



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"MEDICIÓN DE MOMENTOS DE INERCIA EN
ESTRUCTURAS FRACTALES DETERMINISTAS"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA:

ALEJANDRO CASTILLO TAPIA

ASESOR(ES):

DR. ELÍAS LÓPEZ CRUZ

ENERO 2017

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor, el Dr. Elías López Cruz por toda la ayuda brindada en este trabajo.

A Anatolii Konovalenko por el apoyo en la fabricación de las piezas.

Al comité de seguimiento, quienes con sus comentarios enriquecieron la redacción de esta tesis.

A Rocío García por toda su valiosa ayuda en este proyecto.

A mi familia por todo el apoyo brindado.

Este trabajo fue presentado como ponencia en el LIX Congreso Nacional de Física, organizado por la Sociedad Mexicana de Física.

Resumen

En este trabajo se desarrollaron mediciones de momentos de inercia en tres estructuras fractales deterministas y una no determinista, con el fin de extender el tratamiento del momento de inercia en objetos que presentan estructura fractal (geométrica) determinista, se obtiene experimentalmente el momento de inercia de las siguientes estructuras fractales: Triángulo de Sierpinski, Carpeta de Sierpinski, Curva de Koch y un fractal obtenido mediante la celda de Hele-Shaw; cuyos momentos de inercia, para los tres primeros fractales, ya han sido reportados en la literatura únicamente mediante un análisis teórico. Las piezas fueron fabricadas para este propósito y el análisis teórico también fue desarrollado en el presente trabajo.

CONTENIDO

<i>Agradecimientos</i>	II
<i>Introducción</i>	VII
<i>1.. Fractales</i>	1
1.1. Orígenes	1
1.2. Dimensión Fractal	6
1.3. Clasificación de los fractales	10
<i>2.. Momento de Inercia</i>	13
2.1. Momento de Inercia	13
2.2. Momento de inercia de estructuras fractales deterministas	14
2.2.1. Momento de inercia del conjunto de Cantor	14
2.2.2. Momento de inercia del triángulo de Sierpinski	16
2.2.3. Momento de inercia de la carpeta de Sierpinski	20
2.2.4. Momento de inercia de la curva de Koch	23
2.3. Péndulo físico	27
<i>3.. Arreglo Experimental</i>	31
3.1. Arreglo Experimental	31

<i>4.. Resultados Experimentales</i>	37
4.1. Resultados Experimentales	37
4.1.1. Triángulo de Sierpinski	38
4.1.2. Carpeta de Sierpinski	41
4.1.3. Curva de Koch	43
4.1.4. Fractal obtenido mediante celda de Hele-Shaw	45
 <i>Conclusiones</i>	 49
 <i>Bibliografía</i>	 51

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas los fractales han incursionado en diversas áreas del conocimiento para enfrentarse con el reto de describir a la naturaleza [1, 2, 4, 3, 5, 6]. Se ha observado que los conjuntos fractales modelan mejor a fenómenos naturales. Algunas de las áreas donde se aplica la teoría fractal con grandes ventajas son: Biología, Medicina, Geología, Sismología, tratamiento de imágenes, Física, industria, etc. Un ejemplo de aplicación de la tecnología fractal es en la industria de las telecomunicaciones ya que ha permitido desarrollar una antena integrada (antena fractal)[6] en el teléfono móvil y capaz de transmitir y recibir en varias bandas de frecuencia permitiendo albergar servicios de conectividad a redes de datos de alta velocidad e internet para poder manejar contenido multimedia.

El problema que dio origen a nuestro interés fue el artículo publicado por Lima, Oliveira y Gomes [7], “A Galilean experiment to measure a fractal dimension”. El experimento consiste en medir el movimiento de bolas de material laminar corrugado en un plano inclinado, como resultado de esas mediciones se encuentra el valor del momento de inercia de esas bolas. El análisis de los resultados arrojó una interpretación de los valores de momentos de inercia para materiales con estructura fractal. Las pelotas de papel que usaron se ha demostrado que presentan una estructura fractal [8, 9]. Posterior a esto Carl y Lawrence [10], derivaron expresiones de momento de inercia para esferas y cascarones esféricos n -dimensional, donde n es un número complejo; también derivaron expresiones

para objetos geométricos de dimensión fraccional.

En años recientes a habido desarrollos en la teoría de la dinámica fraccional y sus aplicaciones [11, 12, 13, 14, 15], campo de estudio que investiga el comportamiento de los objetos y sistemas que se caracterizan por la ley de potencia o propiedades fractales mediante el uso de integración y diferenciación de orden no entero, es decir, por métodos del cálculo fraccional. Esta técnica es usada para el estudio de una amplia variedad de medios porosos que pueden ser considerados medios fractales como: polímeros, agregados coloidales [16, 17], pero difiere de lo tratado en este trabajo.

En este trabajo se presenta un enfoque experimental. Se realizó la medición del momento de inercia de las siguientes estructuras fractales deterministas geométricas: Triángulo de Sierpinski, Carpeta de Sierpinski, Curva de Koch, y un fractal obtenido mediante la celda de Hele-Shaw; cuyos momentos de inercia, para los tres primeros fractales, ya han sido reportados por la literatura únicamente mediante un análisis teórico, el cual también se desarrolla en este trabajo.

El presente trabajo esta estructurado de la siguiente manera: En el primer capítulo se hace una reseña histórica del origen de los fractales, se describe la forma de construcción de algunos de ellos y se mencionan aspectos generales de estos.

En el segundo capítulo se abordan los aspectos teóricos relacionados al momento de inercia y se describe la forma de obtener estos para algunas estructuras fractales deterministas.

En el tercer capítulo se presenta el arreglo experimental, se describen las partes que lo integran y la forma en que se llevan a cabo las medidas. Posteriormente, en el cuarto capítulo se presentan los resultados teóricos y experimentales y se realiza el análisis y discusión

de estos. Finalmente, en el quinto capítulo, se presentan las conclusiones generales.

1. FRACTALES

Los intentos por descifrar las claves de la naturaleza datan desde los orígenes de la humanidad [18]. En gran medida, estos esfuerzos ha llevado a simplificar el objeto de estudio que se analiza para así manejar la información obtenida de una forma más eficiente. Esto lleva a que las diversas ramas de la ciencia vuelquen su atención en encontrar regularidades en los objetos de estudio, entre ellas la geometría.

La geometría tradicional, aquella estudiada inicialmente por Euclides mostro la utilidad de las formas regulares y se obtuvo el mejor provecho de esta, llegando a crear las fórmulas que hoy permiten manejar de manera más eficiente las formas regulares. Sin embargo, en el período comprendido entre mediados del siglo XIX y principio del XX, los matemáticos se fueron percatando de que no era posible una comprensión apropiada de las formas irregulares de la naturaleza a través de esta geometría. Surge así la necesidad de una nueva geometría capaz de descifra las irregularidades ocultas de las formas naturales.

1.1. Orígenes

En 1872, Karl Weierstrass [19, 20, 21] presenta la primera definición de una función cuya gráfica es considerada hoy en día un fractal, que podía dibujarse sin levantar el lápiz del papel pero estaba llena de irregularidades. Fue la primera función conocida con

la propiedad de ser continua en cada uno de sus puntos pero derivable en ninguno. La función es definida como:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x), \quad (1.1)$$

donde $b < 1$ y $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

En la figura 1.1 se muestra la gráfica de la función.

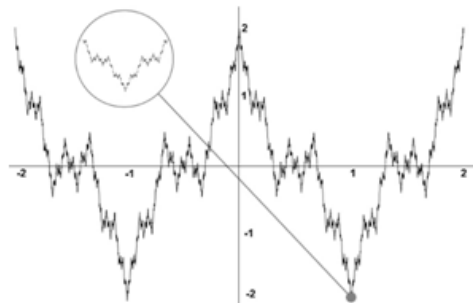


Fig. 1.1: La función de Weierstrass presenta un comportamiento fractal (Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_de_Weierstrass).

Funciones de este tipo, con un gran número de irregularidades se pensaba que eran muy escasas y además poco interesantes desde el punto de vista práctico. Sin embargo, su gráfica representa muy bien a fenómenos de la vida cotidiana, como por ejemplo las cotizaciones en bolsa de las acciones de un banco. Posterior a esto, en 1883, Georg Cantor, publicó un subconjunto de la recta real conocido como conjunto de Cantor, que tenía propiedades inusuales como: no vacío, disconexo, no numerable, y que ahora se conoce como fractal.

El conjunto de Cantor es un clásico fractal matemático que exhibe de forma evidente una de las propiedades más importantes de los fractales, la autosimilaridad. Este fractal

se obtiene de la siguiente manera: se parte de un segmento unitario $[0, 1]$, se divide en tres partes y se elimina la parte central $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Cada uno de los dos nuevos segmentos de longitud un tercio se divide en tres partes y se vuelve a quitar el segmento central, y así sucesivamente. Después de infinitos pasos se obtiene un conjunto que recibe el nombre de polvo de Cantor, debido a que la longitud de los segmentos en cada una de las sucesivas etapas tiende a cero. El sistema de medidas de la época (medida Lebesgue) daba para dicho conjunto una longitud nula, tarde o temprano se tuvo que aceptar que aquel sistema de medidas era insuficiente. En la figura 1.2 se muestran las cuatro primeras etapas.

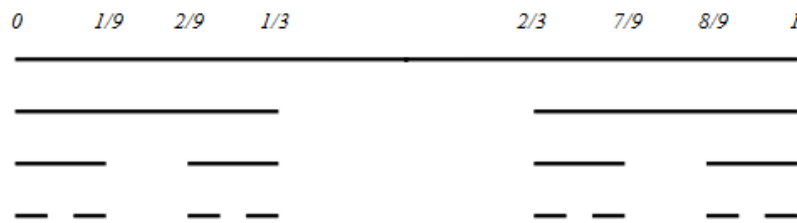


Fig. 1.2: Sucesivos pasos de la construcción geométrica del conjunto de Cantor.

Otro suceso importante se dio en 1904 cuando Helge von Koch, da a conocer lo que ahora se llama copo de nieve o curva de Von Koch. Se obtiene tomando un triángulo equilátero, cada uno de sus lados se divide en tres partes, y se sustituye el segmento central por dos segmentos de la misma longitud a manera de un triángulo equilátero convexo. En teoría, al ser el proceso infinito, el resultado que se obtiene es una figura tremendamente compleja e irregular, que tiene área finita, siendo su perímetro una línea poligonal de longitud infinita. En la figura 1.3 pueden apreciarse las primeras iteraciones del proceso.

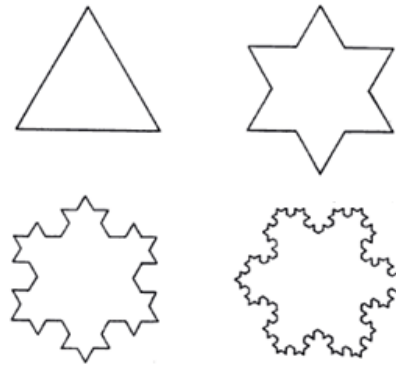


Fig. 1.3: Generación de la curva de Von Koch (Recuperado de http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/sec_5.htm).

Para 1915, los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Maurice Julia, de manera independiente, llegaron a lo que hoy se conoce como un comportamiento fractal, asociado con el mapeo de los números complejos e iterativos de funciones, y que conduce a ideas acerca de los atractores y repulsores. En esta misma década, se da a conocer otro fractal importante, conocido con el nombre de triángulo de Sierpinski. Su método de construcción es muy sencillo, tal y como se muestra en la figura 1.4. Se parte de un triángulo equilátero, se unen los puntos medios de sus tres lados y se elimina el triángulo central. Tenemos ahora tres triángulos y en cada uno de ellos se aplica el procedimiento descrito en el triángulo inicial. Se reitera este proceso geométrico hasta el infinito, y el conjunto teórico que se obtiene es el triángulo de Sierpinski.

Aplicando un razonamiento análogo al anterior, se parte de un cuadrado, se divide en nueve cuadros iguales y se elimina el cuadro central. Tenemos ahora ocho cuadros y en cada uno de ellos se aplica el procedimiento inicial. En este caso, el conjunto obtenido se llama la alfombra de Sierpinski. Ver figura 1.5.

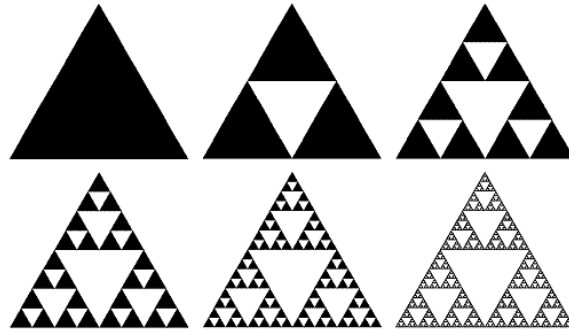


Fig. 1.4: Primeras iteraciones del triángulo de Sierpinski (Recuperado de <https://batchdrake.wordpress.com/2009/01/12/el-area-del-triangulo-de-sierpinski/>).

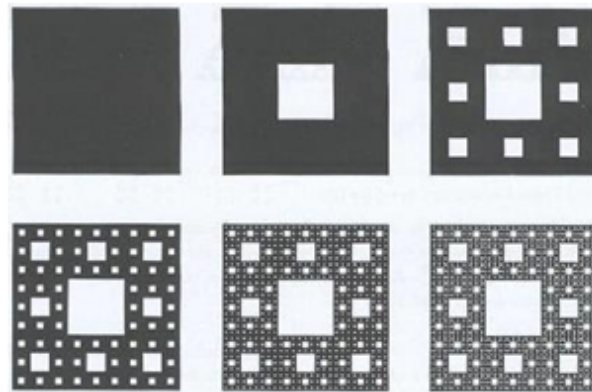


Fig. 1.5: Primeras iteraciones de la carpeta de Sierpinski (Recuperado de http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/geometria_fractal/proyectos/movimiento_browniano/sierpinski.htm).

Hasta aquí, todas las curvas y conjuntos mencionados se incluyen dentro de una clase más amplia de objetos matemáticos denominados fractales. El término fractal (del latín fractus que significa quebrado o fracturado) fue acuñado por Benoit Mandelbrot en su libro Geometría Fractal de la Naturaleza [22], se define como:

Un fractal es un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede

estrictamente a la dimensión topológica.

Cualquier conjunto con un valor de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch no entera es un fractal.

1.2. Dimensión Fractal

A menudo resulta necesario determinar el tamaño de un fractal para poder establecer su similitud con algún otro [22, 23, 24]. Existen distintos números asociados con los fractales que nos permiten compararlos, denominados normalmente dimensiones. Uno de ellos, el de dimensión topológica D_T , hace alusión a la forma de ocupar el espacio que tiene el conjunto. Así, a un punto y al conjunto de Cantor se les asigna dimensión topológica igual a cero. Pero este tipo de dimensión plantea un serio problema pues resultan ser poco fina al otorgar la misma dimensión a un único punto que a un conjunto no numerable de puntos como es el conjunto de Cantor. Otro de ellos, es la dimensión de semejanza, podría calcularse si se encuentra el factor de escala mediante el cual matemáticamente dicho objeto se puede reproducir. Si partimos de un objeto con un tamaño lineal igual a 1 en una dimensión euclidiana D , y se reduce su tamaño por un factor de $1/l$, se necesitan un número $N(l)$ de objetos autosimilares para cubrir el objeto original, $N(l)(1/l)^D = 1$. En la figura 1.6 se ilustra la forma en que esta relacionado $N(l)$ y la dimensión D de un objeto geométrico en una, dos y tres dimensiones.

Al despejar para D , obtenemos:

$$D = \frac{\log(N(l))}{\log(l)}. \quad (1.2)$$

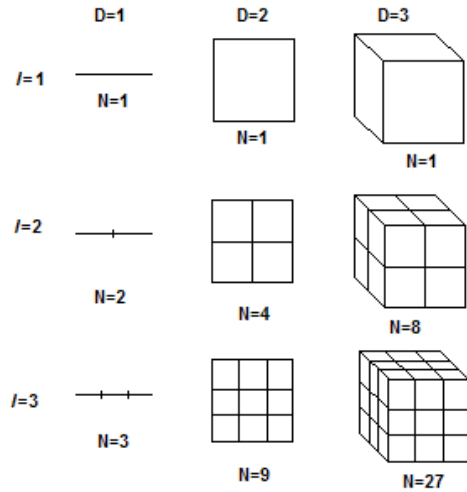


Fig. 1.6: Forma de definir la dimensión (Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Dimensi%C3%B3n_fractal).

Si tomamos esta fórmula como definición del valor de la dimensión de cualquier figura que pueda ser descompuesta en copias a escala de sí misma, obtenemos una manera de asignar una dimensión a algunos conjuntos fractales clásicos. La dimensión fraccionaria o fractal de los conjuntos tratados anteriormente son los mostrados en la tabla 1.1.

Fractal	Dimensión fractal
Conjunto de Cantor	$\log(2)/\log(3) \approx 0.6309$
Triángulo de Sierpinski	$\log(3)/\log(2) \approx 1.5849$
Carpeta de Sierpinski	$\log(8)/\log(3) \approx 1.8927$
Curva de Koch	$\log(4)/\log(3) \approx 1.2618$

Tab. 1.1: Dimensión de algunos fractales clásicos.

La dimensión de Hausdorff es probablemente la más importante de las dimensiones

fractales, tiene la ventaja de ser definido para cualquier conjunto pero en muchos casos es difícil calcular o estimar. Sin embargo, para un mejor entendimiento de la matemática de los fractales es esencial la comprensión de la medida y dimensión de Hausdorff [24].

Sea U un subconjunto no vacío de un espacio R^n , el diámetro de U es definido como $|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\}$, es decir la mayor distancia para cualquier par de puntos en U . si $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ con $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i , se dice que $\{U_i\}$ es un δ -recubrimiento de F .

Sea F es un subconjunto de R^n y s es un número no negativo. Para cualquier $\delta > 0$ se define.

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta - \text{recubrimiento de } F \right\}. \quad (1.3)$$

La medida s -dimensional de Hausdorff se define entonces como el limite en (1.3) cuando $\delta \rightarrow 0$.

$$H^s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F). \quad (1.4)$$

A partir de la medida s -dimensional de Hausdorff podemos definir la dimensión de Hausdorff de un conjunto F como el número real que satisface:

$$\dim(F) = \inf \{s : H^s(F) = 0\} = \sup \{s : H^s(F) = +\infty\}, \quad (1.5)$$

de manera que $\dim(F)$ es el valor que resume el comportamiento de F respecto a la familia paramétrica de medida.

Cabe notar que en general la dimensión de Hausdorff es difícil de calcular o estimar,

aunque para los ejemplos dados anteriormente esto es posible gracias a la condición de autosimilaridad. Sin embargo, ciertos fenómenos de la naturaleza y objetos de la vida real a simple vista tienen autosimilitud y se intuye que tienen dimensión fraccionaria, pero la pregunta natural que surge es ¿cómo calcular la dimensión fractal de un objeto como el mostrado en la figura 1.7?

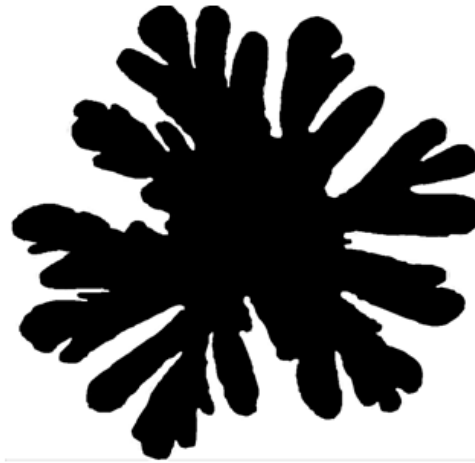


Fig. 1.7: A través de la celda de Hele-Shaw se obtiene un patrón fractal que se forma cuando un líquido penetra en otro más viscoso (Recuperado de [25]).

Para hacer frente a esto, necesitamos un método de aplicación más general para calcular la dimensión fractal. Para esto existe el método por conteo de cajas [24, 26], técnica ampliamente utilizada debido en gran parte a su relativa facilidad de cálculos matemáticos. Geométricamente consiste en situar la malla de longitud δ sobre el conjunto a medir y contar el número de cajas $N_\delta(F)$ de la red en las que hay algún punto del conjunto, luego se hace lo mismo pero usando una malla más fina. Este número, por supuesto, será diferente en función del valor elegido de δ . Haciendo uso de una gráfica logarítmica, colocando en el eje y el valor del número de cajas $\log(N_\delta(F))$ y en el eje x el valor de la longitud de la

caja $\log(\delta)$, la pendiente de la línea es la dimensión fractal del objeto.

Existen programas de procesamiento de imágenes digitales que permiten estimar la dimensión fractal de imágenes utilizando métodos de conteo de cajas, uno de ellos es el ImageJ. En la figura 1.8 se muestra los resultados obtenidos al aplicar la técnica de conteo de cajas a la imagen mostrada en la figura 1.7.

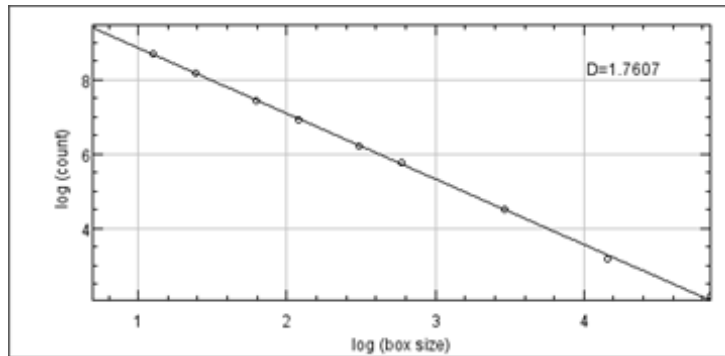


Fig. 1.8: Dimensión fractal obtenida al aplicar la técnica de conteo de cajas aplicando programa ImageJ .

1.3. Clasificación de los fractales

Los fractales vienen en dos variantes principales, fractales deterministas y fractales aleatorios. La primera categoría consiste en los fractales que se componen de varias copias escaladas hacia abajo o hacia arriba, como el triángulo de Sierpinski, la carpeta de Sierpinski, la curva de Koch, etc., a estos se les llaman fractales geométricos. El conjunto de Julia también cae dentro de la misma categoría debido a que todo el conjunto se puede obtener mediante la aplicación de un mapa no lineal iterativo. A esta clase de fractales se les llama fractales algebraicos. Por lo tanto, los fractales geométricos y los algebraicos son

parte de los fractales deterministas. La segunda categoría, es decir, los fractales aleatorios, son fractales que incluye un elemento adicional de aleatoriedad, lo que permite la simulación de los fenómenos naturales como: las nubes, las montañas, las líneas costeras, los fenómenos de difusión, etc. Estos presentan la característica de auto-similitud estadística.

2. MOMENTO DE INERCIA

2.1. *Momento de Inercia*

El momento de inercia I mide la oposición de los cuerpos a girar alrededor de un eje [26], y su conocimiento resulta imprescindible para estudiar el movimiento de los cuerpos. Cuando un cuerpo gira en torno a uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud escalar llamada momento de inercia. Sin embargo, en el caso más general posible la inercia rotacional debe representarse por medio de un conjunto de momentos de inercia y productos de inercia que forman el llamado tensor de inercia.

El momento de inercia refleja la distribución de masas entre las partículas constituyentes del cuerpo con relación a la rotación alrededor del eje de giro. Este también depende de la distribución de masas, es decir, de la densidad.

Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, el momento de inercia del mismo se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia r de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como:

$$I = \sum m_i r_i^2. \tag{2.1}$$

Para un cuerpo de masa continua, se generaliza como:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_v \rho r^2 dv, \quad (2.2)$$

donde el subíndice v de la integral indica que se integra sobre todo el volumen del cuerpo.

Si conocemos el momento de inercia de un cuerpo cualquiera respecto a un eje que pasa por su centro de masa, podemos obtener su momento de inercia respecto a cualquier otro eje paralelo a él, mediante el teorema de los ejes paralelos.

$$I = I_0 + Md^2, \quad (2.3)$$

donde I_0 es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa, I es el momento de inercia respecto al eje paralelo, d es la distancia entre los dos ejes y M es la masa del cuerpo.

Los cálculos de momento de inercia que se harán en este capítulo serán para un tipo especial de fractales, los fractales deterministas geométricos, por tanto, solo bastará con aplicar la formula general (2.2) para calcular dicho valor.

2.2. Momento de inercia de estructuras fractales deterministas

2.2.1. Momento de inercia del conjunto de Cantor

El momento de inercia I de estructuras fractales deterministas geométricos se obtienen por el cálculo directo del momento de inercia de la figura y utilizando el teorema de los ejes paralelos [10]. Dentro de estos, el ejemplo más sencillo es el conjunto de Cantor y se obtiene con base en la figura 2.1 de la siguiente manera:

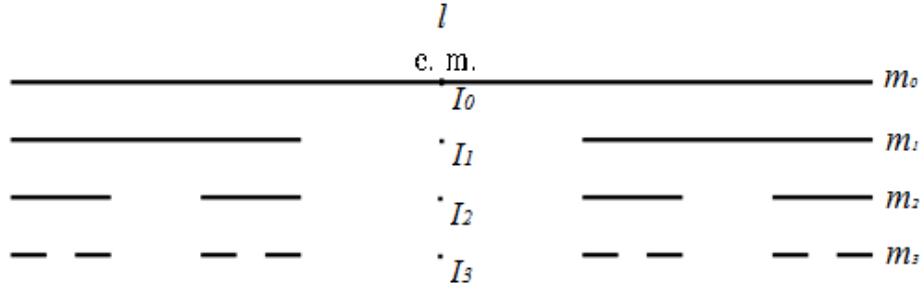


Fig. 2.1: Construcción geométrica del conjunto de Cantor para determinar el momento de inertia con respecto de un eje perpendicular que pasa por el centro de masas.

Nota: En todos los casos el momento de inertia es calculado con respecto al centro de masa de la figura.

El momento de inertia del conjunto de Cantor de generación cero es igual al momento de inertia respecto a su centro de masa de una barra de longitud l y masa m_0 .

$$I_0 = \frac{1}{12} m_0 l^2. \quad (2.4)$$

Para la generación uno, está compuesto del momento de inertia de dos barras de longitud $l/3$ y masa $m_1/2$, desplazadas una distancia $l/3$ del centro de masa de la barra de orden cero.

$$I_1 = 2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{m_1}{2} \right) \left(\frac{l}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{2} \right) \left(\frac{l}{3} \right)^2 \right] = \frac{13}{108} m_1 l^2. \quad (2.5)$$

Aplicando un procedimiento igual al anterior, llegamos a la segunda generación.

$$I_2 = 2 \left[\frac{13}{108} \left(\frac{m_2}{2} \right) \left(\frac{l}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{2} \right) \left(\frac{l}{3} \right)^2 \right] = \frac{121}{972} m_2 l^2. \quad (2.6)$$

Después de una serie de cálculos, se llega a la fórmula que permite calcular el momento de inercia I_n para la generación n -ésima:

$$I_n = \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{24}9^{-n} \right] m_n l^2, \quad (2.7)$$

donde m_n se obtiene en función de m_0 de la forma.

$$m_n = \left[\frac{2}{3} \right]^n m_0. \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ecuación (2.8) en (2.7) y tomando el límite de n a infinito, se obtiene:

$$I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{24}9^{-n} \right] \left[\frac{2}{3} \right]^n m_0 l^2 = 0, \quad (2.9)$$

Sin embargo, cabe aclarar que la expresión utilizada como n -ésima generación es una representación aproximada del fractal, dado que un fractal geométrico es el objeto final que se obtiene al aplicar infinitas veces un proceso geométrico determinado.

2.2.2. Momento de inercia del triángulo de Sierpinski

El momento de inercia del triángulo de Sierpinski respecto al eje x se determina con base en la figura 2.2 de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un triángulo equilátero de lado b y masa m_0 respecto al eje x .

$$I_0 = \frac{1}{24} m_0 b^2. \quad (2.10)$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto de tres triángulos de lado $b/2$

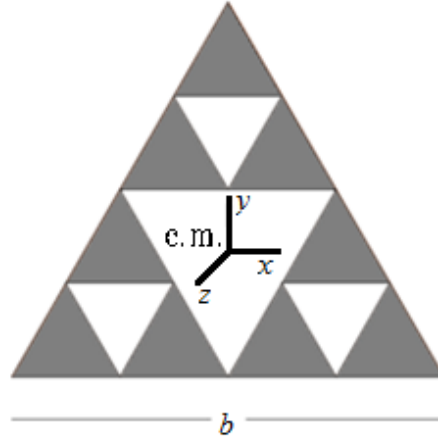


Fig. 2.2: Imagen del triángulo de Sierpinski utilizada para determinar el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados. El eje z es el eje perpendicular al plano de la imagen y que pasa por su centro de masa.

y masa $m_1/3$, dos de ellos desplazados una distancia $b/\sqrt{48}$ y el tercero desplazado una distancia $b/\sqrt{12}$ respecto al eje que cruza por el centro de masa del triángulo de generación cero.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{3} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{3} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{48}} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{3} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{3} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{12}} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{5}{96} m_1 b^2.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para la segunda generación tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 2 \left[\frac{5}{96} \left(\frac{m_2}{3} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{3} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{48}} \right)^2 \right] + \left[\frac{5}{96} \left(\frac{m_2}{3} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{3} \right) \left(\frac{b}{\sqrt{12}} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{7}{128} m_2 b^2.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Después de una serie de cálculos, llegamos a la fórmula que permite calcular el momento de inercia I_n para la generación n -ésima:

$$I_n = \left[\frac{1}{18} - \frac{1}{72} 4^{-n} \right] m_n b^2, \quad (2.13)$$

donde m_n se obtiene en función de m_0 de la forma:

$$m_n = \left[\frac{3}{4} \right]^n m_0. \quad (2.14)$$

Ahora, el momento de inercia para el triángulo de Sierpinski respecto al eje y se determina de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un triángulo equilátero de lado b y masa m_0 respecto al eje y .

$$I_0 = \frac{1}{24} m_0 b^2. \quad (2.15)$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto de tres triángulos de lado $b/2$ y masa $m_1/3$; el primero de ellos, su centro de masa se encuentra sobre el eje que pasa por el centro de masa del triángulo de la generación cero, los dos restantes se encuentran desplazados una distancia $b/4$ respecto de este eje.

$$I_1 = \frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{3} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^2 + 2 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{3} \right) \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{3} \right) \left(\frac{b}{4} \right)^2 \right] = \frac{5}{96} m_1 b^2, \quad (2.16)$$

Para la segunda generación tenemos:

$$I_2 = \frac{5}{96} \left(\frac{m_2}{3}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2 \left[\frac{5}{96} \left(\frac{m_2}{3}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{3}\right) \left(\frac{b}{4}\right)^2 \right] = \frac{7}{128} m_2 b^2. \quad (2.17)$$

Después de una serie de cálculos, llegamos a la fórmula que permite calcular el momento de inercia I_n para la generación n -ésima:

$$I_n = \left[\frac{1}{18} - \frac{1}{72} 4^{-n} \right] m_n b^2. \quad (2.18)$$

Por último, el momento de inercia para el triángulo de Sierpinski respecto al eje z se determina de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un triángulo equilátero de lado b y masa m_0 respecto al eje z .

$$I_0 = \frac{1}{12} m_0 b^2. \quad (2.19)$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto de tres triángulos de masa $m_1/3$ y desplazados una distancia $b/\sqrt{12}$ del centro de masa del triángulo de la generación cero.

$$I_1 = 3 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{m_1}{3}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{m_1}{3}\right) \left(\frac{b}{\sqrt{12}}\right)^2 \right] = \frac{5}{48} m_1 b^2. \quad (2.20)$$

Para la segunda generación tenemos.

$$I_2 = 3 \left[\frac{5}{48} \left(\frac{m_2}{3}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{3}\right) \left(\frac{b}{\sqrt{12}}\right)^2 \right] = \frac{7}{64} m_2 b^2. \quad (2.21)$$

Después de una serie de cálculos, llegamos a la fórmula que permite calcular el momento de inercia I_n para la generación n -ésima.

$$I_n = \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{36} 4^{-n} \right] m_n b^2. \quad (2.22)$$

El teorema de los ejes perpendiculares, es válido para cuerpos rígidos, delgados y planos como es nuestro caso. A manera de verificación lo utilizaremos para comprobar nuestros resultados, sumando las ecuaciones (2.13) y (2.18) obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{z_n} = I_{x_n} + I_{y_n} &= \left[\frac{1}{18} - \frac{1}{72} 4^{-n} \right] m_n b^2 + \left[\frac{1}{18} - \frac{1}{72} 4^{-n} \right] m_n b^2 \\ &= \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{36} 4^{-n} \right] m_n b^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Este resultado concuerda con el obtenido en la ecuación (2.22).

2.2.3. Momento de inercia de la carpeta de Sierpinski

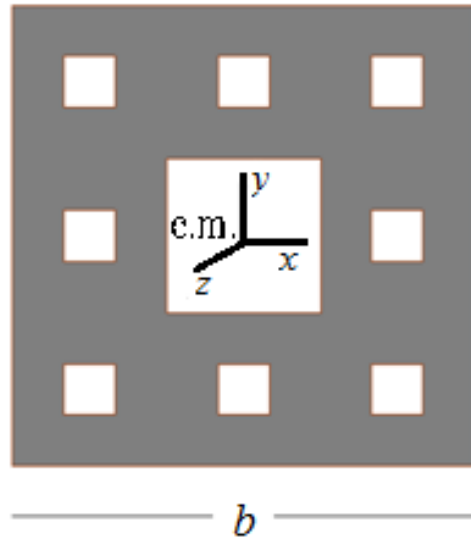


Fig. 2.3: Imagen de la carpeta de Sierpinski utilizada para determinar el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados. El eje z es el eje perpendicular al plano de la imagen y que pasa por su centro de masa y los ejes x y y son paralelos a los lados.

El momento de inercia para la carpeta de Sierpinski respecto al eje x se determina de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un cuadrado de base b y masa m_0 con respecto al eje x .

$$I_0 = \frac{1}{12} m_0 b^2. \quad (2.24)$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto de ocho cuadrados de base $b/3$ y masa $m_1/8$, dos de ellos, su centro de masa se encuentra sobre el eje que pasa por el centro de masa del cuadrado de la generación cero, los seis restantes están desplazados una distancia $b/3$ respecto de este eje.

$$I_1 = 2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{m_1}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] + 6 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{m_1}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] = \frac{5}{54} m_1 b^2. \quad (2.25)$$

Para la segunda generación tenemos:

$$I_2 = 2 \left[\frac{5}{54} \left(\frac{m_2}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] + 6 \left[\frac{5}{54} \left(\frac{m_2}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] = \frac{91}{972} m_2 b^2. \quad (2.26)$$

Después de una serie de cálculos, llegamos a la fórmula que permite calcular el momento de inercia I_n para la generación n -ésima.

$$I_n = \left[\frac{3}{32} - \frac{1}{96} 9^{-n} \right] m_n b^2, \quad (2.27)$$

donde m_n se obtiene en función de m_0 de la forma:

$$m_n = \left[\frac{8}{9} \right]^n m_0. \quad (2.28)$$

Por la simetría que presenta la carpeta de Sierpinski, el momento de inercia respecto al eje y , es igual al obtenido respecto al eje x . Por lo tanto, el momento de inercia I_n de la n -ésima generación es:

$$I_n = \left[\frac{3}{32} - \frac{1}{96} 9^{-n} \right] m_n b^2. \quad (2.29)$$

El momento de inercia para la carpeta de Sierpinski respecto al eje z se determina de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un cuadrado de base b y masa m_0 con respecto al eje z .

$$I_0 = \frac{1}{6} m_0 b^2. \quad (2.30)$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto de ocho cuadrados de base $b/3$ y masa $m_1/8$, cuatro de ellos desplazado una distancia $b/3$ del eje z y los restantes cuatro desplazados una distancia $(\sqrt{2}b)/3$ respecto al eje que pasa por el centro de masa del cuadrado de orden cero.

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{m_1}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] + 4 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{m_1}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{8} \right) \left(\frac{\sqrt{2}b}{3} \right)^2 \right] \\ &= \frac{5}{27} m_1 b^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para la segunda generación tenemos:

$$\begin{aligned}
I_2 &= 4 \left[\frac{5}{27} \left(\frac{m_2}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] + 4 \left[\frac{5}{27} \left(\frac{m_2}{8} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{8} \right) \left(\frac{\sqrt{2}b}{3} \right)^2 \right] \\
&= \frac{91}{486} m_2 b^2.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Después de una serie de cálculos, llegamos a la fórmula que permite calcular el momento de inercia I_n para la generación n -ésima:

$$I_n = \left[\frac{3}{16} - \frac{1}{48} 9^{-n} \right] m_n b^2. \tag{2.33}$$

2.2.4. Momento de inercia de la curva de Koch

El momento de inercia para la curva Koch respecto al eje x se determina de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un triángulo equilátero de lado b y masa m_0 con respecto al eje x .

$$I_0 = \frac{1}{24} m_0 b^2. \tag{2.34}$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto del momento de inercia de la generación cero I_0 más el momento de inercia de tres triángulos de lado $b/3$ y masa $m_1/12$; dos de ellos desplazados una distancia $2b/3\sqrt{12}$ y el tercero $2b/(3\sqrt{3})$ respecto al eje x .

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{24} \left(\frac{3}{4} m_1 \right) b^2 + 2 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{2b}{3\sqrt{12}} \right)^2 \right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{2b}{3\sqrt{3}} \right)^2 \right] = \frac{11}{216} m_1 b^2.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

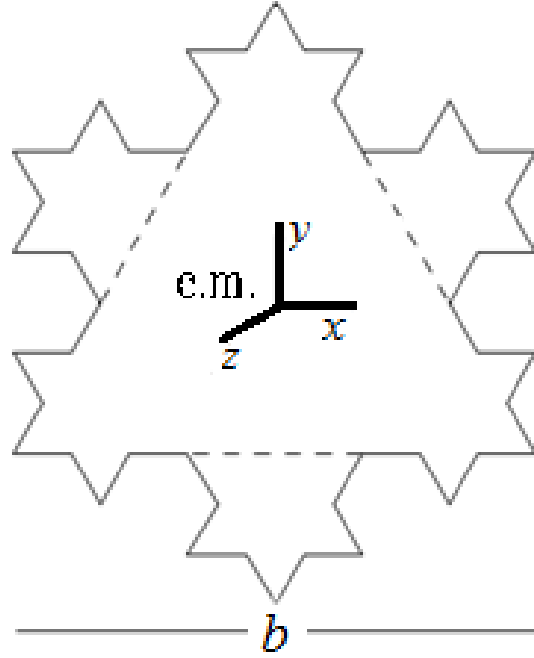


Fig. 2.4: Imagen de la curva de Koch utilizada para determinar el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados. El eje z es el eje perpendicular al plano de la imagen y que pasa por su centro de masa, el eje x es paralelo a la base del triángulo.

Aplicando un procedimiento análogo al anterior, llegamos a la segunda generación:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{11}{216} \left(\frac{108}{120} m_2 \right) b^2 + 4 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{4b}{9\sqrt{12}} \right)^2 \right] \\
 &+ 4 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{10b}{9\sqrt{12}} \right)^2 \right] \\
 &+ 4 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{14b}{9\sqrt{12}} \right)^2 \right] = \frac{55}{972} m_2 b^2.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Tercera generación:

$$I_3 = \frac{6053}{102789} m_3 b^2. \tag{2.37}$$

Cuarta generación:

$$I_4 = \frac{507782}{8483373} m_4 b^2. \quad (2.38)$$

Quinta generación:

$$I_5 = \frac{41760170}{692821917} m_5 b^2. \quad (2.39)$$

La masa de orden n se obtiene en función de m_0 de la forma:

$$m_n = \left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9} \right)^n \right] m_0. \quad (2.40)$$

El momento de inercia para la curva Koch respecto al eje y se determinan de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un triángulo equilátero de lado b y masa m_0 con respecto al eje y .

$$I_0 = \frac{1}{24} m_0 b^2. \quad (2.41)$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto del momento de inercia de la generación cero I_0 más el momento de inercia de tres triángulos de lado $b/3$ y masa $m_1/12$; dos de ellos desplazados una distancia $b/3$ y el tercero se encuentra sobre el eje del centro de masa.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{24} \left(\frac{3}{4} m_1 \right) b^2 + 2 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \right] \\ &= \frac{11}{216} m_1 b^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Aplicando un procedimiento análogo al anterior, llegamos a la segunda generación:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{11}{216} \left(\frac{108}{120} m_2 \right) b^2 + 4 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 \right] \\
&+ 4 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 \right] \\
&+ 4 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{4b}{9} \right)^2 \right] = \frac{55}{972} m_2 b^2.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Tercera generación:

$$I_3 = \frac{6053}{102789} m_3 b^2. \tag{2.44}$$

Cuarta generación:

$$I_4 = \frac{507782}{8483373} m_4 b^2. \tag{2.45}$$

Quinta generación:

$$I_5 = \frac{41760170}{692821917} m_5 b^2. \tag{2.46}$$

El momento de inercia para la curva Koch respecto al eje z se determina de la siguiente manera:

Generación cero, igual al momento de inercia de un triángulo equilátero de lado b y masa m_0 con respecto al eje z .

$$I_0 = \frac{1}{12} m_0 b^2. \tag{2.47}$$

Generación uno, el momento de inercia está compuesto del momento de inercia de la generación cero I_0 más el momento de inercia de tres triángulos de lado $b/3$ y masa $m_1/12$ desplazados $4b/(3\sqrt{12})$ del centro de masa.

$$I_1 = \frac{1}{12} \left(\frac{3}{4} m_1 \right) b^2 + 3 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{12} \right) \left(\frac{4b}{3\sqrt{12}} \right)^2 \right] = \frac{11}{108} m_1 b^2. \quad (2.48)$$

Aplicando un procedimiento análogo al anterior, llegamos a la segunda generación:

$$I_2 = \frac{11}{108} \left(\frac{9}{10} m_2 \right) b^2 + 12 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\frac{b}{9} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{120} \right) \left(\sqrt{\frac{52}{243}} \right)^2 \right] = \frac{55}{486} m_2 b^2. \quad (2.49)$$

Tercera generación:

$$I_3 = \frac{12106}{102789} m_3 b^2. \quad (2.50)$$

Cuarta generación:

$$I_4 = \frac{1015564}{8483373} m_4 b^2. \quad (2.51)$$

Aplicando el teorema de los ejes perpendiculares para la cuarta generación, es decir sumando las ecuaciones (2.38) y (2.45) obtenemos:

$$I_{z_4} = I_{x_4} + I_{y_4} = \frac{507782}{8483373} m_4 b^2 + \frac{507782}{8483373} m_4 b^2 = \frac{1015564}{8483373} m_4 b^2, \quad (2.52)$$

el cual concuerda con lo obtenido en la ecuación (2.51).

2.3. Péndulo físico

En el presente trabajo de tesis la técnica experimental utilizada para medir el momento de inercia será vía un péndulo físico [26, 27, 28], este sistema cuenta con un solo grado de libertad que corresponde a la rotación alrededor del eje fijo, ver figura 2.5.

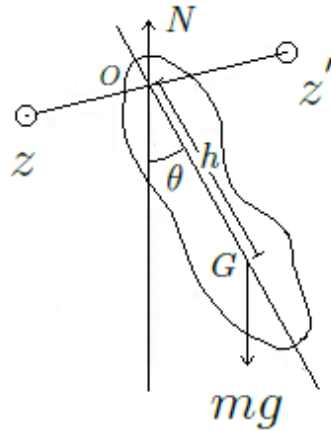


Fig. 2.5: Representación esquemática del péndulo físico; G es el centro de masa y h es la distancia entre el eje de rotación y el centro de masa, ver descripción de la imagen en el texto (Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_f%C3%ADsico).

Cuando el péndulo está desviado de su posición de equilibrio estable un ángulo θ , actúan sobre él dos fuerzas mg y N cuyo momento resultante con respecto al punto O es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación zz' . Aplicando la segunda ley de Newton para las rotaciones tenemos:

$$\tau = I\ddot{\theta} = -mgh \sin(\theta), \quad (2.53)$$

donde I es el momento de inercia con respecto al eje de rotación zz' . Si se restringe el movimiento a pequeñas oscilaciones y se usa la aproximación de los ángulos pequeños $\sin(\theta) \approx \theta$ podemos escribir la ecuación de la forma:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (2.54)$$

donde $w_0^2 = mgh/I$, esto nos permite determinar en forma directa el momento de inercia de cualquier cuerpo rígido que pueda oscilar libremente en el campo gravitatorio alrededor de un eje horizontal fijo. La ecuación que relaciona el momento de inercia con el periodo de oscilación es:

$$I = mgh \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2. \quad (2.55)$$

3. ARREGLO EXPERIMENTAL

3.1. *Arreglo Experimental*

El objetivo principal de este trabajo es medir experimentalmente los momentos de inercia de materiales con estructura fractal determinista del tipo de los físicamente posible manufacturar. En principio, es posible construir varios órdenes de un fractal, pero en la práctica, las limitaciones están determinadas por el tipo de maquinaria y su precisión.

Para la fabricación de estas estructuras se utilizó un fresador compacto para el procesamiento de placas de circuito impreso PCB (LPKF ProtoMat E33 que emplea la estructura de vectorización digital) y placas FR4 (Flame Retardant 4) mejor conocidas como placas fenólicas de 20x20 cm y 1.6 mm de espesor. En la figura 3.1, se muestra la imagen del fresador maquinando una pieza.

El uso de brocas de carburo de tungsteno de 1 mm de diámetro permitió maquinar estructuras fractales hasta de cuarta generación con una repetibilidad de $\pm 5 \times 10^{-6}$ m, como el triángulo de Sierpinski, la carpeta de Sierpinski y la curva de Koch. En la figura 3.2 se observan algunas piezas maquinadas ¹.

El procedimiento para el diseño y fabricación de las piezas consistió en la edición de las imágenes mediante el uso de un editor gráfico de vectores Inkscape (svg es el formato

¹ Agradezco el apoyo brindado en la fabricación de las piezas a Anatolii Konovalenko

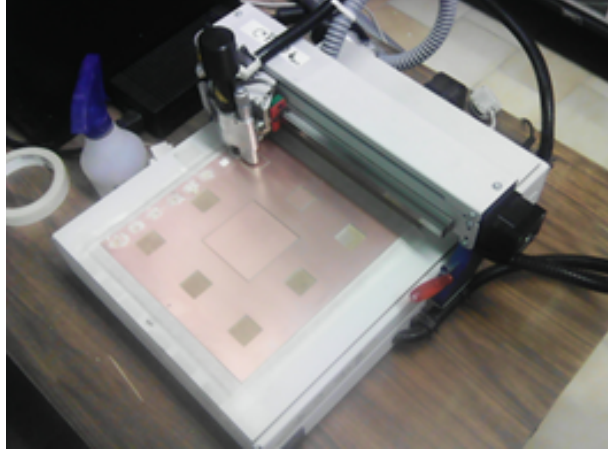


Fig. 3.1: Trazador LPKF ProtoMat E33 maquinando la carpeta de Sierpinski.

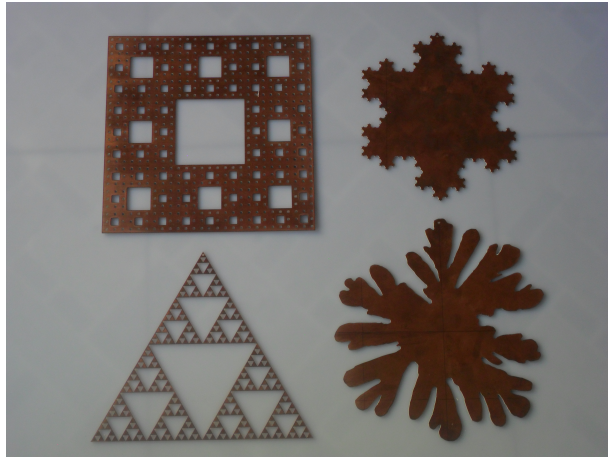


Fig. 3.2: Algunas piezas fractales maquinadas.

principal utilizado por este programa) y su posterior conversión al formato dxf, formato utilizado por el fresador compacto ProtoMat E33.

Cuando se requieren fabricar piezas muy complejas, cuya descripción matemática es incluso desconocida, como ejemplo el fractal obtenido a través de la celda de Hele-Shaw, es especialmente útil contar con imágenes de alta calidad para su digitalización, su posterior conversión a formato vectorial y por último al formato dxf para su fabricación. En la figura

3.3 se muestra una fotografía de un fractal obtenido a partir de la celda de Hele-Shaw y maquinada partiendo de la imagen digital mostrada en la figura 1.7.



Fig. 3.3: Fractal obtenido a través de la Celda de Hele-Shaw y maquinado partiendo de imagen digital.

El arreglo experimental utilizado para medir el momento de inercia de las piezas fractales, es el mostrado en la figura 3.4, consta de un soporte donde se encuentra el pivote o eje de rotación, un circuito emisor-receptor de rayos infrarrojos que permite detectar la presencia o ausencia de un objeto dentro de su línea de vista, una fuente de alimentación de CD HP 6234A DUAL OUTPUT POWER SUPPLY de voltaje variable que alimenta al circuito emisor-receptor y un osciloscopio de almacenamiento digital Tektronix TDS 1012 que permite cuantificar el tiempo de oscilación.

El experimento consiste en colocar la pieza fractal sobre el eje de giro a una distancia previamente definida del centro de masa, se coloca el circuito emisor-receptor de manera que su línea de vistas se vea interferida por el paso de la pieza, la información de este es

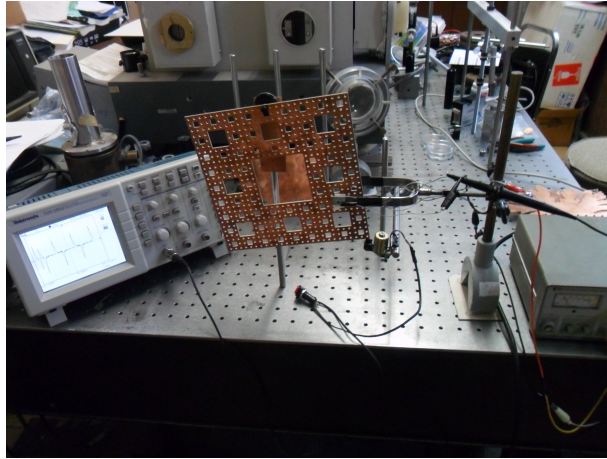


Fig. 3.4: Fotografía del sistema experimental.

enviada y almacenada en osciloscopio para su posterior análisis. Se hace oscilar el péndulo separándolo un ángulo aproximado de 10° de la vertical y mediante las gráficas obtenidas a través del osciloscopio se calcula el tiempo que tarda en realizar el primer ciclo completo de su movimiento oscilatorio.

Para medir el tiempo de oscilación de la pieza: se configura el canal 1 del osciloscopio en acoplamiento CA para visualizar solamente la señal que indica el cruce de la pieza por la línea de vista del detector, se activa el almacenamiento de datos del osciloscopio con la tecla RUN/STOP, se hace oscilar la pieza y completando el primer ciclo se detiene el almacenamiento. Después que los datos están almacenados se cuantifica el tiempo llevando el cursor 1 al inicio de la señal periódica y el cursor 2 al final. Por ser un osciloscopio digital, la posición de los cursores es mostrada en forma numérica y solamente hay que obtener la diferencia entre estos para obtener el período de la señal.

En la figura 3.5, se muestra una imagen donde se observa la señal obtenida a través del osciloscopio al llevar a cabo una medición.

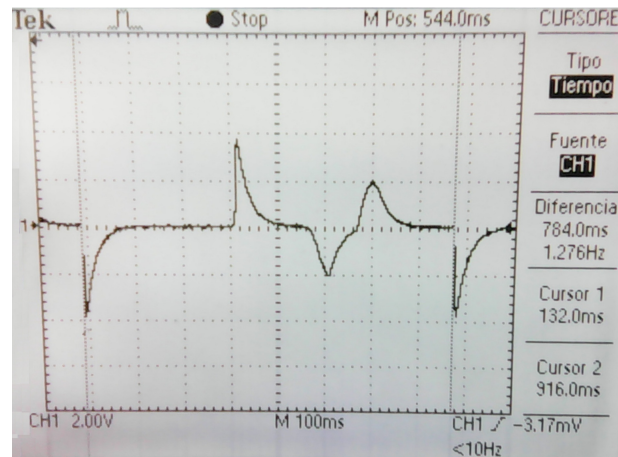


Fig. 3.5: Imagen donde se muestra la forma de onda obtenida a través del osciloscopio al poner a oscilar el triángulo de Sierpinski de orden cero. La pantalla del osciloscopio está compuesta por una retícula en la cual se muestra la señal, donde el eje vertical tiene unidades de voltaje y el eje horizontal unidades de tiempo. Adicional a la señal mostrada, en el lado derecho de la retícula se muestra información como: tipo de medición realizada, canal activo y posición de los cursores. En la parte baja se muestra los valores de voltaje y tiempo por división.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Una vez hecha la descripción teórica y presentado el sistema experimental, se procede a la presentación de resultados teóricos, experimentales y discusión de estos.

4.1. Resultados Experimentales

Después de fabricadas las piezas fractales, se procedió a medir la masa de cada una de ellas, en la tabla 4.1, se muestra la masa expresada en gramos en función de la generación y tipo de fractal.

Generación	Triángulo de Sierpinski $\Delta m = \pm 0.05$ [g]	Carpeta de Sierpinski $\Delta m = \pm 0.05$ [g]	Curva de Koch $\Delta m = \pm 0.05$ [g]
0	46.6	110.3	26.9
1	34.1	98.2	37.0
2	25.9	87.3	39.9
3	19.2	77.9	40.9
4	14.4	70.7	41.1
5	10.8		

Tab. 4.1: Masa de las piezas fractales expresada en gramos en función de la generación y el tipo de fractal.

Adicional a las piezas mencionadas en la tabla 4.1, se midió un fractal del tipo del obtenido a través de la celda de Hele-Shaw mostrado en la figura 3.3, sus características son: $m = 57.2 \pm 0.05 g$ y dimensión fractal $D_f = 1.76$, obtenida mediante el método de conteo de cajas, ver figura 1.8.

4.1.1. Triángulo de Sierpinski

Montado el sistema experimental, se procedió a colocar cada una de las piezas para realizar las medidas correspondientes. La primera de ellas fue el triángulo de Sierpinski. En la figura 4.1 se muestran tres imágenes que corresponden a la forma en que fueron montadas las estructuras fractales para llevar a cabo la medida del tiempo que tarda en realizar el primer ciclo completo de su movimiento oscilatorio con respecto a cada uno de los tres ejes principales: x , y y z , respectivamente. Es importante mencionar la forma en que se encuentra orientada la figura con respecto a los ejes coordenados: eje z es el eje perpendicular al plano que forma la figura, el eje x se encuentra paralelo a una de las bases del triángulo y el eje y resulta de aplicar la regla de la mano derecha.

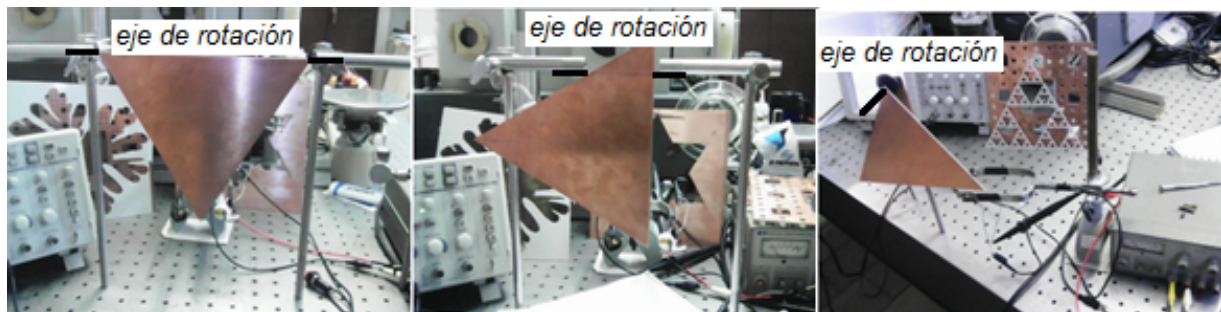


Fig. 4.1: Forma en que fueron colocadas las piezas para medir el tiempo que tarda en realizar un ciclo completo de su movimiento oscilatorio con respecto a los tres ejes: x , y y z respectivamente.

Cuando el péndulo físico o en este caso la pieza fractal es desviada de su posición de equilibrio un ángulo y se suelta, éste empieza a oscilar y va disminuyendo de amplitud en cada ciclo de su movimiento oscilatorio y después de un determinado tiempo finalmente acaba por anularse debido a la presencia de fuerzas disipativas que hacen que la energía mecánica se vaya perdiendo progresivamente, en este caso la fricción de la pieza con el eje de giro y el rozamiento con el aire; es decir, tenemos un movimiento subamortiguado. Sin embargo, la medida consiste en tomar el tiempo que tarda en realizar el primer ciclo completo del movimiento oscilatorio por lo que es afectado muy poco, este proceso se repite varias veces con el fin de corregir los errores aleatorios y se toma el promedio de estas medidas como mejor estimación del valor verdadero. Con este valor de tiempo y con la información propia de cada pieza, se sustituye en la fórmula $I = mgh \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ y se obtiene el valor experimental del momento de inercia. Haciendo lo mismo pero ahora en las formulas (2.13), (2.18) y (2.22) obtenemos el valor teórico.

Los valores obtenidos tanto en forma teórica como experimental para el triángulo de Sierpinski se presentan en las siguientes tres tablas; 4.2, 4.3 y 4.4 en cada una de ellas se presenta la información referente a la oscilación con respecto a los ejes x , y y z respectivamente. En la cuarta columna de estas tablas se presenta el valor experimental del momento de inercia, donde el error propagado se halla mediante la diferencial total de la función $I = I(m, h, T)$ es decir $\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial I}{\partial h}\right| \Delta h + \left|\frac{\partial I}{\partial T}\right| \Delta T$, en la quinta columna se presenta el valor teórico y por último, en la sexta el error porcentual.

En las tres tablas se observa que a medida que la masa de la pieza disminuye el tiempo de oscilación aumenta a diferencia de lo esperado en un péndulo simple.

Con base en los valores del error porcentual mostrados en la tabla 4.2, se observa que

Orden	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T [s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
0	46.6	0.590	2313 \pm 20	2307	0.27
1	34.1	0.616	1840 \pm 16	1830	0.54
2	25.9	0.622	1428 \pm 13	1420	0.56
3	19.2	0.619	1047 \pm 10	1055	0.81
4	14.4	0.621	790 \pm 9	792	0.29
5	10.8	0.622	594 \pm 7	595	0.06

Tab. 4.2: Valores obtenidos teóricos y experimentales del triángulo de Sierpinski considerando como eje de rotación al eje x y desplazado 5.73 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

Orden	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T [s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
0	46.6	0.609	2828 \pm 24	2800	1.00
1	34.1	0.614	2108 \pm 18	2191	3.81
2	25.9	0.621	1640 \pm 15	1695	3.23
3	19.2	0.622	1215 \pm 12	1259	3.49
4	14.4	0.614	890 \pm 10	945	5.83
5	10.8	0.613	664 \pm 8	709	6.32

Tab. 4.3: Valores obtenidos de los momentos de inercia teóricos y experimentales del triángulo de Sierpinski considerando como eje de rotación al eje y y desplazado 6.59 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

Orden	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T [s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
0	46.6	0.764	7597 \pm 51	7441	2.10
1	34.1	0.776	5735 \pm 41	5729	0.11
2	25.9	0.783	4446 \pm 33	4414	0.73
3	19.2	0.786	3310 \pm 27	3276	1.04
4	14.4	0.796	2551 \pm 23	2459	3.75
5	10.8	0.794	1904 \pm 19	1844	3.21

Tab. 4.4: Valores obtenidos de los momentos de inercia teóricos y experimentales del triángulo de Sierpinski considerando como eje de rotación al eje z y desplazado 11.24 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

cuando la pieza gira con respecto al eje x se obtiene el mayor de ellos 0.81 en el peor de los casos, atribuido a que en esta forma la pieza es soportada por los dos pivotes en los extremos que formaban el eje de giro. Para el segundo caso, es decir el momento de inercia girando con respecto al eje y se observa un aumento del error porcentual que oscila entre los 3.2 y 6.3, en este caso atribuido a la presión que ejercen los pivotes para mantener en posición a la pieza.

4.1.2. Carpeta de Sierpinski

En la figura 4.2 se muestran dos imágenes que corresponden a la forma en que fue colocada la carpeta de Sierpinski para medir el tiempo de oscilación con respecto a los tres ejes.

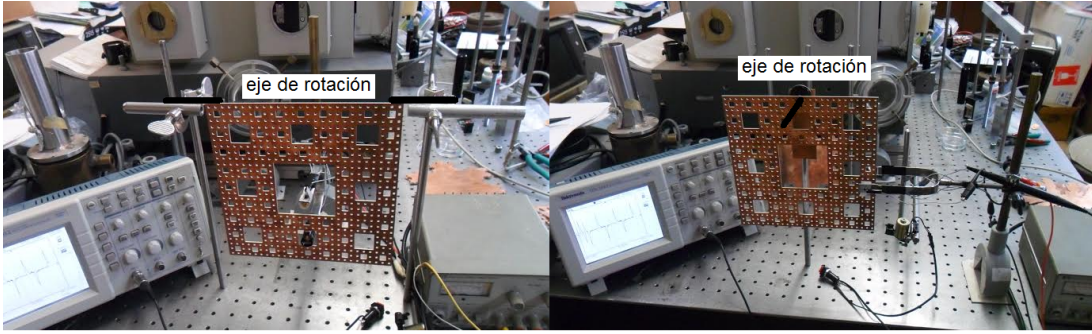


Fig. 4.2: Forma en que fue colocada la carpeta de Sierpinski para medir el tiempo de oscilación respecto a los ejes; en la primera de ellas girando con respecto a los ejes x y y y la segunda con respecto al eje z .

En las siguientes dos tablas; 4.5 y 4.6 se presentan los valores obtenidos para la carpeta de Sierpinski.

eje	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T [s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
x	70.7	0.737	9451 ± 63	9595	1.49
y	70.7	0.738	9493 ± 63	9595	1.06

Tab. 4.5: Valores obtenidos de los momentos de inercia de la quinta generación de la carpeta de Sierpinski respecto a los eje de rotación x y y , desplazado 9.91 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

A diferencia de los errores obtenidos del momento de inercia en el triángulo de Sierpinski, este presenta errores que no superan al 1% atribuidos a que en objetos que presentan una mayor densidad de masa y a bajas velocidades de oscilación se ven menos afectados por los efectos de fricción con el aire.

Orden	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T [s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
0	110.4	0.818	17617 \pm 103	17530	0.50
1	98.3	0.838	16459 \pm 96	16332	0.77
2	87.3	0.838	14611 \pm 86	14611	0.18
3	77.9	0.837	13014 \pm 77	13014	0.06
4	70.7	0.836	11787 \pm 71	11787	0.26

Tab. 4.6: Valores obtenidos de los momentos de inercia teóricos y experimentales de la carpeta de Sierpinski considerando como eje de rotación al eje z y desplazado 9.60 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

4.1.3. Curva de Koch

En las siguientes tablas; 4.7, 4.8 y 4.9 se presentan los valores obtenidos para el juego de fractales de la curva de Koch, cada una de ellas presenta la información referente a la oscilación con respecto a los ejes x , y y z respectivamente.

A diferencia de la relación observada entre la disminución de la masa y el aumento del tiempo de oscilación en el triángulo y la carpeta de Sierpinski, en la curva de Koch se observa que conforme se aumenta la masa de la pieza lo hace también el tiempo de oscilación. atribuido a que en cada generación se va aumentando masa en el contorno del fractal.

Para los tres últimos valores de la generación de la curva de Koch (generación 2, 3 y 4), en los tres casos (girando con respecto a los tres ejes: x , y y z) prácticamente el período

Orden	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T [s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
0	26.9	0.514	785 \pm 8	792	0.97
1	37.0	0.536	1162 \pm 12	1169	0.59
2	39.9	0.547	1304 \pm 13	1313	0.67
3	40.9	0.552	1363 \pm 13	1368	0.39
4	41.1	0.552	1371 \pm 13	1384	0.91

Tab. 4.7: Valores obtenidos de los momentos de inercia teóricos y experimentales de la curva de Koch considerando como eje de rotación al eje x y desplazado 4.45 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

Orden	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T [s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
0	26.9	0.529	966 \pm 10	976	1.02
1	37.0	0.545	1410 \pm 14	1422	0.81
2	39.9	0.559	1600 \pm 15	1585	0.91
3	40.9	0.562	1654 \pm 15	1647	0.43
4	41.1	0.562	1662 \pm 15	1664	0.13

Tab. 4.8: Valores obtenidos de los momentos de inercia teóricos y experimentales de la curva de Koch considerando como eje de rotación al eje y y desplazado 5.16 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

Orden	m [g] $\Delta m = \pm 0.05$	T[s] $\Delta T = \pm 0.002$	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm ²]	$I_{\text{Teórico}}$ [g cm ²]	error [%]
0	26.9	0.647	2327 ± 20	2377	2.11
1	37.0	0.676	3491 ± 27	3428	1.85
2	39.9	0.671	3707 ± 29	3801	2.47
3	40.9	0.685	3961 ± 30	3940	0.52
4	41.1	0.686	3989 ± 31	3978	0.28

Tab. 4.9: Valores obtenidos de los momentos de inercia teóricos y experimentales de la curva de Koch considerando como eje de rotación al eje z y desplazado 8.31 ± 0.005 cm del centro de gravedad.

de oscilación no cambiaba debido a que su masa aumenta en el orden de un gramo.

Los errores porcentuales del momento de inercia para las piezas girando con respecto al eje x y y se mantiene menores al 1%, a causa de que la pieza esta colocada sobre los pivotes o eje de giro y no se ejerce ninguna presión sobre ésta. Sin embargo, el error porcentual de las mediciones del momento de inercia con respecto al eje z está alrededor del 2% debido a la fricción que existe entre la pieza y el pivote.

4.1.4. Fractal obtenido mediante celda de Hele-Shaw

Por último, se presenta los resultados referente al fractal del tipo obtenido mediante la celda de Hele-shaw. En la figura 4.3 se muestran tres imagenes que corresponden a la forma en como se puso a oscilar la pieza fractal con respecto a los tres ejes; x , y y z respectivamente.

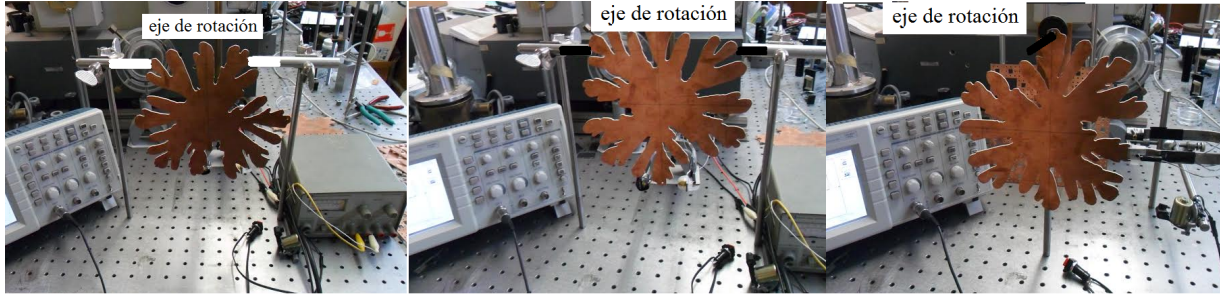


Fig. 4.3: Forma en que fueron colocadas las piezas para medir el tiempo de oscilación respecto a los tres ejes.

En la tabla 4.10, sólo se presentan los valores obtenidos experimentalmente, debido a que no se encontró en la literatura fórmula que relacione el momento de inercia con respecto a la dimensión fractal. En la segunda columna de esta tabla se muestra la distancia que hay entre el eje de oscilación y el centro de gravedad de la pieza, y en la sexta columna se muestra el momento de inercia con respecto al centro de gravedad.

Eje	h [cm]	m [g]	T [s]	$I_{\text{Experimental}}$ [g cm^2]	I_0 [g cm^2]
x	6.20	57.2	0.627	3467 ± 28	1268
y	7.50	57.2	0.647	4465 ± 34	1248
z	10.35	57.2	0.765	8605 ± 57	2477

Tab. 4.10: Valores de los momentos de inercia con respecto a los tres ejes del fractal obtenido mediante la celda de Hele-Shaw, en la segunda columna se muestra la distancia que existe entre el eje de oscilación y el centro de gravedad de la pieza.

Aplicando el teorema de los ejes perpendiculares a los valores obtenidos en x y y , obtenemos:

$$I_z = I_x + I_y = 1268 + 1248 = 2516 \quad (4.1)$$

obteniendo un error porcentual de 1.54 % respecto al obtenido en forma experimental.

Como se menciona en el capítulo dos, el momento de inercia de un cuerpo rígido, delgado y plano respecto a un eje perpendicular al cuerpo es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes que están contenidos en el plano del cuerpo y perpendiculares entre sí. Estos momentos de inercia están relacionados por el teorema de los ejes perpendiculares, en este caso el eje del momento de inercia perpendicular al plano está fuera del espacio donde está embebida la figura, es decir en una dimensión $n + 1$, donde n es la dimensión donde se encuentra embebida la figura [10]. En este caso se está trabajando con una dimensión fractal (Triángulo de Sierpinski $D_f \approx 1.5849$, Carpeta de Sierpinski $D_f \approx 1.8927$, Curva de Koch $D_f \approx 1.2618$) y también se verifica el teorema, debido a que la dimensión fractal sólo es un valor que caracteriza al objeto.

A continuación, en la figura 4.4 se muestra una gráfica del comportamiento del momento de inercia de las diferentes estructuras fractales versus el orden de la generación.

Es fácil comprobar que se puede obtener muchas variantes del conjunto de Cantor con la misma dimensión fractal y una distribución completamente diferente, tal como el siguiente caso: $D_f = \log(4)/\log(9) = \log(2)/\log(3)$, cuya dimensión fractal es igual a la del conjunto triádico de Cantor mostrado en capítulo 1. En la figura 4.5 se presenta la construcción geométrica del conjunto de Cantor de dos maneras distintas.

Por lo tanto, la dimensión fractal por sí misma no caracteriza por completo al objeto fractal y en consecuencia a dos conjuntos con una misma dimensión fractal le pueden

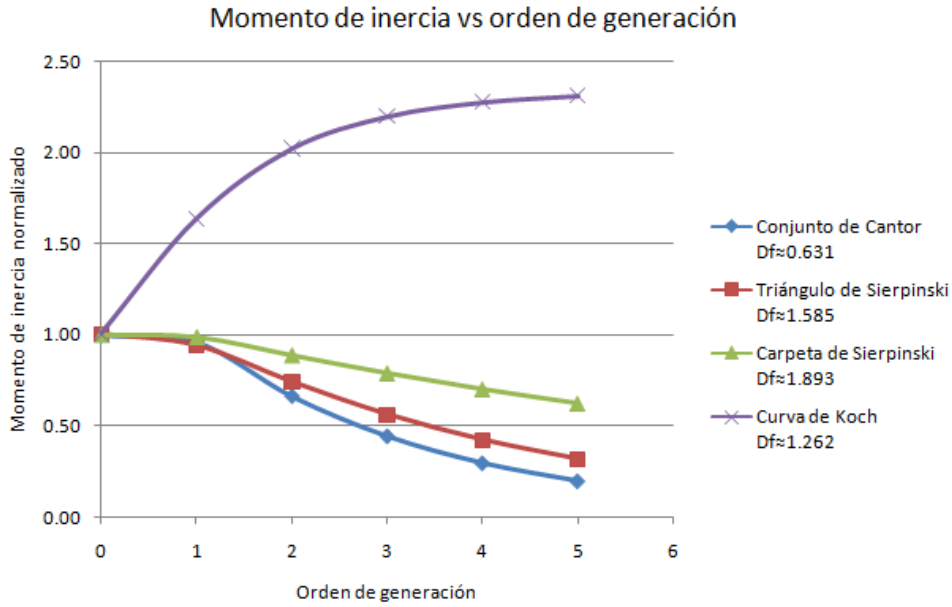


Fig. 4.4: Gráfica que muestran el comportamiento del momento de inercia normalizado versus orden de generación del fractal.

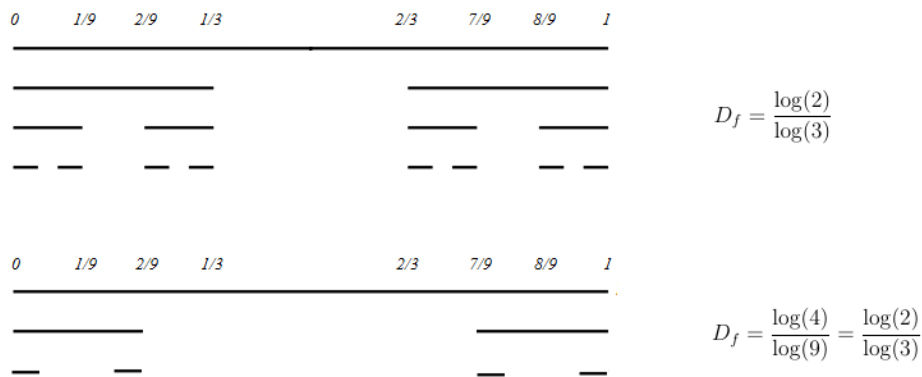


Fig. 4.5: Primeros pasos de la construcción geométrica de dos conjuntos de Cantor con la misma dimensión fractal.

corresponder un momento de inercia completamente diferente. Por esta razón, no se puede obtener una correlación entre la dimensión fractal y el momento de inercia.

CONCLUSIONES

Los errores en las medidas de los momentos de inercia realizadas en esta tesis son del orden de 1 y 2%, lo que es una indicación de que la técnica parece aceptable.

En los fractales deterministas geométricos, la relación entre el momento de inercia y la n -ésima generación del fractal es directa debido a que se tiene una fórmula analítica que nos proporciona el valor del momento de inercia para comparar con el determinado por las medidas experimentales.

En fractales no deterministas no es posible obtener el momento de inercia teórico en el sentido de una fórmula analítica, sin embargo sí es posible obtener un valor numérico que podría considerarse teórico para compararlo con el obtenido de la medida experimental.

Este trabajo podría ser aplicado como una posible determinación de porosidades en materiales de fundición en la industria siderúrgica.

Bibliografía

- [1] S. HAVLIN, S. V. BULDYREV, A. L. GOLDBERGER, R. N. MANTEGNA, S. M. OSADNIK, C. K. PENG, M. SIMONS, H. E. STANLEY, *Fractals in Biology and Medicine*, Pergamom Press. 6, 171-201 (1995).

- [2] I. SZTOJÁNOV, D. CRISAN, C. POPESCU MINA, V. VOINEA, *Image Processing in Biology Based on the Fractal Analysis*, Politehnica University of Bucharest, Romanian American University, Bucharest, University of Bucharest. (2009).

- [3] MA. EUGENIA MIRANDA-MARTÍNEZ, KLAUDIA OLESCHKO, JEAN-FRANCOIS PARRROT, FERNANDO CASTREJÓN-VACIO, HIND TAUD, FERNANDO BRAMBILA-PAZ, *Porosidad de los yacimientos naturalmente fracturados: una clasificación fractal*, Revista Mexicana de Ciencias Geológicas, v. 23, no. 2, 199-214 (2006).

- [4] ALFREDO DÍAZ MATA, *Algunas consideraciones sobre el uso de técnicas fractales en el análisis del mercado accionario bursátil mexicano*, Facultad de Contaduría y Administración, Universidad Nacional Autónoma de México, no. 224 México ene./abr. (2008).

- [5] LOREN C. CARPENTER, *Computer Rendering of Fractal Curves and Surfaces*, Boeing Computer Services Seattle, Washington.

- [6] HOHLFELD, R. G. AND COHEN, N. L., *Self Similarity and the Geometric Requirements for Frequency Independence in Antennas*, *Fractals*, 7, 79-84 (1999).
- [7] F.F. LIMA, V. M. OLIVEIRA, AND M. A. F. GOMES, *A Galilean Experiment to Measure a Fractal Dimension*, *Am. J. Phys.* 61, 421-422 (1993).
- [8] ROLANDO CORTÉS MONTES DE OCA, *Topología fractal de materiales compactados aleatoriamente*, Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias con especialidad en Ingeniería Mecánica, Instituto Politécnico Nacional, 2010.
<http://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/9180/76.pdf>.
- [9] KIRK T. McDONALD, *The Fractal Dimension of a Ball of Aluminum Foil*, Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton, NJ 08544 (Mar. 6, 1997)
- [10] CARL M. BENDER AND LAWRENCE R. MEAD, *D-dimensional moments of inertial*, *Am. J. Phys.* 63, 1011-1014 (1995).
- [11] VASILY E. TARASOV, *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Editorial: Springer-Verlag, Berlin, (2010).
- [12] VASILY E. TARASOV, *Continuous medium model for fractal media*, *Physics Letters A* 336, 167-174 (2005).
- [13] VASILY E. TARASOV, *Dynamics of fractal solid*, *International Journal of Modern Physics B*, 19, 4103-4114 (2005).
- [14] VASILY E. TARASOV, *Possible experimental test of continuous medium model for fractal media*, *Physics Letters A* 341, 467-472 (2005).

-
- [15] FERREYDOON FAMILY AND TAMÁS VICSEK, *Dynamics of Fractal Surfaces*, Editorial: World Scientific, (1991).
- [16] HAROLD D. BALE AND PAUL W. SCHMIDT, *Small-Angle X-Ray-Scattering Investigation of Submicroscopic Porosity with Fractal Properties*, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 596.
- [17] SCHAEFER, D. W. AND KEEFER, K. D., *Fractal Geometry of Silica Condensation Polymers*, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1383.
- [18] ARIEL OSVALDO QUEZADA, *Fractales, más allá de 1d, 2d o 3d*, Revista Digital Universitaria, UNAM, 10 de diciembre 2005, Volumen 6, Número 12.
- [19] GUILLERMO GRABINSKY, *La función continua no diferenciable de Weierstrass*, Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México. Sociedad Matemática Mexicana, Miscelánea matemática 25 (1997) 29-38.
- [20] LUIS MORENO ARMELLA, *Weierstrass: Cien años después*, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN. Sociedad Matemática Mexicana, Miscelánea matemática 25, 11-27 (1997).
- [21] ADEREMI AARON ANTHONY ATAYERO, OLEG I. SHELUHIN, *Integrated Models for Information Communication Systems and Networks: Design and Development*, Editorial: Information Science Reference (an imprint of IGI Global), (2013).
- [22] BENOIT MANDELBROT, *La geometría fractal de la naturaleza*, Editorial: Oceano/Tusquets, (1997).

- [23] JENS FEDER, *Fractals*, Editorial: Plenum Press, New York, (1988).
- [24] KENNETH FALCONER, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Editorial: John Wiley and Sons, (1990).
- [25] JAVIER SERVIN, MARÍA TERESA SILVA, GRISELDA SOSA, ANITA ZALTS Y JORGE CODNIA, *Instabilities in Fluids*, Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento J.M. Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX), Provincia de Buenos Aires, Argentina.
- [26] WALTER GREINER, *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Editorial: Springer-Verlag, (2003).
- [27] JAMES E. KETTLER, *A variable mass physical pendulum*, Am. J. Phys. 63, 1049-1051 (1995).
- [28] DAVID S. MILLS, *The physical pendulum: A computer-augmented laboratory exercise*, Am. J. Phys. 48 (4), 1049-1051 (1980).
- [29] JAVIER MIRANDA MARTÍN DEL CAMPO, *Evaluación de la incertidumbre en datos experimentales*, Instituto de Física, UNAM, México, (2000)



BUAP

MEMORANDUM

Para: Dr. Emerson Leao Sadurní Hernández, (Presidente).
Dr. Antonio Méndez Blas.
Dr. Felipe Pacheco Vázquez.
Dr. José Elías López Cruz, (Asesor).

De: Dr. Juan Francisco Rivas Silva, Director.

Asunto: **Se cita al Examen de Grado de Maestría en Ciencias (Física) de Alejandro Castillo Tapia.**

Fecha: 30 de Enero, 2017

Me permito informarles que el Comité Académico del IFUAP, los ha designado integrantes del Comité para el EXAMEN DE GRADO de **Maestría en Ciencias (Física) de Alejandro Castillo Tapia**, con su tesis intitulada: **"Medición de momentos de inercia en estructuras fractales deterministas"**, que presentará el día martes 31 de enero de 2017 a las 09:00hrs. en la Sala de Juntas del IFUAP.

Dr. Juan Francisco Rivas Silva
DIRECTOR



Instituto de Física
"Ing. Luis Rivera
Terrazas"

Av. San Claudio esq. 18 sur, edif 110 A, B y C.
Ciudad Universitaria, Col. San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
01(222) 2295610, Fax: ext. 5611