Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Módulos con Submódulos Superfluos Cíclicos en su Cápsula Inyectiva

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Andrea Cordero Medel

Asesorada por

Dr. César Cejudo Castilla

Puebla Pue.
Junio de 2024

Agradecimientos

La culminación de esta tesis ha sido posible gracias al apoyo y la colaboración de muchas personas que me han brindado dedicación, cariño, enseñanzas y conocimientos. Es un privilegio para mí poder expresar mis agradecimientos a todos aquellos que han estado a mi lado durante esta importante etapa de mi vida.

Quiero comenzar expresando un especial agradecimiento a mi profesor y asesor de tesis, el Dr. César Cejudo, por su invaluable guía, apoyo y paciencia a lo largo de este proyecto, muchas veces superando lo que yo consideraba su responsabilidad. Su experiencia y conocimientos no solo han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo, sino que también me han ayudado a crecer como estudiante y persona. Como profesor, me abrió las puertas a esta área que me apasionó desde los inicios de la licenciatura, y me ha permitido descubrirla poco a poco. Como asesor, le agradezco la oportunidad de trabajar bajo su dirección; en muchas ocasiones, su guía y ayuda han tenido un gran impacto en mí.

No podría dejar de mencionar a mi familia, ya que han sido una parte fundamental de lo que soy y de lo que he logrado. A mi mamá Laura, quien ha crecido junto a mí y de quien sé que cuento incondicionalmente con su apoyo y consejos. Le agradezco por preocuparse siempre de que me sienta acompañada, por sus palabras de aliento cada vez que las necesito y por todos sus sacrificios. A mis abuelos Rosario y Jorge, que han hecho todo lo posible por ayudarme, acompañarme y entenderme en cada uno de mis pasos. Les agradezco por las diversas formas en que me muestran lo orgullosos que están de mí y por todas las enseñanzas que me siguen brindando. A mi hermana Diana y a mi tío Jorge, les agradezco por acompañarnos en los desvelos y por recordarme siempre que contaba con su apoyo. Les agradezco a todos, por acompañarme durante toda mi carrera, por acompañarme en mis decisiones y siempre escucharme, aunque no tuvieran una respuesta que ofrecerme.

Quiero agradecer inmensamente a Kevin, en primer lugar, por convencerme de estudiar esta carrera, por ofrecerme su compañía y apoyo en los momentos más complicados, y por estar siempre a mi lado cuando lo necesito. Agradezco profundamente que creas en mí y todas las palabras que me lo recuerdan constantemente y que, en muchas ocasiones, me han salvado. Siempre estaré agradecida por la confianza que me ayudas a tener en mí misma.

A mis compañeros de la facultad, especialmente a Adriana, Karla y Saúl, les agradezco todo lo que hemos compartido y los recuerdos que hemos formado juntos. Gracias por haber hecho la carrera más llevadera y por la amistad que logramos formar.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a los miembros de mi comité de tesis: al Dr. Fernando Vilchis, al M.C. Omar Pérez y al M.C. Luis Pineda, por su tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, así como por su comprensión, sus valiosas sugerencias y su apoyo continuo.

A todos ustedes, gracias.

Introducción

Dualizar es una práctica ampliamente utilizada en álgebra y teoría de módulos para construir nuevos objetos matemáticos a partir de conceptos existentes, modificando sus propiedades de manera sistemática. Esta herramienta nos permite obtener una caracterización más profunda de las estructuras algebraicas, lo que la hace extremadamente útil y beneficiosa para la investigación. En este contexto, recordemos que un módulo singular se define como aquel cuyos elementos son anulados por ciertos elementos del anillo subyacente. De acuerdo a esta definición, el estudio de los módulos singulares ha permitido caracterizar diversas propiedades de anulación en el ámbito del álgebra, además se relaciona estrechamente con conceptos como módulos inyectivos, proyectivos y simples, enriqueciendo la teoría algebraica en diversas direcciones. Además, su análisis siempre puede proporcionar información sobre los ideales y submódulos especiales del anillo.
Teniendo en cuenta lo anterior, la dualidad del módulo singular emerge como un tema de gran relevancia en este trabajo de tesis, que se centra en introducir este concepto a través del estudio de los módulos superfluos. Una de las primeras contribuciones de este trabajo se ven reflejados directamente en el título de la tesis, afirmamos que un módulo es superfluo si y solo si lo es en su cápsula inyectiva. Naturalmente, nos concentramos en el conjunto de módulos que contienen submódulos superfluos, y restringiendo este conjunto a los submódulos que fueran cíclicos dio como resultado un conjunto al cual se le llamó la parte cosingular de un módulo.

Al estudiar este concepto, surge una de las primeras preguntas: ¿Cómo podemos ampliar y aplicar los resultados fundamentales derivados de los módulos singulares y cosingulares para caracterizar propiedades algebraicas más generales, y cuáles son las implicaciones de estas caracterizaciones en el estudio de los anillos y módulos? Cigdem Özcan proporciona una respuesta en su artículo "Modules with Small Cyclic Submodules in Their Injective Hulls"[3], ofreciendo una perspectiva desde la construcción de propiedades impuestas a los módulos.
Posteriormente, surgió la pregunta más relevante para nuestro trabajo: ¿Cómo podemos aprovechar la teoría de módulos y el análisis de los módulos cosingulares para desarrollar una caracterización rigurosa y establecer conexiones significativas entre la propiedades estudiadas por Özcan y algunas clases de anillos? Con el objetivo de responder a esta pregunta, este trabajo se propone explorar a fondo las propiedades y estructuras emergentes de los módulos cosingulares, especialmente enfocándose en las propiedades denominadas (S^*) y $(D1)$, resaltando la importancia crucial de la propiedad (S^*) en la obtención de resultados.
El propósito fundamental de esta tesis es demostrar la amplitud de los resultados obtenidos al relacionar de manera equivalente la propiedad (S^*) con un concepto que implique bastantes propiedades como los anillos cuasi-Frobenius. Además, se pretende establecer un teorema que integre los conceptos principales abordados en este trabajo, proporcionando una justificación clara de la importancia de cada resultado demostrado.

Cigdem Özcan ha sido una fuente inspiradora y fundamental para el desarrollo de esta tesis. Nuestro trabajo se basó en una exploración detallada de los resultados presentados en su artículo mencionado anteriormente. Nos enfocamos en complementar, detallar y ampliar los lemas y teoremas, además de abordar aspectos no tratados y llenar espacios vacíos en los

argumentos presentados. Este análisis se estructuró en cinco capítulos. El primero de ellos sirve como introducción y repaso de algunos fundamentos de la teoría de módulos, donde se presentan definiciones clave y resultados preliminares necesarios para comprender el desarrollo del trabajo.
En el segundo y tercer capítulo, nos adentramos en el estudio de los módulos cosingulares, explorando la dualización de resultados conocidos para los módulos singulares y reinterpretándolos en el contexto de los módulos cosingulares. También nos enfocamos en los módulos que satisfacen una propiedad denotada como (S^*). Comenzamos construyendo los $(D1)-$módulos, una clase especial que será fundamental en el análisis posterior de los módulos que cumplen con la propiedad (S^*). El objetivo es establecer conexiones y relaciones entre estos conceptos.
En el penúltimo capítulo, exploramos la clase de anillos conocida como $H-$Anillos, analizando su interacción con los conceptos desarrollados en capítulos anteriores. Además, se analizarán diversas propiedades de los $H-$Anillos con el objetivo de establecer una caracterización utilizando la propiedad (S^*).
Finalmente, el cuarto y último capítulo se dedica al estudio de los anillos cuasi-Fobrenius, una categoría especial de anillos denotados por $QF-$Anillos por su abreviatura en inglés (quasi-Frobenius). Aquí, exploramos diversas caracterizaciones de los anillos cuasi-Frobenius y presentamos una generalización denominada anillos $QF-3$, que establece conexiones adicionales entre la parte cosingular de un módulo y los $H-$Anillos. El capítulo culmina con una caracterización particular de los anillos cuasi-Frobenius utilizando la propiedad (S^*), destacando la importancia de esta propiedad en la teoría de anillos y módulos.

En lo sucesivo, los módulos aquí mencionados se considerarán $R-$módulos derechos, donde R denotará un anillo asociativo con identidad. Como es usual, si N es un submódulo de M, lo denotaremos por $N \leq M$, si N es superfluo en M, por $N \ll M$ y que N sea esencial en M, por $N \leq_{es} M$. Por otra parte, $E(M)$ denotará la cápsula inyectiva del módulo M, mientras que $Rad(M)$ denotará su radical. Y por último, si R es un anillo, $J(R)$ denotará a su radical de Jacobson.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Módulos, Submódulos y Cocientes de módulos

Definición 1.1.1. *Un* ***anillo*** *R es un conjunto no vacío con dos operaciones binarias: $+$ y $\cdot$, llamadas adición y multiplicación respectivamente, que satisfacen:*

i) *$(R, +, 0)$ es un grupo abeliano.*

ii) *$(R, \cdot)$ es un semigrupo.*

iii) *Para cada $a, b, c \in R$*

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ y } (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Definición 1.1.2. *Sea R un anillo, entonces:*

1) *R es un* ***anillo con identidad*** *si existe un elemento $1 \in R$ tal que para cada $a \in R$ se cumple que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.*

2) *R es* ***conmutativo*** *si la multiplicación es conmutativa.*

3) *Para un anillo R con identidad, decimos que $r \in R$, $r \neq 0$, tiene* ***inverso multiplicativo izquierdo*** *si existe $z \in R$ tal que $zr = 1$. Decimos que r tiene* ***inverso multiplicativo derecho*** *si existe $w \in R$ tal que $rw = 1$. Decimos que r es* ***unidad*** *si tiene inverso multiplicativo derecho e inverso multiplicativo izquierdo.*

4) *Un anillo R con identidad, donde $1 \neq 0$, es llamado* ***anillo con división*** *si cada elemento diferente de cero $a \in R$ tiene inverso multiplicativo.*

En adelante, en este trabajo utilizaremos el término *anillo* para referirnos exclusivamente a un anillo asociativo con identidad. Asimismo, al utilizar la notación R, estaremos haciendo referencia a un anillo bajo estas condiciones.

Definición 1.1.3. *Sean R un anillo e $I \subseteq R$ no vacío. I es un* ***ideal derecho*** *(respectivamente* ***ideal izquierdo****) de R si:*

i) *I es un subgrupo aditivo de R.*

ii) *Para todo $r \in R$ y $a \in I$ se cumple que $ar \in I$ (respectivamente $ra \in I$).*

Decimos que I es un ***ideal*** *si es ideal derecho e izquierdo.*

Definición 1.1.4. *Sea R un anillo. Decimos que M es un $R-$**módulo derecho** (simétricamente se define el concepto de $R-$**módulo izquierdo**) si se cumple:*

i) *$(M, +, 0)$ es un grupo abeliano.*

ii) *Existe una función*

$$\begin{aligned} \cdot : M \times R &\longrightarrow M \\ (m, r) &\longmapsto mr, \end{aligned}$$

tal que para cualesquiera $r_1, r_2, r \in R$ y $m_1, m_2, m \in M$ se satisfacen:

- $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$.
- $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$ *y* $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$.
- $m1_R = m$.

Que M sea un $R-$módulo derecho se denotará por M_R. Este trabajo se desarrolló con módulos derechos; en cualquier proposición, siempre se hace referencia a $R-$módulos derechos, a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.1.5. *Sean R y S anillos. Decimos que M es un $R - S-$**bimódulo** si M es un $S-$módulo izquierdo y M es un $R-$módulo derecho tal que para todo $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$ se cumple que $s(mr) = (sm)r$.*
Si M es un $S - R-$bimódulo se denota por ${}_S M_R$.

Definición 1.1.6. *Sea M un $R-$módulo derecho.*

1) *Un subconjunto A de M es un* ***submódulo*** *de M si, al utilizar las operaciones heredadas de M, A también es un $R-$módulo derecho.*
La notación para indicar que A es un submódulo de M es $A \leq M$.

2) *De manera similar, se define un* ***submódulo propio*** *de M exigiendo que A sea un subconjunto propio de M.*
Se denota por $A \lneq M$.

Lema 1.1.7. Sean M un $R-$módulo derecho y A un subconjunto no vacío de M. $A \leq M$ si y solo si para cada $a_1, a_2 \in A$ se tiene que $a_1 + a_2 \in A$ y para cada $a \in A$ y $r \in R$, se cumple que $ar \in A$.

Demostración. Ver [9, Lema 2.2.2]. ■

Observación 1.1.8. Es sencillo verificar que si M es un $R-$módulo derecho y $m \in M$, entonces $mR = \{mr | r \in R\}$ es un submódulo de M. A este submódulo se le conoce como el ***submódulo cíclico*** *de M generado por m.*

Definición 1.1.9. *Sean M un $R-$módulo derecho y A un submódulo de M.*

1) *A es llamado* ***submódulo mínimo*** *de M, si $A \neq \{0\}$ y para todo $B \leq M$ tal que $B \lneq A$ se tiene que $B = \{0\}$.*

2) *A es llamado* ***submódulo máximo*** *de M, si $A \lneq M$ y para todo $B \leq M$ tal que $A \lneq B$ se tiene que $B = M$.*

Definición 1.1.10. *Un $R-$módulo derecho M es llamado* ***simple*** *si $M \neq \{0\}$ y para todo $A \leq M$ se tiene que $A = \{0\}$ o $A = M$.*

Lema 1.1.11. Sea M un $R-$módulo derecho. M es simple si y solo si para todo $m \in M$ distinto de cero se satisface $mR = M$.

Demostración. Ver [9, Lema 2.2.4]. ■

Observación 1.1.12. Sea X un subconjunto de un $R-$módulo derecho M. Definimos y denotamos el siguiente conjunto:

$$|X) = \begin{cases} \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j r_j | x_i \in X, r_j \in R, n \in \mathbb{N} \right\}, \text{ si } X \neq \varnothing \\ \{0\}, \text{ si } X = \varnothing. \end{cases}$$

Por [9, Lema 2.3.2], $|X)$ es un submódulo de M y es llamado el ***submódulo de M generado por*** X.

Definición 1.1.13. *Sea M un $R-$módulo derecho.*

1) *Un subconjunto X de M es llamado* ***conjunto generador*** *de M si $|X) = M$.*

2) *M es llamado* ***finitamente generado*** *si existe un conjunto generador finito.*

3) *Un subconjunto X de M es llamado* ***libre*** *si para todo subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ (con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$) tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0$ con $r_i \in R$, entonces $r_i = 0$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.*

*4) Un subconjunto X de M es llamado **base** de M si es libre y es un conjunto generador de M.*

*5) M es llamado **libre** si y solo si tiene base.*

Proposición 1.1.14. Sean M un $R-$módulo derecho y $\Lambda = \{A_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M. Entonces

$$\left| \bigcup_{i\in I} A_i \right) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i\in I'} a_i | a_i \in A_i \text{ y } I' \subseteq I \text{ finito} \right\}, \text{ si } \Lambda \neq \varnothing \\ \{0\}, \text{ si } \Lambda = \varnothing. \end{cases}$$

Es decir, si $\Lambda \neq \varnothing$ estamos tratando con el conjunto de todas las sumas finitas $\sum a_i$ con $a_i \in A_i$. Así, denotamos y definimos a la ***suma de los submódulos*** $\{A_i\}_{i\in I}$ como

$$\sum_{i\in I} A_i = \left| \bigcup_{i\in I} A_i \right).$$

Demostración. Para la demostración de la igualdad revisar [9, Proposición p.27]. ∎

Teorema 1.1.15. Si un $R-$módulo derecho M es finitamente generado, entonces todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo de M.

Demostración. Ver [9, Teorema 2.3.11]. ∎

Corolario 1.1.16. Todo $R-$módulo derecho $M \neq \{0\}$ finitamente generado contiene un submódulo máximo.

Lema 1.1.17 (Ley modular)**.** Sean M un $R-$módulo derecho y $A, B, C \leq M$. Si $B \leq C$, entonces

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C) = (A \cap C) + B.$$

Demostración. Ver [9, Lema 2.3.15]. ∎

Definición 1.1.18. *Sea M un $R-$módulo derecho.*

*1) M es llamado la **suma directa** del conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M, si:*

i) $M = \sum_{i\in I} A_i$

ii) $A_j \cap \left(\sum_{j\neq i\in I} A_i \right) = 0$

La suma directa de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ se denota por $\bigoplus_{i\in I} A_i$.

*2) Un $A \leq M$ es llamado **sumando directo** de M si existe $B \leq M$ tal que $M = A \oplus B$. Lo denotaremos por $A \leq_{\oplus} M$.*

*3) Si $M \neq \{0\}$ es llamado **inescindible** si los únicos sumandos directos de M son $\{0\}$ y M.*

Observación 1.1.19. Sean M un $R-$módulo derecho, I un conjunto no vacío y $A \leq M$. Vamos a denotar a $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i = A^{(I)}$, donde $A_i = A$ para todo $i \in I$. Y llamaremos a $A^{(I)}$ como la ***suma directa de*** I ***copias de*** A.

Esta definición se deriva de [9, Capítulo 4], en particular del Teorema 4.2.1 y la Notación 4.1.7. Sin embargo, se omitieron los resultados y definiciones necesarios para desarrollar la teoría de sumas directas y productos directos. Aunque no consideramos necesario desarrollar estos resultados debido a la falta de aplicaciones directas en este trabajo, hemos rescatado la notación relevante para esta observación.

Definición 1.1.20. *Sea R un anillo y $r \in R$.*

*1) r es llamado **nilpotente** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n = 0$.*

*2) r es llamado **idempotente** si $r^2 = r$.*

Proposición 1.1.21. Un ideal derecho I de R es un sumando directo del $R-$módulo derecho R si y solo si existe un idempotente $r \in R$ tal que $I = rR$.

Demostración. Ver [6, Proposición 7.1]. ■

Definición 1.1.22. *Sean M un $R-$módulo derecho y A un submódulo de M. Definimos al **cociente** de M con A como:*

$$\frac{M}{A} = \{m + A | m \in M\}.$$

También llamaremos $\frac{M}{A}$ como M módulo A.

Observación 1.1.23. $\frac{M}{A}$ es un $R-$módulo derecho con las operaciones siguientes:

- Para $m_1, m_2 \in M$, $(m_1 + A) + (m_2 + A) = (m_1 + m_2) + A$.
- Para $r \in R$ y $m \in M$, $(m + A)r = mr + A$.

Proposición 1.1.24. Sean M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. El modulo $\frac{M}{A}$ es simple si y solo si A es un submódulo máximo de M.

Demostración. Revisar [6, Corolario 2.10]. ■

Proposición 1.1.25. Sean M un $R-$módulo derecho e $I \subseteq R$ un ideal bilateral. Si $MI = \{0\}$ entonces M es un $\frac{R}{I}-$módulo derecho.

Demostración. Definamos $\cdot : M \times \frac{R}{I} \longrightarrow M$ como la función $(m, r+I) = mr$. Observemos que está bien definido. Sean $m \in M$ y $x + I \in \frac{R}{I}$ tal que $x \in I$. Entonces, $m(x+I) = mx = 0$. Veamos que M es un $\frac{R}{I}-$módulo derecho.

- Sean $x \in M$ y $a+I, b+I \in \frac{R}{I}$

$$\begin{aligned} x((a+I)+(b+I)) =& x((a+b)+I) \\ =& x(a+b) \\ =& xa+xb \\ =& x(a+I)+x(b+I). \end{aligned}$$

- Sean $x, y \in M$ y $a+I \in \frac{R}{I}$

$$\begin{aligned} (x+y)(a+I) =& (x+y)a \\ =& xa+ya \\ =& x(a+I)+y(a+I). \end{aligned}$$

- Sean $x \in M$ y $a+I, b+I \in \frac{R}{I}$

$$\begin{aligned} x((a+I)(b+I)) =& x(ab+I) \\ =& x(ab) \\ =& (xa)b \\ =& xa(b+I) \\ =& (x(a+I))(b+I). \end{aligned}$$

- Sean $x \in M$ y $e_{\frac{R}{I}} = e_R + I$.

$$x(e_R + R) = xe_I = x.$$

■

1.2. Morfismos de Módulos

Definición 1.2.1. *Sean M y N $R-$módulos derechos. Decimos que una función $\varphi : M \longrightarrow N$ es un **morfismo de R-módulos derechos** si se cumplen para cualesquiera $m_1, m_2, m \in M$ y $r \in R$:*

i) $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$

ii) $\varphi(mr) = \varphi(m)r.$

Ejemplos. Sean M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$.

1) El morfismo nulo. Definido por:

$$\begin{aligned} \bar{0} : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

2) Denotamos el morfismo inclusión entre A y M por $A \hookrightarrow M$. Y lo definimos como:

$$\begin{aligned} \iota : A &\longrightarrow M \\ n &\longmapsto n. \end{aligned}$$

3) El morfismo identidad en M. Definido por:

$$\begin{aligned} Id_M : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto m. \end{aligned}$$

4) El morfismo canónico. Definido por:

$$\begin{aligned} \nu : M &\longrightarrow \frac{M}{A} \\ m &\longmapsto m + A. \end{aligned}$$

Definición 1.2.2. *Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R-$módulos derechos. Definimos y denotamos:*

1) *El **núcleo** de φ como $Ker(\varphi) = \{m \in M | \varphi(m) = 0\}$.*

2) *La **imagen** de φ como $Im(\varphi) = \{\varphi(m) | m \in M\}$.*

Definición 1.2.3. *Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R-$módulos derechos.*

1) *Diremos que φ es un **monomorfismo** si para cualesquiera morfismos de $R-$módulos derechos $\alpha_1, \alpha_2 : P \longrightarrow M$ tales que $\varphi\alpha_1 = \varphi\alpha_2$, implica que $\alpha_1 = \alpha_2$.*

2) *Diremos que φ es un **epimorfismo** si para cada par de morfismos de $R-$módulos derechos $\alpha_1, \alpha_2 : N \longrightarrow P$ tales que $\alpha_1\varphi = \alpha_2\varphi$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2$.*

3) *Diremos que φ es un **bimorfismo** si φ es monomorfismo y epimorfismo.*

4) *Diremos que φ es un **isomorfismo** si existe $\alpha : N \longrightarrow M$ tal que $\alpha\varphi = Id_M$ y $\varphi\alpha = Id_N$.*

Teorema 1.2.4. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R-$módulos derechos. Tenemos que:

1) φ es monomorfismo si y solo si φ es inyectiva.

2) φ es epimorfismo si y solo si φ es suprayectiva.

3) φ es bimorfismo si y solo si φ es biyectivo si y solo si φ es isomorfismo.

Demostración. Ver [9, Teorema 3.1.5]. ■

Lema 1.2.5. Sean $\alpha : A \longrightarrow B$ y $\beta : B \longrightarrow C$ morfismos de $R-$módulos derechos. Entonces:

1) Si α y β son monomorfismos, entonces $\beta\alpha$ es un monomorfismo.

2) Si α y β son epimorfismos, entonces $\beta\alpha$ es un epimorfismo.

3) $\beta\alpha$ es un monomorfismo, entonces α es un monomorfismo.

4) $\beta\alpha$ es un epimorfismo, entonces β es un epimorfismo.

Demostración. Ver [9, Lema 3.1.6]. ■

Definición 1.2.6. *Dos $R-$módulos derechos M y N son llamados* ***isomorfos*** *si existe un isomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$.*
Lo denotamos por $M \cong N$.

Lema 1.2.7. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R-$módulos derechos. Entonces se cumplen:

1) φ es monomorfismo si y solo si $Ker(\varphi) = \{0\}$.

2) Si $A \leq M$, entonces $\varphi^{-1}\varphi(A) = A + Ker(\varphi)$.

3) Si $B \leq N$, entonces $\varphi\varphi^{-1}(B) = B \cap Im(\varphi)$.

4) Sea $\alpha : N \longrightarrow P$ un morfismo de $R-$módulos derechos. Entonces $Ker(\alpha\varphi) = \varphi^{-1}(Ker(\alpha))$ y $Im(\alpha\varphi) = \alpha(Im(\varphi))$.

Demostración. Ver [9, Lema 3.1.8]. ■

Teorema 1.2.8 (Primer Teorema de Isomorfismos). Sea $\alpha : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R-$módulos derechos. Entonces existe un morfismo $\varphi : \frac{M}{Ker(\alpha)} \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta (es decir $\alpha = \varphi\nu$):

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu"'] & N \\ \frac{M}{Ker(\alpha)} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [9, Teorema 3.4.1]. ■

Teorema 1.2.9 (Segundo Teorema de Isomorfismos). Sean A y B submódulos de un $R-$módulo derecho M. Entonces
$$\frac{A+B}{B} \cong \frac{A}{A\cap B}.$$

Demostración. Ver su demostración en [9, Teorema 3.4.3]. ■

Corolario 1.2.10. Sean A y B submódulos de un $R-$módulo derecho M. Si $M = A \oplus B$ entonces $\frac{M}{B} \cong A$.

Teorema 1.2.11 (Tercer Teorema de Isomorfismos). Sean A y B submódulos de un $R-$módulo derecho M tales que $B \subseteq A$, entonces:
$$\frac{\frac{M}{B}}{\frac{A}{B}} \cong \frac{M}{A}.$$

Demostración. Ver [9, Teorema 3.4.6]. ■

Definición 1.2.12. *Sean M y N $R-$módulos derechos.*

1) *Decimos que un monomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ se **escinde** si $Im(\varphi) \leq_{\oplus} N$.*

2) *Decimos que un epimorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ se **escinde** si $Ker(\varphi) \leq_{\oplus} M$.*

1.3. Módulos Esenciales, Superfluos y Complementos

Definición 1.3.1. *Sean M un $R-$módulo derecho y A un submódulo de M.*

1) *A es llamado **superfluo** en M si para todo $B \leq M$ tal que $A+B=M$ implica que $B=M$. Lo denotaremos como $A \ll M$.*

2) *A es llamado **esencial** en M si para todo $B \leq M$ tal que $A\cap B = 0$ implica que $B=0$. Lo denotaremos como $A \leq_{es} M$.*
   *Con la misma definición denominamos a M como una **extensión esencial** de A.*

Definición 1.3.2. *Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R-$módulos derechos.*

1) *φ es llamado **superfluo** si $Ker(\varphi) \ll M$.*

2) *φ es llamado **esencial** si $Im(\varphi) \leq_{es} N$.*

Observación 1.3.3. De las definiciones anteriores podemos obtener inmediatamente los siguientes enunciados:

1) $A \ll M$ si y solo si para todo $B \lneq M$, se cumple que $A + B \lneq M$.

2) $A \leq_{es} M$ si y solo si para todo $B \leq M$ tal que $B \neq 0$, se cumple que $A \cap B \neq \{0\}$.

3) Si $M \neq 0$ y $A \ll M$, entonces $A \neq M$.

4) Si $M \neq 0$ y $A \leq_{es} M$, entonces $A \neq 0$.

Y las siguientes afirmaciones pueden verificarse en [9, Ejemplos 5.1.2].

5) Para todo $R-$módulo derecho se tiene que $0 \ll M$ y $M \leq_{es} M$.

6) *Un $R-$módulo derecho es llamado **semisimple** si todo submódulo es un sumando directo.* Si consideramos un $R-$módulo derecho semisimple M, podemos asegurar que su único submódulo superfluo es $\{0\}$ y su único submódulo esencial es M.

Lema 1.3.4. Sean A, B, N, M $R-$módulos derechos tales que $A \leq B \leq M \leq N$.

1) Si $B \ll M$, entonces $A \ll N$.

2) Si $A \leq_{es} N$, entonces $B \leq_{es} M$

Sea $\varphi : M \longrightarrow M'$ un morfismo de $R-$ módulos derechos.

3) Si $A \ll M$, entonces $\varphi(A) \ll M'$.

4) Si $A \leq_{es} M'$, entonces $\varphi^{-1}(A) \leq_{es} M$.

Demostración. Ver [9, Lema 5.1.3 y Lema 5.1.5]. ∎

Lema 1.3.5. Sea M un $R-$módulo derecho.

1) Si $A_i \ll M$ donde $i = 1, ..., n$, entonces $\sum_{i=1}^{n} A_i \ll M$.

2) Si $A_i \leq_{es} M$ donde $i = 1, ..., n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \leq_{es} M$.

Demostración. Consultar [9, Lema 5.1.3 (b) y Lema 5.1.5 (b)]. ∎

Lema 1.3.6. Sean M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. Entonces $A \leq_{es} M$ si y solo si para todo $m \in M$ tal que $m \neq 0$, existe $r \in R$ de forma que $mr \neq 0$ y $mr \in A$.

Demostración. Ver [9, Lema 5.1.6]. ∎

Lema 1.3.7. Sean $R-$módulos derechos M y N. Si $N \ll M$ y N está contenido en un sumando directo M_1 de M. Entonces $N \ll M_1$.

Demostración. Sea $M = M_1 \oplus M_2$ donde M_1 y M_2 son $R-$módulos derechos. Supongamos que $N \ll M$ y $N \leq M_1$. Sea $A \leq M_1$ tal que $N + A = M_1$. Entonces, $M = M_1 \oplus M_2 = (N + A) \oplus M_2 = N + (A + M_2)$, por hipótesis $A + M_2 = M$.
Veamos que $M_1 \leq A$.
Observemos que $M_1 \leq M = A + M_2$, entonces $m_1 \in M_1$ implica que existen $a \in A$ y $m_2 \in M_2$ tales que $m_1 = a + m_2$. Luego $m_1 - a = m_2$, es decir $m_1 - a \in M_1 \cap M_2$, entonces $m_1 - a = 0$ de donde $m_1 = a$.
Por lo tanto $m_1 \in A$, luego $M_1 = A$. ∎

Lema 1.3.8. Sean M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. A es esencial en M si y solo si para cada $x \in M$ distinto de cero existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in A$.

Demostración. Ver [6, Lema 5.19]. ∎

Proposición 1.3.9. Sean $A_1 \leq M_1 \leq M$ y $A_2 \leq M_2 \leq M$, $R-$módulos derechos tales que $M = M_1 \oplus M_2$. Entonces $A_1 \oplus A_2 \leq_{es} M_1 \oplus M_2$ si y solo si $A_1 \leq_{es} M_1$ y $A_2 \leq_{es} M_2$.

Demostración. $\Rightarrow$] Demostraremos que $A_1 \leq_{es} M_1$, pues ver que $A_2 \leq_{es} M_2$ es análogo.
Supongamos que existe $B_1 \leq M_1$ tal que $A_1 \cap B_1 = \{0\}$. Sean $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ y $b_1 \in B_1$ tales que $a_1 + a_2 = b_1$. Entonces, $a_2 = b_1 - a_1 \in M_1 \cap M_2$. Así, $a_2 = 0 = b_1 - a_1$, luego $b_1 = a_1$, y, por hipótesis $b_1 = a_1 = 0$. Por lo tanto, $B_1 = \{0\}$, pues $A_1 \oplus A_2 \leq_{es} M_1 \oplus M_2$.

[$\Leftarrow$ Supongamos que $A_1 \leq_{es} M_1$ y $A_2 \leq_{es} M_2$. Sea $0 \neq x_i \in M_i$ para $i = 1, 2$. Por el Lema 1.3.8, existe $r_1 \in R$ tal que $0 \neq r_1 x_1 \in A_1$.
Si $r_1 x_2 \in A_2$, entonces $0 \neq r_1 x_1 + r_1 x_2 \in A_1 \oplus A_2$.
Si $r_1 x_2 \notin A_2$, según el Lema 1.3.8, existe $r_2 \in R$ tal que $0 \neq r_2 r_1 x_2 \in A_2$. Por lo que $0 \neq r_2 r_1 x_1 + r_2 r_1 x_2 \in A_1 \oplus A_2$.
Por lo tanto, por el Lema 1.3.8, $A_1 \oplus A_2 \leq_{es} M_1 \oplus M_2$.
∎

Definición 1.3.10. *Sean M un $R-$módulo derecho y A, L, K submódulos de M.*

1) *L es llamado **suplemento** de A en M si, es mínimo con la propiedad $A + L = M$.*

2) *K es llamado **seudocomplemento** de A en M si, es máximo con la propiedad $A \cap K = 0$.*

Lema 1.3.11. Sean $A, B \leq M$ tales que $A \cap B = 0$. Existe A' un seudocomplemento de A tal que $B \leq A'$, en consecuencia un seudocomplemento A'' de A' tal que $A \leq A''$.

Demostración. Consultar [9, Lema 5.2.3]. ∎

Lema 1.3.12. Sean M un $R-$módulo derecho y $A, K \leq M$ tales que $A \cap K = \{0\}$. K es seudocomplemento de A en M si y solo si $\frac{A+K}{K} \leq_{es} \frac{M}{K}$.

Demostración. Ver [9, Lema 5.2.5 inciso (a)]. ■

Lema 1.3.13. Sean M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. Si A' es seudocomplemento de A en M y A'' es seudocomplemento de A' en M tal que $A \leq A''$, entonces $A \leq_{es} A''$.

Demostración. Ver [9, Lema 5.2.5 inciso (c)]. ■

Proposición 1.3.14. Sean $A \leq M$ $R-$módulos derechos y K un seudocomplemento de A en M. Entonces $A \oplus K \leq_{es} M$.

Demostración. Sea $B \leq M$ tal que $(A + K) \cap B = \{0\}$. Entonces, $(A \oplus K) \oplus B = A \oplus (K \oplus B)$, por lo que $A \cap (K + B) = \{0\}$. Como $K \leq K + B$, entonces $K = K + B$ por hipótesis, luego $B \leq K \leq A + K$, es decir $B = (A + K) \cap B = \{0\}$. ■

Definición 1.3.15. *Un submódulo A de un $R-$módulo derecho M es llamado **cerrado** en M si, siempre que $A \leq_{es} U \leq M$, entonces $A = U$. En otras palabras, A no tiene extensiones esenciales propias en M.*

Lema 1.3.16. Sea M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. A es cerrado en M si y solo si A es seudocomplemento de algún submódulo de M.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea A' el seudocomplemento de A en M. Vamos a demostrar que A es seudocomplemento de A' en M.
Ya sabemos que $A \cap A' = \{0\}$. Supongamos que existe $B \leq M$ tal que $A \leq B$ y $B \cap A' = \{0\}$. Veamos que $A \leq_{es} B$. Sea $L \leq B$ tal que $L \cap A = \{0\}$. Por Ley Modular (Lema 1.1.17), $L = (B \cap A') + L = B \cap (L + A')$, entonces

$$\begin{aligned}\{0\} &= A \cap L \\ &= A \cap (B \cap (L + A')) \\ &= (A \cap B) \cap (L + A') \\ &= A \cap (L + A').\end{aligned}$$

Dado que A' es seudocomplemento de A, entonces $L + A' = A'$. Como $L \leq B$ y $B \cap A' = \{0\}$, entonces $L = \{0\}$. Por lo tanto, $A \leq_{es} B$.
Puesto que A es cerrado, entonces $A = B$. Así, A es el máximo con la propiedad $A \cap A' = \{0\}$.

[$\Leftarrow$ Consideremos $A \leq_{es} U \leq M$. Por hipótesis A es seudocomplemento de algún $B \leq M$. Queremos demostrar que $A = U$, esto pasaría si $B \cap U = \{0\}$, pues U tendría que coincidir con A al ser el máximo con esa propiedad.

Supongamos que $B \cap U \neq \{0\}$. Como A es esencial, entonces $A \cap (B \cap U) \neq \{0\}$. Por otro lado, $(A \cap B) \cap U = \{0\}$ ya que A es seudocomplemento de B. Dado que $A \cap (B \cap U) = (A \cap B) \cap U$, tenemos una contradicción.
Entonces, $B \cap U = \{0\}$. Por lo tanto A es cerrado en M.

■

1.4. Módulos Inyectivos y Proyectivos

Teorema 1.4.1. Para un $R-$módulo derecho M consideremos a N y L dos $R-$módulos derechos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) Todo monomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ se escinde.

(b) Para todo monomorfismo $\alpha : L \longrightarrow N$ y morfismo $\beta : L \longrightarrow M$, existe un morfismo $\gamma : N \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta (es decir $\beta = \gamma\alpha$):

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [9, Teorema 5.3.1 (a)]. ■

Definición 1.4.2. *Un $R-$módulo derecho M que satisface alguna de las condiciones del Teorema 1.4.1 es llamado **inyectivo**.*

Teorema 1.4.3. Para un $R-$módulo derecho M consideremos a N y L $R-$módulos derechos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) Todo epimorfismo $\varphi : L \longrightarrow M$ se escinde.

(b) Para todo epimorfismo $\alpha : L \longrightarrow N$ y morfismo $\beta : M \longrightarrow N$, existe un morfismo $\gamma : M \longrightarrow L$ tal que el siguiente diagrama conmuta (es decir $\beta = \alpha\gamma$):

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\beta"] \\ L \arrow[r, "\alpha"'] & N \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [9, Teorema 5.3.1 (b)]. ■

Definición 1.4.4. *Un $R-$módulo derecho M que satisface alguna de las condiciones del Teorema 1.4.3 es llamado **proyectivo**.*

Corolario 1.4.5. Sean M y N $R-$módulos derechos.

1) Si M es inyectivo y $M \cong N$, entonces N es inyectivo.

2) Si M es proyectivo y $M \cong N$, entonces N es proyectivo.

Teorema 1.4.6. Un $R-$módulo derecho es proyectivo si y solo si es isomorfo a un sumando directo de un $R-$módulo libre derecho.

Demostración. Ver [9, Teorema 5.4.1]. ■

Proposición 1.4.7. Todo $R-$módulo proyectivo derecho no cero contiene un submódulo máximo.

Demostración. Ver [6, Proposición 17.14] ■

Observación 1.4.8. Para cualquier subconjunto no vacío X de un $S-R-$bimódulo M definimos y denotamos al ***anulador derecho*** *de X en R* como:

$$r_R(X) = \{r \in R | xr = 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

De manera similar, se define al ***anulador izquierdo*** *de X en S* como:

$$l_S(X) = \{s \in S | sx = 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

Observe que el anulador derecho (respectivamente izquierdo) de X es un ideal derecho del anillo R (respectivamente un ideal izquierdo del anillo S).

Definición 1.4.9. *Sea M un $R-$módulo derecho.*

1) Definimos y denotamos el ***submódulo singular*** *de M como:*

$$Z(M) = \{m \in M | r_R(m) \leq_{es} R_R\}.$$

2) Un $R-$módulo derecho M es llamado ***singular*** *si $Z(M) = M$.*

Proposición 1.4.10. Si M es un $R-$módulo simple derecho, entonces M es singular o proyectivo, pero no ambos.

Demostración. Ver su demostración en [7, Proposición 1.24]. ■

Proposición 1.4.11. Sea M un $R-$módulo inyectivo derecho. Todo sumando directo de M es un $R-$módulo inyectivo derecho.

Demostración. Ver [6, Proposición 18.2]. ■

Definición 1.4.12. *Sea M un $R-$módulo derecho.*

1) *Una **cápsula inyectiva** de M es una pareja (E, φ) donde E es un $R-$módulo inyectivo derecho y $\varphi : M \longrightarrow E$ es un monomorfismo esencial.*
   La denotamos por $E(M)$.

2) *Una **cubierta proyectiva** de M es una pareja (P, φ) donde P es un $R-$módulo proyectivo derecho y $\varphi : M \longrightarrow P$ es un epimorfismo superfluo.*

Teorema 1.4.13. Todo $R-$módulo derecho tiene cápsula inyectiva.

Demostración. Ver [9, Teorema 5.6.4]. ■

Proposición 1.4.14. Sea M un $R-$módulo derecho. Se cumplen los siguientes enunciados:

1) M es inyectivo si y solo si $M = E(M)$.

2) Si $A \leq M$ y M es inyectivo. Entonces $M = E(A) \oplus E'$ para algún $R-$módulo inyectivo derecho E'.

3) Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia finita de $R-$módulos derechos. Si $\bigoplus_{i\in I} E(M_i)$ es inyectivo derecho, entonces $E(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} E(M_i)$.

Demostración. Ver [6, Proposición 18.12]. ■

1.5. Módulos Artinianos y Noetherianos

Definición 1.5.1. *Un $R-$módulo derecho M es llamado **noetheriano** (respectivamente **artiniano**) si todo conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento máximo (respectivamente mínimo) con respecto a la inclusión.*

Definición 1.5.2. *Un anillo R es llamado **noetheriano derecho** (respectivamente **artiniano derecho**) si el $R-$módulo derecho R es noetheriano (respectivamente artiniano).*

Teorema 1.5.3. Sea M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) M es artiniano.

(b) A y $\frac{M}{A}$ son artinianos.

(c) Toda cadena descendente $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq ...$ de submódulos de M se estaciona.

Demostración. Ver [9, Teorema 6.1.2 (I)] ■

Teorema 1.5.4. Sea M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) M es noetheriano.

(b) A y $\frac{M}{A}$ son noetherianos.

(c) Toda cadena ascendente $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq ...$ de submódulos de M se estaciona.

Demostración. Ver [9, Teorema 6.1.2 (II)] ■

La propiedad (c) en los Teoremas 1.5.3 y 1.5.4 se le conoce como la Condición de Cadena Ascendente (ACC), respectivamente Descendente (DCC).

Teorema 1.5.5. Sean S, T anillos y ${}_SM_T$ un bimódulo. Entonces el anillo $R = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & T \end{bmatrix}$ es artiniano derecho (respectivamente, izquierdo) si y solo si S y T son artinianos derechos (respectivamente, izquierdos) y el $T-$módulo derecho (respectivamente $S-$módulo izquierdo) M es artiniano.
Este teorema también es válido si sustituimos la palabra "artiniano" por "noetheriano".

Demostración. Ver su demostración en [10, Teorema 1.22]. ■

Teorema 1.5.6. Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) R_R es noetheriano

(b) Toda suma directa de $R-$módulos derechos inyectivos es inyectiva.

(c) Toda suma directa contable de cápsulas inyectivas de $R-$módulos derechos simples, es inyectiva.

Demostración. Consultar las equivalencias de [9, Teorema 6.5.1]. ■

Teorema 1.5.7. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) El $R-$módulo derecho R es noetheriano.

(b) Todo $R-$módulo derecho inyectivo E es una suma directa de módulos (inyectivos) inescindibles.

Demostración. Ver [9, Teorema 9.5.1]. ■

Corolario 1.5.8. Si M es un $R-$módulo noetheriano derecho, entonces $E(M)$ es una suma directa finita de módulos inyectivos inescindibles.

Demostración. Consulte [11, Corolario 6.7 y Proposición 6.12]. ■

Teorema 1.5.9. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) El $R-$módulo derecho R es artiniano.

(b) Todo $R-$módulo derecho inyectivo E es una suma directa de cápsulas inyectivas de $R-$módulos derechos simples.

Demostración. Ver [9, Teorema 9.5.1]. ■

Lema 1.5.10. Sea Γ un conjunto de submódulos de un $R-$módulo derecho M. Entonces, entre todos los subconjuntos Λ de Γ tales que

$$\sum_{U\in\Lambda} U = \bigoplus_{U\in\Lambda} U$$

existe un conjunto máximo Λ'.

Demostración. Ver [9, Lema 6.6.6]. ■

Teorema 1.5.11. Sean R un anillo noetheriano derecho, N el ideal derecho nilpotente máximo de R. Si la cápsula inyectiva del $R-$módulo derecho $\frac{R}{N}$ es finitamente generada, entonces R es artiniano derecho.

Demostración. Puede consultarse en [5, Teorema 20.12]. ■

Definición 1.5.12. *Se dice que un $R-$módulo derecho M es de* ***dimensión finita*** *si toda familia de submódulos distintos de cero tal que su suma es directa, es finita.*

Proposición 1.5.13. Sean F un campo y R el anillo de matrices triangulares inferiores de $n \times n$ sobre F. Entonces $Z(R) = 0$ y R_R es de dimensión finita. Además

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F & F & \cdots & F \end{pmatrix}$$

es un ideal bilateral inyectivo de R, que contiene a cualquier otro ideal derecho inyectivo de R.

Demostración. Revisar [7, Ejercicios 20 y 21 sec. 3.B]. ■

1.6. Anillos y Módulos Semisimples

Teorema 1.6.1. Sea un $R-$módulo derecho M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo submódulo de M es un sumando directo de M.

(b) Todo submódulo de M es una suma de submódulos simples.

(c) M es una suma de submódulos simples.

(d) M es una suma directa de submódulos simples.

Demostración. Ver [9, Teorema 8.1.3]. ■

Definición 1.6.2. *Un $R-$módulo derecho M es llamado* ***semisimple*** *si satisface alguna de las condiciones del Teorema 1.6.1.*

Corolario 1.6.3. 1) Todo submódulo de un $R-$módulo semisimple derecho es semisimple.

2) Toda imagen de un $R-$módulo semisimple derecho, es semisimple.

3) Toda suma de $R-$módulos semisimples derechos es semisimple.

Demostración. Ver [9, Corolario 8.1.5]. ■

Proposición 1.6.4. Sea M un $R-$módulo derecho.

1) M es semisimple si y solo si M no tiene submódulos esenciales propios.

2) Suponga que M es finitamente generado. M es semisimple si y solo si M no tiene submódulos esenciales máximos.

Demostración. 1) Es consecuencia de [2, Corolario 6.4.6].

2) Observemos que la necesidad es directa por el inciso 1). Para la suficiencia, supongamos que M no es semisimple y demostremos que existe un submódulo esencial máximo.
Por el inciso 1), existe un submódulo esencial propio de M, digamos A. Dado que M es finitamente generado, por el Teorema 1.1.15, existe un submódulo máximo K de M tal que $A \leq K$. Por el Lema 1.3.4, $K \leq_{es} M$. Por lo tanto, M contiene un submódulo esencial máximo.

■

1.7. Radical y Zoclo

Definición 1.7.1. *Sea M un $R-$módulo derecho.*

1) *El **zoclo** de M, se define y denota como:*

$$Zoc(M) = \sum\{A \leq M | L \text{ es mínimo en } M\}$$
$$= \bigcap\{A \leq M | K \text{ es esencial en } M\}.$$

2) *El **radical** de M, se define y denota de la siguiente manera:*

$$Rad(M) = \bigcap\{A \leq M | K \text{ es máximo en } M\}$$
$$= \sum\{A \leq M | L \text{ es superfluo en } M\}.$$

En caso que M no tenga submódulos máximos entonces definimos $Rad(M) = M$.

Observación 1.7.2. 1) Las igualdades en la definición anterior están demostradas en [9, Teorema 9.1.1].

2) Para un anillo R el radical de R es el $Rad(R_R)$ y se le llama ***radical de Jacobson***, será denotado por $J(R)$.

Teorema 1.7.3. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R-$módulos derechos. Entonces $\varphi(Rad(M)) \leq Rad(N)$.

Demostración. Ver [9, Teorema 9.1.4 (a)]. ■

Corolario 1.7.4. Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de un $R-$módulo derecho M tales que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Entonces $Rad(M) = \bigoplus_{i\in I} Rad(M_i)$.

Demostración. Ver [9, Corolario 9.1.5 (c)]. ■

Teorema 1.7.5. Para un $R-$módulo derecho M, tenemos:

1) Si M es semisimple, entonces $Rad(M) = 0$.

2) $MJ(R) \leq Rad(M)$

3) Si M es proyectivo, entonces $Rad(M) = MJ(R)$.

Demostración. Consultar las demostraciones en [9, Teorema 9.2.1]. ■

Teorema 1.7.6. Si R es un anillo artiniano derecho, entonces $J(R)$ es nilpotente.

Demostración. Revisar [9, Teorema 9.3.9]. ■

Corolario 1.7.7. Si R un anillo artiniano derecho, entonces se cumplen los siguientes enunciados:

1) $J(R)$ es el ideal nilpotente más grande de R.

2) Para todo $R-$módulo derecho M, se tiene que $Rad(M) = MJ(R) \ll M$.

Demostración. Ver [9, Corolario 9.3.10 (a) y (c)]. ■

Definición 1.7.8. *Un anillo R es llamado **primario** si $\frac{R}{J(R)}$ es semisimple y $J(R)$ nilpotente.*

Teorema 1.7.9. Sea R un anillo primario. Un $R-$módulo derecho es artiniano si y solo si es noetheriano.

Demostración. Ver su demostración en [9, Teorema 9.3.11]. ■

Teorema 1.7.10 (Hopkins-Levitzki)**.** Si el $R-$módulo derecho R es artiniano, entonces es noetheriano.

Demostración. Consultar [9, Corolario 9.3.12] ■

Definición 1.7.11. *Un $R-$módulo derecho M es llamado **fiel** si para todo $r \in R$ distinto de cero, existe un elemento $m \in M$ tal que $mr \neq 0$.*

Proposición 1.7.12. Sean S, T anillos, ${}_TM_S$ un bimódulo y $R = \begin{bmatrix} S & 0 \\ M & T \end{bmatrix}$. Si ${}_TM$ es fiel, entonces $Zoc(R_R) = \begin{bmatrix} Zoc(S_S) & 0 \\ Zoc(M_S) & 0 \end{bmatrix}$.

Demostración. Ver su demostración en [7, Proposición 4.2 (b)]. ■

1.8. Anillos Perfectos y Módulos Semiperfectos

Definición 1.8.1. *Un anillo R es llamado **perfecto derecho** si todo $R-$módulo derecho tiene cubierta proyectiva.*

Teorema 1.8.2. Sea M un $R-$módulo derecho con cubierta proyectiva. Si $\varphi : P \longrightarrow M$ es un epimorfismo tal que P es un $R-$módulo proyectivo, entonces existe una descomposición $P = P_1 \oplus P_2$ tal que $P_2 \leq Ker(\varphi)$ y $\varphi_1 = \varphi|_{P_1}$ es una cubierta proyectiva.

Demostración. Consultar [9, Teorema 11.1.1]. ■

Corolario 1.8.3. Sea M un $R-$módulo derecho y $A \leq M$. Si M es proyectivo y $\frac{M}{A}$ tiene cubierta proyectiva, entonces existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ con $M \leq A$ y $M_1 \cap A \ll M_1$.

Demostración. Ver [9, Corolario 11.1.2]. ■

Definición 1.8.4. *Un $R-$módulo derecho M es llamado **semiperfecto** si toda imagen de un epimorfismo de M tiene cubierta proyectiva.*

Teorema 1.8.5. Si el $R-$módulo derecho M es semiperfecto, entonces $\frac{M}{Rad(M)}$ es semisimple y $Rad(M) \ll M$.

Demostración. Ver [9, Teorema 11.1.7 (b) y (c)]. ■

Definición 1.8.6. *Sea R un anillo y M un $R-$módulo derecho.*

*1) M es llamado **Max** si cada submódulo distinto de cero tiene al menos un submódulo máximo.*

*2) R es llamado **Max derecho** si todo $R-$módulo derecho distinto de cero es Max.*

Teorema 1.8.7. Sea R un anillo. R es perfecto derecho si y solo si R es Max derecho y $\frac{R}{J(R)}$ es semisimple.

Demostración. Por [6, Teorema de Bass 28.4 (c)]. ■

Capítulo 2

Módulos Cosingulares

En el vasto campo del álgebra, el estudio de los módulos cosingulares emerge como una perspectiva dual y complementaria al estudio bien establecido de los módulos singulares. Los módulos singulares, conocidos por su importancia en la teoría de módulos, han sido objeto de extensiva investigación debido a su papel crucial en la comprensión de la estructura algebraica de los anillos.
Es importante destacar que el estudio detallado de los módulos cosingulares no constituye el objetivo principal de esta tesis. Más bien, este capítulo tiene la intención de proporcionar la base teórica necesaria para desarrollar teoremas y resultados más avanzados en los capítulos siguientes. En este sentido, nos centraremos en dualizar algunos resultados conocidos para los módulos singulares e interpretarlos en el contexto de los módulos cosingulares. Exploraremos cómo los resultados fundamentales, tales como caracterizaciones en anillos artinianos y anillos perfectos, pueden ser reinterpretados y aplicados al estudio de los módulos cosingulares.

Comenzaremos este capítulo estableciendo qué significa que un módulo sea superfluo y a qué nos referimos cuando no lo es. Esta definición, junto con la equivalencia que nos ofrece la proposición siguiente, será de gran utilidad para definir y estudiar la parte cosingular de un módulo.

Definición 2.0.1. *Sea M un $R-$módulo derecho. Decimos que M es* ***superfluo*** *si es un submódulo superfluo de algún $R-$módulo derecho. En este sentido, M se denomina* ***no superfluo*** *si no existe $R-$módulo derecho donde M sea submódulo superfluo.*

Proposición 2.0.2. Un $R-$módulo derecho M es superfluo si y solo si es superfluo en su cápsula inyectiva.

Demostración. Sea $E(M)$ la cápsula inyectiva del $R-$módulo derecho M. Si asumimos que M es superfluo; en consecuencia, $M \ll M'$ para algún $R-$módulo derecho M'. Notemos que $M \leq M' \leq E(M')$, entonces, por el Lema 1.3.4 1), se deduce que $M \ll E(M')$. Además, dado que $E(M)$ y $E(M')$ son $R-$módulos derechos inyectivos, y $E(M) \leq E(M')$, según la Proposición

1.4.14 2), $E(M) \leq_{\oplus} E(M')$. De este modo, por el Lema 1.3.7, concluimos que $M \ll E(M)$.
Por otro lado, la suficiencia es directa, pues si $M \ll E(M)$, según la definición, M es superfluo. ■

Proposición 2.0.3. Sean $\varphi : M \longrightarrow Q$ un monomorfismo y $\varphi' : Q' \longrightarrow M$ un epimorfismo de $R-$módulos derechos. Si Q es superfluo o Q' es superfluo, entonces M es superfluo.

Demostración. Consideremos el monomorfismo $\varphi : M \longrightarrow Q$. Observemos que $\varphi(M) \leq Q$ y, dado que Q es superfluo, por la Proposición 2.0.2, se tiene que $Q \ll E(Q)$. Según el Lema 1.3.4 1), $\varphi(M) \ll E(Q)$. Entonces, $\varphi(M)$ es superfluo, es decir, $\varphi(M) \ll E(\varphi(M))$. Como φ es un monomorfismo $M \cong \varphi(M)$, en consecuencia, $E(M) \cong E(\varphi(M))$. Así, $M \ll E(M)$. Por lo tanto, M es superfluo.
Por otro lado, sea $\varphi' : Q' \longrightarrow M$ un epimorfismo. Entonces $\varphi'(Q') = M$. Por hipótesis Q' es superfluo, por lo que según la Proposición 2.0.2, $Q' \ll E(Q')$. Ahora, consideremos las inclusiones $\iota : M \longrightarrow E(M)$ e $\iota' : Q' \longrightarrow E(Q')$. Dado que ι' es monomorfismo y $E(M)$ es un $R-$módulo derecho inyectivo, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Q' \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & E(Q') \arrow[ddl, dashed, "\theta"] \\
M \arrow[d, "\iota"'] & \\
E(M) &
\end{tikzcd}$$

Es decir, existe un morfismo $\theta : E(Q') \longrightarrow E(M)$ tal que $\theta(Q') = \theta\iota'(Q') = \iota\varphi'(Q') = \varphi'(Q') = M$.
Como $Q' \ll E(Q')$, por el Lema 1.3.4 3), tenemos que $M = \theta(Q') \ll E(M)$.
Por lo tanto, M es superfluo. ■

Definición 2.0.4. *Sea M un $R-$módulo derecho. Definimos y denotamos el siguiente conjunto:*

$$Z^*(M) = \{m \in M | mR \text{ es superfluo}\}.$$

*El cual llamaremos **submódulo cosingular** de M.*

Con esta definición, demostraremos que algunas de las propiedades y resultados conocidos para los módulos singulares tienen contrapartes directas en el contexto de los módulos cosingulares. Este es el caso de los lemas que abordaremos a continuación.

Lema 2.0.5. Si E es un $R-$módulo derecho inyectivo, entonces $Z^*(E) = Rad(E)$.

Demostración. Sea $x \in Z^*(E)$. Entonces, $x \in E$ y xR es un módulo superfluo derecho. Por la Proposición 2.0.2, se tiene que $xR \ll E(xR) \leq E$. Según el Lema 1.3.4 1), concluimos que

$xR \ll E$. Por lo tanto $x \in Rad(E)$.
Por otro lado, sea $x \in Rad(E)$. Entonces, existen $L_1, ..., L_n \ll E$ y $x_i \in L_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ tales que $x = x_1 + ... + x_n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} xR &= (x_1 + ... + x_n)R \\ &\leq x_1R + ... + x_nR \\ &\leq L_1 + ... + L_n \\ &\ll E. \quad \text{(por el Lema 1.3.5 1))} \end{aligned}$$

Esto implica que $xR \ll E$. En consecuencia $x \in Z^*(E)$. ∎

Lema 2.0.6. Si N es submódulo de un $R-$módulo derecho M, entonces $Z^*(N) = N \cap Z^*(M)$.

Demostración. Sea $n \in Z^*(N)$. Entonces $n \in N$ y nR es un módulo superfluo. Dado que $N \leq M$, aseguramos que $n \in M$. Además, al ser nR un módulo superfluo, se sigue que $n \in Z^*(M)$.
Por otro lado, consideremos a $n \in N \cap Z^*(M)$. De esta manera, $n \in Z^*(M)$, lo que indica que nR es superfluo. Además, dado que $n \in N$, concluimos que $n \in Z^*(N)$. ∎

Lema 2.0.7. Si $\varphi : M \longrightarrow M'$ es un morfismo de $R-$módulos derechos, entonces $\varphi(Z^*(M)) \leq Z^*(M')$.

Demostración. Consideremos las inclusiones $\iota : M \longrightarrow E(M)$ e $\iota' : M' \longrightarrow E(M')$. Dado que $\iota'\varphi : M \longrightarrow E(M')$ es un morfismo, ι es un monomorfismo y $E(M')$ es un $R-$módulo derecho inyectivo, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & E(M) \arrow[ddl, dashed, "\theta"] \\ M' \arrow[d, "\iota'"'] & \\ E(M') & \end{tikzcd}$$

Donde el morfismo $\theta : E(M) \longrightarrow E(M')$ hace que el diagrama conmute, es decir, $\iota'\varphi = \theta\iota$.
Según el Teorema 1.7.3, $\theta(Rad(E(M))) \leq Rad(E(M'))$, y por el Lema 2.0.5, obtenemos que $\theta(Z^*(E(M))) \leq Rad(E(M'))$. Por lo tanto, $\theta(Z^*(M)) \leq Rad(E(M'))$. Además, notemos que

$$\begin{aligned} \theta(Z^*(M)) &= \theta(\iota(Z^*(M))) \\ &= \theta\iota(Z^*(M)) \\ &= \iota'\varphi(Z^*(M)) \\ &= \varphi(Z^*(M)). \end{aligned}$$

En resumen, $\varphi(Z^*(M)) \leq Rad(E(M'))$ y $\varphi(Z^*(M)) \leq M'$. Por lo tanto, $\varphi(Z^*(M)) \leq M' \cap Rad(E(M')) = M' \cap Z^*(E(M')) = Z^*(M')$. ■

Lema 2.0.8. Si E y M son $R-$módulos derechos tales que E es inyectivo y $M \leq E$, entonces $Z^*(M) = M \cap Rad(E(M)) = M \cap Rad(E)$.

Demostración. Partiendo del hecho de que $M \leq E(M)$, podemos establecer según el Lema 2.0.6 y el Lema 2.0.5 que, $Z^*(M) = M \cap Z^*(E(M)) = M \cap Rad(E(M))$.
Asimismo, por hipótesis $M \leq E$, obtenemos que $Z^*(M) = M \cap Z^*(E) = M \cap Rad(E)$. ■

Lema 2.0.9. Consideremos la familia de $R-$módulos derechos $\{M_i\}_{i\in I}$ y definamos $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Entonces $Z^*(M) = \bigoplus_{i\in I} Z^*(M_i)$.

Demostración. Consideremos las proyecciones canónicas $\pi_i : M \longrightarrow M_i$ para cada $i \in I$. Sea $m \in Z^*(M)$. Entonces podemos expresar $m = m_1 + ... + m_n$ para algún entero positivo n y elementos $m_j \in M_{i_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ para distintos $i_1, ..., i_n$ en I. Según el Lema 2.0.7, para cada $1 \leq j \leq n$, se cumple que $m_j = \pi_{i_j}(m) \in \pi_{i_j}(Z^*(M)) \leq Z^*(M_i)$. De esta manera, $m \in \bigoplus_{i\in I} Z^*(M_i)$.
Para abordar la contención faltante, de acuerdo con el Lema 2.0.6, $Z^*(M_i) = M_i \cap Z^*(M)$. Lo que implica que $Z^*(M_i) \leq Z^*(M)$ para cada $i \in I$, por ende $\bigoplus_{i\in I} Z^*(M_i) \leq Z^*(M)$. ■

Para el siguiente resultado, es necesario introducir algunas definiciones y comentarios que serán utilizadas en su demostración. Sin embargo, estos conceptos solo se usarán en la próxima proposición, por lo que no será necesario considerarlos para el resto del trabajo. Aún así, destacamos la importancia de la caracterización de los módulos superfluos, ya que su relevancia se extiende a otro capítulo además de este.

Definición 2.0.10. *Sean S y R anillos y Q un $S-R-$bimódulo.*

*1) Q es **cuasi-Frobenius** si:*

i) Es fiel respecto a S y R.

ii) Para todo ideal izquierdo máximo I de S y para todo ideal derecho máximo J de R, los anuladores derecho $r_Q(I)$ e izquierdo $l_Q(J)$ son inescindibles en sus respectivos anillos.

*2) Sean M un $R-$módulo derecho y $M^* = Hom_R(M, Q)$ el módulo que consiste de todos los morfismos de M en Q. Para todo $x \in M$ y $f \in M^*$ denotaremos por fx a $f(x)$, entonces M^* es un $S-$módulo izquierdo estableciendo que $s(fx) = (sf)x$ para toda $s \in S$. Llamaremos a M^* como **módulo dual izquierdo** de M con respecto a Q.*

3) Supongamos que para cualesquiera $x \in M$, $f \in M^*$ se define un producto fx en Q que satisface las siguientes condiciones para $f, f' \in M^*$, $x, x' \in M$, $r \in R$ y $s \in S$:

i) $(f + f')x = fx + f'x$

ii) $f(x+x') = fx + fx'$

iii) $(sf)x = s(fx) \quad y \quad (fx)r = f(xr)$

*Diremos que M es **ortogonal** a M^* con respecto a Q si $fM = 0$ para todo $f \in M^*$ y $M^*x = 0$ para todo $x \in M$ implican que $f = 0$ y $x = 0$.*

Por otro lado, consideremos un anillo artiniano derecho R. En este caso, solo existe un número finito de $R-$módulos derechos simples no isomorfos, sean E_j con $j = 1, ..., n$ sus cápsulas injectivas. Por el Teorema de Hopkins-Levitzki 1.7.10 y el Teorema 1.5.6 (c), sabemos que $E = \bigoplus E_j$ es un $R-$módulo derecho inyectivo.
Sea $S = End_R(E)$. Según [6, pag. 59-60], tenemos que ${}_SE_R$ es un $S-R-$bimodulo fiel. Además, por [1, Teorema 3] el bimodulo ${}_SE_R$ es un módulo cuasi-Frobenius y, por [1] R_R es ortogonal a ${}_SE$ con respecto a ${}_SE_R$.
Con esto en cuenta, abordemos la siguiente proposición.

Proposición 2.0.11. Sean R un anillo artiniano derecho y M un $R-$módulo derecho. Entonces, son equivalentes:

(a) M es superfluo.

(b) Para todo morfismo $\varphi : M \longrightarrow E$, $\varphi(M)$ es superfluo.

(c) Para todo morfismo $\varphi : M \longrightarrow E_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$, $\varphi(M)$ es superfluo.

(d) $Mr_R(J(R)) = 0$, donde $r_R(J(R))$ es el anulador derecho del radical de Jacobson de R.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Consideremos la inclusión $\iota : M \longrightarrow E(M)$. Dado que ι es un monomorfismo y E es un $R-$módulo derecho inyectivo, sabemos que existe un morfismo $\theta : E(M) \longrightarrow E$ tal que $\varphi = \theta\iota$. Es decir, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & E(M) \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Como M es superfluo, por la Proposición 2.0.2, $M \ll E(M)$ y por el Lema 1.3.4 3), $\theta(M) \ll E$. Ahora, observemos que $\varphi(M) = \theta\iota(M) = \theta(M)$, entonces $\varphi(M) \ll E$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Es claro.

(c) $\Rightarrow$ (a) Como R es artiniano derecho, por el Teorema 1.5.9, $E(M) = \oplus_{i \in I} E_i$ donde cada E_i es isomorfo a algún E_j con $j = 1, 2, ..., n$. Sean $\pi_i : E(M) \longrightarrow E_i$ las proyecciones canónicas para cada $i \in I$ e $\iota : M \longrightarrow E(M)$ la inclusión de E en $E(M)$. Por hipótesis $(\pi_i\iota)(M)$ es superfluo, por lo tanto está contenido en $Rad(E_i)$ para cada $i \in I$. Entonces,

$$M \leq \bigoplus_{i \in I} (\pi_i\iota)(M) \leq \bigoplus_{i \in I} Rad(E_i) = Rad(\bigoplus_{i \in I} E_i) = Rad(E(M)).$$

Según el Corolario 1.7.7 2), $Rad(E(M))$ es superfluo, entonces $M \leq Rad(E(M)) \ll E(Rad(E(M)))$. Así por el Lema 1.3.4 1), tenemos que M es superfluo.

(a) $\Leftrightarrow$ (d) Por los incisos anteriores, un $R-$módulo derecho M es superfluo si y solo si para todo morfismo de $R-$módulos derechos $\varphi : M \longrightarrow E$ se cumple que $\varphi(M) \ll E$. Como R es artiniano, de manera equivalente tenemos $\varphi(M) \subseteq Rad(E) = EJ(R)$ para todo morfismo de $R-$módulos derechos.

Como ${}_SE_R$ es un $S-R-$bimódulo cuasi-Frobenius y R_R es ortogonal a ${}_SE$ con respecto a ${}_SE_R$, debido a las relaciones del anulador entre los submódulos de R_R y ${}_SE$ en [1], vemos que $l_Er_R(EJ(R)) = EJ(R)$. Dado que E es fiel, $r_R(E) = \{0\}$. Entonces, $l_Er_R(EJ(R)) = l_Er_R(J(R))$.

Así $\varphi(M) \subseteq l_E(r_R(J(R)))$ para cada $\varphi : M \longrightarrow E$ si y solo si $\varphi(M)r_R(J(R)) = 0$ para cada φ. Es decir, $\varphi(Mr_R(J(R))) = 0$ para cada $\varphi : M \longrightarrow E$. Por lo tanto, M es superfluo si y solo si $Mr_R(J(R)) \subseteq \bigcap_{\varphi:M\longrightarrow E} Ker(\varphi) = 0$ para ${}_SE$ un cogenerador.

■

Lema 2.0.12. Para R un anillo artiniano derecho y un $R-$módulo derecho M, se cumple que $Z^*(M) = \{m \in M | mr_R(J(R)) = 0\}$.

Demostración. Sea $m \in Z^*(M)$. Entonces, mR es un módulo superfluo, y de acuerdo con la Proposición 2.0.11(d) se cumple que $(mR)r_R(J(R)) = \{0\}$. Dado que $m \in (mR)r_R(J(R))$ concluimos que $mr_R(J(R)) = \{0\}$.
Por otro lado, consideremos $m \in M$ tal que $mr_R(J(R)) = 0$. Observemos que para $a \in R$, se cumple $ar_R(J(R)) \subseteq r_R(J(R))$ y, dado que el anulador es un ideal izquierdo de R, también se tiene $Rr_R(J(R)) \subseteq r_R(J(R))$. Por lo tanto, $(mR)r_R(J(R)) \subseteq mr_R(J(R)) = \{0\}$. De acuerdo con la Proposición 2.0.11(d), se concluye que mR es un módulo superfluo, es decir, $m \in Z^*(M)$. ■

La introducción del concepto dual de un módulo singular es la más relevante a considerar en este capítulo. Uno de los objetivos en este capítulo es establecer una conexión entre los resultados presentados hasta ahora y las propiedades subsiguientes sobre los módulos y anillos que estamos por definir. Continuemos con la definición.

Definición 2.0.13. *Sea R un anillo y M un $R-$módulo derecho. Se dice que M es* ***cosingular*** *si $Z^*(M) = M$. Además, R se denomina* ***cosingular derecho*** *si el $R-$módulo derecho R es cosingular.*

Observación 2.0.14. Para un $R-$módulo derecho M, es evidente que el submódulo cosingular de M satisface la definición de un módulo cosingular. Como $Z^*(M) \leq M$, la demostración se completa utilizando el Lema 2.0.6, pues queda establecido que $Z^*(Z^*(M)) = Z^*(M) \cap Z^*(M) = Z^*(M)$.

La siguiente proposición nos muestra la relación entre los módulos superfluos y los módulos cosingulares. Será muy útil distinguir bajo qué condiciones ambos conceptos son equivalentes. Sin embargo, independientemente de las hipótesis, siempre podemos asegurar una implicación. Veamos.

Proposición 2.0.15. Sea R un anillo perfecto derecho. Un $R-$módulo derecho es superfluo si y solo si es cosingular.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea M un $R-$módulo derecho superfluo. Observemos que $Z^*(M) \leq M$, por lo tanto, bastará demostrar que $M \leq Z^*(M)$.
Dado que M es un módulo superfluo, según la Proposición 2.0.2, $M \ll E(M)$. Tomemos un elemento $x \in M$. Entonces $xR \subseteq M \ll E(M)$, como consecuencia del Lema 1.3.4 1), $xR \ll E(M)$, es decir, xR es un módulo superfluo. De esta manera, concluimos que $x \in Z^*(M)$.

[$\Leftarrow$ Según el Teorema 1.8.5, sabemos que $Rad(E(M)) \ll E(M)$, lo que implica que $Rad(E(M))$ es el submódulo superfluo máximo de $E(M)$.
Si suponemos que M es cosingular, entonces $M = Z^*(M)$. Por el Lema 2.0.2, $Z^*(M) = M \cap Rad(E(M))$, entonces $M \subseteq Rad(E(M))$. Dado que $Rad(E(M)) \ll E(M)$, según el Lema 1.3.4 1), $M \ll E(M)$.
Por lo tanto, por la Proposición 2.0.2, M es superfluo.

■

Observación 2.0.16. Para demostrar la necesidad de la proposición anterior, no se hizo uso de la suposición de que el anillo R es perfecto derecho. Entonces, podemos afirmar que un $R-$módulo derecho superfluo siempre es cosingular.

Las siguientes demostraciones tienen como objetivo verificar propiedades de los módulos cosingulares que serán referenciadas frecuentemente en los argumentos de los capítulos que siguen, en particular el lema y el corolario que aparecen de inmediato.

Lema 2.0.17. Para cualquier anillo R, la clase de $R-$módulos derechos cosingulares es cerrada bajo submódulos, imágenes homomorfas y sumas directas. Sin embargo, no es cerrada en general bajo extensiones esenciales.

Demostración. Consideremos un $R-$módulo derecho cosingular M.
Para comenzar, sea $A \leq M$. Por el Lema 2.0.6, obtenemos que $Z^*(A) = A \cap Z^*(M) = A \cap M = A$, lo que implica que $Z^*(A) = A$. Por lo tanto, A también es un $R-$módulo cosingular.
Por otro lado, supongamos que $\varphi : M \longrightarrow N$ es un morfismo de $R-$módulos derechos. Observemos que $Z^*(\varphi(M)) \leq \varphi(M)$, así que veamos la otra contención. De acuerdo con el Lema 2.0.7, tenemos $\varphi(Z^*(M)) \leq Z^*(N)$, y dado que M es cosingular, $\varphi(M) \leq Z^*(N)$. Por lo tanto, si tomamos $m \in \varphi(M)$, entonces $m \in Z^*(N)$, lo que implica que mR es un módulo superfluo. Por ende, $m \in Z^*(\varphi(M))$. Concluimos entonces que $\varphi(M) = Z^*(\varphi(M))$.
Ahora, sean $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de $R-$módulos derechos cosingulares y $M' = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Entonces, $M' = \bigoplus_{i \in I} Z^*(M_i)$. Por el Lema 2.0.9, $Z^*(M') = \bigoplus_{i \in I} Z^*(M_i)$ lo que implica que $M' = Z^*(M')$.

Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} M_i = Z^*(\bigoplus_{i\in I} M_i)$.
Por último, tomemos un campo F y consideremos $R = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) | a, b \in F\}$. Entonces R es un anillo conmutativo, además por el Teorema 1.5.5 es artiniano. Y afirmamos que el radical de Jacobson de R es $J(R) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
Sea $r = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in R$. Note que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$r^n = \begin{pmatrix} a^n & n(a^{-1}b) \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Entonces $r^n = 0$ si y solo si $a = 0$. Entonces los nilpotentes tienen la forma $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Por el Corolario 1.7.7 1), tenemos que $J(R) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
Notemos que $r_R(J(R)) = J(R)$ y que por el Lema 1.3.6, $J(R)$ es un ideal esencial de R_R. Por el Lema 2.0.12, el $R-$módulo $J(R)$ es cosingular, pero su extensión esencial R_R no lo es. ∎

Corolario 2.0.18. Si R es un anillo cosingular derecho, entonces todo $R-$módulo derecho es cosingular.

Demostración. Sea M un $R-$módulo derecho. Sabemos que $Z^*(M) \leq M$, entonces basta con demostrar que $M \leq Z^*(M)$.
Sea $m \in M$. Definimos el morfismo de $R-$módulos derechos $\varphi : R \longrightarrow mR$ como $\varphi(r) = mr$ para un r fijo. Por hipótesis, el $R-$módulo derecho R es cosingular, entonces $\varphi(R) = mR$ también es cosingular según el Lema 2.0.17, es decir, $mR = Z^*(mR)$. Dado que $mR \leq M$, por el Lema 2.0.6, $Z^*(mR) \leq Z^*(M)$. Por lo que $mR \leq Z^*(M)$. Como esto ocurre para cualquier $m \in M$ y $M = \sum_{m\in M} mR$, concluimos que $M \leq Z^*(M)$.
Por lo tanto, $M = Z^*(M)$. ∎

Lema 2.0.19. Sea M un $R-$módulo derecho. Si M es semisimple e inyectivo, entonces $Z^*(M) = 0$.

Demostración. Sea M un $R-$módulo inyectivo. Por el Lema 2.0.17, la parte cosingular es cerrada bajo sumas directas. Además, debido a que M es semisimple, según la Proposición 1.6.1 podemos asumir sin pérdida de generalidad que M es simple. Entonces, $Z^*(M) = 0$ o $Z^*(M) = M$.
Supongamos que $Z^*(M) = M$. Por la Observación 1.1.11, sabemos que $mR = M$ y, dado que $Z^*(M) = \{m \in M | mR \text{ es superfluo }\}$, podemos afirmar que M es superfluo. Por el Lema 2.0.2, tenemos que $M \ll E(M) = M$, lo cual resulta en una contradicción por la Observación 1.3.3 3).
Por lo tanto, $Z^*(M) = 0$. ∎

Lema 2.0.20. Sea M un $R-$módulo derecho cosingular. Para cualesquiera $Q \leq P \leq M$, si $Z^*\left(\frac{P}{Q}\right) = 0$, entonces $\frac{P}{Q} = 0$.

Demostración. Consideremos que $Z^*(M) = M$ y $Z^*\left(\frac{P}{Q}\right) = 0$. Sea $x \in P$. Observemos que $Z^*\left(\frac{xR+Q}{Q}\right) = 0$, además, xR y $\frac{xR+Q}{Q}$ son $R-$módulos derechos superfluos. Luego, por la

Observación 2.0.16, $\frac{xR+Q}{Q}$ es cosingular, por lo tanto $\frac{xR+Q}{Q} = Z^*(\frac{xR+Q}{Q}) = 0$. Esto implica que $xR + Q = Q$, entonces $x \in Q$. Por lo tanto $P = Q$, es decir, $\frac{P}{Q} = 0$. ∎

A modo de ejemplos de anillos cosingulares derechos, presentamos los siguientes dos lemas que describen propiedades que estos anillos satisfacen debido a una equivalencia, y conceptos que no pueden cumplirse simultáneamente.

Lema 2.0.21. Un anillo R es cosingular derecho si y solo si $E = Rad(E)$ para todo $R-$módulo derecho inyectivo E.

Demostración. $\Rightarrow$] Queda demostrado utilizando el Corolario 2.0.18 y el Lema 2.0.5.

[$\Leftarrow$ Sea $E(R)$ la cápsula inyectiva del $R-$módulo derecho R. Por hipótesis $E(R) = Rad(E(R))$, entonces utilizando el Lema 2.0.6, obtenemos:

$$\begin{aligned} Z^*(R_R) =& R_R \cap Z^*(E(R)) \\ =& R_R \cap Rad(E(R)) \quad \text{(por el Lema 2.0.5)} \\ =& R_R \cap E(R) \\ =& R_R. \end{aligned}$$

Por lo tanto, R_R es cosingular.

∎

Lema 2.0.22. No existen anillos perfectos derechos que sean cosingulares derechos.

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea R un anillo perfecto derecho y también cosingular derecho. Según el Lema 2.0.21, si R es cosingular derecho, entonces el $R-$módulo derecho inyectivo $E(R)$ satisface $E(R) = Rad(E(R))$, lo que implica que $E(R)$ no tiene submódulos máximos.
Sin embargo, como R es perfecto derecho, por el Teorema 1.8.7, todo $R-$módulo derecho contiene un submódulo máximo, es decir $E(R) \neq Rad(E(R))$. Esto entra en conflicto con lo establecido anteriormente.
Por lo tanto, no existe un anillo perfecto derecho que sea consingular derecho. ∎

Capítulo 3

Módulos que satisfacen (S*)

El título de esta tesis refleja el énfasis en comprender las estructuras algebraicas donde ciertos submódulos se comportan de manera excepcional dentro de sus cápsulas inyectivas. Esta peculiaridad nos lleva a considerar los módulos cosingulares como elementos fundamentales en la formulación de nuestras definiciones y teoremas.
En este capítulo nos adentramos en el estudio de los módulos con propiedades singulares relacionadas con la estructura de sus submódulos y su interacción con los módulos cosingulares. En principio, nos enfocamos en la construcción de los llamados $(D1)-$módulos, que constituyen una clase especial de módulos cuya caracterización está intrínsecamente ligada a la noción de módulos superfluos.
A medida que avanzamos hacia la definición de un módulo que satisface (S^*), entramos en un terreno donde los módulos cosingulares desempeñan un papel fundamental, ya que esta propiedad establece condiciones adicionales para los módulos con submódulos que exhiben comportamientos específicos respecto a la descomposición y la cosingularidad.
Nos concentramos en explorar las interrelaciones entre los $(D1)-$módulos, los módulos que satisfacen (S^*), y los resultados asociados con los submódulos cosingulares. En este contexto, este capítulo representa una continuación natural de la sección anterior, proporcionando una caracterización de la propiedad (S^*).

Definición 3.0.1. *Un $R-$módulo derecho M es considerado **(D1)** si, para cada submódulo N de M, existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq N$ y $N \cap M_2 \ll M$.*

Proposición 3.0.2. Sean M un $R-$módulo derecho y $A, L \leq M$. El $R-$módulo derecho L es suplemento de A en M si y solo si $M = A + L$ y $A \cap L \ll L$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que L es suplemento de A. Basta con demostrar que $A \cap L \ll L$. Sea B un $R-$módulo derecho tal que $B \leq L$ y $(A \cap L) + B = L$. Observemos que $M = A + L = A + (A \cap L) + B = A + B$. Como L es mínimo con esa propiedad y $B \leq L$, entonces $B = L$.

[$\Leftarrow$ Consideremos que $M = A + L$ y $A \cap L \ll L$. Entonces, para cualquier submódulo B de L tal

que $(A \cap L) + B = L$, implica que $B = L$.
Supongamos que existe $L' \subseteq L$ tal que $M = A + L'$. Observemos que, por Ley Modular (Lema 1.1.17), $(A \cap L) + L' = L \cap (A + L') = L \cap M = L$. Por lo tanto, $L = L'$.

■

Definición 3.0.3. *Decimos que un $R-$módulo derecho M* ***satisface (S*)*** *si, para todo submódulo N de M, existe un sumando directo K de M tal que $K \leq N$ y $\frac{N}{K}$ es cosingular. Un anillo R* ***satisface (S*)*** *si el $R-$módulo derecho R satisface (S*).*

Esta definición marca el punto de partida fundamental para el desarrollo de la tesis, por lo cual enfatizamos su importancia. Esto queda evidenciado desde el primer resultado que presentamos, el cual desempeña un papel crucial en diversas demostraciones. Este resultado nos muestra la relación que existe entre los $(D1)-$módulos y la propiedad (S^*). Más adelante discutiremos las condiciones necesarias para que ambos conceptos sean equivalentes. Sin embargo, por el momento y sin considerar hipótesis adicionales, podemos afirmar lo siguiente.

Lema 3.0.4. Los $(D1)-$módulos satisfacen (S^*). Sin embargo, en general la recíproca no es verdadera.

Demostración. Sea M un $(D1)-$módulo. Por definición, para cada $N \leq M$, existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq N$ y $N \cap M_2 \ll M$. Ahora, debemos demostrar que $\frac{N}{M_1}$ es cosingular.
Sabemos que $N \cap M_2 \ll M$ y, observemos que por Ley Modular (Lema 1.1.17), $N = M \cap N = (M_1 \oplus M_2) \cap N = (M_2 \cap N) \oplus M_1$. Entonces,

$$\frac{N}{M_1} = \frac{(M_2 \cap N) \oplus M_1}{M_1} \cong M_2 \cap N.$$

Por la Proposición 2.0.3, $\frac{N}{M_1}$ es superfluo y, por la Observación 2.0.16, es cosingular.
Por último, consideremos $R = \mathbb{Z}$. Dado que $Z^*(R) = R$, R satisface (S^*). Sin embargo, por [13, pag. 56], ningún submódulo propio de R tiene un suplemento en R, entonces R no es un (D1)-módulo. ■

Las demostraciones de los siguientes lemas se deducen casi directamente de las definiciones, pero aportan resultados útiles y que recurrentemente apareceran como referencias. Estos resultados abordan una caracterización de los módulos que satisfacen (S^*) y la cerradura de la propiedad (S^*) bajo submódulos.

Lema 3.0.5. Sea M un $R-$módulo derecho. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) M satisface (S^*).

(b) Para todo submódulo N de M, M tiene una descomposición $M = A \oplus B$ tal que $A \leq N$ y $N \cap B$ es cosingular.

(c) Para todo submódulo N de M, N tiene una descomposición $N = A \oplus B$ tal que $A \leq_{\oplus} M$ y B es cosingular.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que M satisface (S^*). Resta demostrar que $N \cap B$ es cosingular.

Por Ley Modular (Lema 1.1.17) observemos que, $N = M \cap N = (A+B) \cap N = A + (N \cap B)$. Por lo tanto

$$\frac{N}{A} = \frac{(N \cap B) + A}{A} \cong \frac{N \cap B}{(N \cap B) \cap A} = \frac{N \cap B}{\{0\}} \cong N \cap B.$$

Por hipótesis, $\frac{N}{A}$ es cosingular. Entonces, según el Lema 2.0.17, $N \cap B$ es cosingular.

(b) $\Rightarrow$ (c) Supongamos que para cada $N \leq M$, existe una descomposición $M = A \oplus B$ tal que $A \leq N$ y $N \cap B$ es cosingular. Según la Ley Modular (Lema 1.1.17), tenemos que $N = N \cap M = N \cap (A + B) = (N \cap B) + A$, entonces $N = (N \cap B) \oplus A$. Por hipótesis, el sumando $N \cap B$ es cosingular, entonces, $B' = N \cap B$ es cosingular, así $N = A \oplus B'$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que cualquier $N \leq M$, tiene una descomposición $N = A \oplus B$ tal que $A \leq_{\oplus} M$ y B es cosigular. Sea $C \leq M$ tal que $M = A \oplus C$. Dado que

$$\frac{N}{A} = \frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{B \cap A} = \frac{B}{\{0\}} \cong B.$$

Entonces, por el Lema 2.0.17, $\frac{N}{A}$ es consingular.

■

Lema 3.0.6. Si M es un $R-$módulo derecho que satisface (S^*), entonces cualquier submódulo de M satisface (S^*).

Demostración. Sean M un $R-$módulo derecho que satisface (S^*) y $H \leq N \leq M$. Utilizando el Lema 3.0.5, nuestra hipótesis implica que $H = K \oplus B$, donde $K \leq_{\oplus} M$ y B es cosingular. Sea $L \leq M$, tal que $M = K \oplus L$. Entonces, por Ley Modular (Lema 1.1.17), $N = (L \cap N) + K$. Además, $(N \cap L) \cap K \subseteq L \cap K = \{0\}$. Por lo tanto, $N = (N \cap L) \oplus K$, donde $K \leq H$. Para argumentar por qué $\frac{H}{K}$ es cosingular, basta con observar que $\frac{H}{K} = \frac{K+B}{K} \cong B$, y que por hipótesis B es cosingular.
Finalmente, concluimos que N satisface (S^*). ■

Anteriormente hemos argumentado que no todo módulo que satisface (S^*) es necesariamente un $(D1)-$módulo. Sin embargo, observemos que, según la demostración que se presenta en el siguiente lema, basta con requerir que la parte consingular de un módulo sea un submódulo superfluo para afirmar que ambos conceptos son equivalentes. Veamos.

Lema 3.0.7. Si M es un $R-$módulo derecho que satisface (S^*) y $Z^*(M) \ll M$, entonces M es un $(D1)-$módulo.

Demostración. Sea M un $R-$módulo derecho que satisface (S^*). Por definición, para todo $N \leq M$, existe $K \leq_{\oplus} M$ tal que $K \leq N$ y $\frac{N}{K}$ es cosingular. Sea $L \leq M$ tal que $M = K \oplus L$. Entonces, por Ley Módular (Lema 1.1.17), $N = (L \cap N) \oplus K$, lo que implica que $\frac{N}{K} \cong N \cap L$. Dado que $\frac{N}{K}$ es cosingular, se sigue que $N \cap L$ también lo es. Además, observemos que

$$N \cap L = Z^*(N \cap L) = (N \cap L) \cap Z^*(M) \leq Z^*(M) \ll M.$$

Entonces, por el Lema 1.3.4 1), $N \cap L \ll M$. Por lo tanto, M es un $(D1)-$módulo. ∎

Sin embargo, cuando M es un $(D1)-$módulo, no necesariamente $Z^*(M)$ es superfluo en M. Veamos el siguiente ejemplo, pero antes introduciremos una definición necesaria para su desarrollo.

Definición 3.0.8. *Un anillo R es llamado **GV-anillo derecho** si todo $R-$módulo derecho simple es inyectivo o proyectivo.*

Ejemplo 3.0.9. Consideremos $R = \left[\begin{smallmatrix} F & 0 \\ F & F \end{smallmatrix}\right]$, el anillo de las matrices triángulares inferiores sobre un campo F. Dado que F es un campo, en particular, es un anillo artiniano derecho. Además, como F_F es un módulo artiniano derecho, por el Teorema 1.5.5, el anillo R es artiniano derecho. Ahora, veamos que $J(R) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
Sea $r = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in R$. Note que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$r^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(a^{n-1} + ca^{n-2} + ... + c^{n-2}a + c^{n-1}) & c^n \end{pmatrix}.$$

Para que $r^n = 0$ basta con que $a = 0$ y $c = 0$, es decir, los elementos nilpotentes de R tienen la forma $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Así, por el Corolario 1.7.7 1), tenemos que $J(R) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
Por otro lado, como F es un campo no tiene módulos simples distintos de F, se sigue que $Zoc(F_F) = F$. Además, observe que F_F es un módulo fiel. Por lo tanto, según la Proposición 1.7.12, concluimos que $Zoc(R_R) = \left[\begin{smallmatrix} F & 0 \\ F & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
Observemos que R es un $GV-$anillo derecho.
Según la Proposición 1.5.13, $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ F & F \end{smallmatrix}\right]$ es un ideal inyectivo de R y contiene a todo ideal derecho inyectivo. Sean $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ los $R-$módulos derechos simples de R. Dado que $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{smallmatrix}\right] \leq K$, es inyectivo. Por otro lado, $\left[\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \leq_{\oplus} R$ y $L = \left\{x\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) | x \in F\right\} = \left\langle\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle$.
Con lo anterior, podemos afirmar que $Z^*(R)$ es semisimple.
Sea $m \in Z^*(R)$ distinto de cero. Dado que mR es finitamente generado, existe $K \leq mR$ máximo. De esta forma, si denotamos $S = \frac{mR}{K}$, sabemos que S es simple por la Proposición 1.1.24. Y según la Proposición 1.4.10, S es singular o es proyectivo.
Supongamos que S es singular. Dado que R es un $GV-$anillo derecho, S debe ser inyectivo, y por el Lema 2.0.19, $Z^*(S) = 0$. Por otro lado, según la Observación 2.0.14, podemos aplicar el Lema 2.0.20 para $Z^*(R)$, específicamente para $K \leq mR \leq Z^*(R)$. Como $Z^*(S) = Z^*(\frac{mR}{K}) = 0$, resulta que $\frac{mR}{K} = 0$, lo que implica $mR = K$. Lo cual es imposible ya que entraría en conflicto con la maximalidad de K. Por lo tanto, S es proyectivo.

Entonces, existe $\nu : mR \longrightarrow \frac{mR}{K}$ el morfismo canónico, tal que $K = Ker(\nu) \leq_{\oplus} mR$. Observemos que K no puede ser esencial en mR. En caso contrario, tendríamos que $K = mR$ o $K = \{0\}$. Como $K \lneq mR$, entonces $K = \{0\}$ y $K \leq_{es} mR$, lo que implicaría que $\{0\} \leq_{es} mR$, y por lo tanto $mR = \{0\}$. Llegamos a una contradicción.
Por ende, mR no tiene submódulos esenciales máximos, y según la Proposición 1.6.4 2), mR es semisimple. Dado que $Z^*(R) = \sum_{m \in Z^*(R)} mR$, queda demostrado que $Z^*(R)$ es semisimple.
En consecuencia, note que $J(R) \leq Z^*(R) \leq Zoc(R)$.
Sea $L = \left[\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in Zoc(R_R)$. Como L es simple, es inyectivo o proyectivo. Dado que $Z^*(L) \leq L$, entonces $Z^*(L) = \{0\}$ o $Z^*(L) = L$. Observemos que por el Lema 2.0.19, $Z^*(L) = \{0\}$. Sin embargo, esta opción no es posible porque $L \nleq K$, entonces no es inyectivo. Por lo tanto, $Z^*(L) = L$, es decir, L es cosingular.
Hemos demostrado que R es artiniano derecho, entonces R es perfecto derecho. Así, por la Proposición 2.0.15, L es superfluo. Entonces, $L \leq Z^*(R)$, como $\left[\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{smallmatrix}\right] \leq Z^*(R)$, entonces $\left[\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{smallmatrix}\right] = Zoc(R_R) \leq Z^*(R)$. En consecuencia, $Zoc(R_R) = Z^*(R)$.
Por lo tanto, $Z^*(R)$ es no superfluo en R ya que $J(R) \neq Z^*(R)$.

Otro tipo de relación que vale la pena considerar no necesariamente implica que un concepto derive del otro. Por ejemplo, en el siguiente lema observamos cómo un $(D1)-$módulo puede estar involucrado como un sumando directo de un módulo que satisface (S^*).

Lema 3.0.10. Sea M un $R-$módulo derecho que satisface (S^*). Si existe un suplemento de $Z^*(M)$ en M, entonces hay una descomposición $M = A \oplus B$ tal que A es un $(D1)-$módulo y B es cosingular.

Demostración. Por hipótesis, existe un submódulo A de M, mínimo respecto a la propiedad $M = A + Z^*(M)$. Afirmamos que $A \cap Z^*(M) \ll A$.
Sea $L \leq A$, tal que $(A \cap Z^*(M)) + L = A$. Por Ley Modular (Lema 1.1.17), tenemos que $A = A \cap (L + Z^*(M))$, entonces $A \subseteq L + Z^*(M)$. Así

$$M = A + Z^*(M) \subseteq (L + Z^*(M)) + Z^*(M) = L + Z^*(M) \subseteq A + Z^*(M)$$

Por lo tanto, $A + Z^*(M) = L + Z^*(M)$. Como $L \leq A$ y $L + Z^*(M) = M$, al ser A un suplemento de $Z^*(M)$, implica que $A = L$. Concluimos que, $Z^*(A) = A \cap Z^*(M) \ll A$.
Por otro lado, como M satisface (S^*), existe $K \leq_{\oplus} M$ tal que $K \leq A$ y $\frac{A}{K}$ es cosingular. Sea $B \leq M$ tal que $M = K \oplus B$, por Ley Modular (Lema 1.1.17), $A = K \oplus (A \cap B)$. Como $\frac{A}{K}$ es cosingular, $A \cap B = Z^*(A \cap B) \leq Z^*(A)$. Además, observemos que

$$\begin{aligned} M &= A + Z^*(M) \\ &= (K \oplus (A \cap B)) + Z^*(M) \\ &= (K \oplus Z^*(A \cap B)) + Z^*(M) \\ &= K + Z^*(M). \end{aligned}$$

Entonces $A = K$, pues A es mínimo con tal propiedad. Por lo tanto $M = A \oplus B$.
Según el Lema 3.0.6 y Lema 3.0.7, A es un $(D1)-$módulo. Además,

$$M = A + Z^*(M) = A + Z^*(A) + Z^*(B) = A \oplus Z^*(B).$$

Observemos que $A \oplus B = A \oplus Z^*(B)$ y $Z^*(B) \leq B$, demostremos que $B \leq Z^*(B)$.
Sea $b \in B$, entonces $b \in M = A + Z^*(B)$. En consecuencia, existen $a \in A$ y $b_1 \in Z^*(B)$ tal que $b = a + b_1$, luego $a = b - b_1$. Como $a \in A$ y $b - b_1 \in B$, entonces $b - b_1 = 0$, es decir $b = b_1$. Por lo tanto $b \in Z^*(B)$. Concluimos que $B = Z^*(B)$. ■

Corolario 3.0.11. Si M es un $R-$módulo derecho que satisface la propiedad (S^*), entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$, donde A es semisimple, $Z^*(A) = 0$ y $Z^*(B) \leq_{es} B$.

Demostración. Sea A un seudocomplemento de $Z^*(M)$ en M. Por definición, A es un $R-$módulo derecho máximo con la propiedad $A \cap Z^*(M) = \{0\}$. Dado que M satisface (S^*), existe $K \leq_{\oplus} M$ tal que $K \leq A$ y $\frac{A}{K}$ es cosingular. Ahora, consideremos $B \leq M$ tal que $M = K \oplus B$. Entonces, $A = K \oplus (A \cap B)$. Por Lema 3.0.5, $A \cap B = Z^*(A \cap B)$, entonces $Z^*(A \cap B) = (A \cap B) \cap Z^*(M) = B \cap \{0\} = \{0\}$. Por lo tanto, $A \cap B = \{0\}$. Como $A = K$, usando un argumento similar en el Lema 3.0.10, $M = A \oplus B$.
Según el Lema 3.0.6, A satisface (S^*). Entonces, para todo $K \leq A$, tenemos que $K = N_1 \oplus N_2$, donde $N_1 \leq_{\oplus} A$ y N_2 es cosingular. Por Lema 3.0.5, $Z^*(N_2) = N_2 \cap Z^*(A) = N_2 \cap \{0\}$, lo que implica que $Z^*(N_2) = N_2 = \{0\}$. Por lo tanto, $N_1 = K$ y $N_1 \leq_{\oplus} A$, lo que muestra que A es semisimple.
Ahora, $Z^*(M) = Z^*(A) + Z^*(B) = \{0\} + Z^*(B)$, entonces $Z^*(M) = Z^*(B)$. Demostremos que $A \oplus Z^*(M) \leq_{es} M$.
Sea $U \leq M$ tal que $(Z^*(M) \oplus A) \cap U = \{0\}$. Entonces, la suma $(Z^*(M) \oplus A) + U$ es directa, pero $Z^*(M) \oplus (A \oplus U) = (Z^*(M) \oplus A) \oplus U$, lo que implica que $Z^*(M) \cap (A \oplus U) = \{0\}$. Como A es máximo con esta propiedad y $A \leq A + U$, entonces $A + U = A$, es decir, $U \leq A$. Luego, $U \leq A + Z^*(M)$. Por lo tanto, $(A + Z^*(M)) \cap U = U$, es decir, $U = \{0\}$. Así, concluimos que $A \oplus Z^*(M) \leq_{es} M$, y por la Propiedad 1.3.9, $Z^*(B) \leq_{es} B$. ■

Sin embargo, la inversa del Corolario 3.0.11 no es cierta en general. Para abordar el siguiente ejemplo que nos ayuda a demostrarlo, necesitamos recordar que un $R-$módulo derecho es definido como ***hueco*** si todo submódulo propio es superfluo. Además, entenderemos que un anillo R es ***QF-3 derecho*** si existe un $R-$módulo derecho tal que es isomorfo a un sumando directo para cada $R-$módulo derecho fiel.

Ejemplo 3.0.12. Sean F un campo, L un $F-$espacio vectorial de dimensión finita y $L^* = Hom(L, F)$. Consideremos a

$$R = \begin{bmatrix} F & L^* & F \\ 0 & F & L \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}.$$

R es un anillo perfecto derecho y $QF-3$ derecho. Si $[L:F]\geq 2$, por [8, Ejemplo 1], no es cierto que todo $R-$módulo derecho inyectivo innescindible es hueco.
Esto implica que, existe un $R-$módulo derecho inyectivo inescindible M que no es hueco. En consecuencia, $Z^*(M)=Rad(M)\ll M$. Si $Z^*(M)=0$, entonces M es semisimple ya que R es perfecto derecho, pero esto es una contradicción. Si M satisface (S^*), entonces M es un $(D1)-$módulo pues por el Lema 3.0.7, tenemos que $Z^*(M)\ll M$. Según [13, Corolario 4.9], M es hueco, lo cual nuevamente lleva a una contradicción.
Por lo tanto, existe un $R-$módulo derecho uniforme M tal que $Z^*(M)\neq 0$ y que no satisface (S^*).

El siguiente lema generaliza el Corolario 2.0.17 del capítulo anterior. Como mencionamos previamente, este resultado es dual a una propiedad de los módulos singulares. Esta generalización revela la relación entre la parte cosingular de un anillo y la parte cosingular de un módulo.

Lema 3.0.13. Si M es un $R-$módulo derecho, entonces $MZ^*(R)\leq Z^*(M)$.

Demostración. Sea $m\in M$. Definimos la función $\varphi:R\longrightarrow E(M)$ como $\varphi(r)=mr$ para todo $r\in R$. Entonces, φ es un morfismo y puede extenderse a un morfismo $\theta:E(R)\longrightarrow E(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta, es decir, $\varphi=\theta\iota$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & E(R) \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ E(M) & \end{tikzcd}$$

Por el Teorema 1.7.3, sabemos que $\theta(Rad(E(R)))\leq Rad(E(M))$. Sea $a\in Z^*(R)$, según el Lema 2.0.8, $a\in R\cap Rad(E(R))$. Entonces,

$$ma=\varphi(a)=\theta\iota(a)=\theta(a)\in\theta(Rad(E(R)))\leq Rad(E(M)).$$

De acuerdo al Lema 2.0.8, $ma\in M\cap Rad(E(M))=Z^*(M)$. De esto se deduce que $mZ^*(R)\leq Z^*(M)$ y así $MZ^*(R)\leq Z^*(M)$. ∎

Los próximos resultados que concluyen este segundo capítulo tienen como objetivo establecer una relación entre la propiedad (S^*) y un módulo cociente particular. Posteriormente, mediante un listado de equivalencias, se exponen múltiples consecuencias derivadas de considerar un anillo que satisface la propiedad (S^*).

Proposición 3.0.14. Si el anillo R satisface (S^*), entonces $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple para todo $R-$módulo derecho M.

Demostración. Si R es consingular derecho y M es un $R-$módulo derecho, por el Corolario 2.0.18, $M=Z^*(M)$. Por lo tanto, $\frac{M}{Z^*(M)}=\frac{M}{M}\cong\{0\}$, es decir, $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple.

Entonces, supongamos que $R \neq Z^*(R)$. Dado que $Z^*(R) \lneq R$, por el Teorema 1.1.15, existe un ideal derecho máximo P de R tal que $Z^*(R) \leq P$. Según la Proposición 1.1.21 y el Lema 3.0.5, existe un idempotente e y un ideal cosingular derecho C tal que $P = eR \oplus C$. Observemos que $C = Z^*(C) \leq Z^*(R)$. Como $Z^*(R) \leq P$, implica que $P + Z^*(R) = eR + C + Z^*(R)$, es decir, $P = eR + Z^*(R)$.
Dado que $\frac{R}{Z^*(R)} = \{r + Z^*(R) | r \in R\}$ y $(e + Z^*(R))(r + Z^*(R)) = er + Z^*(R)$, tenemos

$$\frac{P}{Z^*(R)} = \frac{eR + Z^*(R)}{Z^*(R)} = (e + Z^*(R))(\frac{R}{Z^*(R)}).$$

En consecuencia, por la Proposición 1.1.21, $\frac{P}{Z^*(R)} \leq_{\oplus} \frac{R}{Z^*(R)}$.
Por otro lado, afirmamos que $\frac{R}{Z^*(R)}$ no tiene submódulos esenciales propios.
Si consideramos $\frac{I}{Z^*(R)} \lneq_{es} \frac{R}{Z^*(R)}$. Entonces $I \lneq R$, lo que implica que existe $P' \leq R$ máximo tal que $I \leq P'$, en consecuencia $\frac{I}{Z^*(R)} \leq \frac{P'}{Z^*(R)}$. Dado que $\frac{P'}{Z^*(R)}$ es máximo, entonces $\frac{I}{Z^*(R)} \oplus \frac{R}{Z^*(R)}$.
Sea $\frac{K}{Z^*(R)} \leq \frac{R}{Z^*(R)}$ tal que $\frac{R}{Z^*(R)} = \frac{P'}{Z^*(R)} \oplus \frac{K}{Z^*(R)}$. Observemos que

$$\frac{I}{Z^*(R)} \lneq_{es} \frac{R}{Z^*(R)} \quad \text{y} \quad \frac{I}{Z^*(R)} \cap \frac{R}{Z^*(R)} = 0,$$

entonces,

$$\frac{K}{Z^*(R)} = 0.$$

Por lo tanto, $\frac{P}{Z^*(R)} = \frac{R}{Z^*(R)}$ y $\frac{P}{Z^*(R)}$ es un submódulo máximo. Esto contradice nuestra hipótesis inicial, por lo que $\frac{R}{Z^*(R)}$ no tiene submódulos esenciales propios.
Así, según la Proposición 1.6.4 1), $\frac{R}{Z^*(R)}$ es semisimple.
Sea M un $R-$módulo cualquiera. Por el Lema 3.0.13, $MZ^*(R) \leq Z^*(M)$, entonces, para cualquier $r \in Z^*(R)$ y $m + Z^*(M) \in \frac{M}{Z^*(M)}$, se cumple que $(m + Z^*(M))r = mr + Z^*(M) = Z^*(M)$. Entonces, según la Proposición 1.1.25, $\frac{M}{Z^*(M)}$ es un $\frac{R}{Z^*(R)}-$módulo.
Concluimos que, $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple. ■

Definición 3.0.15. *Sea M un $R-$módulo derecho. Decimos que un $R-$módulo derecho N está* ***generado*** *por M si existe un epimorfismo $\varphi : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N$ para algún conjunto finito Λ.*
Denotamos como ***Gen(M)*** *a la clase de $R-$módulos generados por M.*

Proposición 3.0.16. Sea M un $R-$módulo derecho. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple.

(b) Para todo $L \leq M$, existe un submódulo $K \leq M$ tal que $L + K = M$ y $L \cap K$ es cosingular.

(c) Existe una descomposición $M = A \oplus B$ tal que A es semisimple, $\frac{B}{Z^*(B)}$ es semisimple y $Z^*(B) \leq_{es} B$.

(d) Para todo $N \in Gen(M)$, $\frac{N}{Z^*(N)}$ es semisimple.

(e) Para todo $N \in Gen(M)$ y para cada $L \leq N$, existe un submódulo $K \leq N$ tal que $L+K = N$ y $L \cap K$ es cosingular.

(f) Para todo $N \in Gen(M)$, existe una descomposición $N = N_1 \oplus N_2$ donde N_1 es semisimple, $\frac{N_2}{Z^*(N_2)}$ es semisimple y $Z^*(N_2) \leq_{es} N_2$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $L \leq M$. Entonces, $\frac{L+Z^*(M)}{Z^*(M)} \leq \frac{M}{Z^*(M)}$, por hipótesis debe ser un sumando directo de $\frac{M}{Z^*(M)}$. Sea $K \leq M$ tal que

$$\frac{L + Z^*(M)}{Z^*(M)} \oplus \frac{K}{Z^*(M)} = \frac{M}{Z^*(M)}, \quad \text{entonces} \quad \frac{L+K}{Z^*(M)} = \frac{M}{Z^*(M)}.$$

Por lo tanto $M = L + K$. Por otro lado, note que

$$\frac{L + Z^*(M)}{Z^*(M)} \cap \frac{K}{Z^*(M)} = \frac{Z^*(M)}{Z^*(M)}.$$

Dado que $Z^*(M) \leq K$, por Ley Modular (Lema 1.1.17), tenemos $Z^*(M) = (L+Z^*(M))\cap K = Z^*(M) + (L \cap K)$. Entonces, $L \cap K \leq Z^*(M)$, así $Z^*(L \cap L) = (L \cap K) \cap Z^*(M) = L \cap K$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\frac{L}{Z^*(M)} \leq \frac{M}{Z^*(M)}$. Como $L \leq M$, existe $K \leq M$ tal que $L + K = M$ y $L \cap K$ es cosingular. Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{L}{Z^*(M)} \cap \frac{K + Z^*(M)}{Z^*(M)} &= \frac{L \cap (K + Z^*(M))}{Z^*(M)} \\ &= \frac{(L \cap K) + Z^*(M)}{Z^*(M)} \\ &= \frac{Z^*(L \cap K) + Z^*(M)}{Z^*(M)} \\ &= \frac{Z^*(M)}{Z^*(M)}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{L}{Z^*(M)} \oplus \frac{K + Z^*(M)}{Z^*(M)} = \frac{M}{Z^*(M)}.$$

Por lo tanto $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sean $\frac{M}{Z^*(M)}$ semisimple y $A \leq M$ el seudocomplemento de $Z^*(M)$ en M. Por la Proposición 1.3.14, sabemos que $A \oplus Z^*(M) \leq_{es} M$.
Además, $A \cong \frac{A \oplus Z^*(M)}{Z^*(M)}$ y es un sumando directo de $\frac{M}{Z^*(M)}$. Por lo tanto, también es semisimple según el Teorema 1.6.1. Sea $\frac{B}{Z^*(M)}$ tal que

$$\frac{A + Z^*(M)}{Z^*(M)} \oplus \frac{B}{Z^*(M)} = \frac{M}{Z^*(M)}.$$

Como

$$\frac{A + Z^*(M)}{Z^*(M)} \oplus \frac{B}{Z^*(M)} = \frac{A + Z^*(M) + B}{Z^*(M)} = \frac{A+B}{Z^*(M)},$$

entonces,

$$\frac{A+B}{Z^*(M)} = \frac{M}{Z^*(M)}.$$

Así, por el Teorema de la Correspondencia, $A+B=M$. Por otro lado, observemos que

$$\frac{A+Z^*(M)}{Z^*(M)} \cap \frac{B}{Z^*(M)} = \frac{Z^*(M)}{Z^*(M)},$$

entonces,

$$\frac{(A+Z^*(M))\cap B}{Z^*(M)} = \frac{Z^*(M)}{Z^*(M)}.$$

Nuevamente, por Teorema de la Correspondencia, $(A+Z^*(M))\cap B = Z^*(M)$. Por Ley Modular (Lema 1.1.17) $(A\cap B)+Z^*(M) = Z^*(M)$, entonces, $A\cap B \leq Z^*(M)$. Como $A\cap B\leq A$, implica que $A\cap B\leq A\cap Z^*(M)=\{0\}$. Por lo tanto $M=A\oplus B$.
Dado que $A\oplus Z^*(M)\leq_{es} M$, por la Propiedad 1.3.9, tenemos que $Z^*(M)\leq_{es} B$. Según el Lema 2.0.9, observe que $Z^*(M)=Z^*(A)\oplus Z^*(B)$, y de acuerdo al Lema 2.0.6, $Z^*(A) = A\cap Z^*(A)=\{0\}$, entonces $Z^*(M)=Z^*(B)$, es decir, $Z^*(B)\leq_{es} B$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Por el Corolario 1.6.3, toda imagen de un módulo semisimple también es semisimple, y, observemos que

$$A\oplus\frac{B}{Z^*(B)} \cong \frac{A+Z^*(B)}{Z^*(B)}\oplus\frac{B}{Z^*(B)} = \frac{A\oplus B}{Z^*(B)} = \frac{M}{Z^*(B)} \cong \frac{\frac{M}{Z^*(B)}}{\frac{Z^*(M)}{Z^*(B)}} \cong \frac{M}{Z^*(M)}.$$

Concluimos que, $\frac{M}{Z^*(M)}$ es semisimple.

(a) $\Leftrightarrow$ (d) La suficiencia es evidente. Procedamos a demostrar la necesidad.
Consideremos a $\frac{M}{Z^*(M)}$ semisimple y $N\in Gen(M)$. Entonces, existe un conjunto finito Λ y un epimorfismo $f: M^{(\Lambda)}\longrightarrow N$.
Definamos para $n\in\Lambda$ a

$$\varphi:\frac{M^{(\Lambda)}}{Z^*(M^{(\Lambda)})}\longrightarrow\left(\frac{M}{Z^*(M)}\right)^{(\Lambda)}$$
$$\varphi((m_1,...,m_n)+Z^*(M^{(\Lambda)})\longmapsto(m_1+Z^*(M),...,m_n+Z^*(M)).$$

Observemos que está bien definida y que es un isomorfismo. Sean

$$(m_1,...,m_n)+Z^*(M^{(\Lambda)}) = (p_1,...,_n)+Z^*(M^{(\Lambda)}) \Rightarrow (m_1,...,m_n)-(p_1,...,p_n)\in Z^*(M^{(\Lambda)})$$
$$\Rightarrow (m_1-p_1,...,m_n-p_1)\in Z^*(M^{(\Lambda)}).$$

Entonces,

$$\frac{M^{(\Lambda)}}{Z^*(M^{(\Lambda)})}\cong\left(\frac{M}{Z^*(M)}\right)^{(\Lambda)}.$$

Además, según el Lema 2.0.7, $f(Z^*(M^{(\Lambda)})) \leq Z^*(N)$. Entonces, obtenemos un epimorfismo

$$f' : \left(\frac{M}{Z^*(M)}\right)^{(\Lambda)} \longrightarrow \frac{N}{Z^*(N)}.$$

Dado que $f'(x + Z^*(M^{(\Lambda)}) = f(x) + Z^*(N) = k + Z^*(N)$, donde $f(x) = k$.

Por último, las equivalencias (d) $\Leftrightarrow$ (e), así como (d) $\Leftrightarrow$ (f), se derivan al tomar un $N \in Gen(M)$ y aplicar las equivalencias (a) $\Leftrightarrow$ (b), así como (a) $\Leftrightarrow$ (c), respectivamente. $\blacksquare$

Capítulo 4

H-Anillos

El cuarto capítulo de esta tesis se centra en el estudio de los $H-$Anillos, término acuñado en honor a Harada. Esta clase fundamental de anillos tiene una caracterización presentada en este trabajo que está estrechamente ligada al concepto de $(D1)-$módulo.
Este capítulo analiza diversos resultados que ilustran la interacción entre los $(D1)-$módulos, los módulos que satisfacen (S^*), y los módulos cosingulares en el contexto de los $H-$Anillos. En particular, destacamos cómo los $H-$Anillos son caracterizados por propiedades específicas, como la presencia de un módulo inyectivo en módulos no-superfluos y la descomposición de los módulos en componentes inyectivos y cosingulares. Sin embargo, el objetivo principal es caracterizar los $H-$Anillos mediante la propiedad (S^*). Este análisis nos permitirá profundizar en nuestra comprensión de las características de otro tipo de anillos que se presentarán en el capítulo final, así como su relación con la teoría de la propiedad (S^*) presentada anteriormente.
Comencemos con la definición del tipo de anillos abordado en este capítulo.

Definición 4.0.1. *Un anillo R se denomina de Harada derecho, o bien **H-anillo derecho**, si cada $R-$módulo inyectivo derecho es un $(D1)-$módulo.*

Lema 4.0.2. Un $R-$módulo derecho M es un $(D1)-$módulo si y solo si para cada submódulo N de M existe un sumando directo M_1 de M tal que $M_1 \leq N$ y $\frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $N \leq M$. Por hipótesis, existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq N$ y $N \cap M_2 \ll M$. Demostremos que $\frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$.
Observemos que

$$\frac{M}{M_1} = \frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} \cong M_2.$$

Y por Ley Modular (Lema 1.1.17), $N = N \cap M = N \cap (M_1 \oplus M_2) = (M_2 \cap N) + M_1$, más aún $N = (M_2 \cap N) \oplus M_1$. Entonces,

$$\frac{N}{M_1} = \frac{(M_2 \cap N) \oplus M_1}{M_1} \cong M_2 \cap N.$$

Dado que $N \cap M_2 \ll M_2$, concluimos $\frac{N}{M_1} \ll \frac{M}{M_1}$.

[$\Leftarrow$ Sea $M_2 \leq M$ tal que $M = M_1 \oplus M_2$. Veamos que $N \cap M_2 \ll M_2$.
Sabemos que
$$\frac{M}{M_1} \cong M_2 \quad \text{y} \quad \frac{N}{M_2} \cong M_2 \cap N.$$
Por lo tanto, $N \cap M_2 \ll M_2$.

■

Lema 4.0.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) Todo $R-$módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero.

(b) Sean E un $R-$módulo derecho inyectivo. Si $A \leq E$ tal que A no es superfluo en E, entonces A contiene un sumando directo no cero de E.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Consideremos un $R-$módulo derecho inyectivo E y $A \leq E$ tal que A no es superfluo en E. Por hipótesis, existe un submódulo inyectivo E_1 de A, entonces $E_1 \leq A \leq E$. Por la Proposición 1.4.14 2), se tiene que $E_1 \leq_{\oplus} E$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sean M un $R-$módulo derecho no superfluo y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Como $M \leq E(M)$, por hipótesis, M contiene un sumando directo no cero de $E(M)$, digamos E'. Y por la Proposición 1.4.11, E' es un $R-$módulo derecho inyectivo.

■

Observación 4.0.4. Según la Proposición 2.0.3, para todo monomorfismo $\varphi : M \longrightarrow Q$ y todo epimorfismo $\varphi' : Q' \longrightarrow M$ de $R-$módulos derechos tales que M es no superfluo, entonces Q y Q' son no superfluos.

Lema 4.0.5. Sea R un anillo donde todo $R-$módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero. Entonces, todo $R-$módulo derecho inyectivo tiene un submódulo inyectivo cíclico no cero.

Demostración. Sea E un $R-$módulo derecho inyectivo distinto de cero. Observe que E es un módulo no superfluo, pues si lo fuera, sería superfluo en su cápsula inyectiva, es decir $E \ll E$. Sin embargo, esto solo puede ocurrir si E es el módulo cero.
Consideremos el epimorfismo $\varphi : \bigoplus_{x\in E} E_x \longrightarrow E$, tal que $E_x = E$ y $\varphi|_{E_x} = 1_E$. Observemos que $\varphi(\sum_{x\in E} xR) = E$, entonces $\bigoplus_{x\in E} xR$ es no superfluo por la Observación 4.0.4. Por lo tanto, por hipótesis $\bigoplus_{x\in E} xR$ contiene un $R-$módulo derecho inyectivo $\hat{E}$. Así, algún xR contiene un submódulo inyectivo isomorfo a un sumando directo de $\hat{E}$ por [16]. ■

Definición 4.0.6. *Diremos que un $R-$módulo derecho M es* **continuo** *si satisface las siguientes condiciones:*

C_1) *Todo submódulo de M es esencial en un sumando directo de M.*

C_2) *Si $A \leq M$ es isomorfo a un sumando directo de M, entonces A es un sumando directo de M.*

La definición de módulo continuo puede tener muchos resultados consecuentes, por ejemplo, en este trabajo, nos gustaría destacar la siguiente proposición debido a su relación con los módulos inyectivos. Este resultado puede consultarse en [13, Proposición 2.1].

Proposición 4.0.7. Todo $R-$módulo derecho inyectivo es continuo.

Lema 4.0.8. Un módulo M satisface C_1) si y solo si todo submódulo cerrado de M es un sumando directo de M.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea A un submódulo cerrado de M. Como M satisface C_1), existe $M_1 \leq_{\oplus} M$ tal que $A \leq_{es} M_1$. Dado que A es cerrado, se cumple que $C = M_1$. Por lo tanto, A es sumando directo de M.

[$\Leftarrow$ Sea $A \leq M$. Por el Lema 1.3.11, consideremos A' y A'' submódulos de M tales que A' es seudocomplemento de A y A'' seudocomplemento de A'. Según el Lema 1.3.13, $A \leq_{es} A''$. Además, por el Lema 1.3.16, A'' es cerrado en M. Por lo tanto, $A'' \leq_{\oplus} M$.

■

Dado que logramos relacionar la condición $C1$) con los submódulos cerrados, nuestro objetivo es demostrar que la condición $C1$) es cerrada bajo sumandos directos. Para ello, es crucial introducir el siguiente resultado demostrado en [13, Lema 2.6].

Lema 4.0.9. Sea A un submódulo de un $R-$ módulo derecho M. Si A es cerrado en un sumando directo de M, entonces A es cerrado en M.

Proposición 4.0.10. Si M es un $R-$módulo derecho que satisface la condición C_1), entonces todo sumando directo de M también satisface la condición C_1).

Demostración. Consideremos $M = M_1 \oplus M_2$ y $A_1 \leq M_1$ tal que A_1 es cerrado en M_1. Según el Lema 4.0.8, basta con demostrar demostrar que $A_1 \leq_{\oplus} M_1$.
Por el Lema 4.0.9, sabemos que A_1 también es cerrado en M. Por hipótesis, existe $B_1 \leq_{\oplus} M$ tal que $A_1 \leq_{es} B_1$, lo que implica que $A_1 = B_1$. Por lo tanto, $A_1 \leq_{\oplus} M$ y $B_1 \leq M_1$.
Sea $B_2 \leq M$ tal que $M = B_1 \oplus B_2$. Entonces $M_1 = M_1 \cap M = M_1 \cap (B_1 \oplus B_2)$, por Ley Modular (Lema 1.1.17) tenemos que, $M_1 = (M_1 \cap B_2) \oplus B_1$.
Por lo tanto, $A_1 = B_1$ es sumando directo de M_1. ■

Buscamos relacionar el concepto de módulo continuo con los $(D1)-$módulos. Para poder demostrar el lema que los relaciona, es necesario introducir el concepto de *sumando local* y citar la proposición a continuación que fue presentada por Mohamed en [13, Teorema 2.17].

Definición 4.0.11. *Una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de submódulos de un $R-$módulo derecho M es llamada* ***sumando local*** *de M si, $\sum_{i\in I} A_i$ es directa y $\sum_{i\in I'} A_i$ es un sumando directo de M para todo $I' \subseteq I$ finito.*

Proposición 4.0.12. Sea M un $R-$módulo derecho. Si todo sumando local de M es un sumando directo de M, entonces podemos expresar a M como una suma directa de $R-$módulos derechos inescindibles.

Lema 4.0.13. Sea M un $(D1)-$módulo. Si M es continuo, entonces puede ser expresado como la suma directa de $R-$módulos derechos inescindibles.

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M, tal que $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ es un sumando local de M. Como M es un $(D1)-$módulo, existe una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $M_1 \leq A$ y $A\cap M_2 \ll M_2$. Dado que $A = A\cap M = A\cap(M_1\oplus M_2)$, por Ley Modular (Lema 1.1.17), $A = (M_2 \cap A) \oplus M_1$.
Demostremos que $A = M_1$.
Supongamos que $A \cap M_2 \neq \{0\}$. Es decir, existe $x \in A \cap M_2$ diferente de cero, luego, $xR \leq A_{i_1}\oplus ...\oplus A_{i_n}$ donde $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq I$ para algún entero positivo n. Dado que $B = A_{i_1}\oplus ...\oplus A_{i_n}$, es un sumando directo de M, según la Proposición 4.0.10, B también satisface la condición C_1). Entonces, existe $X \leq_{\oplus} B$ tal que $xR \leq_{es} X$. Observemos que $xR\cap(X\cap M_1) = (xR\cap X)\cap M_1 = xR\cap M_1 = \{0\}$, entonces $X \cap M_1 = \{0\}$. Consideremos a

$$\nu : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow \frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} \cong M_2.$$

Observe que $\nu(X) = \frac{M_1\oplus X}{M_1} \cong X$ y $\nu(A) = \frac{A}{M_1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{M_1 \oplus X}{M_1} &\leq \frac{A}{M_1} \cap \frac{M_1 \oplus M_2}{M_1} \\ &= \frac{A \cap (M_1 \oplus M_2)}{M_1} \\ &= \frac{M_1 \oplus (A \cap M_2)}{M_1} \\ &\cong A \cap M_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X \cong \frac{M_1 \oplus X}{M_1} \leq \frac{M_1 \oplus (A \cap M_2)}{M_1} \cong A \cap M_2.$$

Así, existe $Y \leq A\cap M_2$ tal que $X \cong Y$. Como M es continuo, implica que $Y \leq_{\oplus} M$. Sin embargo, $Y \leq A \cap M_2 \ll M_2 \leq M$, entonces $Y \ll M$. Lo que es una contradicción.
En consecuencia, $A \cap M_2 = \{0\}$. Y de esta manera, $A = M_1$.

Hemos demostrado que cualquier sumando local de M, es un sumando directo de M. Es así que, podemos concluir utilizando la Proposición 4.0.12. ■

Lema 4.0.14. Sea R un anillo donde todo $R-$módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero. Entonces, R es artiniano derecho si y solo si es noetheriano derecho.

Demostración. Observemos que por el Teorema de Hopkins-Levitzki 1.7.10, si R es un anillo artiniano derecho, entonces es noetheriano derecho.
Así que, abordemos la implicación faltante partiendo de suponer que R es un anillo noetheriano derecho. Sea N el ideal nilpotente máximo de R y $E = E(\frac{R}{N})$. Según el Teorema 1.5.4, $\frac{R}{N}$ es un $R-$módulo noetheriano derecho, entonces, por el Corolario 1.5.8, E es una suma directa finita de $R-$módulos derechos inyectivos inescindibles E_i. Dado que cada E_i es inescindible, por Lema 4.0.5, cada E_i es cíclico. Entonces, E es finitamente generado.
Por lo tanto, por el Teorema 1.5.11 R es artiniano. ■

Como último resultado importante de rescatar antes de demostrar el teorema que caracteriza a los $H-$anillos, vamos presentar la siguiente proposición cuya demostración puede revisarse en [5, Proposición 20.17].

Proposición 4.0.15. Si cada $R-$módulo derecho esta contenido en una suma directa de $R-$modulos derechos finitamente generados, entonces, R es artiniano derecho.

Teorema 4.0.16. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R.

(a) R es un $H-$anillo derecho.

(b) R es artiniano derecho y todo $R-$módulo derecho no superfluo tiene un submódulo inyectivo no cero.

(c) Todo $R-$módulo derecho puede ser expresado como la suma directa de un $R-$módulo derecho inyectivo y un $R-$módulo derecho superfluo.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea E un $R-$módulo derecho inyectivo, por hipótesis es un $(D1)-$módulo. Consideremos $A \leq E$ tal que no es superfluo en E. Por hipótesis, existe una descomposición $E = E_1 \oplus E_2$ tal que $E_1 \leq A$ y $A \cap E_2 \ll E_2$. Note que $E_1 \neq \{0\}$. Pues en caso contrario $E = E_1 \oplus E_2 = \{0\} \oplus E_2 = E_2$ y $A \cap E_2 = A \cap E = A \ll E$. Lo que sería una contradicción.
Por lo tanto, según el Lema 4.0.3, todo $R-$módulo derecho no superfluo contiene un submódulo inyectivo no cero. Para demostrar que R es artiniano derecho, observemos que, según la Proposición 4.0.15 basta con demostrar que todo $R-$módulo derecho inyectivo se puede expresar como una suma directa de $R-$módulos derechos cíclicos.
Sea E un $R-$módulo derecho inyectivo. Notemos que todo $R-$módulo derecho inyectivo es continuo por Proposición 4.0.7. Entonces, por el Lema 4.0.13, $E = \bigoplus_{j \in J} Q_j$, donde Q_j son

$R-$módulos inescindibles derechos. Dado que Q_j es un $R-$módulo derecho inyectivo para todo $j \in J$, pues $Q_j \leq_{\oplus} E$, entonces Q_j es un $(D1)-$módulo para todo $j \in J$. Así, por el Lema 4.0.5, para cada $j \in J$, sabemos que Q_j contiene un módulo inyectivo cíclico, digamos C_j. Entonces, existen $R-$módulos derecho inyectivos N_j con $j \in J$ tales que $Q_j = C_j \oplus N_j$. Como cada Q_j es inescindible, observemos que $N_j = \{0\}$ para cada $j \in J$. Es decir, $Q_j = C_j$ para cada $j \in J$. Por lo tanto, $E = \bigoplus_{j \in J} C_j$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sean E un $R-$módulo derecho inyectivo y $A \leq E$. Por el Lema 1.5.10 podemos considerar una familia independiente máxima $\{A_i\}_{i \in I}$ de submódulos inyectivos no cero de A. Denotemos por $A' = \bigoplus_{i \in I} A_i$.
Según el Lema 4.0.14, R es noetheriano derecho, así, por el Teorema 1.5.6, A' es inyectivo. Entonces $E = A' \oplus A''$ para algún submódulo inyectivo A''. Ahora, $A \cap A'' \ll A''$. Pues en caso contrario, dado que A'' satisface (S^*), podemos tomar un submódulo inyectivo distinto de cero $I \leq A \cap A''$, entonces $I \neq A'$. Es decir, $\bigoplus_{i \in I} A_i + I$ es directa, pero esto contradice la maximalidad de $\{A_i\}_{i \in I}$. Por lo tanto, E es un $(D1)-$módulo.
Hemos demostrado que R es un $H-$anillo.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sean M un $R-$módulo derecho y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Como $M \leq E(M)$, por hipótesis existe una descomposición $E(M) = M_1 \oplus M_2$ de forma que $M_1 \leq M$ y $M \cap M_2 \ll M_2$. Por Ley Modular (Lema 1.1.17), tenemos que $M = M \cap E(M) = M \cap (M_1 \oplus M_2) = (M_2 \cap M) + M_1$. Más aún, $M = (M_2 \cap M) \oplus M_1$.
Según la Proposición 1.4.11, M_1 es un $R-$módulo inyectivo derecho, pues es sumando directo de $E(M)$. Además, $M_2 \cap M$ es un $R-$módulo superfluo derecho por hipótesis.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sean un $R-$módulo derecho inyectivo E y $A \leq E$. Por hipótesis, existen E' un $R-$módulo inyectivo derecho y K un $R-$módulo superfluo derecho, tales que $A = E' \oplus K$. Como $A \leq E$, según la Proposición 1.4.14, $E = E(A) \oplus E''$, para algún $R-$módulo inyectivo derecho E''. Entonces, $E = E(E' \oplus K) \oplus E'' = E' \oplus E(K) \oplus E''$.
Por el Lema 4.0.2, E es un $(D1)-$módulo, pues note que $E' \leq_{\oplus} E$ y $E' \leq A$. Además,

$$\frac{A}{E'} = \frac{E' \oplus K}{E'} \cong K \ll E(K) \quad \text{por la Proposición 2.0.2.}$$

Y como

$$E(K) \leq E(K) \oplus E'' \cong \frac{E' \oplus E(K) \oplus E''}{E'} = \frac{E}{E'}.$$

Entonces, por la Proposición 1.3.4,

$$\frac{A}{E'} \ll \frac{E}{E'}.$$

■

Lema 4.0.17. Sea R un $H-$anillo derecho. Si $\varphi : M \longrightarrow E$ es un epimorfismo de $R-$módulos derechos tal que E es inyectivo y $Ker(\varphi) \ll M$, entonces M es inyectivo.

Demostración. Sea $\varphi : M \longrightarrow E$ un epimorfismo de $R-$módulos derechos tal que E es inyectivo y $Ker(\varphi) \ll P$. Consideremos $\varphi' : E(M) \longrightarrow E$ un epimorfismo tal que $\varphi'|_M = M$.

Puesto que R es un $H-$anillo, por el Teorema 4.0.16, existe una descomposición $M = X \oplus Y$ tal que X es un $R-$módulo derecho inyectivo y $Y \ll E(M)$. Por el Lema 1.3.4 3), $\varphi'(Y) = \varphi(Y) \ll E$. Además, $E = \varphi(X) + \varphi(Y)$, entonces $E = \varphi(X)$. Observemos que según el Lema 1.2.7 2), tenemos que $M = X + Ker(\varphi)$, y como $Ker(\varphi) \ll M$, entonces $M = X$.
Por lo tanto M es inyectivo. ■

Antes de abordar la caracterización de los $H-$anillos, es importante establecer las condiciones bajo las cuales un módulo satisface la propiedad (S^*). A continuación, presentamos la proposición y el teorema relevantes.

Proposición 4.0.18. Un $R-$módulo derecho inyectivo E satisface (S^*) si y solo si cada submódulo de E es una suma directa de un $R-$módulo inyectivo derecho y un $R-$módulo cosingular derecho.

Demostración.

$\Rightarrow$] Sea $N \leq E$. Por hipótesis, existen submódulos K y K' de E tales que $E = K \oplus K'$ donde $K \leq N$ y $\frac{N}{K}$ es cosingular. Por Ley Modular (Lema 1.1.17), tenemos que $N = N \cap E = N \cap (K \oplus K') = K \oplus (N \cap K')$, donde K es un $R-$módulo derecho inyectivo. Además,

$$\frac{N}{K} = \frac{K \oplus (N \cap K')}{K} \cong N \cap K'.$$

[$\Leftarrow$ Sea $L \leq E$. Entonces, $L = L_1 \oplus L_2$ para algún $R-$módulo inyectivo derecho L_1 y un $R-$módulo cosingular derecho L_2. Claramente $L_1 \leq_{\oplus} E$ y observemos que,

$$\frac{L}{L_1} = \frac{L_1 \oplus L_2}{L_1} \cong L_2.$$

Por lo tanto, $\frac{L}{L_1}$ es cosingular. ■

Teorema 4.0.19. Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R.

(a) Todo $R-$módulo derecho satisface (S^*).

(b) Todo $R-$módulo inyectivo derecho satisface (S^*)

(c) Todo $R-$módulo derecho es una suma directa de un $R-$módulo inyectivo derecho y un $R-$módulo cosingular derecho.

Demostración.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) La necesidad es directa. Para demostrar la suficiencia, notemos que todo $R-$módulo está contenido en su cápsula inyectiva. Por lo tanto, el resultado se sigue del Lema 3.0.6.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) Es consecuencia de la Proposición 4.0.18. ■

Si el $R-$módulo derecho R satisface (S^*), no necesariamente todo $R-$módulo derecho satisface (S^*). En términos generales, el siguiente ejemplo que se presenta en [15, Capítulo 5] y también es discutido en [12, 2.3.4 y 2.3.5], demuestra que la propiedad (S^*) no se conserva bajo submódulos. Veamos.

Ejemplo 4.0.20. Sea $Q = \frac{k[x,y]}{(x^2,y^2)}$ donde k es un campo. Entonces, Q es un $QF-$anillo local por [15, Observación pag. 336]. Sea $J = J(Q)$, $S = Zoc(Q_Q)(= S = Zoc(_QQ))$, $\bar{Q} = \frac{Q}{S}$ y $\bar{a} = a + S$ para todo $a \in Q$. Así, definimos:

$$W = \begin{bmatrix} Q & \bar{Q} \\ J & \bar{Q} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & \bar{b} \\ d & \bar{c} \end{bmatrix} : a, b, c \in Q, d \in J \right\}.$$

W es un anillo con la suma y producto usual de matrices. Y consideremos $1_W = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0} \\ 0 & \bar{1} \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0} \\ 0 & \bar{0} \end{bmatrix}$ y $f = \begin{bmatrix} 0 & \bar{0} \\ 0 & \bar{1} \end{bmatrix}$ en W. Entonces 1_W es el elemento identidad de W, $\{e, f\}$ es el conjunto de idempotententes primitivos ortogonales y $1 = e+f$. Oshiro demostró que W es artiniano derecho e izquierdo pero no un $H-$anillo. Entonces, existe un $W-$módulo derecho inyectivo E tal que no es un $(D1)-$módulo. Sin embargo, como W es perfecto derecho, según el Lema 3.0.7, E debe ser un $(D1)-$módulo, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, cualquier $W-$módulo derecho no satisface (S^*).

Definición 4.0.21. *Un $R-$módulo derecho M es llamado $\Sigma-$**inyectivo** si cada suma directa de copias de M es inyectiva.*

Proposición 4.0.22. Supongamos que todo $R-$módulo derecho satisface (S^*). Entonces, R es la suma directa de un ideal derecho $\Sigma-$inyectivo A y un ideal derecho cosingular B.

Demostración. Dado que cualquier $R-$módulo derecho satisface (S^*), por el Teorema 4.0.19, $R = A \oplus B$ donde A es un $R-$módulo derecho inyectivo y B es un $R-$módulo derecho cosingular.
Como A es inyectivo, por el Lema 2.0.5, $Z^*(A) = Rad(A)$. De acuerdo con el Lema 2.0.9 y la Proposición 1.7.4, $Z^*(A^{(\Lambda)}) = Rad(A^{(\Lambda)})$ para todo conjunto de índices Λ.
Entonces, por el Teorema 4.0.19, sabemos que $A^{(\Lambda)} = N \oplus K$ para N un $R-$módulo inyectivo derecho y K un $R-$módulo cosingular derecho. Así, observemos que $Z^*(N) \oplus K = Z^*(A^{(\Lambda)}) = Rad(A^{(\Lambda)}) = Rad(N) \oplus Rad(K)$. Luego, por Ley Modular (Lema 1.1.17),

$$\begin{aligned} K =& K \cap (Rad(N) \oplus Rad(K)) \\ =& K \cap (Z^*(N) \oplus Rad(K)) \\ =& (K \cap Z^*(N)) \oplus Rad(K) \\ =& Rad(K). \end{aligned}$$

Entonces, $Rad(K) = K$. Y notemos que $K = 0$, pues en caso contrario, la Proposición 1.4.7 garantiza la existencia de un máximo L en K tal que $K = Rad(K) \leq L \leq K$, es decir, $L = K$. Lo

cual, nos conduce a una contradicción.
Por lo tanto $A^{(\Lambda)}$ es inyectivo para cada conjunto de índices Λ. ■

Es importante mencionar que la inversa de la Proposición 4.0.22 no se cumple en general. A continuación, presentamos un ejemplo que ilustra esta situación.

Ejemplo 4.0.23. Sea W como se define en el Ejemplo 4.0.20. Entonces, $W_W \cong eW \oplus eJ(W)$ es inyectivo por [15, Sección 5] o [12, Prueba del Teorema 2.3.5]. Como W es artiniano derecho, también es noetheriano derecho por el Teorema de Hopkins-Levitzki 1.7.10. Por lo tanto, por [6, Proposición 18.13], eW es $\Sigma-$inyectivo.
Por otra parte, dado que $eJ(W) = J(eW) \leq Z^*(W)$, tenemos que $eJ(W)$ es cosingular. Sin embargo, en el Ejemplo 4.0.20 se demostró que todo W-módulo derecho no satisface (S^*).

Finalmente, presentamos el teorema que caracteriza a los $H-$anillos utilizando los conceptos discutidos hasta ahora. Este teorema es fundamental para relacionar este tipo de anillos con los $QF-$anillos, y su importancia se destaca en el desarrollo del último capítulo de este trabajo.

Teorema 4.0.24. Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R.

(a) R es un $H-$anillo derecho.

(b) R es perfecto derecho donde todo $R-$módulo derecho satisface (S^*).

(c) Para todo $R-$módulo derecho inyectivo E, $Rad(E) \ll E$ y todo $R-$módulo derecho satisface (S^*).

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que R es un $H-$anillo. Según el Teorema 4.0.16, R es artiniano derecho, luego R es perfecto. El Teorema 4.0.16 también nos garantiza que todo $R-$módulo derecho se descompone como una suma directa de un $R-$módulo inyectivo derecho y un $R-$módulo superfluo derecho. Para concluir, de acuerdo con la Propiedad 2.0.16 y el Teorema 4.0.19, todo $R-$módulo derecho satisface (S^*).

(b) $\Rightarrow$ (c) Consideremos un anillo perfecto derecho R y E un $R-$módulo inyectivo. Entonces, E es un $R-$módulo semiperfecto y por el Teorema 1.8.5, tenemos que $Rad(E) \ll E$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea E un $R-$módulo inyectivo. Por el Lema 2.0.5, $Rad(E) = Z^*(E)$ y por hipótesis $Z^*(E) \ll E$. Dado que M satisface (S^*), M es un $(D1)-$módulo como consecuencia del Lema 3.0.7. Por lo tanto, R es un $H-$anillo derecho.

■

Capítulo 5

QF-Anillos

Como el título sugiere, en este capítulo comenzamos presentando la definición fundamental de un $QF-$Anillo, abreviatura de su nombre en inglés "quasi-Frobenius", que constituye una categoría especial de anillos que poseen propiedades de auto-inyectividad y otras características notables. El concepto de cuasi-Frobenius es central en la teoría de anillos y módulos, caracterizando anillos que exhiben propiedades excepcionales en relación con la inyectividad y la proyectividad de sus módulos, lo que destaca la importancia de este capítulo final.
Una parte integral de este capítulo reside en las diversas caracterizaciones de los $QF-$Anillos, esenciales para identificar y clasificar los anillos con las propiedades específicas asociadas con el concepto de cuasi-Frobenius. Por esta razón, el análisis a continuación se centra en demostrar las equivalencias entre diferentes condiciones que definen un $QF-$Anillo, abordando aspectos como la auto-inyectividad del anillo, la satisfacción de la propiedad (S^*) por sus módulos, y la estructura interna de los anillos respecto a sus ideales y módulos relacionados. Además de explorar los anillos cuasi-Frobenius, este capítulo introduce el concepto de anillo $QF-3$ derecho. Estas definiciones enriquecen nuestro trabajo al establecer una relación entre este concepto y la parte cosingular de un módulo, así como los $H-$Anillos.
En resumen, el desarrollo de este capítulo ofrecerá una caracterización rigurosa de los anillos cuasi-Frobenius utilizando la propiedad (S^*) como herramienta central, con el objetivo de destacar la importancia de los conceptos desarrollados a lo largo de este trabajo en un contexto más amplio de la teoría de anillos y módulos, aspirando a las posibles aplicaciones y relevancia de los QF-Anillos en diversos ámbitos.
Comencemos abordando las definiciones y resultados iniciales que serán de utilidad para nuestro análisis en esta sección.

Definición 5.0.1. *Un anillo R es llamado* ***cuasi-Frobenius (QF-anillo)*** *si es artiniano por la derecha e izquierda y es auto-inyectivo derecho e izquierdo.*

Como hemos destacado al inicio del capítulo, el estudio de los $QF-$anillos ha sido extenso hasta el momento, proporcionándonos diversas caracterizaciones que abordan conceptos variados. A continuación, presentaremos algunas de las caracterizaciones más conocidas y útiles que consideramos para el desarrollo del capítulo. Las equivalencias de los siguientes dos teoremas pueden consultarse en: [14, Teorema 1.50 y Teorema 6.39], [9, Teorema 13.6.1] y [4, Teorema 18.1].

Teorema 5.0.2. Las siguientes proposiciones son equivalentes para un anillo R:

(a) R es $QF-$anillo.

(b) R es artiniano derecho o izquierdo y auto-inyectivo derecho o izquierdo.

(c) R es noetheriano derecho o izquierdo y auto-inyectivo derecho o izquierdo.

(d) R satisface la ACC sobre los anuladores derechos o izquierdos y es auto-inyectivo derecho o izquierdo.

(e) R es noetheriano derecho e izquierdo. Además $r_R l_R(I) = I$ para todo ideal derecho I de R y $l_R r_R(H) = H$ para todo ideal izquierdo H de R.

(f) R es perfecto izquierdo y auto-inyectivo derecho e izquierdo.

(g) R_R es $\Sigma-$inyectivo.

Teorema 5.0.3 (Faith-Walker)**.** Sea R un anillo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) R es un $QF-$anillo.

(b) Todo $R-$módulo derecho inyectivo es proyectivo.

(c) Todo $R-$módulo derecho proyectivo es inyectivo.

Para acercarnos al teorema que unificará el trabajo realizado a lo largo de la tesis, es crucial establecer las condiciones bajo las cuales la propiedad (S^*) y el concepto de parte cosingular de un anillo satisfacen la definición de un $QF-$anillo. Con este propósito, presentamos el siguiente lema. Para su demostración hacemos uso de la siguiente equivalencia que puede consultarse en [5, Proposición 20.3 A]:

Proposición 5.0.4. Sea E un $R-$módulo derecho inyectivo. E es $\Sigma-$inyectivo si y solo si toda suma directa contable de copias de E es inyectiva.

Lema 5.0.5. Sea R un anillo tal que $Z^*(R_R) = J(R)$ y supongamos que el $R-$módulo derecho $E(R^{(\mathbb{N})})$ satisface (S^*). Entonces, R_R es $\Sigma-$inyectivo. Y así R es un $QF-$anillo.

Demostración. Sea $F = R \oplus R \oplus ...$ el $R-$módulo libre derecho tal que es una suma directa de un número contablemente infinito de copias de R, es decir, $F = R^{(\mathbb{N})}$. Por hipótesis $E(F)$ satisface

(S^*). Según la Proposición 4.0.18, $F = X \oplus Y$ para algún submódulo inyectivo y un submódulo cosingular Y. Sea $J(R)$ el radical de Jacobson de R, observemos que:

$$\begin{aligned} Y =& Z^*(Y) \\ \leq& Z^*(F) \\ =& Z^*(R \oplus R \oplus ...) \\ =& J(R) \oplus J(R) \oplus ... \quad \text{(por el Lema 2.0.9)} \\ =& J(R \oplus R \oplus ...) \\ =& Rad(F) \\ =& FJ(R) \quad \text{(por el Teorema 1.7.5) 3)} \end{aligned}$$

Además, $\frac{F}{X} = \frac{F}{X}J(R)$ y $\frac{F}{X} \cong Y$, entonces $\frac{F}{X}$ es proyectivo. Y por la Proposición 1.4.7, sabemos que $\frac{F}{X} = \{0\}$. Por lo que, F es inyectivo. Así, según la Proposición 5.0.4, R_R es $\Sigma-$inyectivo.
Finalmente, para justificar la última parte, basta con revisar el inciso (g) de las equivalencias presentadas en el Teorema 5.0.2. ■

Ahora, deseamos presentar un resultado que consideramos interesante, ya que resume las relaciones entre los $H-$anillos, los anillos $QF-3$, y a su vez, los $QF-$anillos. Para lograr esto, primero debemos establecer las siguientes definiciones.

Definición 5.0.6. *1) Un $R-$módulo derecho fiel será llamado* ***fiel mínimo*** *en caso de que sea isomorfo a un sumando directo de cada $R-$módulo derecho fiel.*

2) Decimos que un anillo R es ***QF-3 derecho*** *(respectivamente, izquierdo) si tiene un $R-$módulo derecho (respectivamente, izquierdo) fiel mínimo. Además, R es* ***QF-3*** *si es a la vez $QF-3$ derecho e izquierdo.*

En el proceso de desarrollar el teorema de este capítulo, descubrimos una relación entre el concepto de anillos $QF-3$ y los $H-$Anillos. Para abordar esta relación, fue necesario encontrar una caracterización entre las equivalencias presentadas en [6, Teorema 31.6], esta establece que un anillo R es $QF-3$ derecho si y solo si $E(R_R)$ es proyectivo.

Lema 5.0.7. Todo $H-$anillo derecho es un anillo $QF-3$ derecho.

Demostración. Supongamos que R es $H-$anillo derecho. Por el Teorema 4.0.24, R es perfecto derecho. Entonces, $E(R)$ tiene cubierta proyectiva, es decir, existe $\alpha : P(E(R)) \longrightarrow E(R)$ epimorfismo superfluo. Ahora, considerando $P(E(R))$, sabemos que existe un morfismo γ tal que el siguiente diagrama conmuta ($\iota = \alpha\gamma$):

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\iota"] \\ P(E(R)) \arrow[r, "\alpha"'] & E(R) \end{tikzcd}$$

De donde podemos implicar que γ es un monomorfismo.
Además, por hipótesis y el Lema 4.0.17, sabemos que $P(E(R))$ es inyectivo, es decir, existe un morfismo γ' tal que el siguiente diagrama conmuta ($\gamma'\iota = \alpha$):

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & E(R) \arrow[dl, dashed, "\gamma'"] \\ P(E(R)) & \end{tikzcd}$$

Como γ' es monomorfismo, podemos decir que $E(R)$ se sumerge en $P(E(R))$, entonces $E(R) \leq_{\oplus} P(E(R))$. De esta forma, dado que $P(E(R))$ es proyectivo, $E(R)$ es proyectivo.
Por lo tanto, R es un anillo $QF-3$. ■

Teorema 5.0.8. Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R.

(a) R es $QF-$anillo.

(b) R es un anillo auto-inyectivo derecho y todo $R-$módulo derecho satisface (S^*).

(c) R es un anillo auto-inyectivo derecho y $E(R^{(\mathbb{N})})$ satisface (S^*).

(d) Se satisface $Z^*(R_R) = J(R)$ y cualquiera de las siguientes condiciones:

   (1) Todo $R-$módulo derecho satisface (S^*), o

   (2) $E(R^{(\mathbb{N})})$ satisface (S^*), o

   (3) R es un $H-$anillo derecho.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea R un $QF-$anillo. Observe que R es auto-inyectivo derecho directamente por definición. Por lo que el resto de la demostración se concentrará en demostrar que R es $H-$anillo, pues, según el Teorema 4.0.24, podríamos concluir que todo $R-$módulo derecho satisface (S^*).
Sea E un $R-$módulo derecho inyectivo. Por hipótesis, E también es proyectivo. Y consideremos $A \leq E$. Como R es un anillo artiniano derecho, entonces es perfecto derecho, de esta forma sabemos que $\frac{E}{A}$ tiene cubierta proyectiva. Por el Corolario 1.8.3, existe una descomposición $E = E_1 \oplus E_2$ tal que $E_1 \leq A$ y $E_2 \cap A \ll E_2$. Como $E_2 \leq E$, por el Lema 1.3.4, tenemos que $E_2 \cap A \ll E$. Por lo tanto, E es un $(D1)-$módulo.
Concluimos que R es un $H-$anillo derecho.

(b) $\Rightarrow$ (c) Es claro.

(c) $\Rightarrow$ (a) Es consecuencia del Lema 5.0.5.

(a) $\Rightarrow$ (d3) Supongamos que R es $QF-$anillo. Por el Lema 2.0.12, tenemos:

$$\begin{aligned} Z^*(R_R) =& \{r \in R | rr_R(J(R)) = 0\} \\ =& l_R(r_R(J(R))) \\ =& J(R) \quad \text{(Por el inciso (e) del Teorema 5.0.2)} \end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que en el proceso de la demostración de $(a) \Rightarrow (b)$, en particular, argumentamos que todo $QF-$anillo también es $H-$anillo.

(d3) $\Rightarrow$ (a) Por el Teorema 4.0.16, R es artiniano derecho y para un $R-$módulo derecho proyectivo P, existen $R-$módulos derechos E inyectivo y S superfluo, tales que $P = E \oplus S$.
De acuerdo con el Lema 2.0.2 y Lema 2.0.12, afirmamos que $Z^*(S) = Sr_R(J(R)) = \{0\}$. Y según el Lema 2.0.15, S también es cosingular, es decir, $S = Z^*(S) = \{0\}$. Entonces $S = \{0\}$, esto nos dice que $P = E$, por lo tanto, P es inyectivo. Por el Teorema 5.0.3, concluimos que R es un $QF-$anillo.

Para finalizar, observe que las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (d1) $\Rightarrow$ (d2) $\Rightarrow$ (a) son claras ocupando los resultados (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) y el Lema 5.0.5, respectivamente. ■

Bibliografía

[1] Goro Azumaya. A duality theory for injective modules.(theory of quasi-frobenius modules). *American Journal of Mathematics*, 81(1):249–278, 1959.

[2] Paul E. Bland. *Rings and their modules.* Walter de Gruyter, 2011.

[3] A. Çiğdem Özcan. Modules with small cyclic submodules in their injective hulls. *Communications in Algebra*, 30:4, 1575–1589, 2002.

[4] Nguyen Viet Dung, Dinh Van Huynh, PF Smith, and Robert Wisbauer. *Extending Modules*, volume 313. CRC Press, 1994.

[5] Carl Faith. *Algebra II Ring Theory: Vol. 2: Ring Theory*, volume 191. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] Kent R. Fuller and Frank Wylie Anderson. *Rings and categories of modules.* Springer-Verlag, 1992.

[7] Kenneth Goodearl. *Ring theory: Nonsingular rings and modules*, volume 33. CRC Press, 1976.

[8] Manabu Harada. Non-small modules and non-cosmall modules. *Ring Theory, Proceedings of 1978 Antwerp Conference*, pages 669–690, 1979.

[9] Friedrich Kasch. *Modules and rings*, volume 17. Academic press, 1982.

[10] Tsit-Yuen Lam. *A first course in noncommutative rings*, volume 131. Springer, 1991.

[11] Tsit-Yuen Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189. Springer Science & Business Media, 2012.

[12] William TH Loggie. *Some Special Classes of Modules.* University of Glasgow (United Kingdom), 1997.

[13] Saad H. Mohamed and Bruno J Müller. *Continuous and discrete modules*, volume 147. Cambridge University Press, 1990.

[14] W Keith Nicholson and Mohamed F Yousif. *Quasi-frobenius rings*, volume 158. Cambridge University Press, 2003.

[15] Kiyoichi Oshiro. Lifting modules, extending modules and their applications to qf-rings. *Hokkaido Math. J*, 13(3):310–338, 1984.

[16] Robert Warfield. Decompositions of injective modules. *Pacific Journal of Mathematics*, 31(1):263–276, 1969.