BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LAS SOLUCIONES QUE DAN LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA AL PROBLEMA "LAS MANZANAS EN EL JARDÍN DE PLACER" DE FIBONACCI: LA COMPARACIÓN ENTRE LOS ALUMNOS OLÍMPICOS Y REGULARES

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

OLIVIA POZO CARRANZA

Director de tesis

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

PUEBLA, PUE., NOVIEMBRE 2022

Dedicación

Quiero dedicar esta tesis, al creador de la vida, porque también los Físicos y Matemáticos, tienen una historia que contar.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres Fernando Pozo y Olivia Carranza, también a mi hermano Fernando Pozo Carranza, por todo lo que han hecho por mi.

A todos mis profesores de la licenciatura especialmente al Dr Josip Slisko Ignajtov por toda la ayuda brindada en la elaboración de esta tesis.

A mis sinodales: Dra. Juárez Ruiz Estela de Lourdes, Dr. Kantún Montiel Gabriel y Dra. Juárez Ramírez María Araceli, Por toda la dedicación en la revisión de esta tesis.

A mis compañeros y amigos: Lic. Marcos Ramírez Mejía, Lic Noemi Sampayo Paredes, Lic. Miguel Ángel Saloma Meneses, Lic. Omar Martínez Morales, Lic. Rubí Hernández Bonilla, Lic. Oscar Montiel González, Lic. Antonio Cardozo Macedo y M.C Alberto Israel Gómez Paredes. Por todo su apoyo y enseñarme a ver la vida de otra forma.

Y finalmente a todos mis alumnos, ya que ellos me enseñaron a ser maestra.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tuvo por objetivo examinar y comparar las soluciones del problema histórico “Manzanas en el jardín de placeres” de Fibonacci dadas por dos diferentes grupos de alumnos de secundaria:

(1) Los alumnos con el interés en las matemáticas y que se estaban preparando en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad de Puebla para la olimpiada de matemáticas (alumnos olímpicos, N = 44);

(2) Los alumnos sin el interés expresado en las matemáticas (alumnos regulares, N = 176).

Como se esperaba, la respuesta correcta para el problema que presentaron 11 alumnos olímpicos (25 % con respecto al número de los alumnos participantes y un 42.31 % con respecto al número de respuestas aceptables) y solamente 4 alumnos regulares (2.27 % con respecto al número de los alumnos participantes y 3% con respecto al número de respuestas aceptables). El procedimiento de resolución en ambos grupos fue el mismo: razonamiento reversible aritmético. Ninguno de los alumnos intentó usar la modelación algebraica (razonar algebraicamente desde el inicio). Muy pocos alumnos intentaron demostrar que su respuesta era correcta.

Varios alumnos en ambos grupos presentaron respuestas incorrectas, basadas en los algoritmos aritméticos inadecuados y mostraron un descuido en el uso de simbología y reglas de operaciones aritméticas.

Esos resultados tienen importantes implicaciones para la enseñanza de las matemáticas en la secundaria.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación tuvo por objetivo conocer, interpretar y comparar los desempeños de dos grupos estudiantiles de secundaria, al resolver el problema histórico "Las manzanas en el Jardín de placeres" formulado y resuelto por Fibonacci.

En el Capítulo 1, llamado "Marco Referencial: Diferentes propuestas del uso de la historia de las matemáticas", se exponen algunas, argumentando el potencial de efectos positivos en importantes aspectos de aprendizaje de las matemáticas.

En el Capítulo 2, denominado "Los problemas históricos en la educación matemática", se presentan las propuestas y secuencias didácticas más específicas sobre el uso de los problemas históricos. También, se ejemplifican los resultados de algunos estudios experimentales donde los estudiantes resolvían uno o más problemas históricos.

En el Capítulo 3 "Los problemas en Liber Abaci de Fibonacci" se describe brevemente la importancia en tal obra y se presentan algunos problemas que contiene. Adicionalmente, se presentan los resultados de algunos estudios experimentales en los cuales los estudiantes resolvían un problema de Fibonacci.

En el Capítulo 4 "Marco Metodológico" se expondrá las preguntas de investigación, la población participante en la investigación y el instrumento para la recolección de los datos.

En el Capítulo 5 "Resultados y su interpretación" es la comparación de las respuestas de dos grupos de alumnos nivel secundaria. Brevemente se comparan tales respuestas con las respuestas obtenidas en las investigaciones similares realizadas en otros países (Francia e Italia).

Finalmente, en el Capítulo 6 “Conclusiones e implicaciones para la enseñanza de las matemáticas”, se presentan las conclusiones de la presente investigación y sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas.

Capítulo 1

MARCO REFERENCIAL: DIFERENTES PROPUESTAS DEL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Existe un gran número de libros publicados que consideran varios aspectos de episodios históricos como punto de partida para diseñar los materiales utilizables en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Katz, 2000; Fauvel & Van Maanen, 2002; Radford, Furinghetti & Hausberger, 2016; Clark et al., 2018). La publicación de esos libros muestra que el campo es muy activo y potencialmente útil para mejorar la forma en que se enseñan y aprenden las matemáticas.

Además, numerosos artículos en las revistas educativas consideran cuestiones filosóficas, epistemológicas y pedagógicas relacionadas. Algunos se centran en un solo aspecto, mientras que otros tienen una visión más amplia. Entre estos últimos, el destacado artículo de Jankvist sobre los "por qué" y los "cómo" del uso de la historia en la educación matemática introduce nociones fundamentales de "la historia como herramienta" y "la historia como meta" (Jankvist, 2009). La historia se ve como "una herramienta" cuando ayuda en el aprendizaje y la enseñanza reales de las matemáticas. La historia es "una meta" en sí misma si se utiliza para enseñar y aprender el desarrollo histórico de las matemáticas.

La mayoría de las veces, los autores tratan solo un aspecto específico de la historia de las matemáticas. Katz, por ejemplo, considera útil el estudio de la historia de un tema curricular particular para encontrar ideas pedagógicas valiosas (Katz, 1986).

En sus numerosos escritos, Swetz abogó por el uso de problemas matemáticos históricos en las aulas para enriquecer el aprendizaje (Swetz, 1989) y por dar a las matemáticas la relevancia social y epistemológica que les faltaba (Swetz, 1984). Sus argumentos bien expuestos merecen una amplia cita:

> “Un enfoque más directo para enriquecer históricamente la instrucción matemática y el aprendizaje de las matemáticas es hacer que los estudiantes resuelvan algunos de los problemas que interesaron a los primeros matemáticos. Dichos problemas ofrecen estudios de casos de muchos temas contemporáneos que encuentran los estudiantes en clase. Transportan al lector a la época en que se plantearon los problemas e ilustran las preocupaciones matemáticas de la época.
> A menudo, estas mismas preocupaciones ocupan a los estudiantes de matemáticas de hoy en día. Esta simple realización, a saber, la continuidad de los conceptos y procesos matemáticos a lo largo de los siglos pasados, puede ayudar a motivar el aprendizaje. Los estudiantes pueden experimentar cierta emoción y satisfacción al resolver problemas que se originaron hace siglos. En cierto sentido, estos problemas permiten a los estudiantes tocar el pasado (Swetz, 1989)”.

Swetz llamó la atención sobre los estudiantes de arte que comúnmente visitan los museos de arte para apreciar las técnicas de los artistas: el dominio del color, la interacción de luces y sombras, e incluso el significado de las escenas representadas. En tal enfoque, tienen lugar tanto el aprendizaje cognitivo como el afectivo. Su propuesta es la siguiente:

> “Los estudiantes también pueden admirar los problemas matemáticos de la historia, como expresiones del genio humano. Pero a diferencia de las piezas de museo, estos problemas pueden ser poseídos por los espectadores a través de una participación en los procesos de solución. Las preguntas que se originaron hace cientos o incluso miles de años pueden entenderse y responderse en el aula de hoy. ¡Qué realización tan dramática es esa! (Swetz, 1989)”

Swetz también argumentó que las prácticas docentes comunes, sin una perspectiva histórica, imponen a los estudiantes una noción de irrelevancia cultural matemática:

“Con frecuencia nos encontramos concentrándonos en la enseñanza de las "matemáticas" (los símbolos, la mecánica, los procedimientos resultantes de las respuestas) sin enseñar realmente de qué se trata la matemática: de dónde viene, cómo se trabajó, cómo se crearon las ideas. percibida, refinada y desarrollada en teorías útiles; en resumen, su relevancia social y humana. En el mejor de los casos, esta práctica producirá técnicos informados que pueden usar las matemáticas desapasionadamente, pero también producirá estudiantes que perciban las matemáticas como una colección incomprensible de reglas y fórmulas que aparecen en masa y descienden amenazadoramente sobre ellos (Swetz, 1984).”

Muchos autores han resumido argumentos a favor del uso de la historia en la educación matemática. Fauvel (1991) dio una impresionante lista de 15 razones:

(1) Ayuda a aumentar la motivación por el aprendizaje.

(2) Da a las matemáticas un rostro humano.

(3) El desarrollo histórico ayuda a ordenar la presentación de los temas en el currículo.

(4) Mostrar a los alumnos cómo se han desarrollado los conceptos ayuda a su comprensión. (5) Cambia las percepciones de los alumnos sobre las matemáticas.

(6) Comparar lo antiguo y lo moderno establece el valor de las técnicas modernas.

(7) Ayuda a desarrollar un enfoque multicultural.

(8) Brinda oportunidades para investigaciones.

(9) Los obstáculos pasados al desarrollo ayudan a explicar lo que a los alumnos de hoy les resulta difícil.

(10) Los alumnos obtienen consuelo al darse cuenta de que no son los únicos que tienen problemas.

(11) Alienta a los estudiantes más rápidos a buscar más.

(12) Ayuda a explicar el papel de las matemáticas en la sociedad.

(13) Hace que las matemáticas sean menos aterradoras.

(14) Explorar la historia ayuda a mantener su propio interés y entusiasmo por las matemáticas.

(15) Brinda una oportunidad para el trabajo interdisciplinario con otros maestros o materias.

Liu (2003) resumió esa lista, reduciéndola a cinco argumentos, que deberían ser una guía panorámica básica para los profesores de matemáticas interesados:

(1) La historia puede ayudar a aumentar la motivación y ayuda a desarrollar una actitud positiva hacia el aprendizaje.

(2) Los obstáculos del pasado en el desarrollo de las matemáticas pueden ayudar a explicar lo que a los estudiantes de hoy les resulta difícil.

(3) Los problemas históricos pueden ayudar a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes.

(4) La historia revela las facetas humanísticas del conocimiento matemático.

(5) La historia da a los maestros una guía para la enseñanza.

El cuarto argumento de Liu, relacionado con la naturaleza humana de hacer y saber matemáticas, es uno de los más populares en los diarios de los profesores. Por ejemplo, Marshall y Rich dijeron lo siguiente:

> "La historia tiene un papel vital que desempeñar en las aulas de matemáticas de hoy. Permite a los estudiantes y profesores pensar y hablar sobre matemáticas de manera significativa. Desmitifica las matemáticas al mostrar que son creación de los seres humanos" (Marshall & Rich, 2000)".

Teniendo en cuenta la influencia de los libros de texto de matemáticas en la configuración de la enseñanza y el aprendizaje, una forma posible de influir en el pensamiento y la práctica pedagógica de los docentes relacionados con el uso de la historia es incluir información relacionada con la historia en los libros de texto. Muchos artículos de investigación analizan la cantidad y calidad de la historia incluida en los libros de texto de matemáticas (Park & Jang, 2015; Chang, 2015; Ju, Moon & Song, 2016; Schorcht, 2018).

Capítulo 2

LOS PROBLEMAS HISTÓRICOS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

A lo largo de la historia, los matemáticos en diferentes países y culturas han formulado un impresionante número de problemas. De hecho, los viejos libros matemáticos son interesantes colecciones de problemas, desde el libro chino "*Nueve capítulos sobre el arte matemático*" hasta las obras "*Métrica*" o "*Geométrica*" de Herón.

Muchos de esos problemas se relacionaban con las situaciones económicas (área de terrenos, reparto de ganancias compañías, intereses sobre los préstamos,…). Adicionalmente, los matemáticos formulaban los problemas que se referían a los números y sus relaciones y los "problemas recreativos" usualmente en un contexto poco realista o fantástico. Estos últimos problemas, que a veces parecían enigmáticos, no tenían ningún valor práctico sino reflejaban algunos patrones matemáticos que se tienen que descubrir para poder resolverlos.

Ya existen varios libros con las selecciones de los problemas históricos cuyo objetivo es proporcionar a los docentes los materiales para enriqueces su enseñanza y revelar a los estudiantes varias facetas interesantes de las matemáticas que los pueden motivar. Basta mencionar dos ejemplos:

> **"*Expediciones matemáticas: La aventura de los problemas matemáticos a través de la Historia" de* Swetz (2016) y**
>
> *"Historical modules for the teaching and learning of mathematics*" de Katz y Michalowiz (2020).

El primer libro (Swetz, 2016) es una valiosa selección que contiene más de quinientos problemas de diferentes tiempos y culturas (desde Babilonia, viejo Egipto, China, India, Grecia, Arabia hasta la Italia de Renacimiento y la Inglaterra victoriana). Mediante tales problemas, Swetz virtuosamente ilustra la historia y desarrollo de las matemáticas en todo el mundo. Los lectores se enteran de los distintos conocimientos matemáticos que poseía cada cultura y del modo en que llegaron a conseguirlos. El libro proporciona a los profesores actuales de matemáticas un modo maravilloso de introducir unas matemáticas interculturales en las aulas de la escuela secundaria, el bachillerato y la universidad.

El segundo libro (Katz & Micholowiz, 2020) contiene 11 módulos que consisten en una serie de actividades diseñadas para demostrar el uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas. Los objetivos de los módulos son permitir a los estudiantes:

(a) desarrollar una comprensión mucho más rica de las matemáticas y sus aplicaciones al ver los mismos fenómenos desde múltiples perspectivas matemáticas;
(b) comprender los antecedentes históricos y las conexiones entre las ideas históricas que conducen al desarrollo de las matemáticas;
(c) ver cómo evolucionaron los conceptos matemáticos durante períodos de tiempo;
(d) reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas;
(e) comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y se complementan entre sí para producir un todo coherente.

Además, los objetivos de las modalidades son:

(f) brindar a los estudiantes oportunidades para aplicar su conocimiento de las matemáticas a diversas situaciones y problemas concretos en un contexto histórico;

(g) desarrollar en los estudiantes una apreciación de la historia relacionada con el desarrollo de diferentes conceptos matemáticos;

(h) llevar a los estudiantes a reconocer y aplicar las matemáticas en contextos fuera de las matemáticas.

También existen los diseños de las secuencias de aprendizaje en que se promueve la resolución de problemas mediante los problemas históricos. Un ejemplo es la secuencia de tres pasos, propuesta por Meavilla y Flores (2007):

- En el *primer paso*, se presenta la formulación original de un problema verbal tomado de un viejo libro de matemáticas. Después de transformación de la formulación del problema en el lenguaje actual, los estudiantes deben resolver el problema, usando la estrategia que les parece adecuada.

- En el *segundo paso*, se presenta la solución original usada por el autor del problema. Los estudiantes analizan la estrategia de tal solución usando herramientas adecuadas.

- En el *tercer paso*, los estudiantes comparan y evalúan las dos estrategias (la propia y la original) y sacan su conclusión.

Los tres pasos se realizan primero en grupos de cuatro estudiantes. Después los grupos comparten sus soluciones y conclusiones con toda la clase.

Ben-Chaim, Shalitin y Stupel (2019) argumentan que resolver problemas matemáticos de historia en forma de acertijos fomenta el pensamiento original, la creatividad y el razonamiento intuitivo que a menudo abarca diferentes campos de estudio y la búsqueda de métodos de solución no convencionales. Además, y no menos importante, los acertijos y acertijos matemáticos revelan la riqueza, la belleza y la sabiduría que encarnan las matemáticas.

Además, Ben-Chaim, Shalitin y Stupel (2019) agregan que los rompecabezas y los juegos matemáticos son herramientas fantásticas para capacitar a los estudiantes para que sean pensadores matemáticos creativos. Deben alentar a los estudiantes a hacer lo siguiente:

- dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos;
- razonar de forma abstracta y cuantitativa;
- usar herramientas apropiadas estratégicamente;
- buscar y hacer uso de la estructura;
- buscar la regularidad en el razonamiento repetido.

Dos estudios experimentales previos con los problemas históricos.

Kapofu y Kapofu (2020), en un estudio de caso con las alumnas del grado once, han encontrado que la inclusión de los aspectos históricos del Teorema de Pitágoras catalizó percepciones positivas de las alumnas sobre el Teorema y las matemáticas en general. Los cambios notables en sus percepciones incluyeron afirmaciones de un mayor nivel de motivación y una mejora confesada en la preparación para abordar tareas desafiantes que involucran el Teorema de Pitágoras. Las alumnas, también, aludieron a una mayor confianza en el manejo de pruebas, disfrutaron haciendo sus propios descubrimientos y resolvieron problemas matemáticos en general.

Demattè y Furinghetti (2022) realizaron, con los estudiantes italianos del noveno grado, el más reciente experimento en el uso de la historia para trabajar en la resolución de problemas y la relación entre la aritmética y el álgebra. Utilizaron 14 problemas de tratados italianos de aritmética y álgebra aparecidos en la Edad Media y el Renacimiento. Los estudiantes tenían que resolver los problemas y expresar sus impresiones y comentarios.

Los autores centraron su análisis de los resultados en (1) las estrategias implementadas en la resolución de los problemas, con especial referencia al uso de la aritmética y el álgebra, y en (2) la percepción del aspecto cultural que estos problemas introducen en el acercamiento de los estudiantes a las matemáticas.

Los hallazgos muestran las dificultades de algunos estudiantes en temas, como fracciones y proporcionalidad directa, que deberían haber sido adquiridos en años escolares anteriores. Combinar el uso de la historia con aspectos de investigación en educación matemática permitió a Demattè y Furinghetti esbozar algunas implicaciones didácticas relacionadas con el uso de la historia.

Debido a su relación con el problema que se trata en esta tesis, es informativo citar formulaciones y soluciones estudiantiles de dos problemas que usaron Demattè y Furinghetti (2022):

Problema 1

Un señor tiene un sirviente y lo manda a un jardín a recogerle 7 manzanas, pero le advierte: “Encontrarás tres conserjes, y cada uno te pedirá la mitad de todas las manzanas que tienes y dos más de las que te quedan, después de la división [es decir, después de haber tomado la mitad]”. Pregunto, ¿cuántas manzanas recogió al principio de tal manera que al final le quedaron siete?

Soluciones estudiantiles: 6 correctas, 1 incorrecta 1, 9 correctas con explicación incorrecta o incompleta.

Problema 2

Alguien pasa por 3 puertas y en cada puerta deja 1/3 del denario que lleva, y otros 6 denarios. Al final se encuentra con 24 denarios. Se debe saber con cuántos denarios comenzó.

Soluciones estudiantiles: 2 correctas, 13 incorrectas.

Capítulo 3

LOS PROBLEMAS EN *LIBER ABACI* DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa (Figura 3.1), nació en Pisa (Italia) en el año 1170. La misma ciudad murió en el año 1240.

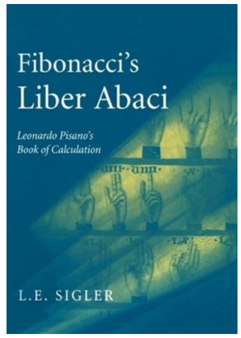
Figura 3.1 Leonardo de Pisa (1170 – 1240).

Leonardo de Pisa, también, se conoce como Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo Pisano (Leonardo el viajero de Pisa) o, simplemente, como Fibonacci. Él fue un matemático italiano, considerado por algunos como "el matemático occidental de mayor talento de la Edad Media". Difundió en Europa la utilidad práctica de los sistema de numeración indo-arábigo como superior a la antes usada numeración romana.

Su influencia en el pensamiento matemático y la enseñanza de las matemáticas, a lo largo de los siglos posteriores, fue enorme, pues muchos autores usaban sus problemas y soluciones o los reformulaban, de manera simplificada o complicada. Sin embargo, hoy Fibonacci se relaciona frecuentemente solamente con la sucesión numérica que lleva su nombre.

Su obra principal es "Liber Abaci", escrita en 1202. Su traducción al inglés (Figura 3.2) se publicó 800 años después (Sigler, 2002).

Figura 3.2 La portada de la traducción inglesa de Liber Abaci de Fibonacci.



Una selección de problemas y su solución de "Liber Abaci" en español con el objetivo de usarlos en la enseñanza fue publicada en año 2013 por Ugarte (2013). Como ejemplos, se presentan tres problemas de tal libro (Figuras 3.3, 3.4 y 3.5).

Figura 3.3 El problema "30 pájaros por 30 denarios".

2. <u>30 PÁJAROS POR 30 DENARIOS</u>

Un hombre compra 30 pájaros entre perdices, pichones y gorriones. Se gasta 30 denarios. Si una perdiz cuesta 3 denarios, un pichón 2 y dos gorriones cuestan un denario, ¿cuántos pájaros compró el hombre de cada tipo?

Figura 3.4 El problema "Dos serpientes".

10. <u>DOS SERPIENTES</u>

Una serpiente, que se encuentra en la base de una torre de 100 palmos de altura, asciende diariamente $\frac{1}{3}$ *de palmo y desciende* $\frac{1}{4}$*. En lo alto de la torre hay otra serpiente que desciende diariamente* $\frac{1}{5}$ *de palmo y asciende* $\frac{1}{6}$*. ¿Cuántos días tardarán en encontrarse ambas serpientes? ¿A qué altura se encuentran en dicho momento?*

Figura 3.5 El problema "Dos hombres que transportan lana".

34. <u>DOS HOMBRES QUE TRANSPORTAN LANA</u>

Un hombre carga 13 balas de lana en un barco y otro 17 del mismo precio. Al llegar a destino el dueño del barco les pide que abonen las tasas por la carga transportada. Como no tienen dinero para pagar, el primer hombre el dice al dueño: "Toma una de mis balas de lana y dame lo que sobre". El dueño del barco cogió la bala de lana y le devolvió 10 sueldos. El segundo hombre, que tampoco tenía dinero, le da al dueño del barco otra bala de lana y el dueño le devuelve 3 sueldos. ¿Cuál es el valor de una bala de lana y cuánto cuesta su transporte?

Estudios experimentales previos con los problemas de Fibonacci

Debido a un gran número de problemas interesantes formulados y resueltos en el "Liber Abaci", no es una sorpresa que algunos de esos problemas se usaban en los estudios experimentales con los estudiantes. En seguida vienen unos ejemplos.

Taskin y colaboradores (2013) utilizaron el problema "*Dos torres y dos pájaros*" de Fibonacci para explorar las habilidades de los estudiantes para aplicar los cuatro pasos de Polya en la resolución de problemas. El problema seleccionado tenía la siguiente formulación:

> "Dos torres, cuyas alturas son de 30 pasos y 40 pasos, tienen una distancia de 50 pasos. Entre las dos torres, hay una fuente donde dos pájaros, volando hacia abajo desde las dos torres a la misma velocidad, llegarán al mismo tiempo. ¿Cuál es la distancia de la fuente de las dos torres?"

La hoja de trabajo estaba compuesta por 11 tareas. Las primeras cinco tareas trataban de comprender el problema. La tarea pedía un plan de solución, la 7 era sobre llevar a cabo el plan, y las tareas 8, 9 y 10 eran sobre mirar hacia atrás. Finalmente, la undécima tarea pedía a los estudiantes que plantearan un nuevo problema. El estudio se implementó con 28 estudiantes de noveno grado.

Gil y Martinho (2016) utilizaron el mismo problema de “Dos torres” de Fibonacci para fomentar las habilidades argumentativas de los estudiantes de octavo grado. Descubrieron que los estudiantes usaban diferentes tipos de argumentos que mostraban diferentes grados de formalidad y tipos de razonamiento. Los estudiantes expresaron y justificaron sus ideas e interpretaron y comprendieron las opiniones que se les presentaron. La conclusión de Gil y Martinho fue que la historia de las matemáticas demostró ser una herramienta habilitadora para el aprendizaje de las matemáticas, particularmente para la construcción de una comunidad de discurso matemático, en la que se reflejó el desacuerdo matemático.

Juárez, Hernández y Slisko (2014) exploraron el desempeño de estudiantes de secundaria en la resolución del problema de los “Dos viajeros” de Fibonacci:

> “Hay dos hombres que se proponen hacer un viaje largo, y uno hará 20 millas diarias. El otro realmente recorre 1 milla el primer día, 2 millas el segundo, 3 millas el tercero, y así sucesivamente, siempre una milla más al día hasta el final cuando se encuentran. ¿Cuántos días necesita un segundo hombre para llegar al primero?”

Los 44 estudiantes que participaron con éxito en el estudio (completando tareas en la hoja de trabajo) estaban entrenando en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP para una Olimpiada Matemática.

Algunos estudiantes pudieron aplicar la fórmula de Gauss y resolvieron el problema mediante un enfoque algebraico. Otros estudiantes pudieron captar una característica simple y simétrica de la situación del problema que permite una solución aritmética fácil sin usar álgebra. Por lo tanto, ¡estos estudiantes, en cierto sentido, superaron a Fibonacci quien presentó solamente una opaca solución algorítmica!

Sin embargo, algunos estudiantes mostraron poca comprensión del problema y cometieron errores de cálculo que no se esperaban de los estudiantes que quieren participar en una Olimpiada Matemática.

Un estudio muy complejo que utiliza los problemas de Fibonacci con estudiantes preuniversitarios fue diseñado y realizado por Marc Moyon en Francia (2019). Los estudiantes primero resolvieron el siguiente problema:

> "Cierto hombre entró en "jardín de placer" a través de 7 puertas, y tomó de allí una cantidad de manzanas. Cuando deseaba irse tenía que dar al primer portero la mitad de todas las manzanas y una más. Al segundo portero le dio la mitad de las manzanas restantes y una más. Les dio a los otros 5 porteros de manera similar y quedó una manzana para él. Se busca cuántas manzanas fueron las que recolectó."

Después de eso, se les dio la solución algorítmica de Fibonacci para su discusión. Luego, se pidió a los estudiantes que resolvieran un problema estructuralmente similar en el que al hombre le quedaba una manzana después de pasar 457 puertas.

Finalmente, los estudiantes compararon el problema "Manzanas en el jardín de placer" con el problema de "Un hombre de negocios" de Fibonacci:

> "Cierto hombre se fue de negocios a Lucca para obtener una ganancia que duplicó su dinero, y gastó allí 12 denarios. Luego partió y pasó por Florencia; allí dobló su dinero y gastó 12 denarios. Luego regresó a Pisa, dobló su dinero y se propone que no le quedó nada. Se busca cuánto tenía al principio."

Como hallazgo importante del estudio, Moyon informó lo siguiente:

> "Cuando los alumnos se involucraron con la fuente, la mayoría de ellos tenían preguntas (sobre terminología o sobre procedimientos matemáticos) similares a las que haría un

historiador profesional de las matemáticas, especialmente cuando comparaban diferentes soluciones históricas con las propias. Es, para mí, una gran oportunidad para desarrollar el pensamiento crítico de los alumnos.”

Capítulo 4

MARCO METODOLÓGICO

El objetivo de esta investigación piloto fue conocer el desempeño de dos grupos de alumnos de secundaria en México al resolver el problema histórico "*Las manzanas en el Jardín de placer*" formulado por Fibonacci. El mismo problema fue usado por Marc Moyon en su investigación en Francia (Moyon, 2019). Demattè y Furinghetti (2022) usaron un problema similar y simplificado (tres en lugar de siete puertas) con alumnos italianos.

> **"Las manzanas en el Jardín del placer**
>
> Un hombre entra al Jardín del placer a través de 7 puertas y toma allí un cierto número de manzanas. Para salir debe pagar a los guardianes de cada puerta. Al primer guardián le da la mitad de las manzanas que lleva más una. Al segundo guardián le da la mitad de las manzanas que le quedan más una. Hace lo mismo con los guardianes de cada una de las cinco puertas que le faltan. Cuando sale de la séptima puerta, le queda una manzana. ¿Cuántas manzanas había tomado en un principio?"

Como en algunos de sus otros problemas, Fibonacci presentó dos soluciones. La primera solución, que usa el razonamiento aritmético, es la siguiente:

> "La manzana que le quedó a él se la agregas a la manzana que le dio al último portero. Habrá 2 que duplicas, serán 4, y tenía tantos cuando llegó al último portero. A esto se suma la manzana que le dio al sexto portero. Habrá 5 que duplicas y serán 10. Éstos quedaron después de que dejó 5 puertas. A esto se suma la manzana del quinto portero. Habrá 11 que doblarás y serán 22 a los que le sumas la manzana que le dio al cuarto portero. Habrá 23 que dobles y serán 46. A esos les sumas la manzana que le dio al tercer portero. Habrá 47 que al duplicar, habrá 94. A esas les sumas la manzana que le dio al segundo portero. Habrá 95 que

duplicas y serán 190. A esas sumas la dio que dio en la primera puerta, y doblas esta cantidad. Habrá 382 y este total es el número de manzanas. Así invirtiendo el orden propuesto podrás resolver cualquier problema similar (Sigler, 2002, p. 397)"

En la segunda solución Fibonacci usaba el razonamiento algebraico verbal en que el desconocido número inicial de las manzanas llamaba "cosa". Su versión moderna, en que se usa el símbolo x para la "cosa", fue formulada por Ugarte (2013) y se presenta en la Figura 4.1.

Figura 4.1 La solución algebraica del problema "Las manzanas en el Jardín de placer" (Ugarte, 2013).

	Número de manzanas antes de cruzar la puerta	Número de manzanas que da al portero
Puerta 1	x	$\frac{x}{2}+1$
Puerta 2	$x-\left(\frac{x}{2}-1\right)=\frac{x-2}{2}$	$\frac{x-2}{4}+1$
Puerta 3	$\frac{x-2}{2}-\left(\frac{x-2}{4}+1\right)=\frac{x-6}{4}$	$\frac{x-6}{8}+1$
Puerta 4	$\frac{x-6}{4}-\left(\frac{x-6}{8}+1\right)=\frac{x-14}{8}$	$\frac{x-14}{16}+1$
Puerta 5	$\frac{x-14}{8}-\left(\frac{x-14}{16}+1\right)=\frac{x-30}{16}$	$\frac{x-30}{32}+1$
Puerta 6	$\frac{x-30}{16}-\left(\frac{x-30}{32}+1\right)=\frac{x-62}{32}$	$\frac{x-62}{64}+1$
Puerta 7	$\frac{x-62}{32}-\left(\frac{x-62}{64}+1\right)=\frac{x-126}{64}$	$\frac{x-126}{128}+1$

Así después de cruzar la última puerta el hombre tendrá:

$\frac{x-126}{64}-\left(\frac{x-126}{128}+1\right)=\frac{x-254}{128}$ manzanas

Como solo le queda una manzana:

$\frac{x-254}{128}=1$, de donde x = 382 manzanas.

En la investigación participaban, de manera voluntaria, dos diferentes grupos de alumnos de secundaria, cuyas edades oscilaban entre 12 y 15 años.

El primer grupo formaban 44 alumnos con el interés expresado en las matemáticas y que se estaban preparando en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad de Puebla para la olimpiada de matemáticas. Esos alumnos se llamarán “alumnos olímpicos”. Su acrónimo en la presentación de los resultados será AO.

El segundo grupo formaban 176 alumnos sin el interés expresado en las matemáticas. Esos alumnos se llamarán “alumnos regulares”. Su acrónimo ser “AR”.

Las preguntas de esta investigación eran:

> ¿Qué estrategias de solución usan los alumnos de secundaria al resolver correctamente el problema “Las manzanas en el Jardín de placer”?
>
> ¿Qué tanto cumplen los alumnos de secundaria con los rubros del instrumento de investigación?
>
> ¿Cuáles son las soluciones incorrectas más frecuentes?

El instrumento de investigación se presenta en la Figura 4.2.

Figura 4.2 El instrumento usado en la investigación.

Las manzanas en el Jardín del placer Un hombre entra al Jardín del placer a través de 7 puertas y toma allí un cierto número de manzanas. Para salir debe pagar a los guardianes de cada puerta. Al primer guardián le da la mitad de las manzanas que lleva más una. Al segundo guardián le da la mitad de las manzanas que le quedan más una. Hace lo mismo con los guardianes de cada una de las cinco puertas que le faltan. Cuando sale de la séptima puerta, le queda una manzana. ¿Cuántas manzanas había tomado en un principio? **a)** Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

b) Realiza el plan matemáticamente.

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado ________ manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Los objetivos de los rubros a) y d) son explorar las características reales del desempeño de los alumnos de secundaria en los dos pasos importantes de los conocidos cuatro pasos de Polya en la resolución de problemas de matemáticas (Polya, 1965).

Capítulo 5

RESULTADOS Y SU INTERPRETACIÓN

Consideraciones generales

El primer paso en la investigación fue determinar cuáles serían las hojas aceptables de trabajo que llenaron los alumnos. Se decidió aceptar solamente las hojas que contenían la respuesta explícita en rubro c) del instrumento de la investigación. Se eliminaron las hojas para que existía la sospecha de que la respuesta dada en el rubro c) fue copiada, porque era lo único que contenían.

De tal manera el número *respuestas aceptables* para el análisis en el grupo de alumnos olímpicos, descontando las vacías (13) y las que no presentan el resultado o no contestan el rubro c) (5), resultó ser **26** (59.09 % de las hojas revisadas).

En el grupo de los alumnos regulares se determinó que el número de las respuestas aceptables fuera de **133**. Se descontaron las hojas vacías (7), las hojas que no presentan el resultado o no contestan el rubro c) (20) y las hojas con las respuestas copiadas (16). Ese número representa 75.57 % de las hojas entregadas.

Los alumnos presentaron un número ***sorprendentemente grande*** de respuestas que difieren de la respuesta correcta para el número inicial de las manzanas: ***382***. En el grupo de los alumnos olímpicos, el número de las respuestas que difieren de la respuesta correcta fue ***13***. En el grupo de los alumnos regulares, el número de las respuestas que difieren de la respuesta correcta fue ***73***.

En lo que sigue, aparte de la respuesta correcta, se reportan (y después analizan) solamente las respuestas diferentes y erróneas si fueron presentadas por lo menos por dos alumnos.

Para los alumnos olímpicos, el número de tales respuestas es **3** y sus valores y porcentajes se presentan en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 El número de las respuestas correctas e incorrectas presentadas por dos o más alumnos olímpicos.

El valor de la respuesta	El número de los alumnos que la presentaron	El porcentaje con respecto al número de las respuestas aceptables
382 (respuesta correcta)	11	43.31 %
255	2	7.69 %
10.5	2	7.69 %

Las respuestas erróneas presentadas solamente por un alumno olímpico eran: 318, 262, 256, 190, 136, 128, 127, 89, 46, 22 y 12. Estas dos últimas respuestas erróneas resultaron más frecuentes en el grupo de los alumnos regulares.

Para los alumnos regulares, el número de que difieren la respuesta correcta y son presentadas por dos o más alumnos es 16 y sus valores y porcentajes se presentan en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 El número de las respuestas correctas e incorrectas presentadas por dos o más alumnos regulares.

El valor de la respuesta	El número de los alumnos que la presentaron	El porcentaje con respecto al número de las respuesta aceptables
382 (respuesta correcta)	4	3.00 %
362	2	1.50 %
342	2	1.50 %
319	2	1.50 %
255	8	6.02 %

127	2	1.50 %
100	11	8.27 %
22	7	5.26 %
21	6	4.51 %
18	2	1.50 %
15	5	3.76 %
14	3	2.26 %
12	3	2.26 %
11	4	3.00 %
10	3	2.26 %
7	4	3.00 %
6	4	3.00 %

Las respuestas erróneas presentadas solamente por un alumno regular eran: 2289, 1050, 708, 511, 509, 502, 500, 450, 378, 343, 335, 318, 285, 283, 282, 280, 266, 253, 251, 250, 249, 235, 208, 200, 192, 175, 170, 160, 150, 147, 146, 140, 137, 129, 107, 92, 81, 75, 71, 61, 57, 56, 52, 43, 40, 36, 34, 24, 13, 11.5, 9, 8, 5, 3.5, 3, 2.5, 2 y 1.

La causa de la presencia de tan grande número de respuestas erróneas presentadas solamente por un alumno podría ser su creencia de que es mejor presentar cualquier respuesta (aunque sea arbitraria y sin sustento alguno) que entregar la hoja sin respuesta alguna.

Las estrategias de solución usadas por los estudiantes que lograron obtener la respuesta correcta

En la Tabla 5.3 se presentan los números de alumnos que eran capaces de presentar la respuesta correcta de 382.

Tabla 5.3 El número de alumnos con la respuesta correcta en ambos grupos.

Grupos de alumnos	*Número de alumnos con la respuesta correcta*	*Porcentaje*
Alumnos olímpicos	11 de 26	42.31 %
Alumnos regulares	4 de 133	3.00 %

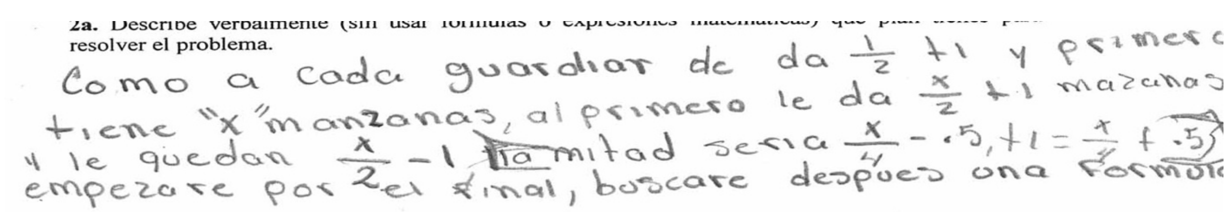
Es importante destacar que ninguno de los alumnos logró obtener la respuesta correcta usando la modelación algebraica. Se encontró solamente un intento inconcluso de tal estrategia de solución.

En seguida se presentan los comentarios de las transcripciones y los escaneos de los rubros del instrumento de investigación de tal alumno olímpico.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO18</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Como a cada guardián le da ½ +1 y primero tiene "x" manzanas, al primero le da x/2 +1. Manzanas y le quedan x/2-1, [la mitad sería x/2-0.5, +1=x/4+0.5], empezaré por el final, ***buscaré después una formula.***


2a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Como a cada guardiar de da $\frac{1}{2}$ +1 y primer
tiene "x" manzanas, al primero le da $\frac{x}{2}$ +1 manzanas
y le quedan $\frac{x}{2}$ -1 la mitad seria $\frac{x}{4}$ - .5, +1 = $\frac{x}{4}$ + .5
empezare por el final, buscare despues una formu

Comentario El alumno abordó el problema de una forma correcta, considerando que el conteo debe de comenzar con el número inicial de manzana que tenía ("x" manzanas). El primer cambio modela correctamente ("le quedan x/2 – 1). Lo que el hombre da al segundo guardián, también, modela bien (x/4 - .5 + 1 = x/4 + .5). Sorprendentemente no calcula algebraicamente lo que le queda al hombre después de la segunda puerta, sino cambia la estrategia: "empezaré por el final" y deja la búsqueda de la fórmula para después.

b. Realiza el plan matemáticamente

1) $1 = \frac{4}{2} - 1$

2) $4 = \frac{10}{2} - 1$

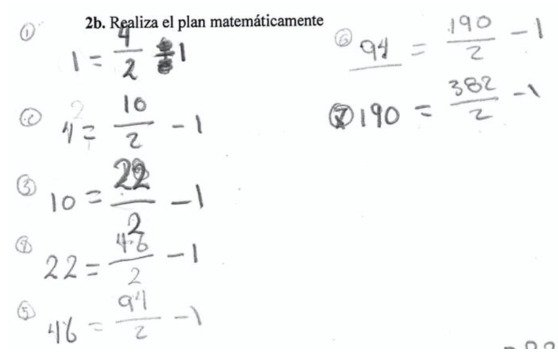
3) $10 = \frac{22}{2} - 1$

4) $22 = \frac{46}{2} - 1$

5) $46 = \frac{94}{2} - 1$

6) $94 = \frac{190}{2} - 1$

7) $190 = \frac{382}{2} - 1$



Comentario El alumno correctamente el número de las manzanas que tenía el hombre después de pasar por cada puerta (1, 4, 10, 22, 46, 94 y 190). Sin embargo, su numeración de las puertas es inversa: la séptima puerta es "la primera" y, consecuentemente la primera puerta es "la séptima".

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

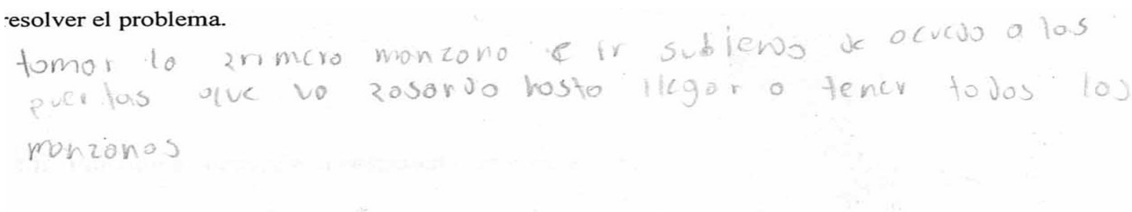
Comentario El estudiante escribió lo mismo que el inciso anterior. Puede ser que no se le ha enseñado lo que es una demostración.

Otra hoja con la respuesta correcta se ejemplifica con lo que hizo el alumno olímpico AO8.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno A08</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Tomar la primera manzana e ir subiendo de acuerdo a las puertas que no pasando hasta llegar a tener todas las manzanas


·esolver el problema.
tomor lo primero monzono e ir subiendo de ocuedo a los puertas que vo zosando hosto llegor o tener todos los monzonos

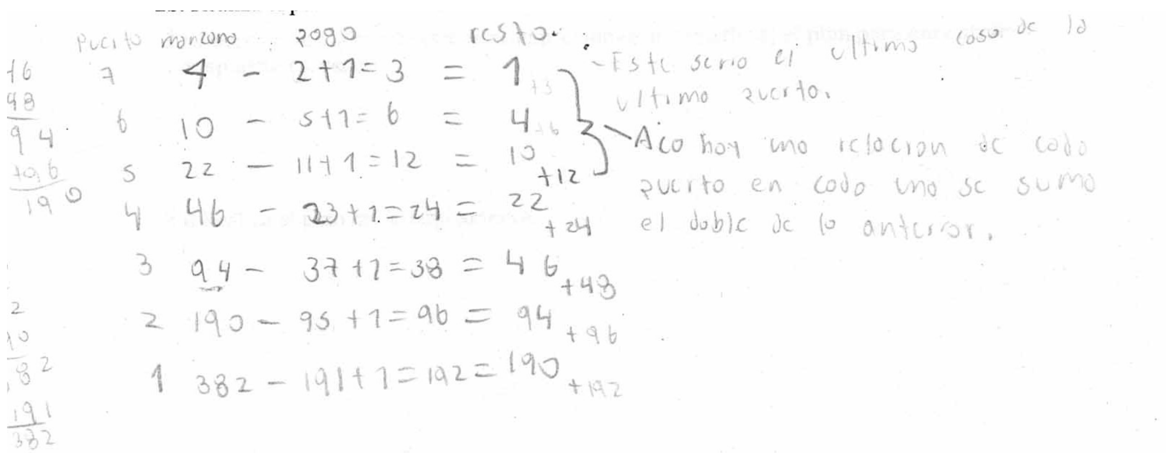
Comentario El estudiante considera que se trata de una serie creciente. Al decir "tomar la primera manzana e ir subiendo de acuerdo a las puertas", el estudiante parte de la idea de que el conteo tiene que empezar desde que el hombre sale, lo que es un posible razonamiento correcto.

b. Realiza el plan matemáticamente

Puertas	manzanas	pago	Resto
7	4	2+1=3	1
6	10	5+1=6	4
5	22	11+1=12	10
4	46	23+1=24	22
3	94	37+1=38	46
2	190	95+1=96	94
1	382	191+1=192	190

Este seria el ultimo caso de la ultima puerta

Acá hay una relación de cada puerta en cada una se suma el doble de lo anterior.

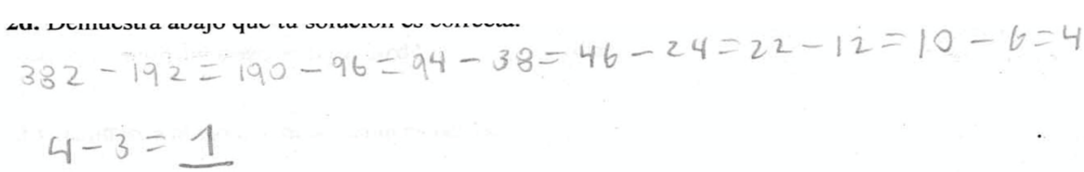


Comentario, Aunque su plan no mencionaba las operaciones por hacer, el estudiante presenta claramente: el número correcto de las manzanas tenidas antes de cada puerta, el número correcto de las manzanas dadas al guardián y el número de manzanas que quedan al hombre después de pasar por la puerta.

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 382 manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

382 – 192 =190 -96 = 94 -38 = 46 – 24 = 22 – 12 = 10 – 6 = 4 – 3 =1



Comentario En la demostración el estudiante no maneja correctamente la simbología aritmética, a pesar de que tiene la idea correcta de las restas que se deben realizar. El número de las manzanas después de la primera puerta (190) se obtiene al restar del número inicial de las manzanas 382 la mitad de las manzanas (191) y una manzana más. En otras palabras, 190 = (382/2) – 1.

Ocho ejemplos adicionales de las hojas con las respuestas correctas de los alumnos olímpicos se presentan en el ***Apendice 1***. Las cuatro hojas con las respuestas correctas de los alumnos regulares se presentan en el ***Apendice 2***.

Diferentes ejemplos de las respuestas erróneas

Ya se mencionó el gran número de respuestas erróneas que aparecen solamente una vez en todas las hojas contabilizadas. En esta parte se comentan cinco respuestas erróneas que se han presentado varias veces, revelando un determinado patrón de razonamiento.

Dos de estas respuestas (252 y 22) son evidencia de que los estudiantes suelen obtener una solución cambiando arbitrariamente el patrón de cambios determinado en la formulación del problema.

Otras tres respuestas erróneas (100, 12 y 10.5) son ejemplos de presentar como respuesta un número arbitrario.

Mientras con las dos primeras respuestas erróneas (252 y 22) se puede "demostrar" que el hombre sale del jardín con una manzana, con las respuestas erróneas arbitrarias (100, 12 y 10.5) eso no es posible.

La respuesta errónea 255

Tal respuesta lo presentaron 5 alumnos olímpicos (19.23 %) y 8 alumnos regulares (6 %). Los procedimientos para llegar la respuesta ilustran las hojas de los alumnos AO20 y AR122.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO20</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Primero a la manzana se le suma 2 porque sería su mitad más una y luego se realiza lo mismo con las otras puertas.

resolver el problema.

Primero a la manzana se le suma 2 porque
seria su mitad mas una y luego se realiza
lo mismo con las otras pueta

Comentario El alumno hace una descripción del algoritmo que aplicara para llegar al resultado correcto. Sin embargo, no menciona el cómo comenzara el conteo de las manzanas, lo que hace pensar que el estudiante en primera instancia no crea una estrategia para enfrentar el problema.

(i) Realiza el plan matemáticamente

$1+2=3 \quad = \quad 7°$**puerta**
$3+4=7 \quad = \quad 6°$**puerta**
$7+8=15 \quad = \quad 5°$**puerta**
$15+16=31 \quad = \quad 4°$**puerta**
$31+32=63 \quad = \quad 3°$**puerta**
$63+64=127 \quad = \quad 2°$**puerta**
$127+128=255 \quad = 1°$**puerta**

1+2= 3 — 7° puerta.
3+4 = 7 = 6° puerta
7+8 = 15 = 5° puerta
15+16 = 31 = 4° puerta
31+32= 63 = 3° puerta
63 +64 =127 = 2° puerta
127 + 128 =255 = 1° puerta
255+256 =

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}27 \\ 128 \\ \hline 255 \end{array}$$

Comentario El razonamiento del alumno corresponde al cambio en que del número inicial de las manzanas se resta 1 y el resultado se divide entre 2. Se ilustra tal razonamiento en con el cambio en la primera puerta: El hombre viene con 255 manzanas. Primero da al guardia una manzana, le quedan 254. Después le da la mitad de las 254 manzanas (que son 127 manzanas). De tal manera al guardia le da 128 manzanas (1 + 127) y le quedan 127 manzanas con las que va a la segunda puerta.

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>255</u> manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Se muestra con el procedimiento del segundo módulo.

Se muestra con el procedimiento del segundo modulo.

Comentario El alumno considera que la demostración es suficiente con lo que escribió en el inciso b). Por tal motivo no se enfrenta a comprobar su resultado.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR122</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

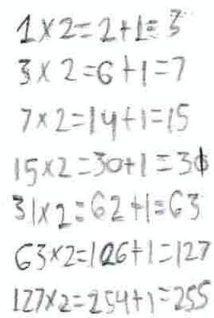
Creo que se debería multiplicar una por dos más uno, luego el número que salga volverlo a multiplicar por dos y sumar una y así sucesivamente repartir este procedimiento por cinco veces más.

Creo que sedeberió multiplicar uno por dos mas uno, luego el número que salga volverlo a multiplicar por dos y sumar uno y así susecivamente repetir este procedimiento por cinco veces más.

Comentario Ese algoritmo corresponde al cambio en el que al guardia se le entrega primero una manzana y después la mitad de las manzanas que quedan. En el proceso inverso, para encontrar el número de las manzanas antes de la puerta, primero se duplica el número de las manzanas que le quedan al hombre después de la puerta alumno y al resultado se agrega una manzana.

b) Realiza el plan matemáticamente.

$$1\times 2=2+1=3$$
$$3\times 2=6+1=7$$
$$7\times 2=14+1=15$$
$$15\times 2=30+1=31$$
$$31\times 2=62+1=63$$
$$63\times 2=126+1=127$$
$$127\times 2=254+1=255$$

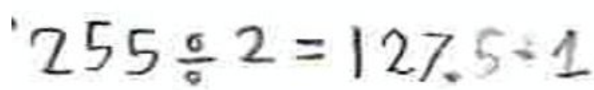


Comentario El alumno aplica correctamente su algoritmo. Sin embargo, su uso de la simbología aritmética es erróneo (1 x 2 = 2 + 1 = 3)

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 255 manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

255 /2 = 127.5 - 1



Comentario En la demostración, el alumno aplica el cambio que aparece en la formulación del problema (al guardia se le da primero la mitad de las manzanas y después una manzana más). Al obtener que el número de las manzanas no es un número entero, el alumno no continuo con la demostración.

La respuesta errónea 22

Se encontró en un alumno olímpico (3.85 %) y siete alumnos regulares (5.26 %). Se presentan las hojas de respuestas de los alumnos AO34 y AR97.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO34</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Suponer cuantas manzanas le tocan a cada quien y repartirlas y al final le aplicamos una

Suponer cuantas manzanas le tocan a cada quien y repartilas y al final le aumentamos una. . .

Comentario El alumno considera que a cada guardia le corresponde una proporción del total de manzanas, más una.

b. Realiza el plan matemáticamente

1	2	3	4	5	6	7
1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3

$7 \times 3 = 21 + 1 = 22$ $\quad R = 22$ *manzanas* $\quad$ *y le sobran* 1

7 guardias

1 2 3 4 5 6 7 y le sobra 1

1 2 3 123 123 123 123 123 123 R= 22 manzanas

7 x 3 = 21 +1 = 22

Comentario El alumno está confundido en el planteamiento del problema, es decir, no puede distinguir entre un problema de series y de combinatoria. Sin embargo, se puede ver que considera que a cada guardia le corresponde 3 manzanas. Por consiguiente, tiene el siguiente razonamiento:

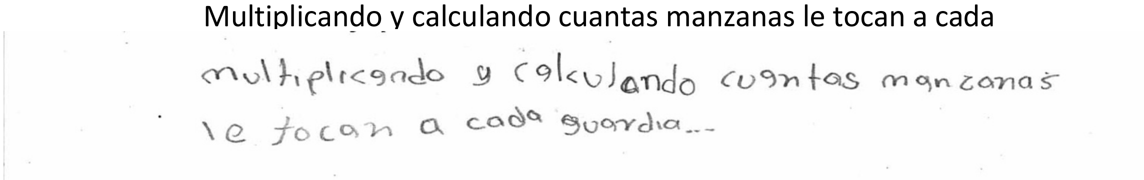
7	×	3	=	21	⇒	21	+	1	=	22
↑		↑		↑		↑		↑		↑
Nº puertas		*Nº manzanas por guardia*		*catidad manzanas totales*		*catidad manzanas totales*		*Manzana que sale el hombre*		*Total de manzna*

Comentario Es probable que el alumno considerara que a cada guardia le corresponde 3 manzanas ya que 3 = 2+1, el doble ósea 2, más una.

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>22</u> manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Multiplicando y calculando cuantas manzanas le tocan a cada


multiplicando y calculando cuantas manzanas le tocan a cada guardia...

Comentario El alumno hace una descripción de la comprobación, pero no realiza las operaciones correspondientes.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR97</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

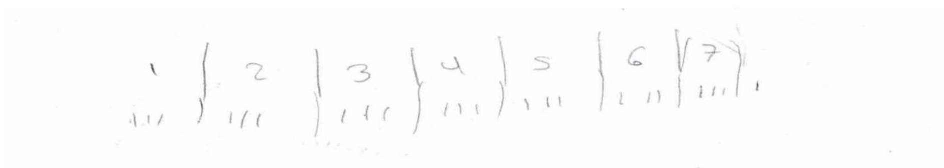
Poner un cierto número de manzanas y repartirlas


Poner un cierto numero de manzanas y repartirlau

Comentario Se observa que el estudiante considera un número al azar para el conteo de las manzanas, aunque el inciso b). Parece que decide que a cada guardia le corresponde 3 manzanas.

b) Realiza el plan matemáticamente.

1	2	3	4	5	6	7
||	||	||	||	||	||	||



Comentario El alumno considera que a cada guardia le corresponde 3 manzanas, por lo que se observa en el esquema, el alumno decide incrementar una manzana más que pude ser la manzana con la que salió el hombre, de esta forma se tiene el siguiente razonamiento.

7	$\times$	3	$=$	21	$\Rightarrow$	21	$+$	1	$=$	22
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
N° puertas		*N° manzanas por guardia*		*catidad manzanas totales*		*catidad manzanas totales*		*Manzana que sale el hombre*		*Total de manzna*

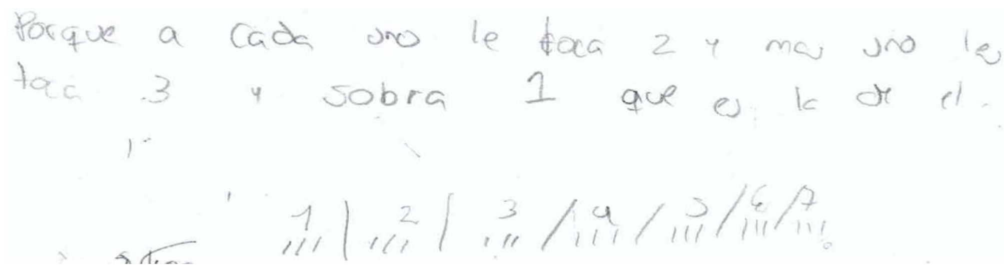
Comentario Es probable que el alumno considerara que a cada guardia le corresponde 3 manzanas ya que 3=2+1, el doble ósea 2, más una. Como lo alcanza a describir en el inciso d).

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>22</u> manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Porque a cada uno le toca 2 y más uno les toca 3 y sobra 1 que es la de él.

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th></th></tr>
<tr><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|||</td><td>|</td></tr>
</table>



Comentario El estudiante hace una descripción del conteo que realizó para obtener el resultado.

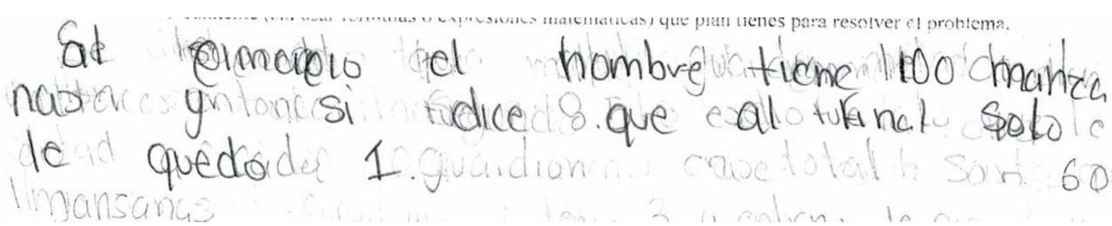
La respuesta errónea 100

Once alumnos regulares (8.27 %) presentaron esta respuesta arbitraria. El “razonamiento” en que se basa se ilustra con la hoja de alumno regular AR49.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR49</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Al principio el hombre tiene 100 manzanas más y si dice que al final solo le quedo 1

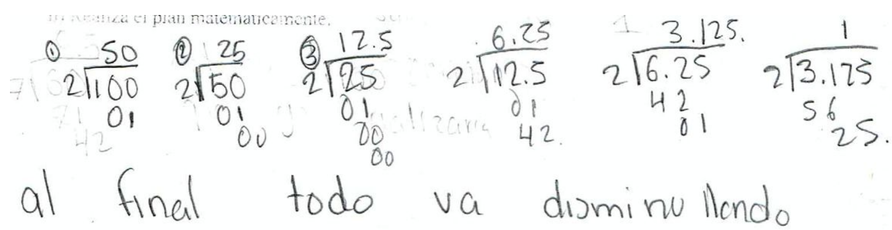


Comentario En lugar de presentar algo que parezca un plan, el alumno presenta la idea de que el hombre tomó 100 manzanas, sin argumento alguno. Agrega la parte de la formulación “al final solo le quedó 1”.

b) Realiza el plan matemáticamente.

50	25	1.25	6.25	3.25	1
2 100	2 50	2 25	2 12.5	2 6.25	2 3.175
01	00	00	01	42	25
			00		

al final todo va dis min *ullendo*

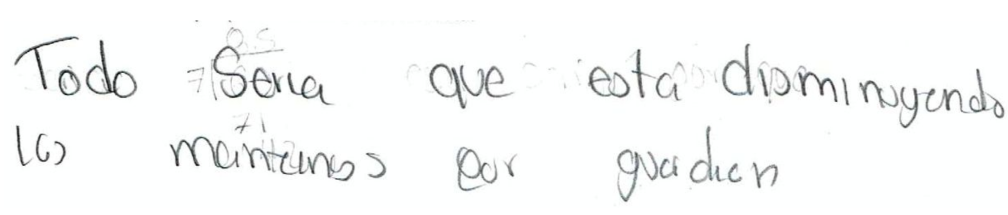


Comentario En su procedimiento, solamente toma en cuenta una parte del cambio anunciada “la mitad de las manzanas”, sin restar una manzana adicional. En la última división, que no fue ejecutada explícitamente, el resultado sería: 3.125/2 = 1.5625. Es posible que el alumno consideraba que fue, aproximadamente, igual a 1.

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>100</u> manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Todo sería que está disminuyendo las manzanas por guardián.



Comentario El alumno hace una descripción de la demostración. Comprende que se trata de una serie decreciente. Sin embargo, no hace las cuentas correspondientes para la comprobación del problema.

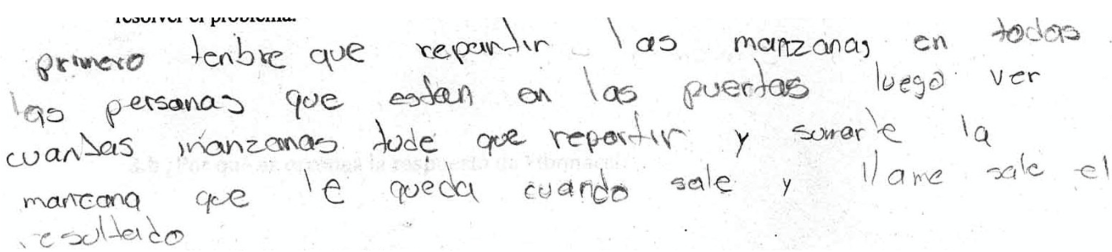
La respuesta errónea 12

Esta respuesta aparece en las hojas de un alumno alumno olímpico (3.85 %) y tres alumnos regulares (2.25 %). Se presentan las hojas de los estudiantes AO13, correspondiente a un alumno de olimpiadas, y AR77 que corresponde a un alumno regular.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO13</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Primero tiene que repartir las manzanas en todas las personas que están en las puertas luego ver las personas que están en las puertas luego ver cuantas manzanas tuve que repartir y sumare la manzana que le queda cuando sale y llame sale el resultado.


resolver el problema.
primero tenbre que repartir las manzanas en todas las personas que estan en las puertas luego ver cuantas manzanas tude que repartir y sumarle la manzana que le queda cuando sale y llame sale el resultado

Comentario El alumno describe el siguiente algoritmo: a cada guardia le corresponde un determinado número de manzanas, y al final agregar la cantidad de manzanas con la que sale el hombre.

b. Realiza el plan matemáticamente

2 personas = 3 manzanas

2 personas= 3 manzanas

2 personas = 3 manzanas

1 persona = 1 ½ manzanas

7 personas =10 ½ manzanas

2 personas = 3 manzanas ∴ 7 personas = $10\frac{1}{2}$ manzanas
2 personas = 3 manzanas
2 personas = 3 manzanas
1 persona = $1\frac{1}{2}$ manzanas

Comentario El alumno parte de la idea arbitraria que a cada 2 guardias le corresponden 3 manzanas. Eso se concluye que a cada guardia le corresponde 11/2 incluyendo al hombre. De esta forma, se implementa el siguiente razonamiento:

7	$\times$	$1\frac{1}{2}$	$=$	$10\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$10\frac{1}{2}$	$+$	$1\frac{1}{2}$	$=$	12
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
N° puertas		*N° manzanas por guardia*		*catidad de manzanas totales*		*catidad de manzanas totales*		*Manzanas con las sale el hombre*		*Total de manznas*

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 12 manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Es correcta que porque se encuentra cuantas manzanas tomo si en siete puertas paso el hombre son 10 ½ repartido le queda ½ manzana más una manzana que en el texto dice que le queda.

2d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

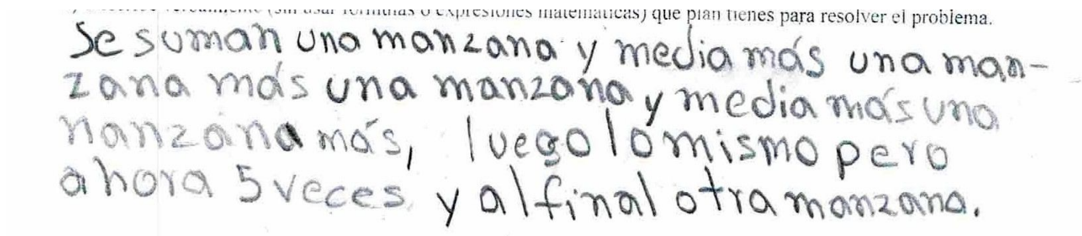
es correcta que porque se encuentra cuantos manzanas tomo si en siete puertos paso el hombre son $10\frac{1}{2}$ repartio le queda $\frac{1}{2}$ manzana más una manzana que el texto dice que le queda

Comentario: El alumno afirma que son 10 ½ manzanas repartidas en las puertas, agregando que le queda ½ y para a completar, decide que el hombre salga 1½. No hace las operaciones correspondientes para comprobar que su resultado es el correcto.

Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR77

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

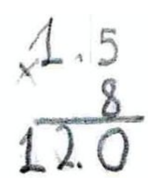
Se suman una manzana y media más una manzana más, luego lo mismo, pero ahora 5 veces y al final otra manzana.


Se suman una manzana y media más una manzana más una manzana y media más una manzana más, luego lo mismo pero ahora 5 veces y al final otra manzana.

Comentario Se observa que el alumno considera que a cada guardia le corresponde 1 1/2 manzana.

b) Realiza el plan matemáticamente.

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ \times 8 \\ \hline 12.0 \end{array}$$



Comentario Parece que el estudiante tiene el siguiente razonamiento:

1.5	×	8	=	12.0
↓		↓		↓
Cantidad de manznas		*Cantidad de guardias y el* hom *bre*		*Total de manzanas*

Comentario El alumno considera que el hombre saliera con 1.5 de manzana es por esto que multiplica con 8. Es probable que el alumno considerará 1.5 ya que:

1.5	=	0.5	+	1
		↓	↓	↓
		La midad de las que lleva	*más*	*una*

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>12</u> manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Comentario El alumno no abordó el problema.

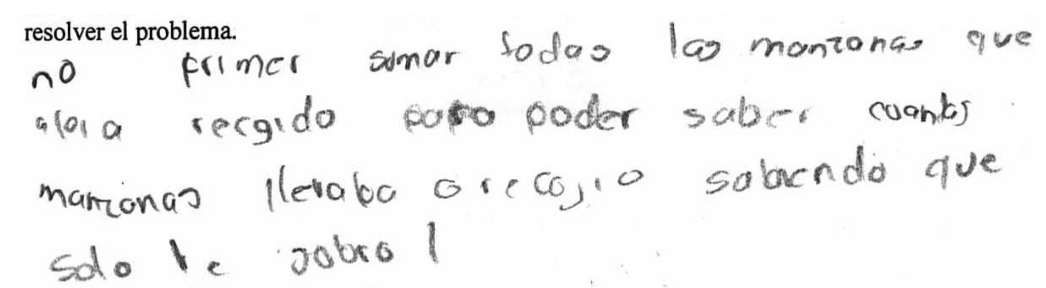
La respuesta errónea 10.5

Esta respuesta presenta dos alumnos olímpicos (7.69 %) y un alumno regular (0.75 %). Se ilustra con las hojas de los alumnos AO35 (alumno olímpico) y AR119 (alumno regular).

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO35</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Uno primer suma todas las manzanas que había requerido para poder saber cuántas manzanas llevaba o recogió sabiendo que solo le sobró 1.

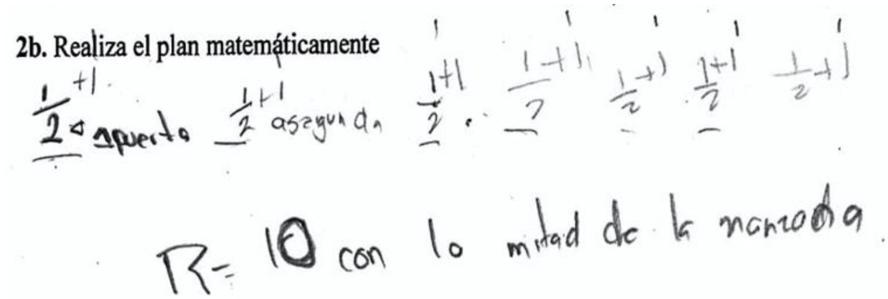

resolver el problema.
no primer somar todas las manzanas que
abia recgido para poder saber cuantas
manzanas llevaba o recojio sabiendo que
solo le sobro 1

Comentario El alumno no comprende el texto, tiene una idea muy vaga, es decir no escribe como debería de ser el conteo.

a. Realiza el plan matemáticamente

$$\frac{1}{2}+1\,puerta \quad \frac{1}{2}+1\,segunda \quad \frac{1}{2}+1 \quad \frac{1}{2}+1 \quad \frac{1}{2}+1 \quad \frac{1}{2}+1 \quad \frac{1}{2}+1$$

$R = 10$ **con la mitad de la manzana**


2b. Realiza el plan matemáticamente

R= 10 con la mitad de la manzana

Comentario El estudiante considera que a cada guardia le corresponde 1.5 manzanas siendo el total 1.5 x 7 = 10.5. Es probable que el alumno interpretó mal el cambio en la formulación del problema "la mitad de las ***manzanas*** más una" como "la mitad de la ***manzana*** más una": 0.5 + 1 = 1.5. Además, el alumno no considera la manzana con la que sale el hombre.

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 10 1/2 manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

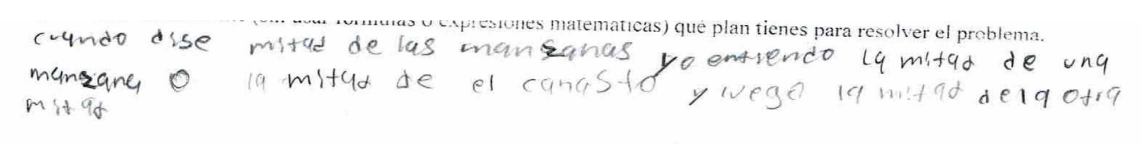
Pues sumando todo que son la mitad de la mitad de los guardias n° 1 me dan exactamente 10 1/2

Comentario El estudiante no entiende que es una demostración.

<u>Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR119</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

cuando dice mitad de las manzanas yo entiendo la mitad de una manzana o la mitad de canasto y luego la mitad de la otra mitad.

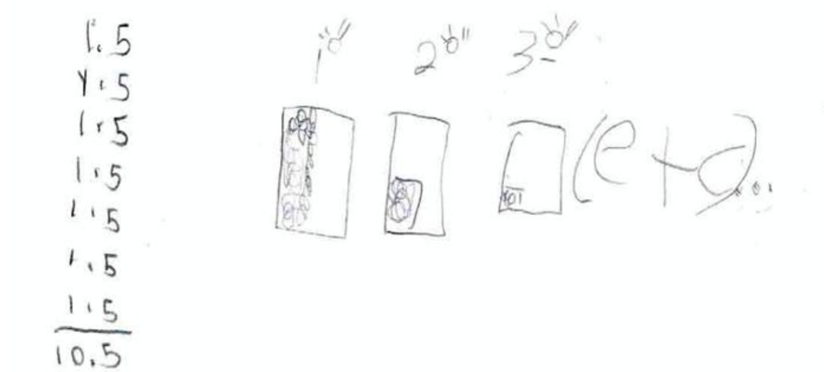

(sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

cuando dise mitad de las manzanas yo entiendo la mitad de una manzana o la mitad de el canasto y luego la mitad de la otra mitad

Comentario Se observa que el alumno no comprendió el texto es especialmente en la parte donde dice: "Al primer guardián le da la mitad de las manzanas que lleva más una.", ya que esta parte dice que es la mitad de la cantidad de las manzanas que lleva el hombre más una. El estudiante es sincero, al escribir lo que comprende del texto, pero no realiza un plan para hacer el conteo.

b) Realiza el plan matemáticamente.

$$
\begin{array}{rr}
 & 1.5 \\
 & 1.5 \\
 & 1.5 \\
+ & 1.5 \\
 & 1.5 \\
 & 1.5 \\
 & 1.5 \\
\hline
 & 10.5
\end{array}
$$



Comentario Supone que a cada guardia le corresponde 1.5 manzanas dando como total 1.5 x 7 = 10.5. Es probable que el alumno interpreto mal el enunciado del problema "la mitad de las ***manzanas*** más una" como "la mitad de la ***manzana*** más una".

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 10.5 manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

La primera opción de que dice la mitad de las manzanas ósea 0.5 y luego una ose 1.5 y la segunda es la mitad del canasto y otra vez la mitad de la mitad y así.

la primera opsion de que dise la mitad de las mansanas osea 0.5 y luego una ose 1.5 y la segunda es la mitad del canasto y otraves la mitad de la mitad y asi

Comentario En lugar de demostrar que su respuesta es correcta, el alumno expresa la duda sobre cómo interpretar el enunciado del problema.

Capítulo 6

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En este capítulo se presentan las respuestas a las tres preguntas de investigación que se desprenden del análisis de las hojas de los alumnos de secundaria.

No sobra destacar un resultado esperado: los alumnos olímpicos tenían un mayor número de respuestas correctas en comparación con los alumnos regulares.

Después de presentar las respuestas a las tres preguntas de investigación, se describen unas implicaciones de los resultados de esta investigación para la enseñanza de las matemáticas.

¿Qué estrategias de solución usan los alumnos de secundaria al resolver correctamente el problema "Las manzanas en el Jardín de placer"?

Todos los alumnos que encontraron el valor correcto del número inicial de las manzanas (382) han usado la estrategia de solución "comenzar en el final e ir hacia el inicio", conocida en la literatura como "trabajar desde atrás" o, en el idioma inglés "working backward" (Barb & Quinn, 1997) o pensamiento reversible.

Solamente un alumno intentó la modelación algebraica. Tenía un comienzo correcto, pero, al complicarse las expresiones algebraicas, cambió la estrategia y usaba la de "trabajar desde atrás".

Este resultado difiere de los resultados obtenidos en las investigaciones realizadas en Francia y Italia en cuales hubo alumnos que eran capaces de llevar a cabo de manera exitosa las soluciones algebraicas.

En la aplicación y el desarrollo de la estrategia "trabajar desde atrás", casi todos los alumnos presentaron el mal uso de la simbología aritmética. Para el caso de encontrar el número de las manzanas antes de la séptima puerta (4 manzanas), a la manzana restante se debe **sumar** una manzana y **multiplicar por dos** el resultado. Esa son operaciones inversas de "**restar una manzana**" y "**dividir por dos**" el número de manzanas, implicadas en la estrategia "trabajar desde atrás". En simbología aritmética, eso se escribe en dos pasos separados (con dos signos de igualdad separados):

"1 + 1 = 2"

"2 x 2 = 4".

Los alumnos no respetan tal regla y escriben erróneamente:

"1 + 1 = 2 x 2 = 4".

El mismo error cometen algunos alumnos en la demostración de que la respuesta dada es correcta:

$$382 \div 2 = 191 - 1 = 190 \div 2 = 95 - 1 = 94 \div 2 = 47 - 1 = 46 \div 2 = 23 - 1 = 22 \div 2 = 11 - 1 = 10 \div 2 = 5 - 1 = 4 \div 2 = 2 - 1 = 1$$

¿Qué tanto cumplen los alumnos de secundaria con los rubros del instrumento de investigación?

Los alumnos no tenían buen desempeño en los rubros

a) (planeación verbal de la solución); y

d) (demostración de que la respuesta dada es correcta).

Cuando intentaron cumplir con esos rubros, los alumnos presentaban los “planes” y las “demostraciones” a los que faltaba sentido preciso. Especialmente preocupante es el hecho de que muchos alumnos no presentaban nada en el rubro de demostración.

Ese resultado es entendible porque los libros de texto de matemática, usado en México para la educación secundaria, no presentan los pasos de Polya.

¿Cuáles son las soluciones incorrectas más frecuentes?

Las soluciones incorrectas más frecuentes sobre el número inicial de las manzanas, que se basan en la modificación del patrón de cambio del número de manzanas en cada puerta”, son “255 manzanas” y “22 manzanas”.

La primera respuesta errónea implica que el hombre

> *“primero da a cada guardia una manzana y después le da la mitad de las manzanas restantes”*,

mientras que el patrón del cambio en la formulación es

> *“primero da cada guardia la mitad de las manzanas y después le da una de las manzanas restantes”*.

Con patrón de cambio modificado, el número de manzanas antes de la séptima puerta se obtiene aplicando las operaciones inversas:

$$\mathbf{1 \times 2 = 2 \quad y \quad 2 + 1 = 3.}$$

En el planteamiento correcto, se tiene:

$$\mathbf{1 + 1 = 2 \quad y \quad 2 \times 2 = 4.}$$

La segunda respuesta errónea "22 manzanas" se basa en el patrón del cambio modificado:

"el hombre le da a cada uno de los siete guardias tres manzanas y sale con una manzana".

En este caso, del patrón del cambio en la formulación solamente se toma la salida con una manzana y lo demás cambios son mordicados de manera arbitraria para simplificar el problema. De tal manera, tal respuesta corresponde a la solución de un problema completamente modificado:

> *Para salir de un jardín, un hombre tuvo que pasar por siete puertas, dando a cada guardia* ***tres manzanas****. Si al final se quedó con una manzana, ¿cuántas manzanas tenía inicialmente?*

Aunque fue presentada solamente por un alumno, la respuesta errónea "128 manzanas" es otro ejemplo del mismo fenómeno y corresponde al problema modificado:

> *Para salir de un jardín, un hombre tuvo que pasar por siete puertas, dando a cada guardia* ***la mitad de las manzanas****. Si al final se quedó con una manzana, ¿cuántas manzanas tenía inicialmente?*

Las demás respuestas erróneas ("100 manzanas", "12 manzanas" y "10.5 manzanas") son completamente arbitrarias y no guardan la relación correcta con ninguna parte del patrón de cambio en la formulación del problema. Por ejemplo, ninguna de ellas implica que el hombre sale con una manzana entera como se menciona explícitamente en la formulación del problema.

Implicaciones para la enseñanza de las matemáticas en la secundaria

Los resultados de esta investigación tienen las siguientes implicaciones para la enseñanza de las matemáticas en la secundaria (¡y en los demás niveles educativos!):

Los alumnos deben conocer la importancia de elaborar un plan verbal de solución de cada problema y tener suficientes oportunidades para practicar ese paso, con y sin andamiaje de los docentes.

Los alumnos deben conocer la importancia de verificar explícitamente si su solución corresponde al problema planteado y tener suficientes oportunidades para practicar ese paso, con y sin andamiaje de los docentes.

Los alumnos deben conocer la importancia del uso adecuado de la simbología y las reglas de las operaciones aritméticas.

REFERENCIAS

Barb, C., & Quinn, A. L. (1997). Problem solving does not have to be a problem. *The Mathematics Teacher*, *90*(7), 536-542.

Ben-Chaim, D., Shalitin, Y. & Stupel, M. (2019). Historical mathematical problems suitable for classroom activities. *The Mathematical Gazette, 103*(556), 12-19.

Chang, H. (2015). Analysis on Using the History of Mathematics in Chinese Mathematics Textbooks. *Journal for History of Mathematics, 28*(1), 15-29. 2015.

Clark, K. M., Kjeldesen, T. H., Schorcht, S. & Tzanakis, C. (editores) (2018). *Mathematics, Education and History. Towards a harmonious partnership. ICME-13 monographs*. Springer.

Demattè, A. & Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abbacus problems. ZDM – Mathematics Education (https://doi.org/10.1007/s11858-022-01397-9)

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics,11*(2), 3-6.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (editores) (2002). *History in Mathematics Education. The ICMI Study.* Kluwer Academic Publishers

Gil, P. & Martinho, M. H. (2016). The role of history of mathematics in fostering argumentation: Two towers, two birds and a fountain. En *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Educatio,* (pp. 1817-1824) Charles University in Prague.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Ju, M. K., Moon, J. E. & Song, R. J. (2016). History of mathematics in Korean mathematics textbooks: Implication for using ethnomathematics in culturally diverse school. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1321-1338.

Kapofu, L. K., & Kapofu, W. (2020). " This Maths Is Better than That Maths" - Exploring Learner Perceptions on the Integration of History of Mathematics in Teaching the Theorem of Pythagoras: A Case Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), em0604 (15 páginas).

Katz, V. J. & Michalowiz, K. D. (2020). *Historical modules for the teaching and learning of mathematics*. The American Mathematicas Society.

Katz, V. (editor) (2000). *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective.* The Mathematical Association of America.

Katz, V. J. (1986). Using history in teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics, 3*, 13-19.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher, 96*(6), 416-421.

Meavilla, V. & Flores, A. (2007). History of mathematics and problem solving: a teaching suggestion. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(2), 253-259.

Moyon, M. (2019). Teaching Mathematics and Algorithmics with Recreational Problems: The Liber Abaci of Fibonacci. En Barbin, É. et al. (editores). *Proceedings of the Eighth*

European Summer University on History and Epistemology in mathematics Education (ESU-8) (Skriftserie 2019, nr. 11). Oslo Metropolitan University.

Juárez Ramírez, M. A., Hernández Rebollar, L. A. & Slisko, J. (2014). Fibonacci's motion problem "Two travellers": The solutions given by junior high-school students who were trained for Mathematical Olympiad. *Latin American Journal of Physics Education*, *8*(3), 390-396.

Park, J. & Jang, D. (2015). Study on Criticism and Alternative on the History of Mathematics Described in the Secondary School Mathematics Textbooks. *Communications of Mathematical Education, 29*(2), 157-196.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Radford, L., Furinghetti, F. & Hausberger, T. (editores). (2016). *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*. IREM de Montpellier.

Schorcht, S. (2018). History of Mathematics in German Mathematics Textbooks. en Clark, K. M. et al. (editores). *Mathematics, Education and History*. (pp. 143-162). Springer.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. Springer.

Siu, M. K. (2006). No, I don’t use history of mathematics in my class: Why? en Furinghetti, F., Kaijser, F. & Tzanakis, C. (editors.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4* (Edición revisada, pp. 368–382). University of Uppsala.

Sullivan, M. M. & Panasuk, R. M. (1997). Fibonacci numbers and an area puzzle: Connecting geometry and algebra in the mathematics classroom. *School Science and Mathematics*, 97(3), 132-138.

Swetz, F. J. (1984). Seeking relevance? Try the history of mathematics. *The Mathematics Teacher*, *77*(1) 54-57.

Swetz, F. J. (1989). Using Problems from the History of Mathematics in Classroom. *The Mathematics Teacher, 82*(5), 370-377.

Swetz, F. J. (2012). *Mathematical expeditions: Exploring word problems across the ages.* Johns Hopkins University Press.

Swetz, F. J. (2016). *Expediciones matemáticas: La aventura de los problemas matemáticos a través de la Historia.* La esfera de los libros.

Taskin, D., Yildiz, C. & Kanbolat, O. (2013). Reflections of Problem Solving EnvironmentBased on Group Work: Example of Fibonacci Problem. *Mediterranean Journal ofEducational Research, 14a*, 170-175.

Ugarte, A. (2013). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci*. Lulu

http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/20.500.12672/579

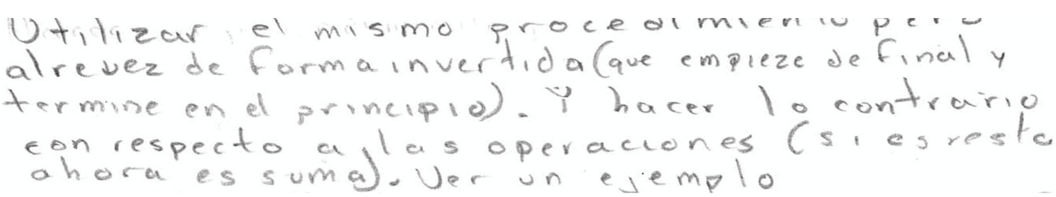
APÉNDICE 1

Ocho ejemplos de las hojas de respuestas de los alumnos olímpicos con la respuesta correcta

1.Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO5

a.Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

> Utilizar el mismo procedimiento pero alrevez de forma invertida (que empieza de final y termine en el principio). Y hacer lo contrario con respecto a las operaciones (si es resta a hora es suma). Ver un ejemplo.


Utilizar el mismo procedimiento pero alrevez de forma invertida (que empieze de final y termine en el principio). Y hacer lo contrario con respecto a las operaciones (si es resta ahora es suma). Ver un ejemplo

Comentario El estudiante plantea abordar el problema con los datos que describen la salida del hombre ("pensamiento reversible").

b. Realiza el plan matemáticamente

$$1+1\times 2=?\rightarrow ?+1\times 2=?..........=?$$

Atravez de las 7 puertas

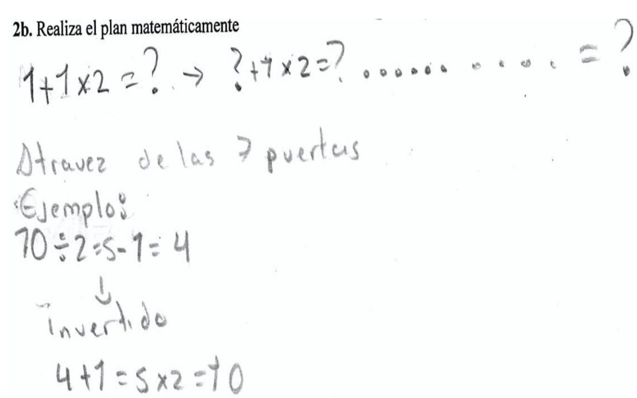
Ejemplo:

$$10\div 2=5-1=4$$

$$\downarrow$$

invertido

$$4+1=5\times 2=10$$


2b. Realiza el plan matemáticamente

1+1x2=? → ?+1x2=? ....=?

Atravez de las 7 puertas

Ejemplo:

10÷2=5-1=4

↓

Invertido

4+1=5x2=10

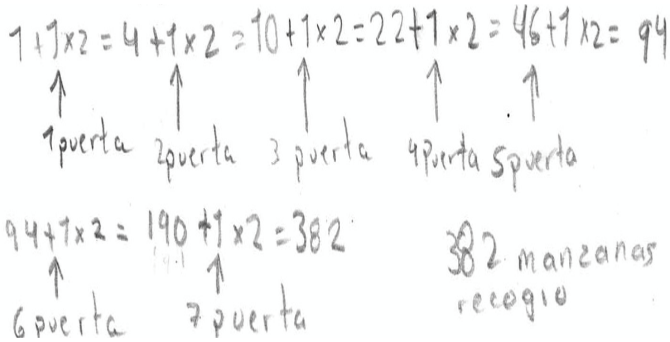
Comentario El alumno intuye el procedimiento inverso, pero no lo ejerce para cada puerta, sino solamente lo ejemplifica para la sexta puerta. Además, no maneja bien las reglas de las operaciones aritméticas: ¡“4 + 1” no es igual a “5 x 2”!

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

$$\begin{array}{l} 1+1\times 2=4+1\times 2=10+1\times 2=22+1\times 2=46+1\times 2=94 \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad \uparrow \\ 1\mathit{puerta}\quad 2\mathit{puerta}\quad 3\mathit{puerta}\quad 4\mathit{puerta}\quad 5\mathit{puerta} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 94+1\times 2=190+1\times 2=382 \\ \uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ 6\ \mathit{puerta}\qquad 7\ \mathit{puerta} \end{array}$$


1+1x2 = 4+1x2 = 10+1x2 = 22+1x2 = 46+1x2 = 94
1puerta 2puerta 3 puerta 4puerta 5puerta
94+1x2 = 190+1x2 = 382
6puerta 7puerta
382 manzanas recogio

Comentario El alumno muestra como resolvió el problema término a término, de forma correcta, es decir tiene un pensamiento reversible. Sin embargo, no realiza una demostración formal comenzando desde el número de las manzanas que le quedan al hombre después de la primera puerta (190): Primero da la mitad (382/2 = 191) y luego una más (191 – 1 = 190).

<u>2. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO9</u>

a.Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Tengo que al salir le queda una manzana. Se sigue una secuencia, lo que pienso es comenzar desde el final. Todo es más uno. En la primera puerta le quedan 4 y dio la mitad más uno. (dio 3). Mi idea es establecer la secuencia a partir de esta información. Tengo 1er puerta más uno.

resolver el problema.

Tengo que al salir le queda una manzana. Se sigue una secuencia, lo que pienso es comenpzar desde el final. Todo es más uno. En la primera puerta le quedaban 4 y dio la mitad más uno. (dio 3.). Mi idea es establecer la secuencia a partir de esta información. Tengo 1ª puerta más uno

Comentario El alumno comprende que se trata de una serie al decir “Se sigue una secuencia”. Además, se observa que el estudiante considera comenzar el conteo desde que el hombre sale es decir desde que se tiene una manzana, esto lleva a que el estudiante tiene una serie creciente.

a. Realiza el plan matemáticamente

Puerta.

1º.

X = número de secuencia por puerta.

4 10 22 46 94 190 382

6 12

6

Puerta. 1º.

2b. Realiza el plan matemáticamente ~~Formula~~

X = número de secuencia por puerta

4 10 22 46 94 190 382

6 12

6

Comentario Parece que el estudiante tiene el siguiente razonamiento para obtener los términos de la serie, que expreso anteriormente (Tabla A1):

Tabla A1. El supuesto razonamiento del alumno AO9.

Número de puerta (o termino)	**Cantidad de manzanas que da el hombre a cada guardia (o razón entre cada termino)**	**Cantidad de manzanas que tiene el hombre (o valor de cada termino)**
Salida	0	1
7	$1 + 2(1) = 1 + 2 = 3 \therefore es\ 3$	$3+1= 4 \therefore es\ 4$
6	$2(3)= 6 \therefore es\ 6$	$6 + 4 = 10 \therefore es\ 10$
5	$2(6) = 12 \therefore es\ 12$	$12+10= 22 \therefore es\ 22$
4	$2(12)= 24 \therefore es\ 24$	$24 + 22 = 46 \therefore es\ 46$
3	$2(24) = 48 \therefore es\ 48$	$48+46= 94 \therefore es\ 94$
2	$2(48) = 96 \therefore es\ 96$	$96+94= 190 \therefore es\ 190$
1	$2(96)= 192 \therefore es\ 192$	$192 + 190 = 382 \therefore es\ 382$

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 382 manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Comentario el alumno no abordó el problema.

3. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO12

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Pondré nombres a los 7 guardianes. Empiezo con el último (cuando solo quedo 1 manzana) (2^{do}) lo multiplico por 2 ("1") le suma 1 y hací 7 veces

Pondre nombres a los 7 guardianes.
Empiezo con el último (cuando solo quedo 1 manzana)
(2^{do}) lo multiplico por 2 (1°) le sumo 1
y hací 7 veces

Comentario El estudiante considera que es una serie discreta creciente cuando dice: "Empiezo con el último (cuando solo quedo 1 manzana) 2° lo multiplico por 2 ("1") le suma 1 y a sí 7 veces”. También se observa que el estudiante crea un algoritmo para la encontrar la respuesta correcta, al manejar el problema en una serie de pasos.

b. Realiza el plan matemáticamente

7 guardianes a,b,c,d,e,f,g.

1+1*2=4

4+1*2=10

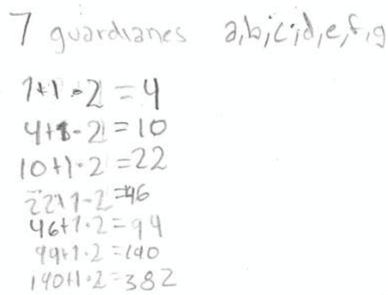
10+1*2=22

22+1*2=46

46+1*2=94

94+1*2=190

190+1*2=382



Comentario El estudiante no escribe paréntesis para determinar cuál es la primera operación a realizar. Se trata de un mal uso de la simbología aritmética. El razonamiento del estudiante con el uso correcto de la simbología aritmética se presenta en la Tabla A2.

Tabla A2. El razonamiento del alumno AO12 con el uso correcto de simbología aritmética.

Número de puerta	**Cantidad de Manzanas**
Salida	1
7	$(1+1)*2 \Rightarrow (2)*2 = 4 \therefore es\ 4$
6	$(4+1)*2 \Rightarrow (5)*2 = 10 \therefore es\ 10$
5	$(10+1)*2 \Rightarrow (11)*2 = 22 \therefore es\ 22$
4	$(22+1)*2 \Rightarrow (23)*2 = 46 \therefore es\ 4$
3	$(46+1)*2 \Rightarrow (47)*2 = 94 \therefore es\ 9$
2	$(94+1)*2 \Rightarrow (95)*2 = 190 \therefore es\ 1$
1	$(190+1)*2 \Rightarrow (191)*2 = 382 \therefore e$

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Comentario El alumno ni siquiera intento a comprobarlo.

4. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO15

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para

Aumentar a la última manzana una y multiplicarlo por 2, hacer esto 7

Aumentar a la ultima manzana una y multiplicarlo por 2, hacer esto 7 veces

Comentario El alumno abordó el problema de forma concreta y precisa.

b. Realiza el plan matemáticamente

$$\overset{1}{(1+1)2=4} \quad \overset{2}{(4+1)2=10} \quad \overset{3}{(10+1)2=22} \quad \overset{4}{(22+1)2=46}$$

$$\overset{5}{(46+1)2=94} \quad \overset{6}{(94+1)2=190} \quad \overset{7}{(190+1)2=382.}$$

$(1+1)2 = 4$ $(4+1)2 \overset{2}{=} 10$ $(10+1)2 = 22$ $(22+1)2 = 46$

$(46+1)2 \overset{5}{=} 94$ $(94+1)2 = 190$ $(190+1)2 = 382$

Comentario Se nota un pensamiento concreto y muy eficiente, con el uso adecuado de la simbología aritmética. Además, el alumno entiende la razón entre cada término de la serie.

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

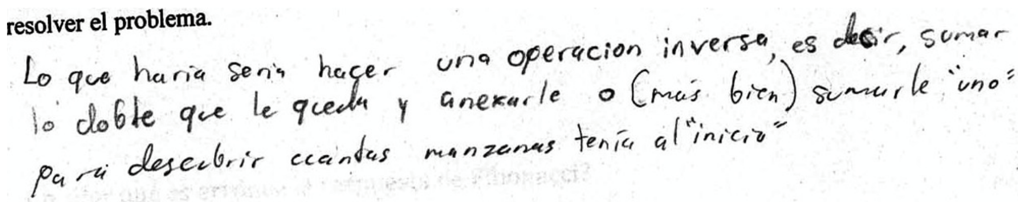
d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Comentario El alumno no atiende este rubro.

5. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO26

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Lo que haría sería hacer una operación inversa, es decir, sumar lo doble que le queda y anexarle o (más bien) sumarle “uno” para descubrir cuántas manzanas tenía al “inicio”.

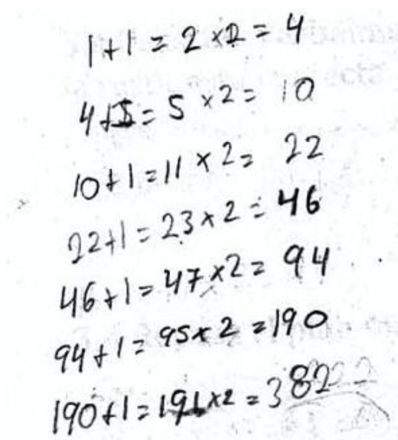

resolver el problema.

Lo que haria seria hacer una operacion inversa, es decir, sumar lo doble que le queda y anexarle o (más bien) sumarle "uno" para descubrir cuántas manzanas tenía al "inicio"

Comentario El alumno se equivoca en la orden de las operaciones “primero doblar y después sumar uno” en lugar “primero agregar uno y después doblar”.

c. Realiza el plan matemáticamente

$$
\begin{aligned}
1+1 &= 2\times 2 = 4\\
4+1 &= 5\times 2 = 10\\
10+1 &= 11\times 2 = 22\\
22+1 &= 23\times 2 = 46\\
46+1 &= 47\times 2 = 94\\
94+1 &= 95\times 2 = 190\\
190+1 &= 191\times 2 = 382
\end{aligned}
$$


1+1 = 2 x 2 = 4

4+1 = 5 x 2 = 10

10+1 = 11 x 2 = 22

22+1 = 23 x 2 = 46

46+1 = 47 x 2 = 94

94+1 = 95 x 2 = 190

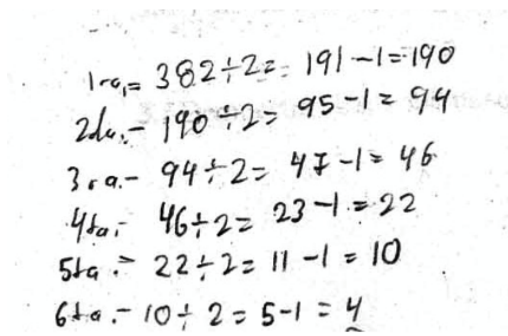
190+1 = 191 x 2 = 382

Comentario En la realización, el alumno tiene la orden correcta de las operaciones, pero no utiliza de manera correcta la simbología aritmética (1 + 1 = 2 x 2 = 4).

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

1ra. - 382 ÷ 2 = 191 - 1 = 190.
2da. - 190 ÷ 2 = 95 - 1 = 94
3ra. - 94 ÷ 2 = 47 - 1 = 46
4ta. - 46 ÷ 2 = 23 - 1 = 22
5ta. - 22 ÷ 2 = 11 - 1 = 10
6ta. - 10 ÷ 2 = 5 - 1 = 4
7ta. - 4 ÷ 2 = 2 - 1 = 1



Comentario: Aunque la demostración se plantea de manera correcta, se repite el mal uso de la simbología aritmética (382/2 = 191 – 1 = 190), tiene un pensamiento reversible.

6. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO32

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Tomar el residuo y hacer las operaciones contrarias 7 veces.

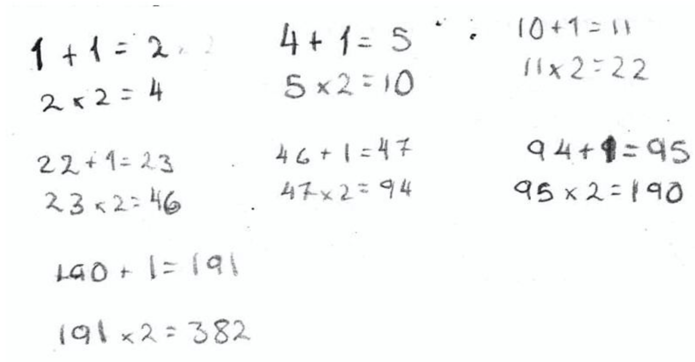
Comentario El plan verbal del alumno es muy general. Se podría precisar aún más: hacer las operaciones contrarias y en el orden contrario.

b. Realiza el plan matemáticamente

$1+1=2$ $\quad 4+1=5$ $\quad 10+1=11$
$2\times 2=4$ $\quad 5\times 2=10$ $\quad 11\times 2=22$

$22+1=23$ $\quad 46+1=47$ $\quad 94+1=95$
$23\times 2=46$ $\quad 47\times 2=94$ $\quad 95\times 2=190$

$190+1=191$
$191\times 2=382$


1 + 1 = 2
2 x 2 = 4
4 + 1 = 5
5 x 2 = 10
10 + 1 = 11
11 x 2 = 22
22 + 1 = 23
23 x 2 = 46
46 + 1 = 47
47 x 2 = 94
94 + 1 = 95
95 x 2 = 190
190 + 1 = 191
191 x 2 = 382

Comentario El alumno preciso su algoritmo expresado verbalmente: Para obtener el número de las manzanas que tenía el hombre antes de la puerta, se agrega uno al número de las manzanas que tenía el hombre después de pasar la puerta y el resultado se multiplica por dos. En el caso de la séptima puerta, eso es: 1 + 1 = 2 y 2 x 2 = 4. ***Es único alumno que tiene el uso correcto de la simbología aritmética.***

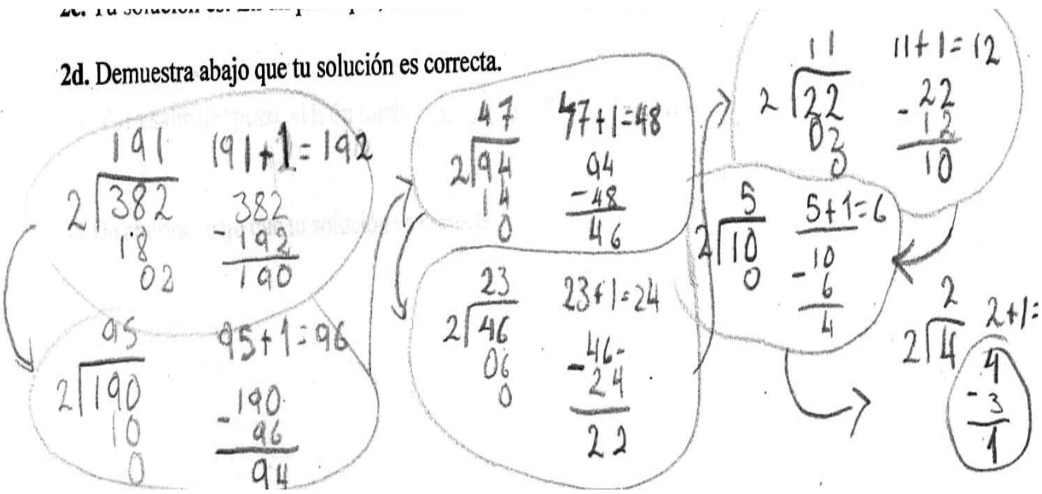
d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

$191+1=192$ $\quad 47+1=48$ $\quad 11+1=12$

$$2\overline{)382} = 191,\ 18,\ 02 \qquad 382-192=190 \qquad 2\overline{)94}=47,\ 14,\ 0 \qquad 94-48=46 \qquad 2\overline{)22}=11,\ 02,\ 0 \qquad 22-12=10$$

$95+1=96$ $\quad 23+1=24$ $\quad 5+1=6$

$$2\overline{)190}=95,\ 10,\ 0 \qquad 190-96=94 \qquad 2\overline{)46}=23,\ 06,\ 0 \qquad 46-24=22 \qquad 2\overline{)10}=5,\ 0 \qquad 10-6=4 \qquad 2\overline{)4}=4$$

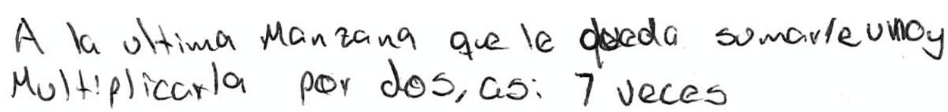


Comentario El estudiante realiza una demostración aceptable.

<u>7. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO41</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

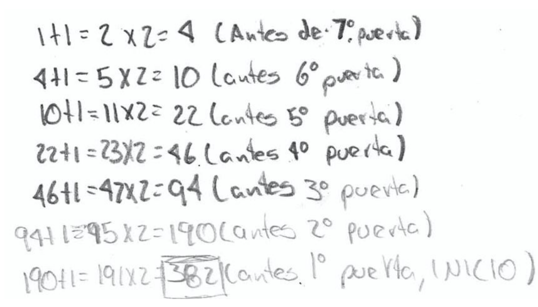
A la última manzana que le queda sumarle uno y multiplicarla por dos, así 7 veces.



Comentario Es un plan verbal claro y preciso.

b. Realiza el plan matemáticamente

$1+1=2\times 2=4$ (Antes de la 7° puerta)
$4+1=5\times 2=10$ (Antes de la 6° puerta)
$10+1=11\times 2=22$ (Antes de la 5° puerta)
$22+1=23\times 2=46$ (Antes de la 4°puerta)
$46+1=47\times 2=94$ (Antes de la 3° puerta)
$94+1=95\times 2=190$ (Antes de la 2°puerta)
$190+1=191\times 2=382$ (Antes de la 1°puerta, INICIO)



Comentario El alumno tiene un pensamiento reversible. Sin embargo, tiene un mal manejo de la simbología aritmética, especialmente en la igualdad y en las operaciones (1+1 = 2 x 2 = 4).

c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

$$382 \div 2 = 191 - 1 = 190 \div 2 = 95 - 1 = 94 \div 2 = 47 - 1 = 46 \div 2 = 23 - 1 = 22 \div 2 = 11 - 1 = 10 \div 2 = 5 - 1 = 4 \div 2 = 2 - 1 = 1$$

2d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

382÷2= 191-1 = 190÷2 = 95-1 = 94÷2 = 47-1 = 46÷2÷23-1 = 22
22÷2= 11-1 = 10÷2 = 5-1 = 4÷2 = 2-1 = 1

Comentario El estudiante hace una demostración aceptable, aunque con un mal manejo de la simbología aritmética.

<u>8. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AO44</u>

a. Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

(ver al otro lado)

~~Solo se dobla se agregando la misma cantidad de manzanas a las que lla lleva sucesivamente siete veces, y al final (sumaste) agregaste al monton otros siete que son~~ las
~~"extra" ya que~~ le de una a ~~cada uno~~ de ~~los guardias~~
5 (Ver al otro lado)

Comentario Después se analizará lo que escribió al inverso de la hoja.

b. Realiza el plan matemáticamente

$$[1+1=2+2=4][+1=5+5=10][+1=11+11=22][+1=23+23=46] \rightarrow$$
$$\rightarrow [+1=95+95=190][+1=191+191=382]$$

$$[1+1=2+2=4][+1=5+5=10][+1=11+11=22][+1=23+23=46][+1=47+47=94] \rightarrow$$

$$\rightarrow [+1=95+95=190][+1=191+191=382]$$

Se suma 1

Se agrega la misma cantidad

Comentario Se ve que el estudiante en cada paréntesis representa la cantidad de manzanas que le corresponde a cada guardia, es decir tiene un pensamiento reversible. Su razonamiento se podría presentar en la siguiente Tabla A3.

Tabla A3. El supuesto razonamiento del alumno AO44.

Número de puerta	Numero de manzanas	Descripción
Salida	1	El hombre salió con 1 manzana.
7	$1+1=2+2=4$	Con la que salió se le agrega 1 y se agrega la misma cantidad ($1+1=2 \Rightarrow 2+2=4 \therefore es\ 4$)
6	$+1=5+5=10$	A las manzanas anteriores se le agrega 1 y se agrega la misma cantidad ($4+1=5 \Rightarrow 5+5=10 \therefore es\ 10$)
5	$+1=11+11=22$	A las manzanas anteriores se le agrega 1 y se agrega la misma cantidad ($10+1=11 \Rightarrow 11+11=22 \therefore es\ 22$)
4	$+1=23+23=46$	A las manzanas anteriores se le agrega 1 y se agrega la misma cantidad ($22+1=23 \Rightarrow 23+23=46 \therefore es\ 46$)
3	$+1=47+47=94$	A las manzanas anteriores se le agrega 1 y se agrega la misma cantidad ($46+1=47 \Rightarrow 47+47=94 \therefore es\ 94$)
2	$+1=95+95=190$	A las manzanas anteriores se le agrega 1

		y se agrega la misma cantidad ($94+1=95 \Rightarrow 95+95=190 \therefore es\ 190$)
1	+1=191+191=382	A las manzanas anteriores se le agrega 1 y se agrega la misma cantidad ($190+1=191 \Rightarrow 191+191=382 \therefore es\ 382$)

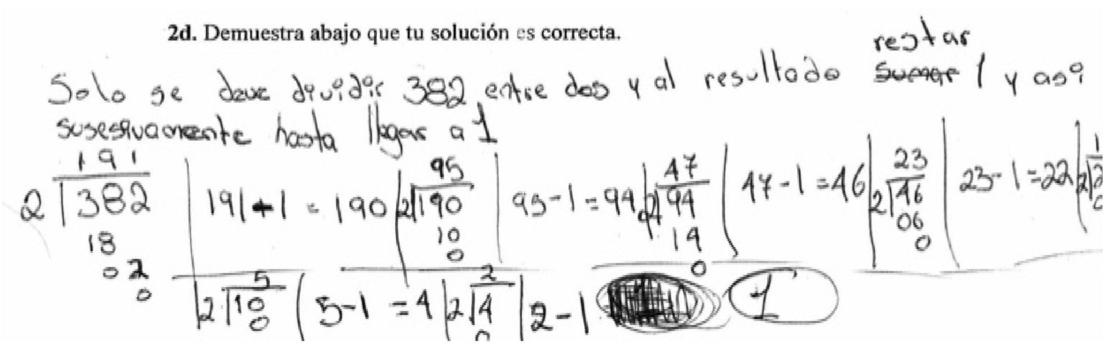
c. Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 382 manzanas.

d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.

solo se deve dividir 382 entre dos y al resultado restar 1 y asi susesivamente hasta llagar a 1

$2\overline{)382}$ = 191 (18, 02, 0) $191-1=190$ $2\overline{)190}$ = 95 (10, 0) $95-1=94$ $2\overline{)94}$ = 47 (14, 0) $47-1=46$ $2\overline{)46}$ = 23 (06, 0) $23-1=2$

$2\overline{)22}$ = 11 (0 2, 0) $11-1=10$ $2\overline{)10}$ = 5 (0) $5-1=4$ $2\overline{)4}$ = 2 (0) $2-1=1$. 1


2d. Demuestra abajo que tu solución es correcta.
Solo se deve dividir 382 entre dos y al resultado ~~sumar~~ restar 1 y asi susesivamente hasta llegar a 1
$2\overline{)382}$ 191 18 02 0 | 191-1 = 190 | $2\overline{)190}$ 95 10 0 | 95-1=94 | $2\overline{)94}$ 47 14 0 | 47-1=46 | $2\overline{)46}$ 23 06 0 | 23-1=22
$2\overline{)10}$ 5 0 | 5-1 = 4 | $2\overline{)4}$ 2 0 | 2-1 | 1

Inverso de la hoja

Problema 2

2ª

Se debe de agregar una manzana a las que tiene y luego aumentarle esa misma cantidad comenzando con 4 así sucesivamente siete veces.

Problema 2

2a

Se debe de agregar una manzana alas que tiene y luego aumentarle esa misma cantidad comenzando con 1 y asi susesivamente siete veces

Comentario El estudiante hace una demostración precisa de los hechos en el inciso b), donde marca la secuencia a seguir a partir de 382 manzanas, hasta llegar a tener 1 manzana. Por otro lado, se tiene que, al inverso de la hoja, el alumno escribe el algoritmo a seguir.

APENDICE 2

Cuatro ejemplos de las hojas de respuestas de los alumnos regulares con la respuesta correcta

<u>1. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR125</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Que tiene 382 manzana y cada guardián le da la mitad de manzana más uno.

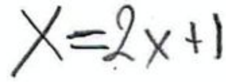
a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el proble

Que tiene 382 manzana y cada guardian leda la mitad de manzana más uno

Comentario En lugar de formular un plan, el alumno afirma que el hombre tiene 382 manzanas, pero no menciona como logró obtener este resultado. También, repite el algoritmo de cambio (la mitad de manzanas más una).

b) Realiza el plan matemáticamente.

$x = 2x + 1$

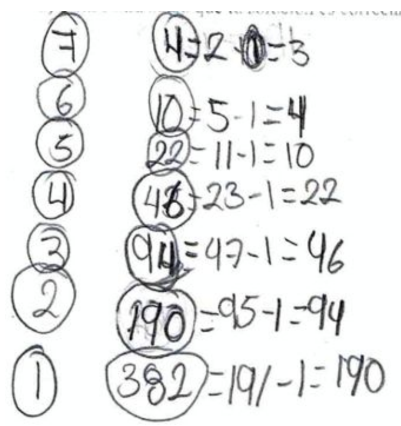


Comentario El alumno no presenta ninguna seria de operaciones que corresponden al algoritmo del cambio. Solamente escribe una expresión algebraica "x = 2x + 1" cuyo solución formal (x = -1) no tiene una relación obvia con el problema.

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado 382 manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

$$
\begin{array}{l}
7\ 4 = 2 - 1 = 3 \\
6\ 10 = 5 - 1 = 4 \\
5\ 22 = 11 - 1 = 10 \\
4\ 46 = 23 - 1 = 22 \\
3\ 94 = 47 - 1 = 46 \\
2\ 190 = 95 - 1 = 94 \\
1\ \ 382 = 191 - 1 = 190
\end{array}
$$



Comentario Parece que el alumno tuvo el razonamiento presentado en la Tabla A4, es decir tiene un pensamiento reversible.

Tabla A4. El supuesto razonamiento supuesto del alumno AR125.

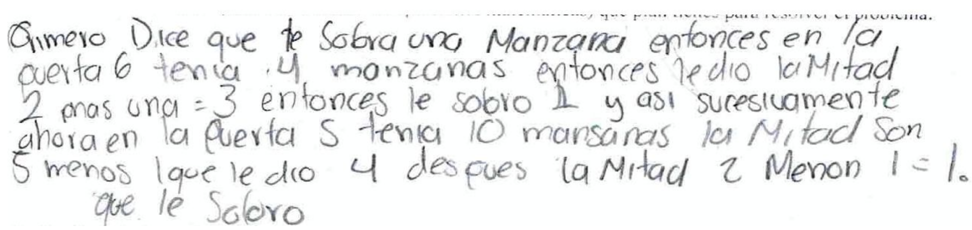
Número de puerta	Cantidad de Manzanas
Salida	1
7	$2 - 1 = 1 \Rightarrow 2(2) = 4 \therefore es\ 4$
6	$5 - 1 = 4 \Rightarrow 2(5) = 10 \therefore es\ 10$
5	$11 - 1 = 10 \Rightarrow 2(11) = 22 \therefore es\ 22$
4	$23 - 1 = 22 \Rightarrow 2(23) = 46 \therefore es\ 46$
3	$47 - 1 = 46 \Rightarrow 2(47) = 94 \therefore es\ 94$

2	$95 - 1 = 94 \Rightarrow 2(95) = 190 \therefore es\ 190$
1	$\underline{191 - 1 = 190 \Rightarrow 2(190) = 382 \therefore es\ 382}$

<u>2. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR128</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

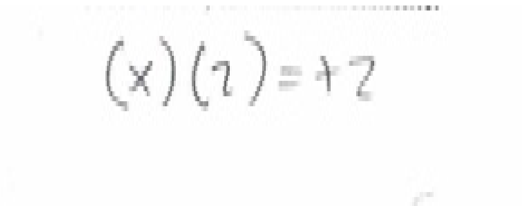
Primero dice que le sobra una manzana entonces en la puerta 6 tenía 4 manzanas entonces le dio la mitad 2 más una = 3 entonces le sobro 1 y así sucesivamente ahora en la puerta 5 tenía 10 manzanas la mitad son t meno 1 que le dio 4 después la mitad 2 menos 1 = 1. Que le sobro


Gimero Dice que le Sobra una Manzana entonces en la
puerta 6 tenia 4 manzanas entonces le dio la Mitad
2 mas una = 3 entonces le sobro 1 y asi sucesivamente
ahora en la Puerta 5 tenia 10 mansanas la Mitad Son
5 menos 1 que le dio 4 despues la Mitad 2 Menon 1 = 1.
que le Sobro

Comentario El alumno no formula un plan sino realiza de manera incorrecta lo que implica la formulación del problema: El hombre tenía 4 manzanas ***no en la puerta 6*** sino en la puerta 7. El hombre tenía 10 manzanas ***no en la puerta 5*** sino en la puerta 6.

b) Realiza el plan matemáticamente.

$$(x)(2) = +2$$

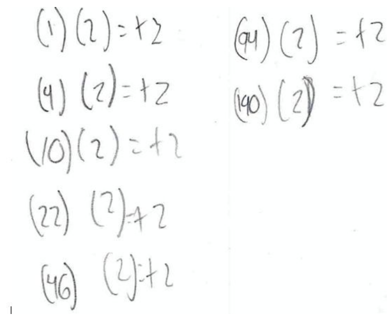


Comentario El alumno no pudo escribir una ecuación que expresa lo que comentó en el inciso a).

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

$$(1)(2) = +2 \quad (94)(2) = +2$$
$$(4)(2) = +2 \quad (190)(2) = +2$$
$$(10)(2) = +2$$
$$(22)(2) = +2$$
$$(46)(2) = +2$$



Comentario El alumno sigue un "algoritmo" que no respeta las reglas de aritmética (4 x 2 = + 2). Sin embargo, tal algoritmo genera los números de manzanas antes de cada puerta. De manera explícita el algoritmo dice: el número de manzanas antes de una puerta se obtiene doblando el número de manzanas después de tal puerta y agregando dos al resultado. El número inicial de las manzanas (382) se obtiene multiplicando 190 por 2 y agregando 2 al resultado: (2 x 190) + 2 = 382.

Es importante notar que el algoritmo del alumno es equivalente al algoritmo esperado: Agregando uno al número de manzanas después de una puerta y el resultado multiplicar por dos.

<u>3. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR139</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

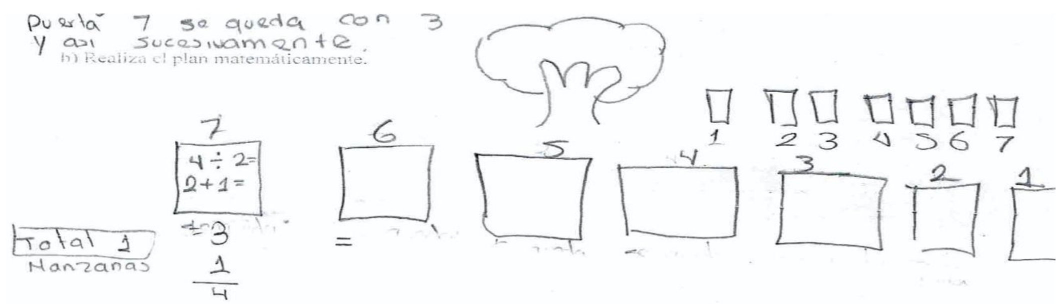
Iniciar inversamente de manera que inicie sumando desde la puerta número 7. Primero hallar un número que pueda dividirlo en dos más 1 y el número es 4 luego dividirlo en dos y sumarle uno el guardián de la puerta 7 se queda con 3 y así sucesivamente.

• Iniciar inversamente d. manera que inicie sumando desde la puerta numero 7. Primero allar un número que pueda dividirlo en dos más 1 y el numero es 4 luego dividirlo en dos y sumarle uno y el guardian de la puerta 7 se queda con 3 y asi sucesivamente.

Comentario Al decir el Alumno "Iniciar inversamente de manera que inicie sumando desde la puerta número 7 considera" dice que debe iniciar el conteo de las manzanas desde que la séptima puerta, lo que se considera es un razonamiento muy viable ya que se parte de lo que se conoce "el hombre salió con una manzana", después el alumno menciona la manera que realizar las operaciones para saber la cantidad de manzanas que tiene el hombre: "Primero hallar un número que pueda dividirlo en dos más 1 y el número es 4" y afirma la cantidad es 4 que es la cantidad de manzanas que llega con el último guardia, después menciona las operaciones a realizar "luego dividirlo en dos y sumarle uno", donde se puede observar una lógica con la siguiente ecuación $x/2 - 1 = 1$, donde x es el número de manzanas, posteriormente el alumno menciona la cantidad de manzanas que le corresponde al último guardia "y el guardián de la puerta 7 se queda con 3", al finar menciona que se trata de una serie de números al decir: "y así sucesivamente".

b) Realiza el plan matemáticamente.

Puerta 7 se queda con 3 y así sucesivamente				1	
	7	6	5	4	
	4 ÷ 2 =				



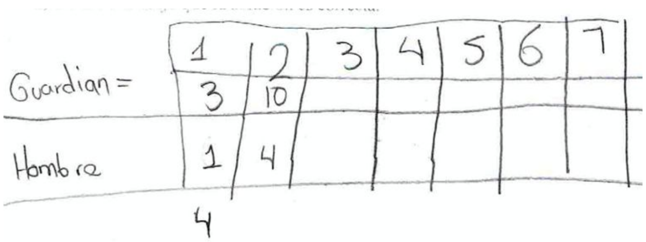
Comentario El alumno hace una ilustración del problema, dibuja cada puerta donde consideró que a la séptima puerta le corresponden 4 manzanas y realiza la suma de 3 + 1 = 4, lo que es correcto ya que 3 son las manzanas que se le dan al guardia más con la que sale el hombre de la séptima puerta.

c) Tu solución es: En un principio, el hombre ha tomado <u>382</u> manzanas.

Comentario El alumno insertó el resultado correcto. Sin embargo, las cuentas que hace al inverso de la hoja no son correctas.

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

	1	2	3	4	5	6	7
Guardián=	3	10					



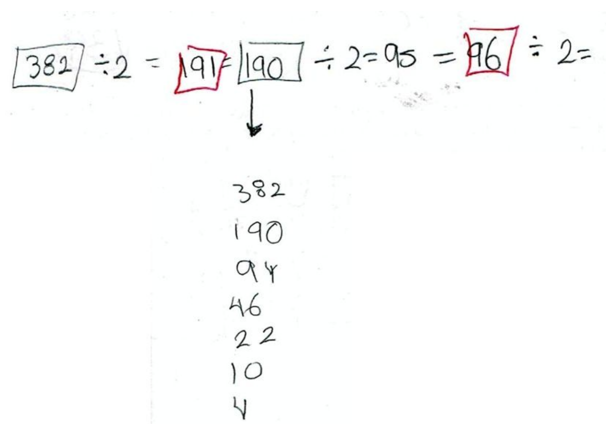
Comentario El alumno en el primer renglón escribe el número de cada puerta, en el segundo renglón escribe el número de manzanas que le corresponde a cada guardia, en el tercero el número de manzanas con las que llega el hombre. Lamentablemente el alumno solo escribe 2 términos.

Inverso de la hoja

$382 \div 2 = 191 = 190 \div 2 = 95 = 96 \div 2 =$

↓

382
190
94
46
22
10
4



Comentario El alumno escribe al inverso de la hoja los números correctos (382, 190, 94, 46, 22, 10, 4). A partir del segundo número, cada uno se obtiene al tomar la mitad del número anterior y del resultado restar 1.

<u>4. Las respuestas escaneadas, transcritas y comentadas del alumno AR140</u>

a) Describe verbalmente (sin usar formulas o expresiones matemáticas) qué plan tienes para resolver el problema.

Tenemos que darle la mitad más una...

Tenemos que darle la mitad mas una...

Comentario El alumno resume la regla mencionada en la formulación del problema en: "Tenemos que darle la mitad más una...", sin mencionar que se tiene que aplicar en cada puerta.

b) Realiza el plan matemáticamente.

7	6	5	4	3	2	1
4	10	22	46	94	190	382
$(-2+1)$	$(-5+1)$	$(-10+1)$	$(-22+1)$	$(-46+1)$	$(-94+1)$	1

7 6 5 4 3 2 1
4 10 22 46 94 190 382
(-2+1) (-5+1) (-10+1) (-22+1) (-46+1) (-94+1) = 1

Comentario Se observa que el alumno tiene los correctos números de manzanas antes de cada puerta, es decir tiene bien marcado el pensamiento revebelcible. Sin embargo, no escribe los números de manzanas después de cada puerta y se equivoca al escribir el algoritmo para obtener tales números. Por ejemplo, si antes de la sexta puerta el hombre tuvo 10 manzanas, el número de manzanas después de tal puerta (4 manzanas) no es (10 - 5 + 1), sino (10 – 5 – 1).

d) Demuestra abajo que tu solución es correcta.

Comentario El alumno no abordó el problema