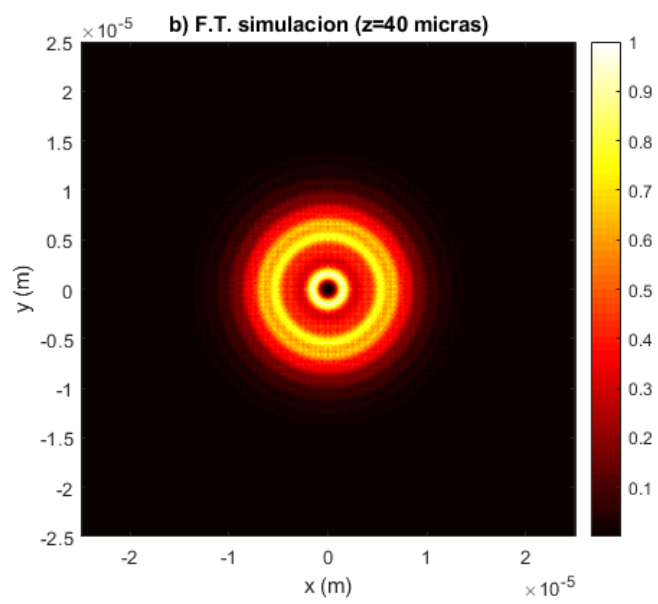
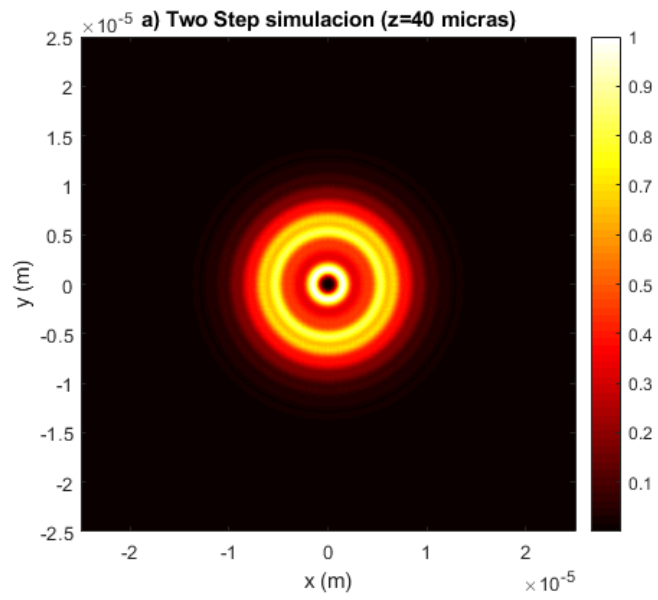


Figura 3.8.- Campo difractado por una abertura circular de 100 micras de radio; a) propagador de dos pasos a una distancia de 2.6 mm, b) función de transferencia a una distancia de 2.6mm y c) propagador de dos pasos a una distancia de 30 mm.

Así mismo, se programó una abertura circular de 10 micras de radio y se observó el campo difractado a una distancia de 40 micras con un  $F = 3.96$ ; los resultados se muestran en la figura 3.9. El inciso c) corresponde al campo propagado a una distancia de 300 micras, donde se tiene difracción de Fraunhofer.



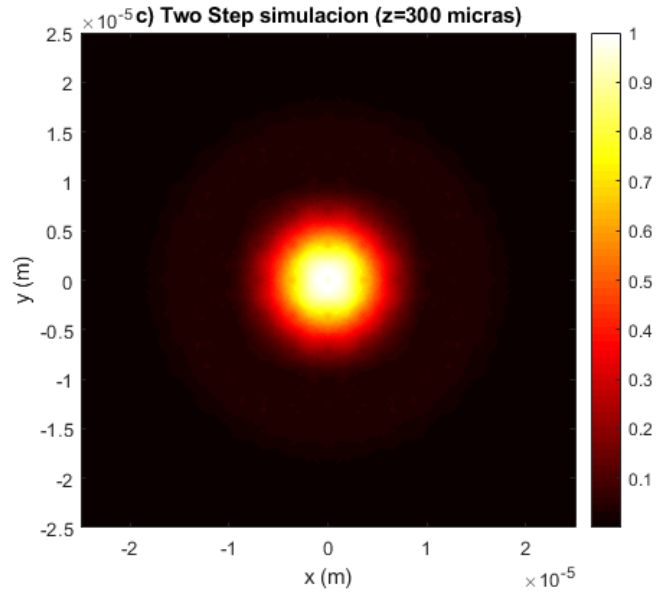
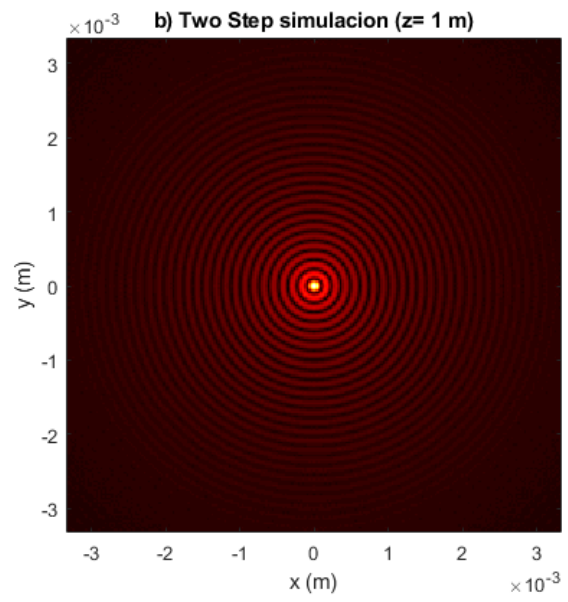
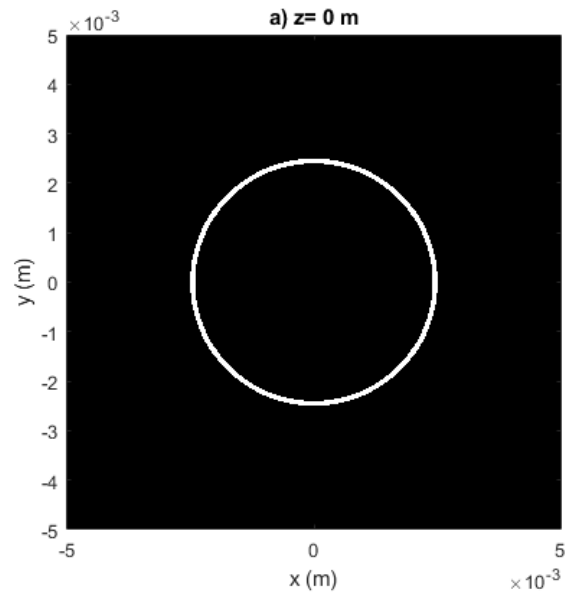
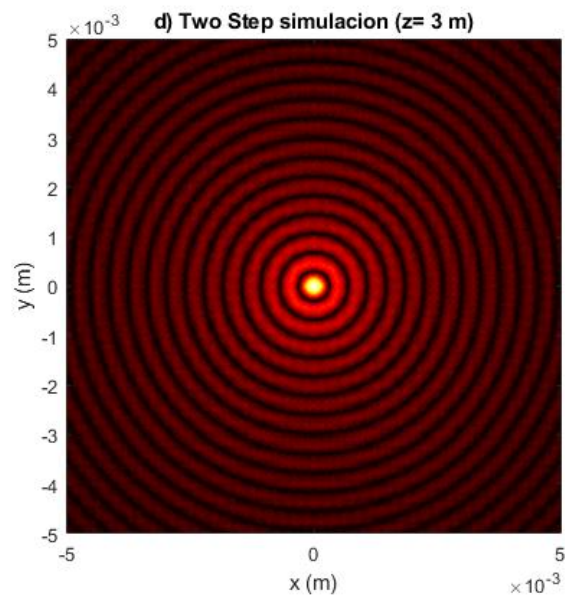
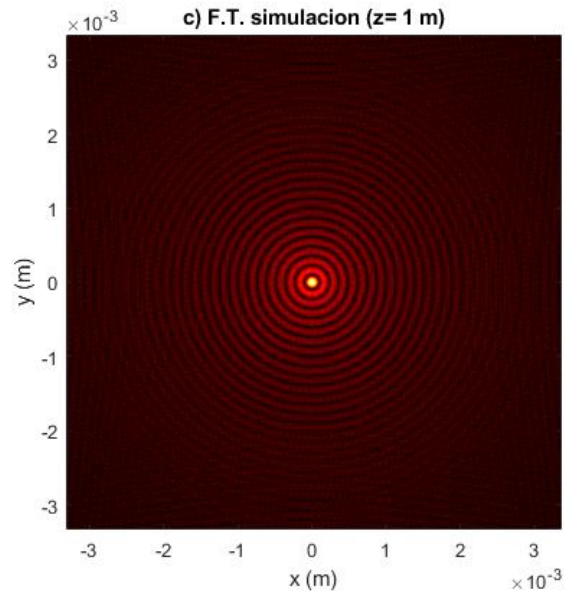


Figura 3.9.- Campo difractado por una abertura circular de 10 micras de radio; a) propagador de dos pasos a una distancia de 40 micras, b) función de transferencia a una distancia de 40 micras y c) propagador de dos pasos a una distancia de 300 micras.

Finalmente se enfatiza el hecho de que los propagadores se pueden ocupar para cualquier campo o abertura diferente a la abertura circular. Por ejemplo, se sabe que una forma de generar haces Bessel es utilizando una abertura en forma de anillo iluminada por una onda plana [5]. La figura 3.7 muestra los resultados de la propagación de un campo por una abertura anular, de radio interior de 2.4 mm y radio exterior de 2.5 mm, a diferentes distancias. Las constantes y parámetros iniciales son los mismos que para la abertura circular excepto por los radios. Tal y como se esperaba los resultados para la propagación de 1 m son ligeramente mejores para la función de transferencia; y al aumentar la distancia de propagación los resultados son mejores para la propagación de dos pasos. Además, los propagadores evidencian el hecho de el haz Bessel sufre difracción, esto ocurre debido al confinamiento del haz en la rejilla cuadrada.





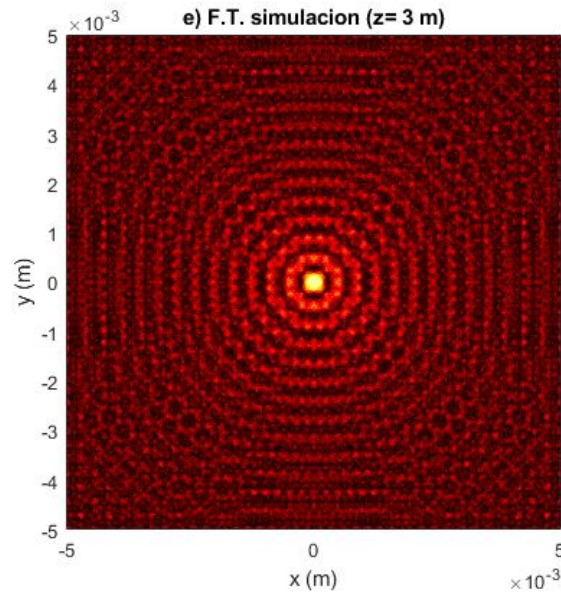


Figura 3.10.- a) Abertura anular. Campo difractado por la abertura a una distancia de 1 m: b) propagador de dos pasos y c) función de transferencia; campo difractado a una distancia de 3 m: d) propagador de dos pasos y e) función de transferencia.

# Capítulo cuatro

## 4. Conclusiones.

En este trabajo de tesis se estudió la teoría escalar desde las suposiciones hechas por Kirchhoff hasta las soluciones Rayleigh-Sommerfeld; esto permitió encontrar la integral de difracción de Fresnel.

Se estudio la discretización de la transformada de Fourier y su digitalización de manera adecuada en MATLAB, haciendo uso del algoritmo Fast Fourier Transform. Además, se generaron ficheros de función que facilitan el uso de la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier.

Una vez generados los ficheros para la transformada y su inversa; se desarrollaron dos ficheros de función más que permiten simular la propagación libre de campos ópticos usando como base la integral de difracción de Fresnel. El primer propagador (propagador de función de transferencia) aprovecha la similitud de la integral con la función de convolución y el uso de la función de transferencia. El segundo (propagador de dos pasos) utiliza el parecido de la integral de difracción con una transformada ligeramente modificada.

Usando los métodos de propagación se logró encontrar el patrón de difracción de una abertura circular para diferentes distancias de propagación. Este patrón se compone por una serie de anillos oscuros y brillantes, debido a la simetría de la abertura. Posteriormente se hizo una comparación entre los propagadores, en donde se mostró los criterios que despliegan resultados adecuados.

Se demostró como las funciones exponenciales de los propagadores generan el efecto de solapamiento. En particular para la función de transferencia, se observó como el muestreo de la fase comienza a ser inadecuado al aumentar la distancia de propagación.

Para el caso del propagador de dos pasos (Two Step) se observó que al tener un tamaño mayor de la malla para el plano de observación permite disminuir el efecto de solapamiento; con los mejores resultados para cuando  $L_2 = 3L_1$ .

# Apéndice A: Demostración del Teorema de Green

La demostración comienza con el teorema de la divergencia o teorema de Gauss, el cual dice [11, 34]: Sea  $V$  un volumen arbitrario,  $S$  la superficie que encierra ese volumen y  $\vec{F}$  una función vectorial de la posición continua en  $V$ , entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dv, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\vec{F} \cdot \hat{n}$  es la componente normal a  $\vec{F}$  en la superficie  $S$ . Si se tiene que  $\vec{F} = \varphi \nabla \Psi$ , con  $\varphi$  y  $\Psi$  escalares, entonces sustituyendo en (A.1):

$$\iint_S \varphi \nabla \Psi \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_V (\varphi \nabla^2 \Psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi) \, dv, \quad (\text{A.2})$$

Por otro lado, si ahora  $\vec{F} = \Psi \nabla \varphi$  y sustituyendo en (A.1):

$$\iint_S \Psi \nabla \varphi \cdot \hat{n} \, ds = \iiint_V (\Psi \nabla^2 \varphi + \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi) \, dv, \quad (\text{A.3})$$

ahora restando (A.3) a (A.2):

$$\iint_S (\varphi \nabla \Psi \cdot \hat{n} - \Psi \nabla \varphi \cdot \hat{n}) \, ds = \iiint_V (\varphi \nabla^2 \Psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi - \Psi \nabla^2 \varphi - \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi) \, dv. \quad (\text{A.4})$$

Utilizando las propiedades vectoriales  $\nabla \Psi \cdot \hat{n} = \frac{\partial \Psi}{\partial n}$  y  $\nabla \varphi \cdot \hat{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  se tiene:

$$\iint_S \left( \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, ds = \iiint_V (\varphi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \varphi) \, dv. \quad (\text{A.5})$$

La ecuación (A.5) se conoce como el teorema de Green.

# Bibliografía

- [1] K. Kirkland, Light and Optics, Facts on file, 2007.
- [2] A. Sommerfeld, Optics, vol. IV , New York: Academic Press, 1954.
- [3] G. Libri, Histoire Des Sciences Mathematiques En Italie, Kessinger Publishing, 2009.
- [4] I. Newton, Opticks, Prometheus; Reprint Edition, 2003.
- [5] E. Hecht, Optics, cuarta ed., Wesley, 2002.
- [6] K. D. Möller, Optics, segunda ed., New York: Springer, 2007.
- [7] K. K. Sharma, Optics Principles and Applications, ELSEVIER, 2006.
- [8] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Cambridge University Press, 2013.
- [9] N. Kipnis, History of the principle of Interference of light, Springer Basel AG, 1991.
- [10] M. Born y E. Wolf, Principles of Optics, New York: Pergamon, 1965.
- [11] B. D. Guenther, Modern Optics, segunda ed., Oxford University Press, 2015.
- [12] J. Reitz , F. Milford y R. Christy, Fundamentos de la teoría electromagnética, Cuarta ed., Addison-Wesley Iberoamericana, 2001.
- [13] B. E. A. Saleh y M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, John Wiley and Sons, 1991.
- [14] G. G. Gillen, K. Gillen y S. Guha, Light propagation in linear optical media, CRC Press, 2014.
- [15] J. M. Cowley, Diffraction Physics, ELSEVIER, 1995.
- [16] F. Kottler, «Diffraction at black screen,» *Progress in Optics*, vol. 4, pp. 281-314, 1965.
- [17] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, tercera ed., Greenwood Village: Roberts & Company Publishers, 2005.

- [18] C. Aime, E. Aristidi y Y. Rabbia, «The Fresnel Diffraction: A Story of Light and Darkness,» *European Astronomical Society Publications Series*, vol. 59, pp. 37-58, 2013.
- [19] O. K. Ersoy, *Diffraction, Fourier Optics, and Imaging*, New York: Wiley-Interscience, 2006.
- [20] J. D. Gaskill, *Linear systems, Fourier transforms and Optics*, Wiley-Interscience, 1978.
- [21] G. B. Arfken y H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, sexta ed., Elsevier Academic Press, 2005.
- [22] D. Mas, J. Garcia, C. Ferreira, L. M. Bernardo y F. Marinho, «Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation,» *Optics Communications*, vol. 164, pp. 233-245, 1999.
- [23] M. V. Papalexandris y D. C. Redding, «Calculation of diffraction effects on the average phase of an optical field,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 17, pp. 1763-1772, 2000.
- [24] S. Coy, «Choosing mesh spacings and mesh dimensions for wave optics simulation,» *Proceedings of SPIE*, vol. 48, pp. 6132-6142, 2005.
- [25] D. G. Voelz y M. C. Roggemann, «Digital simulation of scalar optical diffraction: revisiting chirp function sampling criteria and consequences,» *Applied Optics*, vol. 48, pp. 6132-6142, 2009.
- [26] J. D. Schmidt, *Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with examples in MATLAB*, Washington: SPIE PRESS, 2010.
- [27] D. Voelz, *Computational Fourier Optics a MATLAB Tutorial*, Washington: SPIE PRESS, 2011.
- [28] G. J. Gbur, *Mathematical methods for optical sciences*, Cambridge University Press, 2012.
- [29] A. Gilat, *MATLAB: Una introducción con ejemplos prácticos*, Reverté, 2006.
- [30] D. McMahon, *MATLAB Demystified*, McGraw-Hill Education, 2007.
- [31] T.-C. Poon y T. Kim, *Engineering Optics with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., 2006.
- [32] M. S. Wartak, *Computational Photonics: An Introduction with MATLAB*, Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

- [33] M. E. Hufford y H. T. Davis, «The Diffraction of Light by a Circular Opening and the Lommel Wave Theory,» *Physical Review*, vol. 33, pp. 589-597, 1929.
- [34] B. D. Guenther, A. Miller, L. Bayvel y J. E. Midwinter, *Encyclopedia of modern optics*, Elsevier, 2004.
- [35] K. Mielenz, «Algorithms for Fresnel Diffraction at Rectangular and circular apertures,» *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, vol. 103, pp. 497-509, 1998.
- [36] C. J. R. Sheppard y M. Hrynevych, «Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory,» *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 9, pp. 274-281, 1992.
- [37] A. Doronin, N. Vera, J. P. Staforelli, P. Coelho y I. Meglinski, «Propagation of Cylindrical Vector Laser Beams in Turbid tissue-Like Scattering Media,» *Photonics*, vol. 6, p. 56, 2019.
- [38] C. Zhu y Q. Liu, «Review of Monte Carlo modeling of light transport in tissues,» *Journal of biomedical optics*, vol. 18, 2013.