Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

PROPIEDADES Y GENERALIZACIÓN DE LOS CONJUNTOS DE RESTRICCIONES ACTIVAS

Tesis presentada al

Posgrado de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Por

Hilda González Guevara

Asesorada por

Dr. Maxim Ivanov Todorov

Puebla Pue.
Marzo de 2003

AGRADECIMIENTOS:

Mis agradecimientos al Dr. Maxim Ivanov Todorov por el apoyo incondicional sin el cual ésta tesis no habría sido posible.

A mis padres por su comprensión y ayuda.

A mi esposo y hija por haber sacrificado momentos de convivencia familiar.

Índice general

Resumen

En este trabajo tratamos con un nuevo concepto, que generaliza al de restricciones activas, llamado conjunto de restricciones activas extendidas, así como sus propiedades probadas a través de lemas, esto a partir de los conceptos de restricciones activas y activas modificadas.

El origen de este estudio se debe al hecho que en general un punto optimal puede o no tener asociado un conjunto de restricciones activas como se muestra posteriormente por medio de un ejemplo.

Se usan estas propiedades en la demostración de teoremas que abordan la estabilidad (propiedades de continuidad) del mapeo multivaluado *A* (tal que a cada *(σ, x)* le asocia su correspondiente conjunto de restricciones activas modificadas) en optimización lineal semi-infinita.

Iniciamos esta tesis con la demostración de un teorema del cual obtenemos información con respecto al comportamiento del conjunto de restricciones activas extendidas en una vecindad de un punto, así como una proposición acerca de la relación que guardan el conjunto de restricciones activas modificadas y el conjunto de restricciones activas extendidas; se prueba un teorema que trata la estabilidad (propiedades de continuidad) de forma local, del mapeo multivaluado *A,* el cual es una generalización de un teorema probado anteriormente en el cual es requerida una hipótesis muy fuerte con respecto a los vectores $a(t) \in F\,(T, \mathbb{R}^n)$, se demuestra además que este mapeo *A* es cerrado y a continuación demostramos un lema que en conjunto con los anteriores teoremas y proposición utilizamos en la demostración de la semicontinuidad superior en forma puntual de este mapeo *A* multivaluado.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Optimización semi-infinita

En la teoría de la optimización, se consideran los problemas:

Minimizar o maximizar una función

$$f: \quad A \to \mathbb{R},$$

donde A es un conjunto no vacío que está descrito por restricciones de desigualdad *(ver B3)*.

En el caso de problemas de optimización finita, el conjunto A está descrito por un número finito de restricciones, y la función f es una función de un número finito de variables.

Si A está descrito por un número infinito de restricciones y f es una función de un número infinito de variables, el problema de optimización es llamado infinito.

Si el conjunto A es subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y está descrito por un número finito o infinito de restricciones, y depende sólo de un número finito de variables

$$x, y, \ldots, w$$

el problema es llamado de optimización semi-infinita.

La Optimización Lineal Semi-Infinita (OLSI) trata con problemas de optimización lineal con un número finito de incógnitas o variables y un número arbitrario de restricciones, es decir con problemas de la forma:

$$(P) \quad Inf \ \langle c,x \rangle$$
$$sujeto\ a \ \ \langle a(t),x \rangle \ \geq \ b(t), \qquad t \in T,$$

donde $c,x \in \mathbb{R}^n$, T es un conjunto de índices arbitrario (posiblemente infinito), $a(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$ es un mapeo de T sobre $\mathbb{R}^n$ y b(t) es una función escalar sobre *T*.

El sistema de restricciones de (P) será representado por *σ;* es decir $\sigma = \{ \langle a(t),x \rangle \geq b(t), t \epsilon T \}$ y al conjunto solución de σ (llamado también conjunto factible) lo denotaremos por Z (σ).

En este caso, el conjunto factible es un conjunto cerrado y. convexo, ya que es la intersección de una colección de semiespacios cerrados.

Diremos que σ es consistente si *Z* (σ) es no vacío.

1.2. Optimización Paramétrica Semi-infinita

Ahora definimos el tipo de problemas que se consideran en optimización paramétrica.

Sea $\mathcal{P} := F\ (T,\mathbb{R}^n) \ \times \ F \ (T,\mathbb{R}) \ \times \mathbb{R}^n,\ donde \ \ n \in \mathbb{N},\ Tes$ un conjunto de índices arbitrario no vacío, y $F\ (T,\mathbb{R}^n)$ (resp. F(T, ℝ)), es el conjunto de mapeos de T a $\mathbb{R}^n$ (resp. a ℝ).

Para $\sigma = (a,b,c)$ en $\mathcal{P}$ consideramos el problema de optimización

$$M\,P(\sigma) \ \ minimice \ \ \langle c,x \rangle$$
$$\text{sujeto a} \quad \langle (a(t),x) \rangle \geq b(t) \quad \text{para cada} \quad t \in T.$$

De esta forma queda definida una familia de problemas de optimización semi-infinita. A cada terna $\sigma =$ (a, *b,* c) en $\mathcal{P}$ le llamaremos parámetro. Enunciamos algunas definiciones que posteriormente utilizaremos:

Para cada parámetro

$$\sigma = (a, b, \text{e}) \in \mathcal{P},$$

definimos el conjunto de puntos factibles

$$Z(\sigma) := \{x \in \mathbb{R}^n / \langle a(t), x\rangle \geq b(t) \quad para\ cada\ t \in T\}$$

y el conjunto optimal

$$P(\sigma) := \{v \in Z(\sigma) / \langle c, v\rangle \leq \langle c, x\rangle \quad para \quad cada\ x \in Z(\sigma)\}.$$

Si P(σ) $= \{v\}$ llamaremos a v solución fuertemente única de M P (σ) si y sólo si existe $C >$ O tal que, para cada x ∈ Z(σ) ,

$$\langle c, x\rangle \geq \langle c, v\rangle + C\|v - x\|_2$$

donde $\|.\|_2$ denota la norma euclidiana. Para x ∈ Z(σ), definimos el conjunto de restricciones activas por

$$M(\sigma, x) := \{t \in T / \langle a(t), x\rangle = b(t)\}$$

1.3. Definición del problema

En este trabajo tratamos con un nuevo concepto que generaliza el de restricciones activas, debido a que sabemos que en general un punto optimal de M P(σ) puede o no tener restricciones activas; estudiamos también la estabilidad (propiedades de continuidad) del mapeo multivaluado *A*.

Partimos del teorema siguiente, que está probado y publicado por el Dr. Maxim I. Todorov en colaboración con S. Helbig (*ver* 7), planteado en optimización paramétrica

Teorema 1 *El mapeo* A: $P \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *(σ, x) → A(σ, x), es semicontinuo superiormente en cada (σ, x)* $\in \hat{B} \times \mathbb{R}^n$ *(ver A.1 y 2.1).*

En la demostración de este teorema la condición (σ, x) ∈ $\hat{B} \times \mathbb{R}^n$ es fundamental, lo que nosotros hacemos en una parte del trabajo de tesis es debilitar esta condición y concluir el comportamiento del mapeo *A* en una vecindad

$\left(V, 0_{\frac{\sigma}{3}}(x)\right) \ni (\sigma, x)$.

Para alcanzar este objetivo, estudiamos las propiedades de conjuntos de restricciones activas a través de lemas y la información que de estas obtenemos con respecto a la información local útil (respecto a una solución $\bar{x}$ *)* en optimización lineal semi-infinita, por ejemplo si $\bar{x}$ es un punto factible, ¿Cuándo $y \in \mathcal{O}_{\gamma}(\bar{x}),\ \gamma > O$, pertenece a Z(σ)? lema 13, cuando el conjunto de restricciones activas extendidas es infinito para cada $\gamma > 0$ (lema 12), condiciones para que un cierto vector $d \in \mathbb{R}^n$ pertenezca al cono de direcciones factibles en el punto $\bar{x}$ que pertenece a el conjunto factible *Z(σ),* denotado por D (Z (σ), $\bar{x}$) (lema 14) (ver Bl)

Continuamos demostrando el siguiente teorema:

Teorema 2 *Dado* $W_{\sigma_0}(x,\gamma)$ *(ver 2.2) acotado, existe* $V \ni \sigma_0$ *tal que* $W_{\sigma}(z, \frac{\gamma}{3})$*, donde* $\sigma \in V$*,* $z \in 0_{\frac{\gamma}{3}}(x)$ *es uniformemente acotado.*

De donde obtenemos información con respecto al comportamiento del conjunto $W_{\sigma}(z, \frac{\gamma}{3})$ en una vecindad de (σ_0, x).

Demostramos también la proposición siguiente:

Proposición 3 *Dado* $xd \in \mathbb{R}^n,\ \gamma > O$, *entonces paro cada* σ *fijo se cumple que A(σ, x)*$\subseteq cl\ W_{\sigma}\left(x, \frac{\gamma}{3}\right)$.

De la cual obtenemos información acerca de la relación que guardan el conjunto de restricciones activas modificadas y el conjunto de restricciones activas extendidas, utilizando el teorema que hemos demostrado previamente, continuamos con la demostración de nuestro principal resultado del cual surgió este trabajo de tesis relajando la condición $(\sigma, x) \in \hat{B} \times \mathbb{R}^n$ y que nos permitirá generalizar el teorema 1 y todos los resultados tratados en el artículo en el cual se publicó este, puesto que estos últimos se desprenden del mismo.

Teorema 4 *Dado* $(\sigma, x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n$ *tal que existe* $\gamma > 0$ *con* $\mathrm{W}_\sigma(\mathrm{x}, \gamma)$ *(ver 2. 2) acotado entonces el mapeo* $A : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *(σ, x)* $\to$ *A (σ, x) es semicontinuo superiormente en una vecindad (V,* $0_{\frac{\gamma}{3}}(x)) \ni (\sigma, x)$*.*

Se demuestra además el teorema siguiente que nos será útil en la de- mostración de nuestro teorema final que trata la semicontinuidad superior del mapeo multivaluado *A* de forma puntual.

Teorema 5 *El mapeo* $A : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (\sigma, x) \to A(\sigma, x)$ *es cerrado.*

A continuación se prueba el siguiente lema que usamos en la demostración de nuestro resultado final:

Lema 6 *Sean (X, τ) y (Y, η) espacios métricos y un mapeo multivaluado P: X* $\to$ *Y. Si para* $x_0 \in X$ *existe una vecindad V de* x_0 *tal que* $P(V)$ *es relativamente compacto y P es cerrado en* x_0*, entonces P es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berqe) en* x_0*.*

Para finalizar demostramos la versión puntual del teorema 4:

Teorema 7 *Sea* $(\sigma_0, x_0) \in P \times \mathbb{R}^n$ *tal que existe* $\gamma > 0$ *con* $W_{\sigma_0}(x_0, \gamma_0)$ *acotado. Entonces el mapeo* $A : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(\sigma, x) \to A(\sigma, x)$ *es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berqe) en el punto* (σ_0, x_0)*.*

La demostración de este teorema se lleva a cabo utilizando los teoremas anteriores y la proposición que a su vez requieren para su demostración de las propiedades del conjunto de restricciones activas extendidas.

1.4. Organización de la tesis

En este trabajo de tesis se estudia la semicontinuidad superior del mapeo $A : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (\sigma, x) \to A(\sigma, x)$ *(ver* A.2) y las propiedades de los conjuntos de las restricciones activas extendidas (*ver* 2.3).

Esta tesis está dividida en tres capítulos y dos apéndices. El primer capítulo es esta introducción. En el capítulo dos, llamado conjuntos de restricciones activas, presentamos en la introducción las definiciones de los conjuntos de restricciones activas modificadas y de conjunto de restricciones activas extendidas, en la sección 2.2 la interpretación geométrica, en la sección 2.3 se enuncian propiedades de los conjuntos de restricciones activas extendidas a través de lemas y un teorema, en la sección 2.4 presentamos los resultados obtenidos acerca de la estabilidad (propiedades de continuidad) del mapeo multivaluado *A*. En el capítulo 4 presentamos las conclusiones obtenidas en este trabajo.
En el apéndice A, en la sección A. l. presentamos algunos conceptos y definiciones del análisis matemático que utilizamos a lo largo de este trabajo; en la sección A.2. presentamos algunas definiciones y propiedades de mapeos multivaluados. Para finalizar en el apéndice B presentamos algunos conceptos del análisis convexo que se utilizan a lo largo de este trabajo y algunas definiciones importantes en optimización lineal semi-infinita.

Capítulo 2

Conjuntos de restricciones activas

2.1. Introducción

En este capítulo definimos el conjunto de restricciones activas modificadas y el conjunto de restricciones activas extendidas; sus propiedades y su interpretación geométrica; demostramos un teorema sobre el comportamiento de los elementos del conjunto de restricciones activas extendidas, una proposición, y la utilización de las propiedades de este conjunto (restricciones activas extendidas) en la demostración de uno de nuestros resultados principales. Demostramos que el mapeo *A* es cerrado y, como parte final, se demuestra la semicontinuidad superior de este mapeo multivaluado en forma puntual.

Corno ya mencionamos, en general un punto optimal puede o no tener asociado un conjunto de restricciones activas, como lo indica el siguiente ejemplo (*ver* 7).

Ejemplo 8 *Sea* $n = 2$, $c := (1,0)$, $T = \mathbb{N}$ *y* $a(k) := (1,0)$ *y* $b(k) := \frac{1}{k}$ *para cada* $k \in T$.

Entonces $Z(\sigma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0\}$ *y* $P(\sigma) = \{(x, y) \in Z(\sigma) \ / \ x = 0\}$

Paro cualquier $v \in P(\sigma)$, *tenemos* $M(\sigma, v) = \emptyset$), *fiqura 2.1*

Por tanto deseamos introducir un nuevo concepto que generalice al de restricciones activas. Para nuestro propósito, requerimos de más definiciones.

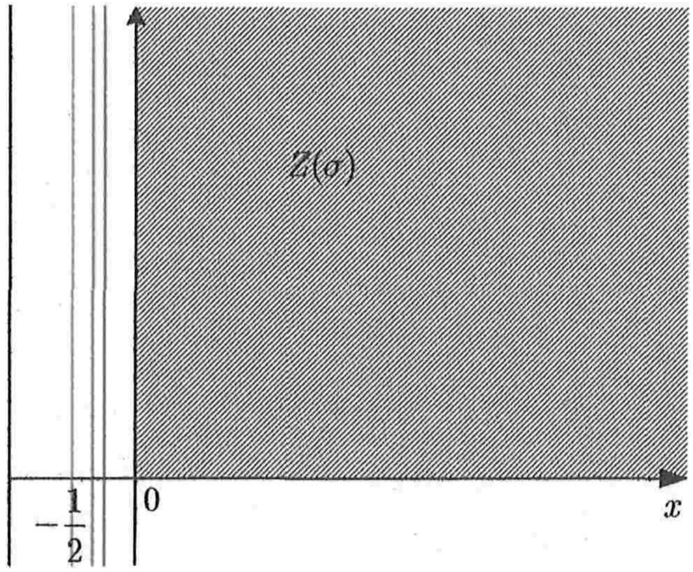

Figura 2.1: Conjunto factible para el sistema $\langle a(k),(x,y)\rangle \geq b(k)$

Para cualquier $a \in F(T,\mathbb{R}^n)$ definimos

$$C_a := sup_{t\in T} \|a(t)\|_2.$$

Definimos los conjuntos de parámetros

$$\hat{B} := \{\sigma \in \mathcal{P} \ / \ C_a < \infty\},$$

$$U := \{\sigma \in \mathcal{P} \ / \ Z(\sigma) \neq \emptyset \}$$

Para alcanzar nuestro objetivo, debemos dotar al conjunto de parámetros $\mathcal{P}$ de una topología. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$V(\sigma,\varepsilon) := \{\sigma' \in \mathcal{P} \ / \ d(\sigma,\sigma') < \varepsilon\}.$$

De acuerdo con esto el mapeo $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ mide la "distancia" entre dos parámetros en $\mathcal{P}$, cabe hacer la aclaración que este mapeo no es una distancia en el sentido formal, es decir para parámetros $\sigma = (a, b, c)$ y $\sigma' = (a', b', c')$ en $\mathcal{P}$ definimos

$d(\sigma, \sigma') := sup_{t \in T}\ \|a(t) - a'(t)\|_2 + sup_{t \in T}\ |b(t) - b'(t)| + \|c - c'\|_2$

Dotado con esta topología el conjunto $\mathcal{P}$ satisface el primer axioma de numerabilidad y el axioma de Hausdorff.

Una sucesión $\sigma_k = (a_k, b_k, c_k)$ en $\mathcal{P}$ converge a $\sigma = (a, b, c)$ en $\mathcal{P}$ sí y sólo sí la convergencia es uniforme (*ver* 7).

Presentarnos a continuación la definición del conjunto de restricciones activas modificadas.

Definición 9 *Sea $\sigma \in U$. Paro cada $x \in Z(\sigma)$, el conjunto de restricciones activas modificadas está definido por:*

$$A(\sigma, x) := \left\{ B \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{(t_k) \subseteq T}\ B = \lim_{k \longrightarrow \infty} a(t_k) \ \text{ y } \langle B, x \rangle = \lim_{k \longrightarrow \infty} b(t_k) \right\}.$$

Este conjunto es cerrado y $a(t) \in A(\sigma, x)$ para cada $t \in M(\sigma, x)$. En el caso continuo $A(\sigma, x) = a(M(\sigma, x))$ *(ver* 7).

Si T es compacto y los mapeos a y b son continuos sobre T entonces se obtiene el siguiente teorema probado por el Dr. Maxim L. Todorov y S. Helbig *(ver* 7).

Teorema 10 *El mapeo $A: \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n, (\sigma, x) \longmapsto A(\sigma, x)$, es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berge) en cada. $(\sigma, x) \in \hat{B} \times \mathbb{R}^n$.*

En la demostración de este teorema la condición $(\sigma, x) \in \hat{B} \times \mathbb{R}^n$ es fundamental, lo que se desea en esta tesis es demostrar el teorema 1 debilitando esta condición y para ello introducimos a continuación la definición del conjunto de restricciones activas extendidas.

Definición 11 *Sea $\sigma = (a, b, c)$, $\bar{x} \in Z(\sigma) y$ $\gamma > 0$. Entonces, definimos el conjunto de restricciones activas extendidas, como sigue:*

$W_\sigma(\bar{x},\ \gamma)\ := \{\ a(t)\ \in \mathbb{R}^n:\ \ t\ \in T\ \ \ y\ \exists\ \ y \in O_\sigma(\bar{x})\ :\ \langle a(t), y\rangle\ =\ b(t)\}.$

Cabe señalar la importancia de este concepto al proporcionarnos información local útil (respecto a una solución $\bar{x}$) en optimización lineal semi-infinita, por ejemplo si $\bar{x}$ es un punto factible, ¿cuándo $y \in O_\sigma(\bar{x}),\ \gamma > 0,$ pertenece a *Z(σ)?,* condiciones para que $\bar{x}$ sea una solución única, condiciones para que un cierto vector $d \in \mathbb{R}^n$ pertenezca al cono de direcciones factibles en el punto $\bar{x}$ que pertenece a el conjunto factible Z(σ), denotado por D (Z (σ), $\bar{x}$) (ver B.1.). Algunas otras propiedades de este concepto se presentarán en la sección 2.3.

2.2. Interpretación geométrica

Damos a continuación la interpretación geométrica del conjunto de restricciones activas extendidas asociado a un punto $\bar{x}\ \in\ \ bd\ Z(\sigma)$.

En la figura 2.2 se muestra la interpretación geométrica del conjunto de restricciones activas extendidas $W_\sigma(\bar{x},\gamma) \neq \emptyset$.

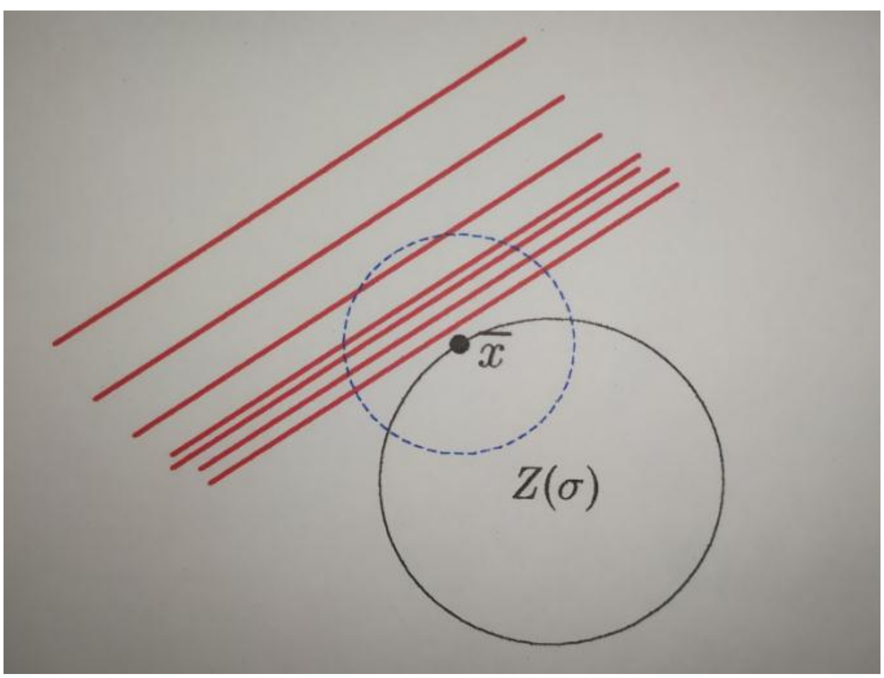

Figura 2.2: Interpretación geométrica del conjunto de restricciones activas $W_\sigma(\bar{x},\gamma)$

2.3. Propiedades de conjuntos de restricciones activas extendidas

La definición de conjunto de restricciones activas extendidas tiene propiedades interesantes, algunas de las cuales son

Lema 12 *(ver* 9.1) *Sea* $\sigma = (a, b, c)$ *y* $\bar{x} \in bd\, Z(\sigma)$, *las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(i) $W_\sigma(\bar{x}, \gamma)$ *contiene al menos un vector distinto de cero paro todo* $\gamma > 0$.

(ii) Si $M(\sigma, x) = \emptyset$, *entonces* $W_\sigma(\bar{x}, \gamma)$ *es un conjunto infinito paro todo* $\gamma > 0$.

(iii) Si $|T| < \infty$, *entonces* $W_\sigma(\bar{x}, \gamma) = \{a(t), t \in M(\sigma, x)\}$ *para* $\gamma > O$ *suficientemente pequeño.*

Demostración. (i) Dado un $z \in O_\sigma(\bar{x}) \setminus Z(\sigma)$ arbitrario, existe $s \in T$ tal que $\langle a(s), z\rangle < b(s)$. Como $\langle a(s), \bar{x}\rangle \geq b(s)$ debe existir $y \in |\bar{x}, z| \subset O_\gamma(\bar{x})$ tal que $\langle a(s), y\rangle = b(s)$.

Entonces $O_n \neq a(s) \in W_\sigma(\bar{x}, \gamma)$.

(ii) Sea $M(\sigma, x) = \emptyset$ y supongamos que $W_\sigma(\bar{x}, \gamma) \setminus \{O_n\} = \{a(t),\ t \in S\}$, con $|S| < \infty$.

Entonces tenemos que

$$0 < \varepsilon := mín\left\{\frac{\langle a(t), \bar{x}\rangle - b(t)}{\|a(t)\|} \quad / \, t \in S\right\} < \gamma,$$

pues si $y \in O_\gamma(\bar{x})$,

$$\frac{\langle a(t), \bar{x}\rangle - b(t)}{\|a(t)\|} = \frac{\langle a(t), \bar{x}\rangle - a(t)y}{\|a(t)\|} = \frac{a(t)(\bar{x} - y)}{\|a(t)\|} \leq \frac{\|a(t)\|\|\bar{x} - y\|}{\|a(t)\|} < \gamma$$

Así $a(t) = O_n$ para todo $a(t) \in W_\sigma(\bar{x}, \gamma)$. Esto contradice (i).

(iii) Supongamos $|T| < \infty$. Por (ii), $M(\sigma, \bar{x}) \neq \infty$. Si $M(\sigma, \bar{x}) = T$ o bien $\{a(t);\ t \in T \setminus M(\sigma, \bar{x})\} = \{O_n\}$, entonces

$$W_\sigma(\bar{x}, \gamma) = \{\, a(t)\ ;\ t \in M(\sigma, \bar{x})\},$$

para todo $\gamma > 0$. En otro caso $W_\sigma(\bar{x}, \gamma) = \{a(t); t \in M(\sigma, \bar{x})\}$; es válida para todo

$\gamma > 0$ tal que

$$\gamma < min\left\{\frac{\langle a(t),\bar{x}\rangle - b(t)}{\|a(t)\|} / a(t) \neq 0_n, t \in T \setminus M(\sigma,\bar{x})\right\}$$

■

Lema 13 *(ver 9,1} Sea $\bar{x} \in Z(\sigma)$ y $y \in O_\gamma(\bar{x}), \gamma > 0$. Entonces $y \in Z(\sigma)$ si y sólo si $\langle a(t), y\rangle \geq b(t)$ paro todo $a(t) \in W_\sigma(\bar{x},\gamma)$*

Demostración. *La condición necesaria de la afirmación es trivial puesto que si $y \in Z(\sigma)$, esto implica que $\langle a(t), y\rangle > b(t)$ para todo $t \in T$*

Para probar la condición suficiente, supongamos $y \notin Z(\sigma)$.

Entonces existe $s \in T$ talque $\langle a(s), y\rangle < b(s)$. Como $\langle a(s),\bar{x}\rangle \geq b(s)$, debe existir $z \in |\bar{x}, y| \subset O_\gamma(\bar{x})$ tal que $\langle a(s), z\rangle = b(s)$. Entonces $a(s) \in W_\sigma(\bar{x},\gamma)$ y con esto obtenemos una contradicción (es decir tenemos que existe $s \in T$ tal que $\langle a(s), y\rangle < b(s)$. ■

Lema 14 *Sea $\bar{x} \in Z(\sigma)$ y $d \in \mathbb{R}^n$. La siguiente afirmación es válida:*

Si paro un cierto $\gamma > 0$ tenemos $\langle a(t), d)\rangle \geq 0$ paro todo $a \in W_\sigma(\bar{x},\gamma)$, entonces $d \in D(Z(\sigma),\bar{x})$ (cono de direcciones factibles en el punto $\bar{x}$ que pertenece a $Z(\sigma)$ (ver B.1.).

Demostración. Supongamos que $\langle a(t), d)\rangle \geq 0$ para todo $a(t) \in W_\sigma(\bar{x},\gamma)$, $\gamma > 0$. Sin pérdida de generalidad podernos suponer que $\|d\| = 1$. Tomando un ε arbitrario tal que $0 < \varepsilon < \gamma$, tenernos que $\bar{x} + \varepsilon d \in \bar{x} + O_\gamma(\bar{x})$ *y* $a(t)(\bar{x} + \varepsilon d) = a(t)\bar{x} + \varepsilon a(t)d \geq b(t)$ para todo $a(t) \in W_\sigma(\bar{x},\gamma)$, así que $\bar{x} + \varepsilon d \in Z(\sigma)$ por el lema 13. Por tanto, $d \in D(Z(\sigma),\bar{x})$. ■

En el teorema siguiente se habla de que si se cumple cierta hipótesis, existe $V \ni \sigma_0$ tal que $W_\sigma(z,\frac{\gamma}{3})$ es uniformemente acotado cuando $\sigma \in V$ y $z \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$

Esto significa que existe un número real $M > 0$ tal que existe una vecindad de σ_0 tal que para todo (σ, z) que pertenece a $V \times O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$ y para todo *a(t)* que pertenece al conjunto de restricciones activas extendidas $W_\sigma(z, \frac{\gamma}{3})$, se tiene que $\|a(t)\| < M$.

Teorema 15 *Dado* $W_{\sigma_0}(x,\gamma)$, *acotado. Entonces existe* $V \ni \sigma_0$ *tal que* $W_\sigma(z, \frac{\gamma}{3})$, *donde* $\sigma \in V$, $z \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$ *es uniformemente acotado.*

Demostración. *Supongamos lo contrario, es decir, que existen sucesiones* $\sigma_n \to \sigma_0$, $z_n \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$ *y* $a_{\sigma_n}(t_n) \in W_{\sigma_n}(z, \frac{\gamma}{3})$ tales que $\|a_{\sigma_n}(t_n)\| \geq n$

n = 1, 2, ... Como $a_{\sigma_n}(t_n) \in W_{\sigma_n}(z, \frac{\gamma}{3})$ entonces para todo n = 1, 2, ... existe $y_n \in O_{\frac{\gamma}{3}}(z_n)$ tal que $\langle a_{\sigma_n}(t_n), y_n \rangle = b_{\sigma_n}(t_n)$, donde $y_n \in O_{\frac{2\gamma}{3}}(z_n)$ (porque $z_n \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$ y $y_n \in O_{\frac{\gamma}{3}}(z_n)$.

Como y_n es una sucesión acotada y totalmente contenida en $O_{\frac{2\gamma}{3}}(x)$ entonces $y_n \to y_0 \in O_{\frac{2\gamma}{3}}(x)$.

Como $\sigma_n \to \sigma_0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|\sigma_n - \sigma_0\| < \frac{1}{n}$ n = 1, 2, ...

AFIRMACIÓN: $\|a_{\sigma_0}(t_n)\| \geq n - \frac{1}{n}$ $\qquad n$ = 1,2, ...

Prueba de la afirmación:

$$| \|a_{\sigma_n}(t_n)\| - \|a_{\sigma_o}(t_n)\| | \leq \|a_{\sigma_n}(t_n) - a_{\sigma_0}(t_n)\| < \frac{1}{n}$$

Como $| \| a_{\sigma_n}(t_n) \| - \| a_{\sigma_0}(t_n) \| | = | \| a_{\sigma_0}(t_n) \| - \| a_{\sigma_n}(t_n) \| |$

$$| \| a_{\sigma_0}(t_n) \| - \| a_{\sigma_n}(t_n) \| | \leq \frac{1}{n}$$

$$\|a_{\sigma_n}(t_n)\| - \|a_{\sigma_o}(t_n)\| \leq \frac{1}{n}$$

$$\|a_{\sigma_n}(t_n)\| - \frac{1}{n} \leq \|a_{\sigma_o}(t_n)\|$$

$$n - \frac{1}{n} \leq \|a_{\sigma_n}(t_n)\| - \frac{1}{n} \leq \|a_{\sigma_o}(t_n)\|$$

$$\|a_{\sigma_0}(t_n)\| \geq n - \frac{1}{n} \qquad n = 1,2, \ldots$$

$$| \langle a_{\sigma_0}(t_n),\ y_n)\rangle - b_{\sigma_0}(t_n) | = | \langle a_{\sigma_0}(t_n) - a_{\sigma_n}(t_n),\ y_n)\rangle - b_{\sigma_0}(t_n) + b_{\sigma_n}(t_n) |$$

$$=| \langle a_{\sigma_0}(t_n) - a_{\sigma_n}(t_n),\ y_n \rangle\rangle - [b_{\sigma_0}(t_n) - b_{\sigma_n}(t_n)] \,|$$
$$\leq| \langle a_{\sigma_0}(t_n) - a_{\sigma_n}(t_n)\ , y_n \rangle\rangle \,| + | \, b_{\sigma_0}(t_n) - b_{\sigma_n}(t_n) \,|$$
$$\leq\| \, a_{\sigma_0}(t_n) - a_{\sigma_n}(t_n) \, \|\|\| \, y_n \, \| + \frac{1}{n}$$
$$\leq \frac{1}{n}\|y_n\| + \frac{1}{n}.$$

Como $y_n \to y_0$ y $\|.\|$ es una función continua $\|y_n\| \to \|y_0\|$

$$\leq \frac{1}{n}\|y_0\| + 1 + \frac{\gamma}{12} < \frac{\gamma}{24}$$

para *n* suficientemente grande

Si $x_n = \frac{a_{\sigma_0}(t_n)}{\|a_{\sigma_0}(t_n)\|}$, vamos a encontrar ε tal que

$$\langle a_{\sigma_o}(t_n), y_n\rangle - b_{\sigma_0}(t_n) = -\varepsilon \, \langle a_{\sigma_0}(t_n), x_n\rangle$$
$$= -\varepsilon \left\langle a_{\sigma_0}(t_n), \frac{a_{\sigma_o}(t_n)}{\|a_{\sigma_o}(t_n)\|} \right\rangle$$
$$= -\varepsilon \frac{1}{\|a_{\sigma_0}(t_n)\|} \langle a_{\sigma_0}(t_n), a_{\sigma_0}(t_n)\rangle$$
$$= -\varepsilon \frac{1}{\|a_{\sigma_0}(t_n)\|} \|a_{\sigma_0}(t_n)\|^2$$
$$= -\varepsilon \, \|a_{\sigma_o}(t_n)\|$$

Entonces $\left|\frac{\langle a_{\sigma_o}(t_n), y_n\rangle - b_{\sigma_0}(t_n)}{\|a_{\sigma_0}(t_n)\|}\right| = |-\varepsilon|.$

Pero

$$= \left|\frac{\langle a_{\sigma_0}(t_n), a_{\sigma_0}(t_n)\rangle - b_{\sigma_0}(t_n)}{\|a_{\sigma_0}(t_n)\|}\right| < \frac{\frac{\gamma}{24}}{n - \frac{1}{n}} < \frac{\gamma}{24}, \ \ n \to \infty$$

entonces $y_n + \varepsilon x_n \in O_\gamma$ (porque $y_n \in O_{\frac{2\gamma}{3}}(x)$ y $\varepsilon < \varepsilon$), por tanto $a_{\sigma_0}(t_n) \in W_{\sigma_0}(x,\gamma)$ para toda *n* suficientemente grande y como $W_{\sigma_0}(x,\gamma)$ es acotado entonces existe $M > O$, $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|a_{\sigma_0}(t_n)\| < M$ Pero esto es una contradicción al hecho que $\|a_{\sigma_0}(t_n)\| \geq n - \frac{1}{n}$ $\forall \, n = 1, 2, \ldots$ por tanto se prueba el teorema. ■

De este teorema obtenemos información con respecto al comportamiento del conjunto $W_{\sigma_0}(z, \frac{\gamma}{3})$ en una vecindad de (σ_0, x) que posteriormente utilizaremos en la demostración de nuestro resultado principal.

Damos a continuación un ejemplo en el que se muestra que la hipótesis requerida en este último teorema no es superflua.

Ejemplo 16 *Sea* $n = 2$, $T = \mathrm{N}$, $b(k) := k$ *para cada* $k \in T$ *y* $a(k) := (1, k)$.

De acuerdo con lo anterior, nuestro sistema es

$\sigma_0 = \{\langle a(k), x\rangle \geq b(k)\}$

$\sigma_0 = \{x + ky \geq k\}$

Para este sistema σ_0 el conjunto factible $Z(\sigma)$ son aquellos puntos en $\mathbb{R}^2$ tales que se encuentran por arriba de la línea $y = 1 - x$ y, incluyendo el punto $\bar{x} = (0,1)$ como se muestra en la figura 2.3

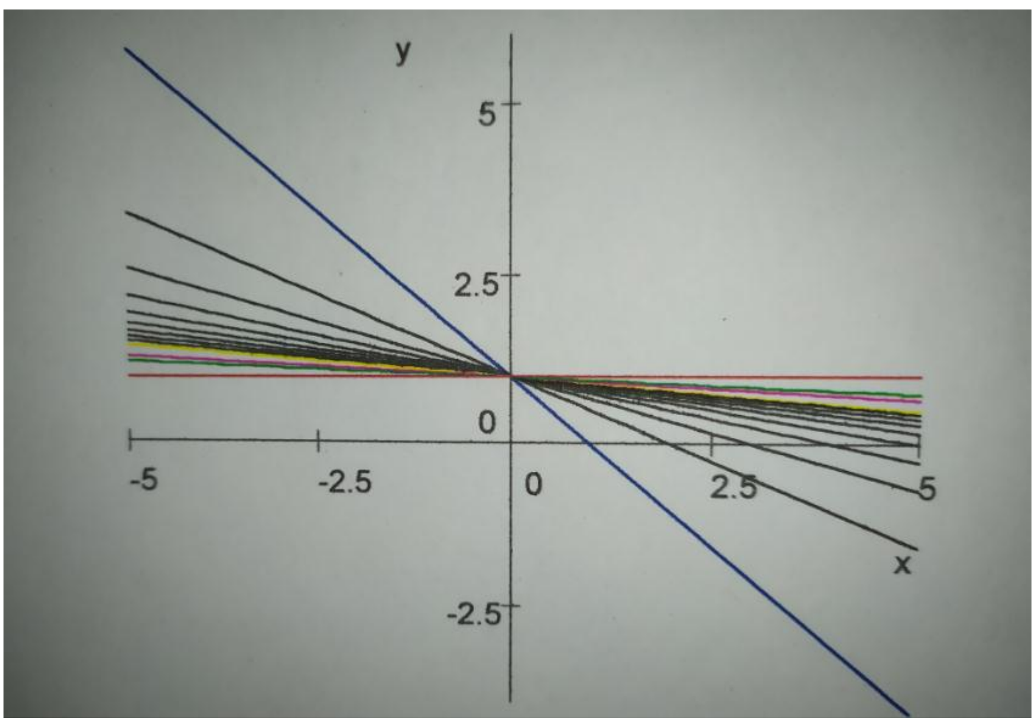

Figura 2 .3 Conjunto factible para el sistema $\sigma_0 = \{x + ky \geq k\}$.

Para σ_0 tenemos que $\mathrm{a(k)} = (1, \mathrm{k}) \in \{\mathrm{a(k)}, \mathrm{t} \in \mathrm{M}(\sigma_0, (0,1))\} \subseteq \mathrm{W}_{\sigma_0}(\bar{\mathrm{x}}, \gamma)$, donde $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$

Pero $\{a(k), t \in M(\sigma_0, (0,1)), k \in \mathbb{N}$, no es acotado, por tanto $W_{\sigma_0}(\bar{x}, \gamma)$ no es acotado.

Sea $\hat{x}$ localizado en la recta $y = 1 - x$, para este $\hat{x}$ existe un $\hat{k}$ que pertenece a los naturales tal que para todo $k \geq \hat{k}$, la pareja $(1, k)$pertenece al conjunto $W_{\sigma_0}(\hat{x}, \gamma)$ para todo $\gamma > 0$, de donde $W_{\sigma_0}(\hat{x}, \gamma)$ no es acotado.

Es decir para los puntos $\hat{x}$ localizados en la intersección de la recta $y = 1$ y la frontera del conjunto factible, los conjuntos $W_{\sigma_0}(\hat{x}, \gamma)$ correspondientes no son acotados.

Sea $\tilde{x}$ localizado en la recta $y = 1 - x$ sin el punto $(O, 1)$ en la frontera del conjunto factible, para este $\tilde{x}$ existe $\tilde{\gamma} > 0$ tal que para todo $\gamma \in (0, \tilde{\gamma})$ el conjunto de restricciones activas extendidas correspondientes $W_{\sigma_0}(\hat{x}, \gamma) = \{(1,1)\}$ y este conjunto es acotado. Para estos puntos podernos aplicar el

teorema 15. El ejemplo anterior nos muestra que, dentro de un mismo sistema hay puntos en la frontera del conjunto factible en los cuales el teorema 15 puede ser aplicado y otros en donde no se satisface la hipótesis.

De acuerdo con [8] podemos reescribir al conjunto $A(\sigma, x)$ de la siguiente forma:

$$A(\sigma, x) := \left\{c \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} c \\ \langle c, x \rangle \end{pmatrix} \in cl \quad \left[\begin{matrix} a(t) \\ b(t) \end{matrix}, t \in T\right]\right\}.$$

Demostramos a continuación la siguiente proposición.

Proposición 17 .- *Dado* $x \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ *entonces para cada* σ *fijo,* $x \in Z(\sigma)$, *se cumple que:* $A(\sigma, x) \subseteq cl\, W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$

Demostración. Sea $c \in A(\sigma, x)$ entonces $\begin{pmatrix} c \\ \langle c, x \rangle \end{pmatrix} \in cl \quad \left[\begin{matrix} a(t) \\ b(t) \end{matrix}, t \in T\right]$

Comentario $\{a(t) : t \in M(\sigma, x)\} \subseteq W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$ para todo $\gamma > 0$.

Primer caso:

Si $\begin{pmatrix} c \\ \langle c, x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ para algún $t \in T$ ya terminamos puesto que por la afirmación y la definición de $W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$ de donde $c \in cl\ W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$

Segundo caso:

Sea $c \in A(\sigma, x), c \neq 0_n$ tal que $\forall t \in T, \begin{pmatrix} c \\ \langle c, x\rangle \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$

Como $\begin{pmatrix} c \\ \langle c, x\rangle \end{pmatrix} \in cl \ \left[\begin{matrix} a(t) \\ b(t) \end{matrix}, t \in T\right]$ entonces existe una subsucesión denotada por simplicidad como $\begin{pmatrix} a(t_k) \\ b(t_k) \end{pmatrix}$ que converge a $\begin{pmatrix} c \\ \langle c, x\rangle \end{pmatrix}$ cuando $k \to \infty$; esto implica que:

$$\begin{aligned} a(t_k) &\to c \qquad \text{cuando } k \to \infty \text{ y} \\ b(t_k) &\to \langle c, x\rangle \quad \text{cuando } k \to \infty \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lo que debemos demostrar ahora es que $a(t_k) \in W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$ a partir de un cierto $\bar{k}$, puesto que si $a(t_k) \in W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$ para $k > \bar{k}$ y $(t_k) \to c$ entonces tendríamos que $c \in cl\ W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$.

Debemos encontrar un elemento $z_k \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$ tal que $\langle a(t_k), z_k\rangle = b(t_k)\cdot$

Sabemos que $\langle a(t_k), z_k\rangle \neq b(t_k)$, (en otro caso aquí se termina la prueba, por la afirmación).

Si ponemos

$$\langle a(t_k), (x - \varepsilon_k a(t_k)\rangle = b(t_k)$$

$$\begin{aligned} O_n \neq \langle a(t_k), x\rangle - b(t_k) &= \varepsilon_k \langle a(t_k), a(t_k)\rangle \\ &= \varepsilon_k \|a(t_k)\|^2 \end{aligned}$$

como $a(t_k) \neq 0$ entonces $\|a(t_k)\|^2 \neq 0$

$$y\ \varepsilon_k = \frac{\langle a(t_k), x\rangle - b(t_k)}{\|a(t_k)\|^2} > 0$$

Podemos escoger $\varepsilon_k = \frac{\langle a(t_k),x\rangle - b(t_k)}{\|a(t_k)\|^2} > 0$ tal que la igualdad $\langle a(t_k), (x - \varepsilon_k a(t_k))\rangle = b(t_k)$ se cumpla, puesto que $\langle a(t_k), x\rangle - b(t_k) \neq 0$ pero $\langle a(t_k), x\rangle - b(t_k) \to 0$ por (2.1).

Tenemos que $\varepsilon_k \to 0$ y como $\left(a(t_k)\right)$ es convergente, también es acotada, de donde $\varepsilon_k a(t_k) \to 0$ esto significa que a partir de un cierto , $z_k \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$.

Por tanto $z_k = x - \varepsilon_k a(t_k)$ tal que $\langle a(t_k), z_k\rangle = b_k$ es el requerido.

Así $a(t_k) \in W_\sigma(x, \frac{\gamma}{3})$ para $k > \bar{k}$ y como $a(t_k) \to c$, $c \in cl\, W_\sigma\left(x, \frac{\gamma}{3}\right)$. ■

2.4. Resultados sobre la estabilidad del mapeo *A*

En esta sección exponemos los resultados obtenidos con respecto a la estabilidad (propiedades de continuidad) del mapeo multivaluado *A*.

Teorema 18 *Dado* $(\sigma, x) \in P \times \mathbb{R}^n$ *tal que existe* $\gamma > 0$ *con* $W_\sigma(x, \gamma)$ *acotado entonces el mapeo* $A : P \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, (\sigma, x) \mapsto A(\sigma, x)$ *es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berge) en la vecindad* $(V, O_{\frac{\gamma}{3}}(x)) \ni (\sigma, x)$ *según el teorema 15.*

Demostración. *Para probar el teorema supóngase lo contrario, que el mapeo A no es semicontinuo superiormente en algún* $(\sigma', x') \in (V, O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$*; entonces existe una vecindad* V' *de A* (σ', x')*, una sucesión* $(\sigma_k, x_k) \subseteq P \times \mathbb{R}^n$ *que converge a* (σ', x') *y vectores* $a_k \in A(\sigma_k, x_k)$ *tales que* $a_k \notin V'$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$*, dado y sea* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ *y* $d(\sigma_k, \sigma') < \frac{\varepsilon}{2}$ *para cada* $k \geq k_0$.

Por definición de $A(\sigma_k, x_k)$ *podemos escoger* $t_k \in T$ *tal que* $\|a_k - a_k(t)\|_2 < \frac{1}{k}$

Así para cada $k \geq k_0$ se sigue que

$$\| a_k - a'(t_k) \|_2 \leq \| a_k - a_k(t_k) \|_2 + \| a_k(t_k) - a'(t_k) \|_2 < \varepsilon \qquad (2.2)$$

Como $W_{\overline{\sigma}}(x,\gamma)$ es acotado, por el teorema 15, existe V, vecindad de σ que $W_{\overline{\sigma}}(z,\frac{\gamma}{3})$ es uniformemente acotado, $\forall\overline{\sigma} \in V, z \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x)$.

Puesto que $(\sigma', x') \in V \times O_{\frac{\gamma}{3}}$ y $(\sigma_k, x_k) \to (\sigma', x')$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\sigma_k, x_k)V \times O_{\frac{\gamma}{3}}(x)\forall\, k \geq n_0$.

Sabemos que $A(\sigma_k, x_k) \subset cl\, W_{\sigma_k}(x_k,\frac{\gamma}{3})$ por la proposición 17, y $W_{\sigma_k}(x_k,\frac{\gamma}{3})$ es uniformemente acotado por el teorema 15, entonces $cl\ W_{\sigma_k}(x_k,\frac{\gamma}{3})$ es uniformemente acotado, de donde $A(\sigma_k, x_k)$ es uniformemente acotado.

Pero por hipótesis $a_k \in A(\sigma_k, x_k)$, entonces existe $M > 0$ que pertenece a $\mathbb{R}$ tal que $\|a_k\| \leq M$, para todo $k \geq k'$, donde $k' = máx\{k_0, n_0\}$.

Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_k \to \bar{B}$ (puesto que a_k es una sucesión acotada por la ecuación (2.2)) para algún $\bar{B} \in \mathbb{R}^n$.

Como $\bar{B} \in A(\sigma', x') \subseteq V'$por la afirmación 19 siguiente se contradice la selección de la sucesión (a_k)·

Por tanto el teorema se prueba. ■

Afirmación 19 $\bar{B} \in A(\sigma', x')$

Demostración. Por (2.2) es fácil ver que $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a'(t_k)$ y por la unicidad del límite de la sucesión *(a_k)* tenemos que $\lim_{k\to\infty} a'(t_k) = \bar{B}$.

Más aún por la convergencia de la sucesión (σ_k, x_k), y (2.2) obtenemos que $\langle a'(t_k), x'\rangle - b'(t_k) = \langle a'(t_k), x' - x_k\rangle + \langle a'(t_k) - a_k(t_k), x_k\rangle +$
$\langle a_k(t_k), x_k\rangle - b_k(t_k) + b_k(t_k) - b'(t_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$■

Teorema 20 *El, mapeo multivaluado* $A : P \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, (\sigma, x) \mapsto A(\sigma, x)$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $(\sigma_0, x_0) \in: P \times \mathbb{R}^n$, sea $((\sigma_m, x_m)) \subset P \times \mathbb{R}^n$ que converge a (σ_0, x_0), y sea $a_m \in A(\sigma_m, x_m)$ *con* a_m que converge a a_0.

Sea $\delta > 0$ dado y sea $a_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \leq \frac{\delta}{3}$ y $d(\sigma_m, \sigma_0) < \frac{\delta}{3}$ para cada $m \geq m_0$.

Por definición de $A(\sigma_m, x_m)$ y sabiendo que $a_m \in A(\sigma_m, x_m)$ podemos escoger $t_m \in T$ *tal* que

$$\| a_m - a_m(t_m) \|_2 < \frac{1}{m} \ y \ \ | \langle a_m(t_m), x_m \rangle - b_m(t_m) | < \frac{1}{m}.$$

Así para cada $m \geq m_0$o se sigue que

$$\| a_m - a_0(t_m) \|_2 \leq \| a_m - a_m(t_m) \|_2 + \| a_m(t_m) - a_0(t_m) \|_2 < \frac{2}{3}\delta.$$

Puesto que a_m converge a a_0, para este $\delta > 0$ dado, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que: $\|a_0 - a_m\| < \frac{\delta}{3}$ para todo $m \geq r$ y

$$\|a_0 - a_m(t_m)\| \leq \|a_0 - a_m\|_2 + \| a_m - a_m(t_m) \|_2 < \frac{2}{3}\delta$$

para todo $m \geq s = máx\{m_0, r\}$.

Entonces para cada $m \geq s$ tenemos que

$$\|a_0 - a_0(t_m)\| \leq \|a_0 - a_m(t_m)\| + \| a_m(t_m) - a_0(t_m) \|_2 < \delta$$

de donde podemos concluir que $\lim_{m \to \infty} a_0(t_m) = a_0$.

Resta mostrar que $\langle a_0(t_m), x_0 \rangle - b_0(t_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Por la convergencia de la sucesiones $((\sigma_m, x_m)) \to (\sigma_0, x_0)$ y $(a_0(t_m)) \to a_0$ con $m \geq s$ obtenemos que $\langle a_0(t_m), x_0 \rangle - b_0(t_m) = \langle a_0(t_m), x_0 - x_m \rangle + \langle a_0(t_m) - a_m(t_m), x_m \rangle + \langle a_m(t_m), x_m \rangle - b_m(t_m) + b_m(t_m) - b_0(t_m) \to 0$, cuando $m \to \infty$. Así que $a_0 \in A(\sigma_0, x_0)$.

Por tanto el teorema se prueba.■

A continuación enunciamos y demostramos un lema que nos da la posibilidad de concluir la semicontinuidad superior (en el sentido de Berge) del mapeo multivaluado $A:(\sigma,x)\to A(\sigma,x)$ en el punto (σ_0,x_0).

Lema 21 *Sean* (X,τ) *y* (Y,η) *espacios métricos, y un mapeo multivaluado* $P:X\to Y$*. Si para* $x_0\in X$ *existe una vecindad* V *de* x_0 *tal que* $P(V)$ *es relativamente compacto y* P *es cerrado en* x_0 *entonces* P *es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berge) en* x_0.

Demostración. Para probar el lema supongamos lo contrario: que el mapeo multivaluado P no es semicontinuo superiormente en algún punto x_0.

Entonces existe una vecindad W' de $P(x_0)$, y existe $x_n\subseteq X$ sucesión que converge a $x_0, y_n\in P(x_n)\backslash W'$ para cada $n\in\mathbb{N}$, con y_n que converge a y_0.

Sea V vecindad de x_0, puesto que $P(V)=\cup_{x\in V}P(x)$ es un conjunto relativamente compacto por hipótesis y P *es* cerrado, el límite y_0 de la sucesión y_n pertenece a $P(x_0)$; pero $P(x_0)\subseteq W'$ así que $y_0\in W'$ lo cual es una contradicción, con lo que se demuestra el lema.■

Para finalizar enunciamos y demostramos la versión del teorema 18 en forma puntual, es decir en el punto $(\sigma_0,x_0)\in P\times\mathbb{R}^n$.

Teorema 22 *Sea* $(\sigma_0,x_0)\in P\times\mathbb{R}^n$ *tal que existe* $\gamma_0>0$ *con* $W_{\sigma_0}(x_0,\sigma_0)$ *acotado. Entonces el mapeo* $A:\times\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n,(\sigma,x)\mapsto A(\sigma,x)$ *es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berge) en el punto* (σ_0,x_0).

Demostración. Sea *Sea* $(\sigma_0,x_0)\in P\times\mathbb{R}^n$ de tal forma que existe $\gamma_0>0$ tal que $W_{\sigma_0}(x_0,\gamma_0)$ es acotado, entonces por el teorema 15 existe una vecindad $V\times O_{\frac{\gamma}{3}}(x_0)$ de (x_0,γ_0) tal que $W_\sigma(z,\frac{\gamma_0}{3})$ es uniformemente acotado con $\sigma \in V$ y $z \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x_0)$.

Por la proposición 17 $A(\sigma, z) \subseteq cl\, W_\sigma(z, \frac{\gamma_0}{3})$ para cada $\sigma \in V$ y $z \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x_0)$, puesto que $W_\sigma(z, \frac{\gamma_0}{3})$ es uniformemente acotado, el conjunto $cl\, W_\sigma\left(z, \frac{\gamma_0}{3}\right)$ también lo es de donde se obtiene que $A(\sigma, z)$ es uniformemente acotado en $V \times O_{\frac{\gamma_0}{3}}(x_0)$.

Esto implica que $\cup_{\sigma \in V} A(\sigma, z) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado y por tanto $z \in O_{\frac{\gamma}{3}}(x_0)$ relativamente compacto.

Ya se demostró en el teorema 20 que el mapeo *A* es cerrado y aplicando el lema 21 al mapeo A en (σ_0, x_0) concluimos su semicontinuidad superior (en el sentido de Berge) en el punto(σ_0, x_0). ■

La demostración del teorema 18 es constructiva a diferencia de la demostración de este teorema 22 en la que se aplica el teorema 20 y el lema 21 ya demostrados.

Capítulo 3

Conclusiones

En este trabajo hemos generalizado el teorema del cual partimos, que trata la semicontinuidad superior del mapeo multivaluado A que asigna a cada problema de optimización lineal semi-infinita y cada punto factible el conjunto de restricciones activas modificadas, relajando la condición de que los vectores *a(t)* sean acotados para todo $t \in T$, y concluyendo aún la semicontinuidad superior de forma local y puntual en una vecindad del punto (σ, x)

El teorema del cual partimos también está probado en un artículo por aparecer pero sólo en el caso cuando x pertenece a la frontera del conjunto factible, cabe hacer la aclaración que en este trabajo de tesis este teorema lo hemos probado para todos los puntos en el conjunto factible.

La prueba se ha hecho en forma directa y usando una condición suficiente demostrada aquí, hemos obtenido algunos resultados de las propiedades de los conjuntos de restricciones activas extendidas en forma de lemas y se ha demostrado que este mapeo multivaluado A es cerrado en los puntos que pertenecen a $P \times \mathbb{R}^n$.

Estos resultados dan la posibilidad de generalizar en gran medida todos los resultados del artículo en el que se prueba el teorema del cual surgió este trabajo de tesis particularmente el teorema de Numberger que caracteriza el interior del conjunto de los problemas que tienen solución fuertemente única.

Apéndice A

Conceptos y definiciones básicas

Los resultados y definiciones que se enuncian a continuación, que emplearemos a lo largo de este trabajo, se derivan del análisis matemático.

A.1. Fundamentos matemáticos.

En el espacio finito dimensional $\mathbb{R}^n$ consideramos la norma euclidiana de un elemento $x = (x_1, \dots, x_n)$, definida como

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 23 (ver [l]) *Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un número real $\varepsilon > 0$, al conjunto $O_\varepsilon(x) = \{y : \|x - y\| < \varepsilon\}$, se le denomina bola abierta con centro x y radio ε.*

Definición 24 (ver [5]) *Una topología sobre un conjunto X es una colección $\mathfrak{I}$ de subconjuntos de X que tiene las siguientes propiedades:*

(1) $\emptyset$ y X están en $\mathfrak{I}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathfrak{I}$ está en $\mathfrak{I}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathfrak{I}$ está en $\mathfrak{I}$.

Definición 25 (*ver [5]) Un espacio topológico es un par ordenado $(X, \mathfrak{I})$ que consiste de un conjunto X y una topología $\mathfrak{I}$ sobre X.*

Definición 26 (*ver [l]) Dado X espacio topológico con topología $\Im$ decimos que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si U pertenece a la colección $\Im$*

Definición 27 *(ver [5]) Un espacio topológico X es un espacio Hausdorff si para cada par de puntos distintos x_1, x_2 de X, existen U_1 y U_2 vecindades de x_1, x_2, respectivamente, que son disjuntas.*

Definición 28 (*ver* [1]) *Se dice que un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, si* $\sup\{\|x-y\| : x, y \in M\} < \infty$.

Definición 29 (ver [1]) *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Un elemento $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural$M(\varepsilon)$ tal que paro todo $n \geq M(\varepsilon)$*

$$\|x_n - \bar{x}\| < \varepsilon$$

Si $\bar{x}$ es el límite de $\{x_n\}$ se dice que $\{x_n\}$ converge a $\bar{x}$ y se denota por $x_n \to \bar{x}$. También se dice que la sucesión es convergente.

Lema 30 (ver [l]) *Si una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ converge a un elemento $\bar{x}$, entonces cualquier subsucesión $\{x_{n_m}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ también converge a $\bar{x}$.*

Teorema 31 ***(Bolzano - Weiertrass, ver*** **[1]).** *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.*

Teorema 32 (*ver [l]) Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\bar{x}$ si y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que$\{x_n\}$ converge a $\bar{x}$, se tiene que la sucesión de números reales$\{f(x_n)\}$ converge a $f(\bar{x})$.*

A.2. Mapeos Multivaluados

En esta sección enunciamos las definiciones de mapeos multivaluados y semicontinuidad superior de mapeos multivaluados.

Definición 33 *(ver* [6]) *Sean X, Y conjuntos no vacíos. Por un mapeo multivaluado de X en Y entendemos una regla de asociación* Ψ *la cual, a cada elemento* $x \in X$*, le asigna un subconjunto (quizás vacío* $\Psi(x)$ *de Y.*

Definición 34 (*ver* [6]) *Sean* (X, τ) *y* (Y, η) *espacios topológicos. Un mapeo multivaluado*

$$\Psi : X \to Y$$

se dice que es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berge) en el punto $x_0 \in X$ *si y sólo si paro cada conjunto abierto* $W \in \eta$ *tal que*

$$\Psi(x_0) \subset W,$$

existe un conjunto abierto $V \in \tau$ *tal que* $x_0 \in V$ *y* $\forall\, x \in V, \Psi(x) \subset W$

Se dice que Ψ *es semicontinuo superiormente (en el sentido de Berge) si es semicontinuo superiormente en cada punto.*

Definición 35 (*ver* [6]) *Sean* (X, τ) *y* (Y, η) *espacios topológicos. Un mapeo multivaluado*

$$\Psi : X \longrightarrow Y$$

se dice que es semicontinuo inferiormente (en el sentido de Berge) en el *punto* $x_0 \in X$ *sí y sólo si paro cada conjunto abierto* $W \in \eta$ *tal que* $W \cap$

$$\Psi(x_0) \neq \emptyset$$

existe un conjunto abierto $V \in \tau$ *tal que* $x_0 \in V$ *y*

$$\forall x \in V,\ \Psi(x) \cap W \neq \emptyset$$

Se dice que Ψ *es semicontinuo inferiormente (en el sentido de Berge) si es semicontinuo inferiormente en cada punto*

Definición 36 *(ver* [11]*) Sean* (X,τ) *y* (Y,η) *espacios topológicos. Un mapeo multivaluado*

$$\Psi : X \longrightarrow Y$$

se dice que es cerrado en el punto $x_0 \in X$ *si para cada par de sucesiones* $\{x_n\} \subset X$ *y* $\{y_n\} \subset Y$, $n = 1, 2, \ldots$, *con las propiedades*

$$\{x_n\} \longrightarrow x_0, \quad y_n \in \Psi(x_n), \quad \{y_n\} \longrightarrow y_0$$

se sigue que $y_0 \in \Psi(x_0)$.

Se dice Ψ que es cerrado si es cerrado en cada punto.

Apéndice B

Análisis Convexo

B.1. Conjuntos convexos

En este apéndice vamos a enunciar las definiciones de conjunto convexo, funciones convexas, direcciones factibles, cono de direcciones factibles y algunas de sus propiedades.

Definición 37.- (ver [4]) *Si* $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, *el conjunto de puntos de la forma*

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

se llama la línea que pasa a través de los puntos x *y* y.

Definición 38.- (ver [4]) *Sea* $S \subset \mathbb{R}^n$. *Diremos que S es convexo si dados* $x, y \in S$, *se tiene que:*

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in S, \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Definición 39.- (*ver [4]) Sea* $S \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío. Diremos que S es un cono si* $x \in S$ *implica que* $\alpha x \in S$, *para todo* $\alpha \geq 0$. *S es un cono convexo si además, S es convexo.*

Teorema 40.- (ver [4]) *La intersección de una colección arbitraria de conjuntos convexos es convexo.*

Definición 41.- *(ver [3]) La envoltura cónica convexa* $(coneS)$ *de un conjunto no vacío* $S \subset \mathbb{R}^n$ *se define como la intersección de todos los conos convexos que contienen al origen y que contienen a S.*

Dado cualquier conjunto $S \subset \mathbb{R}^n S$ existe un conjunto convexo más pequeño que contiene a *S (*a saber, la intersección de la colección de conjuntos convexos *M* tales que $S \subset M$. Este conjunto se llama la envoltura convexa de *S* y es denotado por $convS$.

Definición 42.- *Dado un sistema* $\sigma = (a, b, c)$*. Decimos que se satisface la condición fuerte de Slater en σ, si y sólo si existe* $\delta > 0$ *y* $x \in Z(\sigma)$ *tal que para cualquier* $t \in T$ *la desigualdad* $\langle a_t, x \rangle > b_t + \delta$ *es válida.*

Definición 43. - *Dado un conjunto S convexo y cerrado en* $\mathbb{R}^n$*, un vector* **d** *en* $\mathbb{R}^n$*, distinto de cero, es llamado una dirección del conjunto S si para cada* $\boldsymbol{x} \in S, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda d}$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda d} \in S$ *paro todo*
$0 \leq \lambda \leq \delta$.

Si el conjunto S es el conjunto factible de un cierto sistema, entonces a ***d*** *se le llamará dirección factible del conjunto S.*

Definición 44.- *Dado un sistema* $\sigma = (a, b, c)$ *definimos el cono de direcciones factibles en* $x \in Z(\sigma)$ *de la siguiente manera:*

$$D(Z(\sigma), x) := \{d \in \mathbb{R}^n : \ x + \lambda d \in Z(\sigma), \quad paro\ algún\ \lambda > \ O\}.$$

B.2. Funciones convexas

Definición 45.- (ver [2]) *Sea S un conjunto no vacío convexo de* $\mathbb{R}^n$ *y*

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función. Se dice que f es convexa en S si

$$\forall x, y \in S \; x \neq y \; \forall \lambda \in (0,1) \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Si la desigualdad se cumple estrictamente para $\lambda \in (0,1)$, *entonces la función se dice estrictamente convexa.*

La norma es una función convexa ya que

$$\|\lambda x + (1-\lambda)\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$$

Lema 46.- (ver [2]) *Sea S un subconjunto no vacío y convexo de* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : S \to \mathbb{R}$ *una función convexa. Entonces, los conjuntos de nivel* $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$, *donde* α *es un número real, son conjuntos convexos.*

B.3. Definiciones importantes en optimización lineal

Consideremos el siguiente problema de optimización lineal

$$\begin{array}{ll} Minimizar & \langle c, x\rangle \\ Sujeto\ a\ \forall t \in T & \langle a(t), x\rangle \geq b(t), \end{array}$$

en donde *T* es un conjunto de índices arbitrario (quizás infinito), $c \in \mathbb{R}^n$, $a : T \to \mathbb{R}^n\ y\ b\ : T \to \mathbb{R}^n$, para cada $t \in T$, están definidas sobre el conjunto *T*.

La función $\langle c, x\rangle$ se llama función objetivo. Cada restricción $\langle a(t), x\rangle \geq b(t)$, se llama restricción de desigualdad. Un punto x que satisface todas las restricciones se llama solución factible del problema. El conjunto de todas las soluciones factibles forma el conjunto factible. Entonces, en un problema de optimización se trata de hallar un punto factible $\bar{x}$ tal que $\langle \mathrm{c}, \bar{x}\rangle \leq \langle c, x\rangle$ para cada punto factible *x*. Tal punto $\bar{x}$ es llamado solución óptima del problema. Si existe más de una solución óptima ellas son referidas como soluciones óptimas alternativas.

Un índice $t \in T$ (o la desigualdad $\langle a(t), x\rangle \geq b(t)$ es activo en el punto factible si $\langle a(t), t\rangle = b(t)$ '

Bibliografía

[1] Apostol, T. M., Análisis matemático, Addison Wesley 1965, (Trad. del original en inglés).

[2] Bazaraa, M.S., H. D., Sherali, and C. M. Shetty. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, 2th Edition. J. Wiley & Sons, Inc. New York, 1993.

[3] Goberna, M. A. and López, M. A., Linear Semi-infinite Optimization, John Wiley and Sons, Belmont, Massachusetts 1995.

[4] Rockafellar, R. T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970

[5] Munkres, James Raymond, Topology: a first course, 1975, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

[6] Brosowski B. Parametric semi-infinite optimization. Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main, 1982.

[7] S. Helbig and M. l. Todorov, Unicity Results for General Linear Semi- Infinite Optimization Problems Using a New Concept of Active Cons- traints, Applied Mathematics Optimization 38, pp. 21-43, 1998.

[8] M. A. Jimenez Pozo, M. l. Todorov, Unicity of the solutions of infinite linear inequality systems, comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, pp. 17-

20, 2001.

[9.1] Miguel A. Goberna, Marco A. López, and Maxim I. Todorov, Extended active constraints in linear optimization with applications, submitted in SIAM J. on Optimization, pp.1-13, 2001.

[9.2] Miguel A. Goberna, Marco A. López, and Maxim l. Todorov, A sup-function approach to linear semi-infinite optimization.to appear in Journal of Mathematical Sciences, pp.1-13, 2001

[10] Mokhtar S. Bazaraa y John J. Jarvis, Programación lineal y flujo en redes, John Wiley and Sons, 1992, México, D.F.

[11] Bank, B.; Guddat, J.; Klatte, D.; Kummer, B.; Tammer, K. Non-Linear Parametric Optimization, Birhauser Verlag , Basel. Boston Stuttgart, 1983.