BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS AL ANALIZAR UNA SECUENCIA DE SUMA DE FRACCIONES

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
Lic. Julián Andrés Meléndez Cruz

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Eric Flores Medrano

CO-DIRECTORA DE TESIS
Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar

PUEBLA, PUE. Mayo 17 de 2023

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

JULIÁN ANDRÉS MELÉNDEZ CRUZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 28 de noviembre de 2022, con la tesis titulada:

"CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS AL ANALIZAR UNA SECUENCIA DE SUMA DE FRACCIONES"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 17 de mayo de 2023

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Este trabajo fue realizado gracias al financiamiento del Consejo Nacional Ciencia y Tecnología (CONACYT) en México, mediante la beca de maestría asignada con CVU 1099720

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios y a mi familia, en especial a mi tía Adalfeniz y a mi abuela Rovira, mujeres que lo han dado todo por mí; gracias a mi madre Dacny Cruz, a mi padre Alirio Ortega, a mis hermanas Elizabeth y Melany, a mis tíos y primos. A todos ellos, porque fueron pilares fundamentales a lo largo de este proceso.

A mi director de tesis, el Dr. Eric Flores Medrano, por su valioso acompañamiento, tanto personal como académico. A todos mis profesores, los doctores: José Antonio, Lidia Aurora, Estella, José Gabriel, y Aracely. A ellos, gracias por contribuir en mi formación como profesional, pues han sembrado un importante granito que sé que dará fruto el día de mañana.

Agradezco a cada una de las personas que se cruzaron en mi camino durante la maestría, al "Team Colombia" y a mis amigos mexicanos, a todos ellos, mi más fraterna gratitud. A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, a los docentes partícipes de la investigación, por apoyarnos y permitir el desarrollo de este trabajo, de igual forma, agradezco a los evaluadores, la Dra. Nielka Rojas, la Dra. Lidia y el Dr. Gabriel Kantún, por enriquecer el trabajo con sus experiencias y conocimientos.

Índice

Índice de figuras

RESUMEN

En este trabajo se identifica y caracteriza el conocimiento especializado de tres profesores del área de matemáticas al analizar una secuencia de actividades, cuyo propósito es la enseñanza de la suma de fracciones empleando las Regletas de Cuisenaire. Para su desarrollo se optó por un estudio cualitativo, enfocado en un estudio de caso y bajo un paradigma de tipo interpretativo. La intervención de la propuesta se realizó durante cinco sesiones, en las cuales se hizo uso de entrevistas semiestructuradas, una secuencia de actividades y las Regletas de Cuisenaire en presentación digital. Estos instrumentos fueron diseñados por los investigadores y se utilizaron tanto para intervención como para la recolección de información. Para realizar la caracterización de los conocimientos movilizados por los docentes, se hizo uso del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas desarrollado por Carrillo y colaboradores; pues, tal modelo permite identificar, estudiar y analizar el conocimiento que moviliza el docente de matemáticas en el campo de la enseñanza, así mismo permite organizarlo, clasificarlo y caracterizarlo. Desde los resultados de la investigación se obtuvo un mayor predominio en algunos de los subdominios que conforman el modelo, en particular, se encontró mayor influencia en el conocimiento de los temas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Al finalizar el estudio, las reflexiones obtenidas permiten comprender la importancia de identificar los conocimientos que movilizan los docentes al momento de pensarse un proceso de instrucción, pues estos podrían ayudar a otros profesores a mejorar o reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en este caso particular, el estudio de las fracciones.

ABSTRACT

This paper identifies and characterizes the specialized knowledge of three mathematics teachers by analyzing a sequence of activities whose purpose is the teaching of the addition of fractions using Cuisenaire's Rulers. For its development, a qualitative study was chosen, focused on a case study and under an interpretative paradigm. The intervention of the proposal was carried out during five sessions, in which semi-structured interviews, a sequence of activities and the Cuisenaire Rulers in digital presentation were used. These instruments were designed by the researchers and were used for both intervention and data collection. In order to characterize the knowledge mobilized by the teachers, use was made of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model developed by Carrillo and collaborators, since this model makes it possible to identify, study and analyze the knowledge mobilized by the mathematics teacher in the field of teaching, as well as to organize, classify and characterize it. From the results of the research, a greater predominance was obtained in some of the subdomains that make up the model; in particular, a greater influence was found in the knowledge of the topics and the knowledge of the characteristics of mathematics learning. At the end of the study, the reflections obtained allow us to understand the importance of identifying the knowledge that teachers mobilize when thinking about an instructional process, since this knowledge could help other teachers to improve or reflect on their teaching and learning practices in mathematics, in this particular case, the study of fractions.

Introducción

En el acervo de las investigaciones en el campo de la educación matemática aparecen diversas propuestas de aula que se han realizado con el propósito de estudiar las múltiples dificultades que los estudiantes enfrentan en el aprendizaje de las matemáticas. Regularmente este tipo de investigaciones se preocupan por realizar un tratamiento de dichas dificultades o por proponer nuevas estrategias de acuerdo con teorías o métodos de enseñanza para afrontarlas. El panorama de las investigaciones deja ver que la mayoría de éstas han centrado su atención en el estudiante y en los procesos que atañen su aprendizaje. Asimismo, se ha notado que, a pesar de haber sido muchos los estudios interesados en mejorar dichos procesos de aprendizaje, las dificultades y las problemáticas aún persisten. Ahora bien, si es el docente el encargado de propiciar el aprendizaje en los estudiantes, resulta importante seguir sumando investigaciones en las cuales el centro de atención sea el docente.

La presente investigación busca identificar y caracterizar aquellos conocimientos que hacen especialista al docente de matemáticas al momento de analizar una secuencia de actividades diseñada por el investigador, en la cual se pretende enseñar la suma de fracciones haciendo uso de las Regletas de Cuisenaire.

La investigación está segmentada en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se presentan los aspectos generales de la investigación, entre estos se mencionan elementos de la literatura relacionados con algunas dificultades y errores presentes en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción, tomando como referencia los estudios realizados por Castaño y García (2014), Fandiño (2015), González (2015) y Hurtado (2012), los cuales dan pie al planteamiento del problema de investigación. Asimismo, se enuncia la pregunta que guiará la investigación junto con el objetivo general y por último se presenta la justificación del porqué resulta importante realizar una investigación como la presente.

En el capítulo 2 se presentan los elementos teóricos que serán objeto de interés para posteriormente realizar los respectivos análisis de los resultados de la investigación. En primer lugar, se presentan los aspectos concernientes al modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés) desarrollado por Carrillo-Yañez et al. (2018), el cual será utilizado como herramienta para estudiar el conocimiento que los docentes movilizan a la hora de analizar una secuencia de actividades, posteriormente se presentan algunos aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, bajo la postura de autores como Fandiño (2015), Flores (2010), Llinares y Sánchez (2000), Obando (2003) y Ruiz (2013). Para centrar la atención en un caso particular del presente estudio, se presentan los significados de la fracción como razón y como medida bajo las ideas de Hoyos-Franco (2018), Kieren (1980) y Valdemoros (2004).

En el capítulo 3 se presenta el método bajo el cual se desarrolló la investigación, el contexto intervenido, los instrumentos y la forma como se utilizaron estos instrumentos. En el Capítulo 4 se reportan los principales resultados de la investigación, los cuales fueron analizados a la luz de las categorías de los subdominios del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, a fin de caracterizar el conocimiento que movilizaron los docentes al analizar la secuencia de actividades.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas en la investigación, se mencionan algunas consideraciones y reflexiones finales del estudio realizado, con el motivo de señalar los aspectos más relevantes para tener en cuenta en futuras investigaciones.

Capítulo 1: Aspectos generales del estudio

1.1 Planteamiento del problema

El estudio de las fracciones a lo largo de la historia ha presentado un alto interés en el campo de la Educación Matemática, este se debe principalmente a la complejidad que el tema presenta en la educación básica (Rojas et al, 2015). Diversas investigaciones (e.g. Castaño y García, 2014; Fandiño, 2015; González, 2015; Hurtado, 2012) durante la última década han reportado múltiples dificultades, errores y obstáculos asociados tanto al aprendizaje como a la enseñanza de los números fraccionarios. Un punto en común reportado en estas investigaciones es que la mayoría de las dificultades que limitan al estudiante a entender el concepto de fracción se debe a su diversidad de significados.

En estudios como el de Castaño y García (2014) se señala que, aunque sean muchas las investigaciones encontradas en la literatura alrededor del concepto de fracción, la mayoría se centran en el aprendizaje y se ha descuidado la enseñanza de tal concepto. Ahora bien, si los docentes son los encargados de propiciar el aprendizaje, resulta importante conocer qué está pasando con la enseñanza, hace falta contribuir con más investigaciones en las que el centro de atención sea el profesor de matemáticas. En este sentido, se encuentran investigaciones como la de Rojas et al., (2015), en la cual se preocupan por conocer el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al enseñar fracciones en educación primaria, encontrando predominios sobre algunos significados de fracción.

González (2015) señala que las dificultades en el estudio y el uso de las fracciones se deben, en gran parte, al desconocimiento de la diversidad de significados que poseen y sus diferentes interpretaciones, al lenguaje utilizado por el docente y a la complejidad propia de los conceptos matemáticos. De esta manera, resulta imprescindible que el profesor de matemáticas reconozca esa diversidad de significados, saber en qué momento, de qué formas y con qué materiales abordarlos. Hurtado (2012) menciona que:

> Una de las dificultades del aprendizaje de las fracciones se origina por cuanto los niños no logran interpretar textos que contienen fracciones ni proponer soluciones; logran resolver algunas operaciones que se plantean, pero no alcanzan a valorar el significado de los resultados obtenidos. Esta situación se origina por cuanto los niños no se han apropiado del significado de fracción. (p.3)

Para atender estas dificultades se han formulado diversas propuestas de aula (e.g., Obando, 2003; Hurtado, 2012; Angulo y González, 2018). Sin embargo, estas siguen apareciendo, lo cual nos plantea realizar estudios para saber qué ocurre con los procesos de enseñanza y en especial que sucede con su agente principal, el profesor. Si los docentes son los encargados de propiciar el aprendizaje, entonces, ¿qué está pasando con su gestión en el aula?, ¿qué estrategias o metodologías están utilizando?, ¿de qué manera están organizando su práctica?, ¿qué recursos están utilizando?, ¿cómo incide el conocimiento profesional de los docentes en el aula?, ¿qué elementos están siendo considerados a la hora de planear la clase de matemáticas?, ¿qué conocimientos están movilizando los docentes a través de su ejercicio profesional?

Para el caso de la presente investigación, nos interesamos por estudiar aquellos interrogantes relacionados con los conocimientos especializados que emergen al analizar materiales pensados para la enseñanza de la suma de fracciones a estudiantes de quinto grado de primaria (estudiantes de 11 años). En la investigación se reconoce qué, así como resulta importante conocer qué sucede con los procesos de aprendizaje en los estudiantes, es esencial saber cómo se están pensando y desarrollando los procesos de enseñanza, en especial, cuáles son esos conocimientos que movilizan los profesores al analizar actividades y recursos diseñados para la enseñanza de la suma de fracciones.

Como ya se mencionó en párrafos anteriores, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, son múltiples los obstáculos y las dificultades que enfrentan los estudiantes a lo largo de toda la etapa escolar, esto se debe a la complejidad misma del concepto por poseer diversos significados o interpretaciones, lo cual hace que se convierta en un concepto que requiere de mucho tiempo para su aprendizaje (Fandiño 2015).

Entre algunas de las estrategias que proponen las investigaciones para afrontar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, está el uso de los materiales concretos en niveles elementales, los cuales se consideran de gran relevancia y contribuyen a favorecer los procesos de aprendizaje. Al respecto, Arrieta (1998) menciona que:

> La propia experiencia indica que el material facilita y favorece la comprensión e incluso la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, facilita la

visualización - proceso de formación de imágenes mentales o materiales - que es clave en la comprensión de conceptos y favorece la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento. (p.110)

Bajo esta perspectiva, en la presente investigación se parte del análisis del diseño de una secuencia de actividades en la cual se hace uso de las Regletas de Cuisenaire como estrategia para la enseñanza de la suma de fracciones.

Por lo expuesto en los párrafos anteriores, la pregunta de investigación que guía este trabajo es: ***¿Qué caracteriza al conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de actividades sobre suma de fracciones empleando las regletas de Cuisenaire?***

Para responder a dicha pregunta, se plantea el siguiente objetivo: **Caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de fracciones en la que se emplean las regletas de Cuisenaire**.

1.2 Justificación

Diversas investigaciones señalan la importancia de estudiar lo que está sucediendo con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones (e.g. Castaño y García, 2014; Fandiño, 2015; González, 2015; Hurtado, 2012). Estos estudios muestran que el aprendizaje de dicho concepto se ha convertido en una actividad en la que los estudiantes presentan muchas dificultades en su comprensión, es por esta razón que se hace necesario dar una mirada a la actividad del docente para saber qué está pasando con su gestión en el aula, además, se hace necesario saber cuáles son los conocimientos que como profesional está movilizando en su actividad de enseñar matemáticas.

Castaño y García (2014) señalan que son diversas las investigaciones dedicadas al estudio de las fracciones y la mayor parte de estas se han enfocado en estudiar el aprendizaje y pocas se han preocupado por la enseñanza, se termina culpando únicamente al estudiante por el fracaso en la asimilación de este tema, cuando en realidad el docente es un actor principal que incide en tal fracaso, de manera que, se hace necesario partir de identificar las dificultades que presentan los docentes alrededor de tal concepto.

Los autores clasifican tres tipos de dificultades: didácticas, ontogenéticas y epistemológicas. Las cuales enfrenta tanto el estudiante como el docente de matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, dificultades que los docentes deben identificar y procurar atender. Para afrontar estas dificultades señalan que el docente podría partir de reconocer los conocimientos previos con los que llega un estudiante a un nuevo grado, no ceñirse completamente a las orientaciones curriculares, pues estas, en ocasiones dan por obvio que los estudiantes ya han alcanzado un determinado nivel de conocimiento en ciertos temas, cuando en realidad no es así, por otra parte, es importante partir de situaciones que se relacionen con el contexto de los estudiantes, de manera que no se desvinculen los contenidos matemáticos con la cotidianidad, entre otros.

Por su parte, Fandiño (2015) menciona que la importancia de estudiar las fracciones se debe a la complejidad misma del concepto, señala que no es posible aprender fracciones de la noche a la mañana, es un concepto que se debe estudiar a largo plazo, en el que se va avanzando en la medida en la que se comprenden los diversos significados o interpretaciones que rodean al número racional. Razón por la cual es importante que el docente tenga conocimiento de esas diversas interpretaciones, así como el reconocer cuales son los errores, dificultades y obstáculos por los que atraviesan los estudiantes al intentar reconocer cada uno de los significados y al pasar de uno a otro.

González (2015) también concuerda en que es importante estudiar las fracciones desde sus diferentes interpretaciones. Señala que, a raíz del desconocimiento de estos significados, los estudiantes cometen múltiples errores en la interpretación de las fracciones, así como en las operaciones. Entre estos, la comprensión inadecuada del concepto, aplicaciones sistemáticas de procedimientos erróneos, errores por desconocimiento de las respuestas, interpretaciones erróneas de la fracción, entre otros. Ahora bien, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, el autor propone que:

> Una estrategia viable para el aprendizaje de las fracciones podría ser la resolución de problemas, donde los alumnos desarrollen habilidades para comprender y plantear problemas, así como la capacidad de realizar operaciones que se requieren de interpretar resultados, huyendo del aprendizaje de procesos rutinarios y procedimientos algorítmicos que estimulen la mecanización y memorización, minimizando el razonamiento lógico, la búsqueda de soluciones, la crítica y la fundamentación de opiniones. (p.47)

Rodríguez y Navarrete (2020) presentan un estudio en el que se interesó por conocer en qué medida el conocimiento profundo que moviliza el docente alrededor de las fracciones, influye sobre el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de concepto de fracción en cuarto grado. Para ello aplicaron un conjunto de preguntas tanto a los estudiantes de cuarto grado, como a sus profesores. Frente a los resultados señalan que, se encontraron dificultades en ambos grupos, dificultades relacionadas con la interpretación de las fracciones, ubicar fracciones en rectas numéricas, encontrar números entre dos fracciones, el interpretar situaciones donde la fracción como relación parte-todo es discreta, entre otros.

Un aspecto común por resaltar de la investigación anterior es que ambos grupos coinciden en presentar dificultades al resolver preguntas con otros significados de la fracción diferentes al de relación parte-todo, en particular, el subconstructo de fracción como medida. Kieren (1980) al igual que Obando (2003) señalan que el significado de la fracción como relación parte-todo es fundamental para la construcción de significado de fracción como medida, en ambos significados se habla de una unidad que se divide en n partes, lo que complejiza es el tipo de magnitud asociada a esa unidad. El significado fracción como medida se extiende al trabajo con magnitudes continuas y es aquí donde el estudiante presenta dificultades, la fracción como medida está más asociado a un aspecto dinámico y no tanto a la comparación entre un número de partes iguales que se tiene con un número fijo de partes iguales en una unidad (Flores, 2010).

Lo anterior hace parte de un conocimiento que debería movilizar el profesor, pues repercute directamente sobre la construcción que crean los estudiantes de una noción u objeto matemático. De esta manera, se considera relevante que los docentes amplíen sus conocimientos alrededor del concepto abordado, a través de estrategias, recursos y todo el apoyo que brinda la literatura en didáctica de las matemáticas en la actualidad.

En trabajos como los presentados por Cortés y Mendoza (2019); Fernández (2009) y Rodríguez y Aguilera (2017) se han desarrollado propuestas en las que vinculan materiales manipulativos para la enseñanza del concepto de fracción, entre estos, se encuentra el tangram, dominós de fracciones, círculos de fracciones, regletas de colores, entre otros. En estos trabajos consideran los recursos como una estrategia vital para potenciar el aprendizaje de las matemáticas y ayudar a la construcción del conocimiento. El trabajo con los recursos permite que los estudiantes argumenten sus respuestas, formulen y planteen respuestas alternas, que se comprueben conjeturas, además de favorecer la discusión y el trabajo grupal (Rodríguez y Aguilera, 2017).

Ahora bien, así como es importante el desarrollo y uso de materiales en la enseñanza de las matemáticas, resulta importante saber cuáles son los conocimientos que los docentes ponen en acción al revisar secuencias que articulen este tipo de materiales, razón por la cual, se espera identificar qué características emergen al momento en el que un grupo de docentes analice un conjunto de actividades pensadas para la enseñanza de las fracciones utilizando las Regletas de Cuisenaire.

Cada uno de los elementos abordados anteriormente permiten reconocer la importancia de estudiar qué sucede con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, en especial, buscar que los docentes de matemáticas reconozcan la presencia de dificultades, errores y obstáculos que aparecen día a día en la enseñanza de tal concepto. De tal manera que, es imprescindible identificar qué conocimientos están movilizando los docentes, conocimiento relacionado con las dificultades, obstáculos y la misma forma en que conciben la construcción del objeto matemático en cuestión.

Para realizar un estudio de los conocimientos que moviliza el docente como profesional en el aula de clase, algunos investigadores en didáctica de las matemáticas tales como Carrillo-Yañez et al., (2018), preocupados por saber cuáles son esos conocimientos que hacen especialista al docente de matemáticas, han desarrollado el modelo analítico MTSK, el cual permite hacer una caracterización de los conocimientos que pone en juego un docente a la hora de realizar un proceso de instrucción. De esta manera, el modelo propiciaría elementos muy enriquecedores para examinar la forma en la que se están enseñando los contenidos a los estudiantes y poder responder a preguntas tales como: ¿qué conocimientos matemáticos moviliza el profesor al enseñar el concepto de fracción?, ¿qué estrategias considera el docente como importantes para la enseñanza de las fracciones?, ¿qué conocimiento didáctico moviliza el docente en relación con el concepto de fracción?, ¿qué conocimientos curriculares emplea?, entre otros. Por los motivos expuestos anteriormente se justifica la pertinencia de realizar investigaciones como la presente a desarrollarse.

1.3 Supuestos de la investigación

Por tratarse de una investigación de corte cualitativo, a continuación, se presentan de forma resumida algunos de los alcances que se buscan obtener en el desarrollo de la investigación titulada: caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones.

Por la investigación inscribirse en la línea de formación de profesores, dentro de sus alcances está promover el uso de estrategias teóricas y metodológicas que permitan al docente de matemáticas ayudar a analizar, organizar y reflexionar sus propios procesos de enseñanza, por lo cual, se espera que por medio del modelo MTSK se identifiquen y caractericen aquellos conocimientos que hacen especialista al docente de matemáticas al analizar una secuencia de actividades de suma de fracciones haciendo uso de un recurso digital, y por consiguiente, las reflexiones finales del estudio servirán tanto a futuros docentes como a los actuales, de guía para organizar y orientar sus procesos de instrucción.

Se espera que el análisis obtenido al final de la investigación aporte características del conocimiento que movilizan los profesores de matemáticas al enseñar fracciones, conocimiento relacionado con el significado de unidad, fracciones propias, fracciones homogéneas y suma de fracciones. Todas aquellas características del conocimiento que puedan emerger del análisis que hagan los docentes de la secuencia de actividades se convierte en conocimiento que pasa a disposición de cualquier docente de matemáticas interesado en enseñar el concepto de fracción.

Capítulo 2. Marco Teórico

Los elementos teóricos de la presente investigación se dividen en dos. Por un lado, se presenta lo relacionado con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, aquí se expone el modelo analítico MTSK de acuerdo con lo propuesto por Carrillo-Yañez et al. (2018), Escudero et al. (2015) y Muñoz et al. (2015). Por otro lado, se muestran algunas ideas relacionadas con el estudio de las fracciones, tomando como referencia los planteamientos de diversos autores (e.g. Fandiño, 2015; Flores, 2010; Hoyos-Franco, 2018; Kieren, 1980; Llinares y Sánchez, 2000; Obando, 2003; Ruiz, 2013; Valdemoros, 2004)

2.1 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

Durante las últimas décadas se han desarrollado diversas investigaciones alrededor del conocimiento del profesor de matemáticas (e.g. Ponte, 1994; Shulman, 1986; Ball et al, 2008; Godino, 2009; Carrillo-Yañez et al, 2018). Estas investigaciones han ido mostrando la evolución en el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas, cada una de ellas ha hecho su aporte al estudiar las diferentes problemáticas que subyacen día a día en el campo de la educación matemática. Proponen modelos teóricos y metodológicos que logran mostrar un panorama amplio en este campo y permiten entender qué factores intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Para este trabajo se toma en consideración los aportes que hacen Carrillo y colaboradores, los cuales proponen trabajar con el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (ver figura 1). Este es un modelo analítico desarrollado para analizar el conocimiento que hace especialista al profesor de matemáticas, busca identificar y caracterizar el conocimiento particular y especializado que hace diferente al profesor de matemáticas de otro profesional en el área (Escudero et al., 2015). A continuación, se presentan los elementos más importantes del modelo a partir de los planteamientos expuestos por Escudero et al., (2015); Muñoz et al., (2015) y Carrillo-Yañez et al. (2018).

El modelo MTSK, dentro de sus propósitos, permite organizar la práctica del docente a través de los diversos elementos o categorías que lo componen y da la posibilidad de explicar las diversas actividades que proponen los docentes y saber con qué conocimientos se relacionan. Está conformado por tres grandes dominios: el dominio del Conocimiento Matemático (MK por sus siglas en inglés), el dominio del Conocimiento Didáctico del

Contenido (PCK por sus siglas en inglés) y el dominio de las creencias y a su vez, cada dominio está conformado por un conjunto de subdominios, los cuales serán descritos en los siguientes párrafos.

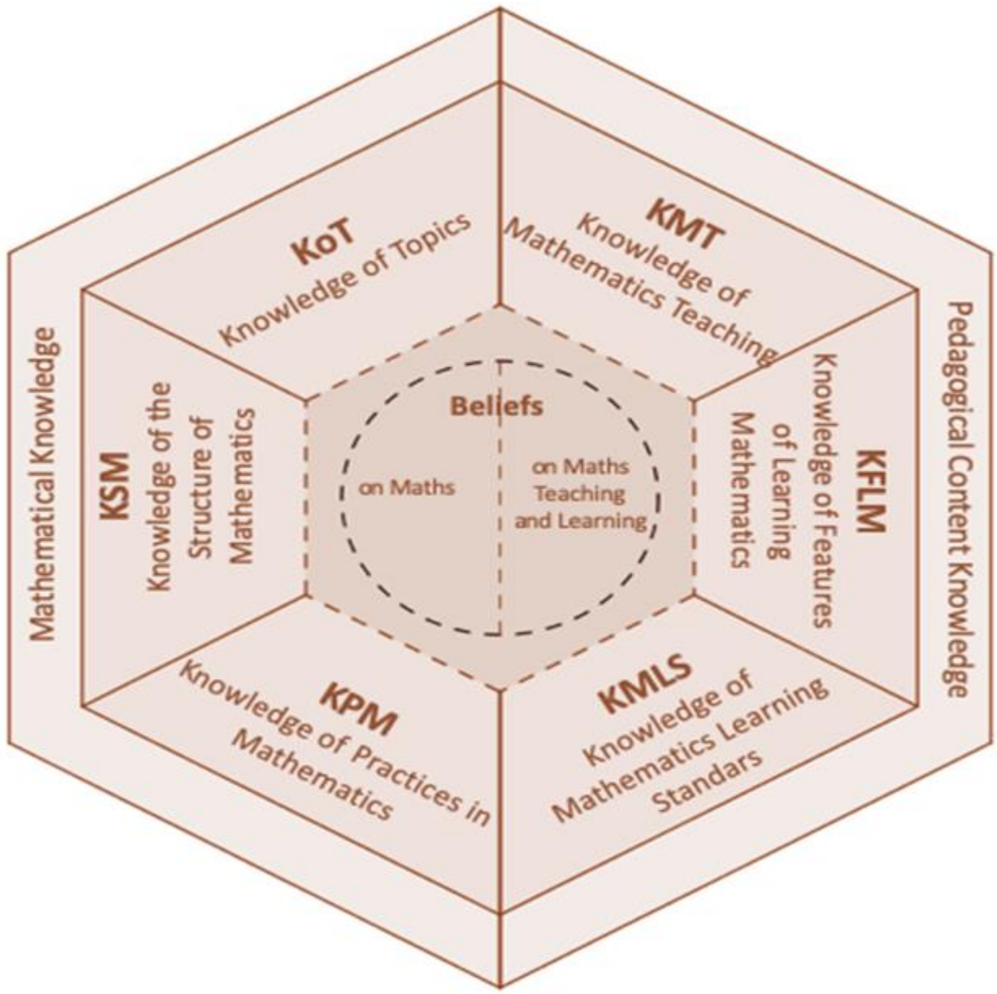


Figura 1. *Esquema del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).* Carrillo-Yañez (2018)

2.1.1 Conocimiento Matemático (MK)

Este dominio se ocupa de aquellos aspectos inherentes al conocimiento conceptual que moviliza el profesor de matemáticas; conocimiento que el docente ha construido a lo largo de su formación y experiencia. Conocimiento que ha sido fruto del estudio de teorías conceptuales que permiten entender cómo se concibe un objeto matemático, cuál es su naturaleza, su epistemología, la evolución conceptual, el rigor matemático, la parte axiomática, la relación con otros objetos matemáticos, así como la forma de proceder matemáticamente dentro de cada objeto. Advíncula et al. (2021) señalan que:

El dominio MK abarca el conocimiento matemático que el profesor usa, o puede usar, en cualquier actividad; el cual debe trascender al contenido matemático que se pretende que aprenda un estudiante del nivel en el que enseña, no solo en cantidad de conocimiento sino también en la naturaleza de este. (p,193)

Este dominio está conformado por tres subdominios: el Conocimiento de los Temas (KoT), el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM).

2.1.1.1 Conocimiento de los temas (KoT). Este subdominio se interesa por identificar características del conocimiento específicas del tema de estudio, entre estas se incluyen aspectos fenomenológicos, las definiciones de los conceptos abordados, la diversidad de registros de representación, las propiedades y sus fundamentos. Su propósito es identificar aquellos conocimientos que moviliza el profesor relacionado directamente con la especialidad en el tema.

2.1.1.2 Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM). Está relacionado con la capacidad de desarrollar un sistema integrado que permita relacionar los conceptos avanzados con los elementales. A través de este subdominio se puede analizar de qué manera el profesor trabaja la matemática avanzada desde cuestiones elementales y viceversa. Como evidencia de este subdominio, el docente debe mostrar conocimiento de diferentes conexiones: intraconceptuales, interconceptuales y temporales, entendiendo las primeras como aquellas conexiones entre ideas diferentes asociadas un mismo concepto matemático, constituyendo la esencia de las matemáticas, las segundas son entendidas como las conexiones de ideas de un concepto con otros y las temporales se relacionan entre conceptos matemáticos en diferentes etapas del currículo (Montes et al, 2013).

2.1.1.3 Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Está relacionado con las formas de proceder y producir en matemáticas, en el cual se pretenden analizar e identificar las formas en cómo el docente desarrolla las prácticas de demostrar, ejemplificar, el uso de heurísticas en la resolución de problemas, el conocimiento de la sintaxis matemática, el significado de las definiciones, entre otros, "Este subdominio se caracteriza por enfocarse en la identificación de prácticas propias del trabajo matemático ligadas a un tema específico o a la matemática en general" (Escudero et al., 2015, p.58).

2.1.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

En la enseñanza de las matemáticas no es suficiente el saber qué enseñar, hace falta saber cómo y cuándo movilizar determinado conocimiento. Por esta razón aparece el PCK, el cual abarca las relaciones entre el conocimiento didáctico y pedagógico que está estrechamente ligado al conocimiento matemático, en palabras de Carrillo-Yañez et al (2018) se describe que:

> El enfoque específico del PCK está relacionado con las propias matemáticas. Más que tratarse de la intersección entre el conocimiento matemático y el pedagógico general, se trata de un tipo específico de conocimiento pedagógico que se deriva principalmente de las matemáticas. Por lo tanto, no incluimos en este subdominio los conocimientos pedagógicos generales aplicados a los contextos matemáticos, sino únicamente aquellos conocimientos en los que el contenido matemático determina la enseñanza y el aprendizaje que tienen lugar. (p.18)

Las evidencias de este dominio son producto del conocimiento de las teorías de la enseñanza y el aprendizaje que moviliza el docente de matemáticas, además del conocimiento curricular relacionado con los objetos matemáticos abordados.

Este dominio está conformado por el Conocimiento de la Enseñanza Matemática (KMT), el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

2.1.2.1 Conocimiento de la Enseñanza Matemática (KMT). En este subdominio se encuentra el conocimiento que tiene el docente en relación con las vías, recursos y formas que emplea en la enseñanza de las matemáticas, las teorías de la enseñanza, el tipo de tareas empleadas, las estrategias, las técnicas y ejemplos. De esta manera, se puede identificar el conocimiento que moviliza el docente alrededor de diferentes estrategias y teorías, institucionales o personales de enseñanza de las matemáticas.

2.1.2.2 Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Este subdominio alude al "conocimiento de las características del proceso de aprehensión de los distintos contenidos por parte de los estudiantes, así como el conocimiento de las teorías del aprendizaje, personales o institucionales que puede tener el profesor" (Escudero et al., 2015, 58). Dentro de sus características se pueden identificar aspectos relacionados con la comprensión de los contenidos, los lenguajes utilizados, así como las diferentes dificultades, errores y obstáculos presentes en el aprendizaje.

2.1.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Este subdominio se preocupa por identificar en el profesor, características del conocimiento relacionadas con los alcances que proponen las autoridades curriculares. Se espera identificar el conocimiento en el profesor acerca de qué contenidos corresponden al nivel de enseñanza en el que se encuentra, cuáles están asociados al nivel de desarrollo procedimental y conceptual y qué conocimientos moviliza el docente sobre la secuencialidad de los diversos temas dentro de un mismo curso o en otros distintos.

2.1.3 Dominio de las Creencias

El último dominio está conformado por dos subdominios, el primero relacionado con identificar las creencias propiamente del contenido matemático y el segundo con las creencias relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El propósito de este dominio es reconocer que la concepción que el docente tiene sobre las matemáticas y sobre el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje están permeados por un conjunto de creencias que han sido adquiridas en su formación, en su experiencia como profesional o incluso desde su experiencia como estudiante, que terminan influyendo en sus decisiones.

Si bien cada dominio es importante a la hora de analizar un proceso de instrucción, para el caso de esta investigación se hace énfasis sólo en el dominio del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido.

2.3 Diferentes interpretaciones del concepto de fracción

Fandiño (2015) menciona que el aprendizaje de las fracciones resulta ser un proceso complejo y a largo plazo, debido a los múltiples significados o interpretaciones que se le dan al concepto de fracción. Llinares y Sánchez (2000) presentan algunas de las interpretaciones más relevantes en el estudio del concepto de fracción, estas son: la fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua, a veces discreta, como decimales, como cociente, como relación, como razón, como operador, en probabilidad, como punto de una recta orientada, como medida, como porcentaje y como número racional.

Uno de los autores más representativos en el estudio de las fracciones durante las últimas décadas ha sido Thomas Kieren, este autor presenta a los números racionales como un constructo teórico conformado por cuatro subconstructos, la fracción como relación parte todo y medida, la fracción como cociente, como razón y operador.

Tomando en consideración los diferentes significados que se aluden al concepto de fracción, cabe preguntarse ¿cuál de todas estas interpretaciones debe presentarse o enseñarse primero y cual resulta ser la más importante? Al respecto, Ruiz (2013) menciona que "la fracción como relación parte-todo es básica para la construcción de las diferentes interpretaciones (razón, proporción, porcentaje, decimales, probabilidad, cociente, medida)" (p.71)

Obando (2003) señala que una aproximación inicial a las fracciones desde la relación parte-todo es pertinente por las siguientes razones:

- La relación parte-todo constituye un eje a través del cual acceder a otros conceptos de los números racionales. Las medidas, las fracciones decimales, los números decimales no enteros, los cocientes, algunos tipos de razones, la recta numérica, entre otros; encuentran en la relación parte-todo, una fuente importante para iniciar su proceso de conceptualización.
- A través de la relación parte-todo se tiene un puente de entrada a la conceptualización de la unidad como un todo divisible en partes más pequeñas,

sin que por esto deje de ser unidad. Por lo tanto, se inicia un trabajo en la noción del continuo real. Pero, lo anterior hace necesario un análisis de las relaciones entre la unidad aritmética y la unidad geométrica, proceso indispensable en la construcción conceptual de las fracciones de unidad como números.

- La relación parte-todo es un camino natural para la conceptualización de algunas propiedades (como la que conduce a la denominación "fracción propia" e "impropia"), algunas relaciones (como la de equivalencia), y algunas operaciones (como la suma y la resta).
- La relación parte-todo constituye un contexto importante a partir del cual se conceptualiza la unidad en sus dos características básicas: tipo de unidad (simple o compuesta) y tipo de magnitud (continua o discreta).

Finalmente, Obando interpreta la fracción, desde la relación parte-todo, como un número que expresa la relación cuantitativa entre una cantidad que se considera unidad y otra cantidad que se toma de esa unidad y se le da el nombre de parte, y tal como lo señala Fandiño (2015) en sus investigaciones, las partes que se toman necesariamente deben de ser congruentes.

Es importante reconocer que el significado de fracción como relación parte-todo es esencial para la construcción de los demás significados, sin embargo, el profesor de matemáticas debe saber que la forma en que se interpretan los nuevos significados no es la misma como se hace en la relación parte-todo, por ejemplo, cuando se necesita repartir dos barras de chocolate entre tres personas, el resultado no se puede expresar mediante un decimal, solamente se puede decir que a cada uno le corresponden 2/3 de las barras de chocolate, también, aparecen situaciones donde se necesita hacer la comparación entre cantidades y no necesariamente de las mismas magnitudes, además, hay situaciones donde las fracciones se usan para transformar cantidades enteras en cantidades más grandes o más pequeñas. Estas situaciones y otras más requieren conocer que el significado de la fracción como relación parte de un todo va cambiando en la medida en la que van aumentando los grados de escolaridad.

La fracción como Razón

El significado de fracción como razón es entendido como la relación que se puede establecer entre dos magnitudes, se trata de una relación entre dos conjuntos que se pueden comparar. Para Kieren (1980) el subconstructo de fracción como razón, subyace de la noción de magnitudes relativas, entendiendo que la razón es un índice de comparación entre dos cantidades, más que hablar de un número como tal.

Si la fracción se usa para mostrar la relación entre dos cantidades de determinada magnitud, es decir, si se establece un índice de comparación entre esas partes, se habla de la fracción como razón (Flores, 2010). A diferencia de la relación parte-todo, aquí se habla de una relación parte-parte, de manera que, en la fracción **a/b**, no se hace referencia a un todo que se ha dividido en **b** partes y de estas se han tomado **a** partes, en este caso, la fracción muestra la relación entre dos magnitudes (dos partes) que se compara una con la otra, por ejemplo, se podría hablar de que una parte es la mitad de la otra, la tercera parte, la cuarta parte, entre otros. Además, la comparación también es bidireccional, se puede hablar del doble, el triple, cuatro veces más grande o n veces más grande.

Hoyos-Franco (2018) señala que, “el estudio en la educación básica con fracciones que representan “razones” desde los primeros niveles escolares, favorece el razonamiento proporcional, sienta las bases para una mejor comprensión de las fracciones como expresión de medidas, de razones, y de operadores multiplicativos” (p.38). En este sentido, resulta indispensable favorecer y promover la enseñanza del concepto de fracción desde el significado de Razón.

La fracción como medida

Este significado se presenta como un caso específico de la fracción como relación parte-todo, aquí la fracción **a/b** hace referencia a una unidad que se ha dividido en **b** partes congruentes, de las cuales se han de tomar **a** partes, lo particular de esta interpretación es que en principio se desconoce en cuantas partes se ha dividido la unidad, por ejemplo (ver figura 2), nótese que para saber que la barra B ocupa 2/3 en la barra A, hace falta encontrar una barra C que mida exactamente un número de veces a las otras dos, lo que permite construir el todo.

También se puede entender a la fracción como la asignación de un número a una magnitud que ha sido dividida en partes congruentes. En el caso de las Regletas de Cuisenaire, se presentan actividades donde se necesita encontrar regletas que midan o representen exactamente los sectores indicados para saber cuál es la fracción a la que se hace referencia.

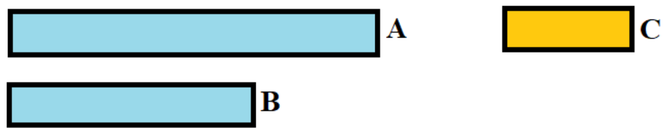


Figura 2. *La fracción como medida.* (fuente propia)

De acuerdo con Hincapié (2011) en esta interpretación se tiene que:

> La fracción a/b aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. Para obtener la medida exacta se deben: medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad y luego realizar comparaciones con la unidad. La conceptualización de fracción como medida permite al estudiante ser capaz de identificar que una fracción **a/b** es **a** veces **1/b**, es decir, que si repite 3 veces 1/5 obtendrá 3/5, y si lo repite 4 veces, obtendrá 4/5. (p.20)

Fandiño (2015) menciona que la fracción como medida aparece en situaciones donde la unidad de medida no aparece de manera explícita, sin embargo, no hace falta conocerla para saber a qué se hace referencia, por ejemplo, se presenta el caso de las botellas que vienen con una medida estándar de *0.75l*, la cual indica una cantidad, una medida, en la unidad decimal litro. No se trata de una botella con capacidad de 1 litro que se ha decidido llenar 3/4, sino de una botella que ya viene con una medida de 0.75 y se sabe que esta corresponde a los 3/4 de un litro.

Desde la literatura abordada se resalta la importancia de estudiar los diferentes significados del concepto de fracción, sin embargo, para el caso de la presente investigación sólo se tendrán en cuenta los significados de fracción como relación parte-todo, razón y medida.

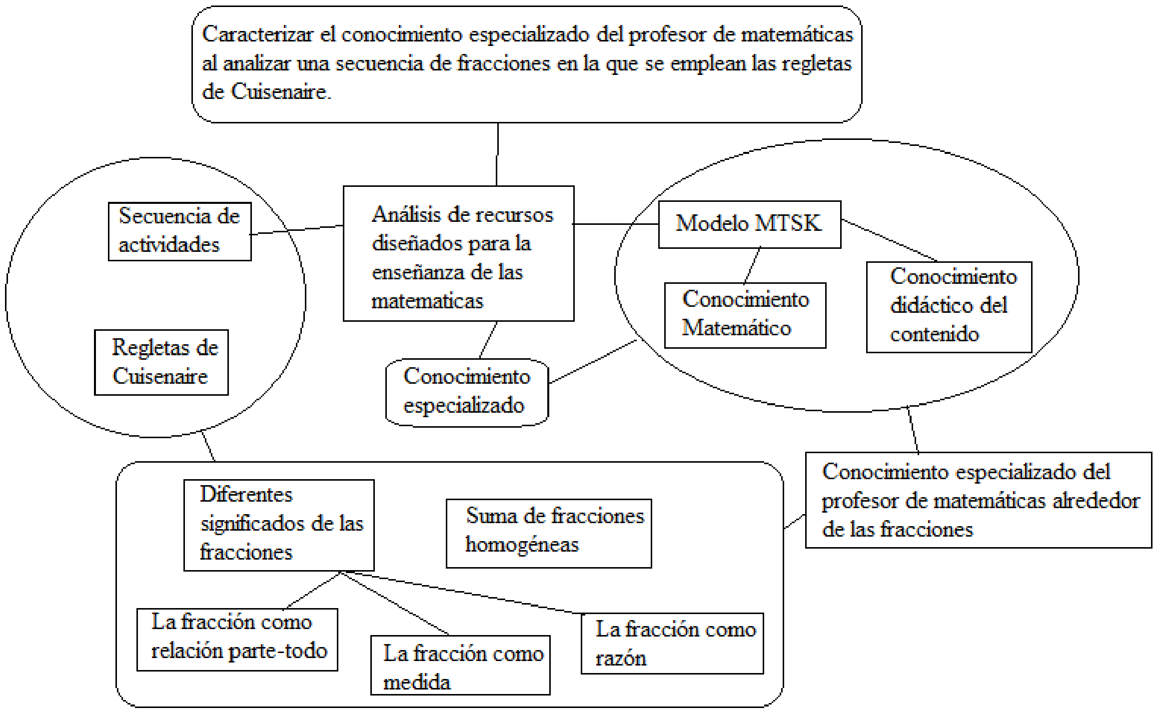


Figura 3. *Articulación de los referentes teóricos* (fuente propia)

El esquema anterior (figura 3) resume la forma en cómo se articulan los referentes teóricos utilizados en la presente investigación. Se parte del objetivo general del estudio, el cual es caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de fracciones en la que se emplean las regletas de Cuisenaire, luego se plantea que al momento de analizar un recurso pensado para la enseñanza de las matemáticas emergen un conjunto de conocimientos que son propios y especializados del profesor de matemáticas, en este caso conocimientos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Ahora bien, para identificar y caracterizar estos conocimientos se hace uso del modelo MTSK de manera que las categorías que lo conforman han de permitir caracterizar dicho conocimiento movilizado por los docentes al momento de analizar la secuencia de actividades.

Capítulo 3. Marco Metodológico

3.1 Método

En esta investigación se adoptó un enfoque cualitativo, bajo un paradigma de tipo interpretativo (Bassey, 2003), dado que permitió comprender e interpretar la naturaleza del conocimiento especializado de los profesores partícipes del estudio.

Se realizó un estudio de caso de tipo instrumental (Skate, 1995) donde la información proporcionada por los docentes fue relevante para caracterizar los conocimientos que emergieron al momento que los profesores realizaron el análisis de una secuencia de actividades.

El caso estudiado fue el de tres profesores de matemáticas que habían orientado dicha materia en quinto grado de primaria, a los cuales se les proporcionó una secuencia de actividades articulada con un recurso digital para la enseñanza de la suma de fracciones.

Para la caracterización de los conocimientos que movilizaron los docentes al analizar la secuencia, se dirigió cada una de las sesiones con preguntas orientadoras relacionadas con los subdominios del modelo MTSK, esto con el propósito de generar discusiones y reflexiones alrededor de las tareas presentes en la secuencia.

Selección de los participantes del estudio

Inicialmente, se contactó a seis profesores de matemáticas con experiencia en la enseñanza de esta área, en quinto grado de primaria, de los cuales tres aceptaron ser partícipes del estudio por la disposición del tiempo y el interés hacia los recursos diseñados para la enseñanza de las fracciones. El caso estuvo conformado por una maestra en educación matemática, de nacionalidad mexicana, con experiencia de seis años en la docencia y dos profesores estudiantes de maestría en educación matemática, con nacionalidades colombianas y una experiencia de tres años cada uno.

3.2 Instrumentos y técnicas utilizadas para la recolección de los datos

Secuencia de actividades: Se diseñó una secuencia de actividades con el propósito de favorecer la comprensión de la suma de fracciones homogéneas empleando las Regletas de Cuisenaire, estuvo conformada por seis actividades: en las dos primeras se buscaba construir el concepto de fracción a partir de la comparación entre Regletas, en las actividades tres y cuatro se pretendía reconocer la unidad y el tomar fracciones de la unidad y, en las dos últimas actividades, se buscaba sumar fracciones homogéneas a partir de situaciones que modelaban escenarios reales utilizando las Regletas.

La secuencia se fundamentó, en principio, por los aportes planteados en las investigaciones de Llinares y Sánchez (2000); Obando (2003); Ruíz (2013); Fandiño (2015). Estos trabajos presentan, de manera general, la diversidad de significados atribuidos al concepto de fracción, al comentar que, justamente este abanico de interpretaciones, ha provocado el aparecimiento de diversas dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de ellas. Estos autores señalan que, incluso los docentes, tienen desconocimiento al respecto. De esta manera, resulta imprescindible que el docente tenga conocimiento de estos y, además, se hace necesario aportar propuestas en las cuales se aborde, por lo menos, alguno de estos significados.

Para el caso de la secuencia, se propuso trabajar con varios significados, pero se interesó en abordar, principalmente, el significado de fracción como razón y relación parte-todo, tomando como referencia lo planteado por Kieren (1980), Hoyos-Franco (2018) y Obando (2003). En su mayoría, las preguntas abordadas apuntan hacia la comparación entre regletas, por ejemplo, se pide al estudiante comparar y decir cuántas veces es más grande una regleta que la otra o cuál es la relación entre dos.

***Recurso digital de las Regletas de Cuisenaire*:** fue el recurso digital con el cual se guiaron las actividades presentes en la secuencia. Tal recurso fue diseñado en el Software de GeoGebra, y se puso a disposición de los docentes a través de un enlace que los redirigía a la página de GeoGebra. Se proporcionó dicho material por ser una herramienta de fácil acceso tanto para docente como para los estudiantes.

Blog: se diseñó un blog por medio de una plataforma digital, en la cual se vinculó tanto el recurso digital como la secuencia de actividades.

***Entrevistas semiestructuradas*:** se convirtió en uno de los instrumentos más importantes, pues a través de las respuestas que proporcionaron los docentes se logró identificar y caracterizar los conocimientos que movilizaron al analizar cada una de las tareas presentes en la secuencia de actividades.

Es importante señalar que estos instrumentos fueron presentados y discutidas por un grupo de profesores en formación de maestría en educación matemática, en el marco de los cursos de metodología de la investigación I y II, en articulación con los cursos de educación matemática I y II, donde se estudió el modelo MTSK. Sus comentarios y aportes sirvieron para la reformulación y planteamiento de otras preguntas. Además, para el caso de la secuencia, se tuvo la oportunidad de ser presentada en eventos de educación matemática, en los cuales también se recibieron comentarios que aportaron a la propuesta final.

3.3 Método

En un primer momento se diseñaron las Regletas de Cuisenaire en el software de GeoGebra y posteriormente se subieron a la plataforma en línea para que los docentes pudieran tener acceso al recurso digital a través del siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/gxebkzqe, luego se diseñó la secuencia (ver anexo 3) la cual estuvo conformada por seis actividades relacionadas con el concepto de fracción. A través de dicha secuencia se pretendió abordar desde la construcción del concepto mismo hasta llegar a la suma de fracciones homogéneas.

En un tercer momento se elaboró un blog a través de la plataforma Wix, en el que se incluyó la visualización del recurso de GeoGebra y la secuencia de actividades de forma paralela. Esto se realizó con el propósito de que se les facilitara a los docentes la interacción con los dos recursos. Su acceso se permitió realizar a través del siguiente enlace: https://julianmlendez.wixsite.com/my-site

Una vez diseñados los instrumentos utilizados se dio paso a contactar a los docentes que conformarían el caso por estudiar, para ello se contactó a tres docentes del área de matemáticas que estuvieran orientando quinto grado de primaria o hubieran tenido experiencia en dicho grado, posteriormente se acordaron los tiempos y espacios para realizar los encuentros pertinentes para el desarrollo de la investigación.

El estudio se realizó durante cinco sesiones de manera síncrona, con una duración de una hora por cada sesión. En la primera se explicó a los docentes cuál era el propósito de las sesiones a realizar. En esta sesión se buscaron abordar tres aspectos, en primer lugar, conocer cuáles eran los conocimientos que movilizaban los docentes alrededor del concepto de fracción y qué dificultades habían identificado desde su experiencia en el proceso de enseñanza – aprendizaje de tal concepto. En segundo lugar, se preguntó por el conocimiento que tenían alrededor de los recursos materiales y virtuales utilizados en clase de matemáticas y, por último, se interesó por saber qué conocían al respecto del uso de las Regletas de Cuisenaire como recurso para enseñar matemáticas y en particular para la enseñanza de fracciones.

Las siguientes sesiones correspondieron al momento en el que los docentes comenzaron a analizar cada una de las actividades presentes en la secuencia, en estas sesiones se tuvo como propósito generar las discusiones alrededor de cada una de las tareas que conformaron la secuencia, haciendo uso de algunas de las preguntas relacionadas con los subdominios del modelo MTSK (ver anexo 2), esto con el propósito de generar la discusión por parte de los docentes alrededor de lo incluido en las tareas de las actividades.

Finalmente, se procedió a la recolección y análisis de los datos, pues una vez obtenida la información recolectada en las sesiones utilizando los diferentes instrumentos, se hizo uso de los subdominios que conforman el modelo analítico MTSK para identificar en la información recolectada los conocimientos que movilizaron los docentes en cada una de las sesiones, para realizar la caracterización de acuerdo con las categorías que atañen a cada subdominio, de aquellos conocimientos que hacen especialista al profesor de matemáticas en la enseñanza de la suma de fracciones a través de las Regletas de Cuisenaire, el cual fue objetivo general de la presente investigación.

Tomando en consideración la situación de contingencia provocada por el COVID 19, no fue posible tener un acercamiento presencial a la población objeto de estudio, por lo cual, se optó por hacer los encuentros a través de las plataformas digitales de comunicación, tales como Zoom o Meet.

Capítulo 4. Análisis de resultados

Los elementos característicos del conocimiento especializado en matemáticas a identificar en el siguiente análisis son producto de la formación de los tres profesores informantes, de la interacción y experiencias en procesos de instrucción que han tenido hasta la actualidad; experiencia en planeaciones de clase, diseño de actividades, tareas, secuencias, entre otros. Además, dichos conocimientos son también producto del conocimiento curricular, didáctico y pedagógico alrededor del estudio de las fracciones en grado quinto de primaria.

Es importante aclarar que, en el proceso de implementación, no se da ningún material de apoyo a los docentes referente a los contenidos que se abordan en la secuencia de actividades, de esta manera el discurso recibido por cada uno de los docentes en las sesiones es conocimiento que ya movilizan por su experiencia y formación. En este sentido, la información recogida es producto de la interacción del investigador con los docentes a través de preguntas intencionadas relacionadas con los subdominios del modelo MTSK, tales preguntas no presentaban un orden, se iban abordando en la medida en que los docentes comentaban aspectos relacionados con otros subdominios del modelo.

4.1 Notaciones para extractos de diálogos

En lo que corresponde a las notaciones utilizadas en el siguiente análisis se ha de referir a seudónimos de los tres profesores participantes del estudio:

Profesor 1: María

Profesor 2: Antonio

Profesor 3: Sofía

Entrevistador: E

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la implementación de los instrumentos diseñados a lo largo de la investigación, al igual que los respectivos análisis de algunos extractos de entrevista en los cuales se evidencias elementos de interés para el estudio. Para dicho análisis se toma en consideración los elementos expuestos del modelo

MTSK bajo los planteamientos de Carrillo-Yañez, et al (2018), Escudero, et al (2015), Rojas, et al (2015) y algunos aspectos concernientes al estudio de las fracciones.

Se irá presentado el análisis de cada una de las sesiones por separado y al final se buscará encontrar relaciones entre los subdominios abordados en cada sesión.

4.2 Sesión 1: experiencias de los docentes con las Regletas de Cuisenaire

Esta sesión tuvo el propósito de conocer el conocimiento previo que movilizaban los docentes frente a los recursos materiales y virtuales utilizados en el aula de clases para impartir matemáticas, esto con el fin de ir haciendo un acercamiento al recurso presto a utilizar en la secuencia de actividades en sesiones posteriores. Se abordaron temas relacionados con materiales utilizados desde sus experiencias con la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento y la experiencia con las Regletas de Cuisenaire y aspectos relacionados con las fracciones.

Experiencia con los recursos

E: ¿Qué son los recursos materiales y virtuales? ¿Qué entienden?, ¿Conocen recursos y los han utilizado? ¿Cuáles conocen? ¿Cuál es su importancia?

Antonio: Desde mi experiencia y formación, los materiales o recursos, tanto concretos como virtuales, son aquellos que permiten que los estudiantes logren acercarse a ciertos contenidos matemáticos que pretendo desarrollar.

Sofía: Su importancia radica en que de alguna manera hace que ese aprendizaje sea más significativo, o sea, con más sentido, a veces para nosotros no son tan tangible algunos conceptos que queremos abordar con los estudiantes, entonces de alguna manera eso lleva a que cobre ese sentido.

María: Tienen muchas ventajas porque nos ayudan a potenciar las clases, creo que cuando nosotros utilizamos ya sean recursos materiales o virtuales, nuestras clases toman un rumbo distinto y los niños lo saben apreciar bastante bien, se le hace hasta como un juego, lo ven de manera diferente porque no todos sus maestros emplean recursos.

Frente al anterior extracto de entrevista se puede evidenciar que los tres profesores ya han tenido un acercamiento previo a la interacción con recursos para la enseñanza de las matemáticas, señalan que estos permiten tener un mayor acercamiento a los contenidos matemáticos y que el aprendizaje resulta ser más significativo y ayudan a potenciar las clases. En este sentido Arrieta (1998) menciona que:

> La propia experiencia indica que el material facilita y favorece la comprensión e incluso la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, facilita la visualización - proceso de formación de imágenes mentales o materiales - que es clave en la comprensión de conceptos y favorece la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento. (p.110)

De esta manera, la idea con la parten los profesores en relación con el uso de los recursos es que estos se convierten en facilitadores de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, permiten que el estudiante tenga un mayor acercamiento al concepto y hacen que este cobre sentido. Además de que, la parte lúdica hace que se provoque un mayor interés por parte de los estudiantes.

En cuanto a la experiencia con los recursos, Antonio comentó haber usado softwares como GeoGebra, Scratch y algunos materiales concretos abordando temas de geometría Euclidiana, probabilidad y estadística. Frente a la importancia del por qué usar estos recursos añade lo siguiente:

Antonio: Considero que, los recursos materiales y virtuales son importantes, recordando la teoría de Bruner, la cual presenta tres

> fases o tres aspectos importantes, donde el estudiante primero puede visualizar concretamente ese objeto matemático, manipularlo para ver que sucede con él, luego hacer una representación gráfica por medio de un dibujo, y finalmente analizarlo y desarrollarlo en su mente.

Lo anterior da cuenta del reconocimiento de teorías generales en didáctica las matemáticas, las cuales sustentan el uso de los recursos, y enseñan como estos permiten cambiar la perspectiva que se tiende de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Si nos trasladamos a la relación con los subdominios del modelo MTSK, encontramos en lo reportado hasta el momento, relación con el KMT, al referirse al uso y la importancia de los recursos materiales y virtuales, señalando la incidencia sobre las prácticas de aula y los resultados favorables que trae consigo el uso de estos medios. Además, podemos encontrar evidencias del KFLM en relación con la expectativas e intereses que les dan a los recursos que han utilizado los docentes, por ejemplo, las profesoras María y Sofía señalan que estos recursos permiten transformar la clase tradicional, resultando ser más interesante y llamativo para los estudiantes.

Conocimiento de las Regletas de Cuisenaire

Frente a la experiencia y el conocimiento que tenían los profesores en relación con el recurso, se encontró que este era relativamente limitado a su diseño y a su uso para la identificación de números, mencionaron algunas características del material, por ejemplo, que vienen graduadas por tamaño, desde la más pequeña hasta la más grande, tienen relaciones con los números y vienen por colores. Dentro de los usos, comentan que permiten a los niños diferenciar los números que están en las regletas y encontrar las relaciones que hay entre ellos. Solamente en el caso de María se notó un mayor conocimiento e interacción con las regletas.

> *María:* he empleado varios materiales, las regletas sí las conozco, utilicé una adaptación de las regletas en un colegio en el que estuve trabajando y nos proporcionaban muchísimo material. Tomé un curso que se llamaba método Singapur de material concreto, las

> regletas estaban graduadas con fracciones, eran planas, las podías apilar una encima de la otra para verificar cuanto equivalía un cuarto, un medio y cuantas cabían en un entero.

La relación de los profesores con el material fue importante para la discusión de las actividades. En todos los casos, los profesores muestran un conocimiento, con mayor o menor profundidad, de las características matemáticas del recurso, lo cual forma parte del KMT.

Un aspecto identificado en relación con el KFLM es lo comentado por María en el anterior extracto, donde se resalta el conocimiento de (relacionado con el uso de las regletas) un método denominado Singapur, el cual, de acuerdo con Rodríguez (2011), se caracteriza por poner a la resolución de problemas en el foco del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto muestra evidencia del conocimiento de teorías relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, lo cual es propio de este subdominio.

Relación con las regletas y las fracciones

Desde la experiencia reportada por los profesores, se notó que solamente María tenía conocimiento del material en relación con la enseñanza de las fracciones, experiencia que da cuenta del uso de este material tan solo para representar algunas fracciones sencillas como un medio, un tercio y un cuarto y no para trabajar suma de fracciones, lo cual fue lo pretendido en la secuencia de actividades.

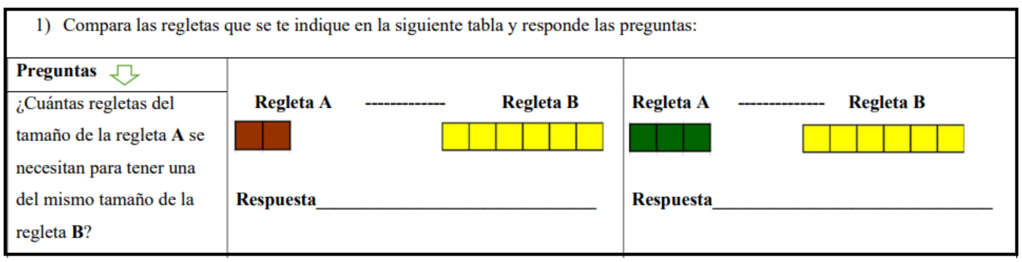
Con respecto a la experiencia de la profesora María con las Regletas de Cuisenaire, se percibe en su discurso, la tendencia a interpretar que el significado movilizado a partir de este material es el de fracción como relación parte-todo, sim embargo, esta interpretación resulta ser errónea. Si se consideran los planteamientos propuestos por Valdemoros (2004), se entiende que por tratarse de la comparación entre dos o más regletas y por ser dos longitudes que se comparan por separado, se trata de ver a la fracción como una razón y no como relación parte de un todo. Para que cobrase sentido la relación parte todo, necesariamente se deberían extraer las dos o más longitudes de una misma regleta.

Otra forma para que cobre sentido la relación parte-todo en el uso de las regletas, sería superponiendo unas regletas encima de otras, de tal manera que las que están en la parte de abajo correspondan a la unidad y las regletas que están encima a la parte o las partes que se ha tomado de esa unidad, teniendo en cuenta que las divisiones de las regletas deben ser necesariamente congruentes (Ruiz, 2013).

4.3 Sesión 2: inicio de análisis de la secuencia por parte de los docentes

A partir de este momento se presentan resultados de las sesiones donde los docentes comienzan a analizar cada una de las actividades presentes en la secuencia. En este sentido, lo que prosigue será la presentación de extractos de diálogos tomados de las sesiones, junto con algunas imágenes de la secuencia de actividades a las cuales se hace referencia en los diálogos.

Tarea 1 – Actividad 1.


1) Compara las regletas que se te indique en la siguiente tabla y responde las preguntas:

Preguntas		
¿Cuántas regletas del tamaño de la regleta **A** se necesitan para tener una del mismo tamaño de la regleta **B**?	**Regleta A** ------------ **Regleta B** **Respuesta**___________________________	**Regleta A** ------------- **Regleta B** **Respuesta**___________________________

Figura 4. *Comparación entre regletas.* (Fuente propia)

E: ¿Qué parte de la regleta B se ocupa si encimamos una de la A?, o sea, si tomamos la de color verde y la ponemos encima de la de color purpura. ¿Qué parte se ocupa?

María: podríamos decir que se ocupa más de la mitad, porque en quinto, ya se manejan conceptos de mitades. De hecho, desde tercero se trabaja con mitades y triples. Entonces, talvez ellos ya puedan decir y asimilar que van a ocupar más de la mitad de la regleta B.

En el extracto anterior referido a la figura 4, se pueden evidenciar aspectos relacionados con el KMLS, puesto que María reconoce las nociones previas con las que ya debe llegar un estudiante al grado quinto de primaria. Esos conocimientos previos remiten a que el estudiante al reconocer que las partes son iguales, puede manejar nociones de mitades, tercios, triples, en particular señala que son conocimientos que el estudiante debe movilizar desde grado tercero y, en efecto, la Secretaría de Educación Pública [SEP] (2011) señala, en las orientaciones curriculares, que dentro de los aprendizajes esperados de primero a segundo de primaria, el estudiante debe calcular mitades, dobles, triples de un número y en cuanto al ciclo de tercero a cuarto ya usa fracciones con denominador hasta doce para expresar relaciones parte-todo.

Por otra parte, se encuentra relación con el KFLM al momento en que la docente se adelanta a esas posibles respuestas que podrían dar los estudiantes frente a la tarea expuesta. En este sentido Bernabéu et al. (2018) señalan que "anticipar posibles respuestas de los niños/as implica considerar cómo los niños/as pueden interpretar la actividad y, qué elementos y procesos matemáticos tienen que ser aprendidos identificando posibles estrategias de resolución" (p.61).

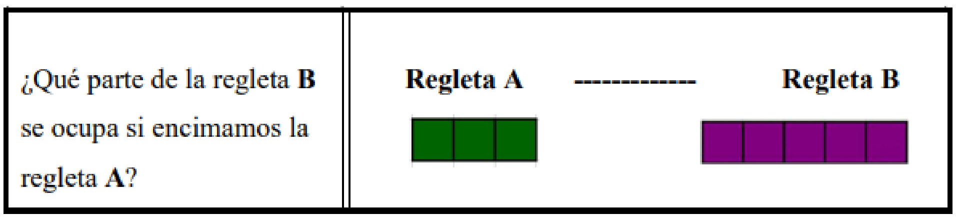


Figura 5. Superponer una regleta que no cabe un número de veces exacto sobre otra. (Fuente propia)

En concordancia con lo dicho por María, Antonio considera que los estudiantes al llegar a grado quinto de primaria ya tienen experiencias con algunas nociones relacionadas con la fracción. Señala que, desde grado tercero, por la manipulación que han tenido con tal concepto, ya tienen la idea de lo que significaría el ocupar un espacio sobre otro. De esta manera, para el caso de la pregunta que aparece en la figura 5, el docente considera que un estudiante fácilmente puede responder que, al superponer la regleta de color verde sobre la púrpura, se ocupa más de la mitad o las tres quintas partes. Por último, menciona que los conceptos de fracciones son complejos y muchas veces, se dan desprovistos de significados.

Antonio, al expresar cómo trabajaría las fracciones con sus estudiantes y al comparar con la forma en la que se presenta la actividad que se ejemplifica en la figura 5, menciona:

Antonio: Yo parto de un conjunto que voy dividiendo en partes iguales, de los cuales voy a tomar la parte sombreada como el numerador y luego la parte que es total de las divisiones como el denominador. Entonces, a los niños les va a costar trabajo entender esas dos

> asociaciones (refiriéndose a superponer una regleta sobre la otra), se les dificultaría entender la relación que hay entre esas dos regletas, además, les puede causar conflicto el tipo de representaciones que ya han trabajado, de esta manera, al presentarlo mediante este tipo de representación, puede que no permita comprender la relación parte-todo

Antonio interpreta que la relación de comparación entre regletas lleva al significado de fracción como parte-todo. Es por ello que, al no estar presentes las divisiones de la unidad, se plantea que esto puede generar una dificultad en los estudiantes. Aquí podemos destacar dos conocimientos. Por un lado, Antonio muestra conocimiento sobre las fortalezas y dificultades de los estudiantes respecto al tema de fracciones. Tienen fortaleza en cuanto a la comprensión del significado parte-todo y su representación mediante áreas sombreadas, pero tienen dificultades en el cambio de representación. Este conocimiento forma parte del subdominio KFLM. Por otro lado, Antonio muestra conocimiento sobre significados de la fracción, aunque en este extracto tal conocimiento parece estar limitado al significado de parte-todo, lo cual forma parte del subdominio KoT.

Un aspecto importante que señala Antonio es el tipo de representaciones previas con las que llega el estudiante, representaciones gráficas que usualmente utilizan los profesores de matemáticas para hacer los primeros acercamientos a las fracciones. Un ejemplo clásico es el de la pizza, donde, al dividirla en 4 partes iguales, se tiene una unidad-todo y cada una de estas partes de llamará unidad fraccionaria (Fandiño, 2015). En este sentido, se entiende que lo mencionado por Antonio está relacionado con la forma inicial como se presenta la fracción, el estudiante ya tiene una representación inicial (el caso de la pizza que está dividida en partes iguales) y ahora al tener dos regletas las cuales una no cabe exactamente un número de veces sobre la otra, no sabrá a que unidad fraccionaria hace referencia la regleta más corta.

Frente a esta misma pregunta de la figura 5, Sofia considera que los estudiantes podrían tener dificultades para resolverla, dado que, aparece un cambio de nivel en el tipo de preguntas. Señala que, si se viene trabajando con preguntas en las que se habla de dobles, triples y que al superponer una sobre otra, esta cabe un número exacto de veces, resultaría difícil para el estudiante encontrar esa relación, por esta razón recomienda quitar la pregunta y añadir una con un nivel parecido a las anteriores. Por el contrario, María menciona lo siguiente:

María Yo creo que sí es pertinente dejarla ahí. Te voy a comentar por qué. Esta es la primera tarea, entonces con esta tarea, si se llega a aplicar, tú, como docente, te vas a dar cuenta de qué conocimiento realmente tiene el estudiante y qué tipo de respuesta te puede proporcionar. Este tipo de preguntas permite al docente darse cuenta de qué conocimiento previo tiene el estudiante, qué conceptos domina y qué me va a contestar él, entonces sería interesante poder observar que me va a contestar y de qué manera va a plasmar la respuesta, tal vez lo exprese a través de fracciones, tal vez no, tal vez exprese de una manera muy simple con conceptos muy básicos, como de que ¡ah! no pues esta está más de la mitad, ya a lo mejor sabes que él sabe que es la mitad y ya tienes un punto de partida acerca de lo que ya él te puede decir sobre esta actividad.

María considera que es una pregunta muy conveniente y es el momento de hacerla, puesto que a través de dicha pregunta se puede evidenciar cuál es el conocimiento que ya movilizan los estudiantes. Este comentario de la docente se puede relacionar subdominio del KMLS, por las expectativas esperadas por la profesora frente a preguntas de mayor complejidad. En efecto, aquellas preguntas que requieran un mayor grado de abstracción permitirían al profesor conocer el nivel de desarrollo del concepto que moviliza el estudiante en ese momento, lo que permitirá tomar decisiones en actividades próximas.

La conclusión frente a las intervenciones de esta pregunta es que, sí se hace necesario establecer preguntas que incrementen su grado de complejidad y más aún cuando son las primeras actividades, esto con el propósito de indagar qué están pensando los estudiantes, cómo lo están pensando, qué y cómo lo están entendiendo. De manera que cada respuesta que den los estudiantes permita al docente conocer cuáles pueden ser los efectos en las tareas próximas.

E: ¿Qué significado podrían ustedes atribuirles a estas nociones iniciales? por ejemplo, la primera pregunta, si estamos hablando de cuántas veces cabe una regleta en otra, ¿Qué acercamiento o a qué significado podríamos relacionarlos?

Antonio: Pues yo creería que, en la primera, se ve la relación parte-todo, el todo sería la regleta que es más grande y habría que ver la relación que tiene con esa parte más pequeña o qué parte ocupa esa más pequeña en el todo que sería la regleta A, en este caso sería la regleta café y la amarilla, que puedan observar ese tipo de relaciones

Sofía: Sí, en esa primera parte sería como parte-todo, porque se está hablando del todo que sería la regleta amarilla por ejemplo en el primer ejercicio y la otra pues que sería la parte.

María: bueno, específicamente de fracciones si coincido con los otros dos profesores, que tiene que ver con parte y todo.

El fragmento anterior hace referencia al significado de la fracción que los docentes identifican o relacionan en la primera actividad de la secuencia, al respecto todos los docentes coinciden en que el significado abordado hasta el momento es la relación parte todo, señalan que el todo serían las regletas más grandes y las regletas pequeñas hacen referencia a la parte que se toma de ese todo. Estas consideraciones se pueden contrastar con lo mencionado por Obando (2003):

> Pensar la fracción como relación parte–todo implica, fundamentalmente, la realización de procesos de medición para establecer la cuantificación de la parte y del todo y, por consiguiente, la relación cuantitativa entre ambos. Igualmente, elegir tal sentido de la fracción obliga a la explicitación de la magnitud sobre la cual se debe realizar la cuantificación. (p. 174)

El autor hace referencia a una relación cuantitativa entren dos cantidades, en este caso la relación estaría dada por la cantidad de cuadritos que componen cada una de las regletas. Ahora bien, la respuesta que da el profesor Antonio no es del todo correcta para afirmar que el significado presente es la parte de un todo, ya que, para serlo se debería disponer de una sola regleta y tomar partes de ella, lo cual no es así. En estas preguntas se hace alusión a dos regletas con diferentes longitudes, haciendo necesario pensar en una comparación entre dos cantidades. De esta manera, el significado presente en las primeras preguntas es el de razón.

La respuesta del profesor Antonio pone en evidencia la confusión que pueden tener los docentes al comprender y enseñar el significado de fracción como relación parte-todo, esto quizá se deba a una interpretación errónea a lo largo de su formación y experiencia o al desconocimiento de los múltiples significados que posee el concepto. Obando (2003) señala que el significado de fracción como relación parte de un todo es sólo el puente para adentrarse a los demás significados que poseen los números racionales (las medidas, las fracciones decimales, los cocientes, las razones, entre otros). De esta manera, no siempre se puede ver a la fracción como una relación parte de un todo.

4.4 Sesión 3: análisis de la actividad 2

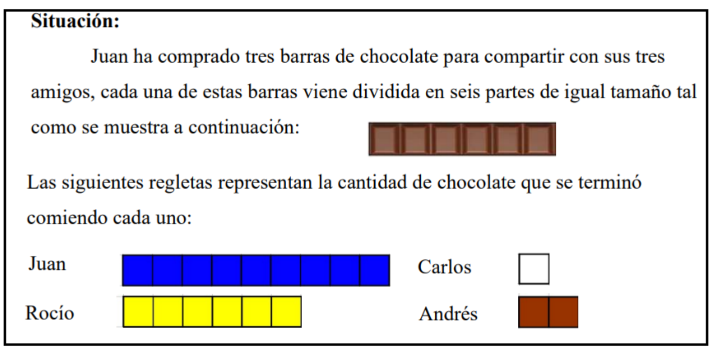


Figura 6. Juan y las barras de chocolate. (Fuente propia)

La situación presente en la figura 6 corresponde a la tarea 1 de la actividad 2, el objetivo de esta situación era mostrar una relación del contenido enseñado con un contexto cercano al estudiante, se debía encontrar una regleta que fuese igual a la barra de chocolate para luego encontrar las relaciones con las partes que se comió cada uno de los chicos.

Con respecto a esta situación, María hace los siguientes comentarios:

María: me puse a pensar en el tipo de errores que pudieran surgir o confusiones, entonces, talvez pudiera surgir lo siguiente: como están separadas las barras de chocolate, las cuales están divididas

> en sextos, en seis, talvez pudiera considerar el estudiante que Juan se comió más de la primera barra, o a lo mejor pudiera ser que no lo relacionara con que las tres barras representan la totalidad de lo que se va a repartir.

En este comentario de María podemos encontrar evidencias del KFLM, este se relaciona con la parte anticipada en la que la docente establece los posibles errores a los que se podrían enfrentar los estudiantes, o viéndolo desde otra perspectiva, también se podría hacer alusión a los obstáculos que quizá se creen en el estudiante, al estar acostumbrado a resolver problemas donde el número de particiones es mayor que el número de partes tomadas, y aunque el problema no lo evoque así, la docente sí reconoce que la situación podría arrojar ese tipo de errores producto de los obstáculos.

La docente señala que, talvez la ausencia de la totalidad de barras de chocolate haría que el estudiante tuviera dificultades para encontrar la cantidad de chocolate que comió Juan, esto porque la regleta que corresponde a la porción que se comió es más grande de la barra que presenta en la situación. Ahora bien, si se piensa en establecer una relación **a/b** donde **b** es el número de partes en el que se ha dividido la unidad y **a** corresponde a la cantidad que se ha tomado, entonces la barra de chocolate representaría una unidad que se ha dividido en seis partes iguales y de las cuales es evidente que Carlos y Andrés se comieron un número de partes de la barra de chocolate, hasta el momento no habría dificultades. El problema aparece cuando se piensa en Rocío y Juan, María señala que el estudiante tendría dificultades al ver que tiene una barra de chocolate dividida en seis partes iguales y de esas partes debe tomar nueve. Fandiño (2015) menciona lo siguiente:

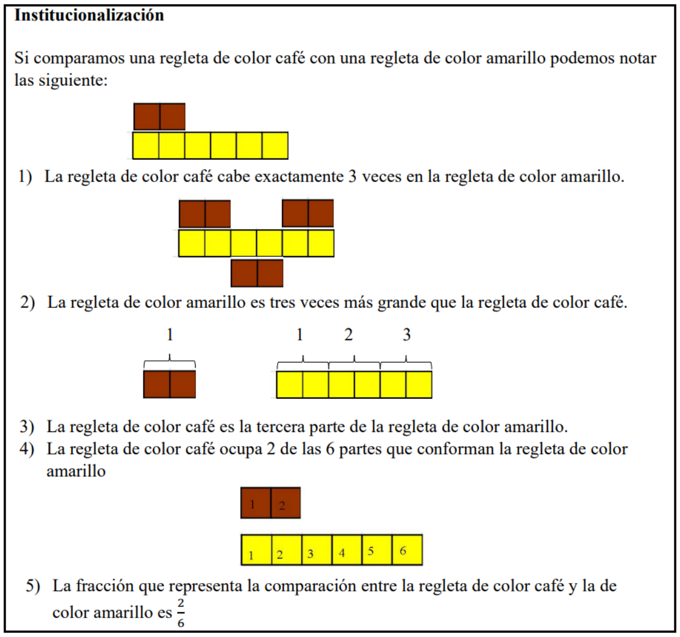
> Pierde sentido el caso en el que a > b, las llamadas fracciones impropias, para las cuales la definición (dividir la unidad en b partes iguales y tomar a partes) pierde su significado intuitivo: ¿cómo se hace en efecto, para dividir una unidad en 4 partes y tomar... 5? Hay quien responde que, en tal caso, no hay una sola pizza, sino 2; pero entonces ¿la unidad es la pizza o son las pizzas? Una situación como esta no puede no generar confusión. A veces la unidad es 1, a veces es más de 1; en el caso de las fracciones impropias, las pizzas son 2 pero la unidad es una. (p.26)

De acuerdo con lo mencionado por Fandiño, pareciera que el caso de la parte que se comió Juan hace alusión a las fracciones impropias, sin embargo, no es así, si la situación mencionara una sola barra de chocolate entonces sí se hablaría de fracción impropia, pero en este caso se habla de tres barras. Para el caso real de la situación, **b** sería el número de particiones totales al unir las tres barras de chocolate (siendo el todo o la unidad), es decir que serían 18 particiones, y **a** sería cada una de las partes que se comió cada uno de los chicos.

Frente a la misma situación presente en la figura 6, Antonio está de acuerdo con María, en señalar que podría resultar difícil para el estudiante encontrar la relación entre la parte que se comió Juan con respecto a la que está en la situación, menciona que haría falta poner las tres barras de chocolate para que el estudiante no tenga confusiones o en su defecto, que se hagan preguntas auxiliares en las que se vaya encaminando al estudiante hacia lo pretendido por el docente, en este caso el hacer notar que la unidad o el todo hace referencia al total de las barras de chocolate.

> *E:* ¿Qué significado o relación de las fracciones se sigue trabajando acá? ¿Consideran que se sigue trabajando la fracción? ¿O se cambia el significado cuando le decimos al estudiante, que la barra de chocolate tiene que triplicarse?

De acuerdo con lo reportado por María en relación con las preguntas anteriores, se sigue trabajando sobre la relación parte-todo, aunque se haya incrementado el nivel de dificultad de las preguntas. Señala que el estudiante debe tener en cuenta que el todo está conformado por las tres barras de chocolate y no solamente la barra que se presenta en la situación, de tal manera que las porciones que les correspondía a cada uno de los chicos se han tomado del total de las tres barras de chocolate.



Institucionalización

Si comparamos una regleta de color café con una regleta de color amarillo podemos notar las siguiente:

1) La regleta de color café cabe exactamente 3 veces en la regleta de color amarillo.

2) La regleta de color amarillo es tres veces más grande que la regleta de color café.

3) La regleta de color café es la tercera parte de la regleta de color amarillo.
4) La regleta de color café ocupa 2 de las 6 partes que conforman la regleta de color amarillo

5) La fracción que representa la comparación entre la regleta de color café y la de color amarillo es $\frac{2}{6}$

Figura 7. Actividad de institucionalización. (Fuente propia)

La figura 7 corresponde a la fase de institucionalización presente al final de la actividad dos, en ella se pretendía retomar los aspectos de las tareas anteriores para llegar a la construcción y al acercamiento de la fracción como la relación entre dos números a través de la comparación entre las regletas.

En principio, el análisis que hicieron los docentes de esta parte no coincidía con la verdadera intencionalidad de los cinco pasos señalados, no encontraban una secuenciación en las indicaciones, pensaron que cada paso era un ejemplo diferente, por lo que dijeron que era recomendable usar y comparar regletas de otros colores y no quedarse solamente con las regletas amarillas.

En relación con el paso número uno, la docente María menciona que no considera pertinente dejar una regleta café por debajo de la regleta amarilla, puesto que los estudiantes ya saben que si la regleta es de color café tiene el valor de dos, de manera que no habría problema al ponerla en la parte de arriba.

Finalmente, los docentes entendieron que los pasos descritos tenían el propósito de acercar al estudiante a que por primera vez apareciera la fracción como una relación entre las dos cantidades numéricas que representaban las regletas.

Bajo los comentarios alrededor de la situación anterior, se dio origen a la discusión sobre el usar el término **relación**, al respecto María hizo una crítica al profesor Antonio por usar este término. En el siguiente extracto se puede ver lo mencionado:

María: no coincido en preguntarle a los estudiantes ¿cuál es la relación que ellos observan?, casi siempre he dado clases en quinto y se utiliza mucho este concepto de relación, sobre todo en los libros de texto. Ahora, se debe trabajar previamente para que ellos sepan que significa encontrar la relación. La primera vez que lo hice supuse que en cuarto ya lo habían abordado, sin embargo, al preguntarles por ¿Qué relación tiene una fracción con respecto a otra fracción?, los estudiantes no supieron responder, surgiendo preguntas como: ¿qué es esto? ¿qué es relación? ¿a qué se refiere?

María señala que desde su experiencia no recomienda usar el término de **relación** de forma apresurada, puesto que resulta difícil para estudiantes de quinto grado entender a que hace referencia esa palabra. Quizá puedan entender las diferencias entre dos fracciones, como el decir que una es más grande que la otra, que una es el doble, la tercera parte, cuatro veces más grande, entre otros. Pero al referirse al término relación, el estudiante no sabe cómo actuar frente a ese tipo de preguntas.

4.5 Sesión 4: análisis de actividades 3 y 4

Las actividades 3 y 4 tuvieron el propósito de recordar algunos conceptos como el de unidad y saber que significa tomar una fracción de esa unidad, además de presentar algunos problemas aplicados en contextos cotidianos en los que se puede ver reflejada la suma de fracciones homogéneas.

Dentro de los aspectos más importantes a resaltar de análisis realizado por los docentes se presenta la situación del granjero presente en la figura 8. Esta es una situación pensada desde un contexto cotidiano para los estudiantes, se esperaba que a través de las Regletas de Cuisenaire se representara dicha situación y se respondieran a las preguntas indicadas.

Tarea 1. Situación del granjero

Robert es un granjero que tiene un terreno de forma rectangular, el cual ha dividido en 6 sectores de igual tamaño (área) tal como se muestra en la siguiente imagen. El propósito de la división en los sectores es para sembrar diferentes verduras.

En los sectores **A** y **B** ha decidido sembrar zanahorias, en el **C** lechugas, en el **D** pepinos y en el **E** y **F** tomates.

Figura 8. El terreno del granjero Robert. *(Fuente propia)*

María y Antonio comentan frente a la situación del granjero, que quizá no sea tan fácil encontrar un terreno con estas divisiones y con esas características, sin embargo, señala Antonio que sería interesante pensarse la situación como algo ideal, pues los estudiantes podrían ir haciendo las asociaciones visualmente, de cada uno de los terrenos sembrados. Los comentarios de los docentes se pueden relacionar con el subdominio del KFLM, por el hecho de reconocer que tipo de situaciones resultarían cotidianas para el estudiante, de manera que despierten la motivación, el interés y las expectativas por el aprendizaje.

De acuerdo con la situación, ¿Cuál sería la unidad?

____

¿Qué fracción de la unidad representan los sectores en los que se sembraran zanahorias? _____________

¿Qué fracción de la unidad representa el sector en el que se sembrará pepinos? ____________

Aumentemos el nivel de complejidad:

¿Qué fracción de la unidad representa el sector donde no se sembraron zanahorias ni lechugas? _______________

¿Qué fracción de la unidad representa el sector donde no se sembraron lechugas ni pepinos? _______________

¿Qué fracción de la unidad representa el sector donde no se sembró pepinos? ________________

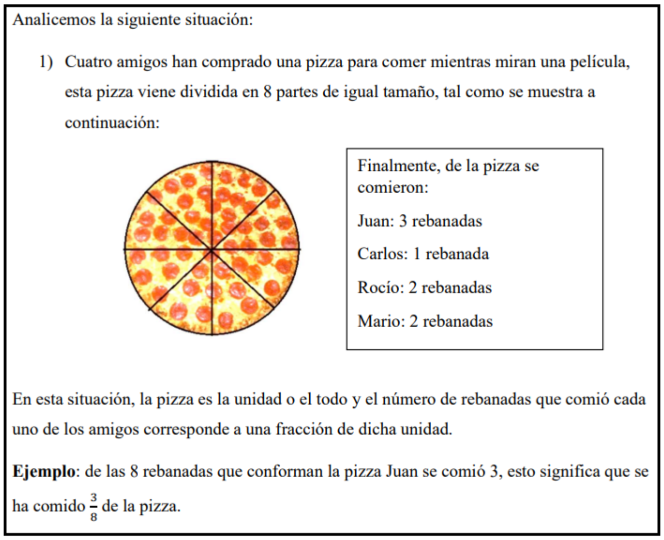
Figura 9. Aumento en la complejidad de las preguntas. (Fuente propia)

Sofía: Cuando se propone aumentar el nivel de complejidad, para mí realmente no se hizo un aumento de este, o sea, quizás las preguntas si me están involucrando la mezcla de dos regletas y demás, pero en este caso el estudiante puede responder de la misma forma que en las actividades anteriores.

El anterior fragmento hace alusión a la imagen 9, donde se pretendía desde la actividad del granjero hacer un incremento en el nivel de complejidad de las preguntas, a lo que Sofía considera que no se puede evidenciar un aumento de dicha complejidad, añade que para que haya un nivel mayor de dificultad se podría pensar en preguntar por otro tipo de figuras, donde las particiones no sean sobre las mismas figuras usuales como las pizzas o los rectángulos, que se podría pensar en cuadrados u otro tipo de figuras. Estos aspectos mencionados por la docente muestran evidencias del KMT, al reconocer la importancia de utilizar ejemplos alternos para presentar el concepto, pensar en otro tipo de representaciones que en un futuro no creen obstáculos para los estudiantes.

Otro aspecto abordado en esta sección fue el de la unidad. Al respecto, Sofía al igual que Antonio consideran que el ejemplo de la pizza (ver figura 10) se salía de la secuenciación que se venía manejando en las actividades anteriores, señalando que, si se está trabajando con las Regletas de Cuisenaire, por qué vincular otro tipo de figuras a la secuencia, estas podrían provocar confusiones en el estudiante por el cambio de representación gráfica. Como solución a esto, Antonio recomienda que, en lugar de la situación de la pizza, se podría pensar en una situación que se asemeje a la representación que presentan las regletas.

Por otra parte, Antonio añade que, aunque la situación de la pizza se salga del tipo de representaciones que se venían trabajando, se puede identificar el significado de fracción como relación parte-todo, pues comenta que tal representación permite identificar un todo que es dividido en ocho secciones de igual tamaño, las cuales corresponden a las partes que se comerán Juan, Carlos, Rocío y Mario. Este comentario hace un acercamiento nuevamente al KoT, al identificar en la situación de la pizza una aproximación a la definición de la fracción como relación parte-todo.



Analicemos la siguiente situación:

1) Cuatro amigos han comprado una pizza para comer mientras miran una película, esta pizza viene dividida en 8 partes de igual tamaño, tal como se muestra a continuación:

Finalmente, de la pizza se comieron:

Juan: 3 rebanadas

Carlos: 1 rebanada

Rocío: 2 rebanadas

Mario: 2 rebanadas

En esta situación, la pizza es la unidad o el todo y el número de rebanadas que comió cada uno de los amigos corresponde a una fracción de dicha unidad.

Ejemplo: de las 8 rebanadas que conforman la pizza Juan se comió 3, esto significa que se ha comido $\frac{3}{8}$ de la pizza.

Figura 10. *Tomar una fracción de una unidad.* (Fuente propia)

Un último comentario que hizo Antonio frente a lo expuesto en la figura 10, estuvo relacionado con la forma como se presenta el ejemplo, el cual podría provocar dificultades a la hora de interpretar la fracción a la que se hace referencia, el docente señala que los estudiantes pueden tener confusiones al interpretar erróneamente la fracción; es decir, que pueden llegar a confundir el numerador con el denominador o bien, a confundir la parte con el todo.

4.6 Sesión 5: análisis de actividades finales

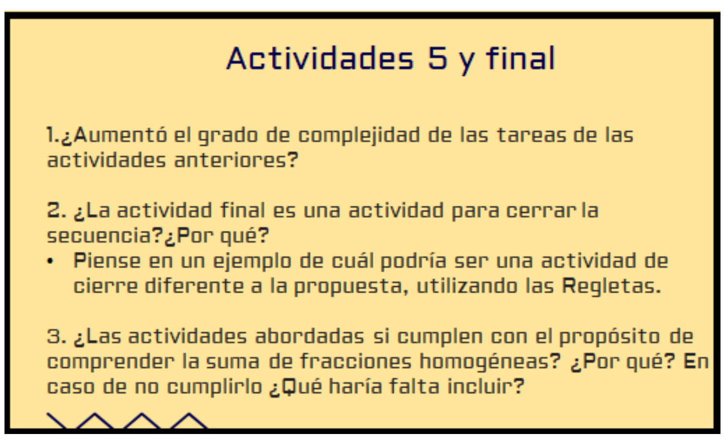


Figura 11. Preguntas para cierre de actividades. (Fuente propia)

Para las dos últimas actividades, se plantearon preguntas como las presentes en la figura 11. Frente al grado de complejidad de las tareas, el docente Antonio mencionó ver aumento en el nivel de complejidad de las preguntas en relación con las actividades anteriores de la secuencia, sin embargo, señala que se podría pensar en usar regletas más grandes para aumentar la complejidad en relación con el dominio numérico.

Antonio: Desde mi experiencia, desde tercer grado se empiezan a ver fracciones, ya en cuarto grado, los niños conocen que son las fracciones, los decimales, fracciones con denominador de tres cifras o más, de esta manera este dominio se puede ampliar para grado quinto.

De acuerdo con el comentario que hace Antonio se puede evidenciar que reconoce que, al llegar a grado quinto, los estudiantes movilizan un conjunto de conocimientos previos relacionados con las fracciones, ya conocen otras representaciones y la experiencia les permite trabajar con números de más de una cifra. Este comentario se relaciona con el subdominio del KMLS, por reconocer la secuenciación de los temas abordados, los temas previos y consecuentes en cuanto a los conocimientos y habilidades requeridos para las tareas propuestas.

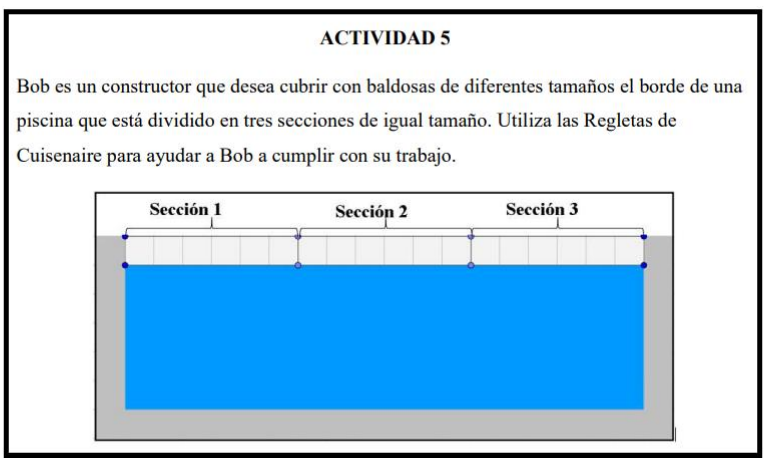


Figura 12. Situación de Bob el constructor. (Fuente propia)

María: Esta actividad ya la podemos entrelazar y aterrizar con la suma de fracciones, se pueden plantear preguntas de tipo: si juntas o sumas la fracción de la primera sección con la de la tercera sección, ¿cuál va a ser el total?

En el anterior fragmento María hace alusión a la tercera pregunta de la figura 11 y la situación presente en la figura 12. Al respecto, menciona que para lograr que el estudiante comprenda la suma de fracciones homogéneas se debería pensar en otro tipo de preguntas, donde se haga referencia directamente a la suma de partes tomadas de las secciones de la piscina. Aquí se pueden encontrar indicios del KMT, al momento en el que la docente da cuenta del tipo de tareas y preguntas que pudieran plantearse en la enseñanza de la suma de fracciones.

Otra pregunta relacionada con la situación anterior mencionaba lo siguiente: Tomando como unidad todo el borde que desea cubrir, ¿qué fracción de dicha unidad representa la parte que está cubierta con baldosas hasta el momento? En relación con esta pregunta, María y Antonio comentan que por la forma en que se pregunta, no se permite evidenciar de manera clara que se haga referencia a la suma de fracciones homogéneas, señalan que eso se debe a que el estudiante fácilmente puede sumar las partes pensando en números naturales y dejando de lado que cada parte está relacionado con una unidad de referencia, de tal manera que no se cumpliría con el objetivo de la tarea. Estos comentarios se pueden relacionar con el subdominio del KFLM, al pensar en las posibles dificultades y obstáculos que el estudiante se puede enfrentar al resolver las tareas, en este caso, el obstáculo de seguir sumando las fracciones de manera lineal como lo hacían con los números naturales.

Antonio: considero que un buen cierre de la secuencia sería plantearse el inicio de algo más. Plantearía algo sobre las fracciones impropias, sería pensar en otras representaciones y preguntarnos: ¿cómo podríamos representar esas fracciones con las regletas? y pensar en ¿cómo en utilizarlas para realizar comparaciones entre fracciones impropias?

Como a lo largo de la secuencia sólo se abordaron tareas relacionadas con fracciones propias, Antonio recomienda dejar el camino abierto para continuar con la secuencia, vinculando otro tipo de fracciones como las impropias, esto para ampliar el dominio numérico que ya manejan los estudiantes. Además de esto, añade que el vincular las fracciones impropias no se sale del tema de suma de fracciones homogéneas y ayuda a que en un futuro los estudiantes no creen conflictos cognitivos por el hecho de haber estado trabajando con solamente fracciones propias.

En cuanto a la pregunta 2 de la figura 11, Sofía señala que, para hacer un proceso de cierre favorable de las actividades, resulta importante hacer a los estudiantes preguntas específicas de las actividades, saber ¿cómo lo hicieron?, ¿cómo lo entendieron? ¿qué hiciste en esta pregunta?, ¿qué hiciste en este paso?, entre otras preguntas, las cuales menciona que son esenciales para conocer la experiencia del grupo frente a las actividades, añade que se deben generar espacios en los que se llegue a un acuerdo común del significado que se le está dando al concepto o de cómo se está entendiendo una actividad. Estas anotaciones de la docente Sofía muestran indicios del subdominio del KMT, al proponer estrategias de enseñanza a través de situaciones y preguntas orientadoras que permitan cuestionar al estudiante sobre las tareas abordadas.

Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones didácticas

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de este trabajo a partir del objetivo planteado, el marco teórico establecido y el análisis de resultados obtenidos en el capítulo anterior. Además, se proponen algunas recomendaciones y reflexiones didácticas alrededor del uso del modelo MTSK, el estudio de las fracciones y la importancia de indagar sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

El análisis de los resultados permitió conocer que son diversos los conocimientos que pone en acción el profesor de matemáticas al momento de analizar recursos pensados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los docentes mostraron conocimiento tanto matemático como didáctico en relación con las fracciones. Conocimientos relacionados con las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en el proceso de la construcción del concepto de fracción, conocimiento de estrategias alternas que se podrían añadir para dar fuerza a las actividades presentes en la secuencia, la pertinencia de la misma secuencia a la luz de las orientaciones curriculares, la importancia de los conocimientos previos para comprender temas nuevos, el proponer tareas que exijan al estudiante un mayor grado de abstracción, el uso de contextos que sean cercanos al estudiantes, entre otros.

En sintonía con investigaciones como la desarrollada por Rojas (2014), atendiendo al conocimiento matemático que movilizan los docentes alrededor del concepto de fracción en grados iniciales, se reportan conocimientos relacionados con el uso de diferentes sistemas de representación usuales como el gráfico, el numérico y verbal, el conocimiento de los diferentes significados del concepto de fracción con mayor predominancia en el significado de relación parte todo, las operaciones con fracciones, el entender que es una unidad y que significa tomar una fracción de dicha unidad.

Ahora bien, atendiendo al objetivo principal de la investigación, el cual fue caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de actividades relacionada con la enseñanza de las fracciones, a través del modelo MTSK se concluyen las siguientes anotaciones: la mayor evidencia de los subdominios identificada en la intervención con los docentes estuvo relacionada con las categorías pertenecientes al Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), al Conocimiento de los temas (KoT) y al Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Con respecto al KFLM, se encontró evidencias en las respuestas anticipadas que propone la docente María, donde reconoce que, además de la respuesta ideal que el docente de matemáticas espera que el estudiante conteste, se debe tener presente respuestas alternas que quizá den los estudiantes, respuestas que pueden ser producto de una mala interpretación o de diferentes estrategias que pueda tomar el estudiante para encontrar una solución. Por otra parte, se encontraron indicios de este subdominio al momento en el que la docente María menciona la importancia de usar metodologías alternas a las tradicionales, tales como el método Singapur, entendido como una estrategia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a partir de la resolución de problemas. Esto da cuenta del conocimiento de métodos y estrategias propias de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los docentes reconocieron la importancia de utilizar recursos como las Regletas de Cuisenaire, consideran que a través de estos son grandes los intereses y expectativas que se crean en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, permitiendo transformar las clases tradicionales, en clases que despierten el interés y motiven al estudiante a hacer matemáticas de una manera diferente a como usualmente se hace.

Mostraron conocimiento de las fortalezas y dificultades a las cuales se pueden enfrentar los estudiantes con respecto al tema de fracciones. Fortalezas al momento de identificar la relación parte-todo en situaciones análogas a las de sombrear las partes de una figura dividida en sectores de igual área, sin embargo, también mostraron conocimiento en la dificultad que puede tener un estudiante al momento de presentarle una actividad bajo un sistema o medio de representación diferente al que hayan podido trabajar previamente.

También se encontró conocimiento en los posibles errores y obstáculos que pueden aparecer al momento de plantear situaciones en las que el estudiante confunda la parte con el todo, por ejemplo, en el caso del problema de la repartición de las tres barras de chocolate (ver figura 6). Los docentes mencionaron que la ausencia de dos de las barras de chocolate no le permite al estudiante identificar cual es la parte y cuál es el todo, de esta manera, el estudiante encontraría de forma errónea, casos en los que la parte es mayor que el todo. Esto sucede porque los estudiantes están acostumbrados a reconocer y trabajar sobre situaciones en las que siempre se indica que se sombreen un número de partes que son necesariamente menores que el todo, lo cual hace que en un futuro aparezcan los obstáculos en el estudiante.

Otro obstáculo mencionado por los docentes es que los estudiantes suelen seguir realizando operaciones en las fracciones de manera lineal como se hacía con los números naturales, por ejemplo, el sumar de forma lineal numerador con numerador y denominador con denominador, lo cual es erróneo en la suma de fracciones.

Los docentes reconocieron en la secuencia que las situaciones propuestas permiten al estudiante tener un acercamiento al contexto que los rodea, lo cual hace que se despierte la motivación, el interés y las expectativas por el aprendizaje.

Para el caso del KoT, se resalta el conocimiento que mostraron los docentes frente al significado de fracción como relación parte-todo. Reconocen en la secuencia, que la fracción **a/b**, hace referencia a un todo que ha sido dividido en **b** partes congruentes, de las cuales han de tomarse **a** partes. Este significado es correcto, sin embargo, no fue el único significado presente en la secuencia de actividades. En algunas tareas analizadas por los profesores señalaban que las regletas más grandes se podían tomar como la unidad y las regletas pequeñas serían partes de esa unidad y estas pequeñas podrían medir a la más grade, esto permite identificar, aunque no de manera explícita, algunos indicios del significado de fracción como medida. Claro está que, en su mayoría, el conocimiento movilizado por los profesores se encontró limitado al significado de la fracción como relación parte-todo.

Los docentes identificaron diferentes nociones y conceptos en cada una de las tareas presentes en la secuencia, tales como: fracción, unidad, parte, relación entre cantidades, fracciones propias, fracciones impropias, fracciones homogéneas, fracciones heterogéneas y conjunto numérico. Identificaron otras formas de representación diferentes a las que usualmente habían abordado desde sus experiencias. Reconocieron los contextos utilizados en cada una de las tareas y señalaron que estos son cercanos a situaciones cotidianas de los estudiantes, a excepción del caso del terreno del granjero Robert (ver figura 8).

En Rojas (2014) se reportan resultados muy similares a los encontrados en este estudio, donde aparece la predominancia de los subdominios KoT y el KFLM. En dicha investigación también buscaron caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al enseñar los números racionales, la diferencia estuvo en los docentes participantes, para su caso, trabajaron con docentes expertos en el tema de fracciones, mientras que para este caso la intervención fue dirigida a profesores no expertos en el tema, pero sí con experiencia en su enseñanza. Si bien las características encontradas no son las mismas, se logra evidenciar mayor influencia en estos subdominios.

En el cuanto al KMLS, se encontraron características del conocimiento de las fracciones relacionadas con la secuenciación de los temas y la importancia del conocimiento de las nociones previas con las que llega un estudiante a un determinado nivel de escolaridad, en este caso, la profesora María mencionó que un estudiante de grado quinto ya debe estar relacionado con nociones de mitades, dobles y triples, por lo que no podría ser problema para el estudiante resolver preguntas del tipo: ¿Cuánto es más grande una regleta en comparación con otra?. Otro aspecto que añadió la docente María es la importancia de proponer preguntas que requieran un mayor grado de abstracción para el estudiante, preguntas que no necesariamente lleven una secuencialidad y requieran que el estudiante se las ingenie para encontrar una solución, permitiendo al docente reconocer el grado conceptual que ha alcanzado o es capaz de alcanzar el estudiante.

El docente Antonio también reconoció que debe haber una secuenciación entre los temas nuevos y los previos al grado quinto, en este caso, añadió que los estudiantes en este grado ya están familiarizados con las fracciones, ya saben de trabajar con decimales y han trabajan las fracciones con más de dos cifras en el denominador, por esta razón considera que, para tratarse de grado quinto se debería ampliar el conjunto numérico.

También se identificaron elementos del subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), la primera evidencia del conocimiento que se encontró está relacionada con el uso de los recursos materiales y virtuales para la enseñanza de las matemáticas. Señalaron que la incidencia de estos medios en el aula de clase permite tener resultados favorables en el aprendizaje, de manera que el uso de estos brinda al estudiante la posibilidad de visualizar de una manera más completa, qué sucede con aquellos conceptos abstractos estudiados y plasmados en lápiz y papel.

Otra de las evidencias estuvo relacionada con el tipo de tareas que se podrían proponer para lograr alcanzar determinados objetivos en las actividades de la secuencia. Puntualmente, los docentes mencionaron que, al momento de implementar una secuencia de actividades, es importante que se vayan proponiendo preguntas desde diferentes intenciones, por un lado, aquellas que logren conectar unas tareas con otras, así como también plantear preguntas en determinados momentos que permitan que el estudiante cuestione lo que está realizando, señalando que, esto permitiría que le encuentren un sentido a lo que se está abordando.

Significado de fracción predominante en los docentes

En la secuencia de actividades se presentaron los significados de la fracción tales como el de razón, medida y reparto, sin embargo, los docentes no reconocieron estos significados, para cada actividad el significado que dieron fue el de relación parte-todo. Esto deja ver la confusión o quizá el desconocimiento que en muchas ocasiones presentan los docentes alrededor del concepto de fracción. El significado de fracción como razón se abordó al momento de plantear tareas que requerían hacer la comparación entre regletas de diferentes tamaños, no se trataba de ver a las regletas más grandes como un todo, sino de ver las dos regletas por separado y establecer una relación comparativa entre estas.

El significado de la fracción como relación parte-todo mencionado por los docentes no es del todo errónea. En la mayoría de las ocasiones, por ejemplo, en el caso del profesor Antonio, reconoce que este significado está relacionado con la presencia de un todo (unidad) que es fraccionado en un determinado número de partes y de este todo lo que se toma corresponde a las partes o la parte. De igual forma lo consideraron los demás profesores, reconocen que, para cada situación de las actividades presentes en la secuencia, se trata de extraer de una regleta de mayor longitud una menor, entendiéndose como si se tratara de una sola regleta de la cual se seleccionarán algunos cuadros. Esta interpretación de los profesores se podría relacionar con el caso hipotético de la pizza o del rectángulo que usualmente presentan los docentes en el aula de matemáticas al enseñar fracciones, donde se entiende que el todo es la pizza o el rectángulo y las partes son las que se sombrean. En su momento tal interpretación es correcta, sin embargo, para el caso de la mayoría de las actividades de la secuencia se trataba de comparar dos regletas, más no sombrear o tomar partes de una misma regleta.

Pertinencia de usar el modelo MTSK

Este estudio permite resaltar la pertinencia de usar el modelo MTSK para el análisis de actividades, así como es una herramienta importante para estudiar las planeaciones de clase o la misma práctica de aula, se convierte en una herramienta esencial para identificar el conocimiento que moviliza el docente de matemáticas al analizar material ya diseñado. Se podría pensar en realizar otros estudios en los que interese identificar el conocimiento especializado que moviliza un docente al analizar actividades de un libro de matemáticas o al analizar propuestas de aulas diseñadas por otros investigadores.

Resultó interesante el identificar el conocimiento a partir de la experiencia y la formación que tenían los docentes, dado que, en ningún momento hubo una preparación previa frente al tema en cuestión, todo surgió de la experiencia que habían tenido alrededor de la enseñanza de las fracciones. Es importante anotar que, por ser un conocimiento que viene a la memoria de los profesores en el momento, quizá se escape mucha información importante relacionada con el tema.

Producto de lo anterior, también se abre la posibilidad a realizar un estudio en el que previo al análisis que realicen los docentes a secuencias de actividades, se realicen clases estilo taller, donde se dé a conocer el modelo y se expliquen las categorías que componen cada subdominio del mismo, esto para hacer más fuerte el análisis que puedan realizar posteriormente los docentes.

Reflexiones y recomendaciones

El estudio permitió identificar características del conocimiento que movilizan los profesores de matemáticas alrededor de las fracciones en grado quinto de primaria, como caso particular, el de dos profesores colombianos y una profesora mexicana. Los resultados mostraron que el conocimiento de las fracciones en el caso de los tres profesores se ve limitado al significado de fracción como relación parte-todo. Aunque autores como Obando (2003) mencionen que este significado es esencial para la construcción de los demás significados, se hace necesario que el docente no se quede sólo con esa interpretación, hace falta que propongan actividades donde la fracción, no necesariamente represente cantidades que se han tomado de un todo. Se deben crear puentes que enlacen este significado con las demás interpretaciones, por ejemplo, plantear situaciones donde se necesiten comparar, repartir, relacionar, representar, encontrar razones entre cantidades, entre otros.

Por ser un estudio desarrollado con más de dos profesores y la interacción del conocimiento es al mismo tiempo, se recomienda que se hagan preguntas individuales para cada profesor, con la posibilidad de una retroalimentación posterior por parte de los demás integrantes. Si bien, la intervención de todos los docentes genera un espacio que permite enriquecer el discurso frente al conocimiento que se moviliza, en ocasiones se pueden producir sesgos en las respuestas, lo cual redunda al momento de realizar el análisis de los resultados.

Se recomienda a futuros profesores e investigadores interesarse por realizar estudios como este, pues es importante conocer y estudiar que sucede con el conocimiento que se moviliza en el aula de clase. Son muchos los interrogantes que cada profesor de matemáticas se podría plantear, por ejemplo: ¿qué contenidos debo abordar?, ¿cómo y de qué manera los presento?, ¿es correcta la forma en como los presento?, ¿qué recursos materiales y virtuales debo usar?, ¿qué estrategias para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debo tener en cuenta al enseñar esta área?, ¿qué y cuales conocimientos curriculares se ponen en juego?, ¿cuál es la forma correcta de planear una clase?, ¿qué elementos se deben tener en cuenta al momento de planear?, son estos y muchos más los interrogantes que circundan al profesor de matemáticas al momento de pensar en un proceso de instrucción. De esta manera, a través del modelo MTSK, se brinda la oportunidad a los investigadores para estudiar qué sucede con cada uno de los interrogantes mencionados.

Referencias

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia, 35*(1), 190-209. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12

Angulo, M. y González, K. (2018). *Juegos tradicionales: Una estrategia didáctica para fortalecer la conceptualización de las fracciones en grado sexto* [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]. Biblioteca digital. http://hdl.handle.net/10893/14290

Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista de psicodidáctica*, (5), 107-114. https://www.redalyc.org/pdf/175/17517803011.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Open University Press.

Bernabéu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométrica. En R. Roig-Vila. (Ed.), *El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza Superior*, (pp. 59-68). Ediciones OCTAEDRO, S.L http://hdl.handle.net/10045/87234

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. http://doilorg/10.1080/14794802.2018.1479981

Castaño–Arbeláez, N. M. y García-Castro, L. I. (2014). Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. *Magistro, 8*(16), 123-158. http://hdl.handle.net/11634/7339

Cortés, M. y Mendoza, R. (2019). *Una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo, mediante una propuesta de aula en el grado tercero de educación básica primaria.* [Tesis de pregrado, no publicada, Universidad del Valle].

Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77. https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Espinoza, L., Matus, C., Barbe, J., Fuentes, J., y Márquez, F. (2016). Qué y cuánto aprenden de matemáticas los estudiantes de básica con el Método Singapur: evaluación de impacto y de factores incidentes en el aprendizaje, enfatizando en la brecha de género. *Calidad en la educación*, (45), 90-131. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-45652016000200004

Fandiño, M. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. En L. A. Hernández, J. A. Juárez, J. Slisko. (Eds.). *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación,* (1), (pp. 25-38). Publicaciones BUAP.

Fernández, P. (2009). Materiales para la enseñanza de las fracciones. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, (24), 1-8. ISSN 1988-6047

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria.* [Tesis de maestría, Centro de investigaciones en ciencia aplicada y tecnología]. Archivo digital. https://www.researchgate.net/publication/290974126

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria* [Tesis de maestría, Universidad de Cantabria] UCrea. http://hdl.handle.net/10902/6903

Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa san Andrés de Girardota.* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia] Archivo digital. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/9252

Hoyos-Franco, L. (2018). *La fracción como razón: Una experiencia de aula en grado sexto.* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional. http://hdl.handle.net/11349/14288

Hurtado, M. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de las fracciones en grado sexto* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional biblioteca digital https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11170

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren. (Ed.), *Recent research on number learning*, (PP. 125-150). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Llinares, S. y Sánchez, M. (2000). *Las fracciones: diferentes interpretaciones*. Editorial Síntesis.

Montes M., Aguilar A., Carrillo J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowñedge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti. (Eds.), *Actas del CERME, 8,* 3185 – 3194. http://dx.doi.org/10.13140/2.1.4338.0162

Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *18*(3), 1801-1817. http://hdl.handle.net/11441/51501

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA. 8* (2), 157-182. https://hdl.handle.net/10495/4657

Ponte, J. P. 1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I* (pp. 195–210). PME.

Rodríguez, P. y Navarrete, C. A. (2020). Influencia del conocimiento profundo del profesor sobre fracciones en el aprendizaje de alumnos de 4o. grado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 22*, 1-18. https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e10.2285

Rodríguez, S. V. (2011). El método de enseñanza de matemática Singapur: "Pensar sin límites". *Revista Pandora Brasil, 27*(3). ISSN 2175-3318. http://revistapandorabrasil.com/revista_pandora/matematica/selva.pdf

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, un estudio de casos.* [Tesis de doctorado, Universidad de granada]. DIGIBUG. http://hdl.handle.net/10481/35199

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 143-166. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional biblioteca digital. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/47142

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004

Stake, R. (1995). *The Art of case study.* SAGE.

Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME* *7*(3), 235-256. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33570303

Productos de la investigación

Publicaciones

1. Propuesta de Aula

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 113, marzo de 2023, páginas 147-161

Propuesta de aula para la enseñanza de fracciones empleando regletas de Cuisenaire

Julián Andrés Meléndez Cruz (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México)
Eric Flores Medrano (Universidad Complutense de Madrid. España)

Fecha de recepción: 11 de septiembre de 2022
Fecha de aceptación: 15 de enero de 2023

2. Artículo de investigación

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones

Specialized knowledge of the mathematics teacher when analyzing a sequence of addition of fractions

Conhecimento especializado do professor de matemática ao analisar uma sequência de soma de frações

Julián Andrés Meléndez-Cruz[1]*, Eric Flores-Medrano[2], Lidia Aurora Hernández-Rebollar[1]

Received: May/26/2022 • Accepted: Oct/3/2022 • Published: Jun/1/2023

Resumen

[Objetivo] En este trabajo se identifica y caracteriza el conocimiento especializado de tres profesores del área de matemáticas al analizar una secuencia de actividades, cuyo propósito es la enseñanza de la suma de fracciones empleando las Regletas de Cuisenaire. **[Metodología]** Se optó por un estudio cualitativo bajo un paradigma interpretativo, la intervención con los docentes se realizó durante cinco sesiones. Como instrumentos para la recolección de información se utilizaron entrevistas semiestructuradas, una secuencia de actividades y las Regletas de Cuisenaire en presentación digital. Para realizar la caracterización de los conocimientos se hizo uso del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas desarrollado por Carrillo y colaboradores. Tal modelo permite identificar el conocimiento que moviliza el docente de matemáticas en el campo de la enseñanza, así mismo permite organizarlo, clasificarlo y caracterizarlo. **[Resultados]** Desde los resultados de la investigación se obtuvo un mayor predominio en algunos de los subdominios que conforman el modelo, en particular, se encontró mayor influencia en el conocimiento de los temas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. **[Conclusiones]** Finalmente, las reflexiones obtenidas en el estudio muestran la importancia de identificar los conocimientos que movilizan los docentes al momento de pensarse un proceso de instrucción, pues estos podrían ayudar a otros profesores a mejorar o reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en este caso particular, el estudio de las fracciones.

Palabras clave: Conocimiento del profesor; fracciones; Regletas de Cuisenaire

Participaciones en eventos académicos

ID V214131

COMITÉ LATINOAMERICANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
(CLAME)
TRIGÉSIMA QUINTA REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
(Relme 35)

Otorga el presente certificado:

A: **Julián Andrés Meléndez Cruz**

Por su participación en las actividades académicas de Relme 35,
del 3 al 8 de julio de 2022 (30 Horas).
Con auspicio de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD)
Santo Domingo, República Dominicana.

Presidenta CLAME | Rectora UASD | Presidenta Relme 35

"La Matemática educativa y el cumplimiento de los objetivos del desarrollo sostenible de la agenda 2030."

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

La Universidad Pedagógica Nacional otorga la presente

Constancia

a

Julián Andrés Meléndez Cruz

por su participación como ponente en la mesa 2: *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el análisis de una secuencia de actividades para enseñar fracciones a través de las Regletas de Cuisenaire,* en el 1er. Coloquio Interinstitucional de avances tesistas. Red Iberoamericana MTSK, equipo México, realizado el 29 de noviembre del año en curso.

Ruth Angélica Briones Fragoso
Coordinadora del Área Académica 4

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Líder equipo México, Red Iberoamericana MTSK

"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"
CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE DE 2021

Anexos

Anexo 1. formato de carta de invitación para participación en el proyecto

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Maestría en Educación Matemática

Puebla, Puebla. Octubre 7 de 2021
Docente: ______________________________
Asunto: Invitación a participar en proyecto de investigación

Cordial saludo

Por medio de la presente, se extiende la invitación a participar en el proyecto de investigación titulado "Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de la suma de fracciones empleando las Regletas de Cuisenaire", a cargo de Julián Andrés Meléndez Cruz, estudiante de segundo semestre de la maestría en Educación Matemática en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Para el desarrollo del trabajo de investigación se requiere la participación de los docentes interesados pertenecientes al área de matemáticas con experiencia en enseñanza de esta en primaria. La intervención se estructurará de la siguiente manera: se llevarían a cabo alrededor de 4 sesiones de 1 hora cada una, estas se realizarán de manera síncrona a través de una plataforma virtual. Para efectos del trabajo se pide el consentimiento para grabar dichas sesiones.
El propósito es generar espacios de reflexión para identificar características del conocimiento profesional del profesor de matemáticas a partir del análisis que hagan los docentes alrededor de una secuencia de actividades diseñadas con el objetivo de enseñar suma de fracciones empleando las Regletas de Cuisenaire.
Es por tal motivo que se le hace la invitación a formar parte del proyecto, en el que se requiere de su colaboración y compromiso. Cabe aclarar que los datos obtenidos serán confidenciales, siendo utilizados solamente para el análisis del trabajo sin emitir juicios.

Si toma la decisión de hacer parte del equipo de trabajo, por favor firmar en la parte inferior de la presente.

Yo ____________________________________ acepto ser parte de este proyecto

Firma _________________________________

Anexo 2: preguntas orientadoras relacionadas con los subdominios del modelo MTSK

Sub Dominio	Cuestiones	Respuestas – reflexión
KoT	¿Qué conceptos se movilizan a través de la secuencia?	
	¿Qué definiciones y propiedades encuentras en la secuencia? ¿son correctas?	
	¿Qué registros de representación identificas en la secuencia? ¿Resultan ser favorables para el tema?	
	¿Qué tratamientos o conversiones identifica entre los registros de representación presentes las actividades?	
	¿Qué tipos de procedimientos se reflejan en la secuencia?	
	¿Son apropiados los procedimientos empleados para sumar las fracciones usando las Regletas de Cuisenaire?	
	¿Identificas en la secuencia actividades donde se enuncien o comprendan propiedades, lemas, teoremas que sustenten el concepto de fracción?	
KSM	¿Por qué es importante abordar los temas presentes en la secuencia y cuál es su repercusión en los grados posteriores?	

	¿Cómo evoluciona el concepto de fracción hasta llegar a quinto de primaria?	
	¿Con qué otros conceptos puedes relacionar el de fracción? ¿se complementa con otros?	
	¿Identificas nociones o conceptos en la secuencia que se complementen entre sí?	
KPM	¿Consideras que las actividades guardan una correcta sintaxis?	
	¿Identifica en la secuencia el uso de heurísticas para la enseñanza de las fracciones	
	¿Son pertinentes las ejemplificaciones utilizadas en la secuencia?	
KMT	¿Relaciona las actividades de la secuencia con los planteamientos de algún autor o de alguna teoría de la enseñanza de las fracciones?	
	¿Qué importancia das al recurso que acompaña la secuencia de actividades?	
	¿Utilizarías estrategias diferentes a las presentes en la secuencia para enseñar la suma de fracciones, cuáles son?	
	¿Considera pertinente las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos mostrados en la secuencia?	

KFLM	¿Identifica alguna tarea que los estudiantes pueden presentar dificultades para resolverla o entenderla, por qué? Menciones cuál o cuáles son	
	¿Qué fortalezas y dificultades de la suma de fracciones identificas en la secuencia?	
	¿Identificas en la secuencia tareas o situaciones donde resulten ser de mayor interés para los estudiantes?	
KMLS	¿Las actividades presentes en la secuencia son acordes a nivel de escolaridad de los estudiantes?	
	¿Qué se esperarías que los estudiantes alcancen con lo presentado en la secuencia?	
	¿Identificas una secuenciación en el tema abordado con respecto a grados anteriores y posteriores a cursar el estudiante?	

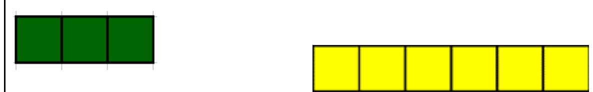
Anexo 3: Secuencia de actividades

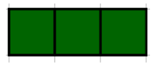
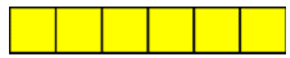
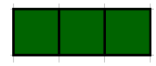
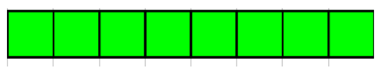
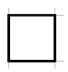
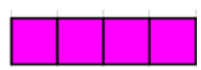
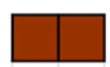
Propósito de la secuencia: Construir el concepto de fracción como medida a través de la manipulación de las regletas de Cuisenaire

Actividad 1.

Tarea1.

1) Compara las regletas que se te indique en la siguiente tabla y responde las preguntas:

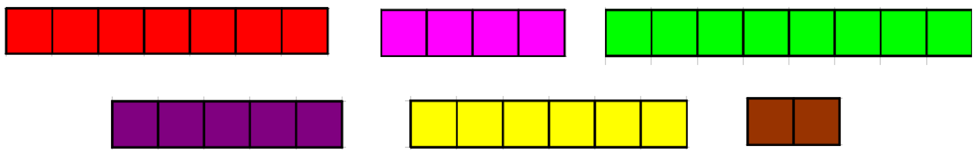
Preguntas		
¿Cuántas regletas del tamaño de la regleta **A** se necesitan para tener una del mismo tamaño de la regleta **B**?	**Regleta A** ------------- **Regleta B**  **Respuesta**________________________________	**Regleta A** -------------- **Regleta B**  **Respuesta**________________________________
¿Cuántas veces es más grande la regleta **A** que la regleta **B**?	**Regleta A** ------------- **Regleta B** 	**Regleta A** ------------- **Regleta B** 

	Respuesta__________________________________	**Respuesta**__________________________________
¿Qué parte de la regleta **B** se ocupa si encimamos la regleta **A**?	**Regleta A** ------------- **Regleta B**   **Respuesta**__________________________________	**Regleta A** ------------- **Regleta B**   **Respuesta**__________________________________
¿Qué parte de la regleta **A** se ocupa si encimamos dos regletas del tamaño de la regleta B?	**Regleta A** ------------- **Regleta B**   **Respuesta**__________________________________	**Regleta A** ------------- **Regleta B**   **Respuesta**__________________________________
	Regleta A ------------- **Regleta B**  	**Regleta A** ------------- **Regleta B**  

Si encimamos una regleta **A** sobre la regleta **B** ¿Qué parte me sobra?	**Respuesta**________________________________	**Respuesta**________________________________

Tarea 2.

Teniendo en cuenta lo anterior y apoyándote de las regletas responde verdadero (V) o falso (F) según sea el caso a las siguientes afirmaciones:



- Se necesitan exactamente tres regletas de color café para cubrir completamente una regleta amarilla _______ ¿Por qué?

  ____

- El tamaño de la regleta morada es tres veces más grande que el de la regleta de color café ________ ¿Por qué?

  ____

- El tamaño de la regleta de color café es la mitad del tamaño de la regleta de color rosa ________ ¿Por qué?

  ____

- El tamaño de la regleta de color rosa la tercera parte de la regleta de color rojo _______ ¿Por qué?

  ____

- El tamaño de la regleta color amarillo es tres veces más grande que el de la regleta de color café ______ ¿Por qué?

  ____

- La regleta de color café es la tercera parte de la regleta de color amarillo ______ ¿Por qué?

  ____

- El tamaño de la regleta de color café es el doble de la regleta de color rosa _____ ¿Por qué?

  ____

- Una regleta café es la cuarta parte del tamaño de una regleta de color verde claro ________ ¿Por qué?

  ____

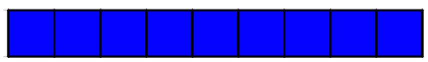
ACTIVIDAD 2

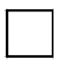
Utiliza las regletas de Cuisenaire para resolver la siguiente situación:

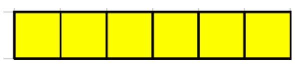
Situación:

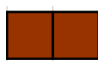
Juan ha comprado tres barras de chocolate para compartir con sus tres amigos, cada una de estas barras viene dividida en seis partes de igual tamaño tal como se muestra a continuación:

Las siguientes regletas representan la cantidad de chocolate que se terminó comiendo cada uno:

Juan 

Carlos 

Rocío 

Andrés 

Utiliza las regletas de Cuisenaire propuestas en el software de GeoGebra para realizar las comparaciones de cada una de las partes que se comieron con el total de las tres barras de chocolate.

Busca una regleta que sea equivalente a la barra de chocolate, ubícalas de tal forma que puedas encimar cada una de las regletas correspondientes a lo que comió cada uno y responde a las siguientes preguntas:

1) ¿Qué parte del total de las barras de chocolate se comió Juan?

____

2) ¿Qué parte de lo que comió Andrés representa lo que comió Carlos?

____

3) ¿Cuánto representa la parte que se comió Roció en comparación con lo que se comió Andrés?

____

4) ¿Cuántas veces es más grande lo que se comió Roció en comparación con lo que se comió Andrés?

____

5) Compara tus dos respuestas anteriores y comenta tus conclusiones al respecto.

____

____

6) ¿Cuántas veces más tiene que comer Andrés para comer una barra completa?

____

7) ¿Es correcto afirmar que Rocío comió la tercera parte del total de las barras de chocolate? ________ Justifica tu respuesta

____

8) ¿Es correcto afirmar que Juan comió el doble del total de las barras de chocolate? _______ Justifica tu respuesta

____

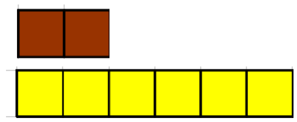
9) ¿Es correcto afirmar que entre Carlos y Andrés terminaron comiendo la mitad de lo que comió Rocío? ________ Justifica tu respuesta

____

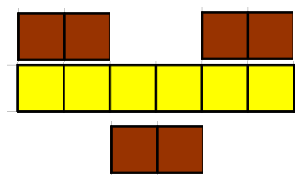
10) ¿Es correcto afirmar que la cantidad de chocolate que se comió Juan es tres veces más grande que lo que se comieron entre Carlos y Andrés? _______ Justifica tu respuesta ____

Institucionalización actividades 1 y 2

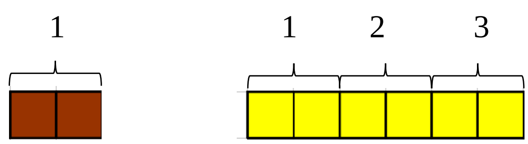
Si comparamos una regleta de color café con una regleta de color amarillo podemos notar las siguiente:



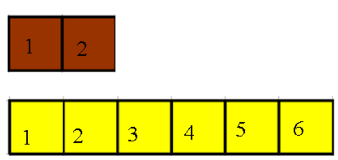
1) La regleta de color café cabe exactamente 3 veces en la regleta de color amarillo.



2) La regleta de color amarillo es tres veces más grande que la regleta de color café.



3) La regleta de color café es la tercera parte de la regleta de color amarillo.
4) La regleta de color café ocupa 2 de las 6 partes que conforman la regleta de color amarillo



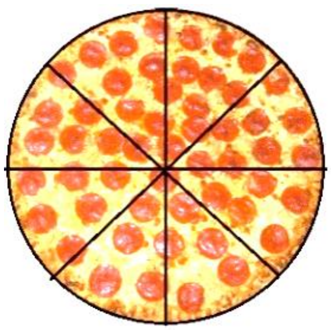
5) La fracción que representa la comparación entre la regleta de color café y la de color amarillo es $\frac{2}{6}$

Suma de fracciones homogéneas

Antes de sumar fracciones homogéneas debemos recordar algunos conceptos como el de unidad y saber que significa tomar una fracción de esa unidad.

Analicemos la siguiente situación:

1) Cuatro amigos han comprado una pizza para comer mientras miran una película, esta pizza viene dividida en 8 partes de igual tamaño, tal como se muestra a continuación:



Finalmente, de la pizza se comieron:

Juan: 3 rebanadas

Carlos: 1 rebanada

Rocío: 2 rebanadas

Mario: 2 rebanadas

En esta situación, la pizza es la unidad o el todo y el número de rebanadas que comió cada uno de los amigos corresponde a una fracción de dicha unidad.

Ejemplo: de las 8 rebanadas que conforman la pizza Juan se comió 3, esto significa que se ha comido $\frac{3}{8}$ de la pizza.

Cuestiones:

¿Qué fracción representa la parte de la pizza que se comió Carlos? _____________

¿Qué fracción representa la parte de la pizza que se comió Mario? _____________

ACTIVIDAD 3

Tarea 1. Situación del granjero

Robert es un granjero que tiene un terreno de forma rectangular, el cual ha dividido en 6 sectores de igual tamaño (área) tal como se muestra en la siguiente imagen. El propósito de la división en los sectores es para sembrar diferentes verduras.

En los sectores **A** y **B** ha decidido sembrar zanahorias, en el **C** lechugas, en el **D** pepinos y en el **E** y **F** tomates.

Analiza la situación anterior y responde las siguientes cuestiones:

De acuerdo con la situación, ¿Cuál sería la unidad?

____

¿Qué fracción de la unidad representan los sectores en los que se sembraran zanahorias? _____________

¿Qué fracción de la unidad representa el sector en el que se sembrará pepinos? ____________

Aumentemos el nivel de complejidad:

¿Qué fracción de la unidad representa el sector donde no se sembraron zanahorias ni lechugas? ________________ ¿Qué fracción de la unidad representa el sector donde no se sembraron lechugas ni pepinos? ________________ ¿Qué fracción de la unidad representa el sector donde no se sembró pepinos? _________________

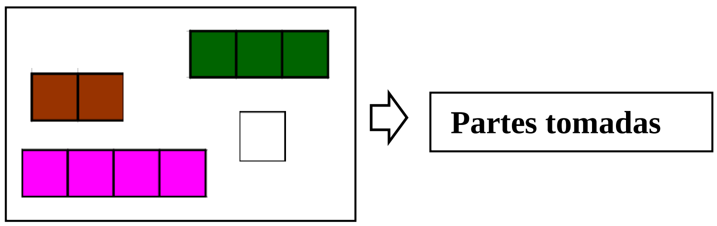
Tarea2. Guiada con las Regletas de Cuisenaire

Observa como el terreno del granjero Robert al estar dividido en 6 partes de igual tamaño, puede ser representado mediante la regleta amarilla.

1) ¿Qué regleta equivaldría a cada uno de los sectores que utilizará el granjero Robert para sembrar sus verduras?
2) Ubica encima de la regleta amarilla las regletas correspondientes a cada sector.
3) Encuentra una regleta que sea del mismo tamaño que el de las regletas que representan el sector de las zanahorias junto con el de las lechugas.
4) ¿Qué fracción de la regleta amarilla representa la regleta encontrada en el punto anterior? ________________
5) Encuentra una regleta que sea del mismo tamaño que el de las regletas que representan el sector de las zanahorias junto con el de las lechugas y los tomates.
6) ¿Qué fracción de la regleta amarilla representa la regleta encontrada en el punto anterior? ________________

Tarea 3. Guiada con las Regletas de Cuisenaire

La siguiente regleta representa una barra de chocolate que ha sido dividida en diez partes de igual tamaño, de la cual se han tomado algunas de ellas.



Dirígete recurso digital para realizar las indicaciones que se te dan a continuación. Encima todas las **partes tomadas** sobre la regleta de color naranja y responde las siguientes cuestiones:

1) ¿Al unir todas las partes tomadas se completa la barra de chocolate? ___________
   Justifica tu respuesta ____

2) ¿Qué fracción de la regleta naranja representa cada una de las regletas tomadas?

   Café_____________

   Verde oscuro ___________

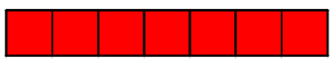
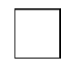
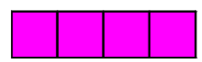
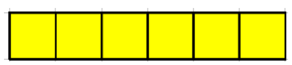
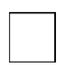
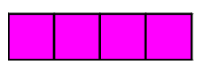
   Blanco ___________

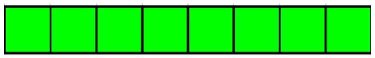
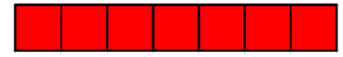
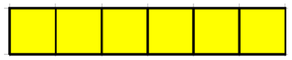
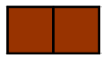
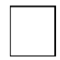
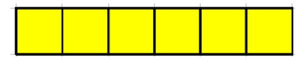
   Rosa___________

3) Encuentra una regleta que sea equivalente al tamaño de las regletas café y verde oscuro juntas. ¿De qué color es la regleta obtenida? __________________ ¿Qué fracción de la regleta naranja representa la regleta obtenida? ________________ ¿Qué fracción representaría la parte restante? ________________

ACTIVIDAD 4

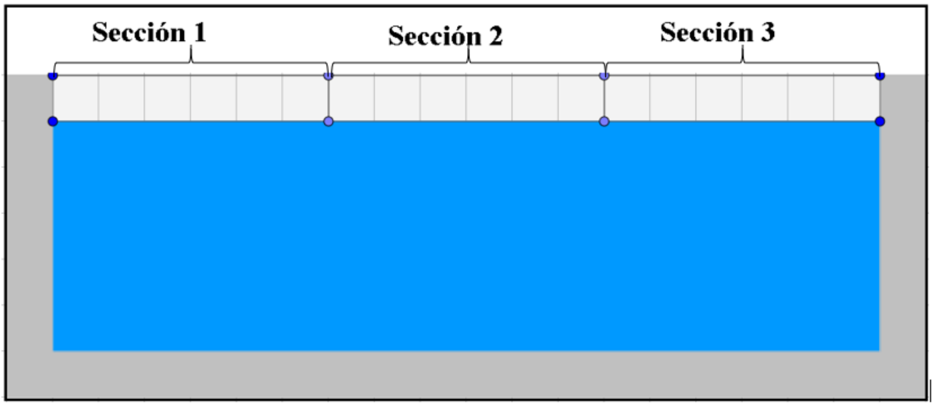
Utiliza las regletas de Cuisenaire para completar la información que falta en la siguiente tabla. En la primera columna se muestran las regletas que representan la unidad (el todo), las regletas ubicadas en las columnas dos, tres y cuatro representan tres fracciones que se han tomado de la cada unidad y las regletas de la columna cinco representan la suma de las tres fracciones tomadas de la unidad.

Regleta que representa la Unidad de referencia	**Regleta que representa la primera fracción**	**Regleta que representa la segunda fracción**	**Regleta que representa la tercera fracción**	**Regleta que representa la suma de las tres fracciones**
	—	 $\frac{2}{7}$	 $\frac{1}{7}$	 —
	—	 —	—	 $\frac{7}{10}$
	 —	 —	 $\frac{2}{6}$	—
	 —	—	—	 —

	$\frac{1}{8}$	—	—	 —
	—	—	—	 —
	 —	 —	—	 $\frac{6}{10}$

ACTIVIDAD 5

Bob es un constructor que desea cubrir con baldosas de diferentes tamaños el borde de una piscina que está dividido en tres secciones de igual tamaño. Utiliza las Regletas de Cuisenaire para ayudar a Bob a cumplir con su trabajo.



1) Bob necesita poner en la primera sección una baldosa que ocupe la tercera parte, ¿de qué color debe ser la regleta que representa dicha parte? ___________________ ¿qué fracción de la sección representa? _____________________
2) En la segunda sección necesita poner una baldosa que ocupe la mitad del espacio y otra baldosa que ocupe la sexta parte, ¿de qué color deben ser las regletas que representen las baldosas que necesita Bob? ___________________ ¿qué fracciones de la sección representan? ______________________
3) En la tercera sección necesita poner una baldosa que deje sobrando la tercera parte, ¿de qué color debe ser la regleta que representa la baldosa que necesita Bob? ____________________ ¿qué fracción de la sección representa? ________________
4) Tomando como unidad todo el borde que desea cubrir, ¿qué fracción de dicha unidad representa la parte que está cubierta con baldosas hasta el momento? _________________
5) ¿De qué color deben ser las regletas que representen el tamaño de las baldosas que necesitaría Bob para cubrir las partes faltantes en cada sección y que fracción de la sección representaría?

Sección 1 → Color ________________ fracción _________________

Sección 2 → Color ________________ fracción _________________

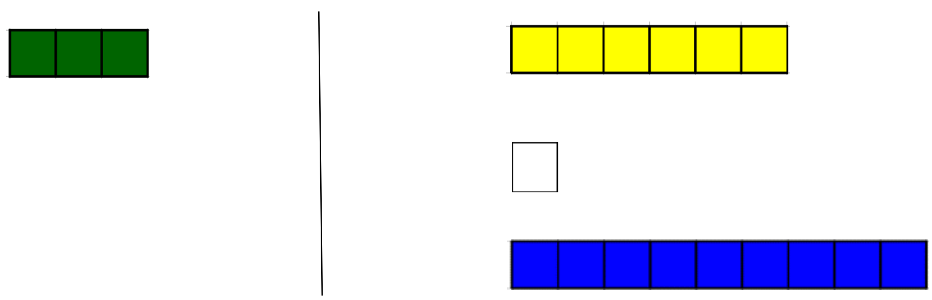
Sección 3 → Color ________________ fracción _________________

6) Tomando como unidad todo el borde que desea cubrir, ¿qué fracción de dicha unidad representa la parte faltante por cubrir con baldosas? ____________________

Actividad final

Poniendo a prueba tus conocimientos

1) En el lado izquierdo se muestra una regleta que representa la tercera parte de alguna de las tres regletas del lado derecho. ¿Cuál de las tres regletas del lado derecho representa la unidad de la cual se ha tomado la regleta verde?



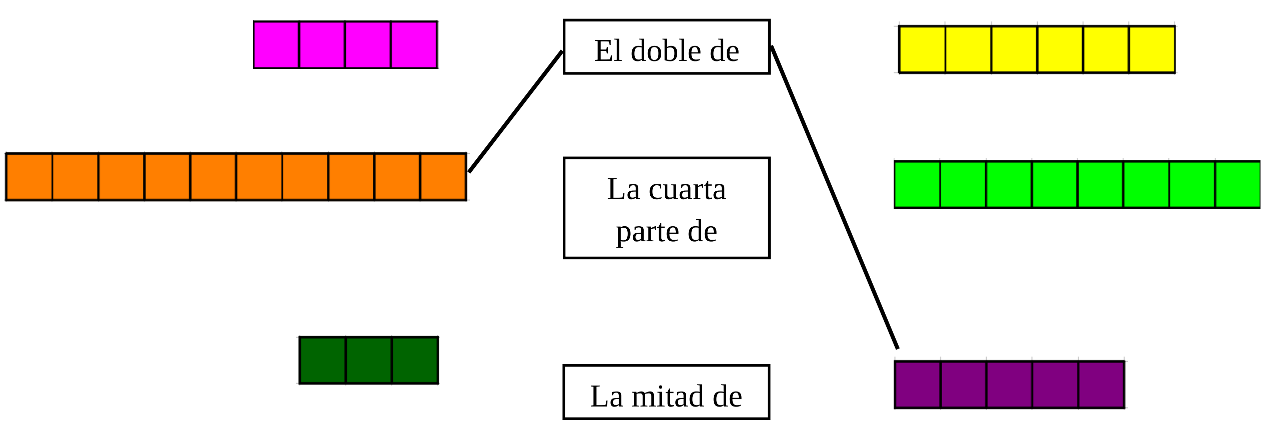
Respuesta: ___________________________________

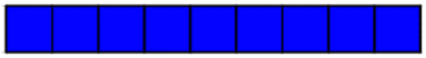
Justificación

____

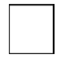
____

Relaciona con una línea los elementos que correspondan de cada columna y escribe la forma correcta como se enunciaría





Cuatro veces más grande



El triple de

Respuesta 1: la regleta de color naranja representa **el doble de** la regleta de color morado

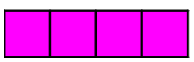
Respuesta 2: ____

Respuesta 3: ____

Respuesta 4: ____

Respuesta 5: ____

2) ¿Qué fracción representa cada una de las siguientes regletas tomando como unidad la regleta de color naranja?



—

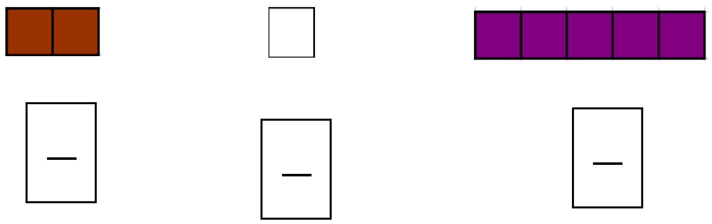
—

—

Encuentra una regleta que represente la suma de las anteriores fracciones e indica que fracción representa con respecto a la regleta de color naranja.

____ —

3) ¿Qué fracción representa cada una de las siguientes regletas tomando como unidad la regleta de color Azul?



Encuentra una regleta que represente la suma de las anteriores fracciones e indica que fracción representa con respecto a la regleta de color azul.