



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

**Análisis de la propagación de un haz paraxial de luz en  
un medio con esparcimiento**

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS  
(FÍSICA APLICADA)**

por

**Gonzalo Condado Tepox**

asesorado por

**Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco**

Puebla Pue.  
Enero de 2022



**Título:** *Análisis de la propagación de un haz paraxial de luz en un medio con esparcimiento*

**Estudiante:** GONZALO CONDADO TEPOX

COMITÉ

---

**Dra. Marcela Maribel Méndez Otero (FCFM-BUAP)**  
Presidente

---

**Dra. Emma Vianey García Ramírez (FCFM-BUAP)**  
Secretario

---

**Dr. Edmundo Reynoso Lara (FCE-BUAP)**  
Vocal

---

**Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco**  
Asesor



# Índice general

<i>Agradecimientos</i>	v
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Conceptos Fundamentales</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	1
1.2. Ecuación de Onda . . . . .	2
1.3. Haces Gaussianos . . . . .	3
1.4. Difracción de ondas electromagnéticas . . . . .	5
1.5. Óptica no lineal . . . . .	15
1.5.1. Auto-enfocamiento y auto-desenfocamiento . . . . .	15
1.5.2. Auto-modulación espacial de fase . . . . .	16
<b>2. Pérdidas ópticas en un medio</b>	<b>17</b>
2.1. Absorción y emisión de luz . . . . .	17
2.1.1. Ecuación del oscilador electrónico . . . . .	18
2.1.2. Absorción . . . . .	19
2.1.3. Emisión espontánea . . . . .	24
2.1.4. Emisión estimulada . . . . .	27
2.1.5. Ley de Beer . . . . .	28
2.2. Esparcimiento . . . . .	30
2.2.1. Matriz de Mueller . . . . .	30
2.2.2. Esparcimiento de Rayleigh . . . . .	34
2.2.3. Esparcimiento de Mie . . . . .	37
2.2.4. Análisis angular del esparcimiento . . . . .	42
2.3. Extinción de un haz de luz . . . . .	44
<b>3. Análisis experimental y numérico del esparcimiento</b>	<b>49</b>
3.1. Fase Experimental . . . . .	49
3.2. Fase Numérica . . . . .	50
3.3. Fase No Lineal . . . . .	60
<b>4. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>



# *Agradecimientos*

*A mi asesor el Dr. Maximino Luis arroyo Carrasco por su paciencia, conocimientos y principalmente por el tiempo dedicado para llevar a cabo este trabajo.*

*A los miembros del comité (y jurado) por aceptar la labor de revisar y evaluar este trabajo, por sus consejos y recomendaciones para el mejoramiento del mismo.*

*A mi familia por el apoyo y confianza que siempre me han mostrado, especialmente mis padres.*

*A CONACyT por la beca otorgada, que me permitió llevar a cabo mis estudios de maestría.*

*A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) y la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) por darme la oportunidad de hacer mis estudios de maestría.*



# Resumen

En este trabajo de tesis se realiza un análisis de los efectos que producen los fenómenos de absorción y esparcimiento en la intensidad de una onda electromagnética después de que la onda interacciona con los átomos de un medio, estos fenómenos pueden considerarse como pérdidas en la energía de la onda electromagnética, por lo que se analiza bajo qué condiciones el esparcimiento tiene relevancia en la propagación de la luz en un medio.

La absorción de la luz es un fenómeno que se da cuando la luz entra en contacto con la materia, el cual se puede ver como la captación de una fracción de la energía de la onda electromagnética por parte del material, transformando dicha energía en otro tipo de energía como la térmica o en movimiento interatómico o molecular, por lo que al atravesar dicho medio la intensidad de la luz se habrá reducido.

El esparcimiento es otro de los fenómenos que se observan en las interacciones de la luz con la materia, este puede ser descrito como el cambio de la dirección de propagación de una fracción de la luz de un haz que incide en un medio no homogéneo, como resultado de este efecto el haz a la salida del material habrá reducido su intensidad. Existen dos tipos de esparcimiento, el primero se denomina *esparcimiento de Rayleigh* y se da cuando un haz de luz interacciona con partículas de tamaño mucho menor a la longitud de onda de dicho haz con la característica de que la distribución de la luz esparcida es igual hacia al frente y hacia atrás de la dirección de propagación del haz además de que depende de la longitud de onda en gran medida. El otro esparcimiento es el descrito por la *teoría de Mie* y que se da cuando la interacción de la luz es con partículas mucho mayores a la longitud de onda. La particularidad de éste es que depende del tamaño y forma de las partículas y se distribuye mayormente en la dirección frontal.

El análisis del esparcimiento se realiza de manera experimental y numérico. De los resultados experimentales se observa que la luz esparcida es prácticamente en la dirección frontal en un cono de luz de ángulo menor a  $4^\circ$  muy cerca del eje de propagación. En la parte numérica se obtuvo la distribución del esparcimiento para partículas mayores a la longitud de onda considerando concentraciones de partículas muy bajas. Se analiza la distribución obtenida para partículas de  $5 \mu m$  de radio ya que es la que más se asemeja a los resultados experimentales y se le realiza un ajuste con una función Gaussiana para poder determinar, mediante integración, la energía esparcida dentro de la región paraxial para una abertura con un radio entre  $0.5$  y  $2.5 mm$  que son las comúnmente usadas en la técnica de barrido en  $Z$ , a una distancia de un metro de la muestra. Para determinar la cantidad o porcentaje de intensidad que atraviesa la muestra se recurre a la ley de Beer, donde el coeficiente de extinción ( $\alpha_{ext}$ ) está dado por la suma de los coeficientes de absorción ( $\alpha_a$ ) y esparcimiento ( $\alpha_s$ ), el primero obtenido de forma experimental y el segundo de manera numérica. Se calculan en forma numérica curvas de barrido en  $Z$  considerando un cambio de fase no lineal y los fenómenos de absorción y esparcimiento en el campo de salida, bajo estas mismas condiciones para el haz de salida se determina el patrón de difracción a campo lejano basado en el paso dividido de Fourier.



# Introducción

Al igual que todas las demás ciencias la óptica evolucionó lenta y de forma progresiva hasta llegar a ser lo que es hoy en día, dando un mejor entendimiento de los fenómenos físicos que involucran la luz, denominados fenómenos ópticos. Existen diferentes ramas de la óptica como la óptica geométrica, la óptica física, la óptica no lineal o la óptica cuántica. Cada una de ellas se encarga de describir o explicar diferentes fenómenos ópticos que ocurren en la naturaleza o de explicarlos con un enfoque diferente o más moderno. La óptica geométrica, conocida también como óptica de rayos, considera que la propagación de la luz se da en forma de rayo asumiendo que su longitud de onda es cero [1]. En el ámbito de la óptica física se describe a la luz como una onda electromagnética, formada por campos eléctricos y magnéticos que interactúan entre sí, para dar explicación a los fenómenos que con la óptica geométrica no pueden ser explicados, por ejemplo, la difracción, la interferencia o el esparcimiento de la luz. La óptica no lineal, estudia los fenómenos donde la luz al propagarse en un medio modifica las propiedades de éste [2], como la absorción o el índice de refracción debido a la interacción de campos muy intensos con la materia. Por otro lado, en la óptica cuántica, se dice que la luz está compuesta por pequeñas partículas, cuantos de luz denominados fotones. Esta nueva interpretación de la luz fue introducida por Max Planck en sus estudios de la radiación de cuerpo negro, en los que establecía que la interacción de la luz con la materia era de forma cuantizada, en pequeños paquetes de energía[3].

Los fenómenos que surgen de la propagación de la luz en un medio, denominados absorción y esparcimiento, son de particular interés en este trabajo de tesis que serán abordados desde el marco de la óptica física o desde el punto de vista clásico, principalmente. El esparcimiento de la luz se da cuando una onda electromagnética se propaga en un medio como el aire, compuesto de diferentes moléculas (nitrógeno, oxígeno, entre otros), cada una de las moléculas se comporta como un oscilador armónico haciendo que las cargas eléctricas oscilen con la onda electromagnética incidente formando dipolos oscilantes los cuales realizan la reemisión de la luz con la misma frecuencia de la onda entrante, en este caso se dice que la luz se esparce elásticamente. En el entorno atómico denso de gases, sólidos y líquidos normales es muy probable que la energía de excitación por parte de la onda electromagnética se transfiera rápidamente al movimiento atómico aleatorio, por colisiones, en energía térmica antes de que pueda ser radiada en forma de luz. Este proceso de conversión de energía luminosa en energía térmica se le denomina absorción disipativa [4].

Lord Rayleigh (1871) analizó el esparcimiento de la luz solar tomando como referencia los osciladores moleculares para explicar el azul del cielo y llegó a la conclusión de que la luz esparcida es proporcional a  $1/\lambda^4$  siendo las propias moléculas del aire responsables del fenómeno. Por ejemplo la luz azul con longitud de onda de 450 nm es esparcida más intensamente que la luz roja con longitud de onda de 670 nm por una razón de  $(670/450)^4$  o de aproximadamente 5 a 1 [5]. El fenómeno que implica la modificación de la trayectoria de la luz al interactuar con partículas de tamaño mucho menor a una longitud de onda se conoce como esparcimiento de Rayleigh [6, 7].

Cuando el tamaño de la partícula es mayor con respecto a la longitud de onda, la teoría de Rayleigh ya no es aplicable, para estos casos existe la teoría de Mie. En 1908, Gustav Mie, profesor alemán de física, publicó por primera vez el análisis teórico del esparcimiento que tiene lugar por la acción de partículas esféricas de tamaño mayor a la longitud de onda de la luz incidente [8]. En el esparcimiento de Mie la

teoría exige que los dispersores sean casi esféricos. A diferencia de lo que sucede con el esparcimiento de Rayleigh, el de Mie es más intenso en la dirección frontal que hacia atrás.

Algunas de las aplicaciones para estos tipos de esparcimiento son: en la determinación de partículas de virus [9], para modelar el esparcimiento por las fibras de colágeno en la piel neonatal [10] y evaluar la atenuación de la luz en las fibras ópticas y caracterizar el transporte de la luz a través del agua turbia [11].

En este trabajo de tesis se realiza el análisis de los efectos producidos por los fenómenos de la absorción y el esparcimiento de luz al atravesar un medio, para determinar en que medida la intensidad se ve afectada a la salida de un material de algún espesor y bajo qué condiciones el fenómeno de esparcimiento tiene relevancia en la propagación de haces paraxiales, como los haces Gaussianos producidos por una fuente de luz láser, después de propagarse en un medio que presenta absorción y esparcimiento. De manera teórica representar estas pérdidas de energía mediante el uso de un índice de refracción complejo, siendo la parte imaginaria de éste, el factor que determina la atenuación de la onda a la salida del medio. Con la finalidad de que posteriormente estos resultados puedan ser aplicados en experimentos donde se usa la técnica de *barrido en Z* (Z-scan) para la medición de cambios no lineales en el índice de refracción y el coeficiente de absorción[12] o para la observación, análisis o modelación de los efectos no lineales como la auto-modulación espacial de fase de un haz Gaussiano[13].

En el primer capítulo se introducen algunos de los conceptos fundamentales necesarios para el entendimiento de la propagación de un haz paraxial en el espacio libre, partiendo de las ecuaciones de Maxwell en su forma más general y se hace la derivación de la ecuación de onda restringida al vacío, que al considerar soluciones armónicas en el tiempo, se llega a la ecuación paraxial de Helmholtz. Se da una breve introducción de los haces Gaussianos como una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz y el fenómeno de difracción de la luz. En el capítulo 2 se introducen los fenómenos de absorción y esparcimiento asociados a pérdidas de energía de la luz al propagarse en un medio, dándoles un enfoque clásico, ya que para describirlos se hace uso del modelo del oscilador electrónico de Lorentz. En el caso del esparcimiento de la luz, se considera el esparcimiento de Rayleigh para partículas mucho menores a la longitud de onda y esparcimiento de Mie para el caso en que las partículas con las que interactúa la luz son mayores a la longitud de onda. En el 3 se realiza un análisis experimental y numérico del esparcimiento de Mie para diferentes tamaños de partículas esféricas para poder obtener una aproximación de la energía que se pierde por esparcimiento. Se obtienen curvas de barrido en *Z* considerando un cambio de fase no lineal y los fenómenos de absorción y esparcimiento en el campo de salida, bajo estas condiciones se realizó la propagación a campo lejano mediante el paso dividido de Fourier para la observación del patrón de intensidad en el cual se pudo observar el efecto de auto-modulación espacial de fase debido a los efectos no lineales. Por último se hacen las conclusiones del análisis realizado de los fenómenos de absorción y esparcimiento de la luz, esto en el capítulo 4.

# Capítulo 1

## Conceptos Fundamentales

### 1.1. Ecuaciones de Maxwell

En 1865, el físico escocés James Clerk Maxwell formuló la teoría clásica del electromagnetismo deduciendo así que la luz está compuesta de campos eléctricos y magnéticos que se propagan por el espacio, teoría que llevó a la predicción de la existencia de las ondas electromagnéticas y la teoría electromagnética de la luz, publicado en el artículo titulado “Una teoría dinámica del campo electromagnético” (A dynamical theory of the electromagnetic field) que contenía las ecuaciones de Maxwell[14].

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial están dadas de la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (1.1)$$

Es la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico con  $\rho$  la densidad volumétrica de carga en el material.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.2)$$

Se conoce como la ley de Gauss para el campo magnético.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Es la ley de inducción de Faraday.

Y

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Denominada ley de Ampere. Donde

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M} \quad \text{y} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.5)$$

Representan las relaciones constitutivas: el desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{D}$ , es el resultado de la superposición del campo eléctrico incidente en el vacío y la polarización del material  $\mathbf{P}$ ; el campo magnético,  $\mathbf{H}$ , está dado por las contribuciones de la inducción magnética  $\mathbf{B}$  y la magnetización  $\mathbf{M}$  del material;  $\mathbf{J}$  representa la densidad de corriente dada en términos del campo eléctrico y la conductividad del material  $\sigma$ .

## 1.2. Ecuación de Onda

Considerando las ecuaciones de Maxwell en el vacío, es decir que no hay polarización ni magnetización y las densidades de corriente y carga son nulas, se puede deducir la ecuación de onda para los campos eléctrico y magnético respectivamente de la forma siguiente

$$\nabla^2 \mathbf{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

Donde  $\mathbf{U}$  representa cualquier de las componentes de la onda electromagnética ( $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{B}$ ), aunque por lo general se trabaja sólo con la componente eléctrica además de que su magnitud es mucho mayor en comparación con la magnitud de la componente magnética.  $c$  es la velocidad con la que se propagan las ondas electromagnéticas en el vacío.

Una solución a la ecuación de onda (1.6) es una función armónica en el tiempo dada por:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r})) \exp(i\omega t), \quad (1.7)$$

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t), \quad (1.8)$$

conocida como función de onda compleja. Donde  $U(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r}))$  es la amplitud compleja de la onda,  $\phi(\mathbf{r})$  es la fase espacial y  $\omega$  es la frecuencia angular.

Considerando una función de onda compleja armónica en el tiempo como la ecuación (1.8) y sustituyendo en la ecuación de onda (1.6) se puede obtener una expresión para la amplitud compleja  $U(\mathbf{r})$  de la forma:

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.9)$$

denominada **ecuación de Helmholtz**, donde  $k$  es el número de onda dado por

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.10)$$

Considere ahora una función de onda propagándose en la dirección  $z$  con amplitud compleja de la forma

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-ikz). \quad (1.11)$$

La variación de la envolvente compleja  $A(\mathbf{r})$  con la posición debe ser muy pequeña para una propagación de una distancia del orden de una longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$ .

Sustituyendo la amplitud compleja (1.11) en la ecuación de Helmholtz (1.9), se reduce a:

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (1.12)$$

La dependencia en  $z$  de la envolvente compleja es causada básicamente por los efectos de la difracción, entonces en general su variación en  $z$  será lenta, así como también las variaciones transversales debido al ancho finito del haz. Esta variación lenta de  $A(\mathbf{r})$  con respecto a  $z$  puede ser expresada matemáticamente por la *aproximación paraxial* [15]:

$$\left| \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \quad \text{ó} \quad \left| \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right| \quad \text{ó} \quad \left| \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right|. \quad (1.13)$$

Es decir, que la magnitud del cambio en la variación de  $z$  es mucho menor incluso que la magnitud del cambio en la dirección  $x$  o  $y$ .

Por lo tanto, despreciando la segunda parcial con respecto a  $z$  en la ecuación (1.12), se tiene que:

$$\nabla_T^2 A(\mathbf{r}) - i2k \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (1.14)$$

Esta última es conocida como **ecuación paraxial de Helmholtz**.  $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es el operador diferencial Laplaciano transversal en coordenadas cartesianas. La ecuación (1.14) es la aproximación de envolvente lentamente variable de la ecuación de Helmholtz. Una solución analítica importante a esta ecuación son los haces con una distribución transversal de intensidad Gaussiana, denominados haces Gaussianos.

### 1.3. Haces Gaussianos

En esta sección se introduce una solución analítica importante a la ecuación paraxial de Helmholtz, ésta solución se conoce como función de onda Gaussiana o simplemente haz Gaussiano.

Considere una envolvente compleja  $A(\mathbf{r})$  de la siguiente forma [16]:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp \left[ -ik \frac{\rho^2}{2q(z)} \right]. \quad (1.15)$$

Donde  $q(z) = z + iz_0$  es una función compleja y  $z_0$  es una constante real, mejor conocida como **distancia de Rayleigh** y  $\mathbf{r} = (\rho, z)$ .

Primero se debe separar la función compleja  $1/q(z) = 1/(z + iz_0)$  en su respectiva parte real y parte imaginaria para obtener la amplitud y la fase de la envolvente compleja por separado, esto de la forma:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}, \quad (1.16)$$

donde  $W(z)$  y  $R(z)$  son los parámetros del haz, ancho y radio de curvatura del frente de onda, respectivamente. Entonces sustituyendo (1.16) en (1.15) y haciendo uso de la ecuación (1.11), la amplitud compleja de un haz Gaussiano es:

$$U_G(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[ -\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \exp \left[ -ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right]. \quad (1.17)$$

Donde  $A_0 = A_1/iz_0$  es una constante y todos los demás parámetros están relacionados con la distancia de Rayleigh  $z_0$  y la longitud de onda  $\lambda$  dados a continuación:

- » El ancho del haz,  $W(z)$ , determina el radio de la sección transversal del haz para cualquier  $z$ . En  $z = 0$ , se obtiene la cintura del haz,  $W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$ , el valor mínimo que  $W(z)$  puede alcanzar y donde los frentes de onda son prácticamente planos. En la distancia de Rayleigh el ancho del haz tiene el valor de  $W(z_0) = \sqrt{2}W_0$ , posición en la que el área transversal se duplica,  $A = 2A_0$ , con  $A_0$  el área en  $z = 0$  de radio  $W_0$ . Y se define de la siguiente manera:

$$W(z) = W_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.18)$$

- » El radio de curvatura del frente de onda  $R(z)$ , es la medida de la curvatura de los frentes de onda para cualquier  $z$ , en la distancia de Rayleigh  $R(z_0) = 2z_0$ , se obtiene la máxima curvatura de los frentes de onda. Se define como:

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]. \quad (1.19)$$

- »  $\zeta(z)$  es un factor de fase conocido como **efecto Guoy** y representa un retraso de la fase en los frentes de onda del haz Gaussiano que va de  $-\pi/2$  en  $z = -\infty$  a  $\pi/2$  en  $z = \infty$ , con respecto al frente de una onda plana o de una onda esférica en la misma posición y está definida de la forma [16]:

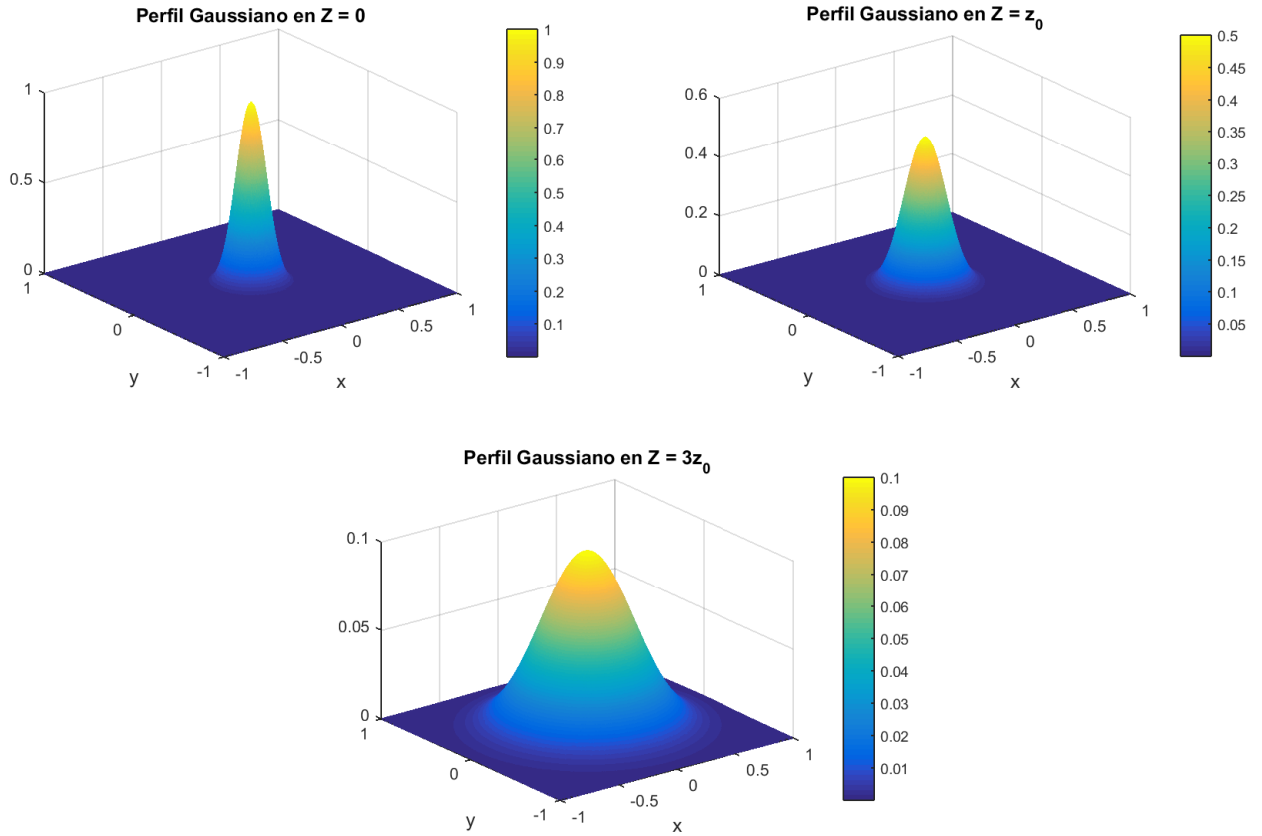
$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (1.20)$$

La distribución de intensidad de un haz Gaussiano en cualquier plano transversal es una función Gaussiana con simetría circular centrada alrededor del eje del haz. El ancho de esta función es mínimo en la cintura del haz y va creciendo de manera gradual conforme  $z$  crece. Sus frentes de onda son aproximadamente planos cerca de la cintura, pero se van curvando de forma suave y se transforman en esféricos lejos de la cintura del haz.

La intensidad óptica  $I(\rho, z) = |U(\rho, z)|^2$  de los haces Gaussianos es:

$$I(\rho, z) = I_0 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right]. \quad (1.21)$$

Esta expresión analítica nos da la distribución transversal de intensidad de los haces Gaussianos para cualquier posición en la dirección de propagación  $z$ .



*Figura 1.1: Resultados analíticos del perfil transversal de intensidad obtenidos a partir de la ecuación (1.21) para las posiciones  $z = 0$ ,  $z_0$  y  $3z_0$ .*

Como se puede observar en las gráficas de la figura 1.1, el perfil de intensidad de los haces Gaussianos reduce su máximo y el ancho del haz crece al propagarse. Esto es debido a un fenómeno denominado *difracción* que se presenta en la propagación de las ondas al encontrar un obstáculo, al atravesar una rendija o simplemente cuando una onda de luz se propaga en el espacio libre o en un medio homogéneo. Estos perfiles de intensidad también se denominan patrones de difracción.

## 1.4. Difracción de ondas electromagnéticas

Una de las consecuencias que tiene la naturaleza ondulatoria de la luz es que algunos experimentos no pueden ser explicados mediante el uso de la óptica de rayos (óptica geométrica) como lo es el fenómeno de *difracción*, el cual tiene un papel muy importante en la propagación de ondas y que se

**CAPÍTULO 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES**  
**1.4. DIFRACCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS**

---

presenta en la desviación de las ondas al encontrar un obstáculo o al atravesar una rendija. También ocurre cuando una onda de luz confinada a un espacio finito se propaga, como en el caso de las fuentes de luz láser [15]. Christian Huygens, en 1678, postuló que cada punto sobre un frente de onda de luz puede considerarse como una fuente de ondas secundarias esféricas. El frente de onda en un instante después puede considerarse como la envolvente de las ondas secundarias. Más adelante Augustin Jean Fresnel pudo explicar la difracción al complementar la construcción de Huygens con el postulado de que las ondas secundarias interfieren entre sí. Fresnel pudo calcular la distribución de la luz en patrones de difracción con excelente precisión. Posteriormente, la descripción matemática fue perfeccionada por Kirchhoff, Rayleigh and Sommerfield [17].

Después de que en 1860 Maxwell identificara a la luz como una onda electromagnética, Gustav Kirchhoff en 1887 puso las ideas de Huygens y Fresnel en una base matemática más firme que le permitió desarrollar la teoría de la difracción. Kirchhoff basó su formulación matemática en dos suposiciones sobre los valores del haz incidente en la frontera de la superficie del obstáculo colocado en el camino de la propagación de la luz. Para obtener la fórmula de difracción de Kirchhoff es necesario primero obtener el teorema integral de Kirchhoff.

Considere una onda de amplitud  $U(\mathbf{r})$  que satisface la ecuación de Helmholtz (1.9). Para calcular la perturbación de  $U(\mathbf{r})$  en un punto  $P$  del espacio se puede hacer mediante del teorema de Green dado por:

$$\iiint_v (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U) dv = - \iint_S \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (1.22)$$

Dónde  $v$  es un volumen encerrado por una superficie  $S$  que contiene a  $P$ . La  $\partial/\partial n$  representa la diferenciación a lo largo de la normal de la superficie  $S$ .  $V$  es una función que cumple con las condiciones de  $U(\mathbf{r})$ , es decir satisface la ecuación de Helmholtz (1.9). Considerando esto, la parte izquierda de la ecuación (1.22) se hace cero por lo que se tiene que

$$\iint_S \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (1.23)$$

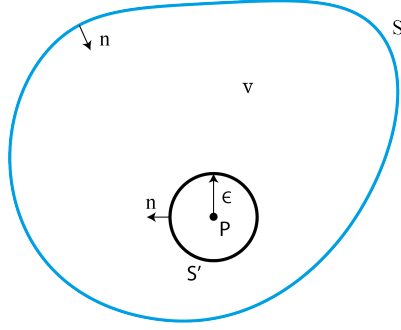
Ahora, se considera a  $V$  como una función de onda esférica de amplitud unitaria que se expande del punto  $P$  dada por

$$V(r) = \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (1.24)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.23), se tiene

$$\iint_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) - \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = 0. \quad (1.25)$$

Como el teorema de Green no considera singularidades ( $r = 0$ ) dentro de la superficie  $S$ , se requiere construir una pequeña superficie esférica  $S'$  de radio  $\epsilon$  centrada en  $P$  como se muestra en la figura 1.2. La integral (1.25) ahora se extiende sobre las superficies  $S$  y  $S'$  de la forma



*Figura 1.2: Superficie de integración para el teorema de Green.*

$$\iint_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) - \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = - \iint_{S'} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) - \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS \quad (1.26)$$

Como en  $S'$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &= \frac{\exp(ikr)}{r} \left( ik - \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Para un punto  $P_1$  en la superficie  $S'$   $r = \epsilon$  por lo que la función  $V$  y la  $\partial V/\partial n$  en ese punto son

$$\frac{\partial V(P_1)}{\partial n} = \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \left( ik - \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (1.28)$$

y

$$V(P_1) = \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon}. \quad (1.29)$$

Sustituyendo del lado derecho de la ecuación (1.26) con  $dS = \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi$  se tiene

$$- \iint_{S'} \left( \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \right) \left[ U \left( ik - \frac{1}{\epsilon} \right) - \frac{\partial U}{\partial n} \right] \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (1.30)$$

Aplicando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , es decir en  $P$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -4\pi \left( \frac{\exp(ik\epsilon)}{\epsilon} \right) \left[ U(P) \left( ik - \frac{1}{\epsilon} \right) - \frac{\partial U(P)}{\partial n} \right] \epsilon^2 = 4\pi U(P). \quad (1.31)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.26), se obtiene la expresión para la perturbación de  $U$  en el punto  $P$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) - \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS. \quad (1.32)$$

Este resultado es conocido como *teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff*. Es importante para el desarrollo de la teoría escalar de difracción por lo que será aplicado para determinar la fórmula de difracción de Kirchhoff.

Considere una fuente puntual en  $P_0$  de ondas esféricas que se propagan por una abertura en un plano opaco y del otro lado un punto  $P$  dónde se quiere determinar el campo, tomando en cuenta que las dimensiones de la abertura son más grandes que la longitud de onda, pero más pequeñas que las distancias de separación entre el plano y los puntos  $P_0$  y  $P$ . Se construye una superficie  $S$  al rededor de  $P$  como en la figura (1.3) y se aplicará el teorema integral de Kirchhoff, dónde  $S = A + B + C$  con  $A$  la superficie de la abertura,  $B$  es una porción de la superficie junto al plano obstruida por el mismo y  $C$  es la porción de una esfera de radio  $R$  centrada en el punto  $P$ .

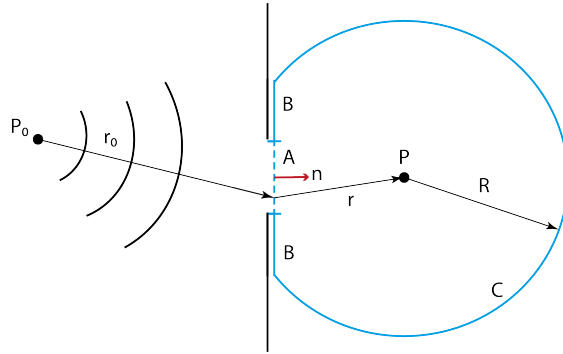


Figura 1.3: Diagrama para la derivación de la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff. Con  $P_0$  la fuente de ondas esféricas y  $P$  el punto de observación.

Aplicando la expresión (1.32), se tiene

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_A + \iint_B + \iint_C \right\} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) - \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS. \quad (1.33)$$

En la superficie  $C$ , se tiene que

$$V(R) = \frac{\exp(ikR)}{R} \quad (1.34)$$

y

$$\frac{\partial V(R)}{\partial n} = \frac{\exp(ikR)}{R} \left( ik - \frac{1}{R} \right) \approx ikV(R). \quad (1.35)$$

Dónde la aproximación está dada para un  $R$  grande. La integral sobre la superficie  $C$  se reduce a

$$\iint_C \left[ U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = \iint_C V \left[ ikU - \frac{\partial U}{\partial n} \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (1.36)$$

Ahora, como la cantidad  $RV$  es finita cuando  $R \rightarrow \infty$ , para que la integral se anule se debe cumplir que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( ikU - \frac{\partial U}{\partial n} \right) = 0. \quad (1.37)$$

Llamada *condición de radiación de Sommerfeld* y se satisface si  $U \rightarrow 0$  tan rápido como  $1/R$  y ya que la onda que llega a la abertura es una onda esférica, entonces se puede esperar que la integral sobre la superficie  $C$  no contribuya a la perturbación en  $P$ . La ecuación (1.33) se reduce a

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_A + \iint_B \right\} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) - \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS. \quad (1.38)$$

Dado que el plano es opaco excepto en  $A$ , quiere decir que la contribución a la perturbación de  $U$  en  $P$  estará dada por la superficie en  $A$ . Considere las siguientes suposiciones para la onda incidente  $U$ .

1. En la superficie  $A$ , los valores de la distribución  $U$  y su derivada  $\partial U/\partial n$  son similares a los valores que tendrían en la ausencia del plano.

$$U = U_i, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U_i}{\partial n}, \quad (1.39)$$

donde

$$U_i = \frac{A_0 \exp(ikr_0)}{r_0}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial n} = \frac{A_0 \exp(ikr_0)}{r_0} \left( ik - \frac{1}{r_0} \right) \cos(n, r_0). \quad (1.40)$$

Con  $U_i$  la onda incidente proveniente de  $P_0$  evaluada en la superficie  $A$ .

2. En la superficie  $B$ , los valores de  $U$  y su derivada  $\partial U/\partial n$  son nulos.

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0. \quad (1.41)$$

Las expresiones (1.39) y (1.41) se denominan *condiciones de frontera de Kirchhoff*. Estas condiciones son válidas bajo ciertas restricciones, ya que no se consideran los efectos a lo largo del borde de la abertura además de que la sombra que genera la pantalla detrás de la región  $B$  no

**CAPÍTULO 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES**  
**1.4. DIFRACCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS**

---

es perfecta. Si se considera que las dimensiones de la abertura son mucho más grandes que la longitud de onda, entonces estas condiciones son una muy buena aproximación para simplificar el problema.

Ahora considere que la distancia  $r \gg \lambda$ , entonces la derivada de la función  $V$  sobre la superficie  $A$  está dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\exp(ikr)}{r} \left( ik - \frac{1}{r} \right) \approx ik \frac{\exp(ikr)}{r} \cos(n, r). \quad (1.42)$$

Aplicando la misma condición de que  $r_0 \gg \lambda$  a la derivada de  $U$  en la expresión (1.39), se reduce a

$$\frac{\partial U}{\partial n} \approx \frac{A_0 \exp(ikr_0)}{r_0} ik \cos(n, r_0). \quad (1.43)$$

Entonces, considerando las condiciones de frontera de Kirchhoff, las aproximaciones (1.42) y (1.43) con  $k = 2\pi/\lambda$  en la expresión (1.38), se obtiene que

$$U(P) = \frac{iA_0}{\lambda} \iint_A \frac{\exp[ik(r_0 + r)]}{r_0 r} \left[ \frac{\cos(n, r) - \cos(n, r_0)}{2} \right] dS. \quad (1.44)$$

Conocida como *fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff*. Esta expresión se puede escribir en la forma

$$U(P) = \iint_A G(r_0) \frac{\exp(ikr)}{r} dS. \quad (1.45)$$

Donde

$$G(r_0) = U(r_0)C(r_0), \quad (1.46)$$

con

$$U(r_0) = \frac{A_0 \exp(ikr_0)}{r_0} \quad \text{y} \quad C(r_0) = \frac{i}{\lambda} \left[ \frac{\cos(n, r) - \cos(n, r_0)}{2} \right]. \quad (1.47)$$

La expresión (1.45) se puede interpretar como que el campo en el punto  $P$  es debido a una superposición de un número infinito de fuentes puntuales secundarias de Huygens situadas en la abertura  $A$  radiando ondas esféricas de la forma

$$G(r_0) \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (1.48)$$

Con amplitud  $U(r_0)$  y factor de oblicuidad  $C(r_0)$  dados por (1.47). El factor de oblicuidad hace que la amplitud de la luz incidente y transmitida disminuya a medida que aumenta el ángulo de visión. La constante  $i$  involucra un cambio de fase de las ondas secundarias con respecto a la onda incidente [1]. Si la distancia de los puntos  $P_0$  y  $P$  respecto al plano de la abertura son grandes en comparación con las dimensiones de la abertura, entonces el factor de oblicuidad se puede aproximar de la siguiente forma:

**CAPÍTULO 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES**  
**1.4. DIFRACCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS**

---

$$C(r_0) \approx \frac{i}{\lambda} \cos \theta. \quad (1.49)$$

Ya que los ángulos de  $n$  con  $r$  y  $r_0$  en cada punto de la superficie  $A$  no variarán mucho, el factor  $[\cos(n, r) - \cos(n, r_0)]$  se puede remplazar por  $\cos \theta$  con  $\theta$  el ángulo entre la normal y la línea que une los puntos  $P$  y  $P_0$ .

Considere un plano con una abertura de superficie  $A$  en el plano  $xy$  (plano de entrada) iluminada por una onda. En un segundo plano  $x_1y_1$  a una distancia  $z$  del plano  $xy$  se encuentra el punto  $P$  sobre el plano  $x_1y_1$  (plano de salida), ver figura 1.4. El efecto total en el punto  $P$  es la superposición de todas las ondas esféricas generadas por cada punto en el orificio y está dado por la integral de difracción de Fresnel-Kirchhoff (1.45) con  $C(r_0)$  dado por (1.49)

$$U(x_1, y_1, z) = \frac{i}{\lambda} \iint_A U(x, y) \cos(\theta) \frac{\exp(-ikr)}{r} dS. \quad (1.50)$$

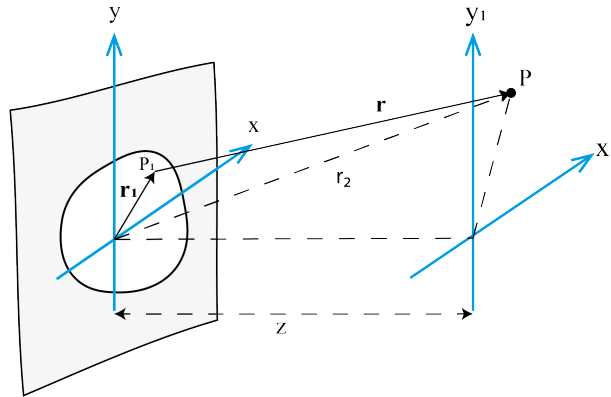


Figura 1.4: Relación de los puntos del plano  $xy$  (plano de entrada) con los puntos del plano  $x_1y_1$  (plano de salida).

Ya que el  $\cos \theta = z/r$ , la expresión (1.50) se transforma en

$$U(x_1, y_1, z) = \frac{iz}{\lambda} \iint_A U(x, y) \frac{\exp(ikr)}{r^2} dS. \quad (1.51)$$

Considerando la figura 1.4, la magnitud del vector  $\mathbf{r}$ , esta dada por

$$r = \left[ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 \right]^{1/2}. \quad (1.52)$$

$\Rightarrow$

$$r = z + \left[ 1 + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{z^2} \right]^{1/2}. \quad (1.53)$$

Aplicando la expansión binomial, la expresión para  $r$  se puede aproximar a

$$r \approx z + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2z}. \quad (1.54)$$

Los términos de más alto orden han sido despreciados al considerar que  $z \gg |x - x_1|, |y - y_1|$ . Sustituyendo (1.54) en la ecuación (1.51), se obtiene la siguiente expresión para la onda en el plano  $x_1 y_1$

$$U(x_1, y_1, z) = \frac{i}{\lambda z} \iint U(x, y) \exp(ikz) \exp \left[ ik \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2z} \right] dx dy. \quad (1.55)$$

Esta última expresión se denomina *integral de difracción de Fresnel*. Una forma de ver este resultado es como una integral de convolución. Considerando al espacio libre como un sistema lineal, la propagación de la onda se puede calcular convolucionando la onda  $U(x, y)$  con la respuesta al impulso del espacio libre dado por

$$h(x, y) = \frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp \left[ ik \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2z} \right]. \quad (1.56)$$

Que nos dice como responde el sistema (en este caso el espacio libre) al propagarse una onda esférica. Otra forma de expresar la integral de Fresnel es la siguiente

$$U(x_1, y_1, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp \left[ ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z} \right] \iint U(x, y) \exp \left[ ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right] \exp \left[ -ik \frac{xx_1 + yy_1}{z} \right] dx dy. \quad (1.57)$$

Cuando esta aproximación es válida, se dice que el punto de observación se encuentra en la *región de difracción de Fresnel* o también se denomina *difracción a campo cercano* debido a que el término  $x_1^2 + y_1^2$  no se puede despreciar, es decir el punto de observación se encuentra cerca de la abertura.

Por otro lado, si el plano de salida está lejos del plano de entrada, el argumento

$$ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (1.58)$$

se puede despreciar si se cumple que

$$\frac{x^2 + y^2}{2\lambda z} \ll 2\pi. \quad (1.59)$$

Entonces, la expresión (1.57) se reduce a

$$U(x_1, y_1, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp \left[ ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z} \right] \iint U(x, y) \exp \left[ -ik \frac{xx_1 + yy_1}{z} \right] dx dy. \quad (1.60)$$

Cuando esta aproximación se cumple, se dice que el punto de observación se encuentra en la **región de difracción de Fraunhofer** o de forma equivalente *difracción a campo lejano*. Ahora, si se define a

$$k_x = \frac{2\pi x_1}{\lambda z} \quad k_y = \frac{2\pi y_1}{\lambda z}. \quad (1.61)$$

Y se sustituye en (1.60) se tiene la difracción de Fraunhofer de la forma

$$U(k_x, k_y, z) = \frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp \left[ ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z} \right] \iint U(x, y) \exp [-i(xk_x + yk_y)] dx dy. \quad (1.62)$$

En esta expresión se puede observar que la parte integral de la difracción de Fraunhofer para el campo  $U(x, y)$  es similar a la transformada de Fourier bi-dimensional, es decir que el campo en el plano de salida se puede encontrar directamente aplicando la transformada de Fourier al campo en el plano de entrada[17].

La Óptica de Fourier proporciona una descripción de la propagación de la luz mediante el análisis armónico (transformada de Fourier) y sistemas lineales. El análisis armónico se basa en la expansión de una función arbitraria  $f(t)$  como una superposición de funciones armónicas en el tiempo con diferentes frecuencias. Si la respuesta del sistema a cada función armónica es conocida, la respuesta a una función arbitraria en la entrada es fácilmente determinada mediante el uso de la transformada de Fourier en la entrada y la superposición en la salida [18].

En el caso de una función  $U(x, y)$  con variables  $x$  y  $y$  que representan las coordenadas espaciales en el plano  $xy$  también se puede poner como una superposición de funciones armónicas de la forma:  $F(k_x, k_y) \exp[-i(k_x x + k_y y)]$ , donde  $k_x$  y  $k_y$  son las frecuencias angulares espaciales.  $F(k_x, k_y)$  es llamada la transformada de Fourier de  $U(x, y)$  [19]. A continuación se muestra la transformada de Fourier bidimensional en el espacio:

$$\begin{aligned} F(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp(ik_x x + ik_y y) dx dy \\ &= \mathcal{F}_{xy}\{U(x, y)\}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Y la transformada inversa de Fourier es:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \exp(-ik_x x - ik_y y) dk_x dk_y \\ &= \mathcal{F}_{xy}^{-1}\{F(k_x, k_y)\}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

**CAPÍTULO 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES**  
**1.4. DIFRACCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS**

---

donde  $k_x = \nu_x 2\pi$  y  $k_y = \nu_y 2\pi$ .

Estas expresiones serán de gran uso para determinar la *función de transferencia del espacio libre* necesaria en la propagación de ondas, para esto considere una función de onda de la forma:

$$u(x, y, z; t) = U(x, y, z) \exp(-i\omega t). \quad (1.65)$$

Se sustituye en la ecuación de onda (1.6) en coordenadas rectangulares y se obtiene la ecuación de Helmholtz para  $U(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0. \quad (1.66)$$

Ahora aplicamos la transformada de Fourier para obtener:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + k^2 \left( 1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2} \right) F = 0, \quad (1.67)$$

donde  $F$  es la transformada de Fourier de  $U$ . Resolviendo la ecuación se tiene:

$$F(k_x, k_y; z) = F_0(k_x, k_y) \exp \left[ -ikz \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}} \right], \quad (1.68)$$

con

$$F_0(k_x, k_y) = F(k_x, k_y; z = 0) = \mathcal{F}_{xy} \{U(x, y; z = 0)\} = \mathcal{F}_{xy} \{U_0(x, y)\}, \quad (1.69)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{F(k_x, k_y; z)}{F_0(k_x, k_y)} &= \mathcal{H}(k_x, k_y; z) \\ &= \exp \left[ -ikz \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Con  $\mathcal{H}(k_x, k_y; z)$  la *función de transferencia*.

Si consideramos que  $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$ , lo que significa que las componentes  $x$  y  $y$  del vector de propagación de la onda son relativamente pequeñas, entonces la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{F(k_x, k_y; z)}{F_0(k_x, k_y)} &= \mathcal{H}(k_x, k_y; z) \\ &= \exp \left[ -ikz \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}} \right] \\ &\simeq \exp(-ikz) \exp \left[ \frac{iz(k_x^2 + k_y^2)}{2k} \right] \\ &= H(k_x, k_y; z). \end{aligned} \quad (1.71)$$

$H(k_x, k_y; z)$  es la aproximación paraxial de la función de transferencia  $\mathcal{H}(k_x, k_y; z)$ .

Un sistema lineal puede estar caracterizado en el dominio espacial por su *función de respuesta al impulso* o en el dominio de Fourier mediante su *función de transferencia*, donde la función de transferencia es la transformada de Fourier de la función de respuesta al impulso[19].

La función de transferencia  $H(k_x, k_y)$  es un factor que multiplicado por una función armónica de entrada con frecuencias  $\nu_x = k_x/2\pi$  y  $\nu_y = k_y/2\pi$  produce a la salida una función armónica.

$$H(k_x, k_y; z) = \exp(-ik_0z) \exp\left(\frac{i(k_x^2 + k_y^2)z}{2k_0}\right), \quad (1.72)$$

es la función de transferencia en el espacio libre [18].

## 1.5. Óptica no lineal

### 1.5.1. Auto-enfocamiento y auto-desenfocamiento

La óptica no lineal es una rama de la óptica que se enfoca en el estudio de los fenómenos que ocurren como consecuencia de la modificación de las propiedades ópticas de un material por la presencia de luz. El comienzo de la óptica no lineal a menudo se considera a partir del descubrimiento de la generación del segundo armónico en 1961 por Franken et al, después de que Maiman en 1960 pusiera en funcionamiento el primer láser. ya que normalmente, solo la luz láser es lo suficientemente intensa como para modificar las propiedades ópticas de un material.[2]

En un medio óptico no lineal, la propagación de la luz depende de su índice de refracción el cual puede representarse como:

$$n = n_0 + \Delta n(I) \quad (1.73)$$

donde  $n_0$  es el índice de refracción lineal y  $\Delta n(I)$  es el índice de refracción no lineal que depende de la intensidad de la luz y es el que determina la respuesta no lineal del medio.

Suponga que un haz láser con perfil de intensidad Gaussiano se propaga dentro de un material con un índice de refracción dado por la ecuación (1.73) con  $\Delta n > 0$ . Debido a que el haz tiene una distribución Gaussiana con una mayor intensidad en el centro del haz que va disminuyendo gradualmente hacia el exterior, el haz induce una variación en el índice de refracción dentro del material, dando como resultado un índice de refracción mayor en el centro del haz que en su periferia. Por lo tanto, el material actúa como si fuera una lente positiva, lo que hace que el haz se enfoque dentro del material. Por otro lado, cuando  $\Delta n < 0$  entonces  $n < n_0$  en el centro del haz por lo que el frente de onda tendrá una mayor velocidad en el centro que en el exterior. Por lo tanto el material actúa como una lente negativa ocasionando que el haz se desenfoque dentro del medio.[20]

Entonces, la respuesta de la interacción puede inducir un auto-enfocamiento o auto-desenfocamiento del haz en el medio debido a un cambio en el índice de refracción no lineal ya sea positivo o negativo, esto es, que  $\Delta n > 0$  o  $\Delta n < 0$  respectivamente. Estas no linealidades ocasionan que el medio óptico tenga un comportamiento similar a una lente, conocida como lente no lineal.

### 1.5.2. Auto-modulación espacial de fase

La variación del índice de refracción no solo produce una velocidad diferente que conduce al auto-enfocamiento o auto-desenfocamiento, sino que también induce cambios en la trayectoria óptica de cada parte del frente de onda del haz. La auto-modulación espacial de fase es otra consecuencia del diferente índice de refracción que experimentan las diferentes partes del frente de onda con perfil de intensidad no uniforme. En el caso de un haz Gaussiano, después de pasar por un material, que produce auto-enfocamiento, el perfil de intensidad cambia completamente a un patrón de anillos, el cual fue explicado por Shen *et al* como una auto-modulación de fase del haz de luz [21].

Considere un haz Gaussiano que se propaga en la dirección  $z$  con intensidad dada por:

$$I = I_0 \exp \left[ -2 \left( \frac{r}{W(z)} \right)^2 \right], \quad (1.74)$$

la cual da origen a una distribución del índice de refracción no lineal de la forma:

$$\Delta n(r, z) = \Delta n(z) \exp \left[ -2 \left( \frac{r}{W} \right)^2 \right], \quad (1.75)$$

con un cambio de fase no lineal dado por

$$\Delta \Phi(r) = \Delta \Phi_0 \exp \left[ -2 \left( \frac{r}{W} \right)^2 \right] \quad (1.76)$$

esto implica que el cambio de fase no lineal depende de la coordenada transversal  $r$ . Entonces, como se observa en la figura 1.5, para cada punto de la curva  $\Delta \Phi(r)$  por ejemplo  $\Delta \Phi(r_1)$  existe otro punto  $\Delta \Phi(r_2)$  que tiene la misma pendiente y por consiguiente el mismo vector de propagación  $\mathbf{k}$  con  $\mathbf{k} = \mathbf{d}\Delta \Phi / \mathbf{d}\mathbf{r}$ , entonces las porciones del frente de onda que se propagan en la misma dirección pueden interferir, dando lugar a un patrón de anillos [22].

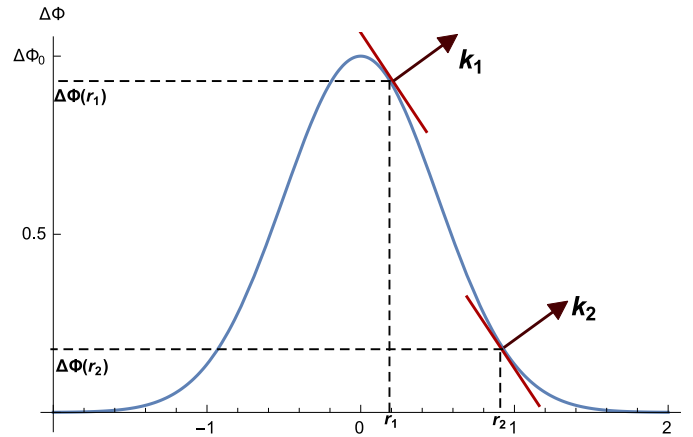


Figura 1.5: Perfil del cambio de fase no lineal inducido por un haz Gaussiano.

## Capítulo 2

# Pérdidas ópticas en un medio

El estudio de la propagación de la luz en la materia comprende una de las ramas importantes e interesantes de la óptica. De esta interacción surgen muchos fenómenos ópticos como la reflexión, refracción, efectos de polarización, así como los fenómenos de absorción y esparcimiento de la luz[23]. En algunas casos, la mayoría de estos fenómenos se pueden considerar como pérdidas de energía ya que la intensidad de luz que entra al material se ve reducida a la salida del mismo.

La mayoría de los objetos que nos rodean no son luminiscentes, pero son visibles porque esparcen la luz que incide sobre ellos. Sin embargo, la mayoría de los objetos son de color porque absorben parte de la luz, no simplemente porque la esparcen. Los colores de un objeto generalmente surgen porque los materiales absorben parte de la luz a ciertas frecuencias, mientras esparcen o transmiten la luz de otras frecuencias[24].

### 2.1. Absorción y emisión de luz

Albert Einstein en 1905 con su teoría del efecto fotoeléctrico dio una interpretación a la emisión y absorción de la luz siguiendo las ideas de Max Planck. Donde Planck postuló que los átomos de un cuerpo negro actuaban como diminutos osciladores armónicos, cada uno de los cuales tenía una energía fundamental cuantificada, concentrada en pequeños paquetes que posteriormente se denominaron *fonones* y que obedecía a la relación  $E = h\nu$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  es la frecuencia de la radiación emitida[3]. Einstein supuso que la diferencia de energía del electrón antes y después de emitir el fotón era igual a  $h\nu$ , la misma energía del fotón absorbido en el proceso.

En 1913, Bohr diseñó un modelo mecánico cuántico del átomo en el que sugiere que los electrones se encuentran en órbitas alrededor del núcleo atómico y que cada una de ellas corresponde a un nivel de energía permitido. El proceso de absorción sirve para excitar a los átomos, es decir hacerlos pasar de un estado o nivel de energía bajo (órbita interna) a un nivel de energía mayor (órbita exterior) correspondiente a la energía absorbida por el átomo mediante algún proceso de excitación o bombeo, siendo algunos de estos: excitación eléctrica, térmica u óptica. Una vez que el átomo ha sido excitado tenderá a regresar a su estado de mínima energía o estado base ya que no puede mantener la energía absorbida. En el salto del estado de alta energía al de mínima energía se puede liberar un fotón con energía similar a la diferencia de energía de los dos estados o niveles involucrados. A este proceso de transformación se le denomina *proceso de emisión o transición radiativa*. Cabe mencionar que en éste proceso no necesariamente habrá liberación de fonones, puede ser liberada en otras formas de energía, térmica por ejemplo, este proceso se denomina transición no radiativa.

Los fundamentos establecidos por Albert Einstein son los que posteriormente dieron paso al desarrollo del láser, en donde los electrones de los átomos experimentan cambios de niveles de energía,

pasan del estado fundamental a un estado excitado al absorber energía debido a algún método de excitación (bombeo) y la transforman en otros tipos de energía al regresar a su estado fundamental. Tanto la emisión como la absorción se pueden dar en diferentes formas: *absorción de una energía*  $\Delta E = h\nu = E_2 - E_1$  proveniente del bombeo (por ejemplo, eléctrico o de un fotón de energía  $h\nu$ ), el electrón es estimulado para pasar de una órbita interior (nivel 1) a una órbita exterior (nivel 2); *emisión espontánea* de un fotón de energía  $h\nu = E_2 - E_1$ , en este proceso el electrón regresa de manera espontánea del nivel 2 al nivel 1; *emisión estimulada*, en este proceso se estimula al electrón por medio de la presencia de un fotón para que pase del nivel 2 al nivel 1 y emita un fotón de energía  $h\nu = E_2 - E_1$  idéntico al fotón ya presente; otro proceso de transformación de energía es la *desexcitación no radiativa*, en donde el electrón pasa del nivel 1 al nivel 2 sin emitir ningún fotón de manera que la energía debe presentarse de alguna otra forma, como el aumento de vibración o rotación de la molécula [24]. Más adelante se hará una descripción más amplia de algunos de estos procesos.

### 2.1.1. Ecuación del oscilador electrónico

En un medio isótropo no conductor (dieléctrico), los electrones están completamente unidos a los átomos que componen al medio, es decir no hay electrones libres como sí los hay en un metal. Desde el punto de vista clásico y basándonos en el modelo del oscilador armónico de Lorentz, suponga que cada electrón de carga  $-e$  es desplazado una distancia  $\mathbf{x}$  de su posición de equilibrio. Si este desplazamiento es resultado de la aplicación de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  que varía con el tiempo, entonces de la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial de movimiento para el electrón es de la forma

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} + K\mathbf{x} = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

El segundo término representa una fuerza de amortiguamiento de fricción proporcional a la velocidad instantánea del electrón, con  $m\gamma$  la constante de proporcionalidad y  $\gamma$  representa el coeficiente de amortiguamiento. El término  $K\mathbf{x}$  representa la fuerza de restauración del electrón, mientras que  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$  es la fuerza externa que experimenta el electrón debida el campo eléctrico aplicado.

Ahora suponga que se tiene un átomo de un sólo electrón, que el campo eléctrico aplicado es armónico en el tiempo y esta dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (2.2)$$

Con  $\omega$  la frecuencia angular del campo externo. Asumiendo que el núcleo del átomo esta fijo y que el movimiento del electrón tendrá el mismo comportamiento armónico en el tiempo, se propone una solución para la ecuación diferencial (2.1) de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \exp(-i\omega t). \quad (2.3)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de movimiento (2.1) y realizando las derivadas con respecto al tiempo se llega a

$$(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K) \mathbf{x} = -e\mathbf{E}. \quad (2.4)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{x} = \frac{-e\mathbf{E}}{(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K)}. \quad (2.5)$$

Ya que  $\mathbf{x}$  es el desplazamiento del electrón, entonces

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{x} \quad (2.6)$$

es el momento dipolar y está dado por el producto de la carga eléctrica con el desplazamiento, el cual será utilizado más adelante.

### 2.1.2. Absorción

En la ecuación de movimiento para el electrón, (2.1), se toma en cuenta que el oscilador armónico es amortiguado, esto implica que parte de la energía del campo eléctrico incidente es absorbida por el sistema, entonces para analizar la absorción de energía considere la razón a la que el campo realiza trabajo en el oscilador dado por:

$$\frac{dW}{dt} = \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle_T = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \mathbf{F} \cdot \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^* \right\}. \quad (2.7)$$

Donde  $\langle \cdot \rangle_T$  indica promedio temporal sobre un intervalo de tiempo  $T \gg \frac{1}{\omega}$ .  $\mathbf{x}$  está dada por la ecuación (2.5) y  $\mathbf{F}$  es la fuerza externa ejercida por el campo eléctrico, entonces derivando a  $\mathbf{x}$  con respecto a  $t$  y considerando que  $K = m\omega_0^2$  con  $\omega_0$  la frecuencia natural de oscilación del electrón, se tiene que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{i\omega (e/m) \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad (2.8)$$

o para separar la parte real e imaginaria multiplicamos y dividimos por el complejo conjugado de  $\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma$  de modo que la ecuación anterior queda de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\omega (e/m) \mathbf{E}_0 \exp[-i(\omega t - \pi/2)]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} [\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma]. \quad (2.9)$$

Ahora, se toma el complejo conjugado de  $d\mathbf{x}/dt$  y se hace el producto escalar con  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ :

$$\mathbf{F} \cdot \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^* = \frac{-\omega (e^2/m) E_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} [-\omega\gamma - i(\omega_0^2 - \omega^2)]. \quad (2.10)$$

## CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO

### 2.1. ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE LUZ

---

Se toma la parte real de la ecuación (2.10) y se sustituye en la ecuación (2.7)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2 E_0^2}{2m} \left[ \frac{\omega^2 \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \right]. \quad (2.11)$$

Si  $\gamma \ll \omega, \omega_0$ , la cantidad entre corchetes de la expresión (2.11) tendrá un valor muy pequeño a menos que la frecuencia  $\omega$  del campo esté cerca de la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  del oscilador. Más precisamente, cuando las diferencias de  $|\omega_0 - \omega|$  son mucho mayores que  $\gamma$ , dan como resultado muy poca absorción. Por lo tanto, se puede hacer la aproximación  $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$ , de modo que

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 \approx 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2. \quad (2.12)$$

En la expresión (2.11) se hace la aproximación de  $\omega^2$  por  $\omega_0^2$  en el numerador y  $\omega^2 \gamma^2$  por  $\omega_0^2 \gamma^2$  en el denominador, esto debido a que se está considerando que la frecuencia  $\omega$  es muy cercana a la frecuencia  $\omega_0$ , es decir que el sistema está muy cerca de entrar en resonancia. Considerando lo anterior, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{e^2 E_0^2}{8m} \left[ \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \right], \quad (2.13)$$

o en la forma

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m} \left[ \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \right], \quad \beta = \gamma/2. \quad (2.14)$$

haciendo

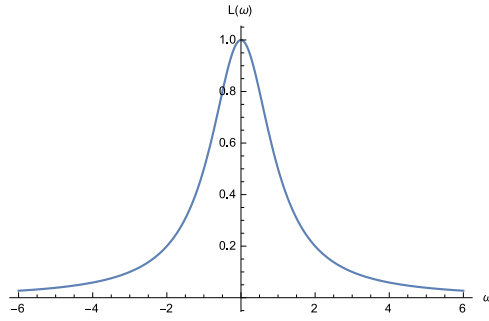
$$L(\omega) = \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}, \quad (2.15)$$

la cual es denominada función de línea Lorentziana o distribución Lorentziana y se representa en figura 2.1. La razón de la absorción de energía queda entonces como

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2 E_0^2}{4m} L(\omega). \quad (2.16)$$

**CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO**  
**2.1. ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE LUZ**

---



*Figura 2.1: Distribución Lorentziana.*

La distribución Lorentziana es una idealización matemática en varios aspectos. Ya que se ha considerado una aproximación de casi resonancia de la función (2.11). La función se define matemáticamente para frecuencias negativas, aunque no tengan significado físico. Se normaliza exactamente a la unidad cuando se integra en todas las frecuencias:

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta} = 1. \quad (2.17)$$

La normalización es aproximadamente la misma cuando solo se utilizan las frecuencias positivas, es decir la contribución de las frecuencias negativas es despreciable porque el ancho de línea ( $\beta$ ) es insignificante en comparación con la frecuencia de resonancia y, en este sentido,  $L(\omega)$  está física y matemáticamente normalizada a la unidad[24].

Hasta aquí se ha considerado el efecto que produce un campo eléctrico externo en un sólo átomo y analizado la absorción desde el punto de vista microscópico. Ahora se hará un análisis macroscópico de la absorción por lo que ya no se considera sólo un átomo sino una porción de materia la cual contiene un gran número de átomos, así que es más conveniente pasar a cantidades o conceptos macroscópicos como lo es por ejemplo la polarización de un material, de la cual iniciaremos este análisis.

Considere un pequeño elemento de volumen  $dv$  de un medio dieléctrico, el cual bajo la influencia de un campo eléctrico tiene un momento dipolar  $d\mathbf{p}$  dado por

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}) dv, \quad (2.18)$$

entonces, el momento dipolar total de un volumen  $V$  es

$$\mathbf{p}_T = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}) dv. \quad (2.19)$$

Donde  $P$  es la *polarización* y se define como el momento dipolar por unidad de volumen. En un medio dieléctrico isótropo se puede considerar que la polarización no depende de la posición por lo que se

## CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO

### 2.1. ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE LUZ

---

tiene que:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_T}{V}. \quad (2.20)$$

Si en el volumen  $V$  existen  $\eta$  moléculas, cada una con momento dipolar  $\mathbf{p}$ , entonces  $\mathbf{p}_T = \eta\mathbf{p}$  por lo tanto, usando la expresión (2.6) para  $\mathbf{p}$  junto con la ecuación (2.5), se tiene que la polarización es

$$\mathbf{P} = \left( \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) \mathbf{E}, \quad (2.21)$$

donde  $N = \eta/V$  es el número de moléculas por unidad de volumen.

Ahora, considerando las ecuaciones de Maxwell de la sección 1.1 para un medio dieléctrico, es decir con  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{M} = 0$ ,  $\rho = 0$  y polarización  $\mathbf{P}$ , se reducen a la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.24)$$

y

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Con

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.26)$$

Usando estas expresiones se puede deducir la ecuación de onda en el medio, para esto se saca el rotacional a (2.24) y se usa la expresión (2.25) para obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

## CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO

### 2.1. ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE LUZ

---

Usando la identidad  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  se llega a la ecuación de onda en un medio dieléctrico dada por

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (2.28)$$

Con  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ . Ahora, para determinar una solución a esta ecuación de onda se usa la polarización dada por la ecuación (2.21) en (2.28) y se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) \right] \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.29)$$

Entonces se propone una solución de la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp \left[ i(\tilde{k}z - \omega t) \right]. \quad (2.30)$$

Con  $\tilde{k}$  el número de onda complejo. La ecuación (2.30) representa una onda plana que se propaga en la dirección  $z$ , al sustituirla en la ecuación (2.29) se encuentra que es solución si

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) \right]. \quad (2.31)$$

Dado que la constante  $\tilde{k}$  es un número complejo, se puede escribir de la forma

$$\tilde{k} = k + i\alpha'. \quad (2.32)$$

De manera similar se puede introducir un índice de refracción complejo

$$\tilde{n} = n + i\kappa. \quad (2.33)$$

De modo que la relación entre  $\tilde{k}$  y  $\tilde{n}$  está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{\omega}{c} \tilde{n} \\ &= \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) \\ &= \frac{\omega n}{c} + i \frac{\omega \kappa}{c}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Usando esta expresión para  $\tilde{k}$  en la solución (2.30), se puede escribir como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{\omega\kappa}{c}z\right) \exp\left[i\left(\frac{\omega n}{c}z - \omega t\right)\right]. \quad (2.35)$$

El factor  $\exp\left(-\frac{\omega\kappa}{c}z\right)$  indica que la amplitud de la onda decrece exponencialmente con la distancia dentro del medio. Ya que la energía de la onda es proporcional a  $|\mathbf{E}|^2$ , entonces la irradiancia de la onda variará con la distancia  $z$  de la forma:

$$\begin{aligned} I &= I_0 \exp\left(-\frac{2\omega\kappa}{c}z\right) \\ &= I_0 \exp(-\alpha z). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Donde  $I_0 = |\mathbf{E}_0|^2$  y  $\alpha$  se le denomina *coeficiente de absorción* del material. Está relacionado con la parte imaginaria del índice de refracción complejo de la forma

$$\alpha = \frac{2\omega\kappa}{c}. \quad (2.37)$$

Donde el coeficiente  $\kappa$  se denomina *índice de extinción*. El coeficiente de absorción  $\alpha$  tiene dimensiones de  $1/\text{longitud}$  y determina la cantidad de absorción de energía que ocurre en un intervalo de distancia que la onda electromagnética penetra en el material[25]. De este modo se puede decir que la parte imaginaria del índice de refracción complejo está asociada a las pérdidas de energía de la onda al penetrar en un medio que presenta absorción.

### 2.1.3. Emisión espontánea

Si el electrón de un átomo no se encuentra bajo la influencia de un campo eléctrico externo ni se considera la fuerza de fricción, entonces la ecuación de movimiento para el electrón dada por (2.1) se reduce en la forma:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \omega_0^2\mathbf{x} = 0 \quad (2.38)$$

donde  $\omega_0 = (K/m)^{1/2}$  es la frecuencia natural de oscilación del electrón. Esta ecuación tiene una solución como (2.3):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \exp(-i\omega_0 t) \quad (2.39)$$

con  $\mathbf{x}_0 \neq 0$  la posición del electrón al tiempo  $t = 0$ . Como es una solución que depende del tiempo,

**CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO**  
2.1. ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE LUZ

---

entonces su momento dipolar también será dependiente del tiempo, es decir se tiene un dipolo oscilante con  $\mathbf{p}$  dado por la ecuación (2.6). Ahora, la rapidez con la que el dipolo radia energía, es decir la potencia instantánea, de acuerdo a la fórmula de Larmor dada por[26]:

$$\mathcal{P} = \left( \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \right) \left\langle \left( \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right)^2 \right\rangle_T = -\frac{dW}{dt}, \quad (2.40)$$

con  $-dW/dt$  la rapidez con la que el dipolo pierde energía y  $W$  es la energía del oscilador. Sustituyendo la ecuación (2.6) en la (2.40), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left\langle \left( \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right)^2 \right\rangle_T \\ &= -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left( \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right) \left( \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right)^* \right\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ahora, de la ecuación (2.39) se obtiene la segunda derivada con respecto al tiempo de  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\mathbf{x}_0 \omega_0^2 \exp(-i\omega_0 t). \quad (2.42)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.41), se obtiene la rapidez con la que la energía sale del dipolo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \mathcal{E}, \quad (2.43)$$

con

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \mathbf{x}_0^2. \quad (2.44)$$

Donde  $\mathcal{E}$  es la energía del electrón oscilante con masa  $m$ . Esta radiación que sale del dipolo debido a un electrón, que previamente excitado salta de un nivel de energía superior a uno inferior, corresponde a la emisión espontánea. Ya que la frecuencia del campo radiado es la misma que la del oscilador, es decir que la frecuencia asociada a la transición de los electrones del estado excitado (nivel 2) al estado base (nivel 1) dado por  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ . Por lo tanto, la razón clásica con la que disminuye la energía del electrón oscilante debido a la emisión espontánea predicha por el modelo del oscilador es

$$\frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3}. \quad (2.45)$$

**CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO**  
2.1. ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE LUZ

---

Para que el coeficiente de transición clásico de los electrones esté en concordancia numérica con la teoría cuántica, al pasar del estado excitado de energía  $E_2$  al estado base con energía  $E_1$ , donde  $E_2 - E_1 = h\nu_0$ , se debe introducir un factor que por convención es  $3f$ . A  $f$  se le denomina *fuerza del oscilador* el cual actúa como un factor de peso para la transición y tiene un valor entre 0 y 1 [27, 28]. Por lo tanto, el coeficiente de emisión espontánea para el salto cuántico de un nivel  $E_2$  a un nivel de energía  $E_1$  se puede denotar como

$$A_{21} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2\pi \epsilon_0 m c^3} f. \quad (2.46)$$

Otra consideración que se debe hacer para la descripción de la emisión espontánea del modelo del oscilador clásico, es que los electrones en los átomos sólo pueden estar en ciertos niveles de energía permitidos. Entonces, el coeficiente de emisión espontánea  $A_{21}$ , denominado *coeficiente de Einstein A*, es la razón a la cual el número de electrones  $N_2$ , en el nivel 2 de energía  $E_2$ , caen al nivel 1 de energía  $E_1$ , aumentando el número de electrones  $N_1$ . Estos cambios en las poblaciones,  $N_2$  y  $N_1$ , debido a la emisión espontánea son descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales para  $N_2$  y  $N_1$  [24]:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 \quad (2.47)$$

y

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2, \quad (2.48)$$

considerando que  $N_1 + N_2 = cte$ . La solución de la ecuación (2.47) nos da la ley de decaimiento exponencial

$$N_2(t) = N_2(0) \exp(-A_{21}t), \quad (2.49)$$

indica que la población en el nivel 2 decae a cero con una constante de tiempo  $\tau_2 = 1/A_{21}$ . Sin embargo, en muchas situaciones un nivel excitado tiene varios canales de decaimiento espontáneo, por lo que si el nivel 2 tiene otros canales de decaimiento disponibles, acortará su tiempo de vida y por tanto la expresión para  $\tau_2$  será diferente. Así que de acuerdo con la teoría cuántica, la vida útil del nivel  $n$  en la radiación espontánea está determinado por la suma de las razones de cambio de todos los canales radiativos posibles, esto es:

$$A_n = \sum_m A_{nm}, \quad (2.50)$$

por lo tanto la vida útil para el estado superior  $n$  es

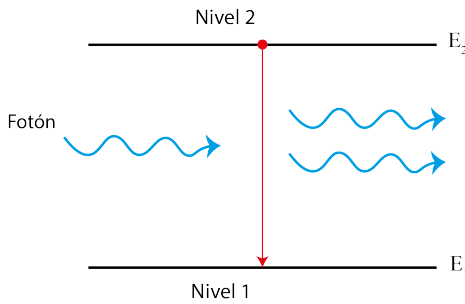
$$\tau_n = \frac{1}{\sum_m A_{nm}}, \quad (2.51)$$

donde la suma es sobre todos los estados  $m$  con energía  $E_m < E_n$ . La vida radiativa de los estados

electrónicos excitados es del orden de 10 a 100 ns.[24]

#### 2.1.4. Emisión estimulada

La emisión estimulada es el otro proceso de decaimiento que puede experimentar el electrón debido a la interacción de otro fotón, de energía  $h\nu$ , el cual induce al electrón pasar a su estado de mínima energía, del nivel 2 al nivel 1, dando como resultado la liberación de otro fotón de energía  $h\nu$  similar al fotón ya presente, ver figura 2.2.



*Figura 2.2: Diagrama de dos niveles de energía para la representación de la emisión estimulada, donde el fotón induce que el electrón pase del nivel 2 al nivel 1 liberando un fotón de la misma energía del fotón ya presente.*

Al igual que en el caso de emisión espontánea se consideran sólo dos niveles de energía, con  $N_1$  el número de electrones en el nivel 1 y  $N_2$  el número de electrones en el nivel 2. La razón de cambio de la emisión estimulada es proporcional al número de electrones en el nivel 2, además depende del número de fotones entrantes, por lo que depende de la densidad de energía espectral  $\rho(\nu)$ , entonces se puede escribir la razón de emisión estimulada como el cambio en la población del nivel excitado de la siguiente forma:

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}N_2\rho(\nu) \quad (2.52)$$

y

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{21}N_2\rho(\nu). \quad (2.53)$$

Donde la constante de proporcionalidad se denomina *coeficiente de Einstein B*. A medida que se produce emisión estimulada, la densidad de población en el nivel superior disminuye, aumentando la población en el nivel inferior. Gracias a la descripción que hizo Albert Einstein de estos fenómenos, fue que años más tarde se dio la invención del láser, que tiene como base de funcionamiento la absorción y la emisión estimulada y que hoy en día tiene muchas aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento, como por ejemplo la médica.

### 2.1.5. Ley de Beer

En su artículo seminal de 1852, Beer demostró que la transmitancia de la luz a través de una cubeta es constante dentro del error experimental cuando el producto del espesor de la cubeta por la concentración del absorbente es constante. Esta ley empírica fue examinada por Max Planck en 1903 basándose en su teoría de la dispersión. Planck mostró que los hallazgos de Beer eran válidos solo para bandas de absorción espectralmente estrechas y débiles y que el máximo de absorción cambia con una densidad numérica o concentración creciente de osciladores[29]. A continuación se hará un análisis resumido de la obtención de la ley de Beer realizado en [24].

Para describir el comportamiento de la irradiancia  $I$  dentro de un material, considere la propagación de una onda electromagnética en un material absorbente. Ya que la irradiancia se puede escribir en la forma

$$I = u_e c, \tag{2.54}$$

donde  $u_e$  es la densidad de energía electromagnética y  $c$  es la velocidad de la luz. Ahora, la razón a la que pasa la energía a través de un área de sección transversal  $A$  en  $z$  y en un plano paralelo en  $z + \Delta z$  es  $I(z)A$  e  $I(z + \Delta z)A$ , respectivamente. En el límite cuando  $\Delta z$  es muy pequeño, se puede hacer la siguiente aproximación:

$$I(z + \Delta z)A \approx \left( I(z) + \frac{\partial I}{\partial z} \Delta z \right) A \tag{2.55}$$

así, la diferencia

$$I(z + \Delta z)A - I(z)A \approx \frac{\partial}{\partial z}(IA)\Delta z. \tag{2.56}$$

Entonces, la velocidad a la que la energía electromagnética sale del volumen  $A\Delta z$  es

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_e A \Delta z) = - \frac{\partial}{\partial z}(IA)\Delta z. \tag{2.57}$$

Usando la expresión (2.54) y tomando en cuenta que  $A$  y  $\Delta z$  son constantes, la ecuación anterior (2.57) se puede poner de la siguiente forma:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \tag{2.58}$$

esta expresión es llamada ecuación de continuidad y es aplicable a una onda plana que se propaga en el vacío. Pero si la onda se propaga en un medio, se debe reemplazar el cero por la razón de cambio de la energía electromagnética debido al medio, la cual puede ser calculada mediante la razón de cambio en las poblaciones del átomo debido a la absorción y emisión estimulada. Entonces, la razón de cambio de la energía en el medio debido a la absorción y emisión estimulada está dada por:

## CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO

### 2.1. ABSORCIÓN Y EMISIÓN DE LUZ

---

$$h\nu \frac{dN_2}{dt} = -\sigma(\nu)I \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right), \quad (2.59)$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son el número de electrones por unidad de volumen en el nivel 1 y 2, respectivamente.  $\sigma(\nu)$  es la sección transversal para la emisión estimulada.  $g_1$  y  $g_2$  es la degeneración o peso estadístico de los niveles 1 y 2 respectivamente. Entonces, el cambio de la intensidad debido a la absorción y emisión estimulada se describe por la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} &= \sigma(\nu)I \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) \\ &= g(\nu)I, \end{aligned} \quad (2.60)$$

con

$$g(\nu) = \sigma(\nu)I \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right). \quad (2.61)$$

Donde  $g(\nu)$  se le denomina *coeficiente de ganancia* si  $N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 > 0$  o *coeficiente de absorción* si  $N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 < 0$ , en este último caso se define a  $\alpha(\nu) = -g(\nu)$ . Analizando el caso estacionario, cuando la intensidad es independiente del tiempo y varía sólo con la distancia  $z$  de propagación en el medio, entonces la ecuación (2.60) se reduce a

$$\frac{dI}{dz} = g(\nu)I. \quad (2.62)$$

Si se supone que  $N_1$  y  $N_2$  no dependen de la intensidad ni de  $z$ , entonces  $g(\nu)$  será independiente de  $I$  y de  $z$ , entonces resolviendo la ecuación (2.62) se tiene que

$$I(z) = I_0 \exp[g(\nu)z], \quad (2.63)$$

donde  $I_0$  es el valor de  $I$  en  $z = 0$ . esta expresión nos dice que la intensidad aumenta o disminuye de manera exponencial con la distancia  $z$  en el medio. Si el medio está absorbiendo,  $g(\nu) = -\alpha(\nu)$ , entonces se tiene que

$$I(z) = I_0 \exp[-\alpha(\nu)z]. \quad (2.64)$$

Esta fórmula de atenuación exponencial se denomina *ley de Beer*.

## 2.2. Esparcimiento

Al igual que la absorción óptica otro fenómeno que puede generar pérdidas en la intensidad óptica es el esparcimiento, este fenómeno se da cuando una onda electromagnética entra en contacto con un medio material haciendo que parte de la energía de la onda sea redireccionada a diferentes ángulos de su dirección original sin cambiar su longitud de onda. Dependiendo del tamaño de las partículas por las que está formado el material se llama *esparcimiento de Rayleigh* si las partículas son mucho menores a la longitud de onda de la luz incidente o puede ser *esparcimiento de Mie* si las partículas son mayores a la longitud de onda.

### 2.2.1. Matriz de Mueller

Considere una partícula arbitraria, inmersa en un medio homogéneo, iluminada por una onda electromagnética plana armónica en el tiempo que se propaga en la dirección  $z$ , como se muestra en la figura 2.3. Se quiere determinar el campo electromagnético,  $\mathbf{E}_s$ , esparcido por dicha partícula.

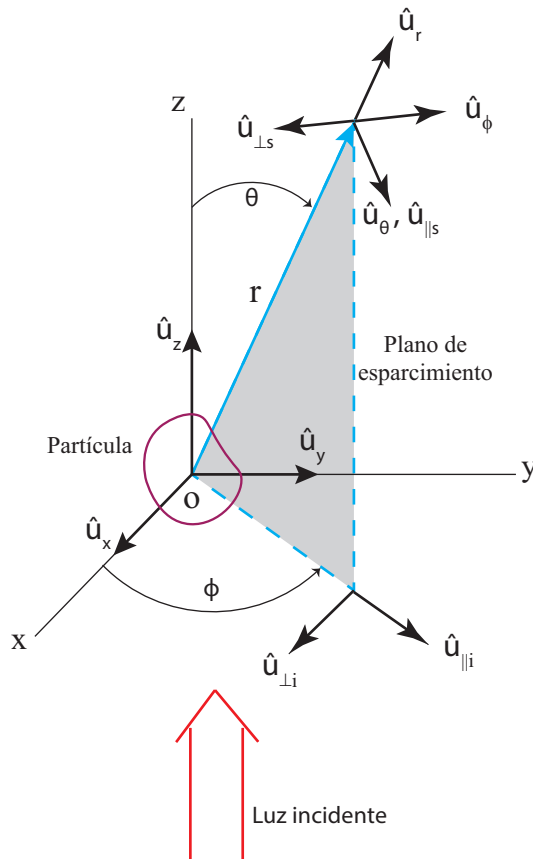


Figura 2.3: Esparcimiento por una partícula arbitraria.

La dirección de propagación del haz incidente  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}$  y la dirección de esparcimiento  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$  definen un plano denominado *plano de esparcimiento*, determinado en el plano  $xy$  por el ángulo azimutal  $\phi$ . Es más conveniente expresar el campo incidente en componentes paralela y perpendicular ( $E_{\parallel i}, E_{\perp i}$ ) respecto al plano de esparcimiento, para ello consideremos los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel i}$  y  $\hat{\mathbf{u}}_{\perp i}$  mostrados en la figura 2.3, donde

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp i} = \text{sen } \phi \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} - \text{cos } \phi \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{u}}_{\parallel i} = \text{cos } \phi \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} + \text{sen } \phi \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}. \quad (2.65)$$

Estos dos vectores junto con el vector unitario  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}$  forman una base ortonormal que cumple con la regla de la mano derecha, es decir  $\hat{\mathbf{u}}_{\perp i} \times \hat{\mathbf{u}}_{\parallel i} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}$ . O en términos de los vectores unitarios de coordenadas esféricas

$$\hat{\mathbf{u}}_{\perp i} = -\hat{\mathbf{u}}_{\phi}, \quad \hat{\mathbf{u}}_{\parallel i} = \text{sen } \theta \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + \text{cos } \theta \hat{\mathbf{u}}_{\theta}. \quad (2.66)$$

Entonces, el campo incidente es de la forma

$$\mathbf{E}_i = (E_{0\parallel} \hat{\mathbf{u}}_{\parallel i} + E_{0\perp} \hat{\mathbf{u}}_{\perp i}) \exp[i(kz - \omega t)] = E_{\parallel i} \hat{\mathbf{u}}_{\parallel i} + E_{\perp i} \hat{\mathbf{u}}_{\perp i}, \quad (2.67)$$

con

$$E_{\parallel i} = \text{cos } \phi E_{xi} + \text{sen } \phi E_{yi}, \quad (2.68)$$

$$E_{\perp i} = \text{sen } \phi E_{xi} - \text{cos } \phi E_{yi}. \quad (2.69)$$

Donde  $E_{xi}$  y  $E_{yi}$  son las componentes del campo incidente en el sistema cartesiano.  $k = 2\pi N_2/\lambda$  con  $N_2$  el índice de refracción del medio que rodea la partícula y  $\lambda$  es la longitud de onda en el vacío de la luz incidente.

En la zona de campo lejano (zona de radiación), es decir, para  $kr \gg 1$  el campo esparcido  $\mathbf{E}_s$  es transversal al radio vector  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$ , esto es que  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_s = 0$  y decae como  $r^{-1}$ [30]:

$$\mathbf{E}_s \sim \frac{\exp(ikr)}{-ikr} \mathbf{A}. \quad (2.70)$$

Por lo que el campo esparcido en la región de radiación puede ser escrito en la forma:

$$\mathbf{E}_s = E_{\parallel s} \hat{\mathbf{u}}_{\parallel s} + E_{\perp s} \hat{\mathbf{u}}_{\perp s}. \quad (2.71)$$

**CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO**  
2.2. ESPARCIMIENTO

---

Donde los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{u}}_{\parallel s}$  y  $\hat{\mathbf{u}}_{\perp s}$  son paralelo y perpendicular respectivamente al plano de esparcimiento y están relacionados con los vectores unitarios polares esféricos de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\parallel s} = \hat{\mathbf{u}}_{\theta}, \quad \hat{\mathbf{u}}_{\perp s} = -\hat{\mathbf{u}}_{\phi}, \quad \hat{\mathbf{u}}_{\perp s} \times \hat{\mathbf{u}}_{\parallel s} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}. \quad (2.72)$$

Una forma conveniente de escribir el campo esparcido en términos del campo incidente es mediante una matriz

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = \frac{\exp[ik(r-z)]}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Donde los elementos  $S_j (j = 1, 2, 3, 4)$  de la matriz de esparcimiento de amplitud depende en general del ángulo de esparcimiento  $\theta$  y del ángulo azimutal  $\phi$ .

Una vez que se ha obtenido el campo electromagnético esparcido se puede determinar el vector de Poynting en cualquier punto fuera de la partícula. Dado que el campo en el medio que rodea la partícula es la superposición del campo incidente y del campo esparcido ( $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s$ ), se tiene que el vector de Poynting está dado por

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_{\text{ext}}. \quad (2.74)$$

Con

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i, \\ \mathbf{S}_s &= \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s, \\ \mathbf{S}_{\text{ext}} &= \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_s + \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_i. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Donde  $\mathbf{S}_i$  es el vector de Poynting de la onda incidente (suponiendo que el medio no es absorbente);  $\mathbf{S}_s$  es el vector de Poynting del campo esparcido por la partícula y  $\mathbf{S}_{\text{ext}}$  se puede interpretar como el vector de Poynting que surge de la interacción entre la onda incidente y la onda esparcida.

Considere un detector colocado a una distancia  $r$  de la partícula en la región de campo lejano con un área  $\Delta A$  perpendicular al vector  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$ . Suponiendo que el vector  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$  no está tan cerca del eje de propagación, el detector sólo registrará la luz esparcida proporcional a  $\mathbf{S}_s \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \Delta A$ , considerando que  $\Delta A$  es lo suficientemente pequeño como para que  $\mathbf{S}_s$  no varíe mucho sobre el detector. De las expresiones (2.70) y (2.75) se tiene que

$$\langle \mathbf{S}_s \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \Delta A \rangle_T = \frac{k}{2\omega\mu} \frac{|A|^2}{k^2} \Delta\Omega. \quad (2.76)$$

Donde  $\Delta\Omega = \Delta A/r^2$  es el ángulo sólido subtendido por el detector. Por lo tanto se puede obtener  $|A|^2$  en función de la dirección  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$  dentro de un ángulo sólido  $\Delta\Omega$ , registrando los datos del detector en

varios puntos sobre un hemisferio que rodee la partícula.

Interponiendo varios polarizadores entre la partícula y el detector y registrando las irradiancias resultantes, se pueden obtener los parámetros de Stokes de la luz dispersada por una partícula

$$\begin{aligned}
 I_s &= \langle E_{\parallel s} E_{\parallel s}^* + E_{\perp s} E_{\perp s}^* \rangle_T, \\
 Q_s &= \langle E_{\parallel s} E_{\parallel s}^* - E_{\perp s} E_{\perp s}^* \rangle_T, \\
 U_s &= \langle E_{\parallel s} E_{\perp s}^* + E_{\perp s} E_{\parallel s}^* \rangle_T, \\
 V_s &= i \langle E_{\parallel s} E_{\perp s}^* - E_{\perp s} E_{\parallel s}^* \rangle_T.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Se ha omitido el factor  $k/2\omega\mu$ . La relación entre los parámetros de Stokes de la onda incidente y la onda esparcida se obtiene a partir de la relación (2.73)

$$\begin{pmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2 r^2} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{pmatrix}. \tag{2.78}$$

Donde la matriz de  $4 \times 4$  se denomina *matriz de Mueller* (o matriz de esparcimiento) para el esparcimiento de una sola partícula. Sus elementos están dados por:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{2} (|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2 + |S_4|^2), \\
 S_{12} &= \frac{1}{2} (|S_2|^2 - |S_1|^2 + |S_4|^2 - |S_3|^2), \\
 S_{13} &= \text{Re}\{S_2 S_3^* + S_1 S_4^*\}, \\
 S_{14} &= \text{Im}\{S_2 S_3^* - S_1 S_4^*\}, \\
 S_{21} &= \frac{1}{2} (|S_2|^2 - |S_1|^2 - |S_4|^2 + |S_3|^2), \\
 S_{22} &= \frac{1}{2} (|S_2|^2 + |S_1|^2 - |S_4|^2 - |S_3|^2), \\
 S_{23} &= \text{Re}\{S_2 S_3^* - S_1 S_4^*\}, \\
 S_{24} &= \text{Im}\{S_2 S_3^* + S_1 S_4^*\}, \\
 S_{31} &= \text{Re}\{S_2 S_4^* + S_1 S_3^*\}, \\
 S_{32} &= \text{Re}\{S_2 S_4^* - S_1 S_3^*\}, \\
 S_{33} &= \text{Re}\{S_1 S_2^* + S_3 S_4^*\}, \\
 S_{34} &= \text{Im}\{S_2 S_1^* + S_4 S_3^*\}, \\
 S_{41} &= \text{Im}\{S_2^* S_4 + S_3^* S_1\}, \\
 S_{42} &= \text{Im}\{S_2^* S_4 - S_3^* S_1\}, \\
 S_{43} &= \text{Im}\{S_1 S_2^* - S_3 S_4^*\}, \\
 S_{44} &= \text{Re}\{S_1 S_2^* - S_3 S_4^*\}.
 \end{aligned}$$

Los parámetros de Stokes de la luz esparcida por un conjunto de partículas separadas aleatoriamente son la suma de los parámetros de Stokes de la luz esparcida por las partículas individuales. Por tanto, la matriz de dispersión para dicho conjunto es simplemente la suma de la matriz de Mueller de las partículas individuales. Los elementos  $S_{ij}$  deben ser independientes de  $\phi$  para cualquier partícula o conjunto de partículas que sea invariante con respecto a la rotación alrededor del eje  $z$ [31].

### 2.2.2. Esparcimiento de Rayleigh

Lord Rayleigh, en el año de 1871, analizó el esparcimiento de luz solar tomando como referencia los osciladores moleculares y llegó a la conclusión de que la luz esparcida es proporcional a  $1/\lambda^4$ .

Para verificar esta afirmación considere un átomo de un sólo electrón, con ecuación de movimiento para éste último dada por la segunda ley de Newton:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 x - eE(t). \quad (2.79)$$

Es la ecuación fundamental del modelo de Lorentz. Describe el movimiento de los electrones al rededor del núcleo como si fuera un oscilador armónico de constante  $K^2 = m_e \omega_0^2$  en la fuerza restauradora (primer término de la derecha) con frecuencia natural de oscilación de los electrones,  $\omega_0$ , con masa  $m_e$  del electrón. El segundo término de la derecha representa la fuerza que siente el electrón (de carga  $e$ ) debido a la interacción con un campo eléctrico incidente que varía en el tiempo a frecuencia  $\omega$ , dado por:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t). \quad (2.80)$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión (2.79) y resolviendo para  $x$ , se llega a la siguiente solución:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m_e(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega t). \quad (2.81)$$

Ahora, debido al campo eléctrico externo que actúa sobre el átomo, el electrón (carga negativa) se desplaza en la dirección opuesta al campo, de ahí el signo menos en la ecuación (2.79), formando un dipolo oscilante entre el núcleo (carga positiva) y el electrón manteniéndose fijo el núcleo. Se sabe que el momento dipolar es el producto de la carga por la distancia de separación entre las cargas y su dirección, por convención, va de la carga negativa a la positiva

$$\mathbf{p} = ed\hat{\mathbf{u}}. \quad (2.82)$$

Entonces, la magnitud del momento dipolar dependiente del tiempo es de la forma

$$p = ex(t) = p_0 \cos(\omega t), \quad (2.83)$$

donde, haciendo  $d = x(t)$  y usando la ecuación (2.81), se obtiene que

$$p_0 = \frac{e^2 E_0}{(\omega^2 - \omega_0^2) m_e}. \quad (2.84)$$

Lejos del dipolo, en la *zona de radiación*, el campo radiado por éste es de la forma:

$$E = \frac{p_0 k^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r} \cos(kr - \omega t), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.85)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo formado por el eje del dipolo oscilante y la dirección de propagación de la onda eléctrica radiada por el dipolo,  $\mathbf{k}$ .

---

Así, la irradiancia generada por el dipolo esta dada por la ecuación:

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (2.86)$$

$\Rightarrow$

$$I(\theta) = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \text{sen}^2 \theta. \quad (2.87)$$

Ahora considere un diferencial de potencia radiado en un ángulo sólido

$$dP = I(\theta)r^2 d\Omega, \quad d\Omega = \text{sen} \theta d\theta d\phi. \quad (2.88)$$

Usando las expresiones (2.87) y (2.84) en (2.88), se obtiene que

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 \omega^4 E_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 32\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2} \text{sen}^2 \theta. \quad (2.89)$$

Por otro lado, la intensidad de la onda eléctrica incidente, ecuación (2.80), es simplemente

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2. \quad (2.90)$$

Ahora, se introduce la cantidad diferencial de *esparcimiento transversal* o *de sección transversal*, de la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{I}, \quad (2.91)$$

de modo que el esparcimiento transversal es

$$\sigma = \oint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (2.92)$$

Entonces, de la ecuación (2.91) y usando las expresiones (2.89) y (2.90)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \left( \frac{e^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_e} \right)^2 \text{sen}^2 \theta, \quad (2.93)$$

Integrando esta última se tiene:

$$\sigma = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \left( \frac{e^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{8\pi}{3}. \quad (2.94)$$

Haciendo

$$\sigma_T = \left( \frac{e^2}{4\pi c^2 \epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{8\pi}{3}. \quad (2.95)$$

Conocido como esparcimiento de sección transversal de Thompson. Por lo tanto el esparcimiento queda de la forma

$$\sigma = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \sigma_T. \quad (2.96)$$

Ahora, si se considera que  $\omega \ll \omega_0$ , entonces la expresión anterior se reduce a

$$\sigma = \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \sigma_T. \quad (2.97)$$

De donde claramente se observa que el esparcimiento es proporcional a  $\omega^4$  o inversamente proporcional a  $\lambda^4$  como lo estableció Rayleigh, ya que  $\omega = c2\pi/\lambda$ . A este tipo de esparcimiento se le denomina **esparcimiento de Rayleigh**. Tiene las siguientes características[32]:

- El tamaño de la partícula debe ser menor a la longitud de onda incidente, menor a  $\lambda/10$  aproximadamente.
- No importa la forma de las partículas.
- Es el mismo en la dirección frontal y posterior.

### 2.2.3. Esparcimiento de Mie

En 1908, Gustav Mie desarrolló la teoría que describe el esparcimiento de partículas mayores a una longitud de onda tomando como modelo a partículas esféricas en un esfuerzo por entender los variados colores exhibidos por pequeñas partículas de oro suspendidas en agua[33]. En esta sección se realizará un resumen de la base matemática que describe la teoría de Mie[31].

En un medio homogéneo e isótropo, el campo electromagnético (eléctrico y magnético) armónico en el tiempo debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (2.98)$$

conocida como ecuación de Helmholtz donde  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ ,  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico y  $\mathbf{H}$  es el campo magnético. Ambos satisfacen las siguientes relaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (2.99)$$

Además, estos campos vectoriales están relacionados entre sí por las siguientes expresiones

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (2.100)$$

Ahora, se construyen las funciones vectoriales  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  de modo que su divergencia sea nula, de la siguiente forma

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\psi). \quad (2.101)$$

Donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante arbitrario y  $\psi$  una función escalar. De este modo se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (2.102)$$

Usando las identidades  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  y  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ , se puede obtener la expresión siguiente

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{c}(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)]. \quad (2.103)$$

De esta expresión se puede observar que  $\mathbf{M}$  satisface la ecuación de onda vectorial si  $\psi$ , denominada función generadora, satisface la ecuación de onda escalar

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2.104)$$

A partir de la función  $\mathbf{M}$  se puede definir una nueva función vectorial

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k}. \quad (2.105)$$

Con divergencia nula, la cual también satisface la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = 0. \quad (2.106)$$

También se tiene que

$$\nabla \times \mathbf{N} = \mathbf{M}k. \quad (2.107)$$

De esta forma, las funciones vectoriales  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  tienen todas las propiedades requeridas de un campo electromagnético, es decir, satisfacen la ecuación de onda vectorial, tienen divergencia nula y están relacionadas por el rotacional. Por lo tanto el problema se reduce a encontrar soluciones a la ecuación de onda escalar, o sea la función generadora  $\psi$  para los vectores armónicos  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$ .

Dado que se quiere describir el esparcimiento por una esfera, entonces consideramos una esfera de radio  $a$  haciendo al vector  $\mathbf{c} = \mathbf{r}$ , donde  $r$  es el radio vector. Por lo que, en coordenadas esféricas la ecuación (2.104) es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (2.108)$$


---

Considerando la función  $\psi$  como un producto de funciones de variables independientes de forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.109)$$

y sustituyendo en la ecuación (2.108) y usando el método de separación de variables se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \quad (2.110)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0, \quad (2.111)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (2.112)$$

Con  $m$  y  $n$  las constantes de separación. Dos soluciones linealmente independientes para (2.110) son:

$$\Phi_p = \cos m\phi, \quad \Phi_i = \sin m\phi, \quad (2.113)$$

donde los subíndices  $p, i$  indican par e impar, respectivamente.

Las soluciones para (2.111) son las funciones asociadas de Legendre,  $P_n^m(\cos\theta)$ , de grado  $n$  y orden  $m$ , donde  $n = m, m+1, \dots$ . Las cuales son ortogonales ya que cumplen con la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\xi) P_n^m(\xi) d\xi = \delta_{n'n} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (2.114)$$

Si introducimos la variable  $\rho = kr$ , definimos la función  $Z = R\sqrt{\rho}$  y sustituimos en la ecuación (2.112) se transforma en

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dZ}{d\rho} \right) + \left[ \rho^2 - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0. \quad (2.115)$$

Tiene como soluciones linealmente independientes a las funciones de Bessel de primer y segundo tipo,  $J_\nu$  y  $Y_\nu$ , donde el orden  $\nu = n + 1/2$ . Entonces, las soluciones linealmente independientes a la ecuación (2.112) son las funciones esféricas de Bessel dadas por:

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+1/2}(\rho), \quad (2.116)$$

$$y_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{n+1/2}(\rho). \quad (2.117)$$

Cualquier combinación lineal de estas dos ecuaciones es también una solución a la ec. (2.112), en particular dos combinaciones de la siguiente forma

$$h_n^{(1)}(\rho) = j_n(\rho) + iy_n(\rho), \quad (2.118)$$

$$h_n^{(2)}(\rho) = j_n(\rho) - iy_n(\rho). \quad (2.119)$$

Denominadas funciones esféricas de Bessel de tercer tipo o funciones esféricas de Hankel.

Entonces las funciones generadoras para la ecuación (2.104) son

$$\psi_{pmn} = \cos m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(kr), \quad (2.120)$$

$$\psi_{imn} = \sin m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(kr). \quad (2.121)$$

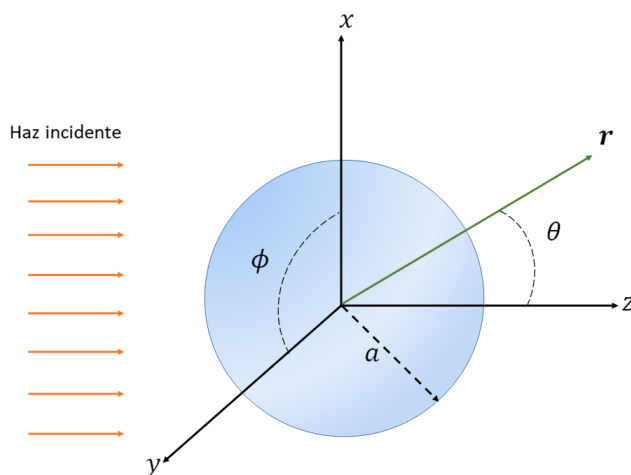
Donde  $z_n$  puede ser  $j_n$ ,  $y_n$ ,  $h_n^{(1)}$  o  $h_n^{(2)}$ .

Las funciones vectoriales (vectores armónicos esféricos) generadas por  $\psi_{pmn}$  y  $\psi_{imn}$  son

$$\mathbf{M}_{pmn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{pmn}), \quad \mathbf{M}_{imn} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{imn}). \quad (2.122)$$

$$\mathbf{N}_{pmn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{pmn}}{k}, \quad \mathbf{N}_{imn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{imn}}{k}. \quad (2.123)$$

Cualquier solución a la ecuación (2.98), puede ser expandida en serie usando los vectores armónicos esféricos.



*Figura 2.4: Haz incidente sobre una esfera de radio  $a$  centrada en el origen.*

Ahora, suponga que una onda plana polarizada en dirección  $x$  y que se propaga en la dirección  $z$  incide en una esfera homogénea, isótropa de radio  $a$ , ver la Figura 2.4.

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{ikr \cos \theta} \hat{\mathbf{u}}_x. \quad (2.124)$$

Usando armónicos esféricos, los campos  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  para la onda plana incidente son:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( \mathbf{M}_{i1n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{p1n}^{(1)} \right), \quad (2.125)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{-k}{\omega\mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( \mathbf{M}_{p1n}^{(1)} + i\mathbf{N}_{i1n}^{(1)} \right), \quad (2.126)$$

El superíndice entre paréntesis indica el tipo de funciones Bessel que se está usando, en este caso son las funciones de primer tipo ( $j_n$ ) ya que el campo incidente es finito en el origen, por lo que las funciones  $y_n$  son descartadas.

Los campos esparcidos por la esfera de radio  $a$  e índice de refracción  $N_1$  son

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left( ia_n \mathbf{N}_{p1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{i1n}^{(3)} \right), \quad (2.127)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left( ib_n \mathbf{N}_{i1n}^{(3)} + a_n \mathbf{M}_{p1n}^{(3)} \right), \quad (2.128)$$

donde

$$E_n = i^n \frac{E_0(2n+1)}{n(n+1)}.$$

Con coeficientes

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx) [x j_n(x)]' - \mu_1 j_n(x) [mx j_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [mx j_n(mx)]'}, \quad (2.129)$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx) [x j_n(x)]' - \mu j_n(x) [mx j_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x) [mx j_n(mx)]'}. \quad (2.130)$$

Donde  $x$  es el parámetro de tamaño y  $m$  el índice de refracción relativo

$$x = ka = \frac{2\pi Na}{\lambda}, \quad m = \frac{k_1}{k} = \frac{N_1}{N}. \quad (2.131)$$

El esparcimiento transversal por una esfera de radio  $a$  e índice de refracción  $N_1$ , está dado por

$$C_{sca} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left( |a_n|^2 + |b_n|^2 \right). \quad (2.132)$$

### 2.2.4. Análisis angular del esparcimiento

En este apartado se realiza un breve análisis de la dependencia angular del campo esparcido, para ello se definen las funciones como en [31] dadas por:

$$\pi_n = -\frac{P_n^1}{\sin \theta} \quad \text{y} \quad \tau_n = -\frac{dP_n^1}{d\theta}. \quad (2.133)$$

Estas funciones no son mutuamente ortogonales, en cambio el conjunto  $\pi_n + \tau_n$  y  $\pi_n - \tau_n$  sí son un conjunto ortogonal de funciones que satisfacen la relación

$$\int_0^\pi (\tau_n + \pi_n)(\tau_m + \pi_m) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (\tau_n - \pi_n)(\tau_m + \pi_m) \sin \theta d\theta = 0, \quad (2.134)$$

con  $m \neq n$ .

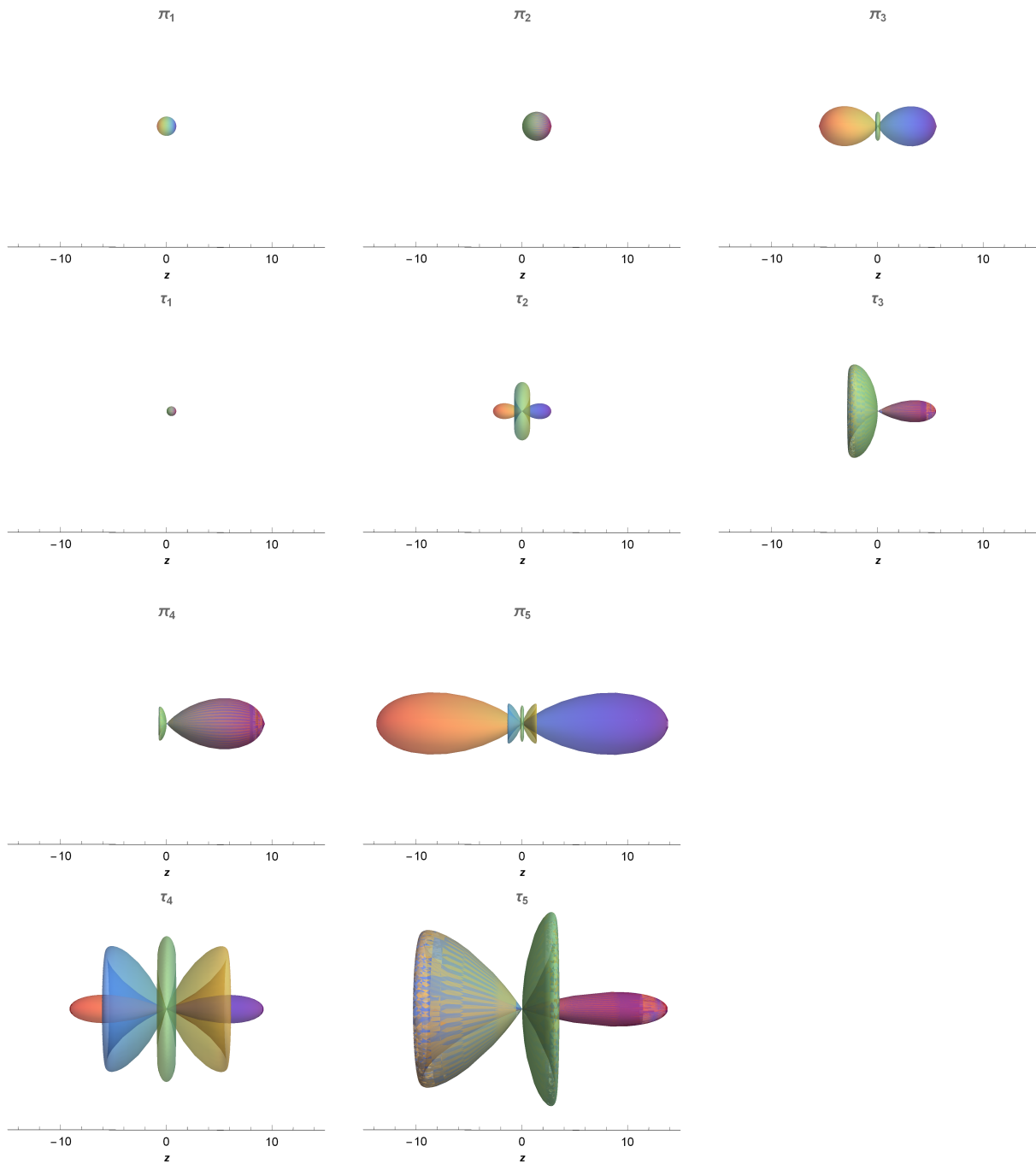
Ahora se reescriben las funciones vectoriales  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  del campo dentro de la esfera y el campo esparcido usando las funciones  $\pi_n$  y  $\tau_n$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i1n} &= \cos \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{u}}_\theta - \sin \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{u}}_\phi, \\ \mathbf{M}_{p1n} &= -\sin \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{u}}_\theta - \cos \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{u}}_\phi, \\ \mathbf{N}_{i1n} &= \sin \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + \sin \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ &\quad + \cos \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{u}}_\phi, \\ \mathbf{N}_{p1n} &= \cos \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + \cos \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ &\quad - \sin \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{u}}_\phi. \end{aligned} \quad (2.135)$$

De este modo, los campos  $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$  de las expresiones (2.127) y (2.128) quedan en términos de las funciones  $\pi_n$  y  $\tau_n$ . En la figura 2.5 se muestran unos gráficos de estas funciones dependientes del ángulo para los primeros cinco valores de  $n$ , en las que se puede observar que a medida que  $n$  aumenta el número de lóbulos también crece y el lóbulo dirigido hacia delante se hace mas estrecho. Debido al comportamiento de estas funciones, cuanto más grande es la esfera, la dispersión hacia adelante aumenta en comparación con la dispersión hacia atrás.

CAPÍTULO 2. PÉRDIDAS ÓPTICAS EN UN MEDIO  
2.2. ESPARCIMIENTO

---



*Figura 2.5: Representación gráfica de las funciones  $\tau_n$  y  $\pi_n$  para los valores de  $n = 1, \dots, 5$ . Estas funciones describen el comportamiento del campo electromagnético esparcido respecto al ángulo  $\theta$  medido desde el eje  $z$  positivo, dirección en la que se propaga la onda incidente.*

### 2.3. Extinción de un haz de luz

Cuando una onda electromagnética incide sobre un conjunto de partículas, la energía de la onda se ve reducida después de atravesar dichas partículas. Se dice que la presencia de las partículas ha dado como resultado la *extinción* de la onda incidente. Este cambio de energía es atribuido a la absorción y el esparcimiento de las partículas (suponiendo que el medio que rodea las partículas no es absorbente) y va a depender de la composición química, el tamaño, la forma, número y orientación de las partículas, del medio circundante, del estado de polarización y frecuencia de la onda incidente[31].

Considere una sola partícula arbitraria rodeada por un medio no absorbente e iluminada por una onda plana. Se construye una superficie esférica (imaginaria) alrededor de la partícula (ver figura 2.6) de modo que la razón con la que la energía atraviesa la superficie  $A$  de la esfera es:

$$W_a = - \int_A \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r dA. \quad (2.136)$$

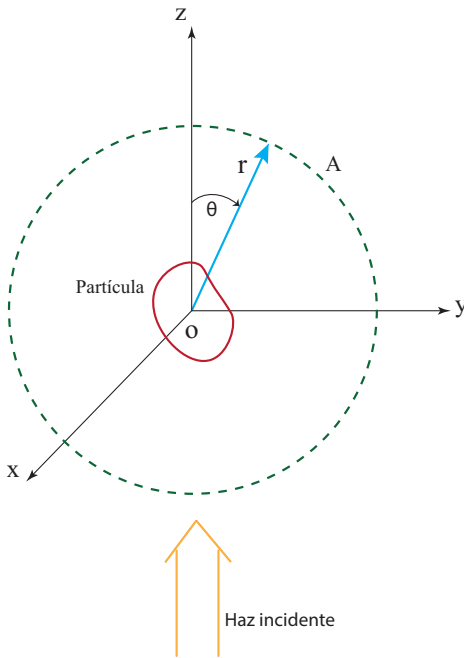


Figura 2.6: Partícula arbitraria iluminada por una onda plana.  $A$  es una superficie esférica imaginaria.

Como se está considerando que el medio no es absorbente, si  $W_a > 0$  implica que la energía es absorbida por la partícula. Debido a (2.74)  $W_a$  se puede escribir como

$$W_a = W_i - W_s + W_{ext}, \quad (2.137)$$

donde

$$W_i = - \int_A \mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_r dA, \quad W_s = \int_A \mathbf{S}_s \cdot \hat{\mathbf{u}}_r dA, \quad W_{ext} = - \int_A \mathbf{S}_{ext} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r dA. \quad (2.138)$$

Ya que se está considerando que el medio circundante no es absorbivo,  $W_i = 0$ .  $W_s$  es la razón a la cual la energía es esparcida a través de la superficie  $A$ .  $W_{ext}$  es la suma de las razones de absorción y esparcimiento de energía.

$$W_{ext} = W_a + W_s. \quad (2.139)$$

Ahora considere un campo eléctrico incidente polarizado en  $x$ ,  $\mathbf{E}_i = E \hat{\mathbf{u}}_x$ .  $W_a$  no depende del radio  $r$  de la esfera imaginaria ya que el medio no es absorbivo, por lo que se puede tomar un radio suficiente mente grande de modo que se encuentre en la zona de campo lejano en la que los campos esparcidos eléctrico y magnético se pueden aproximar de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_s \sim \frac{\exp[ik(r-z)]}{-ikr} \mathbf{X} E, \quad \mathbf{H}_s \sim \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{u}}_r \times \mathbf{E}_s. \quad (2.140)$$

Donde  $\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \mathbf{X} = 0$ . Usando la expresión (2.71):

$$\mathbf{E}_s = E_{\parallel s} \hat{\mathbf{u}}_{\parallel s} + E_{\perp s} \hat{\mathbf{u}}_{\perp s}, \quad (2.141)$$

junto con la expresión (2.73):

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = \frac{\exp[ik(r-z)]}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

Se encuentra que el vector  $\mathbf{X}$  está dado por

$$\mathbf{X} = (S_2 \cos \phi + S_3 \sin \phi) \hat{\mathbf{u}}_{\parallel s} + (S_4 \cos \phi + S_1 \sin \phi) \hat{\mathbf{u}}_{\perp s}. \quad (2.143)$$

Después de una serie de reducciones algebraicas se obtiene que la expresión para la ecuación (2.139) es de la forma

$$\begin{aligned} W_{ext} = & \frac{-k}{2\omega\mu} |E|^2 \text{Re} \left\{ \frac{\exp(-ikr)}{ikr} \int_A \exp(-ikz) \hat{\mathbf{u}}_x \cdot \mathbf{X}^* dA \right. \\ & - \frac{\exp(ikr)}{ikr} \int_A \exp(-ikz) \cos \theta \hat{\mathbf{u}}_x \cdot \mathbf{X} dA \\ & \left. + \frac{\exp(ikr)}{ikr} \int_A \exp(ikz) \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{u}}_z \cdot \mathbf{X} dA \right\}. \quad (2.144) \end{aligned}$$

Esta expresión contiene integrales de la forma  $\int_{-1}^1 \exp(ikrv)f(v)dv$ , la cual puede ser integrada por partes. El valor límite de  $W_{ext}$  cuando  $kr \rightarrow \infty$  es

$$W_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \text{Re} \{ (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{X})_{\theta=0} \}. \quad (2.145)$$

Donde  $I_i = |E|^2$  es la intensidad incidente. La cantidad

$$C_{ext} = \frac{W_{ext}}{I_i} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re} \{ (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{X})_{\theta=0} \}. \quad (2.146)$$

Se denomina *sección transversal de extinción* y puede escribirse como la suma de la *sección transversal de absorción*,  $C_a$ , y la *sección transversal de esparcimiento*,  $C_s$ :

$$C_{ext} = C_a + C_s. \quad (2.147)$$

Donde  $C_a = W_a/I_i$  y  $C_s = W_s/I_i$ . Usando las expresiones (2.138) y (2.140) se obtiene que

$$C_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\mathbf{X}|^2}{k^2} \sin\theta d\theta d\phi = \int_{4\pi} \frac{|\mathbf{X}|^2}{k^2} d\Omega. \quad (2.148)$$

Donde el término  $|\mathbf{X}|^2/k^2$  se denomina *diferencial de sección transversal de esparcimiento*, también representado en la forma  $dC_s/d\Omega$ , el cual, físicamente representa la distribución angular de la luz esparcida, es decir, la cantidad de luz (por unidad de intensidad incidente) dispersada en un ángulo sólido unitario alrededor de una dirección dada. El término  $|\mathbf{X}|^2/k^2 C_s$  se denomina *función de fase o diagrama de dispersión*, es denotado por el símbolo  $p$  y está normalizado:

$$\int_{4\pi} p d\Omega = 1. \quad (2.149)$$

El promedio del coseno del ángulo de dispersión, o el *parámetro de asimetría*  $g$  es

$$g = \langle \cos\theta \rangle = \int_{4\pi} p \cos\theta d\Omega. \quad (2.150)$$

Para una partícula que dispersa la luz isotrópicamente, es decir la misma en todas las direcciones,  $g$  desaparece;  $g$  también desaparece si la dispersión es simétrica alrededor de un ángulo de dispersión de  $90^\circ$ . Si la partícula dispersa más luz hacia adelante ( $\theta = 0^\circ$ ),  $g$  es positivo;  $g$  es negativo si la dispersión

se dirige más hacia la dirección posterior ( $\theta = 180^\circ$ ).

Se pueden definir eficiencias (o factores de eficiencia) para la extinción, la dispersión y la absorción de la forma:

$$Q_{ext} = \frac{C_{ext}}{G}, \quad Q_s = \frac{C_s}{G}, \quad Q_a = \frac{C_a}{G}. \quad (2.151)$$

Donde  $G$  es el área de la sección transversal de la partícula proyectada sobre un plano perpendicular al haz incidente.

Ahora, en el caso de un material no homogéneo si además de presentar absorción presenta esparcimiento, la atenuación o extinción del haz se deberá no sólo a la absorción sino que también será debido al esparcimiento. Entonces de la ley de Beer (2.64) se tiene que la irradiancia de un haz luz es atenuada de forma exponencial de  $I_i$  a  $I_t$  al atravesar una distancia  $d$  de un medio que tiene partículas distribuidas de manera aleatoria [31]:

$$\frac{I_t}{I_i} = \exp(-\alpha_{ext}d). \quad (2.152)$$

Donde el coeficiente de extinción es el resultado de ambos efectos, la absorción y el esparcimiento que ocurren de manera simultánea:

$$\alpha_{ext} = \aleph C_{ext} = \aleph(C_a + C_s). \quad (2.153)$$

Con  $\aleph$  el número de partículas por unidad de volumen.  $C_a$  y  $C_s$  son las secciones transversales de absorción y esparcimiento. Haciendo

$$\alpha_a = \aleph C_a \quad (2.154)$$

y

$$\alpha_s = \aleph C_s, \quad (2.155)$$

entonces el coeficiente de extinción queda de la forma:

$$\alpha_{ext} = \alpha_a + \alpha_s, \quad (2.156)$$

con  $\alpha_a$  el coeficiente de absorción y  $\alpha_s$  el coeficiente de esparcimiento.



## Capítulo 3

# Análisis experimental y numérico del esparcimiento

Como ya se mencionó anteriormente los fenómenos de absorción y esparcimiento de luz son considerados, en algunos casos, como pérdidas de energía en un material, por lo que es importante determinar estas pérdidas para algunos experimentos como por ejemplo en óptica no lineal donde se utilizan técnicas para la medición de los cambios no lineales en el índice de refracción y la absorción de la luz, como la denominada técnica de *barrido en Z* (Z-scan)[12], así como la observación, análisis o modelación de los efectos no lineales como la auto-modulación espacial de fase de un haz Gaussiano[13]. Con esta técnica se hacen mediciones de la intensidad, a campo lejano, en radios muy pequeños del eje de propagación mediante la colocación de una abertura frente al detector, para el caso cuando se mide el índice de refracción no lineal, mientras que para medir la absorción no lineal se hace sin la abertura de modo que toda la radiación transmitida entre en el detector. Es por esto que se requiere conocer qué cantidad de luz o porcentaje se pierde por esparcimiento.

Para hacer un calculo aproximado de la cantidad de luz esparcida de manera experimental se emplea un arreglo similar al nefelómetro utilizado para medir el esparcimiento de la luz. Por otro lado, se realizará un cálculo numérico del esparcimiento haciendo uso de un programa realizado por Scott Prahl (*Mie Scattering Calculator*)[34], basado en la teoría de Mie, que nos permite calcular el esparcimiento de la luz generado por partículas esféricas mayores a la longitud de onda. Con los resultados arrojados por el programa se podrá obtener una aproximación del porcentaje de la luz esparcida para algunos tamaños de partículas y longitudes de onda.

### 3.1. Fase Experimental

Para realizar la medición de la luz esparcida por el material (en este caso aceite de ricino con rojo de metilo) se utilizó el arreglo experimental mostrado en el diagrama de la figura 3.1. Se utilizó una fuente de luz láser de Helio-Neón con una longitud de onda de 633 *nm*.

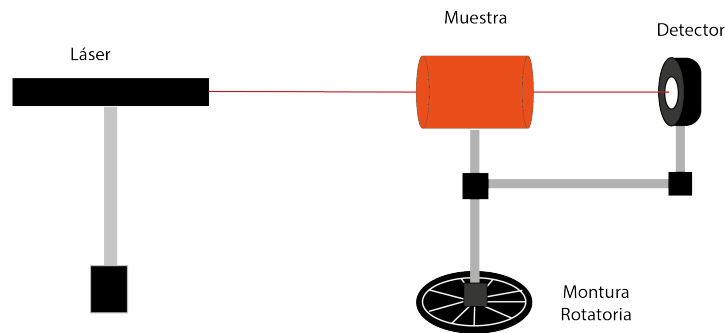


Figura 3.1: Diagrama del arreglo experimental para la medición de la luz esparcida. El detector se ha colocado a una distancia de 15 cm de la muestra sobre una montura rotatoria.

Las medidas de la potencia se tomaron a diferentes ángulos (usando una montura rotatoria) en un plano horizontal a la altura del eje del haz a un radio de 15 cm de la muestra. A continuación se muestran algunas de las potencias obtenidas experimentalmente.

Ángulo	Potencia	Intensidad ( $W/m^2$ )
0	5.00 mW	63.66
4	25.03 $\mu W$	0.3186
8	8.77 $\mu W$	0.1116
12	3.96 $\mu W$	$3.896 \times 10^{-2}$
16	1.39 $\mu W$	$1.769 \times 10^{-2}$
20	690 nW	$8.875 \times 10^{-3}$
24	323 nW	$4.112 \times 10^{-3}$
28	153 nW	$1.948 \times 10^{-3}$
32	24 nW	$3.055 \times 10^{-4}$

Tabla 3.1: Potencias medidas de la luz esparcida a diferentes ángulos respecto al eje de propagación.

Como se puede observar en los datos de la tabla 3.1, los valores medidos de la potencia se muestran para un ángulo máximo de 32° ya que para ángulos mayores a éste no se detectó potencia alguna por parte del detector y fueron medidos cada 4 grados debido a las dimensiones del detector. Algo más que se puede observar de estos datos es que la potencia medida es muy baja (prácticamente nula) para ángulos a partir de 4°. La intensidad presentada en la tercera columna se obtuvo a partir de la relación:  $I = P/A$ , donde  $A$  es el área del detector.

### 3.2. Fase Numérica

En cuanto al cálculo numérico del esparcimiento se usó un programa basado en la teoría de Mie que nos permite conocer la distribución de la luz esparcida la cual es usada posteriormente para determinar que porcentaje de ésta pasa a través de una abertura de radio  $r$  al rededor del eje de propagación. La interfaz de la página web interactiva de la calculadora de Mie se muestra en la figura 3.2.

Mie Scattering Calculator [Home](#) [Articles](#) [Calculators](#) [Classroom](#) [Software](#) [Spectra](#)

by [Scott Prahl](#)

Just what you've been waiting for! Web based Mie scattering calculations!

Sphere diameter	<input type="text"/>	microns
Wavelength in Vacuum	<input type="text"/>	microns
Index of Refraction in Medium	<input type="text"/>	
Real Index of Sphere	<input type="text"/>	
Imag Index of Refraction (negative!)	<input type="text"/>	
Number of angles	<input type="text"/>	
Concentration	<input type="text"/>	spheres per cubic micron
<input type="button" value="Calculate"/>		

Copyright 2018 [Scott Prahl](#)

Figura 3.2: Interfaz de la calculadora de esparcimiento de Mie. Se muestran los campos para introducir la información requerida para calcular el esparcimiento de Mie.

A continuación se muestran los resultados numéricos del esparcimiento para esferas de diámetro de 1.0, 5.0 y 10.0  $\mu\text{m}$  con índice de refracción  $N_1 = 1.5$ , que se encuentran distribuidas de manera aleatoria en un medio con índice de refracción de  $N = 1.333$  con una concentración de  $\aleph = 5.0 \times 10^{-7}$  esferas/ $\mu\text{m}^3$  y son iluminadas mediante un haz de luz con una longitud de onda de 633 nm. El hecho de considerar una concentración de esa magnitud es porque el programa funciona para concentraciones muy bajas. Los ángulos son medidos a partir del eje de propagación  $z$  en un plano horizontal que pasa por el eje de propagación, ver diagrama de la Figura 3.3. Se consideraron valores sólo para ángulos de  $-90$  a  $90$  grados ya que para ángulos mayores, los valores de la intensidad son muy pequeños.

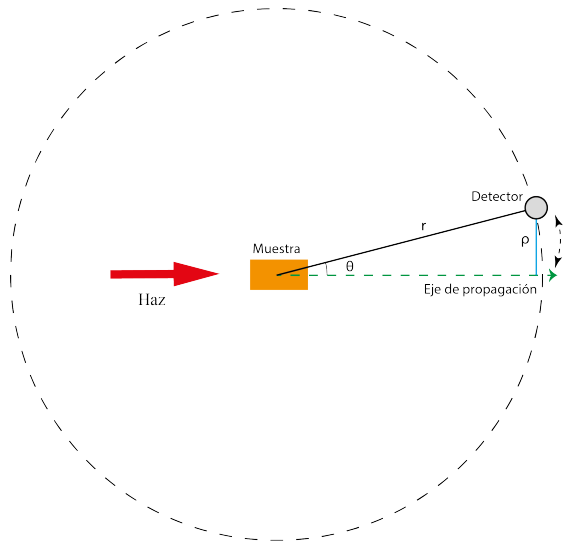


Figura 3.3: En el diagrama se muestra la dirección del movimiento del detector sobre una circunferencia de radio  $r = 1$  m, el ángulo  $\theta$  que hace con respecto al eje de propagación  $z$  y la distancia  $\rho$  que hay entre el eje de propagación y el detector.

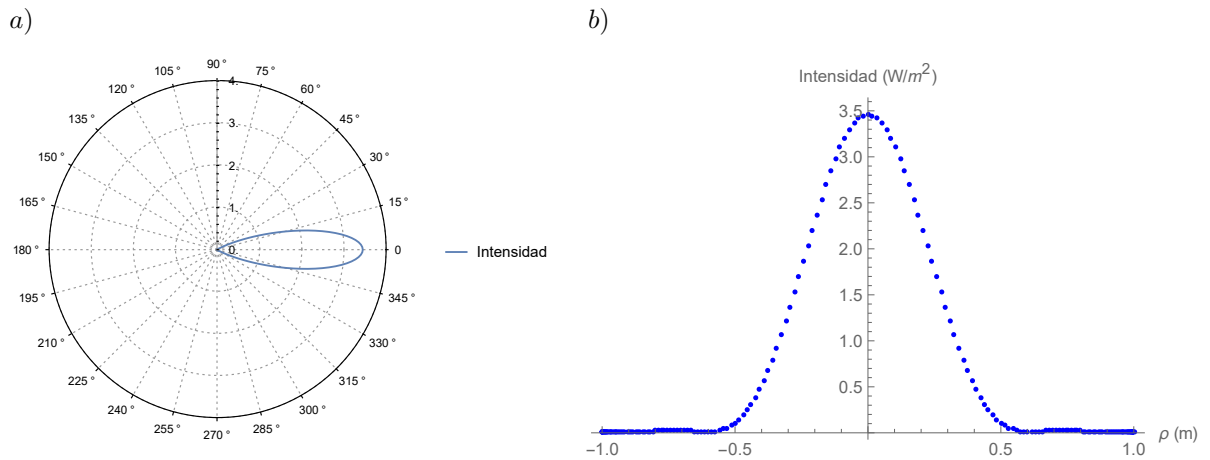


Figura 3.4: Resultados del espaciamiento obtenidos a partir de la calculadora de Mie para esferas de diámetro de  $1.0 \mu\text{m}$ . En el inciso a) se muestra la gráfica en forma polar de la intensidad respecto al ángulo  $\theta$  (en grados) medido a partir del eje de propagación. En el inciso b) se grafica en forma lineal los valores de la intensidad mostrados en a) pero ahora respecto a  $\rho$  (en metros), el radio perpendicular al eje de propagación (ver Figura 3.3).

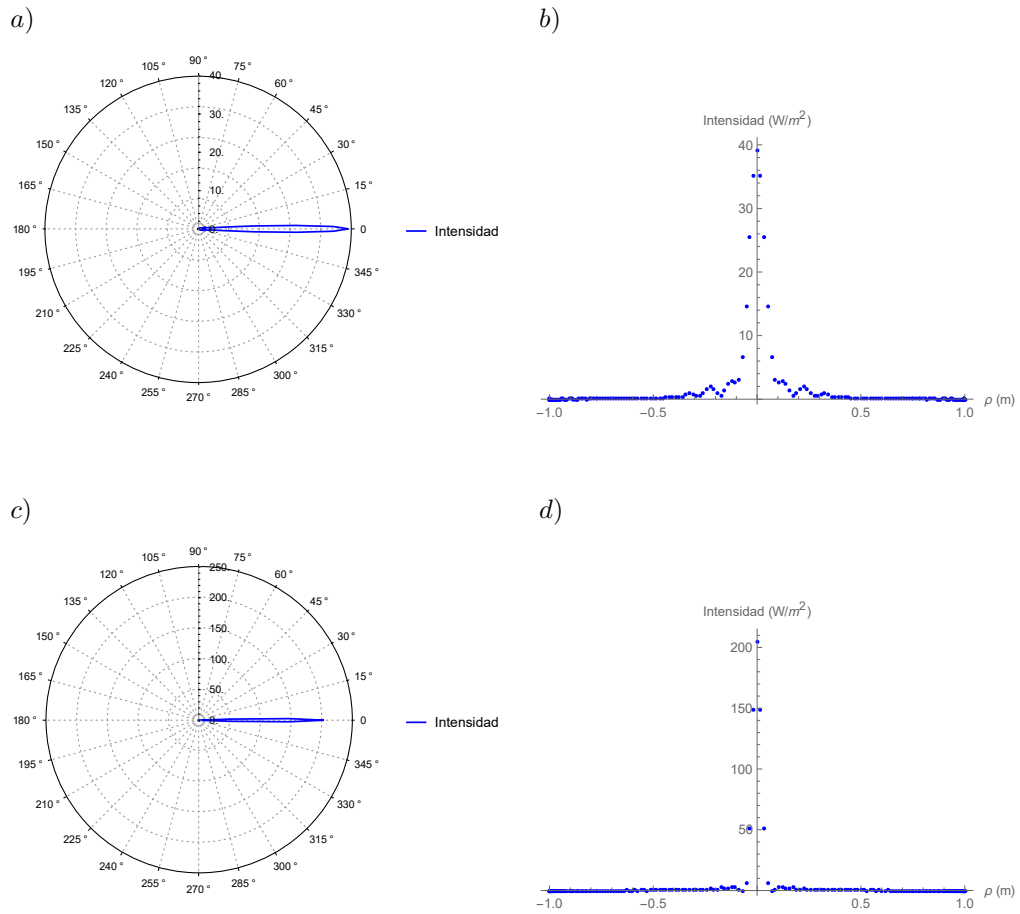


Figura 3.5: Resultados numéricos del esparcimiento para esferas de diámetro de  $5.0 \mu m$  representado en el inciso a) como función de  $\theta$  (en grados) y en b) como función de  $\rho$  (en metros). En la parte de abajo se muestra el esparcimiento por esferas de diámetro de  $10.0 \mu m$ , en el inciso c) con respecto a  $\theta$  y en el d) respecto a  $\rho$ .

Los siguientes resultados numéricos del esparcimiento son realizados considerando dos diferentes longitudes de onda del haz incidente,  $514 \text{ nm}$  y  $488 \text{ nm}$ , para esferas de diámetro de  $1.0 \mu m$  con índice de refracción  $N_1 = 1.5$ , en un medio con índice de refracción de  $N = 1.333$  con una concentración de  $\aleph = 5.0 \times 10^{-7} \text{ esferas}/\mu m^3$ .

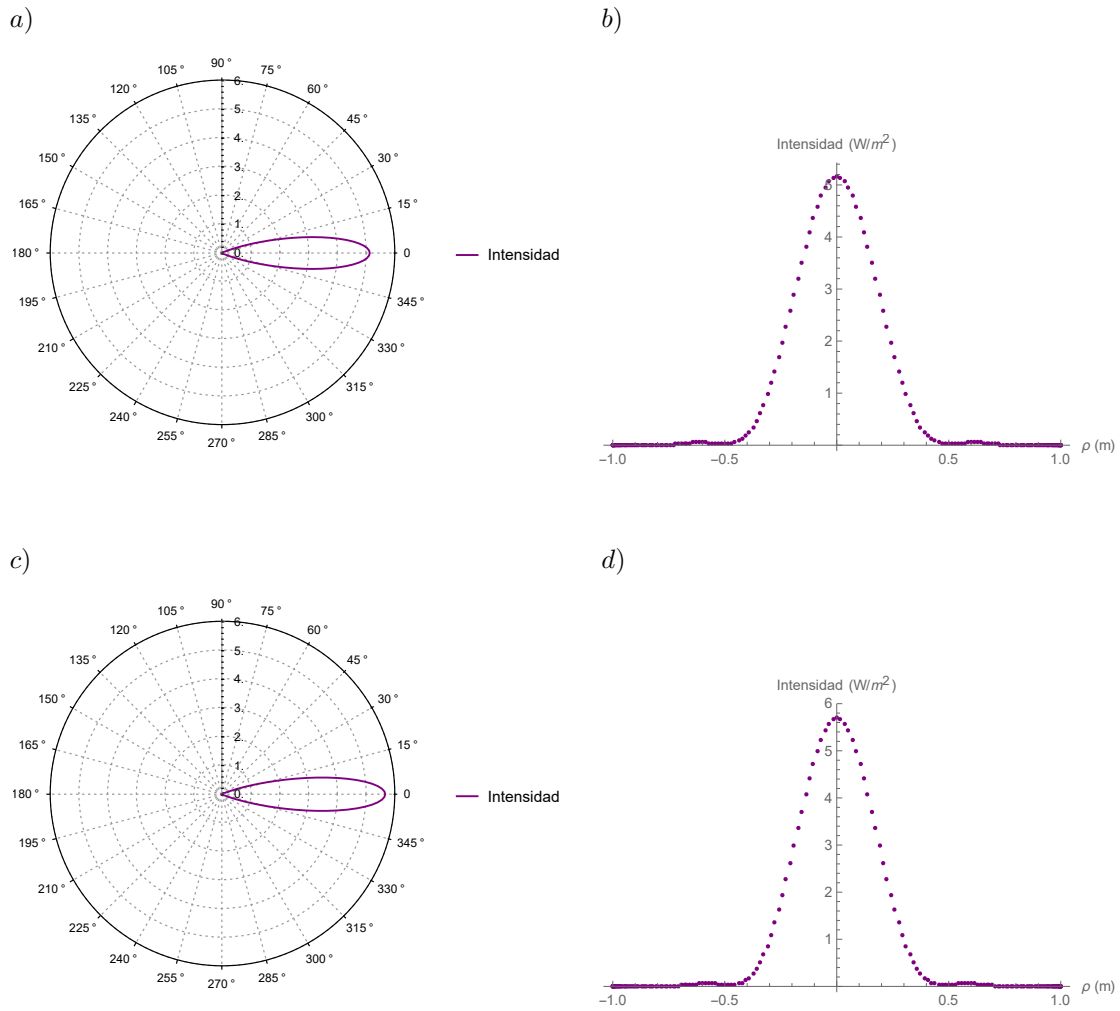


Figura 3.6: Las gráficas muestran el esparcimiento en forma numérica por esferas de diámetro de  $1.0 \mu\text{m}$  para una longitud de onda  $\lambda = 514 \text{ nm}$  en la parte superior, dónde el inciso a) muestra la distribución de intensidad respecto al ángulo  $\theta$  y en el inciso b) como función  $\rho$ . En la parte inferior, el esparcimiento es para las mismas partículas pero ahora con una longitud de onda  $\lambda = 488 \text{ nm}$ .

Dado que los resultados obtenidos son discretos, para realizar la integración de estos es necesario obtener una función de ajuste para los datos que permita integrar la curva y obtener una aproximación de la intensidad esparcida. Este proceso de ajuste se realiza mediante el programa *OriginPro 8* en cada conjunto de datos, para posteriormente hacer la integración.

Debido a la forma de la gráfica de la Figura 3.4 b) se consideró usar una función de ajuste de la forma:

$$f(\rho) = \exp [a + b\rho + c\rho^2], \quad (3.1)$$

donde los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  son determinados por el programa para cada uno de los conjuntos de datos. Se obtuvieron las funciones de ajuste para  $\lambda = 633 \text{ nm}$  en los tres diferentes tamaños de partículas.

Para partículas de  $1 \mu m$  de diámetro la función de ajuste es:

$$f_1(\rho) = \exp [1.2595 - 11.5326\rho^2]. \quad (3.2)$$

Para partículas de  $5 \mu m$  de diámetro:

$$f_2(\rho) = \exp [3.6630 - 348.8927\rho^2]. \quad (3.3)$$

Para partículas de  $10 \mu m$  de diámetro la función de ajuste es:

$$f_3(\rho) = \exp [5.3333 - 1141.9126\rho^2]. \quad (3.4)$$

Es necesario mencionar que el tamaño del parámetro  $b$  es muy pequeño en comparación con  $a$  y  $c$ , debido a esto no se considera en la función de ajuste. Además el coeficiente  $a$  nos determina la amplitud, el valor máximo de la función, mientras que el coeficiente  $c$  nos determina como cambia (decae) esa amplitud, en este caso en forma cuadrática o parabólica lo que nos dice que es una función de tipo Gaussiana. A continuación se muestran los conjuntos de datos con su respectiva función de ajuste:

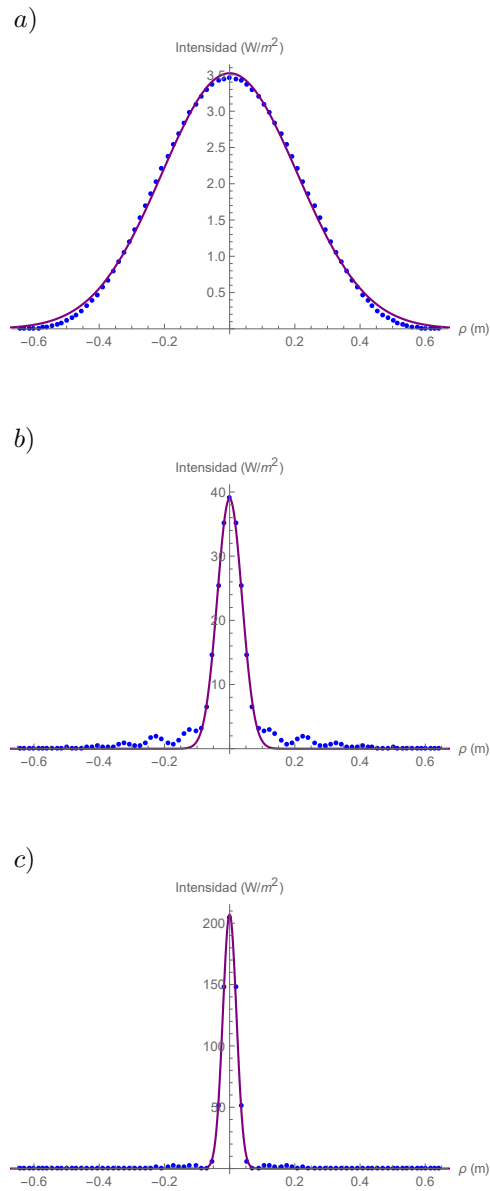
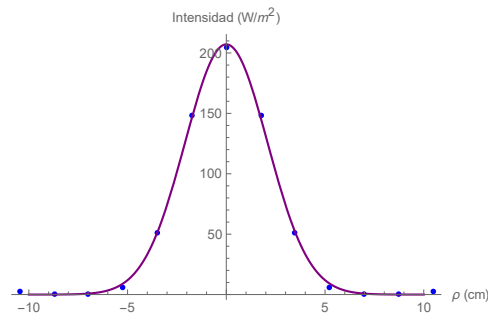


Figura 3.7: Esparcimiento numérico producido por los tres tamaños de partícula (1, 5 y 10  $\mu\text{m}$ ) de diámetro con su respectiva función de ajuste (línea continua) dadas por las funciones (3.2 - 3.4).

Se puede observar de las gráficas anteriores (Figura 3.7) que la función de ajuste de tipo Gaussiana es adecuada para la distribución en la parte central del esparcimiento en estos tamaños de partículas. Otra forma de determinar que el ajuste es el adecuado además de analizarlo gráficamente es comparando el resultado de la integral sobre todos los datos con la integral de la función Gaussiana. Entonces, haciendo la integral de la curva de datos de la gráfica de la Figura 3.4 inciso b) mediante el programa Origin, arroja un valor de  $I_{dat} = 1.8235$  el cual representa la potencia de de la luz esparcida, mientras que el valor de la integral de la función Gaussiana es  $I_G = 1.8392$  que también representa la potencia de la luz esparcida con perfil Gaussiano. Al sacar la razón de estos dos valores se obtiene que  $I_G/I_{dat} \approx 1.00$ , lo

que indica que la función Gaussiana se ajusta completamente a la curva de los datos. De forma similar para los resultados de la figura 3.5 para partículas de  $10 \mu m$  la razón de  $I_G/I_{dat} \approx 0.95$  esto quiere decir que la función Gaussiana es una buena aproximación a los datos numéricos. Para partículas de  $5 \mu m$  la razón de  $I_G/I_{dat} \approx 0.83$  lo que indica que la función ya no se ajusta de manera adecuada a la curva de los datos, sin embargo si consideramos sólo ángulos cercanos a la región paraxial, es decir para  $\rho \ll r$  se encuentra que la razón de  $I_G/I_{dat} \geq 0.95$  para un  $\rho < 15 \text{ cm}$  por lo que en esa región el ajuste es más adecuado.

Ya que el esparcimiento producido por partículas de  $10 \mu m$  es el que más se acerca al resultado experimental entonces el análisis se centrará en este caso. Primero se hace una ampliación de la región central de la gráfica del inciso c) de la Figura 3.7 como se muestra en la Figura 3.8 para observar mejor la distribución de los datos



*Figura 3.8: Se muestran los valores de la intensidad del esparcimiento por partículas de  $10\mu m$  de diámetro mostrados en la gráfica del inciso c) de la Figura 3.7 pero ahora en un rango menor de  $\rho$  (ahora en centímetros) para observar mejor la distribución de los valores centrales del esparcimiento de dichas partículas.*

Dado que se hizo un cambio en las unidades de  $\rho$ , se pasó de metros a centímetros, la función de ajuste  $f_3(\rho)$  en la ecuación (3.4) también se vio afectada de la forma:

$$f_3(\rho) = \exp [5.5292 - 0.1142\rho^2]. \quad (3.5)$$

El hecho de considerar la intensidad respecto al radio perpendicular al eje de propagación es para determinar que porcentaje de energía está dentro o fuera de una abertura con un determinado radio  $\rho$  que se colocaría sobre el eje de propagación a una distancia de un metro de la muestra. Para ello se hace uso de la función de ajuste (3.5) mostrada gráficamente en la Figura 3.8. Se integra la función de ajuste sobre un radio  $\rho$ , el cual determina el radio de la abertura en el eje de propagación y posteriormente se saca la fracción de energía para cada uno de los radios calculados. La siguiente tabla muestran los resultados obtenidos.

Radio de la abertura (cm)	Energía	Fracción de energía
1	398.998	0.36
2	717.894	0.66
3	921.597	0.84
4	1025.59	0.94
5	1068.01	0.98
6	1081.84	0.99
7	1085.44	0.999
8	1086.19	0.9998
9	1086.32	0.99998
10	1086.34	1.0

Tabla 3.2: La tabla muestra los valores de energía y fracción de energía que se encuentran dentro de la región de una abertura a distintos radios localizada a una distancia de un metro de la muestra, obtenidos a partir de la integración sobre cada radio de la función de ajuste para partículas con diámetro de  $10 \mu\text{m}$  de la gráfica en la figura 3.8.

De la tabla anterior podemos observar que para un radio de  $8 \text{ cm}$  prácticamente se tiene el 100 % de la energía. Ahora, si calculamos la integral sobre los datos ( $I_{dat}$ ) dentro de ese rango y comparamos con el resultado de la integral de la función Gaussiana ( $I_G$ ) en ese mismo intervalo se obtiene que  $I_G/I_{dat} \approx 1.0$ , lo que muestra que en esa región la función Gaussiana se ajusta de manera adecuada a los resultados numéricos.

Dado que en los experimentos donde se hace uso de la técnica de *barrido en Z*, particularmente en la determinación de los cambios del índice de refracción, el tamaño de la abertura es muy importante ya que va a determinar la cantidad de luz que llega al detector, por lo que es interesante analizar el esparcimiento para una abertura de las mismas dimensiones que van de  $0.5 \text{ mm}$  a  $2.5 \text{ mm}$ .

Radio de la abertura (mm)	Energía	Fracción de energía
0.5	20.7101	0.019
1	41.4083	0.038
1.5	62.0829	0.057
2	82.7222	0.076
2.5	103.314	0.095
3	123.848	0.114

Tabla 3.3: Valores de energía y fracción de energía de la luz esparcida dentro de la región de una abertura de diferentes radios localizada a un metro de la muestra, obtenidos a partir de la integración sobre cada radio de la función de ajuste para partículas con diámetro de  $10 \mu\text{m}$ .

De los resultados obtenidos en la tabla anterior se puede observar que cerca del 2% de la luz esparcida pasa por una abertura que tiene un radio de  $0.5 \text{ mm}$ , desde luego que en el caso de la técnica de barrido en *Z* una abertura pequeña registraría mejor los cambios de la intensidad en eje cuando lo que se quiere medir es el cambio de índice de refracción no lineal. Mientras que si se quiere medir la absorción no lineal se requeriría una abertura o un detector de al menos  $6 \text{ cm}$  de radio de acuerdo a los

resultados de la tabla 3.2 para captar el 99% de la luz esparcida.

Otros datos importantes que nos proporciona el programa son: la sección transversal de esparcimiento  $C_s$  y el coeficiente de esparcimiento  $\alpha_s$ , este último también puede ser obtenido a partir de la ecuación 2.155 el cual junto con el coeficiente de absorción ( $\alpha_a$ ) se puede aplicar la ley de Beer para tener una aproximación de la cantidad de luz que pasa a través de una muestra de espesor  $d$ , siempre que se considere una muestra delgada como las utilizadas generalmente en Z-scan ( $d = 1 \text{ mm}$ ):

$$I_t = I_i \exp(-\alpha_{ext}d) = I_i \exp[-(\alpha_a + \alpha_s)d]. \quad (3.6)$$

Ya que  $C_s$  no depende de la concentración de partículas, entonces para partículas de  $10 \mu\text{m}$  de diámetro,  $N_1 = 1.5$ ,  $N = 1.333$ ,  $\lambda = 633 \text{ nm}$ , con una concentración de  $\aleph = 5 \times 10^{-7} \text{ esf}/\mu\text{m}^3$  y con un espesor de la muestra  $d = 1 \text{ mm}$  se tiene que  $C_s = 184.14 \mu\text{m}^2$ , lo que nos da como resultado un  $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y usando un  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$  (obtenido de manera experimental), se tiene que

$$\frac{I_t}{I_i} = 0.876 \quad (3.7)$$

es decir que el 87.6% de la luz queda en el haz después de pasar por el medio el resto se ha perdido en la absorción y el esparcimiento. Variando únicamente la concentración se puede observar lo siguiente:

$\aleph \times 10^{-7}$ ( $\text{esf}/\mu\text{m}^3$ )	$I_t/I_i$
1	0.943
2	0.926
3	0.909
4	0.892
5	0.876

Tabla 3.4: Valores de la intensidad transmitida normalizada para partículas de  $10 \mu\text{m}$  de diámetro usando los parámetros ya mencionados y variando únicamente la concentración de partículas.

Considerando por separado los coeficientes de absorción y esparcimiento podemos calcular la intensidad a la salida de la muestra si se pudiera considerara sólo uno de estos efectos. Para  $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$  con  $\aleph = 5 \times 10^{-7} \text{ esf}/\mu\text{m}^3$  se tiene:

$$\exp(-\alpha_s d) = 0.91 \quad (3.8)$$

y

$$\exp(-\alpha_a d) = 0.96 \quad (3.9)$$

De estas dos expresiones se puede observar la fracción de la intensidad que pasaría por la muestra si se considera sólo uno de los efectos de atenuación, además la pérdida por esparcimiento es mayor que la pérdida por absorción en este caso.

Quizá otra forma de ver la concentración de partículas es cambiando las unidades de  $\mu\text{m}^3$  a litros ( $L$ ), por ejemplo para  $\aleph = 5 \times 10^{-7} \text{ esf}/\mu\text{m}^3 = 5 \times 10^8 \text{ esf}/l$ . También se puede poner como  $\aleph = 8.23 \times 10^{-16} \text{ mol}/l$ .

Como se puede observar la concentración de partículas permite una mayor o menor pérdida de intensidad por esparcimiento. De modo que en experimentos donde se requieren intensidades relativamente altas, como en óptica no lineal, cuando se quieren observar los cambios de índice de refracción no lineal mediante la técnica de barrido en  $Z$ , sería más conveniente usar concentraciones bajas de partículas.

### 3.3. Fase No Lineal

Ahora, considerando el campo a la salida de la muestra con estas características se puede agregar un cambio de fase no lineal para calcular de manera numérica curvas de barrido en  $Z$  propagando el campo mediante la función de transferencia en el espacio libre a campo lejano.

Con el siguiente programa desarrollado en Matlab se obtuvieron curvas de barrido en  $Z$  para cambios de fase pequeños ( $\Delta\Phi_0 = 0.1, -0.1 \text{ rad}$ ) basadas en el modelo local propuesto por Sheik-Bahae y colaboradores[12]

```

% Curvas de Z-scan bajo el Modelo Propuesto Sheik Bahae
% Con el Paso Dividido de Fourier

clear all
clc
tic
L=5.0e-1;
N=1500;
wo=15e-4;
lambda=514e-7;
zo=(pi*wo^2)/lambda;
ko=2*pi/lambda;

Z=40*zo; %Distancia de propagación

a = 0.092; %coeficiente de esparcimiento [1/mm]
d = 1.0;
alpha = 0.04; %coeficiente de absorción [1/mm]
D_Phi0 = pi;
coef_ext = a + alpha;

```

## CAPÍTULO 3. ANÁLISIS EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DEL ESPARCIMIENTO

### 3.3. FASE NO LINEAL

```

dx = L/N;
M=N+1;
for q=1:M
    for p=1:M
        % Eje espacial
        X(p) = (p-1)*dx-L/2;
        Y(q) = (q-1)*dx-L/2;

        %Eje de frecuencia
        Kx(p) = (2*pi*(p-1))/(N*dx) - ((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
        Ky(q) = (2*pi*(q-1))/(N*dx) - ((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
    end
end

[X,Y] = meshgrid(x,y);
[KX,KY] = meshgrid(Kx,Ky);
[theta,r] = cart2pol(X,Y);

%Función de transferencia en el espacio libre
H = exp(-1i*ko*Z)*exp((KX.^2+ KY.^2)*(1i*Z)/(2*ko));

j=1;
for z=-0.7:0.01:0.7

    w = wo*sqrt(1+(z/zo)^2); % Ancho del haz
    R = z*(1+(zo/z)^2); % Radio de curvatura

    if (z<0 || 0<z),

        fase = exp(-1i*(ko*r.^2/(2*R)));

        % Campo definido en el espacio libre
        Ec = exp(-coef_ext*d/2)*(wo/w)*exp(-(r.^2)/w.^2).*fase;

        %Campo en el dominio de frecuencias
        FE = fft2(Ec);

        %Campo propagado en el dominio de frecuencias
        FE_pro = FE.*fftshift(H);

        %Campo propagado en el dominio espacial
        E_pro = ifft2(FE_pro);

        %Intensidad del campo en espacio libre propagado a campo lejano
        I_pro_eje = (abs(E_pro(N/2+1,N/2+1)).^2);

        %~~~~~

        %Fase No Linela
        fase_NL = exp(-1i*(D_Phi0/(1+(z/zo).^2)).*exp(-2*r.^2/w^2));

        % Campo a la salida de la muestra
        E_sal = exp(-coef_ext*d/2)*(wo/w)*exp(-(r.^2)/(w^2)).*fase.*fase_NL;

        %Campo en el dominio de frecuencias
        FE_sal = fft2(E_sal);

        %Campo propagado en el dominio de frecuencias
        FE_sal_pro = FE_sal.*fftshift(H);

        %Campo propagado en el dominio espacial
        E_sal_pro = ifft2(FE_sal_pro);

        % Intensidad sobre eje
        I_eje = abs(E_sal_pro(N/2+1,N/2+1)).^2;

        % Transmitancia normalizada
        T_norm=I_eje/I_pro_eje;

    else

        % Campo definido en z=0
        Ec =exp(-coef_ext*d/2)*exp(-(r.^2)/wo.^2);

        %Campo en el dominio de frecuencias
        FE = fft2(Ec);

        %Campo propagado en el dominio de frecuencias
        FE_pro = FE.*fftshift(H);
    end
end

```

```

%Campo propagado en el dominio espacial
E_pro = ifft2(FE_pro);

%Intensidad del campo en espacio libre propagado a campo lejano
I_pro_eje = (abs(E_pro(N/2+1,N/2+1).^2));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Fase No Lineal en z=0
fase_NL = exp(-1i*(D_Phi0).*exp(-2*r.^2/wo^2));

% Campo a la salida de la muestra
E_sal=exp(-coef_ext*d/2)*exp(-(r.^2)./wo.^2).*fase_NL;

%Campo en el dominio de frecuencias
FE_sal = fft2(E_sal);

%Campo propagado en el dominio de frecuencias
FE_sal_pro = FE_sal.*fftshift(H);

%Campo propagado en el dominio espacial
E_sal_pro = ifft2(FE_sal_pro);

% Intensidad sobre eje
I_eje = abs(E_sal_pro(N/2+1,N/2+1).^2);

% Transmitancia normalizada
T_norm=I_eje/I_pro_eje;

end

x=z/zo;
G1(j,:)=x;
G2(j,:)=T_norm;

j=j+1;
end

G=[G1,G2];

hold on
plot(G(:,1),G(:,2),'LineWidth',2);
xlabel('z/z_0')
ylabel('Transmitancia Normalizada')

toc

```

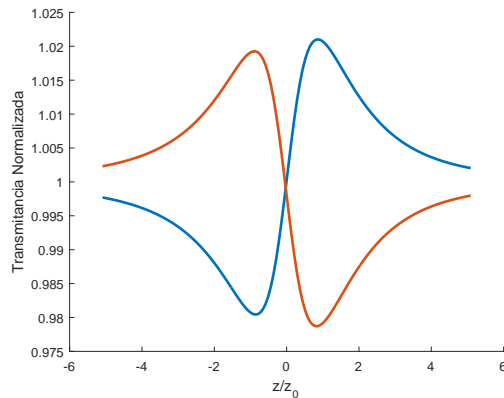


Figura 3.9: Curvas de Z-scan de la transmitancia normalizada usando un coeficiente de absorción  $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y un coeficiente de absorción  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$  (en ambas curvas) para un  $\Delta\Phi_0 = 0.1 \text{ rad}$  en color azul y para  $\Delta\Phi_0 = -0.1 \text{ rad}$  en anaranjado basadas en el modelo local propuesto por Sheik-Bahae et al.

También se calcularon curvas de Z-scan usando el modelo no local no lineal propuesto por E. V.

García y colaboradores[13], con un cambio de fase no lineal  $\Delta\Phi_0 = 0.1 \text{ rad}$  para valores del parámetro  $m = 1, 2, 4$  (ver figura 3.10), siendo el valor de  $m = 2$  el caso local mostrado en la figura 3.9. El código siguiente es el utilizado para la obtención de las curvas del modelo no local.

```

% Obtención de Curvas de Z-scan
% Bajo el modelo no local no lineal
% "Usando la función de Transferencia" (Paso Dividido de Fourier)

clear all
clc
tic

N = 1500;
L = 5.0e-1;
Ld = 514e-7;
wo = 15e-4;
zo = (pi*wo^2)/Ld;
ko = 2*pi/Ld;

m = input('Introduzca valor de m: ');
s = 40;
Z = s*zo; %Distancia de propagación total

a = 0.092; %coeficiente de esparcimiento [1/mm]
d = 1.0; %[mm]
alpha = 0.040; %[1/mm]
D_Phi0 = pi;
coef_ext = (a + alpha);

dx = L/N;
M=N+1;
for q=1:M
    for p=1:M
        % Eje espacial
        X(p) = (p-1)*dx-L/2;
        Y(q) = (q-1)*dx-L/2;

        %Eje de frecuencia
        KX(p) = (2*pi*(p-1))/(N*dx)-((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
        KY(q) = (2*pi*(q-1))/(N*dx)-((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
    end
end

[X,Y] = meshgrid(x,y);
[KX,KY] = meshgrid(Kx,Ky);
[theta,r] = cart2pol(X,Y);

%Función de transferencia en el espacio libre
H = exp(-li*ko*Z)*exp((li*(KX.^2+KY.^2)*Z)/(2*ko));

j=1;
for z=-0.7:0.01:0.7

    w = wo*sqrt(1+(z/zo)^2); % Ancho del haz
    R = z*(1+(zo/z)^2); % Radio de curvatura

    if (z<0 || 0<z),

        fase = exp(-li*(ko*r.^2)/(2*R));

        %Campo con Fase Lineal
        E_ini = (exp(-coef_ext*d/2))*(wo/w)*exp(-r.^2/w^2).*fase;

        %Campo en el dominio de frecuencias
        FE = fft2(E_ini);

        %Campo propagado en el dominio de frecuencias
        FE_pro = FE.*fftshift(H);

        %Campo propagado en el dominio espacial
        E_pro = ifft2(FE_pro);

        %Intensidad del campo en espacio libre a campo lejano
        I_pro_eje = (abs(E_pro(N/2+1,N/2+1)).^2);

        %*****

        %Fase No Lineal
        fase_NL = exp(-li*(D_Phi0/((1+(z/zo).^2)^(m/2))*exp(-m*r.^2/w^2)));

        % Campo a la salida de la muestra con Fase L y NL
        E_sal=(exp(-coef_ext*d/2))*(wo/w)*exp(-r.^2/(w^2)).*fase.*fase_NL;
    end
end

```

```

%Campo en el dominio de frecuencias
FE_sal = fft2(E_sal);

%Campo propagado en el dominio de frecuencias
FE_sal_pro = FE_sal.*fftshift(H);

%Campo propagado en el dominio espacial
E_sal_pro = ifft2(FE_sal_pro);

% Intensidad sobre eje a campo lejano
I_eje = abs(E_sal_pro(N/2+1,N/2+1).^2);

% Transmitancia normalizada
I_norm=I_eje/I_pro_eje;

else

%Campo definido en z=0
E_ini = (exp(-coef_ext*d/2))*exp(-(r.^2)/wo^2);

%Campo en el dominio de frecuencias
FE = fft2(E_ini);

%Campo propagado en el dominio de frecuencias
FE_pro = FE.*fftshift(H);

%Campo propagado en el dominio espacial
E_pro = ifft2(FE_pro);

%Intensidad del campo en espacio libre propagado a campo lejano
I_pro_eje = (abs(E_pro(N/2+1,N/2+1).^2));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Fase No Lineal en z=0
fase_NL = exp(-1i*(D_Phi0).*exp(-m*r.^2/wo^2));

%Campo a la salida de la muestra con Fase L y NL
E_sal=(exp(-coef_ext*d/2))*exp(-(r.^2)/wo^2).*fase_NL;

%Campo en el dominio de frecuencias
FE_sal = fft2(E_sal);

%Campo propagado en el dominio de frecuencias
FE_sal_pro = FE_sal.*fftshift(H);

%Campo propagado en el dominio espacial
E_sal_pro = ifft2(FE_sal_pro);

%Intensidad sobre eje a campo lejano
I_eje = abs(E_sal_pro(N/2+1,N/2+1).^2);

%Transmitancia normalizada
I_norm=I_eje/I_pro_eje;

end

x=z/z0;
G1(:,1)=x;
G2(:,1)=I_norm;

j=j+1;
end

G=[G1,G2];

hold on
plot(G(:,1),G(:,2),'Color','black','LineWidth',2);
xlabel('z/z_0')
ylabel('Transmitancia Normalizada')
toc

```

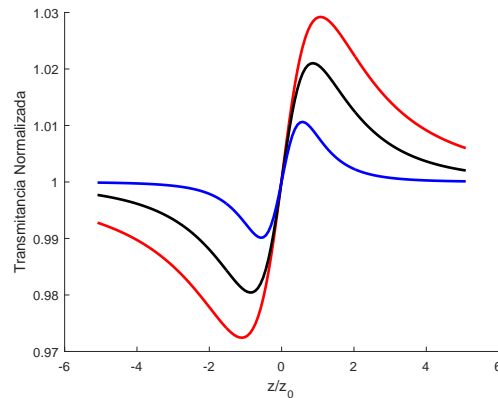


Figura 3.10: Curvas de Z-scan considerando el coeficiente de esparcimiento y absorción ( $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$ ) en cada una, para cambios de fase no lineal de  $\Delta\Phi_0 = 0.1 \text{ rad}$  con diferentes valores del parámetro  $m$ : para  $m = 1$  en color rojo, para  $m = 2$  en negro y para  $m = 4$  en azul aplicando el modelo no local no lineal.

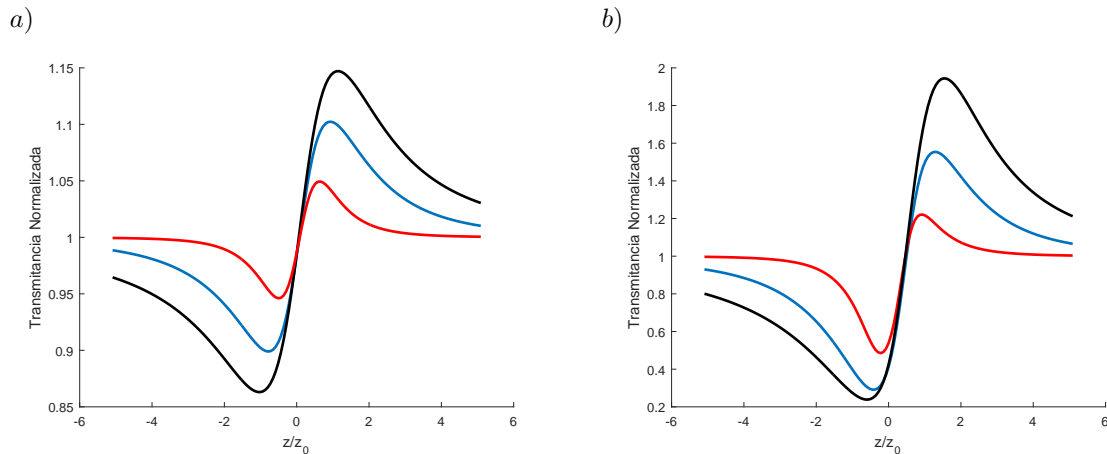


Figura 3.11: Curvas de Z-scan con el coeficiente de esparcimiento y absorción ( $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$ ) en cada una de las curvas para: a) con  $\Delta\Phi_0 = 0.5 \text{ rad}$  y b) para  $\Delta\Phi_0 = \pi$ . Donde  $m = 1$  está en negro,  $m = 4$  en rojo y el modelo local en azul.

En la siguiente gráfica se muestran otras curvas de Z-scan pero ahora con cambios de fase no lineal de  $\pi$  y mayores, donde se puede observar que para un cambio de fase por ejemplo de  $5\pi$ , el valle tiene unas pequeñas oscilaciones, esto es debido al efecto de auto-modulación espacial de fase que genera un patrón de anillos en la distribución de intensidad los cuales podemos observar en la figura 3.14 para el mismo cambio de fase.

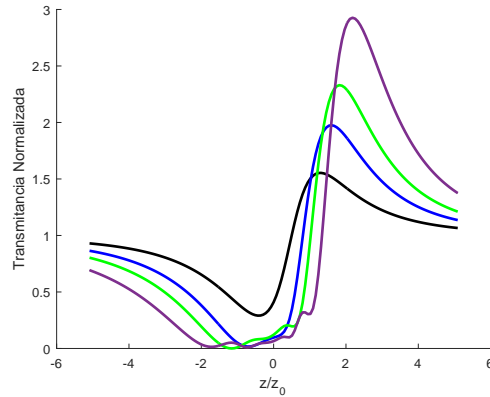


Figura 3.12: Curvas de Z-scan con  $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$  en cada curva para  $m = 2$  con diferentes cambios de fase no lineal  $\Delta\Phi_0$ : de  $\pi$  en negro,  $2\pi$  en azul,  $3\pi$  en verde y  $5\pi$  en morado.

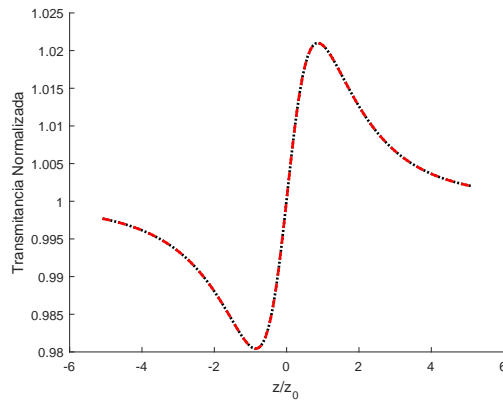


Figura 3.13: Se muestra una comparación de curvas de Z-scan: con el coeficiente de extinción ( $\alpha_{ext}$ ) en color rojo para  $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$ , en la curva con puntos negros no se considera el coeficiente  $\alpha_{ext}$ . Se usó un parámetro  $m = 2$  y un cambio de fase no lineal  $\Delta\Phi_0 = 0.1$ .

De ésta última gráfica se puede observar que las curvas con y sin el coeficiente de extinción se traslapan completamente de modo que bajo estas condiciones los fenómenos de absorción y esparcimiento no afectan o modifican las curvas de Z-scan, por lo que se puede seguir usando el mismo método de Z-scan.

Se calcula la distribución de intensidad a campo lejano basado en el paso dividido de Fourier mediante un programa en Matlab. El campo a la salida de la muestra se le ha considerado cambios de fase mayores de  $5\pi$ ,  $-5\pi$  y  $-7\pi$  para poder observar de manera adecuada el efecto de auto-modulación espacial de fase. En este mismo campo de salida se han considerado los efectos de absorción y esparcimiento. El código del programa se muestra a continuación

# CAPÍTULO 3. ANÁLISIS EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DEL ESPARCIMIENTO

## 3.3. FASE NO LINEAL

```
%Propagación con la Función de Transferencia (Paso Dividido de Fourier)
clear
clc
tic

N = 2000;
L = 7.5e-1;
Ld = 514*10^-7;
ko = (2*pi)/Ld;
wo = 15*10^-4;
zo = (pi*wo^2)/Ld;

a = 0.092; %coeficiente de esparcimiento [1/mm]
d = 1.0; %[mm]
alpha = 0.040; %[1/mm]
D_Phi0 = -5*pi;

m=2;

s = 40;
Z=s*zo; %distancia de propagación

dx = L/N;
M=N+1;
for q=1:M
    for p=1:M
        % Eje espacial

        x(p) = (p-1)*dx-L/2;
        y(q) = (q-1)*dx-L/2;

        %Eje de frecuencia
        Kx(p) = (2*pi*(p-1))/(N*dx)-((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
        Ky(q) = (2*pi*(q-1))/(N*dx)-((2*pi*(M-1))/(N*dx))/2;
    end
end

[X,Y] = meshgrid(x,y);
[KX,KY] = meshgrid(Kx,Ky);
[theta,r] = cart2pol(X,Y);

z=zo;
w = wo*sqrt(1+(z/zo)^2); % Ancho del haz
R = z*(1+(zo/z)^2); % Radio de curvatura

%fase lineal:
fase = exp(-1i*(ko*r.^2)/(2*R));
%Fase No Lineal:
fase_NL = exp(-1i*(D_Phi0/((1+(z/zo).^2)^(m/2))*exp(-m*r.^2/w^2)));

%Campo inicial (a la salida de la muestra):
E_ini=(exp(-(a + alpha)*d/2))*(wo/w)*exp(-r.^2/(w^2)).*fase.*fase_NL;

%Energía inicial del haz:
Energia_ini = dx*dx*sum(sum(abs(E_ini).^2))

%Función de transferencia en el espacio libre:
H = exp(-1i*ko*z)*exp((1i*(KX.^2+KY.^2)*z)/(2*ko));

%Haz en el dominio de frecuencias:
FE = fft2(E_ini);

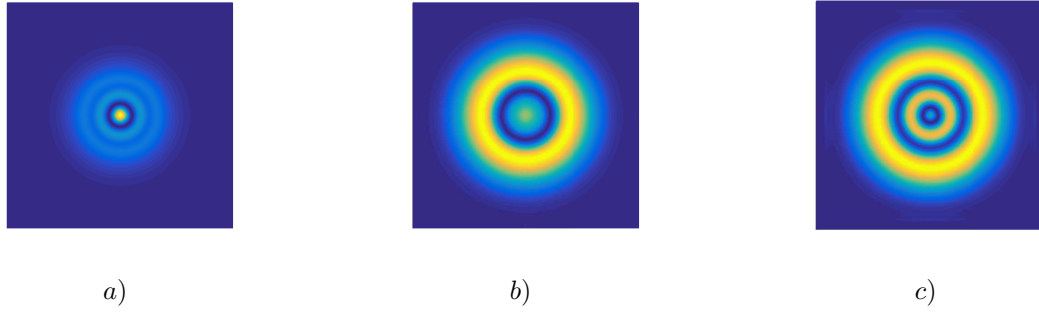
%Haz propagado en el dominio de frecuencias:
FE_pro = FE.*fftshift(H);

%Haz propagado en el dominio espacial:
E_pro = ifft2(FE_pro);

%Energía del haz propagado:
Energia_pro = dx*dx*sum(sum(abs(E_pro).^2))

figure;
mesh(x,y,(abs(E_pro)).^2)
xlabel('x','FontSize',8)
ylabel('y','FontSize',8)
axis auto
axis off

toc
```



*Figura 3.14: Distribuciones de intensidad del haz propagado a campo lejano mediante la función de transferencia en el espacio libre usando  $\alpha_s = 0.092 \text{ mm}^{-1}$  y  $\alpha_a = 0.04 \text{ mm}^{-1}$  en el coeficiente de extinción. Se puede observar el patrón de anillos producido por la auto-modulación espacial de fase para un cambio de fase no lineal: a) con  $\Delta\Phi_0 = 5\pi$ , b) con  $\Delta\Phi_0 = -5\pi$  y c) con  $\Delta\Phi_0 = -7\pi$ .*

Cabe recordar que todas las gráficas del barrido en  $Z$  se hicieron considerando los efectos de absorción y esparcimiento mediante el coeficiente de extinción. Los resultados obtenidos son similares a los resultados numéricos reportados en las referencias: [12] para el caso del modelo local y en [13] del modelo no local no lineal. Podemos observar que aún considerando los efectos de absorción y esparcimiento es posible llegar a producir los efectos de auto-enfocamiento y auto-desenfocamiento que produce el cambio de índice de refracción no lineal inducido por el haz de luz que pasa por el material. Además, si los cambios de fase son grandes ( $\Delta\Phi_0 > 2\pi$ ) se puede llegar a observar el efecto de auto-modulación espacial de fase (Figura 3.14).



## Capítulo 4

# Conclusiones

Como se puede observar en las gráficas de las figuras 3.4 y 3.5 el esparcimiento es prácticamente frontal y a medida que el tamaño de las partículas es más grande que la longitud de onda, el lóbulo crece y se hace más estrecho por lo que es claro que el esparcimiento depende del tamaño de las partículas como lo describe la teoría de Mie.

Se pudo observar que la función Gaussiana es una buena aproximación al lóbulo frontal del esparcimiento para partículas con un diámetro de  $1 \mu m$  para una longitud de onda de  $633 nm$ , mientras que para partículas con diámetro de  $10 \mu m$  la razón  $I_G/I_{dat} \approx 0.95$ , sin embargo si aplicamos el ajuste dentro de la zona paraxial, es decir para valores de  $\rho \ll r$ , la función Gaussiana se ajusta mejor como se observa en la figura 3.8 incluso al comparar las integrales en esa región nos da un valor de aproximadamente 1.0 por lo que se justifica el uso de la función Gaussiana como ajuste.

De los resultados de la tabla 3.2 se puede concluir que para captar al menos el 99% de la luz esparcida se requiere una abertura o detector de  $6 cm$  de radio, sin embargo una abertura pequeña ayuda a registrar mejor los cambios en la intensidad producidos por los efectos no lineales como el auto-enfocamiento o auto-desenfocamiento producidos por el cambio de índice de refracción no lineal.

De los resultados experimentales se puede observar que la luz esparcida se encuentra en un cono de luz menor a 4 grados y de acuerdo con la teoría de Mie se trata de partículas más grandes a la longitud de onda de la luz incidente. Tomando en cuenta los resultados del análisis numérico para partículas con un diámetro de  $10 \mu m$  se puede decir que las partículas analizadas experimentalmente son de un tamaño mayor a  $10 \mu m$ . Por lo que el 99% de la energía esparcida por el material se encuentra ubicada en una sección transversal de radio  $\rho < 6 cm$ .

La concentración de partículas es importante en la determinación de la cantidad de luz que atraviesa una sustancia de espesor  $d$ , en este caso en particular, para tener al menos un 94% de la intensidad a la salida del material se requiere de una concentración de  $1 \times 10^8 \text{ esf/l}$  considerando un  $\alpha = 0.04 \text{ mm}^{-1}$ .

El fenómeno de esparcimiento es importante ya que como se pudo observar ocasiona pérdidas de energía considerables si se consideran concentraciones de partículas altas de materiales que presentan esta propiedad.

Aún con la consideración del fenómeno de esparcimiento se puede llegar a observar los efectos que produce el cambio de índice de refracción no lineal como el auto-enfocamiento o la auto-modulación espacial de fase y pueden seguir siendo medidos mediante la técnica de barrido en  $Z$ .



# Bibliografía

- [1] Robert D. Guenther. *Modern Optics*. John Wiley and Sons, Inc., 1990.
- [2] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Third edition.
- [3] Mark Csele. *Fundamentals of light sources and lasers*. John Wiley and Sons, Inc., 2004.
- [4] G. S. Smith. Human color vision and the unsaturated blue color of the daytime sky. *Am. J. Phys*, 73(3):590–597, 07 2005.
- [5] A. T. Young. Rayleigh scattering. *Phys. Today*, 35(1), 1982.
- [6] del Mazo Vivar A. Esparcimiento de rayleigh. *Revista sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 13(2):505–510, 2016.
- [7] Craig F. Bohren and Alistair B. Fraser. Colors of the sky. *The Physics Teacher*, 23:267–272, May 1985.
- [8] Helmut Horvath. Gustav mie and the scattering and absorption of light by particles: Historic developments and basics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 110:787–799, 2009.
- [9] I. Makra et al. A method based on light scattering to estimate the concentration of virus particles without the need for virus particle standards. methods. *Am. J. Phys*, 2:91–99, 2015.
- [10] I. S. Saidi et al. Mie and rayleigh modeling of visible-light scattering in neonatal skin. *APPLIED OPTICS*, 34(31):7410–7418, 11 1995.
- [11] W. C. Mundy et al. Mie scattering by spheres in an absorbing médium. *JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA*, 64(12):1593–1597, 12 1974.
- [12] M. Sheik-Bahae, Ali A. Said, and et al. Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 26(4), 1990.
- [13] E. V. García Ramírez, M. L. Arroyo Carrasco, M. M. Méndez Otero, E. Reynoso Lara, S. Chavez-Cerda, and M. D. Iturbe Castillo. Z-scan and spatial self-phase modulation of a gaussian beam in a thin nonlocal nonlinear media. *J. Opt.*, 13, 2011.
- [14] A. Beléndez. La unificación electromagnética: 150 aniversario de las ecuaciones de maxwell. *Métode*, (84):16–21, 2015.
- [15] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [16] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley and Sons, 1991.
- [17] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1996.

- [18] Ting-Chung Poon and Taegeun Kim. *Engineering Optics With MATLAB*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.
- [19] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley and Sons, Inc., 1991.
- [20] Y. R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. John Wiley and Sons.
- [21] S. D. Durbin, S. M. Arakelian, and Y. R. Shen. Laser-induced diffraction rings from a nematic-liquid-crystal film. *Optics Letters*, 6(9), 1981.
- [22] Francesco Simoni. *Nonlinear Optical Properties of Liquid Crystals and Polymer Dispersed Liquid Crystals*, volume 2. World Scientific.
- [23] Grant R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover Publications, 2nd edition, 1989.
- [24] Peter W. Milonni and Joseph H. Everly. *Laser Physics*. John Wiley and Sons, Inc., 2010.
- [25] William T. Silfvast. *Lasers Fundamentals*. Cambridge University Press, second edition, 2004.
- [26] David J Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, third edition.
- [27] P. W. Milonni. Why spontaneous emission? *Am. J. Phys*, 52(4):340–343, 1984.
- [28] M. Cray, M. L. Shih, and P. W. Milonni. Stimulated emission, absorption, and interference. *Am. J. Phys*, 50(11):1016–1021, 1982.
- [29] Thomas G. Myerhofer, Andrei V. Pipa, and Jurgen Popp. Beer’s law-why integrated absorbance depends linearly on concentration. *ChemPhysChem*, 20:2748–2753, 2019.
- [30] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc., 3rd edition, 1999.
- [31] Craig F. Bohren and Donald R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. John Wiley and Sons, Inc., 1998.
- [32] Eugene Hecht. *Óptica*. PERSON EDUCATION, 5th edition, 2017.
- [33] Gustav Mie. *ANNALEN DER PHYSIK*, 25(3):377–445, 01 1908.
- [34] Mie scattering calculator, recuperado de: [https://omlc.org/calc/mie\\_ calc.html](https://omlc.org/calc/mie_calc.html).