Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Transformación de una función de onda bajo cambios de sistema de referencia

Tesis
que para obtener el título de licenciatura de física
Presenta
Brenda Citlali Nájera Salazar

Director:
Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Junio 2018

Presidente:
Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Secretario:
Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Vocal:
Dr. Hector Novales Sanchéz

Suplente:
Dr. Roberto Cartas Fuentevilla

Director:
Dr. Gerardo F. Torres del Castillo

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por el apoyo brindado desde un principio, este reto superado también es de ellos.

A mi asesor por el apoyo brindado, sus enseñanzas y la paciencia que tuvo en cada uno de los proyectos que realizamos juntos.

A mis hermanos que con sus porras y ocurrencias hicieron de esta travesía un poco más llevadera.

A mi novio que su paciencia y cariño, siempre me ayudó a sobrellevar los días pesados.

A Renato, porque aunque pasará mucho tiempo sin verlo, a su lado siempre me hacía sentir en casa.

Índice general

Resumen

Usualmente, la función de onda empleada en la mecánica cuántica no relativista, y la función principal de Hamilton, que es parte de la formulación de Hamilton en la mecánica clásica, se comportan como campos escalares (por ejemplo, cuando se pasa de coordenadas cartesianas a otras coordenadas curvilíneas). Sin embargo, para transformaciones como la de Galileo, las que llevan de un sistema de referencia a otro, o acelerado con respecto al primero, la función de onda requiere de un factor de fase extra y la función principal de Hamilton requiere un término adicional. En este trabajo se deduce en una forma simple la transformación de una función de onda bajo cambios de sistema de referencia.

Palabras clave: Funciones de onda; función principal de Hamilton; marco de referencia.

Introducción

Existen varios trabajos donde se halla el operador de transformación de un vector de estado o de una función de onda, estos trabajos requieren de alguna condición para poder encontrar dicho operador, lo cual resulta ser un tanto restrictivo para su uso, por ello estudiamos cada uno de los procedimientos y tratamos de hacerlo lo más general posible.

Una forma para encontrar la ley de transformación de una función de onda bajo un cambio de marco de referencia aplicable a los casos de interés donde la transformación forma un grupo continuo, consiste en encontrar un generador infinitesimal de la acción del grupo sobre las funciones de onda, luego con la ayuda de un mapeo exponencial, se pueden construir los elementos del grupo, haciendo uso de la formula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), la transformación deseada puede ser expresada de manera conveniente (ver ejemplos en Ref. [1, 2, 3, 4]).

Otro enfoque consiste en que el hamiltoniano se transforme en un operador específico, con respecto al cambio del marco que se está considerando, y buscando una transformación de la función de onda, de tal manera que una solución de la ecuación de Schrödinger en el marco inicial, es mapeada en una solución de la ecuación de Schrödinger en el segundo marco (ver ejemplos en Ref. [5,6]). En este enfoque no es necesario considerar un grupo continuo de transformaciones, pero se tiene que postular la forma del nuevo hamiltoniano.

En este trabajo aplicamos un método simple para encontrar el operador que representa el efecto de un cambio de marco sobre vectores de estado (o funciones de onda), sin tener que imponer desde un inicio alguna especificación para el hamiltonano. Además este método es aplicable a transformaciones que no pertenecen a un grupo continuo y no se tiene que lidiar con transformaciones infinitesimales.

Los principales resultados de esta tesis han sido reportados en la Ref. [7].

Capítulo 1

Transformación de una función de onda

En el contexto de la mecánica cuántica no relativista queremos analizar cómo se transforma una función de onda, al pasar de un marco de referencia con coordenadas y momentos x_i y p_i, a otro con coordenadas y momentos X_i y P_i, para ello es necesario hacer uso de un operador unitario U el cual se define por

$$U x_i U^{-1} = X_i(x_j, t), \qquad\qquad U p_i U^{-1} = P_i(p_j, t) \tag{1.1}$$

donde x_i y p_i son operadores hermitianos que representan coordenadas cartesianas y momentos en un marco de referencia, las X_i son funciones de x_j y de t, y las P_i son funciones de p_j y de t, medidas desde otro marco de referencia diferente al primero. Se debe notar que la Ec. (1.1) define a U hasta un factor de fase que depende solamente de t. El estado del sistema se transforma de acuerdo con:

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \tag{1.2}$$

por lo que la ecuación de Schrödinger $i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H\,|\psi\rangle$ se reescribe de la siguiente manera

$$i\hbar\frac{d\,|\psi'\rangle}{dt} = i\hbar\frac{d}{dt}(U\,|\psi\rangle) = UH\,|\psi\rangle + i\hbar\frac{dU}{dt}\,|\psi\rangle = KU\,|\psi\rangle \tag{1.3}$$

multiplicando el operador U^{-1} por la derecha, de la Ec. (1.3) encontramos que

$$K = UHU^{-1} + i\hbar\frac{dU}{dt}U^{-1} \tag{1.4}$$

mostrando que U mapea cualquier solución de la ecuación de Schrödinger $i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H\,|\psi\rangle$ en una solución de $i\hbar\frac{d|\psi'\rangle}{dt} = K\,|\psi'\rangle$ donde K es el operador hamiltoniano equivalente a la transformación de un cambio de coordenadas. Esta última ecuación demuestra que si U depende explícitamente del tiempo, entonces el hamiltoniano no se transforma siguiendo la regla simple $H \mapsto UHU^{-1}$ (compare con la Ref. [8]). Si el factor de fase arbitrario contenido en U se puede elegir de tal manera que $K = H$, entonces se dice que H es invariante bajo U [3]. (Note que estamos trabajando en la imagen de Schrödinger.)

Dentro de la mecánica cuántica encontramos los operadores de posición $\boldsymbol{x}$ y momento $\boldsymbol{p}$ con estados propios $|\boldsymbol{x_0}\rangle$ y $|\boldsymbol{p_0}\rangle$ respectivamente, que actúan de la forma $\boldsymbol{x}\,|\boldsymbol{x_0}\rangle = \boldsymbol{x_0}\,|\boldsymbol{x_0}\rangle$ y $\boldsymbol{p}\,|\boldsymbol{p_0}\rangle = \boldsymbol{p_0}\,|\boldsymbol{p_0}\rangle$. Ahora haciendo uso de la Ec. (1.1) tenemos

$$\boldsymbol{x}U^{-1}\,|\boldsymbol{x_0}\rangle = U^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)\,|\boldsymbol{x_0}\rangle$$

debido a que $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ es función de $\boldsymbol{x}$, al actuar sobre el ket $|\boldsymbol{x_0}\rangle$ la función $\boldsymbol{X}$ se evalúa en $\boldsymbol{x_0}$ de tal forma que

$$\boldsymbol{x}U^{-1}\,|\boldsymbol{x_0}\rangle = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0},t)U^{-1}\,|\boldsymbol{x_0}\rangle$$

esta ecuación nos dice que $U^{-1}\,|\boldsymbol{x_0}\rangle$ es un estado propio de $\boldsymbol{x}$ con valor propio $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0},t)$, así

$$U^{-1}\,|\boldsymbol{x_0}\rangle = e^{i\alpha/\hbar}\,|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0},t)\rangle \tag{1.5}$$

donde α es un número real, el cual puede depender de $\boldsymbol{x_0}$, t, y los parámetros contenidos en U. De manera similar, a partir de la Ec.(1.1) se deduce que

$$U^{-1}\,|\boldsymbol{p_0}\rangle = e^{i\beta/\hbar}\,|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p_0},t)\rangle \tag{1.6}$$

donde β es un número real, el cual puede depender de $\boldsymbol{p_0}$, t, y los parámetros contenidos en U.

Por definición sabemos que $\psi(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\,\psi\rangle$, con base en esta definición y haciendo uso de la Ec. (1.2) se observa que $\psi'(\boldsymbol{x_0}) = \langle \boldsymbol{x_0}|\,U\,|\psi\rangle$; al conjugar la Ec. (1.5) obtenemos $\langle \boldsymbol{x_0}|\,U = e^{-i\alpha/\hbar}\,\langle \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0},t)|$, por lo tanto, la función de onda se transforma de acuerdo con

$$\psi'(\boldsymbol{x_0}) = \langle \boldsymbol{x_0}|\,U\,|\psi\rangle = e^{-i\alpha/\hbar}\,\langle \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0},t)|\,\psi\rangle = e^{-i\alpha/\hbar}\psi(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_o},t)), \tag{1.7}$$

como se verá en algunos ejemplos posteriores, en ciertos casos α es diferente de cero.

Los únicos valores por determinar para conocer por completo la transformación de la función de onda son α y β, por ende formamos el producto escalar $\langle \boldsymbol{x_0}| UU^{-1} |\boldsymbol{p_0}\rangle = \langle \boldsymbol{x_0}| \, \boldsymbol{p_0}\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp(i\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{x_0}/\hbar)$, lo cual, en virtud de las Ecs. (1.5), (1.6) y de la unitariedad de U, debe coincidir con

$$e^{i(\beta-\alpha)/\hbar} \langle \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t)| \, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p_0}, t)\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp\{\frac{i}{\hbar}[\beta - \alpha + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p_0}, t) \cdot \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t)]\}$$

por lo tanto

$$\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{x_0} = \beta - \alpha + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{p_0}, t) \cdot \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t) \tag{1.8}$$

Para conocer explícitamente las funciones α y β debemos establecer las funciones $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p_0}, t)$ y $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t)$ correspondientes a la transformación deseada, por ello en las siguientes secciones damos ejemplos de algunas transformaciones.

1.1. Traslación espacial

Un ejemplo relativamente simple de un cambio de coordenadas corresponde a la traslacion. Una traslación espacial por un vector constante $\boldsymbol{a}$ puede ser definido por la Ec. (1.1) con

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \qquad\qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} \tag{1.9}$$

luego, a partir de la Ec. (1.8) tenemos $\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{x_0} = \beta - \alpha + \boldsymbol{p_0} \cdot (\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{a})$ es decir

$$\alpha = \beta - \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{a}.$$

Como se mencionó anteriormente, α depende de $\boldsymbol{x_0}$ y t, β a su vez depende de $\boldsymbol{p_0}$ y t, por ende se puede concluir que:

$$\alpha = \chi(t), \qquad\qquad \beta = \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{a} + \chi(t) \tag{1.10}$$

donde $\chi(t)$ es una función de valores reales que depende solo de t. Sustituyendo la expresión para β en la Ec. (1.6) y haciendo uso de la Ec. (1.9), obtenemos que

$$U^{-1} |\boldsymbol{p_0}\rangle = e^{i\chi/\hbar} e^{i\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} |\boldsymbol{p_0}\rangle = e^{i\chi/\hbar} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} |\boldsymbol{p_0}\rangle$$

lo que equivale a

$$U^{-1} = e^{i\chi/\hbar} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} \tag{1.11}$$

sustituyendo (1.11) y la primera ecuación de (1.9) en (1.5) obtenemos la bien conocida relación

$$e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar} |\boldsymbol{x_0}\rangle = |\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{a}\rangle \tag{1.12}$$

(que se observa en la Ref. [1]). Por otro lado, de las Ecs. (1.4) y (1.11), encontramos que K viene dado por

$$K = UHU^{-1} + \frac{d\chi}{dt} \tag{1.13}$$

de modo que si elegimos a H como

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}, \tag{1.14}$$

donde $\boldsymbol{F}$ es un vector, correspondiente a una partícula sujeta a una fuerza constante $\boldsymbol{F}$, entonces

$$\begin{aligned} K &= U\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}\right)U^{-1} + \frac{d\chi}{dt} \\ &= \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{d\chi}{dt} \\ &= H + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{d\chi}{dt} \end{aligned}$$

debido a que estamos considerando una partícula en un campo de fuerza uniforme y U representa una traslación, si exigimos que $K = H$, por ende $\chi = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}t$ y de acuerdo con (1.7) la función de onda debe transformarse como

$$\psi'(\boldsymbol{x_0}) = e^{i\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}t/\hbar}\psi(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{a}). \tag{1.15}$$

Se observa que, para esta elección de χ de acuerdo con la Ec. (1.11) el operador de traslación correspondiente es $U = e^{-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{F}t)\cdot\boldsymbol{a}/\hbar}$.

1.2. Traslación en el momento

A pesar de que no es un cambio de marco, vamos a considerar una "traslación" en el momento, definida por $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{b}$ es un vector constante. En este caso la Ec. (1.8) resulta ser $\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{x_0} = \beta - \alpha(\boldsymbol{p_0} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x_0}$ de la cual se deriva que

$$\alpha = -\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x_0} + \chi(t) \qquad\qquad \beta = \chi(t). \tag{1.16}$$

donde $\chi(t)$ es una función de valor real que depende solo de t. Entonces para la Ec. (1.5) obtenemos

$$U^{-1}\left|\boldsymbol{x_0}\right\rangle = e^{i\chi/\hbar}e^{-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x_0}/\hbar}\left|\boldsymbol{x_0}\right\rangle = e^{i\chi/\hbar}e^{-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}\left|\boldsymbol{x_0}\right\rangle$$

lo que significa que

$$U^{-1} = e^{i\chi/\hbar} e^{-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar} \tag{1.17}$$

y de la Ec. (1.6) tenemos $U^{-1} |\boldsymbol{p_0}\rangle = e^{i\chi/\hbar} |\boldsymbol{p_0} - \boldsymbol{b}\rangle$, es decir,

$$e^{-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar} |\boldsymbol{p_0}\rangle = |\boldsymbol{p_0} - \boldsymbol{b}\rangle \tag{1.18}$$

Otra forma útil se sigue de la segunda ecuación en (1.1): $U p_i U^{-1} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b}$ o equivalentemente,

$$e^{i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar} \boldsymbol{p} e^{-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b}. \tag{1.19}$$

Puede notarse que las Ecs. (1.18) y (1.19) no contienen la función χ.

1.3. Transformación de Galileo

En este caso las funciones $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ y $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, t)$ son dadas por las transformaciones de Galileo $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{V}t$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{V}$ por ello la Ec. (1.8) resulta ser

$$\boldsymbol{p_o} \cdot \boldsymbol{x_0} = \beta - \alpha + (\boldsymbol{p_0} - m\boldsymbol{V}) \cdot (\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{V}t)$$

es decir

$$\alpha + m\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{x_0} - \frac{1}{2} m V^2 t = \beta - \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{V}t + \frac{1}{2} m V^2 t$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \alpha &= -m\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{x_0} + \frac{1}{2} m V^2 t + \chi(t) \\ \beta &= \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{V}t - \frac{1}{2} m V^2 t + \chi(t) \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde χ es una función real que depende solo de t. De tal manera, de acuerdo con la Ec. (1.5) tenemos

$$U^{-1} |\boldsymbol{x_0}\rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-m\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{x_0} + \frac{1}{2} m V^2 t + \chi(t)\right]\right\} |\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{V}t\rangle \tag{1.21}$$

ocupando la Ec. (1.12) puede ser expresada como

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-m\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{x_0} + \frac{1}{2} m V^2 t + \chi(t)\right]\right\} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}t/\hbar} |\boldsymbol{x_0}\rangle$$

o equivalentemente

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2} m V^2 t + \chi(t)\right]\right\} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}t/\hbar} e^{-im\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar} |\boldsymbol{x_0}\rangle$$

en consecuencia

$$U^{-1} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}mV^2 t + \chi(t)\right]\right\} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}t/\hbar} e^{-im\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}. \tag{1.22}$$

Podemos determinar la función $\chi(t)$ si nosotros imponemos una relación específica entre los hamiltonianos H y K. Sustituyendo (1.22) en la Ec. (1.4) y con ayuda de (1.19) encontramos

$$K = UHU^{-1} - \frac{1}{2}mV^2 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{d\chi}{dt} \tag{1.23}$$

(compare con Ref. [9]). Por lo tanto si tomamos $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$, tenemos

$$K = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{V})^2 - \frac{1}{2}mV^2 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{d\chi}{dt}$$

el cual coincide con H si $\chi(t) = 0$. Otros hamiltonianos son invariantes bajo la transformación de Galileo, si elegimos la χ adecuada. Si no se permite la presencia de un factor de fase $e^{i\chi/\hbar}$ en U^{-1} se llega a una conclusión errónea, que solo el hamiltoniano de la partícula libre es invariante bajo la transformación de Galileo [10].

1.4. Aceleración constante

Ahora consideremos los efectos de un marco de referencia con aceleración constante $\boldsymbol{a}$ respecto al primero (inercial), correspondiendo a

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{a}t$$

sustituyendo esta expresión en la Ec. (2.7) obtenemos

$$\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{x_0} = \beta - \alpha + (\boldsymbol{p_0} - m\boldsymbol{a}t)\cdot(\boldsymbol{x_0} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2)$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= -m\boldsymbol{a}t\cdot\boldsymbol{x_0} + \tfrac{1}{6}ma^2t^3 + \chi(t) \\ \beta &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{a}t^2 - \tfrac{1}{3}ma^2t^3 + \chi(t) \end{aligned} \tag{1.24}$$

donde $\chi(t)$ es una función que depende solamente de t y hemos incluido el término $\frac{1}{6}ma^2t^3$ en α por conveniencia para más adelante. La expresión del operador U^{-1} puede ser obtenida mediante el cálculo $U^{-1}|\boldsymbol{x_0}\rangle$, siguiendo los mismos pasos que en la sección 1.3. Alternativamente podemos empezar por considerar la acción de U^{-1} sobre $|\boldsymbol{p_0}\rangle$. De las Ecs. (1.6), (1.24) y (1.18) encontramos que

$$\begin{aligned}
U^{-1}|\boldsymbol{p_0}\rangle &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{a}t^2-\frac{1}{3}ma^2t^3+\chi(t)\right]\right\}|\boldsymbol{p_0}-m\boldsymbol{a}t\rangle \\
&= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+m\boldsymbol{a}t)\cdot\boldsymbol{a}\,t^2-\frac{1}{3}ma^2t^3+\chi(t)\right]\right\}|\boldsymbol{p_0}-m\boldsymbol{a}t\rangle \\
&= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{6}ma^2t^3+\chi(t)\right]\right\}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}t^2/2\hbar}|\boldsymbol{p_0}-m\boldsymbol{a}t\rangle \\
&= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{6}ma^2t^3+\chi(t)\right]\right\}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}t^2/2\hbar}e^{-im\boldsymbol{a}t\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}|\boldsymbol{p_0}\rangle
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$U^{-1}=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{6}ma^2t^3+\chi(t)\right]\right\}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}t^2/2\hbar}e^{-im\boldsymbol{a}t\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}$$

así, para la Ec. (1.4) y haciendo uso de la Ec. (1.19), obtenemos

$$K=UHU^{-1}+\boldsymbol{a}t\cdot\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}ma^2t^2+\frac{d\chi}{dt}, \tag{1.25}$$

si elegimos al hamiltoniano como $H=\boldsymbol{p}^2/2m$, correspondiente a una partícula libre, tenemos

$$\begin{aligned}
K &= \frac{(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{a}t)^2}{2m}+\boldsymbol{a}t\cdot\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}ma^2t^2+\frac{d\chi}{dt} \\
&= \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}+\frac{d\chi}{dt}
\end{aligned}$$

eligiendo $\chi=0$, el hamiltoniano K corresponde a una partícula en un campo de fuerza uniforme de intensidad $m\boldsymbol{a}$ y las Ec.(1.7) y (1.24) reproducen el resultado de la Ref. [6].

1.5. Rotación

Analizamos el caso de un sistema de referencia en rotación con respecto a uno inercial, por lo que las funciones correspondientes son:

$$\boldsymbol{X}=(x\cos(\omega t)+y\,\mathrm{sen}(\omega t),-x\,\mathrm{sen}(\omega t)+y\cos(\omega t),z)=\boldsymbol{Rx}$$

$$\boldsymbol{P}=(p_x\cos(\omega t)+p_y\,\mathrm{sen}(\omega t),-p_x\,\mathrm{sen}(\omega t)+p_y\cos(\omega t),p_z)=\boldsymbol{Rp}$$

con

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \operatorname{sen}(\omega t) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\boldsymbol{R}$ es la matriz de rotación alrededor del eje z, sustituyendo estas expresiones en la Ec. (1.8) tenemos

$$x_0 p_{x_0} + y_0 p_{y_0} + z_0 p_{z_0} = \beta - \alpha + x_0 p_{x_0} + y_0 p_{y_0} + z_0 p_{z_0}$$

por lo que

$$\beta = \chi(t) = \alpha \tag{1.26}$$

reemplazando está expresión en la Ec. (1.5) y haciendo uso de $U_{\boldsymbol{R}} = e^{-i\omega t L_z/\hbar}$ de la Ref. [11], obtenemos

$$U^{-1} |\boldsymbol{x_0}\rangle = e^{i\chi/\hbar} |\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x_0}, t)\rangle = e^{i\chi/\hbar} |\boldsymbol{R}\, \boldsymbol{x_0}\rangle = e^{i\chi/\hbar} e^{-i\omega t L_z/\hbar} |\boldsymbol{x_0}\rangle$$

lo que equivale a

$$U^{-1} = e^{i\chi/\hbar} e^{-i\omega t L_z/\hbar} \tag{1.27}$$

de la Ec. (1.26) se observa que llegamos al generador de rotación L_z. Si consideramos el hamiltoniano de una partícula con carga e y masa m, inmersa en un campo magnético constante B_0 dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{eB_0 y}{2c} \right)^2 + \left(p_y - \frac{eB_0 x}{2c} \right)^2 + p_z^2 \right] \tag{1.28}$$

entonces las Ecs. (1.4), (1.27) y (1.28) resultan ser

$$K = H + \frac{d\chi}{dt} - \omega(xP_y - yP_x)$$

si elegimos a $\omega = \frac{-eB_0}{2mc}$ y $\chi(t) = 0$ entonces K es

$$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{eB_0}{2c} \right)^2 (x^2 + y^2)$$

que es la suma del hamiltoniano de un oscilador armónico bidimensional y el de una partícula libre unidimensional.

Capítulo 2

Conexión con la mecánica clásica

En esta sección demostraremos que la función α obtenida en los ejemplos de la capítulo 1 coincide con la función F_1 definida por

$$P_i dX_i - H dt - (p_i dx_i - K dt) = dF_1 \tag{2.1}$$

donde $H = H(X_i, P_i, t)$ y $K(x_i, p_i, t)$ son funciones hamiltonianas para las coordenadas canónicas (X_i, P_i) y (x_i, p_i), respectivamente. Como es bien sabido, la transformación que relaciona las coordenadas (X_i, P_i, t) y (x_i, p_i, t) de la extensión al espacio fase, es canónica si y solo si existe una función F_1 de tal manera que Ec. (2.1) se satisface. A menudo, la función F_1 es llamada una función generatriz de la transformación [12, 13].

En el caso considerado en la sección 1.1, la Ec. (2.1) toma la forma

$$\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{x} - H dt - \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{x} + K dt = dF_1$$

es decir $(K - H)dt = dF_1$ lo cual es equivalente a decir que $K - H$ es alguna función que depende solo de t; por lo tanto F_1 es alguna función $\chi(t)$ por lo que

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) - H(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, t) = \frac{d\chi}{dt}$$

Si H es dado por la Ec. (1.14), entonces

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) &= \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} - \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{X} + \frac{d\chi}{dt} \\ &= \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{d\chi}{dt} \end{aligned}$$

si elegimos a $\chi(t) = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a}t$ se puede reducir la expresión anterior a $\frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} - \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}$.

En el caso de una traslación en el momento sección 1.2 la Ec. (2.1) resulta

$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})\cdot d\boldsymbol{x}-Hdt-(\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{x}-K)dt=dF_1$$

o

$$(K-H)dt=d(F_1+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}),$$

es equivalente a la existencia de una función $\chi(t)$ tal que $F_1+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=\chi(t)$ y $K-H=d\chi/dt$. Así, $F_1=-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}+\chi(t)$, se puede observar que coincide con la expresión para α dada en en Ec. (1.16).

Para la transformación de Galileo, considerada en la sección 1.3 de Ec. (2.1) tenemos

$$(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{V})\cdot d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{V}t)-Hdt-(\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{x}-Kdt)=dF_1$$

es decir

$$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}dt-m\,\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{x}+mV^2dt+(K-H)dt=dF_1$$

puede ser escrita de la forma

$$(K-H-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}mV^2)dt=d(F_1-\frac{1}{2}mV^2t+m\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x}).$$

Por lo tanto existe una función $\chi(t)$ tal que

$$F_1=\frac{1}{2}mV^2t-m\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x}+\chi(t)$$

coincide con la expresión para α en la Ec. (1.20) y

$$K=H+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}-\frac{1}{2}mV^2+\frac{d\chi(t)}{dt}$$

equivalente a la Ec. (1.23). Si $H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P},t)=\boldsymbol{P}^2/2m$, entonces

$$\begin{aligned}K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)&=\frac{(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{V})^2}{2m}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V}-\frac{1}{2}mV^2+\frac{d\chi}{dt}\\&=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\frac{d\chi}{dt}\end{aligned}$$

donde $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ coincide con $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ si $\chi(t)=0$.

En el caso de aceleración constante considerada en la sección 1.4 para la Ec. (2.1) tenemos

$$(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{a}t) \cdot d(\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2) - Hdt - (\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{x} - Kdt) = dF_1$$

o equivalentemente

$$(K - H - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}t + \frac{1}{2}ma^2t^2 + m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})dt = d(F_1 + m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}t - \frac{1}{6}ma^2t^3)$$

por lo tanto existe una función $\chi(t)$ tal que

$$F_1 = -m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}t + \frac{1}{6}ma^3t^3 + \chi(t)$$

corresponde al primer término de la Ec. (1.24), ahora

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = H(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, t) + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}t - \frac{1}{2}ma^2t^2 - m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{d\chi}{dt}.$$

Tomando $H(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, t) = \boldsymbol{P}^2/2m$, correspondiente a una partícula libre, y eligiendo a $\chi = 0$ obtenemos $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = \boldsymbol{p}^2/2m - m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$, correspondiente a una partícula en un campo de fuerza uniforme.

Para la rotación considerada en la sección 1.5 la Ec. (2.1) se da la siguiente forma

$$(xp_x + yp_y + zp_z) - Hdt - (xp_x + yp_y + zp_z - Kdt) = dF_1$$

que equivale a

$$(K - H)dt = dF_1 = \chi(t)$$

la cual coincide de nuevo con la expresión para α de la Ec. (1.26).

Cabe señalar que en las derivaciones presentadas hasta ahora en esta sección, solo la función α aparece, sin hacer referencia a β. Sin embargo vemos que de la Ec. (1.8)

$$\beta = \alpha + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{X},$$

se observa que β es una "función generatriz tipo F_4 ", sin embargo, en los ejemplos considerados aquí, no es realmente una función generatriz debido al hecho de que las variables $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{P}$ no son funciones independientes este sí.

Como se muestra en Ref. [14], bajo una transformación canónica que relaciona las coordenadas (X_i, P_i, t) y (x_i, p_i, t) la función principal se transforma de acuerdo con

$$S' = S - F_1 \tag{2.2}$$

en el sentido de que si la función S es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) para H, entonces $S' = S - F_1$ es una solución de la ecuación HJ para el hamiltoniano K, con H y K relacionadas como en la Ec. (2.1) así, en los ejemplos considerados aquí, la ley de transformación para las funciones de onda están relacionadas de manera simple con la ley de transformación para la función principal de Hamilton. Este comportamiento no es totalmente sorprendente si tomamos en consideración las relaciones entre las soluciones de la ecuación de Schrödinger y $\exp(iS/\hbar)$, donde S es una solución que corresponde a la ecuación HJ.

Conclusión

En este trabajo se observa que el operador unitario U determina la relación entre los hamiltonianos H y K, que contiene un término extra dependiente del tiempo, por lo que se analizaron varios ejemplos, en concreto donde el operador U puede depender explícitamente del tiempo y por ende la representación del vector de estado de una transformación no está completamente especificada por su acción sobre las coordenadas y momentos.

Además se analizó la conexión de este trabajo con la mecánica clásica por medio de la función principal de Hamilton, se evidenciaron explícitamente los mismos ejemplos que en el enfoque cuántico y cómo analizar su contraparte clásica por lo que se encontraron equivalencias entre los dos enfoques como era de esperarse.

El método empleado aquí debería de ser aplicable a transformaciones no lineales, pero no siempre están relacionados con cambios de marco de referencia.

Bibliografía

[1] K. Gottfried and T. M. Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 2003), sec. 2.5 y cap. 7.

[2] J. Pade, *Quantum Mechanics for Pedestrians 2: Applications and Extensions* (Springer, Cham, 2014), Appendix L.

[3] G.F. Torres del Castillo and J.E. Herrera Flores, *Rev. Mex. Fís.* **62** (2016) 135.

[4] G.F. Torres del Castillo and D.A. Rosete Álvarez, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **13** (2016) 1650041.

[5] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1998), cap. 4.

[6] G. Vandegrift, *Am. J. Phys.* **68** (2000) 576.

[7] G.F. Torres del Castillo and B. C. Nájera Salazar, *Rev. Mex. Fís.* **63** (2017) 185.

[8] K. Gottfried and T.-M. Yan, *op. cit.* p. 294, Ec. (75).

[9] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013), Ec. (3.6.16).

[10] J. Pade, *op. cit.* sec. L.1.2.

[11] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd ed. (McGraw-Hill, New York, 1968) p. 194, Ec. (27.6)

[12] G.F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* E **57** (2011) 158

[13] G.F. Torres del Castillo, *An Introduction to Hamiltonian Mechanics* (Birkhäuser, New York, 2018) (por aparecer).

[14] G.F. Torres del Castillo, H.H. Cruz Domínguez, A. de Yta Hernández, J.E. Herrera Flores, and A. Sierra Martínez, *Rev. Mex. Fís.* **60** (2014) 301.