

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**“REPRESENTACIONES DE MOTZKIN Y EL MÉTODO
DE RELAJACIÓN EXTENDIDO PARA RESOLVER
SISTEMAS LINEALES SEMI-INFINITOS”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

ENRIQUE GONZÁLEZ GUTIÉRREZ

DIRECTORES:

**DR. MAXIM IVANOV TODOROV
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**

PUEBLA, PUEBLA. FEBRERO DE 2012

Hoja de aprobación

Dedicado para Magda y Aitana

Agradecimientos:

En la parte académica, de manera especial mis agradecimientos para el Dr. Maxim Ivanov Todorov puesto que sin su indudable apoyo, esto no sería más que imposible y para el Dr. Miguel A. Goberna Torrent que en un inicio me acogió y fue el responsable directo de las ideas y de mucho trabajo detrás de la tesis. A la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, por su constante apoyo.

Al jurado que ha colaborado con sus valiosos comentarios y han hecho posible la mejoría substancial de éste trabajo: Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo, Dr. Jorge Bustamante González, Dr. Francisco Guerra Vázquez, Dr. Guillermo Arturo Lancho Romero, Dr. Juan Antonio Díaz García, Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, Dr. Slavisa Djordjevic, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna y Dra. Blanca Bermudez Juárez.

En la parte personal, para mi esposa Magda Muñoz Pérez, mi hija Aitana González Muñoz, mis padres Anastacio González Flores y María Gutiérrez Morales, mi hermano Miguel A. y su esposa Leticia, mis suegros Juan Luis Alfonso Muñoz León y Hortencia Pérez Olvera. Por su indudable apoyo a lo largo de toda o parte de mi vida. Todos ellos han hecho una estupenda convivencia familiar.

Finalmente, al CONACYT por brindarme el apoyo económico necesario para la realización de este trabajo. Gracias.

Índice general

Índice general	VII
Introducción	1
1. Notaciones y definiciones básicas	6
1.1. Definiciones básicas	6
1.2. Resultados de la teoría de conjuntos convexos	10
1.3. Sistemas lineales semi-infinitos	12
1.3.1. Clases y resultados de la teoría de SLSI	14
2. Representaciones de conjuntos convexos	19
2.1. Representaciones lineales	19
2.1.1. Teorema de Fourier Generalizado	24
2.2. Resultados acerca de representaciones cónicas	28
2.2.1. Caracterización de conos convexos y representa- ciones cónicas	31
2.3. Representaciones de Motzkin	34
2.3.1. Propiedades de los conjuntos M-representables . .	34
2.3.2. Caracterización de conjuntos M-representables . .	36
2.3.3. Teorema de representación de Motzkin generalizado	42

3. Solución de sistemas lineales semi-infinitos	49
3.1. Método de relajación para resolver SLSI	50
3.1.1. Algoritmos de relajación extendidos	50
3.2. Razón de convergencia de los algoritmos	56
3.3. Experiencia computacional	61
3.3.1. Ejemplos de prueba	62
Conclusiones	69
Símbolos y Abreviaturas	71
A. Código de MATLAB	73
Bibliografía	79

Introducción

Este trabajo se divide en tres partes, la primera corresponde a la base teórica en la que se resumen resultados de la teoría de conjuntos convexos (Capítulo 1). Inicia con una descripción de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos convexos y continúa con una revisión de la teoría de los sistemas lineales semi-infinitos. El propósito de este apartado es establecer un marco teórico adecuado para los apartados posteriores.

En la segunda parte de este trabajo, Capítulo 2, nos dedicamos al estudio de cinco caracterizaciones de conjuntos cerrados convexos. Theodore Motzkin demostró, en 1936, que cualquier conjunto poliédrico convexo se puede expresar como la suma (de Minkowski) de un polítopo y un cono convexo poliédrico. En este capítulo proporcionamos cinco caracterizaciones de una clase más grande de conjuntos convexos cerrados, en espacios Euclídeos de dimensión finita, que son la suma de un conjunto compacto con un cono convexo cerrado. Estas caracterizaciones involucran diferentes tipos de representaciones de conjuntos convexos cerrados, como las funciones de soporte, conos duales y sistemas lineales. Además, analizamos las relaciones entre estas representaciones. Discutimos, también, la información que se obtiene cuando relacionamos un conjunto convexo cerrado F y el problema de optimización lineal paramétrico de un conjunto factible F en cada una de sus representaciones, incluida la representación de Motzkin.

Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es representable en el sentido de Motzkin (*M-representable*) si existe un conjunto compacto convexo C y un cono convexo cerrado D tal que $F = C + D$. Decimos entonces que $C + D$ es una *representación de Motzkin* de F , con componentes compactos y cónicos C y D , respectivamente. Una representación de Motzkin de F es *mínima* siempre que su componente compacta sea lo más pequeña posible. Los conjuntos M-representables con componente cónica \mathbb{R}_+^n se han utilizado en teoría de juegos, bajo el nombre de *conjuntos generados compactamente y conjuntos comprensivos* ([38]).

Una representación de Motzkin puede considerarse como un nuevo tipo de representación para una importante clase de conjuntos convexos cerrados. Las caracterizaciones de conjuntos M-representables, que se proporcionan en este trabajo, incluyen otros tipos de representaciones, como las funciones indicadoras y de soporte (ver, e.g., [31] y [43]), y otro menos popular, como sistemas de desigualdades lineales y conos duales, que recordamos en el Capítulo 1.

Iniciamos el Capítulo 2 con el estudio de los diferentes tipos de representación analizamos la forma en que se obtienen dichas representaciones y cómo se les puede explotar con el fin de obtener información acerca de los conjuntos cerrados convexos y del problema de programación paramétrica, que se introducirá en la Sección 1.3.1. La Sección 2.1 proporciona representaciones lineales de los conjuntos cerrados y convexos, para ciertas familias de semi-espacios de soporte y se extiende el teorema de eliminación de Fourier para conjuntos convexos cerrados, cuya versión clásica (ver [44] y sus referencias) proporciona representaciones lineales de las proyecciones de un conjunto convexo poliédrico dado, sobre el conjunto de coordenadas de los hiperplanos. Cabe mencionar que el método de eliminación de Fourier clásico extiende el método de Gauss al permitir eliminar, una a una, las variables de un sistema de

inecuaciones lineales ordinario. En términos geométricos, la eliminación de una variable x_i se puede interpretar como la proyección ortogonal sobre el hiperplano $x_i = 0$, del conjunto solución del sistema. Siendo precisos, a partir de una representación externa del F , σ , se obtiene una representación externa del proyección \hat{F} , el sistema reducido $\hat{\sigma}$.

En la Sección 2.2 analizamos representaciones cónicas de conjuntos convexos cerrados, proporcionamos caracterizaciones de conos cerrados convexos y formulamos la representación cónica de intersecciones y sumas de conjuntos convexos cerrados. En el Capítulo 2.3 caracterizamos los conjuntos M-representables de cinco maneras diferentes y obtenemos una fórmula para el cálculo efectivo de una componente compacta de un conjunto M-representable. La fórmula sencilla se deriva de la demostración constructiva de la generalización del teorema clásico de descomposición para conjuntos convexos poliédricos debido a Motzkin ([39]), mientras que la parte complementaria, que involucra cierto conjunto de Pareto, proporciona la representación mínima de Motzkin.

Las representaciones lineales forman, además, uno de los principales motivos de consideración, pues surgen en numerosas áreas tales como análisis funcional, programación lineal semi-infinita, entre otras. En particular, la representación lineal de un conjunto, mediante un sistema de infinitas desigualdades, descrito como $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, donde T representa un conjunto de índices arbitrario fijo; a_t , b_t son las imágenes de t , con $t \in T$, de las funciones $a : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $b : T \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente. Este tipo de sistemas se llaman también *sistemas lineales semi-infinitos* (SLSI). Todos los resultados que se presentan en este capítulo son originales y están publicados en [11].

Finalmente, en la tercera parte de este trabajo, Capítulo 3, aportamos una clase de algoritmos numéricos dedicados a resolver el problema de factibilidad de un SLSI.

La teoría de los sistemas lineales semi-infinitos (SLSI) está ya bastante madura (véase [10]), mientras que se conocen pocos algoritmos numéricos para decidir si un sistema dado es consistente o no y para hallar una solución en el primer caso, que son los problemas centrales relacionados con este tipo de sistemas.

Por otro lado, es bien sabido que el problema de la factibilidad de sistemas lineales ordinarios, que consiste en el cálculo de una solución del sistema, es computacionalmente equivalente al problema de programación lineal. De ahí que exista una abundante literatura acerca del tratamiento numérico para el problema de la factibilidad de sistemas lineales ordinarios. La equivalencia mencionada desaparece cuando el número de restricciones o de variables es infinito, por lo que los métodos numéricos para SLSI son, hasta cierto punto, independientes de los métodos para problemas de *programación lineal semi-infinita* (PLSI), véase [15]. Hasta ahora, poco se ha dicho acerca del tratamiento numérico de los SLSI en \mathbb{R}^n [16].

Algunos métodos numéricos, para una cierta clase de SLSI en $\mathbb{R}^{(T)}$ que surgen en la teoría económica, los cuales son llamados sistemas de diferencias lineales, se pueden encontrar en [42]. Desde el punto de vista numérico, Hu y Jeroslow han aportado diversas herramientas para el problema de factibilidad, por ejemplo, Jeroslow considera este problema, pero sólo para una clase particular de sistemas, para $T = \mathbb{N}$.

Remarcamos que en el trabajo se presentan dos métodos que tratan con el problema de factibilidad, pero desde el punto de vista analítico (véase Métodos de Fourier y Motzkin en el Capítulo 2). La combinación de estas dos vertientes, distintas desde el punto de vista analítico y numérico (algoritmos de relajación), son una novedosa forma de tratar el problema de factibilidad, estos últimos debido a la elección de parámetros que sólo dependen de un término constante, lo que muestra

una mayor flexibilidad, en comparación con los métodos propuestos por Hu y Jeroslow, métodos que requieren condiciones muy restrictivas en la elección de los datos nominales.

Iniciamos el Capítulo 3 proponiendo una clase de algoritmos llamados *métodos de relajación extendidos* (MRE), los cuales extienden la idea del método de relajación para sistemas ordinarios, es decir, cuando $|T| < \infty$. En la Sección 3.1 describimos el MRE, basados en [44] y probamos, en el Teorema 30, su convergencia para cualquier clase de SLSI (continuo, polinómico, LOP, etcétera, véase apartado 1.3.1). La demostración de este teorema utiliza ideas geométricas basadas en reflexiones de puntos, que genera el algoritmo, sobre uno de sus hiperplanos violados y más alejados de éste. La Sección 3.2, con algunas suposiciones adicionales en el conjunto de datos a_t y b_t , está dedicado al estudio de encontrar una cota para el análisis de la rapidez de convergencia del MRE. Nos basamos en las ideas que presenta Hu en [32] (Teorema 2), y probamos que la razón de convergencia (Teorema 34), es lineal. Finalizamos este capítulo, apartado 3.3, presentando el desempeño del MRE aplicado en algunos ejemplos de prueba tomados de la literatura. Los resultados logrados en este capítulo fueron parcialmente anunciados en [25], y posteriormente publicados en [26], [27], y [28].

Capítulo 1

Notaciones y definiciones básicas

En este apartado recordamos algunas nociones básicas con el objetivo de fijar una notación y una terminología coherente e inequívoca para el resto del trabajo. Los apartados 1.3 y 1.2, inician con la presentación de algunos conceptos y resultados de la teoría de los conjuntos convexos y el apartado 1.3.1 continúa con una revisión de la teoría de los sistemas lineales semi-infinitos (SLSI), incluyendo el Lema de Farkas extendido y la geometría del conjunto solución. Las referencias básicas son [23] y [43].

1.1. Definiciones básicas

A lo largo del trabajo utilizamos la siguiente notación. El producto escalar de $x, y \in \mathbb{R}^p$, se denota por $x'y$, o bien por $\langle x, y \rangle$, mientras que $\|x\|$ denota la norma Euclídea de x y 0_p denota el vector cero en \mathbb{R}^p .

Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$, la *envoltura lineal* de C es el menor subespacio

vectorial que contiene a C , denotado por $\text{span } C$. La *envoltura afín* de C se define como la menor variedad afín que contiene a C , y la representaremos por $\text{aff } C$.

El conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$, cualesquiera que sean $x, y \in C$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por convenio, \emptyset también es convexo. La *dimensión* de $C \neq \emptyset$ es la de su envoltura afín, es decir, $\dim C := \dim \text{aff } C$.

La *envoltura convexa* de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es el menor conjunto convexo que lo contiene. Se denota por $\text{conv } C$ y es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a C . Obviamente, $\text{conv } \emptyset = \emptyset$.

Un conjunto K , tal que $0_n \in K \subset \mathbb{R}^n$, es un *cono* si $\lambda x \in K$ cualesquiera que sean $x \in K$ y $\lambda \geq 0$.

La *envoltura cónica* (se sobreentiende que convexa) de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es el menor cono convexo que contiene a C . Se denota por $\text{cone } C$ y es la intersección de todos los conos convexos que contienen a C . Obviamente, $\text{cone } \emptyset = \{0_n\}$.

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío. Un conjunto convexo $X \subset C$ es una *cara* de C si para todo par $v^1 \neq v^2$ de C tal que $X \cap]v^1, v^2[\neq \emptyset$ se tiene $]v^1, v^2[\subset X$, donde $]v^1, v^2[:= \{(1 + \lambda)v^1 + \lambda v^2 \mid 0 < \lambda < 1\} \subset C$.

Por convenio, el conjunto vacío también se considera una cara de C . Los puntos *extremos*, *aristas* y *facetas* de C , son las caras de dimensión 0, 1 y $n - 1$, respectivamente.

Un conjunto no vacío de \mathbb{R}^n es un *poliedro* si es el conjunto de soluciones de un sistema finito de inecuaciones lineales.

Los *polítopos* son los poliedros convexos acotados y los *conjuntos cuasipoliédricos*, definidos por Klee, son aquellos subconjuntos de \mathbb{R}^n cuyas intersecciones con polítopos son polítopos.

Un par de conjuntos no vacíos C_1 y C_2 en \mathbb{R}^n están *débilmente separados* por un hiperplano $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = b\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n$ y

$b \in \mathbb{R}$, si

$$\inf\{a'x - b \mid x \in C_1\} \geq 0 \geq \sup\{a'x - b \mid x \in C_2\}.$$

El hiperplano H separa a C_1 y C_2 fuertemente si las desigualdades anteriores son estrictas. Si $(C_1 \cup C_2) \setminus H \neq \emptyset$, entonces se dice que C_1 y C_2 se separan propiamente.

Teorema 1 [43, Teo. 11.4] Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos no vacíos en \mathbb{R}^n . Existe un hiperplano que separa fuertemente a C_1 y C_2 si, y sólo si,

$$\inf\{\|x - y\| \mid x \in C_1, y \in C_2\} > 0,$$

es decir, $0_n \notin \text{cl}(C_1 \setminus C_2)$.

Sea V un espacio vectorial lineal real, y $C \subset V$ un conjunto convexo no vacío. Se define el cono de recesión de C como

$$0^+C = \{w \in V \mid \text{para todo } v \in C \text{ y para todo } \mu \geq 0 \text{ tenemos } v + \mu w \in C\},$$

y el cono de direcciones factibles de C en $v \in C$ se define como

$$D(C, v) := \{w \in V \mid v + \mu w \in C, \text{ para algún } \mu > 0\}.$$

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es un cono convexo que contiene al origen, entonces $0^+C = C$.

Si $C \neq \emptyset$ es un cono convexo en \mathbb{R}^n , se define el cono polar positivo de C por

$$C^\circ := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \text{para todo } x \in C \text{ se tiene } u'x \geq -1\}.$$

Obsérvese que, para todo $v \in C$, $D(C, v) = \text{cone}\{C - v\}$.

Si $C \subset \mathbb{R}^n$, al conjunto $0^+C \cap (-0^+C)$, donde $-0^+C = \{-v \mid v \in 0^+C\}$, se le llama *espacio de linealidad* de C y se denota por $\text{lin } C$. Éste consiste del vector cero y de todos los vectores no nulos w tales que, para cada $v \in C$, la línea a través de v en la dirección de w esta incluida en C .

Un cono convexo es *puntiagudo* cuando contiene rectas, es decir, si su espacio de linealidad se reduce al vector cero.

Denotamos por $\text{int } C$, $\text{cl } C$ y $\text{bd } C$ de un subconjunto C cualquiera de \mathbb{R}^p , a los conjuntos *interior*, *clausura* y *frontera*, respectivamente. Si el conjunto C es convexo, se definen los conjuntos *interior relativo* y *frontera relativa* de C , como el interior y la frontera de C cuando se considera C como subconjunto de $\text{aff } C$ con la topología inducida por \mathbb{R}^p . Los denotamos por $\text{rint } C$ y $\text{rbd } C$. Mientras que $\mathbb{B}(C) := \{y \in \mathbb{R}^p \mid \text{existe } \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que, para todo } x \in C \text{ se tiene } x'y \leq \beta\}$ denotará el *cono barrera* de C . Un hiperplano H es de *soporte* para X en un punto $\bar{x} \in X$, si $\bar{x} \in H$ y X está contenido en uno de los semiespacios cerrados que determina H . Un punto frontera x , de un conjunto convexo cerrado C , se llama *suave* cuando existe un único hiperplano de soporte de C en x .

Los mapeos lineales y matrices se denotan como es usual. Dado un mapeo lineal A , su mapeo adjunto se denota por A^* .

Dado $x = (x_1, \dots, x_p)$ denotamos por \hat{x} al resultado de eliminar la última componente, i.e., $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{p-1})$. Identificamos \hat{x} con la proyección ortogonal de $x \in \mathbb{R}^p$ sobre el hiperplano $x_p = 0$, digamos $(\hat{x}, 0)$. De manera coherente, identificamos $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$ con la proyección ortogonal de X sobre $x_p = 0$. Dado $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, denotamos por $\text{dom } h$, $\text{gph } h$, y $\text{epi } h$ su *dominio*, su *gráfica* y su *epígrafo*, mientras que $\nabla h(x)$ y $\partial h(x)$ denotan el *gradiente* y el *subdiferencial* convexo de h en $x \in \text{dom } h$. El *conjugado* de h es la función $h^* : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que $h^*(u) := \sup\{\langle u, x \rangle - h(x) : x \in \text{dom } h\}$.

El conjunto $X \subset \mathbb{R}^p$ se representa de una manera única por su *función indicadora*

$$\delta_X(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \in X \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La *función de soporte* de $X \neq \emptyset$ es $\delta_X^*(y) = \sup\{\langle y, x \rangle : x \in X\}$, cu-

yo dominio es $\text{dom } \delta_X^* = \mathbb{B}(X)$. Si X es cerrado y convexo, entonces $\mathbb{B}(X)^\circ = -(0^+X)$ (ver, por ejemplo, Teorema 10) y $\delta_X^{**} = \delta_X$. La última ecuación implica la existencia de una biyección entre el conjunto convexo cerrado no vacío y las funciones convexas propias semicontinuas inferiores que son positivamente homogéneas.

1.2. Resultados de la teoría de conjuntos convexos

En este apartado presentamos resultados de la teoría de conjuntos convexos que serán la base para sustentar la teoría desarrollada a lo largo del Capítulo 2.

Teorema 2 [43, Teo. 9.1] Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío y $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicación lineal tal que

$$(\ker A) \cap \text{cl } 0^+C \subset \text{lin } \text{cl } C.$$

Entonces:

1. $\text{cl } A(C) = A(\text{cl } C)$ y
2. $A(\text{cl } 0^+C) = 0^+(\text{cl } A(C))$.

Teorema 3 [23, Teo. 14.6.1] Sea C un conjunto convexo cerrado en \mathbb{R}^n que contiene al origen. Entonces:

1. $\dim C^\circ = n - \dim \text{lin } C$;
2. $\dim \text{lin } C^\circ = n - \dim C$;
3. $\dim(C^\circ \cap (\text{lin } C^\circ)^\perp) = \dim(C \cap (\text{lin } C)^\perp)$, donde \perp indica el subespacio ortogonal.

Dado un sistema $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, una inecuación es *redundante* cuando su eliminación no afecta al conjunto de soluciones.

Teorema 4 [43, Teo. 9.1] *Sea C un conjunto convexo no vacío en \mathbb{R}^n , y sea A una transformación lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Supóngase que cada vector no nulo $z \in 0^+(\text{cl } C)$ $A(z) = 0_m$ pertenece al espacio de linealidad de $\text{cl } C$. Entonces $\text{cl}(A(C)) = A(\text{cl } C)$, y $0^+ A(\text{cl } C) = A(0^+(\text{cl } C))$. En particular, si C es cerrado, y $z = 0$ es el único $z \in 0^+ C$ tal que $A(z) = 0_m$, entonces $A(C)$ es cerrado.*

Teorema 5 [43, Cor. 9.1.3] *Sean K_1, \dots, K_m conos convexos no vacíos en \mathbb{R}^n que cumplen con la siguiente condición: si $z_i \in \text{cl } K_i$ para $i = 1, \dots, m$ y $z_1 + \dots + z_m = 0_n$, entonces z_i pertenece al espacio de linealidad de $\text{cl } K_i$ para $i = 1, \dots, m$. Entonces*

$$\text{cl}(K_1 + \dots + K_m) = \text{cl } K_1 + \dots + \text{cl } K_m.$$

Teorema 6 [43, Teo. 25.6] *Sea f una función convexa cerrada tal que $\text{dom } f$ tiene interior no vacío. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos*

$$\partial f(x) = \text{cl}(\text{conv } S(x)) + K(x),$$

donde $K(x)$ es el cono normal a $\text{dom } f$ en x (vacío si $x \notin \text{dom } f$) y $S(x)$ es el conjunto de todos los límites de sucesiones de la forma $\nabla f(x_1), \nabla f(x_2), \dots$, tal que f es diferenciable en x_i y x_i tiende a x .

Para enunciar el siguiente teorema definimos el *cono dual débil* del conjunto convexo cerrado $F \subset \mathbb{R}^n$ como sigue

$$K^{\leq} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{para todo } x \in F, a'x \leq b\} = \text{epi } \delta_F^*.$$

Teorema 7 [18, Prop. 3.2] *Sea $F = \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, donde F_i es un conjunto convexo cerrado con cono dual débil K_i^{\leq} , $i \in I$. Entonces*

$$K^{\leq} = \text{cl conv} \left[\bigcup_{i \in I} K_i^{\leq} \right].$$

Teorema 8 [43, Teo. 18.8] *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y convexo tal que $\dim C = n$ es la intersección de semi-espacios cerrados tangentes a C .*

Corolario 9 *Sea $C \neq \emptyset$, convexo, si $0 < \lambda < \infty$, entonces $(\lambda C)^\circ = \lambda^{-1}C^\circ$*

Teorema 10 [43, Teo. 9.1] *El polar del cono barrera de un conjunto convexo no vacío C es el cono de recesión de C .*

1.3. Sistemas lineales semi-infinitos

Los sistemas lineales semi-infinitos son los sistemas lineales en los que el número de variables o el número de restricciones, pero no ambos, es infinito. Nos interesan, en particular, aquellos en los que el número de variables es finito y que pueden escribirse en la forma $\{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$. Recordemos que T representa un conjunto de índices arbitrario fijo; a_t , b_t son las imágenes de t , $t \in T$, por medio de las funciones $a : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $b : T \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente. Los sistemas de este tipo surgen en campos tan variados como la aproximación funcional, el cálculo subdiferencial, las desigualdades variacionales, los problemas de momentos, la programación semi-infinita lineal (PLSI, cuyos sistemas de restricciones son SLSI) y la optimización vectorial semi-infinita, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1 Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm \{\infty\}$ y un punto $\bar{t} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\bar{t}) \in \mathbb{R}$. El subdiferencial de f en \bar{t} , $\partial f(\bar{t})$, es el conjunto de las soluciones del SLSI $\sigma := \left\{ (t - \bar{t})' x + f(\bar{t}) \leq f(t), t \in \mathbb{R}^n \right\}$. Entonces, f es subdiferenciable en \bar{t} si, y sólo si, σ es consistente (es decir, $\partial f(\bar{t}) \neq \emptyset$). Los teoremas de existencia caracterizan las soluciones para un SLSI dado σ . Los métodos de subgradientes requieren obtener una solución de σ en el punto actual (problema de factibilidad).

Ejemplo 2 Dados $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}^n$, el problema correspondiente de desigualdad variacional consiste en hallar $x \in F$ tal que $G(x)'(t - x) \geq 0$ para todo $t \in F$. Este problema se dice que es semi-infinito (lineal) cuando F es el conjunto solución de cierto sistema semi-infinito (SLSI). En la literatura se pueden encontrar métodos numéricos eficientes para problemas de desigualdades lineales variacionales semi-infinitas (véase [15] y las referencias que ahí se encuentran), los cuales prestan particular atención al caso de aplicaciones constantes G (en ese caso, este problema se convierte en un SLSI cuyo conjunto de índices es F).

El espacio de las *sucesiones finitas generalizadas*, denotado por $\mathbb{R}^{(T)}$, está formado por las aplicaciones $\lambda : T \rightarrow \mathbb{R}$, tales que $\lambda_t \neq 0$, sólo en un subconjunto finito de T . El cono convexo en $\mathbb{R}^{(T)}$ de las sucesiones finitas no negativas se denota por $\mathbb{R}_+^{(T)}$.

Ejemplo 3 Sean $m \in \mathbb{R}^n$ y $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo dado. Considérese el problema de momentos, que consiste en determinar si m es el vector de primeros momentos para una cierta distribución de probabilidad discreta sobre T . En otras palabras, nos preguntamos si existe una función $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ y $\sum_{t \in T} \lambda_t (1, t, \dots, t^n) = (1, m_1, \dots, m_n)$. Este problema se puede formular como la determinación de la consistencia de cierto SLSI en $\mathbb{R}^{(T)}$ o bien, en términos geométricos, como la determinación de que $m \in \text{conv}\{(t, \dots, t^n), t \in T\}$ (este conjunto se llama el cuerpo convexo cíclico).

Ejemplo 4 Sean f, v_1, \dots, v_n funciones escalares sobre un conjunto T arbitrario (típicamente, T es un intervalo en \mathbb{R} y $f, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{C}(T)$). Para hallar una mejor aproximación a f desde $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, para la norma de la convergencia uniforme sobre T , basta resolver el problema de PSIL

$$\begin{aligned}
P : \quad & \min \quad x_{n+1} \\
\text{s.t.} \quad & -x_{n+1} \leq f(t) - \sum_{i=1}^n v_i(t)x_i \leq x_{n+1}, \quad t \in T,
\end{aligned}$$

cuyo sistema de restricciones es un SLSI.

Ejemplo 5 Dado un problema de programación multiobjetivo lineal cuyo sistema de restricciones, $\{a'_i x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$, no se conoce con exactitud debido a errores de redondeo o errores de medida en los coeficientes, la perspectiva conservadora o pesimista pretende asegurar la factibilidad de la decisión tomada. Con tal fin se determinan los conjuntos de variabilidad de los vectores (a_i, b_i) , es decir, conjuntos $C_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (por ejemplo, bolas para cierta norma) tales que se tiene la certeza de que $(a_i, b_i) \in C_i, i = 1, \dots, m$. En tal caso, el problema a resolver es la búsqueda de vectores eficientes sobre el conjunto solución del SLSI $\{a'x \geq b, (a, b) \in T\}$, donde $T = \bigcup_{i=1}^m C_i$.

1.3.1. Clases y resultados de la teoría de SLSI

Al igual que en la teoría de los sistemas lineales ordinarios, el resultado básico de la teoría de los SLSI es el Lema de Farkas, que caracteriza las inecuaciones lineales homogéneas que son consecuencia de un sistema, también homogéneo, o su versión no homogénea, que fue establecida por Minkowski para los sistemas ordinarios. En esta sección se presenta la versión para SLSI. Versiones más generales pueden encontrarse en [7], [29] y [30].

Si $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ es una representación lineal de F (conjunto de soluciones del sistema σ). El sistema σ es *consistente* si $F \neq \emptyset$. Cuando todos los coeficientes de una desigualdad lineal son cero, la *desigualdad es trivial*. El *sistema es trivial* cuando todas sus desigualdades son triviales.

La cara de F , de índice $t \in T$, es el conjunto $F_t = \{x \in F \mid a'_t x = b_t\}$. Si $a_t \neq 0_n$, entonces el índice $t \in T$ se llama *índice propio*. Decimos que $t \in T$ ($a'_t x \geq b_t$) es un *índice portador* (*desigualdad portadora*) de σ cuando $F_t = F$. El *conjunto de índices portadores* se denota por T_c . Obviamente, si existe un cierto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $a'_t x > b_t$ para todo $t \in T$, entonces $T_c = \emptyset$. Dichos puntos reciben el nombre de *puntos de Slater*.

Asociados al sistema σ se definen los llamados *primero y segundo cono de momentos*,

$$M = \text{cone}\{a_t, t \in T\} \quad \text{y} \quad N = \text{cone}\{(a_t, b_t), t \in T\},$$

y el *cono característico*

$$K = \text{cone}\{(a_t, b_t), t \in T; (0_n, -1)\}.$$

Los tres conos juegan un papel importante en la teoría de los SLSI, en particular, para caracterizar la existencia de una solución ordinaria para σ ([1], [7] y [24]). El último cono es particularmente importante, puesto que captura toda la información relevante sobre σ .

Tras haber definido estos conos pasamos a formular el bien conocido Lema de Farkas.

Lema 11 (Lema de Farkas generalizado) Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El sistema $\sigma \cup \{a'x < b\}$ es consistente.
2. $(0_n, 1) \notin \text{cl} N$ y $(a, b) \notin \text{cl} K$.

Por el teorema de separación, cualquier conjunto convexo cerrado $F \subset \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$, es la intersección de semiespacios cerrados. Así, F es el conjunto solución de sistemas de la forma

$$\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}, \tag{1.1}$$

donde T es un conjunto (posiblemente infinito), $a_t = (a_{t1}, \dots, a_{tn}) \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$. Entonces se dice que σ es una *representación lineal* de F . Cualquier conjunto convexo cerrado admite infinitas representaciones lineales. Decimos que σ es un *sistema lineal ordinario* si T es finito y es un SLSI en otro caso. Los SLSI se han estudiado desde el punto de vista de existencia de soluciones, redundancia y de la geometría de F (ver, e.g., [19], [23], [33], y las referencias que ahí se citan).

Por ejemplo, el cono característico y el primer cono de momentos de una representación lineal máxima de F son $K(F)$ y su proyección vertical $\widehat{K(F)}$, respectivamente.

Dos resultados básicos sobre SLSI involucran la clausura del cono característico: primero, σ es consistente (i.e., $F \neq \emptyset$) si, y sólo si,

$$(0_n, 1) \notin \text{cl cone} \{(a_t, b_t), t \in T; (0_n, -1)\}$$

(teorema de existencia); y segundo, si $F \neq \emptyset$, una desigualdad lineal $a'x \geq b$ es consecuencia de σ (i.e., para todo $x \in F$ se tiene $a'x \geq b$) si, y sólo si,

$$(a, b) \in \text{cl cone} \{(a_t, b_t), t \in T; (0_n, -1)\} \quad (1.2)$$

(Lema de Farkas no homogéneo).

La *representación cónica* de un conjunto convexo cerrado no vacío F es

$$K(F) := \{(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{para todo } x \in F \text{ se tiene } a'x \geq b\}.$$

Puesto que cualquier representación lineal de F es un subsistema de $\{a'x \geq b, (a, b) \in K(F)\}$ por el teorema de representación, éste también es una representación lineal de F , este sistema se llama *representación lineal maximal* de F . Las *representaciones cónicas* (también llamadas *conos de referencia* o *conos duales*) proveen formulaciones duales para la inclusión de conjuntos convexos cerrados (ver, e.g., el enfoque del problema del contenedor de un conjunto en [35]).

En [22] y [23] se han caracterizado diferentes familias de conjuntos convexos cerrados no vacíos en términos de las propiedades geométricas de sus representaciones cónicas: F es poliédrico, si y sólo si, $K(F)$ también es poliédrico, es compacto, si y sólo si, $(0_n, -1) \in \text{int } K(F)$, y es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio lineal, si y sólo si, $(0_n, -1) \in \text{rint } K(F)$ (donde $\text{int } K(F)$ y $\text{rint } K(F)$ se entenderán como el interior y el interior relativo de $K(F)$, respectivamente).

Los conjuntos M-representables se pueden caracterizar mediante el siguiente problema de optimización paramétrica (véase Capítulo 2):

$$P(c) : \quad \text{Min}_{x \in F} \quad c'x,$$

con parámetro $c \in \mathbb{R}^n$. Si F es el conjunto solución de un SLSI, entonces $P(c)$ es un problema de PLSI con *conjunto factible* F . Representamos por $F^*(c)$ y $v(c)$ *el conjunto óptimo* y *el valor óptimo* de $P(c)$, respectivamente. Los problemas de PLSI surgen frecuentemente en economía, teoría de juegos, estadística robusta, aproximación funcional, etc. (ver, por ejemplo, la reseña [17]). Obsérvese que si F es un conjunto M-representable, entonces para todo $c \in \mathbb{R}^n$, $P(c)$ es resoluble (i.e., $F^*(c) \neq \emptyset$) o no acotado ($v(c) = -\infty$).

El siguiente capítulo se dedica a cada tipo de representación, analizamos la forma en que se obtienen dichas representaciones y cómo se les puede explotar con el fin de obtener información sobre F y $P(c)$. En particular, la Sección 2.1.1 proporciona representaciones lineales de F para ciertas familias de semi-espacios de soporte y se extiende el teorema de eliminación de Fourier para conjuntos convexos cerrados, cuya versión clásica (ver [44] y sus referencias) proporciona representaciones lineales de las proyecciones de un conjunto convexo poliédrico dado sobre el conjunto de coordenadas de los hiperplanos.

En la Sección 2.2 analizamos representaciones cónicas de conjuntos convexos cerrados, proporcionamos caracterizaciones de conos cerrados

convexos y formulamos la representación cónica de intersecciones y sumas de conjuntos convexos cerrados.

En la Sección 2.3 caracterizamos los conjuntos M-representables de cinco maneras diferentes y obtenemos una fórmula para el cálculo efectivo de una componente compacta de un conjunto M-representable. La fórmula sencilla se deriva de la demostración constructiva de la generalización del clásico teorema de descomposición para conjuntos convexos poliédricos debido a Motzkin ([39]), mientras que la parte complementaria, que involucra cierto conjunto de Pareto, proporciona la representación mínima de Motzkin.

Capítulo 2

Representaciones de conjuntos convexos

En este capítulo estudiamos las representaciones lineales y cónicas de un conjunto convexo cerrado dado, $F \subset \mathbb{R}^n$, junto con el estudio de las representaciones lineales de la imagen de F bajo un mapeo lineal, en particular analizamos el mapeo proyección ortogonal de F sobre un hiperplano dado.

Estudiamos también la caracterización de conos convexos cerrados en términos de su representación cónica y las representaciones de Motzkin junto con sus caracterizaciones.

2.1. Representaciones lineales

Cualquier conjunto convexo cerrado no vacío F admite múltiples representaciones lineales, todas ellas subsistemas de la representación lineal máxima de F ,

$$\{a'x \geq b, (a, b) \in K(F)\},$$

pero en general no hay una representación mínima de F , como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 Consideremos el sistema semi-infinito

$$\{-(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, t \in T\},$$

con $T = [0, 2\pi]$, que es una representación lineal de $F = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$. No es difícil darse cuenta que el subsistema $\{-(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, t \in S\}$, con $S \subset T$, es una representación lineal de F , si y sólo si, S es denso en T . Puesto que no hay un subconjunto denso mínimo de T , entonces no hay una representación lineal mínima de F .

Sin embargo, podemos considerar el problema de cómo obtener representaciones lineales de F que son mínimas en algún sentido. Para el caso en que para todo $c \in \mathbb{R}^n$ el problema $P(c)$ sea resoluble, o bien, no acotado (por ejemplo, cuando F es M-representable), podemos proceder como sigue: para cada $(a, b) \in K(F)$ tal que $\|a\| = 1$ y $P(a)$ es resoluble, elegimos un punto $x^{(a,b)} \in \text{bd } F$ tal que para todo $x \in F$ tenemos $a'x \geq a'x^{(a,b)}$, así que $a'x \geq b$ es consecuencia de $a'x \geq a'x^{(a,b)}$. Entonces

$$\{a'x \geq a'x^{(a,b)}, (a, b) \in T\}, \text{ con } T = \{(a, b) \in K(F) : \|a\| = 1\},$$

es una representación lineal de F . Un sistema más grande que el anterior es:

$$\{a'x \geq b, (a, b) \in S\},$$

con $S := \{(a, b) \in T : a'x = b \text{ para algún } x \in \text{bd } F\}$, que es una representación lineal de F por medio de semi-espacios de soporte en los puntos frontera de F . De hecho, de acuerdo con el Teorema 8, el siguiente resultado muestra que el conjunto de índices S en esta última representación lineal se puede reemplazar por el conjunto más pequeño

$$Q := \{(a, b) \in T \mid \text{para algún punto suave } x \text{ de } F \text{ se tiene } a'x = b\}.$$

La demostración incluye una clase de funcional de separación que se utilizó en [2] para analizar la perturbación de conjuntos convexos junto con un resultado bien conocido de la teoría diferencial.

Teorema 12 *Sea $F \subsetneq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado con interior no vacío y sea \mathcal{H} la familia de todos los hiperplanos de en puntos suaves de F . Entonces, cada punto en $\mathbb{R}^n \setminus F$ se puede separar estrictamente de F por un miembro de \mathcal{H} .*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus F$ y tomemos $\hat{x} \in \text{int } F$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $x_0 = 0_n$ y $\hat{x} = (0_{n-1}, 1)'$. Definamos $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mediante $f(y) := \text{mín} \{\lambda \in \mathbb{R} : (y, \lambda) \in F\}$ (convenimos que $\text{mín } \emptyset := +\infty$). Podemos verificar que f es convexa.

Consideremos el conjunto abierto convexo $U := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (y, 1) \in \text{int } F\}$, que es una vecindad del origen, puesto que $(0_{n-1}, 1) \in \text{int } F$; además, como f está acotada superiormente por 1 sobre U , toma valores finitos sobre U y es, por lo tanto, continua sobre U . De esta manera, como $f(0_{n-1}) > 0$, existe una vecindad abierta convexa $V \subseteq U$ de 0_{n-1} sobre el que f es estrictamente positiva.

Sea $y \in V$. Puesto que $(y, f(y)) \in \text{bd } F$, existe un hiperplano de soporte para F en $(y, f(y))$, es decir, existe un vector no nulo $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tal que para todo $(z, \lambda) \in F$ tenemos

$$\langle z - y, x^* \rangle + (\lambda - f(y)) \lambda^* \leq 0.$$

No es difícil verificar que $\lambda^* < 0$, así que, sin pérdida de generalidad, elegimos $\lambda^* = -1$. Con esta elección resulta que $x^* \in \partial f(y)$; recíprocamente, para cada $x^* \in \partial f(y)$ el hiperplano a través de $(y, f(y))$ ortogonal a $(x^*, -1)$ soporta a F . Como f toma sólo valores finitos sobre V , tenemos que $\partial f(0_{n-1}) \neq \emptyset$; de ahí, dado que

$$\begin{aligned} \partial f(0_{n-1}) = & \text{conv} \{ \text{lím}_k \nabla f(y_k) : \{y_k\} \rightarrow 0_{n-1}, \text{ para todo } k, \\ & f \text{ es diferenciable en } y_k \text{ y } \{\nabla f(y_k)\} \text{ converge} \}, \end{aligned}$$

por el Teorema 6, existe una sucesión de puntos $y_k \rightarrow 0_{n-1}$ en la cual f es diferenciable tal que $\nabla f(y_k) \rightarrow x^* \in \partial f(0_{n-1})$. Debido a que

$$0 < f(0_{n-1}) = \lim_k (f(y_k) - \langle y_k, \nabla f(y_k) \rangle),$$

para algún k_0 tenemos $f(y_{k_0}) - \langle y_{k_0}, \nabla f(y_{k_0}) \rangle > 0$. Considérese el hiperplano a través de $(y_{k_0}, f(y_{k_0}))$ con vector normal $(\nabla f(y_{k_0}), -1)$.

Puesto que $\partial f(y_{k_0}) = \{\nabla f(y_{k_0})\}$, en base a los argumentos anteriores, este es el único hiperplano de soporte para F en $(y_{k_0}, f(y_{k_0}))$; de aquí que $(y_{k_0}, f(y_{k_0}))$ es un punto suave de F y, por lo tanto, es un hiperplano de que pertenece a \mathcal{H} . Tenemos que, para todo $(z, \lambda) \in F$,

$$\langle z - y_{k_0}, \nabla f(y_{k_0}) \rangle - (\lambda - f(y_{k_0})) \leq 0$$

y, por el contrario, esta desigualdad no es válida para $(z, \lambda) = (0_{n-1}, 0)$. Así, concluimos que este hiperplano separa $x_0 = 0_n$ de F . \square

Corolario 13 Sean $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado con interior no vacío y \mathcal{H} una familia de hiperplanos de soporte para F , tal que para cada punto de $\text{bd} F$ existe un hiperplano de soporte para F que pertenece a \mathcal{H} . Entonces, cada punto en $\mathbb{R}^n \setminus F$ se puede separar de F por un elemento de \mathcal{H} .

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 12. \square

La representación lineal de F , provista por el Teorema 12, es mínima cuando F es poliédrico, pero no en general (véase Ejemplo 6). Los ejemplos en la Sección 2.3 ilustran el uso del Teorema 12, con el fin de validar si un sistema lineal dado es la representación de algún conjunto convexo cerrado F .

Los resultados en la teoría de los SLSI y PLSI proporcionan información acerca de F y $P(c)$ a partir de sus datos, una representación lineal de F , digamos $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, y c . Por ejemplo, es bien conocido

que el sistema homogéneo de σ , $\{a'_t x \geq 0, t \in T\}$, es una representación lineal de $0^+ F$ y que $F^*(c)$ es un conjunto compacto no vacío si, y sólo si, $c \in \text{int cone } \{a_t, t \in T\}$ (véase, por ejemplo, [23]).

Ahora consideremos el problema que consiste en obtener una representación lineal de la imagen de F mediante un mapeo lineal. Obsérvese que, si $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo lineal, entonces $\{a'_t A y \geq b_t, t \in T\}$ es una representación lineal de $A^{-1}(F)$.

Sin embargo, encontrar una representación de $A(F)$ no es fácil, con algunas excepciones (por ejemplo, si A es un automorfismo en \mathbb{R}^n , entonces $\{a'_t A^{-1} x \geq b_t, t \in T\}$ es una representación lineal de $A(F)$). Obsérvese que $A(F)$ generalmente no es cerrado a pesar de que F es un cono (enfaticamos, en ese caso, el Lema de Farkas en [5] el cual establece que $(A^{-1} F)^\circ = A^*(F^\circ)$ si, y sólo si, $A^*(F^\circ)$ es cerrado).

El siguiente resultado considera un tipo de mapeo que surge con frecuencia en la práctica (por ejemplo, en las siguientes dos secciones): la proyección ortogonal sobre un hiperplano dado H , denotado por $\text{proj}_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Obviamente, $\text{proj}_H(x) = (x + \text{span}\{v\}) \cap H$, donde $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ es algún vector ortogonal de H .

Proposición 14 *Sea $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ una representación lineal de $F \neq \emptyset$ y sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ ortogonal al hiperplano H . Entonces cada una de las siguientes condiciones garantizan que $\text{proj}_H(F)$ sea cerrado:*

- (i) $\{a'_t v : t \in T\}$ contiene elementos positivos y negativos.
- (ii) Para todo $t \in T$ tenemos $a'_t v = 0$.
- (iii) $P(\pm v)$ es acotado.

Demostración. Supongamos $0_n \in H$. De acuerdo con el Teorema 4, puesto que el kernel de proj_H es $\text{span}\{v\}$, $\text{span}\{v\} \cap (0^+ F) \subset \text{lin } F$ implica que $\text{proj}_H(F)$ es cerrado.

(i) Si $\{a'_t v : t \in T\}$ tiene elementos positivos y negativos, entonces, existe un $t \in T$ tal que $a'_t v \leq 0$, i.e, $\pm v \notin 0^+ F$. Así $\text{span}\{v\} \cap (0^+ F) =$

$\{0_n\} \subset \text{lin } F$.

(ii) para todo $t \in T$ tenemos $a'_t v = 0$ si, y sólo si, $\text{span}\{v\} \subset \text{lin } F$.

(iii) Si existen escalares α y β tales que para todo $x \in F$, $\alpha \leq v'x \leq \beta$, entonces, $\pm v \notin 0^+ F$. Por lo tanto, (iii) implica (i). \square

Obviamente, si F está acotado, entonces la condición (iii) es verdadera.

2.1.1. Teorema de Fourier Generalizado

Consideremos el problema de determinar $\text{proj}_H(F)$ cuando H es algún hiperplano coordenado, obtenemos así, en algunos casos, representaciones lineales de la proyección de F . En la versión clásica del teorema de eliminación, debido a Fourier (1827), F es un conjunto poliédrico (véase [44]). Sin pérdida de generalidad, podemos elegir $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, así que el problema consiste en tener una representación de $\widehat{F} = \text{proj}_H(F)$. Sea e_n el vector que denota el vector canónico de \mathbb{R}^n .

Asociamos con $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ el conjunto de índices

$$T_+ := \{t \in T : a_{tn} > 0\}, T_- := \{t \in T : a_{tn} < 0\}, \quad (2.1)$$

$$T_0 := \{t \in T : a_{tn} = 0\}, \quad (2.2)$$

los cuales forman una partición de T , los vectores $c_t = (c_{t1}, \dots, c_{t(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tales que

$$c_{tk} := \begin{cases} -\frac{a_{tk}}{a_{tn}} & , \text{ si } t \in T_+ \cup T_- \\ -a_{tk} & , \text{ si } t \in T_0, \end{cases}$$

$k = 1, \dots, n-1$, y los escalares $d_t \in \mathbb{R}$ tales que

$$d_t := \begin{cases} \frac{b_t}{a_{tn}} & , \text{ si } t \in T_+ \cup T_- \\ b_t & , \text{ si } t \in T_0. \end{cases}$$

Presentamos, a continuación, uno de los resultados principales de la tesis.

Teorema 15 (*Teorema de Fourier Generalizado*) Sea $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ una representación lineal de $F \neq \emptyset$. Entonces \widehat{F} es el conjunto solución del sistema (reducido) $\widehat{\sigma}$, definido como sigue:

$$(i) \widehat{\sigma} := \{(c_t - c_s)' \widehat{x} \geq d_s - d_t, (t, s) \in T_- \times T_+; c'_t \widehat{x} + d_t \leq 0, t \in T_0\},$$

si $T_+ \neq \emptyset \neq T_-$, es decir, $\pm e_n \notin 0^+ F$.

$$(ii) \widehat{\sigma} := \{c'_t \widehat{x} + d_t \leq 0, t \in T_0; \sup_{t \in T_+} (c'_t \widehat{x} + d_t) < +\infty\},$$

si $T_+ \neq \emptyset = T_-$, es decir, $e_n \in (0^+ F) \setminus (\text{lin } F)$.

$$(iii) \widehat{\sigma} := \{c'_t \widehat{x} + d_t \leq 0, t \in T_0; \inf_{t \in T_-} (c'_t \widehat{x} + d_t) > -\infty\},$$

si $T_+ = \emptyset \neq T_-$, es decir, $-e_n \in (0^+ F) \setminus (\text{lin } F)$.

$$(iv) \widehat{\sigma} := \{c'_t \widehat{x} + d_t \leq 0, t \in T_0\}, \text{ si } T_+ = \emptyset = T_-, \text{ es decir, } e_n \in \text{lin } F.$$

Además, \widehat{F} es cerrado en los casos (i) y (iv). Si además, el conjunto $\{(c_t, d_t), t \in T_+ \cup T_-\}$ es acotado, \widehat{F} también es cerrado en los casos (ii) y (iii).

Demostración. Podemos escribir, para algún $t \in T$ en σ ,

$$a_{tn} x_n \geq -(\widehat{a}_t)' \widehat{x} + b_t, \quad (2.3)$$

que puede reformularse como sigue:

$$x_n \geq c'_t \widehat{x} + d_t, \text{ si } t \in T_+, \quad (2.4)$$

$$c'_t \widehat{x} + d_t \geq x_n, \text{ si } t \in T_-, \quad (2.5)$$

$$0 \geq c'_t \widehat{x} + d_t, \text{ si } t \in T_0. \quad (2.6)$$

Por definición de $\widehat{\sigma}$, si $(\widehat{x}, x_n) \in F$ entonces \widehat{x} es solución de $\widehat{\sigma}$. Ahora discutamos cuatro casos posibles con referencia a los conjuntos T_+ y T_- de acuerdo a si éstos son vacíos o no:

(i) Dado que $0^+ F$ es el conjunto solución del sistema homogéneo de σ , tenemos que $T_+ \neq \emptyset \neq T_-$ si, y sólo si, $\pm e_n \notin 0^+ F$.

Si $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ es una solución de $\hat{\sigma}$, entonces existen números reales α y β tales que

$$\beta = \inf_{t \in T_-} \{c'_t \hat{x} + d_t\} \geq \sup_{t \in T_+} \{c'_s \hat{x} + d_s\} = \alpha. \quad (2.7)$$

No es difícil ver que (\hat{x}, x_n) satisface (2.4), (2.5) y (2.6) para cualquier $x_n \in [\alpha, \beta]$, así que es solución de (2.3) para todo $t \in T$, es decir, $(\hat{x}, x_n) \in F$. De esta manera, \hat{F} es el conjunto solución del sistema reducido $\hat{\sigma}$. Puesto que éste es un sistema lineal, \hat{F} es cerrado (también por la Proposición 14 (i)).

(ii) $T_+ \neq \emptyset = T_-$ si, y sólo si, $e_n \in 0^+F$ y $-e_n \notin 0^+F$ si, y sólo si, $e_n \in (0^+F) \setminus \text{lin } F$.

Si $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ es una solución de $\hat{\sigma}$, podemos elegir

$$x_n \geq \sup_{t \in T_+} \{c'_t \hat{x} + d_t\}.$$

Entonces (\hat{x}, x_n) satisface (2.4) y (2.6), tal que $(\hat{x}, x_n) \in F$.

Supongamos ahora que $\{(c_t, d_t), t \in T_+ \cup T_-\}$ está acotado. Entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\sup_{t \in T_+} \{c'_t \hat{x} + d_t\} < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y \hat{F} es cerrado puesto que es el conjunto solución del sistema lineal.

(iii) Utilizamos el mismo argumento que en (ii).

(iv) $T_+ = \emptyset = T_-$ si, y sólo si, $\pm e_n \in 0^+F$ si, y sólo si, $e_n \in \text{lin } F$. En este caso $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ es solución de $\hat{\sigma}$ si, y sólo si, para todo $x_n \in \mathbb{R}$, $(\hat{x}, x_n) \in F$. \square

Discutamos el último enunciado del Teorema 15. Primero, observemos que el acotamiento de $\{(c_t, d_t), t \in T_+ \cup T_-\}$ depende de la representación dada de F . De hecho, si F es un conjunto poliédrico convexo, cualquier representación lineal $\{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ tal que $|T| < \infty$, satisface esta condición de acotamiento, con lo que podemos reemplazar la desigualdad $a'_t x \geq b_t$, con $t \in T_+ \cup T_-$, por el sistema equivalente

$\{a'_t x \geq b_t - s, s = 0, 1, \dots\}$. En el Ejemplo 6, puesto que la partición de T se forma por $T_+ =]\pi, 2\pi[$, $T_- =]0, \pi[$, y $T_0 = \{0, \pi, 2\pi\}$, el sistema reducido de σ es

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\cos s}{\sin s} - \frac{\cos t}{\sin t} \right) x_1 \geq \frac{1}{\sin s} - \frac{1}{\sin t}, (t, s) \in T_- \times T_+ \\ (\cos t)x_1 \geq -1, t \in T_0 \end{array} \right\},$$

cuyo conjunto solución $\hat{F} = [-1, 1]$ es cerrado, aunque el conjunto

$$\{(c_t, d_t), t \in T_+ \cup T_-\}$$

no está acotado. Así, la condición de acotamiento no es necesaria para que el conjunto \hat{F} sea cerrado. Aún más, el siguiente ejemplo muestra que la cerradura de \hat{F} no implica la existencia de alguna representación lineal de F que satisfaga la condición de acotamiento.

Ejemplo 7 Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier función convexa que no sea Lipschitz continua. Como f toma sólo valores finitos, la proyección de $\text{epi } f$ sobre el hiperplano $y = 0$ es todo el espacio \mathbb{R}^n . Así que éste es cerrado. Supongamos que existe una representación lineal de $\text{epi } f$

$$\sigma = \{u'_t x + v_t y \geq w_t, t \in T\}$$

que satisface la condición de acotamiento. Podemos observar que $T_- = \emptyset$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para todo $t \in T_+$, se cumple $v_t = 1$. Entonces, si $T_0 \neq \emptyset$, σ consiste de algunas restricciones triviales del tipo $0'_n x + 0y \geq w_t$ (con $w_t \leq 0$), y las representaciones lineales de los epígrafos de una familia de minorantes afines de f cuyo supremo puntual es f , lo que es lo mismo, que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tengamos

$$\sup_{t \in T_+} \{w_t - u'_t x\} = f(x),$$

Por el acotamiento de $\{u_t, t \in T\}$, la familia $\{w_t - u_t x, t \in T\}$ consistiría de funciones afines con la misma constante Lipschitz. Entonces f sería continua Lipschitz, lo cual no es el caso.

Cuando F está acotado, como en el Ejemplo 6, las variables se pueden eliminar en cualquier orden, las proyecciones sucesivas en intersecciones de hiperplanos coordenados se obtienen siempre como en el caso (i). Esto provee un método analítico para el problema de factibilidad para los SLSI con conjunto solución acotado.

2.2. Resultados acerca de representaciones cónicas

En esta sección estudiamos las representaciones cónicas de conjuntos convexos cerrados, que se presentan provienen de resultados básicos sobre SLSI que involucran la clausura del cono característico y el Lema de Farkas no homogéneo.

A partir del Lema de Farkas y del teorema de separación obtenemos que la representación cónica de $F \neq \emptyset$ es

$$K(F) = \text{cl cone} \{(a_t, b_t), t \in T; (0_n, -1)\}. \quad (2.8)$$

La relación anterior significa que cuando asociamos a cada conjunto convexo no vacío su cono de referencia, hemos establecido una biyección entre conjuntos convexos cerrados no vacíos en \mathbb{R}^n y conos convexos cerrados en \mathbb{R}^{n+1} que no incluyen al vector $(0_n, 1)$. Observemos que, por la definición de representación cónica, dada $\lambda > 0$, tenemos $K(\lambda F) = \{(a, b) : (a, \frac{b}{\lambda}) \in K(F)\}$. Además, dados dos conjuntos convexos cerrados no vacíos F y G , tenemos que $F \subset G$ si, y sólo si, $K(G) \subset K(F)$ y $F = G$ si, y sólo si, $K(G) = K(F)$. Estos enunciados también son consecuencia de las siguientes proposiciones junto con las bien conocidas propiedades de funciones de soporte.

Proposición 16 *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces $K(F) = -\text{epi } \delta_F^*$.*

Demostración. Sea $F \neq \emptyset$ un conjunto cerrado no vacío. Puesto que $K(F)$ provee una representación lineal máxima de F y $\{a'x \geq b, (a, b) \in -\text{epi } \delta_F^*\}$ es otra representación lineal de F y tenemos la siguiente cadena de dobles implicaciones:

$$\begin{aligned} x \in F & \text{ si, y sólo si, } \delta_F(x) \leq 0, \\ & \text{ si, y sólo si, para todo } u \in \text{dom } \delta_F^*, \text{ tenemos } \langle u, x \rangle \leq \delta_F^*(u), \\ & \text{ si, y sólo si, para todo } u \in \text{dom } \delta_F^*, \text{ y para todo } \beta \in \mathbb{R}_+, \\ & \text{ tenemos que } \langle u, x \rangle \leq \delta_F^*(u) + \beta. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $-\text{epi } \delta_F^* \subset K(F)$. Recíprocamente, si $(a, b) \in K(F)$, entonces $-a'x \leq -b$ para todo $x \in F$, i.e., $\delta_F^*(-a) \leq -b$. De esta manera $-(a, b) \in \text{epi } \delta_F^*$. \square

Hemos demostrado intencionalmente que $\{a'x \geq b, (a, b) \in -\text{gph } \delta_F^*\}$ es otra representación lineal de F . El siguiente resultado provee información sobre F y $P(c)$ a partir de $K(F)$.

Proposición 17 *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado convexo no vacío. Entonces los siguientes enunciados son válidos:*

- (i) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in F$ si, y sólo si, $(x, -1) \in K(F)^\circ$. Además, para todo $(x, x_{n+1}) \in K(F)^\circ$, tenemos $x_{n+1} \leq 0$.
- (ii) F tiene un punto extremo si, y sólo si, $\text{int } \widehat{K(F)} \neq \emptyset$.
- (iii) $\mathbb{B}(F) = -\widehat{K(F)}$ y $0^+F = [\widehat{K(F)}]^\circ$.
- (iv) $\text{aff } F = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para todo } (a, b) \in \text{lin } K(F) \text{ tenemos } a'x = b\}$.
- (v) $\text{bd } F = \bigcup \left\{ F^*(c) : 0_n \neq c \in \text{cl } \widehat{K(F)} \right\}$.
- (vi) $K(\text{cl conv}(F \cup G)) = K(F) \cap K(G)$ conjunto convexo cerrado G .
- (vii) Si $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un mapeo lineal tal que $A(F)$ es cerrado, entonces $K(A(F)) = \{(a, b) : (A^*a, b) \in K(F)\}$.
- (viii) Dado $c \in \mathbb{R}^n$ y $x^* \in F$, $x^* \in F^*(c)$ si, y sólo si, $(c, c'x^*) \in K(F)$.
- (ix) Si $c \in \text{int } \widehat{K(F)}$, entonces $F^*(c) \neq \emptyset$.

Demostración. Probemos el enunciado (i). Puesto que $x \in F$ si, y sólo si, para todo $(a, b) \in K(F)$ tenemos $a'x \geq b$ (es decir, $\langle (a, b), (x, -1) \rangle \geq 0$), si, y sólo si, $(x, -1) \in K(F)^\circ$. De otra manera, dado $(0_n, -1) \in K(F)$, tenemos, para todo $(x, x_{n+1}) \in K(F)^\circ$ que $\langle (0_n, -1), (x, x_{n+1}) \rangle = -x_{n+1} \geq 0$.

Ahora demostremos (ii). Tenemos que F tiene un punto extremo si, y sólo si, $\text{lin } F = \{0_n\}$ si, y sólo si,

$$\text{span}\{a : (a, b) \in K(F)\} = \text{span } \widehat{K(F)} = \mathbb{R}^n,$$

es decir, $\text{int } \widehat{K(F)} \neq \emptyset$.

Probemos ahora el enunciado (iii). La proyección ortogonal de ambos miembros de $\text{epi } \delta_F^* = -K(F)$ sobre el hiperplano $x_{n+1} = 0$ proporciona $\mathbb{B}(F) = -\widehat{K(F)}$. Tomando polares positivos, tenemos que $0^+F = \left[\widehat{K(F)}\right]^\circ$.

Para el caso (iv). Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, para todo $x \in F$, tenemos $a'x = b$ si, y sólo si, $\pm(a, b) \in K(F)$ si, y sólo si, $(a, b) \in \text{lin } K(F)$.

Para el enunciado (v). Sean $\bar{x} \in \text{bd } F$ y $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tales que $\{x \in \mathbb{R}^n : c'x \geq c'\bar{x}\}$ es un semi-espacio de soporte para F en \bar{x} , en tal caso $\bar{x} \in F^*(c)$. Dado $d \in 0^+F$ y puesto que $\bar{x} + d \in F$, tenemos que $c'(\bar{x} + d) \geq c'\bar{x}$, es decir, $c'd \geq 0$. Por (iii), $c \in [0^+F]^\circ = \left[\widehat{K(F)}\right]^{\circ\circ} = \text{cl } \widehat{K(F)}$. Así

$$\text{bd } F \subset \bigcup \left\{ F^*(c) : 0_n \neq c \in \text{cl } \widehat{K(F)} \right\}.$$

La inclusión opuesta es trivial.

Los enunciados (vi) y (vii) son el resultado de la combinación de la Proposición 16 junto con los Corolarios 16.3.1 y 16.5.1 en [43], respectivamente.

Probemos (viii). Sean $c \in \mathbb{R}^n$ y $x^* \in F$. Entonces $x^* \in F^*(c)$ si, y sólo si, $c'x \geq c'x^*$ para todo $x \in F$, es decir, $(c, c'x^*) \in K(F)$.

Para el apartado (ix). Si $c \in \text{int } \widehat{K(F)} = \text{int cone } \{a : (a, b) \in K(F)\}$, entonces $F^*(c) \neq \emptyset$. \square

Del enunciado (i) en la Proposición 17 concluimos que, si $F \neq \emptyset$, entonces $K(F)^\circ$ está contenido en el semi-espacio $x_{n+1} \leq 0$ pero no en su frontera $x_{n+1} = 0$.

2.2.1. Caracterización de conos convexos y representaciones cónicas

Consideremos ahora la caracterización de conos convexos cerrados en términos de sus representaciones cónicas. Esta caracterización nos permite dar condiciones que garantizan, para cualesquiera $F, G \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos cerrados convexos no vacío, las ecuaciones duales $K(F \cap G) = K(F) + K(G)$ y $K(F + G) = K(F) \cap K(G)$.

Proposición 18 Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) F es un cono.
- (ii) $K(F) = F^\circ \times \mathbb{R}_-$.
- (iii) $K(F) = \widehat{K(F)} \times \mathbb{R}_-$.
- (iv) Existe $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $K(F) = D \times \mathbb{R}_-$.

Demostración. Consideremos, primeramente, la implicación de (i) hacia (ii). Dado que F es un conjunto convexo cerrado, por el Lema de Farkas para conos convexos tenemos

$$F = F^{\circ\circ} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para todo } y \in F^\circ, y'x \geq 0\},$$

así que $\{y'x \geq 0, y \in F^\circ\}$ es una representación lineal de F y $K(F) = \text{cl}(F^\circ \times \mathbb{R}_-) = F^\circ \times \mathbb{R}_-$.

La cadena de implicaciones (ii) implica (iii) y (iii) implica (iv) son triviales.

Finalmente, demostramos la implicación de (iv) a (i). Sea $K(F) = D \times \mathbb{R}_-$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $y \in F$ y $\lambda > 0$. Sea $(a, b) \in D \times \mathbb{R}_-$. Puesto que $\frac{b}{\lambda} \in \mathbb{R}_-$ y F es el conjunto solución de su representación lineal máxima $\{a'x \geq b, (a, b) \in D \times \mathbb{R}_-\}$, tenemos $a'y \geq \frac{b}{\lambda}$, es decir, $a'(\lambda y) \geq b$. De esta manera $\lambda y \in F$. \square

Teorema 19 Sean F y G conjuntos convexos no vacíos en \mathbb{R}^n . Los siguientes enunciados son verdaderos:

(i) $K(F) + K(G) \subset K(F \cap G)$. La igualdad se tiene si $K(F) \cap (-K(G))$ es un subespacio lineal de \mathbb{R}^{n+1} .

(ii) Si G es un cono, entonces

$$K(F + G) = K(F) \cap (G^\circ \times \mathbb{R}). \quad (2.9)$$

Además, si $F \cap (-G) \neq \emptyset$, tenemos que $K(F + G) = K(F) \cap K(G)$.

Demostración. Probemos (i). El conjunto de acumulación de las representaciones lineales maximales de F y G proporcionan una representación lineal de $F \cap G$, con cono característico $K(F) \cup K(G) = K(F) + K(G)$, así que

$$K(F \cap G) = \text{cl}[K(F) + K(G)], \quad (2.10)$$

y, por lo tanto, el enunciado (i) es cierto.

Si $K(F) \cap (-K(G))$ es un subespacio lineal de \mathbb{R}^{n+1} , entonces, por el Corolario 5, el cono $K(F) + K(G)$, es cerrado y tenemos de (2.10) que, $K(F \cap G) = K(F) + K(G)$.

(ii) Supongamos que G es un cono. Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tenemos

$$(a, b) \in K(F + G),$$

luego, para todo $x \in F$ y para todo $y \in G$ tenemos

$$a'(x + y) \geq b,$$

lo que es equivalente a afirmar que, para todo $y \in G$, tenemos

$$a'y \geq 0$$

y para todo $x \in F$ tenemos

$$a'x \geq b,$$

lo que ocurre si, y sólo si,

$$(a, b) \in K(F) \text{ y } a \in G^\circ.$$

De este modo tenemos (2.9).

Ahora supongamos, que $F \cap (-G) \neq \emptyset$. Por la Proposición 18 y por (2.9),

$$K(F) \cap K(G) = K(F) \cap (G^\circ \times \mathbb{R}_-) \subset K(F) \cap (G^\circ \times \mathbb{R}) = K(F + G), \quad (2.11)$$

y debemos probar la inclusión opuesta. Sea $(a, b) \in K(F + G)$. Es claro que, $(a, b) \in K(F)$ y $a \in G^\circ$. Puesto que $F \cap (-G) \neq \emptyset$, tenemos que $0_n \in F + G$ y $b \leq a'0_n = 0$. De esta forma, nuevamente por la Proposición 18, $(a, b) \in G^\circ \times \mathbb{R}_- = K(G)$. Por lo tanto, $(a, b) \in K(F) \cap K(G)$. \square

El enunciado (i) en el Teorema 19 es también una consecuencia del Teorema 7. Los siguientes ejemplos muestran que las suposiciones adicionales en los dos enunciados del Teorema 19 no son superfluos.

Ejemplo 8 Como el conjunto convexo y compacto

$$\text{conv} \{ (t, 1, -t^2), t \in [-1, 1] ; (0, 0, -1) \},$$

no contiene el origen, su envoltura cónica es un cono convexo cerrado que no contiene a $(0, 0, 1)$. Así, este es el cono de referencia de algún conjunto

convexo cerrado no vacío F . Considérese el cono convexo cerrado $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$, con $K(G) = \{0\} \times \mathbb{R}_-$. Dado que

$$K(F) + K(G) = \text{cone} \{(t, 1, -t^2), t \in [-1, 1]; (0, -1, 0); (0, 0, -1)\}$$

no es cerrado, no tenemos $K(F) + K(G) = K(F \cap G)$. Aquí $K(F) \cap (-K(G)) = \{0_2\} \times \mathbb{R}_-$ no es un subespacio lineal de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 9 Sea $F = \{(1, 1)\}$ y $G = \mathbb{R}_+^2$. Tenemos que

$$K(F) = \text{cone} \{(1, 0, 1), (-1, 0, -1), (0, 1, 1), (0, -1, -1), (0, 0, -1)\},$$

$$K(G) = \text{cone} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\},$$

y

$$K(F + G) = \text{cone} \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\},$$

con $K(G) = K(F) \cap K(G) \subsetneq K(F + G)$. Obviamente, $F \cap (-G) = \emptyset$.

2.3. Representaciones de Motzkin

Primeramente, establecemos algunas propiedades de los conjuntos representables en el sentido de Motzkin.

2.3.1. Propiedades de los conjuntos M-representables

Proposición 20 Sea $F = C + D$ una representación de Motzkin de F .

Entonces:

(i) $K(F) = K(C) \cap (D^\circ \times \mathbb{R})$.

(ii) $\text{aff } F = \text{aff } C + \text{span } D$.

(iii) Si $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un mapeo lineal y D es poliédrico, entonces $A(F) = A(C) + A(D)$ es una representación de Motzkin de $A(F)$.

(iv) Para cada $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $v(c) > -\infty$ tenemos $F^*(c) \cap C \neq \emptyset$.

(v) $v(c) = \begin{cases} \min \{c'x : x \in C\}, & \text{si } c \in D^\circ \\ -\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(vi) $\mathbb{B}(F) = -D^\circ$ y $0^+F = D$.

Demostración. (i) Es el Teorema 19 (ii).

(ii) Por hipótesis, cualquier $x \in \text{aff } F$ se puede escribir como $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i c^i + \sum_{i=1}^m \lambda_i d^i$, con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $c^i \in C$, $d^i \in D$, $i = 1, \dots, m$. Puesto que $\sum_{i=1}^m \lambda_i c^i \in \text{aff } C$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i d^i \in \text{span } D$, tenemos $\text{aff } F \subset (\text{aff } C) + (\text{span } D)$. La inclusión inversa es trivial.

(iii) Bajo las suposiciones, $A(C)$ es un conjunto convexo compacto y $A(D)$ es como convexo poliédrico (y así cerrado).

Los enunciados (iv) y (v) son inmediatos. Mientras que (vi), es una consecuencia directa de (v). \square

A partir de (vi) se sigue que el cono barrera de cualquier conjunto M-representable es cerrado, el enunciado opuesto no es cierto (considérese la envoltura convexa de una rama de la hipérbola). Por otro lado, los conjuntos M-representables en \mathbb{R}^2 son aquellos conjuntos convexos cerrados sin asíntotas (una semi-recta L es *asíntota* de F si $F \cap L = \emptyset$ y $d(F, L) = 0$), pero hay conjuntos en \mathbb{R}^2 que no son M-representables, sin asíntotas, por ejemplo, el conjunto $F = \{(x, y) \mid x^2 \leq y\}$. En dimensiones mayores podemos aún encontrar conjuntos hiperbólicos con esas propiedades, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10 Sea $F = \text{cl conv } X$, con

$$X = \left\{ \left(\cos s, \sin s, \frac{s}{2\pi - s} \right) : s \in [0, 2\pi[\right\}.$$

Puesto que F es cerrado y convexo, su cono de recesión 0^+F coincide con su cono asíntótico

$$F_\infty := \left\{ d : \exists \lambda_k \rightarrow +\infty, x_k \in F \text{ tal que } d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{\lambda_k} \right\}.$$

Entonces, dadas tres sucesiones $\{s_k\} \subset [0, 2\pi[$, $\{x_k\} \subset X$, y $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ tales que $s_k \rightarrow 2\pi$, $x_k = \left(\cos s_k, \sin s_k, \frac{s_k}{2\pi - s_k}\right)$ y $\lambda_k = \|x_k\|$ para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{\lambda_k} = (0, 0, 1) \in 0^+F$. Aún más, $0^+F = \mathbb{R}_+(0, 0, 1)$. Si $L = \{x_0 + \lambda y : \lambda \geq 0\}$ es una asíntota de F , necesariamente $y \in 0^+F = \mathbb{R}_+(0, 0, 1)$. Pero entonces $d(F, L) = 0$ implica que $\|\hat{x}_0\| = 1$. Si $\hat{x}_0 = (\cos s_0, \sin s_0)$, con $s_0 \in [0, 2\pi[$, entonces $(\cos s_0, \sin s_0, \mu) \in F \cap L$ para μ suficientemente grande (contradicción). De esta manera, F es un conjunto convexo cerrado sin ninguna asíntota, pero no es M-representable. Además F es hiperbólico puesto que está incluido en el conjunto, M-representable, $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} + \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Por otro lado, los conjuntos M-representables en \mathbb{R}^n pueden tener asíntotas si $n \geq 3$.

Ejemplo 11 Considérese el conjunto

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_n^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2, x_n \geq 0 \right\},$$

el cono de helado en \mathbb{R}^3 . Es un cono convexo cerrado, por lo que es M-representable. Sin embargo, cada sección vertical de F , que no incluye al origen, es un conjunto hiperbólico con asíntotas (por ejemplo, la intersección de F con el plano $x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$ tiene dos asíntotas, concretamente, la intersección de hiperplanos $x_n = x_1$ y $x_n = -x_1$ con dicho plano), y tales asíntotas también son asíntotas de F .

2.3.2. Caracterización de los conjuntos M-representables

Aunque no disponemos de ninguna caracterización topológica o geométrica de los conjuntos M-representables, los siguientes resultados caracterizan estos conjuntos en términos de sus correspondientes problemas

paramétricos, las funciones de soporte, las representaciones cónicas, los conjuntos de Pareto (que se definirán más adelante) y las representaciones lineales de sus conos duales, respectivamente. Además, los dos últimos resultados de este apartado proveen la representación mínima de Motzkin de F y una fórmula simple para obtener una representación de Motzkin de F , respectivamente.

Proposición 21 *Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es M -representable si, y sólo si, existe un conjunto compacto $C \subset F$ tal que $F^*(c) \cap C \neq \emptyset$, para cada $c \in \mathbb{R}^n$ con $v(c) > -\infty$.*

Demostración. La parte del enunciado “sólo si” es consecuencia de la Proposición 20, enunciado (v). Para probar el enunciado “si”, consideremos las funciones de soporte de F y C . Nuestra suposición implica que $\delta_F^*(c) = \delta_C^*(c)$ para cada $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $v(-c) > -\infty$. En otras palabras, $\delta_F^* = \delta_C^* + \delta_{\{c \in \mathbb{R}^n : v(-c) > -\infty\}}$. Como δ_F^* es semi-continua inferior (lower semi-continuous, lsc), δ_C^* es continua (ya que toma sólo valores finitos), y $\mathbb{B}(F)^\circ = (\text{dom } \delta_F^*)^\circ = -0^+F$, resulta que $\delta_{\{c \in \mathbb{R}^n : v(-c) > -\infty\}} = \delta_F^* - \delta_C^*$ es lsc, lo que equivale a decir que el conjunto $\{c \in \mathbb{R}^n : v(-c) > -\infty\}$ es cerrado, de modo que coincide con $-(0^+F)^\circ$. Así tenemos $\delta_{\{c \in \mathbb{R}^n : v(-c) > -\infty\}} = \delta_{-(0^+F)^\circ} = \delta_{0^+F}^*$ y, por lo tanto,

$$\delta_F^* = \delta_C^* + \delta_{0^+F}^* = \delta_{\text{cl conv } C}^* + \delta_{0^+F}^* = \delta_{\text{cl conv } C + 0^+F}^*. \quad (2.12)$$

Dado que $\text{cl conv } C$ es compacto y 0^+F es convexo y cerrado, $\text{cl conv } C + 0^+F$ también es un conjunto convexo cerrado. Por lo tanto, de (2.12) deducimos que $F = \text{cl conv } C + 0^+F$, lo que muestra que F es M -representable. \square

Proposición 22 *Un conjunto convexo cerrado $F \subset \mathbb{R}^n$ es M -representable si, y sólo si, $\text{dom } \delta_F^*$ es cerrado y la restricción de δ_F^* a $\text{dom } \delta_F^*$ tiene una extensión sublineal a todo el espacio \mathbb{R}^n .*

Demostración. Primero, supongamos que $F = C + D$ para algún conjunto cerrado convexo C y para algún cono convexo cerrado D . Entonces $\text{dom } \delta_F^* = \mathbb{B}(F) = -D^\circ$, por lo tanto es cerrado. Por otra parte, $\delta_F^* = \delta_C^* + \delta_D^* = \delta_C^* + \delta_{\mathbb{B}(F)}$, lo que demuestra que δ_F^* coincide con la función sublineal que toma sólo valores finitos, δ_C^* , sobre $\mathbb{B}(F)$.

Recíprocamente, supóngase que $\mathbb{B}(F)$ es cerrado y la restricción de δ_F^* a $\mathbb{B}(F)$ tiene una extensión sublineal finita del espacio completo \mathbb{R}^n . Esta extensión sublineal finita es la función de soporte δ_C^* de algún conjunto convexo compacto C . De otra manera, puesto que $\mathbb{B}(F)$ es un cono convexo cerrado, éste coincide con su segundo polar negativo, de modo que $\mathbb{B}(F)$ es el polar negativo de algún cono convexo cerrado D . Así, tenemos que $\delta_F^* = \delta_C^* + \delta_{\mathbb{B}(F)} = \delta_C^* + \delta_D^* = \delta_{C+D}^*$. Puesto que F y $C+D$ son conjuntos convexos y cerrados, a partir de estas igualdades concluimos que $F = C + D$, lo que demuestra que F es M-representable. \square

Proposición 23 *Sea F un conjunto cerrado convexo no vacío en \mathbb{R}^n . Entonces F es M-representable si, y sólo si, existen dos conos convexos cerrados $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $L \subset \mathbb{R}^n$ tales que $K(F) = K \cap (L \times \mathbb{R})$, $(0_n, 1) \notin K$ y $(0_n, -1) \in \text{int } K$.*

Demostración. Sea $F = C + D$ tal que C es un conjunto convexo compacto y D un cono convexo cerrado. El enunciado directo resulta de la Proposición 20 (i), cuando consideramos a K y L como los conjuntos $K(C)$ y D° , respectivamente.

Recíprocamente, supongamos que existen K y L con las condiciones del enunciado y sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{para todo } (a, b) \in K, \ a'x \geq b\}$. El conjunto C es convexo y compacto (ya que $(0_n, -1) \in \text{int } K$). Además, tenemos que $C + L^\circ \subseteq F$; en efecto, si $x \in C$, $d \in L^\circ$ y $(a, b) \in K(F)$ entonces, con $(a, b) \in K$ y $a \in L$, tenemos $a'x \geq b$ y $a'd \geq 0$, de modo que $a'(x + d) \geq b$.

En consecuencia necesitamos probar la inclusión opuesta. Sea $x_0 \in F$ y supongamos, en la búsqueda de una contradicción, que $x_0 \notin C + L^\circ$. Debido a que $C + L^\circ$ es un conjunto convexo cerrado, por el teorema de separación, existe $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $a'(x + d) \geq b > a'x_0$ para cada $x \in C$ y $d \in L^\circ$. En consecuencia, para cada $x \in C$ tenemos $a'x \geq b$ y, por lo tanto, $(a, b) \in K(C) = K$ (esta igualdad resulta del hecho de que K es un cono convexo cerrado que incluye al punto $(0_n, -1)$ y no incluye al punto $(0_n, 1)$) y $a \in L^{\circ\circ} = L$. Tenemos entonces, $(a, b) \in K \cap (L \times \mathbb{R}) = K(F)$, lo que contradice la suposición de que $x_0 \in F$. \square

Teorema 24 *Sea F un conjunto convexo cerrado, $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}^n$. Sean $L := \text{lin } F$, $K := (0^+ F) \cap L^\perp$, y*

$$M(F) := \{x \in F \cap L^\perp : (x - K) \cap F = \{x\}\}.$$

Entonces los siguientes enunciados son válidos:

(i) *F es M -representable si, y sólo si, $M(F)$ está acotado, en cuyo caso,*

$$F = (\text{cl conv } M(F)) + 0^+ F, \quad (2.13)$$

es una representación de Motzkin de F .

(ii) *Si F es M -representable y además incluye un punto extremo, entonces (2.13) es la representación mínima de Motzkin de F , con*

$$M(F) = \{x \in F : (x - 0^+ F) \cap F = \{x\}\}, \quad (2.14)$$

el cual satisface

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \bigcup \{F^*(c) : c \in \text{int } \widehat{K(F)}\} &\subset M(F) \\ &\subset \bigcup \{F^*(c) : 0_n \neq c \in \text{cl } \widehat{K(F)}\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Demostración. (i) Supongamos que F es M -representable. Sea $F = C + 0^+ F$, con C un conjunto convexo compacto. Consideremos que $C \subset$

L^\perp (de otra manera podemos reemplazarlo por su proyección ortogonal sobre L^\perp , es decir, el conjunto convexo compacto $(C + L) \cap L^\perp$, que es otra componente compacta de F).

Primeramente mostramos que $M(F)$ está acotado. Sea $x \in M(F)$. Dado $x \in F = L + K + C$, podemos escribir $x = a + b + c$, con $a \in L$, $b \in K$ y $c \in C$. Puesto que $x - a - c = b \in K$, $a + c \in L + C \subset F$, y $x \in M(F)$, tenemos $x = a + c$. Entonces, dado que $x, c \in L^\perp$, tenemos que $x = c$. De esta manera obtenemos $M(F) \subset C$, por lo que $M(F)$ está acotado.

Ahora, supongamos que $M(F)$ está acotado. Obviamente,

$$(\text{cl conv } M(F)) + 0^+F \subset F + 0^+F = F. \quad (2.16)$$

A continuación, probamos la inclusión opuesta (2.16).

Sea $v \in F$. Podemos escribir de forma única $v = u + y$, $u \in L$, $y \in L^\perp$. Como $y = v - u \in F + 0^+F = F$, tenemos que $y \in F \cap L^\perp \cap (y - 0^+F)$, con $0^+[F \cap L^\perp \cap (y - 0^+F)] = L \cap L^\perp = \{0_n\}$, así que $F \cap L^\perp \cap (y - 0^+F)$ es un conjunto convexo compacto no vacío.

Sea \tilde{y} una solución óptima del problema de optimización

$$P: \quad \text{Min}_{x \in F \cap L \cap (y - 0^+F)} \quad d'x,$$

donde $d \in K$ tal que para todo $x \in K \setminus \{0_n\}$ tenemos $d'x > 0$ (la existencia de tal vector es consecuencia de [40, Teorema 3.13], tomando en cuenta que K es un cono cerrado convexo y puntiagudo).

Ahora probemos que $\tilde{y} \in M(F)$. Sea $\hat{y} \in F$ tal que $\tilde{y} - \hat{y} \in K$. Debemos probar que $\tilde{y} = \hat{y}$, de hecho, como $\tilde{y} \in y - 0^+F$ y $\tilde{y}, y \in L$, tenemos

$$\hat{y} - y = (\hat{y} - \tilde{y}) + (\tilde{y} - y) \in (-K) + (-K) = (-K).$$

Así que, $\hat{y} \in F \cap L \cap (y - 0^+F)$, y $d'\hat{y} \leq d'\tilde{y}$, es decir, $d'(\hat{y} - \tilde{y}) \leq 0$, con $\tilde{y} - \hat{y} \in K$. Esto implica que $\tilde{y} = \hat{y}$ por la suposición que hicimos acerca de d .

Puesto que $\tilde{y} \in y - 0^+F$ y $\tilde{y} \in M(F)$, obtenemos

$$v = y + u \in (\tilde{y} + 0^+F) + L = y + 0^+F \subset M(F) + 0^+F.$$

Por lo tanto, $F = M(F) + 0^+F$ y concluimos que

$$\begin{aligned} F &= \text{cl conv } F = \text{cl conv}(M(F) + 0^+F) = \text{cl}(\text{conv } M(F) + \text{conv } 0^+F) \\ &= \text{cl}(\text{conv } M(F) + 0^+F) = \text{cl conv } M(F) + \text{cl } 0^+F \\ &= \text{cl conv } M(F) + 0^+F \end{aligned}$$

luego F es M -representable.

(ii) Como 0^+F es un cono puntiagudo, $M(F) \subset C$, lo que implica que $\text{cl conv } M(F) \subset C$, con $M(F)$ considerado como en (2.14) puesto que $L^\perp = \mathbb{R}^n$. Ahora probaremos (2.15).

El conjunto $\bigcup \{F^*(c) : c \in \text{int } \widehat{K}(F)\}$ es no vacío, por la Proposición 17, enunciados (ii) y (ix).

Ahora sea $x^* \in F^*(c)$, con $c \in \text{int } \widehat{K}(F)$. Por (iii) en la Proposición 17,

$$c \in \text{int } \widehat{K}(F) = \text{int cl } \widehat{K}(F) = \text{int } [\widehat{K}(F)]^{\circ\circ} = \text{int } (0^+F)^\circ,$$

así que, para toda $d \in (0^+F) \setminus \{0_n\}$, tenemos $c'd > 0$ (esta es parte del argumento de [40, Theorem 3.13 (iii)]). Sea $y \in F$ tal que $y \neq x^*$ y $y \in x^* - 0^+F$. Puesto que $x^* - y \in 0^+F \setminus \{0_n\}$, tenemos que $c'(x^* - y) > 0$, en contradicción con $x^* \in F^*(c)$. De esta manera, $x^* \in M(F)$.

Finalmente, dado que $x \in M(F)$ y $d \in (0^+F) \setminus \{0_n\}$ y, además, $\{x - \frac{d}{k}\}_{k=1}^\infty$ está incluido en $\mathbb{R}^n \setminus F$ y $x - \frac{d}{k} \rightarrow x$, tenemos

$$x \in \text{bd } F = \bigcup \{F^*(c) : 0_n \neq c \in \text{cl } \widehat{K}(F)\},$$

por (v) en la Proposición 17. Esto completa la prueba. \square

Podemos interpretar $M(F)$ como el *conjunto eficiente de Pareto* de F relativo a su cono de recesión. Observemos que, si F incluye un punto

extremo y cada elemento de

$$M(F) \setminus \bigcup \left\{ F^*(c) : c \in \text{int } \widehat{K(F)} \right\}$$

es un punto extremo de F , entonces

$$\text{cl } M(F) = \text{cl } \bigcup \left\{ F^*(c) : c \in \text{int } \widehat{K(F)} \right\}.$$

De hecho, dado $\bar{x} \in M(F) \setminus \bigcup \left\{ F^*(c) : c \in \text{int } \widehat{K(F)} \right\}$, por [43, Teorema 18.6] existe una sucesión $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos expuestos de F tal que $x^k \rightarrow \bar{x}$. Sea $c^k \in \mathbb{R}^n$ tal que $F^*(c^k) = \{x^k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Sea $d \in (0^+F) \setminus \{0_n\}$. Puesto que $x^k + d \in F \setminus \{x^k\}$, tenemos que $(c^k)'(x^k + d) > (c^k)'x^k$, es decir, $(c^k)'d > 0$. Entonces $c^k \in \text{int } (0^+F)$ por [40, Teorema 3.13].

Por lo tanto $\bar{x} \in \text{cl } \bigcup \left\{ F^*(c) : c \in \text{int } \widehat{K(F)} \right\}$, esto demuestra que $\text{cl } M(F) \subset \text{cl } \bigcup \left\{ F^*(c) : c \in \text{int } \widehat{K(F)} \right\}$, mientras que la inclusión opuesta es una consecuencia de (2.15).

2.3.3. Teorema de representación de Motzkin generalizado

Los dos últimos resultados que presentamos en esta sección, proveen la representación mínima de Motzkin de F y una fórmula simple para obtener una representación de Motzkin de F , respectivamente. En particular el Teorema 25, es uno de los resultados principales de este trabajo.

A lo largo de la demostración del siguiente teorema, dado un conjunto arbitrario S , denotamos por $\mathbb{R}^{(S)}$ el conjunto de mapeos desde S hacia \mathbb{R} con un conjunto finito de soporte y por $\mathbb{R}_+^{(S)}$ el cono positivo en el espacio lineal $\mathbb{R}^{(S)}$. También mantendremos la notación de (2.1) y (2.2) para la partición del conjunto de índices de un sistema lineal basado en el signo del coeficiente de la última variable.

Teorema 25 (*Teorema de Motzkin generalizado*) Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces F es M -representable si, y sólo si, existe una representación lineal de $K(F)$, $\{\langle (c_s, d_s), (x_n, x_{n+1}) \rangle \geq 0, s \in S\}$, tal que $\left\{ \frac{c_s}{d_s} : s \in S_- \right\}$ está acotado. En tal caso,

$$F = \text{cl conv} \left\{ -\frac{c_s}{d_s} : s \in S_- \right\} + \text{cl cone} \{c_s : s \in S_0\} \quad (2.17)$$

es una representación de Motzkin de F .

Demostración. Primero suponemos que F es un conjunto M -representable, tal que $F = C + D$, donde C es un conjunto convexo compacto y D es un cono convexo cerrado. Entonces, por la Proposición 20 (i),

$$\{\langle (c, -1), (x, x_{n+1}) \rangle \geq 0, c \in C; \langle (d, 0), (x, x_{n+1}) \rangle \geq 0, d \in D\} \quad (2.18)$$

es una representación lineal de $K(F)$ que satisface la condición de acotamiento.

Recíprocamente, supongamos que $\{\langle (c_s, d_s), (x, x_{n+1}) \rangle \geq 0, s \in S\}$ es una representación lineal de $K(F)$ tal que $\left\{ \frac{c_s}{d_s} : s \in S_- \right\}$ está acotado. Dado $s \in S$ y como $(c_s, d_s) \in K(F)^\circ$, tenemos que $d_s \leq 0$, de acuerdo con la Proposición 17 (i).

Si $d_s = 0$ para todo $s \in S$, entonces

$$K(F)^\circ = \text{cl cone} \{(c_s, 0), s \in S\} \subset \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\},$$

en contradicción con el enunciado (i) de la Proposición 17 (estamos suponiendo que $F \neq \emptyset$). Por lo tanto, existe algún $s \in S$ tal que $d_s < 0$. Dividiendo por $|d_s|$, si esto fuera necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todo $s \in S_-$ tenemos $d_s = -1$. Como

$$K(F)^\circ = \text{cl cone} \{(c_s, -1), s \in S_-; (c_s, 0), s \in S_0\}. \quad (2.19)$$

Sea $C := \text{cl conv}\{c_s, s \in S_- \} \neq \emptyset$ y $D := \text{cl cone}\{c_s, s \in S_0\}$. Debemos probar que $F = C + D$.

Primero demostramos que $C + D \subset F$. Dado $x \in C + D$, existen sucesiones $\{\delta^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(S_-)}$ y $\{\xi^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(S_0)}$ tales que

$$x = \lim_k \sum_{s \in S_-} \delta_s^k c_s + \lim_k \sum_{s \in S_0} \xi_s^k c_s \quad \text{and} \quad \lim_k \sum_{s \in S_-} \delta_s^k = 1.$$

Entonces, de acuerdo con (2.19),

$$(x, -1) = \lim_k \left[\sum_{s \in S_-} \delta_s \binom{c_s}{-1} + \sum_{s \in S_0} \xi_s \binom{c_s}{0} \right] \in K(F)^\circ,$$

así que $x \in F$, de esta manera $C + D \subset F$.

Ahora supongamos que $x \in F$. Entonces $(x, -1) \in K^\circ$ y, nuevamente por (2.19), existen $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}_+^{(S)}$ tales que

$$(x, -1) = \lim_k \left[\sum_{s \in S_-} \lambda_s^k \binom{c_s}{-1} + \sum_{s \in S_0} \lambda_s^k \binom{c_s}{0} \right],$$

es decir,

$$x = \lim_k \left[\sum_{s \in S_-} \lambda_s^k c_s + \sum_{s \in S_0} \lambda_s^k c_s \right] \quad \text{y} \quad \lim_k \left[\sum_{s \in S_-} \lambda_s^k \right] = 1. \quad (2.20)$$

Sea $\rho_k := \sum_{s \in S_-} \lambda_s^k, k = 1, 2, \dots$. Como $\lim_k \rho_k = 1$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\rho_k > 0$ para toda k . A partir de (2.20) tenemos

$$x = \lim_k \left[\sum_{s \in S_-} \frac{\lambda_s^k}{\rho_k} c_s + \sum_{s \in S_0} \frac{\lambda_s^k}{\rho_k} c_s \right]. \quad (2.21)$$

Sea

$$x^k := \sum_{s \in S_-} \frac{\lambda_s^k}{\rho_k} c_s \in \text{conv}\{c_s, s \in S_-\} \subset C.$$

Puesto que C es compacto, existe $\bar{x} \in C$ tal que $\lim_k x^k = \bar{x} \in C$.

Definiendo

$$y^k := \sum_{s \in S_0} \frac{\lambda_s^k}{\rho_k} c_s \in \text{cone}\{c_s, s \in S_0\} \subset D.$$

De (2.21) tenemos que $\lim_k y^k = x - \bar{x} \in D$, así que $x = \bar{x} + (x - \bar{x}) \in C + D$. Concluimos que $F \subset C + D$. \square

Para la representación lineal de $K(F)$ dada por (2.18), tenemos, para todo $s \in S_-$, que $\left\| \frac{c_s}{d_s} \right\| \leq \max_{c \in C} \|c\|$. Se puede obtener una cota alternativa si observamos que, por la compacidad de C , el cono $K(C) = \text{cone} \{(c, -1), c \in C; (0_n, -1)\}$ contiene el centro de una bola con centro en $(0_n, -1)$ y radio $\rho > 0$. Puesto que la distancia desde $(0_n, -1)$ hacia cualquier hiperplano $c'x - x_{n+1} = 0$ es al menos ρ , $\left\| \frac{c_s}{d_s} \right\| \leq \frac{1}{\rho}$ para todo $s \in S_-$. Una vez más, la suposición de acotamiento depende de la representación lineal disponible de $K(F)$ y no de $K(F)$. De hecho, tomando dos índices arbitrarios $u \in S_-$ y $v \in S_0$ y agregando las restricciones redundantes, $\langle (c_u, d_u) + r(c_v, d_v), (x, x_{n+1}) \rangle \geq 0$, con $r \in \mathbb{N}$, a la representación lineal de $K(F)$ dada, obtenemos una nueva representación lineal de $K(F)$ que viola la condición de acotamiento.

Nótese que se tiene la suposición de acotamiento del Teorema 25 si $|S_-| < \infty$ (por ejemplo, cuando F es un conjunto convexo poliédrico, S se puede elegir como un conjunto finito). Bajo la suposición de acotamiento y por el Teorema 15 y la Proposición 17 (iii), tenemos

$$\widehat{K(F)} = \{x \in \mathbb{R}^n : c'_s x \geq 0, s \in S_0\} = (0^+ F)^\circ.$$

En relación con la Proposición 20, el enunciado (v), observemos que el valor de $v(c)$ se puede expresar en términos de los datos (una representación lineal de $K(F)$), bajo la suposición del Teorema 25 debido a que

$$\min \{c'x : x \in C\} = \inf \left\{ \frac{c'_s c_s}{|d_s|} : s \in S_- \right\}.$$

Ejemplo 12 Sea

$$\{(s^2 - 2s + 1)x_1 + s^2 x_2 - x_3 \geq 0, s \in [0, 1]; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

una representación lineal del cono de referencia de cierto conjunto F , que describimos adelante. Puesto que el arco de la parábola (o el astroide

$$\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} = 1)$$

$$\{(s^2 - 2s + 1, s^2), s \in [0, 1]\}$$

está acotado, F es la suma de la envoltura convexa de este arco de parábola y la envoltura cónica convexa de $\{(1, 0), (0, 1)\}$, es decir, \mathbb{R}_+^2 , el arco mencionado también coincide con $M(F)$. Como todos los puntos de la frontera del conjunto M -representable F son suaves, obtenemos, del Teorema 12, la representación lineal de F ,

$$\{tx_1 + (1-t)x_2 \geq t - t^2, t \in [0, 1]\},$$

de la que obtenemos otra descripción de la representación cónica de F :

$$K(F) = \text{cone} \{(t, 1-t, t-t^2), t \in [0, 1]; (0, 0, -1)\}.$$

Ejemplo 13 Sea $\{s^2x_1 + x_2 - sx_3 \geq 0, s \in \mathbb{R}_{++}\}$ una representación lineal de $K(F)$, donde $\left\{\frac{c_s}{|d_s|} : d_s < 0, s \in S\right\}$ es no acotado. De hecho tenemos $F = C + D$ con $C = \text{cl conv} \{(s, s^{-1}), s \in \mathbb{R}_{++}\}$ (la envoltura convexa de la rama de la hipérbola $x_1x_2 = 1$) y $D = \text{cl cone } \emptyset = \{0_2\}$. Observemos que, como cualquier punto frontera de F es suave, entonces $\{x_1 + t^2x_2 \geq 2t, t \in \mathbb{R}_{++}\}$ es una representación lineal de F y la representación cónica de F , al final, es la cerradura de su cono característico, es decir,

$$K(F) = \text{cone} \{(1, t^2, 2t), t \in \mathbb{R}_{++}; (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}.$$

Podemos mencionar que la propiedad de separación se preserva, obviamente, por el producto cartesiano y por el producto por escalares, pero no por la suma de Minkowski (recordemos que la suma de conos convexos no es necesariamente cerrada), excepto que se tenga una condición adicional, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 26 *Sea $\{F_i, i \in I\}$ una familia finita de conjuntos M -representables en \mathbb{R}^n que para todo $i \in I$, $z_i \in 0^+F_i$ y para todo $i \in I$,*

$\sum_{i \in I} z_i = 0_n$ entonces, para todo $i \in I$, tenemos $z_i \in \text{lin } F_i$. Así $\sum_{i \in I} F_i$ es M -representable.

Demostración. Sea $\{C_i, i \in I\}$ una familia de conjuntos compactos convexos tales que, para todo $i \in I$, tenemos $F_i = C_i + 0^+ F_i$. Entonces $\sum_{i \in I} F_i = \sum_{i \in I} C_i + \sum_{i \in I} (0^+ F_i)$, donde $\sum_{i \in I} C_i$ es un conjunto convexo compacto, mientras que $\sum_{i \in I} (0^+ F_i)$ es un cono convexo cerrado por [43, Corolario 9.1.3]. \square

Finalizamos este capítulo mediante algunos ejemplos que muestran que la intersección de conjuntos M -representables no necesariamente es M -representable.

Ejemplo 14 Sea $F = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2, x_3 \geq 0\}$ (el cono de helado en \mathbb{R}^3) y $F_i = F + (0, (-1)^{i+1}, 0)$, es decir,

$$F_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 \geq x_1^2 + (x_2 + (-1)^i)^2, x_3 \geq 0 \right\},$$

con $0^+ F_i = F, i = 1, 2$. La intersección de los conjuntos M -representables, $F_1 \cap F_2$, tiene puntos extremos (por ejemplo, $(0, 0, 1)$) y su cono de recepción es $0^+(F_1 \cap F_2) = F$. De hecho, $F_1 \cap F_2$ es el epígrafo de la función convexa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2}, & \text{si } x_2 < 0 \\ \sqrt{x_1^2 + (x_2 + 1)^2}, & \text{si } x_2 \geq 0. \end{cases}$$

De otra manera, dado $z \in \text{bd}(F_1 \cap F_2)$ (es decir, la gráfica de f), $z - F$ es el hipógrafo de la función cóncava $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g_z(x_1, x_2) = f(z_1, z_2) - \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}.$$

Obsérvese que, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tenemos $g_z(x_1, x_2) \leq f(x_1, x_2)$ y la igualdad se tiene en los puntos (z_1, z_2) y

$$(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) := \begin{cases} \left(\frac{z_1}{1-z_2}, 0 \right), & \text{si } z_2 < 0 \\ \left(\frac{z_1}{1+z_2}, 0 \right), & \text{si } z_2 \geq 0. \end{cases}$$

Definiendo $\tilde{z} := (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, f(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2))$, tenemos

$$(z - F) \cap (F_1 \cap F_2) = \begin{cases} [\tilde{z}, z], & \text{si } z_2 \neq 0 \\ \{z\}, & \text{si } z_2 = 0, \end{cases}$$

y, por el Teorema 24, tenemos

$$M(F_1 \cap F_2) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 = x_1^2 + 1, x_2 = 0, x_3 \geq 0\},$$

el cual es acotado. Por lo tanto $F_1 \cap F_2$ no es M-representable.

Capítulo 3

Solución de sistemas lineales semi-infinitos

Nos ocupamos en lo que resta del trabajo del problema de factibilidad cuando consideramos representaciones lineales de un conjunto convexo cerrado F , es decir, sistemas lineales semi-infinitos. Aunque ya hemos presentado métodos para resolver el problema de factibilidad (el Teorema de Fourier y el Teorema de representación de Motzkin del capítulo anterior), estos son métodos analíticos y prácticos para dimensiones pequeñas. Así, nuestro interés ahora se enfoca en métodos aplicables a la búsqueda de una solución numérica.

El estudio de los SLSI inicia en 1920 (véase [9], [8], [23], [37] y [45]). Sin embargo, fue hasta el año de 1979, que Jeroslow, propuso el primer método numérico que aproxima soluciones factibles, el cual tiene como base las proyecciones de puntos, donde el conjunto de índices es $T = \mathbb{N}$ (véase [34]). Dicho estudio ha continuado en trabajos como el de Hu y de Ozcam (véase [32] y [41]). Pero son concebidos de forma particular para cierta clase de SLSI.

3.1. Método de relajación para resolver SL-SI

Estamos interesados en métodos de resolución para representaciones lineales de F de la forma:

$$\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}.$$

Puesto que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ es la representación lineal de F , decimos que F es el conjunto de soluciones de σ .

A menos que se indique lo contrario, en lo que resta del trabajo, dado un SLSI σ , supondremos, para todo $t \in T$, que $a_t \neq 0$, tal que cada desigualdad representa un semi-espacio cerrado y consideramos que $F \neq \emptyset$.

3.1.1. Algoritmos de relajación extendidos

A continuación presentamos toda una clase de métodos de relajación aplicables a cualquier tipo de SLSI (resultados que están publicados en [26]). Que es uno de los resultados principales de esta tesis, demostramos su convergencia y analizamos la rapidez de convergencia que publicamos en [27].

La distancia Euclídea desde \bar{x} al hiperplano, $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = b\}$, tal que $a'\bar{x} < b$, será denotada por $d(\bar{x}, H) = \frac{b - a'\bar{x}}{\|a\|}$. La idea geométrica es la siguiente: partimos de un punto inicial $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, que no es solución del sistema (es decir, $\bar{x} \notin F$) y de entre los hiperplanos asociados con inecuaciones violadas por \bar{x} tomamos uno de los más alejados de \bar{x} , lo llamamos H ; el siguiente punto se construirá a partir de \bar{x} a lo largo del vector de proyección de \bar{x} sobre el hiperplano H , a una distancia $\lambda d(\bar{x}, H)$, donde $\lambda > 0$ es un parámetro fijo a priori.

Si $\mu := d(\bar{x}, H) > 0$ es la distancia Euclídea desde \bar{x} al hiperplano

H , el siguiente punto será $\bar{x} + \mu\lambda \frac{a}{\|a\|}$, donde a es el vector gradiente de la definición de H .

El problema de localizar el hiperplano más alejado no es una tarea fácil. En efecto, dado un sistema infinito y un vector fijo x^r , $g(t, x^r) := a'_t x^r - b_t$ es una función no lineal, llamada función marginal o de holgura, y las técnicas que involucran cálculos de máximos globales, por ejemplo, las rutinas de MATLAB, sólo proveen aproximaciones.

Proponemos, pues, un método en el que prescindimos de calcular el hiperplano más alejado. De hecho, generamos una sucesión $\{x^k\}$, tal que, a partir del punto actual x^r , el siguiente punto es de la forma $x^{r+1} = x^r + \varepsilon\lambda \frac{a}{\|a\|}$ en donde sólo necesitamos que en cada paso ε (junto con su correspondiente vector a) sea lo suficientemente cercano, en cierto sentido, a μ , de tal manera que podemos utilizar la aproximación de rutinas de MATLAB.

En particular, si el parámetro $\lambda = 2$ ($\lambda = 1$), el siguiente punto es la reflexión de \bar{x} del hiperplano (la proyección de \bar{x} sobre H , respectivamente). El caso en el que $\lambda = 1$ ha sido ampliamente estudiado en [32]. Los autores del artículo, tratan con sistemas donde $T \subset \mathbb{R}^m$ y suponen las condiciones: $\sup\{\|a_t\| \mid t \in T\} < \infty$ y $\inf\{b_t \mid t \in T\} > -\infty$. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que en situaciones comunes, estas condiciones se pueden violar.

Problema 27 Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $\sigma = \{(-2t, 1)'x \geq -t^2, t \in \mathbb{R}^1\}$. El conjunto factible es $F = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1^2\}$ y $\dim F = 2$. Aquí tenemos $\sup\{\|(-2t, 1)'\| \mid t \in T\} = \infty$ e $\inf\{-t^2 \mid t \in T\} = -\infty$.

La dimensión completa para un conjunto factible es una propiedad deseable con el fin de verificar la estabilidad de unicidad fuerte de sistemas del tipo (1.1), como se puede ver en [14]. A partir de estos hechos, introducimos un método en donde consideramos un conjunto de índices arbitrario T , y sólo suponemos que el conjunto factible F es de dimensión

completa. Podemos aún prescindir de esta condición en base al siguiente resultado (que se presenta en [14]), bajo el cumplimiento de la condición fuerte de Slater, es decir, existe $\bar{x} \in F$ y $\gamma > 0$ tal que, para todo $t \in T$, tenemos $a'_t \bar{x} \geq b_t + \gamma$.

Teorema 28 [14, Teo. 4.1] *El sistema σ es consistente y satisface la condición fuerte de Slater si, y sólo si, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo σ_1 con $d(\sigma, \sigma_1) < \varepsilon$, tenemos $\text{aff } F_1 = \text{aff } F$.*

Una descripción formal del MRE es como sigue:

Algoritmo 29 (*Método de Relajación Extendido*)

1. Elija los parámetros $\lambda \in (0, 2]$, $M > 2$, $\beta > 0$ y un vector arbitrario $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Establezca el índice de iteración $r = 0$.
2. Minimice la función de holgura $g(t, x)$ en x^r , calcule

$$u_r = \inf_{t \in T} g(t, x^r).$$

Si $u_r \geq 0$, fin ($x^r \in F$). De otra manera, tómesese el conjunto de índices $T_r = \{t \in T | g(t, x^r) < 0\}$ (índices de desigualdades violadas por x^r).

3. Sea $\beta_r = \beta$ y considere el problema de optimización global

$$\sup \left\{ \frac{b_t - a'_t x^r}{\|a_t\|}, t \in T_r \right\} = \mu_r. \quad (3.1)$$

4. Halle una aproximación β_r de ε_r , para las soluciones μ_r , del problema (3.1). Si $\beta_r < \varepsilon_r(M - 1)$, entonces

$$\frac{\mu_r}{M} < \varepsilon_r := \frac{b_{t_r} - a'_{t_r} x^r}{\|a_{t_r}\|} \leq \mu_r, \text{ para algún } t_r \in T_r,$$

y elija $x^{r+1} = x^r + \lambda \varepsilon_r \frac{a_{t_r}}{\|a_{t_r}\|}$. Sustituya r por $r + 1$ y vuelva al Paso

2. En otro caso, sea $\beta_r = \beta_r/2$ y repita el Paso 4.

Observación 1. En el Paso 3, si consideramos, para cualquier $r \in \mathbb{N}$, el punto $x^r \in \mathbb{R}^n$ con $u_r < 0$, tenemos, para cada $t \in T_r$, que

$$0 < \frac{b_t - a'_t x^r}{\|a_t\|},$$

Así que, tenemos $\mu_r > 0$, en cualquier iteración, antes de que el método concluya.

Observación 2. Nuevamente, en el Paso 3, supongamos $z \in F$, entonces, para todo $t \in T_r$ tenemos $\frac{b_t - a'_t z}{\|a_t\|} \leq 0$, y considerando la desigualdad

$$\frac{b_t - a'_t x^r}{\|a_t\|} = \frac{b_t - a'_t z}{\|a_t\|} + \frac{a'_t(z - x^r)}{\|a_t\|} \leq \|z - x^r\|,$$

obtenemos $\mu_r \leq \|z - x^r\|$.

Observación 3. Nuevamente en el algoritmo, siempre se cumple la desigualdad $\beta_r < \varepsilon_r(M-1)$. Esto implica que $\varepsilon_r > (\varepsilon_r + \beta_r)/M > \mu_r/M$.

Así que, aseguramos que en el algoritmo del MRE, ε_r siempre existe y toma valores finitos diferentes de cero.

La demostración de la convergencia del teorema siguiente para el caso $\lambda = 2$ del algoritmo previo, primeramente se reportó en [28] (convergencia del Método de Relajación Extendido), posteriormente, motivados por las ideas de Agmon (véase [1]) acerca del estudio de proyecciones superiores e inferiores (“under and over projections”), dirigimos nuestro análisis hacia el estudio de la rapidez de convergencia (caso $\lambda = 2$). Posteriormente ampliamos el resultado de convergencia para todos los valores de λ dados en el Algoritmo 3.1 (véase [26]) y probamos que la tasa de convergencia del Algoritmo 3.1 es lineal (véase [27]). Estos últimos resultados se habían presentado parcialmente en [25].

Establecemos, pues, el teorema de convergencia del Algoritmo 29.

Teorema 30 *Supongamos un sistema σ tal que $\dim F = n$. Dado un punto inicial, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, el MRE con $\lambda \in]0, 2]$ concluye en un número finito de pasos, o bien, el método genera una sucesión $\{x^r\}$, que converge hacia un elemento de F .*

Demostración. Considérese la sucesión $\{x^r\} \subset \mathbb{R}^n$ generada por el algoritmo. Concluiremos que $\lim_{r \rightarrow \infty} x^r = \hat{x} \in F$. Si la sucesión es finita, no hay nada que probar. Por lo que supongamos que $\{x^r\}$ es una sucesión infinita. Para cada $t \in T$ denotamos $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x = b_t\}$. Para todo $r \in \mathbb{N}$ tenemos $\mu_r > 0$, i.e., $x^r \notin H_{t_r}$, entonces el vector x^{r+1} está en dirección del vector a_{t_r} comenzando en el punto x^r . La distancia entre los dos puntos es $\lambda \varepsilon_r$.

Por hipótesis existe $z \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ tal que la bola abierta $B_\delta(z)$ de centro z y de radio δ cumple con la siguiente condición:

$$B_\delta(z) \subset F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_{t_r} x \geq b_{t_r}\}, \quad r = 1, 2, \dots$$

y además $\rho_{t_r} := d(z, H_{t_r}) \geq \delta$.

Por construcción, la recta determinada por x^r y x^{r+1} es ortogonal a H_{t_r} . Sea h_r la distancia desde z hacia la recta. Consideremos la envoltura afín de $\{x^r, x^{r+1}, z\}$. Elegimos un sistema de coordenadas en este hiperplano, con eje de las abscisas, la recta a través de los puntos x^r y x^{r+1} , con esa orientación, y con eje de las ordenadas, la mediatriz del segmento $[x^r, x^{r+1}]$, orientada tal que z pertenece al primer cuadrante (véase Figura 3.1). Con esta orientación, las coordenadas de los puntos x^r , x^{r+1}

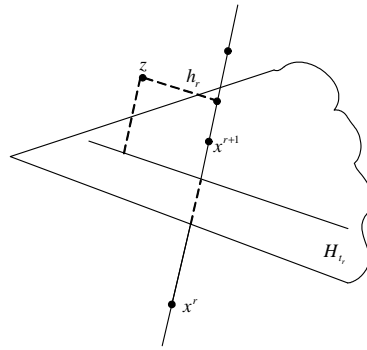


Figura 3.1: Orientación del esquema de construcción.

y z son $(-\varepsilon_r, 0)$, $((\lambda - 1)\varepsilon_r, 0) = (\xi\varepsilon_r, 0)$, donde $\xi \in (-1, 1]$, y (ρ_{t_r}, h_r) ,

respectivamente, con $h_r \geq 0$ (para el caso en donde la dimensión de la envoltura afín es 1 y $h_r = 0$ es trivial). Entonces

$$\begin{aligned} \|x^r - z\|^2 - \|x^{r+1} - z\|^2 &= [(\rho_{t_r} + \varepsilon_r)^2 + h_r^2] - [(\rho_{t_r} - \xi\varepsilon_r)^2 + h_r^2] \\ &= (1 - \xi^2)\varepsilon_r^2 + 2(1 + \xi)\rho_{t_r}\varepsilon_r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $r \in \mathbb{N}$, tenemos

$$0 \leq \|x^{r+1} - z\|^2 = \|x^r - z\|^2 - (1 - \xi^2)\varepsilon_r^2 - 2(1 + \xi)\rho_{t_r}\varepsilon_r,$$

puesto que $-\rho_{t_r} \leq -\delta$, tenemos

$$0 \leq \|x^{r+1} - z\|^2 \leq \|x^r - z\|^2 - (1 - \xi^2)\varepsilon_r^2 - 2(1 + \xi)\delta\varepsilon_r.$$

Así que, podemos considerar en las relaciones anteriores los primeros $r - 1$ términos, es decir, para $k = 0, \dots, r - 1$, tenemos

$$\|x^{k+1} - z\|^2 \leq \|x^k - z\|^2 - (1 - \xi^2)\varepsilon_r^2 - 2(1 + \xi)\delta\varepsilon_r.$$

Si sumamos, respetando el orden en las desigualdades anteriores, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{r-1} \|x^{k+1} - z\|^2 \leq \sum_{k=0}^{r-1} (\|x^k - z\|^2 - (1 - \xi^2)\varepsilon_r^2 - 2(1 + \xi)\delta\varepsilon_r),$$

así que,

$$\begin{aligned} \|x^r - z\|^2 + \sum_{k=1}^{r-1} \|x^k - z\|^2 &\leq \|x^0 - z\|^2 + \sum_{k=1}^{r-1} \|x^k - z\|^2 - \\ &\quad - (1 - \xi^2) \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_r^2 - 2(1 + \xi)\delta \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k, \end{aligned}$$

Después de eliminar términos comunes se tiene,

$$0 \leq \|x^r - z\|^2 \leq \|x^0 - z\|^2 - (1 - \xi^2) \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_r^2 - 2(1 + \xi)\delta \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k,$$

de donde,

$$2(1 + \xi)\delta \sum_{k=0}^{r-1} \delta\varepsilon_k \leq (1 - \xi^2) \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_r^2 + 2(1 + \xi)\delta \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k \leq \|x^0 - z\|^2.$$

Así que,

$$\sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k \leq \frac{1}{4\delta} \|x^0 - z\|^2.$$

Consideramos la sucesión $\eta_{r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k$, y definimos $K = \frac{1}{2\lambda\delta} \|x^0 - z\|^2$. Puesto que, para todo $r \in \mathbb{N}$ tenemos $\eta_{r-1} \geq 0$, entonces $0 \leq \lim_r \eta_r \leq K$, i.e., la sucesión $\{\eta_r\}$ está acotada y es creciente, por lo tanto la sucesión converge. Además, $\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r$ también converge (y $\lim_r \varepsilon_r = 0$).

Dado que en el Paso 4 del algoritmo de relajación, se ha elegido ε_r tal que $0 < \frac{\mu_r}{M} < \varepsilon_r$, i.e., $0 < \mu_r < \varepsilon_r M$, tenemos $\lim_r \mu_r = 0$.

Nuevamente del Paso 4 tenemos

$$\|x^r - x^{r+1}\| = \lambda \varepsilon_r,$$

entonces la serie, $\sum_{r=0}^{\infty} \|x^r - x^{r+1}\|$, converge, por lo que $\sum_{r=0}^{\infty} (x^r - x^{r+1})$ es absolutamente convergente (véase Th. 26.7 [3]), y, $\lim_r x^r = \hat{x}$, para algún $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Finalmente, mostraremos que $\hat{x} \in F$. Para algún $t \in T$, y para todo $r \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\frac{b_t - a'_t x^r}{\|a'_t\|} \leq \begin{cases} \mu_r, & t \in T_r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tomando límites en la relación anterior cuando $r \rightarrow \infty$, para todo $t \in T$, obtenemos $\frac{b_t - a'_t \hat{x}}{\|a'_t\|} \leq 0$, lo que prueba que $\hat{x} \in F$. \square

Observación 4. Mencionamos que la demostración geométrica del teorema previo requiere que se cumpla la condición de dimensión completa para el conjunto factible ($\delta > 0$).

3.2. Razón de convergencia de los algoritmos

En esta sección demostramos bajo la hipótesis de que $\lambda \in (0, 2)$, que la razón de convergencia del algoritmo del MRE es lineal. Antes de

establecer este hecho, en el Teorema 34, es necesario presentar varios enunciados previos y un lema.

Consideremos la sucesión $\{x^r\}$ que genera el algoritmo de RE descrito en la sección anterior. Para investigar la razón de convergencia del MR, junto con las condiciones que aseguran la validez del Teorema 30, supondremos algunas condiciones acerca de los datos a_t y b_t en el resto del trabajo. Sean, pues,

$$\inf\{\|a_t\| : t \in T\} = B \geq 0 \text{ y } \sup\{\|a_t\| : t \in T\} = N \leq \infty,$$

respectivamente.

Puesto que los puntos x^r , para $r = 0, 1, 2, \dots$ no son factibles, no es difícil verificar la validez del siguiente lema:

Lema 31 *Podemos sustituir, para cualquier $r \in \mathbb{N}$, T_r por T en $\mu_r = \sup\left\{\frac{b_t - a'_t x^r}{\|a_t\|}, t \in T_r\right\}$ (véase (3.1)).*

Con el fin de presentar la rapidez de convergencia del algoritmo de relajación extendido, presentamos dos lemas: el Lema 32, demostrado por Agmon ([1]) y, posteriormente, el Lema 33, cuyo enunciado y demostración es análoga al Lema 1 que se presenta en [32].

Lema 32 *Sea $\lambda \in [0, 2]$ y x, y dos puntos en \mathbb{R}^n separados por el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = b\}$, tal que $a'x < b$ y $a'y \geq b$. Entonces*

$$\|x + \lambda(\hat{x} - x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \lambda(2 - \lambda)\|\hat{x} - x\|^2, \quad (3.2)$$

donde \hat{x} es la proyección ortogonal de x sobre H . La igualdad se tiene si $\lambda = 0$, o bien si $\lambda = 2$ y $y \in H$.

Lema 33 *Si $\text{int } F \neq \emptyset$, $N < \infty$ y $B > 0$, entonces existe una constante $0 < \gamma < 1$, tal que, para todo $r = 0, 1, 2, \dots$, tenemos $\mu_r \geq \gamma d(x^r, F)$.*

Demostración. Supongamos, temporalmente, que $0_n \in \text{int } F$. Por lo que, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset F$. Lo que implica que $d(0_n, H_t) \geq \delta$

para cualquier $t \in T$, i.e., $-b_t/\|a_t\| \geq \delta$ para todo $t \in T$. Por lo tanto, existe $\alpha > 0$ tal que para toda $t \in T$ se satisface la condición

$$-b_t \geq \delta B = \alpha. \quad (3.3)$$

Fijemos $x^r \in \{x^k\}$ y sea y^r el punto en F tal que $\|x^r - y^r\| = d(x^r, F)$ (el punto más cercano de F hacia x^r). Es bien conocido que la desigualdad $(y^r - x^r)'z \geq (y^r - x^r)'y^r$ es una consecuencia del sistema (1.1). De modo que, por el Lema de Farkas,

$$\begin{pmatrix} y^r - x^r \\ (y^r - x^r)'y^r \end{pmatrix} \in \text{cl cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces, para ciertas sucesiones $\{\lambda_r^j\} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\{(\lambda_r^j)_0\} \subset \mathbb{R}_+$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} y^r - x^r \\ (y^r - x^r)'y^r \end{pmatrix} = \lim_j \left\{ \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + (\lambda_r^j)_0 \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por esta razón tenemos que

$$y^r - x^r = \lim_j \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t a_t, \quad (3.4)$$

y también

$$(y^r - x^r)'y^r = \lim_j \left(\sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t b_t - (\lambda_r^j)_0 \right). \quad (3.5)$$

Por lo que,

$$\lim_j \left(\sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t a_t' y^r \right) - \lim_j \left(\sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t b_t - (\lambda_r^j)_0 \right) = 0.$$

Como $(\lambda_r^j)_t \geq 0$ y $a_t' y^r - b_t \geq 0$, para todo $t \in T$, tenemos

$$\lim_j (\lambda_r^j)_0 = 0, \quad (3.6)$$

luego

$$\lim_j \left(\sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t (a_t' y^r - b_t) \right) = 0. \quad (3.7)$$

Sabemos que $x^r \rightarrow \bar{x}$ y que $\|y^r - x^r\| \rightarrow 0$, por lo que $L = \sup\{\|y^r\| : r = 0, 1, \dots\} < +\infty$. De (3.3) tenemos que, para todo $j = 0, 1, 2, \dots$,

$$\sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t \alpha \leq -\sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t b_t.$$

Entonces

$$\alpha \limsup_j \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t \leq -\liminf_j \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t b_t, \quad (3.8)$$

Pero por (3.6) y (3.5), tenemos

$$-\lim_j \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t b_t = (x^r - y^r)' y^r. \quad (3.9)$$

Así que, por (3.8) y (3.9), tenemos

$$\limsup_j \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t \leq \alpha^{-1} L \|x^r - y^r\|. \quad (3.10)$$

Por otro lado, a partir de (3.4), (3.7), (3.10) y del Lema 31, obtenemos

$$\begin{aligned} \|y^r - x^r\|^2 &= \lim_j \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t a'_t (y^r - x^r) \\ &= \lim_j \left(\sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t (a'_t y^r - b_t) + \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t (b_t - a'_t x^r) \right) \\ &\leq \left(\limsup_j \sum_{t \in T} (\lambda_r^j)_t \right) \mu_r \|a_t\| \\ &\leq \alpha^{-1} L \|x^r - y^r\| \mu_r \|a_t\| \\ &\leq \alpha^{-1} L N \|x^r - y^r\| \mu_r. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\alpha}{LN} \|x^r - y^r\| \leq \mu_r.$$

Tenemos, además, la relación

$$\frac{\alpha}{(L+1)(N+1+\delta)} < \frac{\alpha}{LN}.$$

Si definimos $\gamma = \frac{\alpha}{(L+1)(N+1+\alpha)}$, podemos observar que $\gamma \in (0, 1)$. Además, para todo $r = 0, 1, \dots$, tenemos

$$\gamma \|x^r - y^r\| \leq \mu_r.$$

Recordemos que las relaciones anteriores se obtuvieron bajo el supuesto $0_n \in \text{int } F$.

Resta demostrar el enunciado del teorema, excluyendo el caso anterior. Supongamos, pues, que z está en el interior de F . Definamos $F_z := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t x \geq b_t - a'_t z, t \in T\}$, y $\mu_r(x, z) := \sup \left\{ \frac{b_t - a'_t x - a'_t z}{\|a_t\|}, t \in T_r \right\}$.

Bajo estas consideraciones; como el origen está en el interior de F_z , podemos probar que para todo $r = 0, 1, 2, \dots$, tenemos que $\mu_r(x^r - z, z) \geq \gamma d(x^r - z, F_z)$. Finalmente, puesto que $\mu_r = \mu_r(x^r - z, z)$ y además $d(x^r, F) = d(x^r - z, F_z)$, obtenemos el resultado deseado. \square

Podemos mencionar que las constantes δ , N , B y L dependen únicamente de los valores nominales en los datos y del punto inicial de algoritmo.

El siguiente teorema provee una cota que nos permite establecer, en el algoritmo de relajación extendido, la rapidez de convergencia lineal.

Teorema 34 *Sea $\lambda \in (0, 2)$. Si $\text{int } F \neq \emptyset$, $N < \infty$ y $B > 0$, entonces existen $M > 2$, $0 < \theta < 1$ y $\bar{x} \in F$ tales que $\bar{x} = \lim_r x^r$ y, para todo r suficientemente grande, tenemos $\|x^r - \bar{x}\| \leq \theta^r \|x^0 - \bar{x}\|$.*

Demostración. De la definición de ε_r , tenemos $\varepsilon_r = \|x^r - x^{r'}\|$, donde $x^{r'}$ es la proyección ortogonal de x^r sobre el hiperplano H_{t_r} . Sabemos que para cada $r = 0, 1, \dots$, se cumple

$$\varepsilon_r > \frac{\mu_r}{M}. \quad (3.11)$$

Sustituyamos x por x^r e y por y^r en (3.11). A partir de los Lemas 32 y 33 y de la validez de la desigualdad $\|x^{r+1} - y^{r+1}\|^2 \leq \|x^{r+1} - y^r\|^2$,

obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
 \|x^{r+1} - y^{r+1}\|^2 &\leq \|x^{r+1} - y^r\|^2 \leq \|x^r - y^r\|^2 - \lambda(2 - \lambda) \|x^r - x^r\|^2 \\
 &= \|x^r - y^r\|^2 - \lambda(2 - \lambda) \varepsilon_r^2 \\
 &\leq \|x^r - y^r\|^2 - \frac{\lambda(2 - \lambda) \mu_r^2}{M^2} \\
 &\leq \|x^r - y^r\|^2 - \frac{\lambda(2 - \lambda) \gamma^2}{M^2} \|x^r - y^r\|^2 \\
 &= \|x^r - y^r\|^2 (1 - \lambda(2 - \lambda) \gamma^2 M^{-2}). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Si hacemos $0 < \nu = (1 - \lambda(2 - \lambda) \gamma^2 M^{-2})^{\frac{1}{2}} < 1$ (eligiendo M suficientemente grande) y aplicando (3.12) repetidamente, tenemos

$$\|x^{r+1} - y^{r+1}\| \leq \nu^{r+1} \|x^0 - y^0\|.$$

Por lo que \bar{x} y x^r están en la bola $B_{\|x^r - y^r\|}(y^r)$ para cada $r = 0, 1, 2, \dots$. Finalmente podemos observar que

$$\frac{1}{2} \|x^{r+1} - \bar{x}\| \leq \|x^{r+1} - y^{r+1}\| \leq \nu^{r+1} \|x^0 - y^0\| \leq \nu^{r+1} \|x^0 - \bar{x}\|.$$

Lo que prueba el teorema para cualquier $\nu < \theta < 1$. \square

3.3. Experiencia computacional

Antes de presentar la experiencia computacional, discutiremos la disponibilidad de las constantes incluidas en el algoritmo. Obviamente, las constantes B y N se pueden omitir a partir de los datos. Utilizando la herramienta descrita en el Lema 1, en [6], podemos estimar la distancia $\|x^0 - y^0\|$. Tomando en cuenta que las sucesiones $\{x^r\}$, $\{y^r\} \subset B_{\|x^0 - y^0\|}(y^0)$, obtenemos para cada $r = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}
 \|y^r\| &= \|y^r + x^0 - y^0 - x^0 + y^0\| \leq \|y^r - y^0\| + \|x^0\| + \|x^0 - y^0\| \leq \\
 &\leq \|x^0\| + 2\|x^0 - y^0\|.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L \leq \|x^0\| + 2\|x^0 - y^0\|$. La dificultad que consiste en determinar la constante δ . Basándonos en los datos nominales, la ecuación dimensional de Zhu, que establece que $\text{lin}(\text{cl}(K)) = \{\emptyset\}$ implica $\delta > 0$, donde K es el cono característico del SLSI σ . Para hallar una aproximación de δ , podemos, eventualmente, utilizar las técnicas que se presentan en [36] y [4].

3.3.1. Ejemplos de prueba

Probamos el algoritmo de relajación extendido con algunos problemas que se encuentran dentro de la literatura.

En el Paso 2 del MRE, el extremo de la función g , se calculó mediante el uso del toolbox de optimización de MATLAB. Para todos los cálculos, utilizamos una precisión de 10E-8.

La implementación del MRE puede resolver SLSI que satisfacen los requerimientos de dicho algoritmo, y donde T es una unión de intervalos acotados. La implementación se compara con la de Zhu, llamado **Met1**. En las tablas de resultados los tiempos que se presentan están dados en segundos.

Ejemplo 15 $n = 2$, $T = [0, 1.5\pi]$ y

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1(t)x_1 + a_2(t)x_2 \geq b_t, t \in T\}.$$

donde

$$a_1(t) = 0.05(t - 1.5\pi) \cos t,$$

$$a_2(t) = 0.025(t - 1.5\pi) \text{sen } t$$

y

$$b_t = 0.05(t - 1.5\pi)(0.7 + 0.05(t - 1.5\pi) \cos t) \cos t + \\ 0.025(t - 1.5\pi)(0.8 + 0.025(t - 1.5\pi) \text{sen } t) \text{sen } t.$$

La Figura 3.2 ilustra la representación del conjunto factible del sistema lineal.

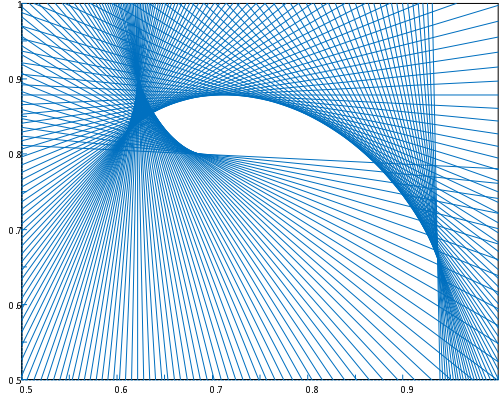


Figura 3.2: Conjunto factible del Ejemplo 15.

A partir del punto inicial $(16.294474, 18.115839)'$ construimos la Tabla 3.1.

Ejemplo 16 Considérese el conjunto convexo F , definido por $F = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2)^2 \geq \kappa^2(x_1^2 - x_2^2); 0 \leq x_1 \leq \kappa, x_2 \geq 0\}$ (véase la Figura 3.3) y consideremos su representación lineal σ , dada por

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{l} a_t^1 x_1 + a_t^2 x_2 \geq b_t : t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ -\frac{1}{t} x_1 + x_2 \geq 0 : t \in [1, +\infty[\end{array} \right\},$$

donde,

$$a_t^1 := -\kappa \cos 3t,$$

$$a_t^2 := -\kappa \sin 3t,$$

$$b_t := -\kappa^2(\cos 3t \cos t \sqrt{\cos 2t} + \sin 3t \sin t \sqrt{\cos 2t}).$$

El conjunto F depende del parámetro κ . Al cual elegimos este como $\kappa = 2$. Como punto inicial consideramos $x^0 = (-1564.979244, 2189.253881)'$, se presentan en la Tabla 3.2.

λ	ite	x^r	tiempo	Met1
0.1	-	-	-	-
0.3	-	-	-	-
0.5	60	(0.682542, 0.875143)'	0.322716	-
0.7	37	(0.679089, 0.874291)'	0.172399	-
0.9	21	(0.669295, 0.871305)'	0.137749	-
1	9	(0.916033, 0.611698)'	0.183576	$\begin{pmatrix} 0.852030 \\ 0.850555 \end{pmatrix}$ 10 iteraciones tiempo 0.273640
1.1	11	(0.923490, 0.680445)'	0.189879	-
1.2	7	(0.739753, 0.773414)'	0.173540	-
1.3	6	(0.883337, 0.767611)'	0.164000	-
1.4	8	(0.747916, 0.764285)'	0.166814	-
1.5	10	(0.898926, 0.703865)'	0.175533	-
2	85	(0.811758, 0.731137)'	0.430609	-

Tabla 3.1: Resultados del Ejemplo 15.

Ejemplo 17 Consideramos la representación lineal de la elipse, $F = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 \leq 0\}$ (Figura 3.4) dada por

$$\sigma = \{(-t^4 - 2t^3 + 3t^2 + 2t - 1)x_1 - 2t(t^2 - 1)x_2 \geq -2t^2 : t \in [-1, 1]\},$$

(véase [10]). Con el punto inicial, $x^0 = (3.423734, 14.120922)'$, la implementación del algoritmo de relajación proporciona que se resumen en la Tabla 3.3. Nota: Con el valor del parámetro de relajación $\lambda = 0.1$, la ejecución excede el número de iteraciones permitidas y termina sin encontrar una solución factible..

Ejemplo 18 Para $n = 2$, consideramos el sistema $\sigma = \{-te^t x_1 - tx_2 \geq -1 : t \in [0, 1]\}$, (véase [12], [13]). En este ejemplo, para $t = 0$ y $a_0 = 0_2$, no se cumplen las condiciones requeridas al inicio de esta sección. El

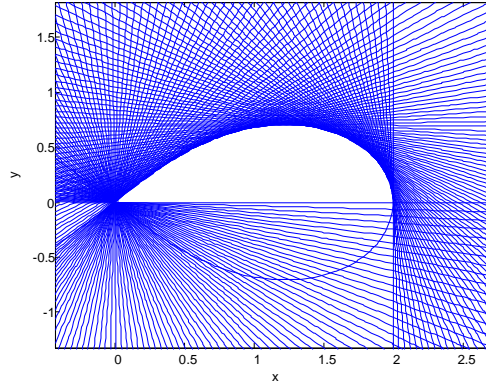


Figura 3.3: Conjunto factible del Ejemplo 16.

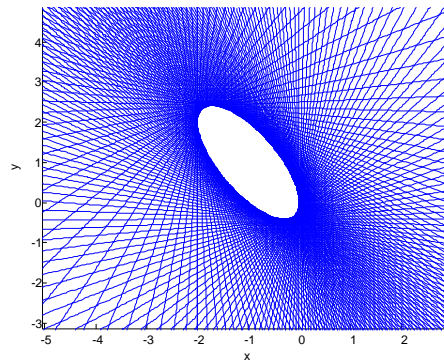


Figura 3.4: Conjunto factible del Ejemplo 17.

conjunto factible de σ se muestra en la Figura 3.5.

Utilizando el punto inicial $x^0 = (12.353328, 17.188846)'$, se reportan en la Tabla 3.4. Análogo al Ejemplo 17, para algunos valores del parámetro λ , en particular si $\lambda = 0.1, 0.3, 0.7$, el algoritmo excede el número de iteraciones permitidas y termina sin encontrar una solución factible.

λ	ite	x^r	tiempo	Met1
0.1	166	(0.518010, 0.457482)'	3.299209	-
0.3	45	(0.521757, 0.461178)'	0.907875	-
0.5	24	(0.525769, 0.463274)'	0.344226	-
0.7	40	(0.541355, 0.477132)'	0.616709	-
0.9	9	(0.521048, 0.435851)'	0.171032	-
1	15	(0.500966, 0.407736)'	0.244491	$\begin{pmatrix} 0.489203 \\ -0.000555 \end{pmatrix}$ 9 iteraciones tiempo 0.243640
1.1	6	(1.370079, 0.691802)'	0.21223	-
1.2	5	(1.654249, 0.515506)'	0.210532	-
1.3	13	(0.092467, 0.453677)'	0.232813	-
1.4	8	(1.403643, 0.193099)'	0.177691	-
1.5	11	(0.648873, 0.474474)'	0.214937	-
2	190	(0.393985, 0.348462)'	2.543993	-

Tabla 3.2: Resultados del Ejemplo 16.

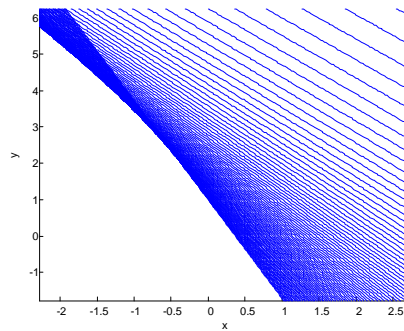


Figura 3.5: Conjunto factible del Ejemplo 18.

λ	ite	x^r	tiempo	Met1
0.1	-	-	-	-
0.3	110	$(-1.828697, 2.388394)'$	0.373614	-
0.5	59	$(-1.827002, 2.39201)'$	0.260062	-
0.7	38	$(-1.824438, 2.390390)'$	0.210664	-
0.9	20	$(-1.794767, 2.401682)'$	0.170799	-
1	9	$(-1.866903, 2.365380)'$	0.160697	$\begin{pmatrix} -1.786691 \\ 2.404038 \end{pmatrix}$ 21 iteraciones tiempo 0.52457
1.1	6	$(-1.446675, 2.336987)'$	0.154376	-
1.2	8	$(-1.703044, 2.398714)'$	0.157070	-
1.3	4	$(-0.947604, 1.420896)'$	0.144437	-
1.4	5	$(-1.724665, 2.341615)'$	0.145378	-
1.5	6	$(-1.722008, 2.319358)'$	0.166303	-
2	12	$(-1.686474, 1.201378)'$	0.168417	-

Tabla 3.3: Resultados del Ejemplo 17.

λ	ite	x^r	tiempo	Met1
0.1	-	-	-	-
0.3	-	-	-	-
0.5	60	$(-5.269856, 10.330953)'$	0.256530	-
0.7	-	-	-	-
0.9	21	$(-6.046282, 11.435680)'$	0.161449	-
1	8	$(-5.333119, 10.421842)'$	0.152627	$\begin{pmatrix} -5.302414 \\ 10.3777750 \end{pmatrix}$ 16 iteraciones tiempo 0.356543
1.1	3	$(-5.500799, 10.644656)'$	0.148727	-
1.2	2	$(-6.985222, 10.145139)'$	0.146326	-
1.3	2	$(-8.596768, 9.558163)'$	0.147526	-
1.4	2	$(-10.208314, 8.971188)$	0.146005	-
1.5	2	$(-11.819860, 8.384212)'$	0.144419	-
2	2	$(-19.877589, 5.449334)'$	0.148837	-

Tabla 3.4: Resultados del Ejemplo 18.

Conclusiones

Esta tesis ha tenido dos objetivos principales: contribuir a la teoría del análisis convexo con nuevos resultados acerca de las representaciones de Motzkin, y contribuir al campo de la teoría de los sistemas lineales semi-infinitos mediante la aportación de nuevos métodos para resolver el problema de factibilidad.

Primero, desarrollamos nuevas caracterizaciones de conjuntos cerrados mediante la ayuda de representaciones lineales. Para este fin, hemos generalizado el teorema de Fourier, resultado que aparece en el estudio de las representaciones del conjunto imagen de las aplicaciones lineales sobre representaciones lineales de un conjunto cerrado y convexo. Posteriormente, nos adentramos al análisis de las representaciones cónicas, caracterizando éstas junto con los conos convexos.

Más adelante, nos enfocamos en el estudio de las representaciones de Motzkin. Introducimos las propiedades de los conjuntos M-representables junto con las caracterizaciones de éstos y enunciamos el Teorema de representación de Motzkin en su versión para conjuntos cerrados y convexos.

El estudio de las representaciones de Motzkin ha sido motivo de trabajos posteriores, véase Goberna y otros [20], en donde se analiza la estabilidad de las representaciones de Motzkin de conjuntos convexos cerrados, y el estudio de conjuntos M-representables y funciones

M-representables (véase [21]). Trabajos que continúan principalmente dirigidos a la teoría de la programación multiobjetivo.

Por otro lado, se ha propuesto el método de relajación extendido, aplicable a sistemas lineales semi-infinitos el cual genera una clase de métodos debido a la flexibilidad que proporciona el parámetro de relajación y que permite, para cada valor de éste, considerar un método diferente aplicable al problema de factibilidad.

Esto nos permitió observar una convergencia más rápida para valores del parámetro de relajación en el intervalo $(0,1)$. Motivo que nos dirigió al estudio de la tasa de convergencia. Así, hemos probado que la tasa de convergencia de esta clase de métodos es lineal.

Hemos elegido el algoritmo de relajación, como una presentación de los algoritmos aplicables al problema de factibilidad de representaciones lineales de conjuntos convexos y cerrados, por su versatilidad de codificación computacional. Hemos probado que la rapidez de convergencia es lineal, sin embargo, en base a la experiencia computacional realizada en variados problemas de prueba (que no se reportan aquí), consideramos como trabajo futuro, dirigir la investigación hacia el estudio de la razón de convergencia, esto en base a las ideas que propone Agmon en [1]. Un punto que se debe considerar para una futura investigación, es el rol que desempeñan los parámetros M , B y N junto con el estudio de la manera en cómo se obtiene el valor óptimo global en el Paso 4 del algoritmo, pues, en la experiencia computacional se ha notado una clara influencia de éste, sobre el número de iteraciones que son necesarias para hallar la solución del sistema. Existen, además, otros métodos válidos para sistemas ordinarios, que podrían extenderse hacia el campo de los sistemas lineales semi-infinitos, como lo son los métodos que se reportan en la literatura (véase [44]).

Símbolos y Abreviaturas

\mathbb{R}_+	el conjunto de números reales no negativos
\mathbb{R}^n	espacio Euclídeo de dimensión n
$\text{supp } \lambda$	el conjunto de soporte de $\lambda \in X^T$
$\mathbb{R}^{(T)}$	el espacio de funciones de sucesiones finitas generalizadas
$\mathbb{R}_+^{(T)}$	el cono convexo en $\mathbb{R}^{(T)}$ de las sucesiones finitas no negativas
X^\perp	subespacio ortogonal de $X \neq \emptyset$
$0^+ X$	cono de recesión del conjunto convexo X
$D(X, x)$	cono de direcciones factibles en $x \in X$
X°	cono polar positivo del conjunto convexo X
x	Vector columna con i -ésima componente x_i
$x'y$	Producto escalar de vectores x e y
$\ x\ $	Norma euclídea (o L_2) de $x \in \mathbb{R}^n$
$ x $	Valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$
0_n	Vector de ceros en \mathbb{R}^n
$\text{span } X$	Envoltura lineal de X
$\text{aff } X$	Envoltura afín de X
$\text{conv } X$	Envoltura convexa de X
$\text{cone } X$	Envoltura convexa de X
$\text{lin } X$	Espacio de linealidad de X
$\text{int } X$	Interior de X

$\text{cl } X$	Clausura de X
$\text{bd } X$	Frontera de X
$\text{rint } X$	Interior relativo de X
$\text{rbd} X$	Frontera relativa de X
$\text{dim } X$	Dimensión del convexo X
$\text{inf } X$	Máxima cota inferior de $X \subset \mathbb{R}^n$
$\text{lím}_r x_r$	Límite de la sucesión $\{x_r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$
σ	Sistema de inecuaciones lineales en \mathbb{R}^n , $\{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$
F	Conjunto solución de σ
$\text{supp } \lambda$	Conjunto de soporte de $\lambda \in \mathbb{R}^T$, es decir, $\{t \in T \mid \lambda_t \neq 0\}$
$\mathbb{R}^{(T)}$	Espacio de funciones $\lambda \in \mathbb{R}^T$ tal que $ \text{supp } \lambda < \infty$
$T(x)$	Conjunto de índices activos en $x \in F$
$A(x)$	Cono de restricciones activos en $x \in F$
$\mathbb{B}(X)$	Cono barrera de X
M	Primer cono de momentos de σ : $\text{cone}\{a_t, t \in T\}$
N	Segundo cono de momentos de σ : $\text{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T\right\}$
K	Cono característico de σ : $\text{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$
$\ x\ _\infty (B_\infty)$	Norma de Tchebyshev del vector x (su bola unitaria)
0_T	Vector cero en \mathbb{R}^T
∂f	subdiferencial de f
∇f	gradiente de f
f^*	conjugado de f
δ_X	función indicadora de X
δ_X^*	función de soporte de X
K^\leq	cono dual débil del conjunto convexo F
SLSI	Sistema lineal semi-infinito
PLSI	Programación Lineal semi-infinita

Apéndice A

Código de MATLAB

```
1 clc;
2 clear;
3 %tic();
4 prompt1 = {'VARIABLES NUMBER= :','INTERVALS NUMBER = ...
            ','INITAL POINT = ',...
5            'TOLERANCE =','MAX. NUMBER OF ITERATIONS','UPPER OR UNDER ...
            RELAXATION?'};
6 title1 = ' LINEAR SEMI-INFINITE SYSTEMS (EXTENDED RELAXATION ...
            METHOD)';
7 lines1= 1;
8 def1 = {'2','1','[ ...
            -5.209715707515,-42.624321859986]','0.000000000001',...
9            '1500',' 1.496303 '};
10 answer1 = inputdlg(prompt1,title1,lines1,def1,'on');
11 if isempty(answer1) == 1
12     msgbox('I NEED VALUES FOR ARGUMENTS, PLEASE PRESS ...
            OK...','MENSAJE',...
13            'error')
14     break
15 end
```

```

16 dimension1 = double(sym(answer1{1}));
17 Nintervalos = double(sym(answer1{2}));
18 xr = double(sym(answer1{3}));
19 %xr = 10*rand(1,2)-10*rand(1,2);
20 xr = [34.3687722572 82.066698237677];
21 tol = double(sym(answer1{4}));
22 ite = double(sym(answer1{5}));
23 lamb = double(sym(answer1{6}));
24 %lamb = 2*rand(1);
25 if length(xr) ~= dimension1 || lamb == 0
26 msgbox(' VARIABLES NUMBER = THE LENGTH OF THE INITIAL POINT ...
        IS NECESSARY',...
27 'Mensaje','error')
28 break
29 end
30 T(Nintervalos).t = 0;
31 a(Nintervalos).t = 0;
32 g(Nintervalos).xt = 0;
33 g(Nintervalos).xtnorm = 0;
34 for i=1:Nintervalos
35     prompt0 = {'INDEXES SETS T:',...
36               'VECTOR a(t):',...
37               'MARGINAL FUNCTION g(x,t):'};
38     title0=
39     ' LINEAR SEMI-INFINITE SYSTEMS  a'(t)x>=b(t),t\in T ...
        \cup...\cup S';
40     lines0= 5;
41     def0 = {'[-pi,pi]','@(t) [2*t,-(3*t^2-3)]'...
42 , '@(x,t) 2*t*x(1)-(3*t^2-3)*x(2)+.2*(t^4+3)'};
43     answer0 = inputdlg(prompt0,title0,lines0,def0,'on');
44     if isempty(answer0)==1
45         msgbox('INITIAL DATA IS ...
46               NEEDED','MENSAJE','ERROR')
47         break
48     end
49     T(i).t = double(sym(answer0{1}));%
        a(i).t = str2func(answer0{2});

```

```

50         g(i).xt = str2func(answer0{3});
51         g(i).xtnorm=@(x,t)(g(i).xt(x,t))/(-norm(a(i).t(t)));
52         if length(xr) ~= length(a(i).t(0))
53     msgbox('LENGTHS OF INITIAL POINT AND THE VECTOR, a(t), DO ...
           NOT AGREE',...
54         'Mensaje','error')
55         break
56         end
57     end
58     bnd = 0.00001;
59     tic();
60     topt(Nintervalos) = 0;
61     topt2(Nintervalos) = 0;
62     gtopt(Nintervalos) = inf;
63     epsopt(Nintervalos) = -inf;
64     %ite=2000;
65     x(ite).set = zeros(1,dimension1);
66     r = 1;
67     x(1).set = xr;
68     %hold on
69     %t = sym('t');
70     flag = 0;
71     conv(ite+1) = 0;
72     indext(ite+1) = 0;
73     beta = 1e-4;
74     M = 10000000000;
75     %for lambda = 0.1 M should be above 1000000
76     %    lambda = 0.5 M          10000000
77
78     fprintf(' BE PATIENT, THE PROGRAM IS WORKING...\n\n');
79     while r <= ite
80         for i = 1:Nintervalos
81             if T(i).t(1) == T(i).t(2)
82                 topt(i) = T(i).t(1);
83                 gtopt(i) = g(i).xt(T(i).t(1));
84             else
85                 %options = optimset('PlotFcns',@optimplotfval);

```

```

86         %without M value, we have error=1e-12
87         options1 = optimset('TolX',1.e-12,'Display','off');
88         [topt(i),gtopt(i)] = fminbnd(@(t)g(i).xt(xr,t),...
89             T(i).t(1)-bnd,T(i).t(2)+bnd, options1);
90
91         indext(r) = topt(i);
92     end
93 end
94 [gt,idxgtsr] = min(gtopt);
95 if gt >= -tol
96     flag = 1;
97     msgbox...
98     ('THE EXTENDED RELAXATION PROGRAM HAS BEEN FOUNDED A ...
99     SOLUTION',...
100     'MESSAGE','help')
101     fprintf('  INITIAL POINT WAS x0= \n\n');
102     for i = 1:length(x(1).set)
103         fprintf('          %.12f \n\n', x(1).set(i));
104     end
105     fprintf('  AND THE FINAL APROXIMATION IS x= \n\n');
106     for i = 1:length(x(r).set)
107         fprintf('          %.12f \n\n', x(r).set(i));
108     end
109     fprintf('  WHICH IS A FEASIBLE SOLUTION.\n\n');
110     fprintf(' THE NUMBER OF ITERATIONS WAS %.0f .\n\n',r);
111     fprintf(' WITH A TOLERANCE OF:  %.6f \n\n',tol);
112     fprintf(' LAMBDA VALUE:  %.6f \n\n',lamb);
113     toc();
114     break
115 else
116     idbeta = 1;
117     %idbeta
118     times = 1;
119     %% times <= 20;
120     while idbeta == 1
121         if times > 200
122             idbeta = 0;

```

```

122         end
123         for i = 1:Nintervalos
124             if T(i).t(1) == T(i).t(2)
125                 topt2(i) = T(i).t(1);
126                 epsopt(i) = g(i).xt(T(i).t(1));
127             else
128                 options2 = ...
129                     optimset('TolX',beta,'MaxIter',500,...
130                             'Display','off');
131                 [topt2(i),epsopt(i)] = ...
132                     fminbnd(@(t)-g(i).xtnorm...
133                             (xr,t),T(i).t(1)-bnd,T(i).t(2)+bnd, ...
134                             options2);
135                 indext(r) = topt2(i);
136             end
137         end
138         [epsr,idxepsr] = min(epsopt);
139         epsr = -epsr;
140
141         if beta <= epsr*(M-1)
142             xr = ...
143                 xr+lamb*(epsr)*(a(idxepsr).t(topt2(idxepsr)))...
144                 /norm(a(idxepsr).t(topt2(idxepsr)));
145             x(r+1).set = xr;
146             idbeta = 0;
147             conv(r) = (sqrt((x(r).set-x(r+1).set)*...
148                             (x(r).set-x(r+1).set)'));
149             plot(r,conv(r),'-rs');
150             hold on;
151             r = r+1;
152         else
153             beta = beta/2;
154         end
155     end
156     times = times+1;
157 end
158 end

```

```

155     if r == ite && flag == 0
156         fprintf('MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS WAS REACHED. ...
                \n\n');
157         fprintf('THE SEQUENCE GENERATED BY THE ALGORITHM\n\n')
158         fprintf('CONVERGES TO A SOLUTION OF THE ...
                SYSTEM%.6f\n\n',conv(r));
159         fprintf('    INITIAL POINT WAS x0= \n\n');
160         for i = 1:length(x(1).set)
161             fprintf('                %.12f \n\n', x(1).set(i));
162         end
163         fprintf('THE FINAL APPROXIMATION IS x= \n\n');
164         for i = 1:length(x(r).set)
165             fprintf('                %.12f \n\n', x(r).set(i));
166         end
167         fprintf(' LAMBDA VALUE:  %.6f \n\n',lamb);
168         toc();
169     end
170 end

```

Bibliografía

- [1] Agmon S., The relaxation method for linear inequalities, *Canadian Journal of Mathematics*, 6 (1954), 382-392.
- [2] Azé D. y Lucchetti R., Stability of supporting and exposing elements of convex sets in Banach spaces, *Serdica Mathematical Journal*, 22 (1996) 307-330.
- [3] Bartle G. R., *The elements of real analysis*, John Wiley & Sons, 1964.
- [4] Berg M., Cheong O., Kreveld M. y Overmars M., *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [5] Borwein J. M. y Lewis A. S., *Convex Analysis and Nonlinear Optimization. Theory and Examples*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [6] Cánovas M. J., Gómez-Senent F. J. y Parra J., Regularity modulus of arbitrarily perturbed linear inequality systems, *J. Math. Anal. Appl.* 343, (2008), 315-327.
- [7] Chu Y. J., Generalizations of some fundamental theorems on linear inequalities, *Acta Math. Sinica*, 16 (1966), 25-40.

- [8] Coope I. D. y Watson G. A., A projected Lagrangian algorithm for semi-infinite programming, *Math. Program.*, 32 (1985), 337–356.
- [9] Fang S-C. y. Wu S-Y., An inexact approach to solving linear semi-infinite programming problems, *Optimization* 28 (1994), 291–299.
- [10] Goberna M. A., López M. A., Mira J. A., y Valls J., On the existence of solutions for linear inequality systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 192 (1995), 133–150.
- [11] Goberna M. A., **González E.**, Martínez-Legaz J. E. y Todorov M. I., Motzkin decomposition of closed convex sets, *J. Math. Anal. Appl.* 364 (2010), 209–221.
- [12] Goberna M. A., Hernández L. y Todorov M. I., On Linear inequality systems with smooth coefficients, *J. Optim. Theory Appl.*, 124, (2005), 363–386.
- [13] Goberna M. A., Hernández L. y Todorov M. I., Separating the solution sets of analytical and polynomial systems. *TOP*, 13, No. 2 (2005), 321–329.
- [14] Goberna M. A., Todorov M. I. y Vera de Serio V., On stable uniqueness in linear semi-infinite optimization,, por aparecer en *J. Global Optim.*, doi:10.1007/s10898-011-9768-0.
- [15] Goberna M. A., Linear semi-infinite optimization: recent advances, *Continuous Optimization: Current trends and modern applications* (A Rubinov and V. Jeyakumar, eds.) Springer Verlag, (2005), 3–22.
- [16] Goberna M. A., Linear semi-infinite optimization: a guide tour, *IM-CA Monographs*, 40 (2005), 1–63.

- [17] Goberna M. A., Linear semi-infinite optimization: recent advances, in: A. Rubinov, V. Jeyakumar (eds.), *Continuous Optimization: Current Trends and Modern Applications*, Springer, NY (2005), 3-22.
- [18] Goberna M. A., Jeyakumar V. y Dinh N., Dual characterizations of set containments with strict inequalities, *J. Global Optim.*, 34 (2006), 33-54.
- [19] Goberna M. A., Jornet V. y Molina M. D., Excess information in parametric linear optimization, *Optimization* 55 (2006), 555-568.
- [20] Goberna M. A., Martínez-Legaz J. E. y Todorov M. I., On Motzkin decomposable sets and functions, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 372, No. 2 (2010), 525-537.
- [21] Goberna M. A., Iusem A., Martínez-Legaz J. E. y Todorov M. I., Motzkin decomposition of closed convex sets via truncation, *J. Math. Anal. Appl.*, en prensa.
- [22] Goberna M. A., Jornet V. y Rodríguez M. M. L., On the characterization of some families of closed convex sets, *Contributions to Algebra and Geometry*, 43 (2002), 153-169.
- [23] Goberna M. A. y López M. A., *Linear Semi-Infinite Optimization*, Wiley, Chichester, 1998.
- [24] Goffin J-L., Lou Z. Q. y Ye Y., On the complexity of a column generation algorithm for convex or quasiconvex feasibility problems, *Large scale optimizations* (Hanger, W. W., Hearn, D. W., and Pardalos, P. M. eds.) (1994), 182-191.
- [25] **González-Gutiérrez E.**, Hernández Rebollar L. y Todorov M. I., Under and over projection methods for solving linear inequality system, *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.* Tome 64 (2011), 785-790.

- [26] **González-Gutiérrez E.**, Hernández Rebollar L. y Todorov M. I., Relaxation methods for solving linear inequality systems: Converging results, por aparecer en *TOP*, (2011) DOI: 10.1007/s11750-011-0234-4.
- [27] **González-Gutiérrez E.**, Hernández Rebollar L. y Todorov M. I., Rate of convergence of a class of numerical methods solving linear inequality systems, por aparecer en *Optimization* (2011), DOI: 10.1080/02331934.2011.611513.
- [28] **González-Gutiérrez E.** y Todorov M. I., A relaxation method for solving systems with infinitely many linear inequalities, por aparecer en *Optim. Lett.*, 6 (2012), 291-298.
- [29] Gwinner J., Results of Farkas type, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 9 (1987), 471–520.
- [30] Gwinner, J. Results of Farkas type, *Corrigendum and addendum*, 10 (1989), 415–418.
- [31] Hiriart-Urruty J. B. y Lemaréchal C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms (I)*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [32] Hu H., A projection method for solving infinite systems of linear inequalities, *Advances in Optimization and Approximation*, Kluwer Academic Publishers (1994), 186-194.
- [33] Jaume D. A. y Puente R., Representability of convex sets by analytical linear inequality systems, *Linear Algebra Appl.*, 380 (2004) 135-150.
- [34] Jeroslow G. R., Some relaxation methods for linear inequalities, *Cahiers du Cero*, Vol. 21 (1979), 43-53.

- [35] Jeyakumar V., Characterizing set containments involving infinite convex constraints and reverse-convex constraints, *SIAM J. Optim.* 13 (2003), 947-959.
- [36] Juhnke F., Embedded maximal ellipsoids and semi-Infinite optimization, *Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry*, Vol. 35, No. 2 (1994), 167-171.
- [37] Lin C-J., Yang E.K. y Fang S-C., Implementation of an inexact approach to solving linear semi-infinite programming problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 61 (1995), 87-103.
- [38] Martínez-Legaz J. E. y Meseguer A., The indirect function of an NTU game, *J. Math. Sci.* 116 (2003), 3253-3265.
- [39] Motzkin T., *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen*, Inaugural Dissertation Basel, Azriel, Jerusalem (1936).
- [40] Nikaidô H., *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York-London, 1968.
- [41] Özçam B.y Cheng H., A discretization based smoothing method for solving semi-infinite variational inequalities, *J. Ind. Manag. Optim.*, 1 (2005) 219-233.
- [42] Richter M. K. y Wong k. C., Infinite inequality systems and cardinal revelations, *Econom. Theory*, 26 (2005) 947-971.
- [43] Rockafellar T. R., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [44] Schrijver A., *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Chichester, 1986.

- [45] Watson G. A., Numerical Experiments with Globally Convergent Methods for Semi-Infinite Programming Problems. *Lecture notes in Economics and Mathematical Systems* No. 215. Springer Verlag, Berlin, (1983), 193–205.