



**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**  
**Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas**

Algoritmo de recuperación de fase en  
interferometría de desplazamiento  
lateral mediante la serie de Taylor e  
integrales concatenadas

Tesis Presentada al

**Colegio de Física**

como requisito para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Luis Eduardo Sánchez Flores

asesorado por

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla, Pue.

Marzo 2016

---

---

# Algoritmo de recuperación de fase en interferometría de desplazamiento lateral mediante la serie de Taylor e integrales concatenadas

Tesis

Luis Eduardo Sánchez Flores

Cruz Meneses Fabián



---

---

**Título:** Algoritmo de recuperación de fase en interferometría de desplazamiento lateral mediante la serie de Taylor e integrales concatenadas

**Estudiante:** Luis Eduardo Sánchez Flores

COMITÉ

---

Dr. Gustavo Rodríguez Zurita  
Presidente

---

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez  
Secretario

---

Dr. Eduardo Moreno Barbosa  
Vocal

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Suplente

---

Dr. Cruz Meneses Fabián  
Asesor

---

---

# Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca parcial que me otorgó durante la elaboración de ésta tesis bajo el proyecto de Investigación Científica Básica con número de referencia CB-2011/166742.

Al Cuerpo Académico de Óptica de la FCFM por la beca complementaria.

Al Dr. Cruz Meceses Fabián por el apoyo y la motivación que me ha brindado para que se realizará este trabajo.

A mis amigos Israel y Esteban por el gran apoyo incondicional que me han brindado.

A mis padres, esposa e hijos que han sido la base para poder lograr cada uno de mis objetivos.

A cada una de las personas de mi jurado, por sus comentarios y observaciones para mejorar éste trabajo.



# Dedicatoria

A mi esposa María del Socorro Mirón Gonzalez y mis hijos Mayrin Guadalupe y Luis David Sánchez Mirón quien son y serán mi motor para seguir adelante.

A mis padres Guadalupe Josafat Sánchez Santos y Josefina Flores Rodríguez por estar siempre ami lado.

A mis hermanos por creer en mi.

*Luis Eduardo Sánchez Flores.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.2.1. Objetivo general . . . . .	3
1.2.2. Objetivos particulares . . . . .	3
1.3. Contexto del trabajo . . . . .	3
1.4. Organización de los capítulos . . . . .	3
<b>2. Fundamentos Teóricos</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Interferometría de corrimiento de fase . . . . .	5
2.3. Metodos de Extracción de Fase . . . . .	7
2.3.1. Método de Mínimos Cuadrados . . . . .	7
2.3.2. Método de tres pasos . . . . .	9
2.3.3. Método de cuatro pasos . . . . .	9
2.3.4. Método de Carré . . . . .	10
2.4. Desenvolvimiento de fase . . . . .	10
2.5. Interferometría de Desplazamiento Lateral . . . . .	11
2.5.1. Arreglo basado en el interferómetro de Michelson . . . . .	13
2.5.2. Arreglo basado en el interferómetro de Jamin . . . . .	14
2.5.3. Arreglo basado en el interferómetro Mach-Zehnder . . . . .	14

2.5.4. Arreglo basado en difracción . . . . .	15
2.5.5. Arreglo basado en polarización . . . . .	15
2.5.6. Arreglos basados en un interferómetro cíclico . . . . .	16
2.6. Serie de Taylor . . . . .	17
2.7. Ecuaciones Diferenciales . . . . .	17
2.7.1. La Ecuación Lineal General . . . . .	17
2.7.2. Independencia Lineal . . . . .	18
2.7.3. El Wronskiano . . . . .	19
2.7.4. Solución General de una Ecuación Homogénea . . . . .	19
2.7.5. Solución General de una Ecuación No Homogénea . . . . .	21
<b>3. Modelo matematico</b>	<b>23</b>
3.1. Ecuación diferencial de $M$ -ésimo orden . . . . .	23
3.1.1. Para el caso $M = 1$ . . . . .	23
3.1.2. Para el caso $M = 2$ . . . . .	24
3.1.3. Para el caso $M = 3$ . . . . .	26
3.1.4. Para el caso general . . . . .	29
3.2. Recuperación de fase a partir de su incremento . . . . .	31
<b>4. Simulación numérica</b>	<b>33</b>
4.1. Modelo matemático computable . . . . .	33
4.2. Solución numérica de ED de $M$ -ésimo orden . . . . .	36
4.3. Algoritmo de reconstrucción de fase . . . . .	37
<b>5. Conclusiones Generales</b>	<b>45</b>
5.1. Trabajo a futuro . . . . .	46

# Resumen

Una característica típica en interferometría de desplazamiento lateral (LSI, de sus siglas en inglés: Lateral shearing interferometry) es que no existe un haz de referencia. Con el haz de prueba se crean los dos haces que interfieren, al dividir éste en dos haces desplazados una pequeña distancia, uno en dirección contraria respecto del otro. Éste hecho permite la obtención del incremento de la función de fase mediante la demodulación del patrón de interferencia con técnicas como la interferometría de corrimiento de fase (PSI, de sus siglas en inglés, Phase-shifting interferometry) por citar un ejemplo. La labor del presente trabajo de tesis radica en estimar la incertidumbre en el cálculo de la fase con respecto al número de términos que se toman en la serie de Taylor del incremento de la función de fase, y en describir como este resultado se altera con la variación del desplazamiento del campo de prueba.



# Capítulo 1

## Introducción

La interferencia óptica es la superposición de dos o más ondas electromagnéticas vibrando dentro del rango del espectro visible, cuando un detector óptico, tal como una cámara CCD ó un fotodetector ó simplemente el ojo humano, observaría algo proporcional al módulo cuadrado de la amplitud resultante [1-2]. Cuando dicha superposición guarda un alto grado de coherencia, estados de polarización comparables, y amplitudes comparables, lo observable es un patrón de franjas brillantes y oscuras, conocido como interferograma ó patrón de interferencia, la forma y la cantidad de estas franjas depende de las variaciones espaciales de los frentes de ondas de los campos. Se sabe que, la separación de dos franjas oscuras o dos franjas brillantes es de una longitud de onda, sin embargo, uno de los problemas principales en la interpretación de un patrón de franjas es saber con la más alta precisión cual es la diferencia de caminos ópticos en los puntos intermedios entre dos franjas brillantes o dos oscuras. Uno de los primeros intentos por conocer fue la técnica de esqueletización [3] pero una solución acertada fue dada por Bruning en 1974 al introducir la técnica de corrimiento de fase PSI [4], que consiste en introducir escalones de fase conocidos e igualmente espaciados para formar un sistema de ecuaciones y resolver de manera algebraica el problema de la fase en cada punto del patrón de franjas, sin embargo la no linealidad del cambiador de fase como es el transductor piezoeléctrico dio origen a una técnica más amplia que PSI llamada interferometría de corrimiento de fase generalizado GPSI, introducida por primera vez por G. Lai y T. yatagai en 1991 [5], que consiste en introducir escalones de fase conocidos pero no necesariamente igualmente espaciados como lo propuso Bruning. Ambos métodos necesitan de tener bien calibrado el cambiador de fase, implicando una calibración de alto costo y trabajo exhaustivo, por lo que fue introducida una técnica aún más amplia, conocida como interferometría de corrimiento de fase de auto calibración SPSI, esta técnica consiste en introducir escalones de

fase con un cambiador de fase descalibrado y conocer estos valores a partir de los interferogramas medidos.

La fase medida ya sea por PSI, GPSI ó SPSI es en realidad la diferencia de fase entre la fase del haz de prueba y la fase del haz de referencia, así si el objetivo es medir solo la fase del haz de prueba es necesario conocer la fase de referencia, eso significa hacer una calibración experimental del arreglo interferométrico desde el punto de vista de las aberraciones de las componentes ópticas, de las vibraciones mecánicas, de los gradientes de temperatura, etc., para poder conocer este frente de onda de referencia [6]. Una alternativa para no lidiar con el haz de referencia es la idea que propuso V. Ronchi con la técnica de interferometría de desplazamiento lateral introducida en 1923 que consiste en superponer el haz de prueba consigo mismo desplazado una pequeña distancia conocida, la recuperación de la fase por las técnicas antes mencionadas es ahora interpretada como el incremento de la función de fase, y entonces ahora el problema es calcular la función de fase a partir de su incremento. La mayoría de las propuestas suponen la situación de un desplazamiento suficientemente pequeño tal que el incremento de fase sea aproximado a la primera derivada de la función, esto equivale a tomar el primer término en la serie de Taylor, de esta manera el problema se resuelve integrando directamente los datos medidos. Sin embargo, no se da con amplio detalle o un criterio firme de cuando considerar que el desplazamiento sea pequeño, por lo que sería útil desarrollar una metodología para no solo tomar el primer término de la serie de Taylor sino tomar  $M$ -ésimos términos para mejorar la medición. Esta es la labor del presente trabajo, se propone truncar la serie de Taylor a  $M$  términos y resolver la ecuación diferencial de  $M$ -ésimo orden para calcular la función de fase. Una de las importantes contribuciones del presente trabajo es la de proponer una solución computable y poder llevar a cabo la implementación de un algoritmo.

## 1.1. Planteamiento del problema

Partiendo de la obtención de tres patrones de interferencia de desplazamiento lateral, considerando un desplazamiento conocido, se calcula la fase del interferograma mediante técnicas conocidas, como es la interferometría de corrimiento de fase y el algoritmo basado en el método introducido por Itoh [8] para la obtención de la fase desenvuelta. Esta fase recuperada viene a ser el incremento de la función de fase, por lo que al ser dividida por el incremento se iguala para cada altura  $y$  a la serie de Taylor truncada al  $M$ -ésimo término y por consiguiente, como una contribución fundamental en este trabajo, resolver la ecuación diferencial en  $x$  de  $M$ -ésimo orden resultante.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

Extraer la fase de un patrón de interferencia obtenido por desplazamiento lateral con el menor error posible mediante el uso de la serie de Taylor y la solución de una ecuación diferencial de  $M$ -ésimo orden.

### 1.2.2. Objetivos particulares

- Desarrollar un modelo teórico.
- Simulación numérica de la interferencia de desplazamiento lateral.
- Evaluación de patrones de interferencia obtenidos por desplazamiento lateral.
- Implementar numéricamente el modelo teórico

## 1.3. Contexto del trabajo

El presente trabajo se desarrolló en el laboratorio de Luz Estructurada de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Este trabajo forma parte de las líneas de generación y aplicación del conocimiento que el Cuerpo Académico de Óptica practica. También, la presente es parte de un proyecto de investigación interno patrocinado por Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

## 1.4. Organización de los capítulos

En este apartado se presenta una descripción breve acerca de los capítulos de los cuales consta este trabajo de tesis, su contenido se divide de tal forma que, abarca desde los conceptos fundamentales teóricos, hasta la presentación de los resultados obtenidos y trabajos a futuro.

El capítulo 1 esta dedicado a la descripción general de este trabajo, donde se plantean los objetivos y contexto del trabajo. En el capítulo 2, se describe la interferometría de corrimiento de fase así como los métodos de extracción

de fase por algunos autores. Se analizan algunos arreglos interferométricos típicos usados en interferometría de desplazamiento lateral, se discute la serie de Taylor y se revisa la teoría general para la solución de ecuaciones diferenciales de  $M$ -ésimo orden. En el capítulo 3 denominado "Modelo matemático", partiendo del truncamiento de la serie de Taylor, se presenta el desarrollo de un modelo matemático para la solución de una ecuación diferencial de  $M$ -ésimo orden, la cual consta, en primera instancia, en resolver  $M$  integrales concatenadas. El capítulo 4 muestra una metodología para resolver  $M$  integrales concatenadas, mediante resolver  $M$  integrales simples lo cual tiene como ventaja principal el poder implementar la solución en la computadora con un algoritmo rápido en comparación al implementado con las integrales concatenadas. El capítulo 5 presenta las conclusiones del trabajo de tesis y trabajo a futuro. Finalmente, se presenta la bibliografía utilizada.

# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

### 2.1. Introducción

La interferencia óptica es la superposición de dos o más ondas de luz teniendo como resultado una irradiancia la cual se desvía de la suma de las irradiancias componentes de cada onda, esta es definida como la energía medida por unidad de area por unidad de tiempo de las componentes del campo eléctrico de las ondas [2]. Entre las diversas formas de la interferometría, la interferometría de dos brazos es especialmente sencilla tanto en su principio teórico como práctico por lo que es utilizado en una amplia gama de aplicaciones, tales como metrología [9-11], astronomía [12], estudio de células vivas [13], microscopía [14], tomografía [15], y holografía digital [16, 17], entre muchas otras disciplinas. En interferometría de dos brazos existen diversas técnicas para encontrar la fase del objeto, dentro de las más importantes se destacan la interferometría de corrimiento de fase (phase-shifting interferometry, PSI) introducida por Bruning et al en 1974 [4], y la interferometría de franjas portadoras, (Carrier Fringes Interferometry, CFI) que usa el método de la transformada de Fourier introducido por M. Takeda et al en 1982 [18] por mencionar algunos.

### 2.2. Interferometría de corrimiento de fase

Para el metodo de PSI, se introduce un cambio de fase constante espacialmente que varía con el tiempo entre los frentes de onda de referencia y objeto. En un punto específico del interferograma se mide una señal, la fase del objeto está codificada en la señal y es independiente del arreglo que se ha usado. La técnica PSI se utiliza para obtener la distribución de fa-

**CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS**  
**2.2. INTERFEROMETRÍA DE CORRIMIENTO DE FASE**

---

se de una onda objeto a partir de una secuencia de interferogramas. Según Schreiber y Bruning [19] la técnica de PSI no es un arreglo físico específico, más bien es un método de análisis que puede ser aplicado a una gran variedad de situaciones de prueba. En PSI se guardan electrónicamente una serie de intensidades de diferentes interferogramas mientras que cambia la fase de referencia. La fase del frente de onda de prueba está codificada en las variaciones de la intensidad del patrón de los diferentes interferogramas almacenados. Las expresiones generales para los campos ópticos de referencia y prueba son:

$$E_r(x, y, t) = A_r(x, y)e^{i[\phi_r(x, y) - \alpha(t)]}, \quad (2.1)$$

$$E_t(x, y) = A_t(x, y)e^{i[\phi_t(x, y)]}, \quad (2.2)$$

donde  $\alpha(t)$  es el cambio de fase que varía en tiempos discretos, es introducido dentro del haz de referencia, y  $\phi_r(x, y)$  y  $\phi_t(x, y)$  son la función de fase asociada al campo de referencia y prueba respectivamente. Al hacer interferir los dos haces el patrón resultante es

$$I(x, y, t) = \|E_r(x, y, t) + E_t(x, y)\|^2, \quad (2.3)$$

ó

$$I(x, y, t) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha(t)], \quad (2.4)$$

definiendo  $a(x, y) = A_r^2(x, y) + A_t^2(x, y)$ ,  $b(x, y) = 2A_r(x, y)A_t(x, y)$ , y  $\phi(x, y) = \phi_t(x, y) - \phi_r(x, y)$ . La Ec.(2.4) es la ecuación fundamental de PSI. La intensidad en cada punto del interferograma varía como una función cosenoidal del corrimiento de fase introducido  $\alpha(t)$ . Se encuentra la fase desconocida al obtener varios interferogramas con diferentes corrimientos conocidos, con ellos se forma un sistema de ecuaciones y se resuelve para  $\phi(x, y)$ . PSI se basa en la reconstrucción de la fase  $\phi$  mediante el muestreo de un cierto número de patrones de interferencia los cuales difieren entre ellos debido a diversos valores de  $\alpha(t)$ .

Existen diversos métodos para variar la fase con el tiempo, un primer método consiste en alterar el camino óptico del haz de referencia al trasladar uno de los espejos o superficie óptica con un transductor piezoeléctrico [20-21]. De igual manera una placa plano paralela que se coloca en la trayectoria de un haz, al ser inclinada incrementa el camino óptico proporcionalmente al ángulo que es rotada la placa, éste método sólo se usa con haz colimado para evitar introducir aberraciones [22]. Por el efecto Doppler [23-24] al trasladar una rejilla de difracción a través de un haz de luz, se introduce un cambio en el haz difractado, se selecciona uno de los órdenes de difracción y se hace interferir con la frecuencia original para producir un corrimiento de fase

del interferómetro. Las celdas Brag [24, 25] acusto-ópticas, las ondas acústicas viajan a través de la celda creando variaciones periódicas en el índice de refracción debido a la presión del sonido, y una rejilla de difracción en movimiento se encuentra en la celda. También se puede crear corrimiento de fase con polarizadores rotados [26, 37] o retardadores de fase. Se pueden crear con un modulador de corrimiento de fase opto-acromático [28] ya que una inclinación en el espejo del dispositivo permite un retraso de fase, sin cambio en la velocidad del haz o de la longitud de onda  $\lambda$ . Los avances en la fibra óptica también permiten introducir los corrimientos de fase por ajustes de caminos ópticos al expandir o contraer la fibra óptica [29]. La modulación directa de la longitud de onda de salida de un diodo laser permite usar la temperatura para producir corrimiento de fase [30, 31]. Además, recientemente se ha demostrado que es posible introducir escalones de fase mediante la modulación de amplitud en cuadratura y no-cuadratura [32-34].

## 2.3. Metodos de Extracción de Fase

De la misma manera que existen numerosos métodos para introducir corrimientos de fase a un patrón de interferencia, también existen distintos métodos de detección o algoritmos para calcular la fase del frente de onda de un objeto bajo prueba. La mayor diferencia entre varios algoritmos de detección de PSI es la manera en la cual se hace variar la fase de referencia, y la cantidad de patrones de interferencia medidos. A pesar de ello estos algoritmos comparten la característica de requerir una cantidad de interferogramas igual al número de veces que la fase de referencia sea variada. La fase del frente de onda es calculada en cada punto en un módulo de  $2\pi$  como el arcotangente de una función de las medidas de intensidad de los interferogramas, por tanto el mapa final de frente de onda se obtiene por desenvolver las fases para eliminar las discontinuidades de  $2\pi$  de la fase.

### 2.3.1. Método de Mínimos Cuadrados

La medida de intensidad en un punto dado en el interferograma varía como una función senoidal de la fase de referencia, con un periodo conocido, y tres incógnitas. La fase del frente de onda puede ser determinada a través de un ajuste de mínimos cuadrados de las intensidades medidas como una función senoidal. La solución general de mínimos cuadrados para una serie de  $N$  interferogramas con cambios de fase  $\alpha_k$  fue discutida por Bruning et al en 1974 y mas rigurosamente por Grivenkamp en 1984 [35]. Omitiendo las dependencias espaciales, con un corrimiento  $\alpha_k$  en  $N$  pasos, los  $N$  valores de

## CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.3. METODOS DE EXTRACCIÓN DE FASE

intensidad  $I_k$  con  $k = 1, \dots, N$  están dados por

$$I_k = a + b \cos(\phi + \alpha_k), \quad (2.5)$$

donde  $\alpha_k = 2\pi k/N$ . Se puede reescribir como

$$I_k = a + \gamma_1 \cos \alpha_k + \gamma_2 \sin \alpha_k, \quad (2.6)$$

donde se ha definido  $\gamma_1 = b \cos \phi$ , y  $\gamma_2 = b \sin \phi$ .

Definiendo una función error,  $\varepsilon$  como las diferencias entre las intensidades medidas experimentales y las predichas con la Ec.(2.6). La suma de errores al cuadrado es

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^N [I_k - a - \gamma_1 \cos \alpha_k - \gamma_2 \sin \alpha_k]^2. \quad (2.7)$$

Para minimizar el error, se obtienen las derivadas de la Ec. (2.7) con respecto a cada una de las tres incógnitas  $a$ ,  $\gamma_1$ , y  $\gamma_2$ , para posteriormente igualar a cero

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} = \sum_{k=1}^N 2a + \sum_{k=1}^N 2\gamma_1 \cos \alpha_k + \sum_{k=1}^N 2\gamma_2 \sin \alpha_k - \sum_{k=1}^N 2I_k,$$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \gamma_1} = \sum_{k=1}^N 2\gamma_1 \cos^2 \alpha_k + \sum_{k=1}^N 2\gamma_2 \sin \alpha_k \cos \alpha_k + \sum_{k=1}^N 2a \cos \alpha_k - \sum_{k=1}^N 2I_k \cos \alpha_k, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \gamma_2} = \sum_{k=1}^N 2\gamma_2 \sin^2 \alpha_k + \sum_{k=1}^N 2\gamma_1 \sin \alpha_k \cos \alpha_k + \sum_{k=1}^N 2a \sin \alpha_k - \sum_{k=1}^N 2I_k \sin \alpha_k,$$

Igualando a cero, se obtiene una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{k=1}^N \cos \alpha_k & \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \\ \sum_{k=1}^N \cos \alpha_k & \sum_{k=1}^N \cos^2 \alpha_k & \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \cos \alpha_k \\ \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k & \sum_{k=1}^N \sin \alpha_k \cos \alpha_k & \sum_{k=1}^N \sin^2 \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N I_k \\ \sum_{k=1}^N I_k \cos \alpha_k \\ \sum_{k=1}^N I_k \sin \alpha_k \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Resolviendo la matriz de la Ec. (2.9), se llega a

$$\tan \phi = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \quad (2.10)$$

### 2.3.2. Método de tres pasos

Como se ha mencionado que es necesario un mínimo de tres interferogramas para reconstruir el frente de onda. En la técnica de tres pasos se toman medidas de intensidad con corrimientos de fase específicos como  $\alpha_1 = -\alpha_0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \alpha_0$  [36]. Las medidas de intensidad para estos corrimientos son expresadas como

$$\begin{aligned} I_1 &= a + b \cos(\varphi - \alpha_0), \\ I_2 &= a + b \cos(\varphi), \\ I_3 &= a + b \cos(\varphi + \alpha_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Desarrollando el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_1 &= a + b \cos \varphi \cos \alpha_0 + b \sin \varphi \sin \alpha_0, \\ I_2 &= a + b \cos(\varphi), \\ I_3 &= a + b \cos \varphi \cos \alpha_0 - b \sin \varphi \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ahora como se tienen tres ecuaciones y tres incógnitas, se puede resolver el sistema (2.12) para encontrar la fase como

$$\tan \varphi = \frac{(1 - \cos \alpha_0)}{(\sin \alpha_0)} \frac{(I_1 - I_3)}{(2I_2 - I_1 - I_3)}. \quad (2.13)$$

### 2.3.3. Método de cuatro pasos

En esta técnica como su nombre lo dice 4 pasos [37] se requieren 4 interferogramas con cambios de fase de  $\pi/2$  entre cada uno de ellos, para lo cual las intensidades se expresan como

$$\begin{aligned} I_1 &= a + b \cos \phi, \\ I_2 &= a - b \sin \phi, \\ I_3 &= a - b \cos \phi, \\ I_4 &= a + b \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Del sistema Ec. (2.14) tenemos 3 incógnitas con 4 ecuaciones lo cual facilita el cálculo para el valor de  $\phi$  en cada punto del interferograma. El término de la luz de fondo se elimina al restar pares de ecuaciones del sistema (2.14) como

$$\begin{aligned} I_4 - I_2 &= 2b \sin \phi, \\ I_1 - I_3 &= 2b \cos \phi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Tomando la razón de estas ecuaciones se puede eliminar el término de luz de modulación para obtener un resultado que sólo contiene la fase desconocida

$$\tan \phi = \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3}. \quad (2.16)$$

### 2.3.4. Método de Carré

La técnica de Carré es una variable de la técnica de cuatro pasos, pero en lugar de pedirse que se relicen corrimientos de fase de  $\pi/2$  este valor ahora se trata como otra incógnita y se resuelve con métodos analíticos. Es de suma importancia que los corrimientos de fase sean del mismo valor entre cada interferograma. Carré [38] propone cuatro corrimientos con valores de

$$\alpha_k = -3\alpha_0, -\alpha_0, \alpha_0, 3\alpha_0. \quad (2.17)$$

Para estos valores de corrimientos los patrones de interferencia estarán dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= a + b \cos(\phi - 3\alpha_0), \\ I_2 &= a + b \cos(\phi - \alpha_0), \\ I_3 &= a + b \cos(\phi + \alpha_0), \\ I_4 &= a + b \cos(\phi + 3\alpha_0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para este caso se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y con ayuda de la identidad trigonométrica  $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$  puede comprobarse que

$$\tan^2 \alpha_0 = \frac{3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)}{(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)}. \quad (2.19)$$

Utilizando identidades trigonométricas como  $\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$  se puede demostrar que la fase del frente de onda del objeto está dado por

$$\tan \phi = \tan \alpha_0 \frac{(I_2 - I_3) + (I_1 - I_4)}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)}. \quad (2.20)$$

## 2.4. Desenvolvimiento de fase

El cálculo de la fase presentaría discontinuidades debido a que es obtenida mediante el uso de la tangente inversa. Debido a que la tangente inversa es una función multivaluada, la solución para  $\phi$  es una función diente de sierra, donde las discontinuidades ocurren cada vez que cambia  $\phi$  por  $2\pi$ . Si  $\phi$  se incrementa, la pendiente de la función es positiva y viceversa si la fase decrece. El paso final en el proceso de medición del patrón de franjas es desenvolver o integrar la fase a lo largo de una línea o camino contando las discontinuidades en  $2\pi$  y sumándole  $2\pi$  cada vez que el ángulo de la fase haga un salto de  $2\pi$  a 0 y restando si cambia de 0 a  $2\pi$ . La Fig. (2.1) muestra los datos después del desenvolvimiento.

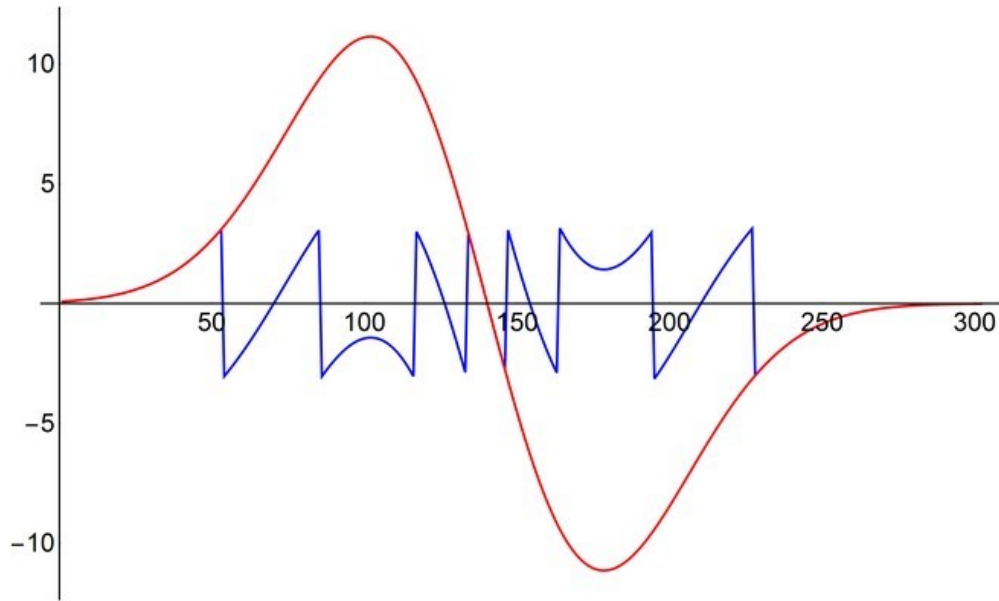


Figura 2.1: Desenvolvimiento de fase

La clave de un confiable algoritmo de desenvolvimiento de fase está en su capacidad de detectar estos saltos con precisión. El principio básico del desenvolvimiento de fase es integrar la fase envuelta en unidades de  $2\pi$  a lo largo de una línea de datos. El gradiente de fase se calcula para cada pixel

$$\Delta\phi = \phi_n - \phi_{n-1}, \quad (2.21)$$

donde  $n$  es el número de pixel.

Si  $|\Delta\phi|$  excede un cierto umbral como  $\pi$ , entonces se asume una discontinuidad. Este salto de fase es corregido mediante la suma o resta de  $2\pi$  dependiendo del signo de  $\Delta\phi$ . El principio más usado para corregir estas discontinuidades en la fase se basa en el hecho que la diferencia de fase entre cualesquiera dos puntos medida integrando la fase a lo largo de una trayectoria entre estos dos puntos es independiente del camino escogido, siempre y cuando no pase a través de una discontinuidad de fase.

## 2.5. Interferometría de Desplazamiento Lateral

La interferometría de desplazamiento lateral (Lateral Shear Interferometry, LSI) es un campo importante dentro de la interferometría y ha sido usado extensamente en diversas aplicaciones tal como pruebas en sistemas y componentes ópticos. Un frente de onda bajo estudio puede ser examinado al

dividirlo en dos partes idénticas con un divisor de haz y entonces recombinar estas partes con una apropiada cantidad de desplazamiento. Con ésta técnica no se necesita un frente de onda de referencia conocido ni perfecto ya que el frente de onda se compara consigo mismo. El método de LSI desplaza lateralmente al frente de onda duplicado una pequeña distancia transversal con respecto al original, con lo que se obtiene el patrón de interferencia entre los frentes original y desplazado. El famoso científico italiano Vasco Ronchi en la primera mitad del siglo 20 fue el primero en introducir el desplazamiento lateral de los frentes de onda para probar componentes ópticos, superponiendo los órdenes de difracción cero y uno del haz proveniente de una superficie de prueba con ayuda de una rejilla de transmitancia binaria. Hoy en día existe una gran variedad de arreglos físicos en los cuales se produce el desplazamiento lateral deseado, normalmente denotado por  $\Delta x$ . Una

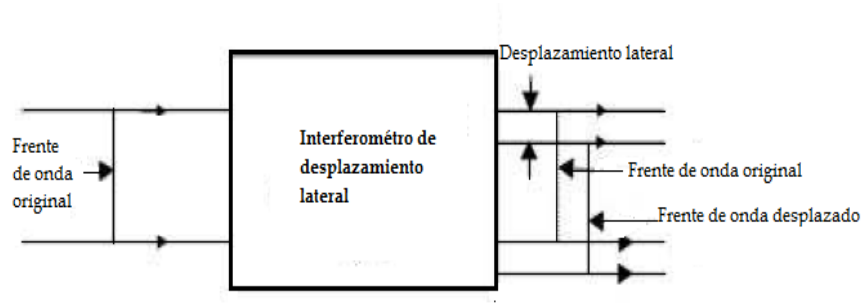


Figura 2.2: Esquema del método de Interferometría de Desplazamiento Lateral (LSI).

descripción del campo de entrada es como en el caso descrito en la Ec. (2.2). Las versiones desplazadas de este campo, uno a la derecha y otro a la izquierda como se ilustra a la salida del arreglo experimental, mostrado en la Fig.(2.2), son:

$$\begin{aligned} E_t(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t) &= A_t(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)e^{i[\phi_t(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)]}, \\ E_t(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t) &= A_t(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)e^{i[\phi_t(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)]}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ahora, como se explicó en la sección anterior, la superposición de estos dos campos genera un patrón de interferencia resultante que puede ser calculado como:

$$I(x, y, t) = \|E_t(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, t) + E_t(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, t)\|^2, \quad (2.23)$$

ó

$$I(x, y, t) = a(x, y) + b(x, y)\cos[\Delta\phi(x, y) + \alpha(t)], \quad (2.24)$$

donde

$$\begin{aligned}
 a(x, y) &= A_t^2(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) + A_t^2(x - \frac{1}{2}\Delta x, y), \\
 b(x, y) &= 2A_t(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)A_t(x - \frac{1}{2}\Delta x, y), \\
 \Delta\phi(x, y) &= \phi_t(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) - \phi_t(x + \frac{1}{2}\Delta x, y),
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

y  $\alpha(t)$  es un corrimiento introducido por alguna de las técnicas antes mencionadas.

En este trabajo de la Ec. (2.25) se puede conocer  $\Delta\phi(x, y)$ , para posteriormente poder calcular  $\phi(x, y)$  con el modelo propuesto en secciones posteriores. Debido a que el problema de la presente es conocer  $\phi(x, y)$  a partir de conocido  $\Delta\phi(x, y)$ , es conveniente atacar el problema en una dimensión, como se desarrolla en líneas subsiguientes.

### 2.5.1. Arreglo basado en el interferómetro de Michelson

En 1959 Kelsal [39] propuso colocar espejos con ángulos rectos para obtener desplazamiento lateral, Fig.(2.3). Por simplicidad, se asume que los espejos son idénticos en tamaño, forma y material. Cuando los espejos se encuentran bien alineados de tal forma que sus imágenes virtuales se superpongan el interferómetro tiene el funcionamiento tradicional y no existe desplazamiento entre los haces. Para introducir el LSI uno de los espejos debe ser trasladado lateralmente una pequeña distancia, entonces el frente de onda sufre un desplazamiento lateral igual al doble del desplazamiento del espejo.

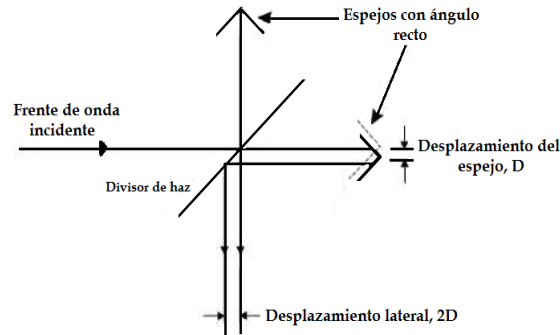


Figura 2.3: Esquema de un LSI de Kelsal basado en un interferómetro Michelson.

### 2.5.2. Arreglo basado en el interferómetro de Jamin

En 1964 Murty [40] introduce un interferómetro de desplazamiento lateral basado en una modificación de un interferómetro Jamin. Un interferómetro Jamín tradicional consta de dos placas plano-paralelas idénticas y de alta calidad que en una sección tienen la función de divisor de haz y en otra mitad funcionan como espejo. Si están colocados de manera paralela los haces son superpuestos en la salida del interferómetro. En la propuesta de Murty la lente bajo prueba actúa como colimador e imprime sus aberraciones en el haz que entra en el interferómetro, para introducir el desplazamiento lateral una de las placas plano-paralelas es rotada sobre el eje óptico del haz incidente, tal como lo muestra la Fig.(2.4).

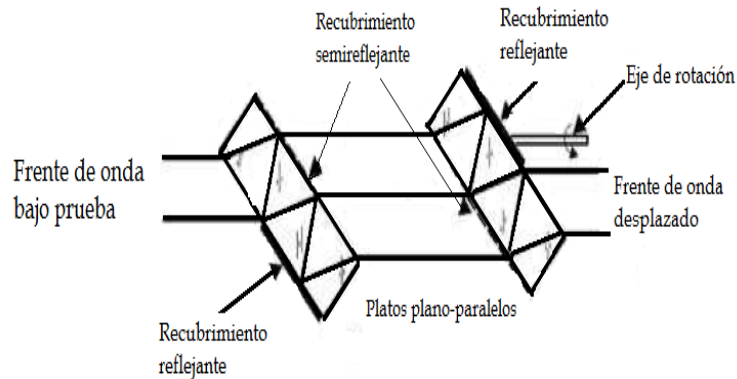


Figura 2.4: Esquema de un LSI propuesto por Murty basado en un interferómetro Jamin.

### 2.5.3. Arreglo basado en el interferómetro Mach-Zehnder

Otro interferómetro que puede ser fácilmente modificado para ser usado en LSI con luz colimada es el interferómetro Mach-Zehnder [41]. En el esquema tradicional, el interferómetro Mach-Zehnder consta de un divisor de haz que separa los dos haces de luz, de dos espejos planos paralelos y un segundo divisor de haz que superpone los dos campos ópticos. Una forma básica para generar desplazamiento lateral entre ambos haces es colocar dos placas plano paralelas de igual grosor y material en el camino óptico de los haces tal como lo muestra la Fig.(2.5).

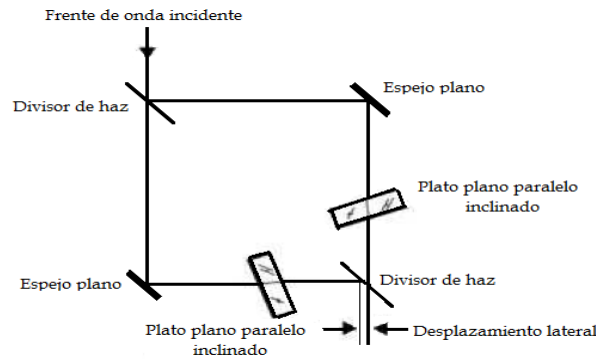


Figura 2.5: Esquema de un LSI a partir de un interferómetro Mach-Zhender.

### 2.5.4. Arreglo basado en difracción

Vasco Ronchi en 1923 fue el primero en proponer un tipo de LSI basado en el fenómeno de la difracción de una rejilla binaria. Considerando un haz que converge en un punto sobre el plano de la rejilla en dirección normal a las líneas de una rejilla de difracción con un periodo  $d$ . Por la conocida fórmula de difracción de una rejilla, se predice la dirección  $\theta$  de un rayo perteneciente al primer armónico del haz, también conocido como el ángulo de difracción  $\sin \theta = \lambda/d$ . Con una correcta elección del periodo  $d$ , los órdenes de difracción cero y primero son superpuestos creando el LSI, ver Fig.(2.6).

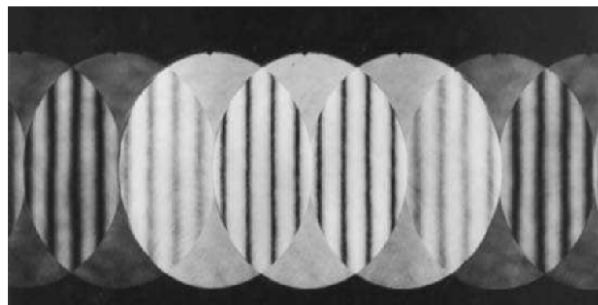


Figura 2.6: Vista de un interferograma obtenido con LSI de difracción.

### 2.5.5. Arreglo basado en polarización

Existe una gran variedad de LSI basados en polarización. Al aprovechar las propiedades de los materiales birrefringentes, quienes por su propia naturaleza, dan lugar a dos haces ortogonalmente polarizados cuando un haz no polarizado incide sobre ellos. Existen muchos tipos de prismas polarizantes que generan dos haces ortogonalmente polarizados de un haz plano polarizado incidente. El prisma Wollaston es el más popular usado en LSI. Tanto

Murty y Shukla en 1980 [42] como Komissaruk y Mende en 1981 [43] describen ejemplos de éste tipo de interferómetros usando una cuña de cristal líquido como elemento polarizador.

### 2.5.6. Arreglos basados en un interferómetro cíclico

Un interferómetro cíclico es referido como el diseño donde dos haces viajan en direcciones opuestas, encontrando exactamente los mismos componentes hasta que emergen para formar un patrón de interferencia. Un ejemplo que representa bien un interferómetro cíclico es el interferómetro de camino triangular. El interferómetro cíclico triangular ha sido discutido por varios autores [44, 45]. Es un tipo de interferómetro de dos brazos que usa un divisor de amplitud en el cual ambos haces atraviesan lo que es idealmente el mismo camino cerrado, pero en direcciones opuestas, para después ser recombinadas. Ésto minimiza requerimientos como la longitud de coherencia de la fuente y la estabilidad angular del haz iluminador. Los interferómetros de éste tipo son relativamente fácil de armar y ajustar porque el número de grados de libertad están restringidos. La Fig.(2.7) muestra un diseño típico usado para obtener desplazamiento lateral en luz colimada con el mínimo de errores sistemáticos. En éste arreglo se tiene dos formas de generar el desplazamiento lateral. El primero es introducir un bloque transparente en el camino óptico y rotarlo. En el segundo, el haz será desplazado lateralmente cuando uno de los espejos planos sea trasladado a lo largo de la dirección del haz. Existen diversas configuraciones del interferómetro de camino cíclico. Es necesario hacer notar que el número de reflexiones en un interferómetro cíclico puede variar, sin embargo se prefiere un número par de reflexiones dentro del circuito para prevenir una inversión lateral con respecto al otro haz.

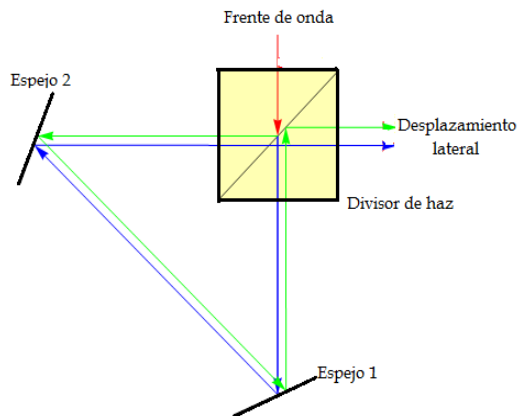


Figura 2.7: Diagrama de un interferómetro cíclico triangular.

## 2.6. Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función  $f$  de números reales o complejos que es infinitamente diferenciable en un entorno de números reales o complejos  $w$ , es la serie de potencias:

$$f(x) = f(w) + \frac{1}{1!}f'(w)(x-w) + \frac{1}{2!}f''(w)(x-w)^2 + \frac{1}{3!}f'''(w)(x-w)^3 + \dots, \quad (2.26)$$

que puede ser escrita de una manera más compacta como

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(w)}{m!} (x-w)^m, \quad (2.27)$$

donde  $m!$  es el factorial de  $m$  y  $f^{(m)}(w)$  denota la  $m$ -ésima derivada de  $f$  en el punto  $w$ ; la derivada cero de  $f$  es definida como la propia  $f$  y  $(x-w)^0$  y  $0!$  son ambos definidos como 1.

Reescribiendo la Ec. (2.27) y sustituyendo  $x = (x + \Delta x)$  y  $w = x$

$$f(x + \Delta x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \Delta x^m. \quad (2.28)$$

Truncando la serie de la Ec. (2.28) a un número finito de términos  $M$ , se puede aproximar  $f(x + \Delta x)$  de la forma

$$f(x + \Delta x) \simeq \sum_{m=0}^M \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \Delta x^m, \quad (2.29)$$

donde debido a que en la práctica  $\Delta x$  es pequeño comparado con  $x$ , basta tomar un  $M$  pequeño para tener una buena aproximación.

## 2.7. Ecuaciones Diferenciales

### 2.7.1. La Ecuación Lineal General

La ecuación diferencial lineal general de orden  $n$  puede ser escrita como

$$p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = R(x). \quad (2.30)$$

Las funciones  $R(x)$  y  $p_i(x)$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$ , son independientes de la variable  $y$ . Si  $R(x)$  es idénticamente igual a cero, la Ec. (2.30) se llama *homogénea*; si

$R(x)$  no es idénticamente cero, la Ec. (2.30) se llama *no homogénea*. Cuando una relación  $y = f(x)$  es una solución de una ecuación diferencial lineal, también llamaremos a  $f(x)$  una solución de la ecuación diferencial. Primero probaremos que si  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones de la ecuación homogénea

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad (2.31)$$

y si  $c_1$  y  $c_2$  son constantes, entonces  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  es una solución de la Ec. (2.31). El enunciado de que  $y_1$  y  $y_2$  son soluciones (2.31) quiere decir que

$$p_0(x)y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0, \quad (2.32)$$

y

$$p_0(x)y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0, \quad (2.33)$$

Ahora multiplicando cada miembro de (2.32) por  $c_1$ , cada miembro de (2.33) por  $c_2$ , y sumando los resultados.

$$p_0[c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)}] + p_1[c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)}] + \dots + p_{n-1}[c_1y_1' + c_2y_2'] + p_n[c_1y_1 + c_2y_2] = 0. \quad (2.34)$$

En vista de que  $c_1y_1' + c_2y_2' = (c_1y_1 + c_2y_2)'$ , etc., la Ec. (2.34) es ni más ni menos que el enunciado de que  $c_1y_1 + c_2y_2$  es una solución de la Ec. (2.31). Para una ecuación lineal homogénea una solución multiplicada por cualquier constante es también una solución. En forma similar, o por iteración del resultado anterior, se puede ver que si  $y_i; i = 1, 2, \dots, k$ , son soluciones de la Ec. (2.31), y si  $c_i; i = 1, 2, \dots, k$ , son constantes, entonces  $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k$  es una solución de la Ec. (2.31).

### 2.7.2. Independencia Lineal

Dadas las funciones  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ , si existen constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  no todas cero, tales que

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0, \quad (2.35)$$

idénticamente en algún intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$ , entonces, las funciones  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  se llaman *linealmente dependientes*. Si tal ecuación no existe, las funciones son llamadas *linealmente independientes* cuando la Ec. (2.35) implica que  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Si las funciones de un conjunto son linealmente dependientes, entonces al menos una de ellas es una combinación lineal de las otras; si ellas son linealmente independientes, ninguna es una combinación lineal de las otras.

### 2.7.3. El Wronskiano

Supongase que cada una de las funciones  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  es diferenciable al menos  $(n - 1)$  veces en el intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Entonces de la ecuación

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0, \quad (2.36)$$

por diferenciación sucesiva se sigue que

$$\begin{aligned} c_1 f_1' + c_2 f_2' + \dots + c_n f_n' &= 0, \\ c_1 f_1'' + c_2 f_2'' + \dots + c_n f_n'' &= 0, \\ \dots & \\ c_1 f_1^{(n-1)} + c_2 f_2^{(n-1)} + \dots + c_n f_n^{(n-1)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Considerando como un sistema de ecuaciones en  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , las  $n$  ecuaciones lineales anteriores no tendrán solución, excepto aquella que tenga todas las  $c_i$  iguales a cero, el determinante del sistema no es nulo. Esto es, si

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \dots & f_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.38)$$

entonces las ecuaciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  son linealmente independientes. El determinante en (2.38) se llama **wronskiano** de las  $n$  funciones involucradas. La no anulación del wronskiano es una condición suficiente para que las funciones sean linealmente independientes.

### 2.7.4. Solución General de una Ecuación Homogénea

Sean  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (2.39)$$

Entonces, la solución general de la Ec. (2.39) es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (2.40)$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias. Hasta cierto punto, cada solución particular de la ecuación diferencial lineal (2.39) es un caso especial, según se escojan las constantes  $c_i$ , de la solución general de (2.40). Las ideas

## CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.7. ECUACIONES DIFERENCIALES

---

básicas para la demostración de este importante resultado se muestra a continuación. Considerando la ecuación

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \quad (2.41)$$

Sea la relación

$$y = f(x), \quad (2.42)$$

cualquier solución particular de la Ec. (2.41), siendo válida la solución en algún intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$  en el cual  $p_0(x)$  no es nulo, y en el cual las funciones  $p_1/p_0$  y  $p_2/p_0$  poseen derivadas de todos los órdenes. Suponemos que en  $x = \tau$ , dentro del intervalo estipulado,  $f(x)$  se comporta suficientemente bien para garantizar que la serie de Taylor para  $f(x)$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\tau)(x - \tau)^k}{k!}, \quad (2.43)$$

converge a  $f(x)$  en algún intervalo alrededor de  $x = \tau$ . Entonces la solución de  $f(x)$  se determina completamente mediante el conocimiento de  $f(\tau)$  y  $f'(\tau)$  tomados en algún punto  $\tau$  dentro del intervalo. Como podemos dividir entre  $p_0(x)$ , la Ec. (2.41) produce  $y''$  en términos de  $y$  y  $y'$ , y los coeficientes conocidos en la ecuación. Entonces,  $y''(\tau) = f''(\tau)$  pueden ser determinados. La diferenciación sucesiva de la ecuación  $y''$  producirá derivadas de mayor orden. Así,  $f^{(k)}(\tau)$  puede ser calculado para  $k = 2, 3, \dots$ , de los valores que  $f(\tau)$  y  $f'(\tau)$ . Por lo tanto, usando la serie de Taylor (2.43), vemos que  $f(x)$  está determinada por la ecuación diferencial y los dos valores  $f(\tau)$  y  $f'(\tau)$ . Sean ahora  $y_1(x)$ , y  $y_2(x)$  dos soluciones linealmente independientes cualesquiera de la Ec. (2.32). Nuevamente sea  $\tau$  escogido como algún punto en el intervalo  $x_1 \leq \tau \leq x_2$ , donde el wronskiano de  $y_1$  y  $y_2$  no es nulo.

$$\begin{vmatrix} y_1(\tau) & y_2(\tau) \\ y_1'(\tau) & y_2'(\tau) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.44)$$

Considerando la solución

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (2.45)$$

de la cual

$$y' = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x). \quad (2.46)$$

Se desea escoger  $c_1$  y  $c_2$  de tal modo que la  $y$  de la Ec. (2.45) pase a ser la solución  $f(x)$ . Pero, se puede forzar que la  $y$  sea tal que  $y(\tau) = f(\tau)$  y  $y'(\tau) = f'(\tau)$ . Esto es

$$c_1 y_1(\tau) + c_2 y_2(\tau) = f(\tau), c_1 y_1'(\tau) + c_2 y_2'(\tau) = f'(\tau), \quad (2.47)$$

pueden resolverse para  $c_1$  y  $c_2$  debido a la desigualdad (2.44) la no anulación del wronskiano. Entonces,  $f(x)$  y  $y(x)$  tienen la misma serie de Taylor (2.43), así ellas son idénticas.

### 2.7.5. Solución General de una Ecuación No Homogénea

Sea  $y_p$  cualquier solución particular (no necesariamente conteniendo constantes arbitrarias) de la ecuación

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = R(x), \quad (2.48)$$

y sea  $y_c$  una solución de la ecuación homogénea correspondiente

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \quad (2.49)$$

Entonces

$$y = y_c + y_p, \quad (2.50)$$

es una solución de la Ec. (2.48). Usando la  $y$  de la Ec. (2.50) se ve que

$$\begin{aligned} p_0 y^{(n)} + \dots + p_n y &= (p_0 y_c^{(n)} + \dots + p_n y_c) + (p_0 y_p^{(n)} + \dots + p_n y_p) \\ &= 0 + R(x) = R(x). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones linealmente independientes de la Ec. (2.49), entonces

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (2.52)$$

en la cual las  $c_i$  son constantes arbitrarias, es la solución general de la Ec. (2.49). El miembro del lado derecho de la Ec. (2.52) se llama la *función complementaria* de la Ec. (2.48). La solución general de la ecuación no homogénea (2.48) es la suma de la función complementaria y cualquier solución particular.

**CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS**  
**2.7. ECUACIONES DIFERENCIALES**

---

# Capítulo 3

## Modelo matematico

### 3.1. Ecuación diferencial de $M$ -ésimo orden

Manipulando la serie de Taylor truncada para  $M$  términos Ec. (2.29) se puede aproximar la función medida  $g(x)$  de la forma

$$g(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \sum_{m=1}^M a_{1,m} f^{(m)}(x), \quad (3.1)$$

donde los coeficientes son conocidos de la serie de Taylor y estan dados de la forma

$$a_{1,m} = \frac{\Delta x^{m-1}}{m!} \quad (3.2)$$

para  $m = 1, \dots, M$ . Debido a que en el presente trabajo se parte de suponer conocido el incremento  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  y bajo la aproximación establecida en la Ec. (3.1) se plantea recuperar  $f(x)$  para diferentes valores de  $M$  con la intención de obtener la mejor aproximación posible, teniendo en mente que  $\Delta x$  es pequeño comparado con  $x$ , por lo cual se analizan por separado los casos para  $M = 1, 2$  y  $3$ , y finalmente se dá una descripción generalizada.

#### 3.1.1. Para el caso $M = 1$

Se tiene para el caso trivial

$$g(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a_{1,1} f'(x), \quad (3.3)$$

el cual se puede resolver integrando ambos lados

$$\int g(x)dx = \int a_{1,1}f'(x)dx, \quad (3.4)$$

y realizando las operaciones, de manera simbólica se puede describir

$$a_{1,1}f(x) = C_0 + G_1(x), \quad (3.5)$$

donde  $f(x)$  es lo buscado,  $C_0$  es una constante de integración y  $G_1(x)$  está dada por

$$G_1(x) = \int g(x)dx. \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Para el caso $M = 2$

Ahora se tiene

$$g(x) = a_{1,1}f'(x) + a_{1,2}f''(x), \quad (3.7)$$

una vez más, integrando ambos lados de la ecuación

$$\int g(x)dx = a_{1,1} \int f'(x)dx + a_{1,2} \int f''(x)dx. \quad (3.8)$$

Renombrando el lado izquierdo de la Ec. (3.8) y juntando todas las constantes de integración en una sola  $C_0$

$$G_1(x) + C_0 = a_{1,1}f(x) + a_{1,2}f'(x), \quad (3.9)$$

la Ec. (3.9) es una ecuación diferencial no homogénea, para la cual la solución general es la suma de la solución complementaria y la solución particular. Multiplicando ambos lados de la Ec. (3.9) por una exponencial de la forma  $e^{s_2x}$  se tiene

$$e^{s_2x}G_1(x) + e^{s_2x}C_0 = a_{1,1}e^{s_2x}f(x) + a_{1,2}e^{s_2x}f'(x). \quad (3.10)$$

Proponiendo que el lado derecho de la Ec. (3.10) sea igual a una derivada de funciones de la forma

$$a_{1,1}e^{s_2x}f(x) + a_{1,2}e^{s_2x}f'(x) = \left(a_{2,1}e^{s_2x}f(x)\right)', \quad (3.11)$$

donde  $a_{2,1}$  es una constante por definir, desarrollando el lado derecho de la Ec. (3.11) se tiene

$$a_{2,1}s_2e^{s_2x}f(x) + a_{2,1}e^{s_2x}f'(x) = a_{1,1}e^{s_2x}f(x) + a_{1,2}e^{s_2x}f'(x), \quad (3.12)$$

**CAPÍTULO 3 MODELO MATEMATICO**  
**3.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE  $M$ -ÉSIMO ORDEN**

---

comparando término a término se debe cumplir

$$\begin{aligned} a_{2,1}s_2 &= a_{1,1}; \\ a_{2,1} &= a_{1,2}, \end{aligned}$$

lo cual implica,

$$a_{1,2}s_2 = a_{1,1}. \quad (3.13)$$

Tomando el lado izquierdo de la Ec. (3.10) e igualando al lado derecho de la Ec. (3.11)

$$e^{s_2x}G_1(x) + e^{s_2x}C_0 = (a_{1,2}e^{s_2x}f(x))'. \quad (3.14)$$

La Ec. (3.14) es una ecuación diferencial no homogénea para la cual se busca la solución particular y complementaria.

Para la solución particular se integran ambos lados de la ecuación (3.14)

$$\int (e^{s_2x}G_1(x) + e^{s_2x}C_0)dx = \int [(a_{1,2}e^{s_2x}f_p(x))']dx, \quad (3.15)$$

y se tiene

$$C_1 + \int e^{s_2x}G_1(x)dx + C_0 \int e^{s_2x}dx = a_{1,2}e^{s_2x}f_p(x), \quad (3.16)$$

donde  $C_1$  es una nueva constante de integración. Despejando  $f_p$  y realizando la integral en (3.16)

$$a_{1,2}f_p(x) = G_2(x) + C_0 + C_1e^{-s_2x}, \quad (3.17)$$

donde

$$G_2(x) = e^{-s_2x} \int e^{s_2x}G_1(x)dx, \quad (3.18)$$

se obtiene la solución particular

$$a_{1,2}f_p(x) = G_2(x) + C_0 + C_1e^{-s_2x}. \quad (3.19)$$

Para la solución complementaria se iguala el lado izquierdo en (3.14) a cero y se calcula  $f_c(x)$

$$(a_{1,2}e^{s_2x}f_c(x))' = 0, \quad (3.20)$$

lo cual implica que

$$a_{1,2}e^{s_2x}f_c(x) = \gamma_1 = cte, \quad (3.21)$$

despejando  $f_c(x)$

$$a_{1,2}f_c(x) = \gamma_1 e^{-s_2 x}, \quad (3.22)$$

Finalmente sumando la solución particular  $f_p(x)$  y  $f_c(x)$  se obtiene la solución general a la Ec. (3.14)

$$a_{1,2}f(x) = a_{1,2}(f_p(x) + f_c(x)) = G_2(x) + C_0 + C_1 e^{-s_2 x} + \gamma_1 e^{-s_2 x}, \quad (3.23)$$

suponiendo que  $C_1 = -\gamma_1$  lo que implica

$$a_{1,2}f(x) = C_0 + G_2(x). \quad (3.24)$$

### 3.1.3. Para el caso $M = 3$

La aproximación considerada es

$$g(x) = a_{1,1}f'(x) + a_{1,2}f''(x) + a_{1,3}f'''(x). \quad (3.25)$$

Integrando ambos lados de la ecuación (3.25)

$$\int g(x)dx = a_{1,1} \int f'(x)dx + a_{1,2} \int f''(x)dx + a_{1,3} \int f'''(x)dx, \quad (3.26)$$

renombrando el lado izquierdo y juntando todas las constantes de integración en una sola  $C_0$

$$G_1(x) + C_0 = a_{1,1}f(x) + a_{1,2}f'(x) + a_{1,3}f''(x), \quad (3.27)$$

la ecuación (3.27) es una ecuación diferencial no homogénea, para la cual la solución general es la suma de la solución complementaria y la solución particular.

Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.27) por una exponencial de la forma  $e^{s_2 x}$  se tiene

$$e^{s_2 x}G_1(x) + e^{s_2 x}C_0 = a_{1,1}e^{s_2 x}f(x) + a_{1,2}e^{s_2 x}f'(x) + a_{1,3}e^{s_2 x}f''(x). \quad (3.28)$$

Proponiendo que el lado derecho de la ecuación (3.28) sea igual a una derivada de funciones de la forma

$$\begin{aligned} & a_{1,1}e^{s_2 x}f(x) + a_{1,2}e^{s_2 x}f'(x) + a_{1,3}e^{s_2 x}f''(x) \\ &= \left( a_{2,1}e^{s_2 x}f(x) + a_{2,2}e^{s_2 x}f'(x) \right)', \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde  $a_{2,1}$  y  $a_{2,2}$  son constantes por definir, desarrollando el lado derecho de la Ec. (3.29) se tiene

$$\begin{aligned} \left( a_{2,1}e^{s_2 x}f(x) + a_{2,2}e^{s_2 x}f'(x) \right)' &= a_{2,1}s_2 e^{s_2 x}f(x) + a_{2,1}e^{s_2 x}f'(x) \\ &+ a_{2,2}s_2 e^{s_2 x}f'(x) + a_{2,2}e^{s_2 x}f''(x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

**CAPÍTULO 3 MODELO MATEMATICO**  
**3.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE  $M$ -ÉSIMO ORDEN**

---

Factorizando (3.30) e igualando al lado izquierdo de (3.29)

$$a_{2,1}s_2f(x) + (a_{2,1} + a_{2,2})f'(x) + a_{2,2}s_2f''(x) = a_{1,1}f(x) + a_{1,2}f'(x) + a_{1,3}f''(x), \quad (3.31)$$

para satisfacer la igualdad se debe cumplir

$$\begin{aligned} a_{2,1}s_2 &= a_{1,1}, \\ a_{2,1} + a_{2,2}s_2 &= a_{1,2}, \\ a_{2,2} &= a_{1,3}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Manipulando la Ec.(3.32) y teniendo en mente que son conocidos  $a_{1,1}$ ,  $a_{1,2}$  y  $a_{1,3}$  se obtiene una ecuación generatriz para  $s_2$

$$a_{1,1} - a_{1,2}s_2 + a_{1,3}s_2^2 = 0, \quad (3.33)$$

de donde se puede conocer  $s_2$ .

Tomando el lado izquierdo de (3.28) e igualando al lado derecho de (3.29)

$$e^{s_2x}G_1(x) + e^{s_2x}C_0 = \left( a_{2,1}e^{s_2x}f(x) + a_{2,2}e^{s_2x}f'(x) \right)', \quad (3.34)$$

para la solución particular se integran ambos lados de la Ec. (3.34)

$$\int (e^{s_2x}G_1(x) + e^{s_2x}C_0)dx = \int \left[ \left( a_{2,1}e^{s_2x}f_p(x) + a_{2,2}e^{s_2x}f'_p(x) \right)' \right] dx. \quad (3.35)$$

y se tiene

$$\frac{1}{s_2}C_0 + G_2(x) + e^{-s_2x}C_1 = a_{2,1}f_p(x) + a_{2,2}f'_p(x), \quad (3.36)$$

donde

$$G_2(x) = e^{-s_2x} \int e^{s_2x}G_1(x)dx, \quad (3.37)$$

y  $C_1$  es una constante de integración.

Para la ecuación diferencial homogénea

$$\left[ a_{2,1}e^{s_2x}f_c(x) + a_{2,2}e^{s_2x}f'_c(x) \right]' = 0, \quad (3.38)$$

se tiene que la solución

$$a_{2,1}e^{s_2x}f_c(x) + a_{2,2}e^{s_2x}f'_c(x) = \gamma_1 = cte, \quad (3.39)$$

organizando la ecuación (3.39)

$$a_{2,1}f_c(x) + a_{2,2}f'_c(x) = \gamma_1 e^{-s_2x}. \quad (3.40)$$

**CAPÍTULO 3 MODELO MATEMATICO**  
**3.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE M-ÉSIMO ORDEN**

---

Una vez obtenidas las soluciones particular y homogénea se obtiene la solución general

$$\frac{1}{s_2}C_0 + G_2(x) + C_1 e^{-s_2 x} + \gamma_1 e^{-s_2 x} = a_{2,1}f(x) + a_{2,2}f'(x). \quad (3.41)$$

Suponiendo que  $\gamma_1 = -C_1$

$$a_{2,1}f(x) + a_{2,2}f'(x) = C_0 + G_2(x). \quad (3.42)$$

Multiplicando ambos lados de la Ec. (3.42) por  $e^{s_3 x}$  donde  $s_3$  es una constante

$$e^{s_3 x}C_0 + e^{s_3 x}G_2(x) = a_{2,1}e^{s_3 x}f(x) + a_{2,2}e^{s_3 x}f'(x). \quad (3.43)$$

Haciendo algo similar a los pasos anteriores, tomando el lado derecho e igualando a una derivada

$$a_{2,1}e^{s_3 x}f(x) + a_{2,2}e^{s_3 x}f'(x) = [a_{3,1}e^{s_3 x}f(x)]', \quad (3.44)$$

de donde

$$a_{3,1}s_3 e^{s_3 x}f(x) + a_{3,1}e^{s_3 x}f'(x) = a_{2,1}e^{s_3 x}f(x) + a_{2,2}e^{s_3 x}f'(x), \quad (3.45)$$

para satisfacer la igualdad se debe cumplir

$$\begin{aligned} a_{3,1}s_3 &= a_{2,1}, \\ a_{3,1} &= a_{2,2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde  $a_{2,1}$  y  $a_{2,2}$  son conocidos de la Ec.(3.32), manipulando la Ec. (3.46) podemos conocer  $s_3$ . Adicionalmente sustituyendo la Ec. (3.46) en la Ec. (3.32) se puede llegar a

$$a_{1,3}s_3s_2 = a_{1,1} \quad (3.47)$$

Integrando ambos lados de la ecuación (3.43)

$$C_2 + C_0 \int e^{s_3 x} dx + \int e^{s_3 x} G_2(x) dx = a_{3,1} e^{s_3 x} f(x), \quad (3.48)$$

donde  $C_2$  es una constante de integración, despejando  $f(x)$  y realizando las integrales se tiene

$$a_{3,1}f(x) = e^{-s_3 x}C_2 + G_3(x) + \frac{1}{s_2}C_0 \quad (3.49)$$

donde

$$G_3(x) = e^{-s_3 x} \int e^{s_3 x} G_2(x) dx \quad (3.50)$$

Una solución particular es

$$a_{3,1}f_p(x) = C_2e^{-s_3x} + \frac{C_0}{s_3} + G_3(x). \quad (3.51)$$

Para el caso homogéneo una solución complementaria es

$$a_{3,1}e^{s_3x}f_c(x) = \gamma_2 = cte, \quad (3.52)$$

despejando  $f_c(x)$

$$a_{3,1}f_c(x) = \gamma_2e^{-s_3x}. \quad (3.53)$$

Por lo tanto se tiene la solución general

$$a_{3,1}[f_p(x) + f_c(x)] = C_2e^{-s_3x} + \frac{C_0}{s_3} + G_3(x) + \gamma_2e^{-s_3x}, \quad (3.54)$$

finalmente suponiendo  $C_2 = -\gamma_2$  y  $C_0 = \frac{C_0}{s_3}$

$$a_{3,1}f(x) = C_0 + G_3(x). \quad (3.55)$$

### 3.1.4. Para el caso general

Inspeccionando a los casos estudiados anteriormente para el caso  $M = 1$  dado en la Ec. (3.5), caso  $M = 2$  dado en la Ec. (3.24) y caso  $M = 3$  dado en la Ec. (3.55), de los cuales se tiene la misma estructura, por lo que se puede generalizar la solución de la ecuación diferencial de orden  $M$  para  $f(x)$  de la forma siguiente

$$a_{1,M}f(x) = C_0 + G_M(x) \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{aligned} G_M(x) &= e^{-s_Mx} \int e^{s_Mx} G_{M-1}(x) dx, \\ G_{M-1}(x) &= e^{-s_{M-1}x} \int e^{s_{M-1}x} G_{M-2}(x) dx, \\ &\vdots \\ G_k(x) &= e^{-s_kx} \int e^{s_kx} G_{k-1}(x) dx, \\ G_{k-1}(x) &= e^{-s_{k-1}x} \int e^{s_{k-1}x} G_{k-2}(x) dx, \\ &\vdots \\ G_2(x) &= e^{-s_2x} \int e^{s_2x} G_1(x) dx, \\ G_1(x) &= e^{-s_1x} \int e^{s_1x} G_0(x) dx, \end{aligned} \quad (3.57)$$

## CAPÍTULO 3 MODELO MATEMATICO

### 3.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE $M$ -ÉSIMO ORDEN

---

donde  $s_1 = 0$  y  $G_0(x) = g(x)$ , pero  $g(x)$  es lo que se consiera ya conocido por lo que  $G_M(x)$  se puede expresar en terminos de  $g(x)$  aplicando de manera regresiva la Ec. (3.56).

De la misma manera, se puede generalizar la ecuación generatriz para conocer  $s_k$  de la forma

$$\sum_{m=1}^{M-k+2} (-1)^{m+1} a_{k-1,m} s_k^{m-1} = 0, \quad (3.58)$$

la cual sirve para conocer  $s_k$  y de manera similar es posible conocer  $s_{k-1}$

$$\sum_{m=1}^{M-k+3} (-1)^{m+1} a_{k-2,m} s_{k-1}^{m-1} = 0, \quad (3.59)$$

con  $k = 2, \dots, M$ , y  $a_{k-1,m}$  son los coeficientes de la Ec. (3.58) los cuales se pueden calcular con los coeficientes anteriores  $a_{k-2,m}$  de la Ec.(3.59) y las raices de la ecuación generatriz  $s_{k-1}$

$$a_{k-1,m} = \begin{cases} a_{k-2,m+1} & \text{cuando } m = M - k + 2, \\ a_{k-2,m+1} - a_{k-1,m+1} s_{k-1} & \text{cuando } m = M - k + 1, \dots, 1, \end{cases} \quad (3.60)$$

donde también se puede demostrar que se cumple

$$a_{1,M} s_2 s_3 \dots s_M = a_{1,1}, \quad (3.61)$$

debido a las condiciones dadas en la Ec.(3.60), se entiende que  $a_{k-1,m}$  se calcula de manera recursiva, de tal manera que se debe partir desde  $k = 2$ , donde en este caso los coeficientes son  $a_{1,m}$  son conocidos como se describió en la Ec. (3.2). Note que  $M$  debe ser mayor a 1, así para el caso trivial  $M = 1$  la solución se debe calcular como se describió en las ecuaciones dadas en el caso 1. Sin embargo, se puede probar fácilmente que para  $M = 2$  y  $M = 3$  los resultados dados en los casos mencionados son reproducidos fielmente usando las ecuaciones generales, de esta manera se ha mostrado una solución general para resolver una ecuación diferencial ordinaria de  $M$  -ésimo orden partiendo del supuesto conocido  $g(x)$ . En las secciones siguientes se mostrará como este resultado es de vital importancia para conocer la función de fase de un patrón de interferencia obtenido de un interferometro de desplazamiento lateral típico, con la posibilidad de calcular con la mejor aproximación que se desee, sin perder de vista las limitaciones de los recursos técnicos lo permitan, como son: la resolución en la camara CCD, las condiciones experimentales y los recursos computacionales, entre otros.

### 3.2. Recuperación de fase a partir de su incremento

La presente propuesta de recuperación de fase  $\phi(x; y)$ , a partir de conocer el incremento de la función de fase  $\Delta\phi(x; y)$  y del desplazamiento  $\Delta x$ , se puede definir  $g(x; y)$  de la forma

$$g(x; y) = \frac{\Delta\phi(x; y)}{\Delta x}, \quad (3.62)$$

debido a que el problema de la presente es encontrar  $\phi(x; y)$ , se puede atacar el problema aplicando el modelo descrito anteriormente para una dimensión, el cual significa numéricamente, hacer el análisis línea por línea.

Manipulando la serie de Taylor truncada para  $M$  términos Ec. (2.29) se puede aproximar la función  $g(x; y)$  de la forma

$$g(x; y) = \sum_{m=1}^M \frac{\Delta x^{m-1}}{m!} \frac{\partial^m \phi(x; y)}{\partial x^m}, \quad (3.63)$$

debido a que se considera  $y$  constante en la Ec.(3.63), el problema se vuelve unidimensional, el cual es solucionar una ecuación diferencial de  $M$ -ésimo orden similar al discutido en secciones anteriores para  $f(x)$ . Entoces la solución para  $\phi(x; y)$  sería obtenida de manera analoga a las Ecs. (3.56) y (3.57) es decir

$$a_{1,M}\phi(x; y) = C_0 + G_M(x; y) \quad (3.64)$$

donde

$$\begin{aligned} G_M(x; y) &= e^{-s_M x} \int e^{s_M x} G_{M-1}(x; y) dx, \\ G_{M-1}(x; y) &= e^{-s_{M-1} x} \int e^{s_{M-1} x} G_{M-2}(x; y) dx, \\ &\vdots \\ G_k(x; y) &= e^{-s_k x} \int e^{s_k x} G_{k-1}(x; y) dx, \\ G_{k-1}(x; y) &= e^{-s_{k-1} x} \int e^{s_{k-1} x} G_{k-2}(x; y) dx, \\ &\vdots \\ G_2(x; y) &= e^{-s_2 x} \int e^{s_2 x} G_1(x; y) dx, \\ G_1(x; y) &= e^{-s_1 x} \int e^{s_1 x} G_0(x; y) dx, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde  $s_1 = 0$  y  $G_0(x; y) = g(x; y)$ , la cual es la función que representa los datos medidos, así  $G_M(x; y)$  se puede expresar en términos de  $g(x; y)$  aplicando la Ec. (3.65) de manera regresiva en la Ec. (3.64).

## CAPÍTULO 3 MODELO MATEMATICO

### 3.2. RECUPERACIÓN DE FASE A PARTIR DE SU INCREMENTO

---

# Capítulo 4

## Simulación numérica

### 4.1. Modelo matemático computable

En el capítulo anterior se mostró la solución de una ecuación diferencial con coeficientes constantes de  $M$ -ésimo orden Ec. (3.56), la cual consiste simplemente de una constante de integración y de una función  $G_M(x)$ , sin embargo, como se mostró, esta función depende de  $G_{M-1}(x)$  mediada por una integral, y de la misma manera  $G_{M-1}(x)$  depende de  $G_{M-2}(x)$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $G_1(x)$ , tal como se describe en las Ecs.(3.57), esto mismo se puede ver si sustituimos sucesivamente (3.57) en (3.56)

$$a_{1,M}f(x) = C_0 + e^{-s_M x} \int dx e^{s_M x} e^{-s_{M-1} x} \int dx e^{s_{M-1} x} \dots \\ e^{-s_3 x} \int dx e^{s_3 x} e^{-s_2 x} \int dx e^{s_2 x} \int dx g(x), \quad (4.1)$$

de donde se puede observar que se tiene un problema de integrales concatenadas para calcular  $f(x)$ , consumiendo muchos recursos de computo, así como propagación de error. En particular para los casos antes mencionados en el capítulo anterior se puede comprobar la Ec. (4.1).

Para el caso  $M = 1$ , la Ec. (3.5) se puede extender de la forma

$$a_{1,1}f(x) = C_0 + \int dx g(x), \quad (4.2)$$

para el caso  $M = 2$ , la Ec. (3.24) se puede extender de la forma

$$a_{1,2}f(x) = C_0 + e^{-s_2 x} \int dx e^{s_2 x} \int dx g(x), \quad (4.3)$$

para el caso  $M = 3$ , la Ec. (3.55) se puede extender de la forma

$$a_{1,3}f(x) = C_0 + e^{-s_3 x} \int dx e^{s_3 x} e^{-s_2 x} \int dx e^{s_2 x} \int dx g(x). \quad (4.4)$$

Con la finalidad de expresar la Ec. (4.1) de manera desconcatenada, para implementar un algoritmo ágil computacionalmente, primero se muestra la siguiente propiedad

$$e^{-sx} \int u(x)e^{sx} dx = \frac{1}{s}u(x) - \frac{1}{s}e^{-sx} \int u'(x)e^{sx} dx. \quad (4.5)$$

Por otro lado se sabe

$$G_k(x) = e^{-s_k x} \int dx e^{s_k x} G_{k-1}(x), \quad (4.6)$$

para  $k \geq 2$ . Multiplicando la Ec.(4.6) por  $s_k$  y aplicando la propiedad de la Ec.(4.5) se tiene

$$s_k G_k(x) = G_{k-1}(x) - e^{-s_k x} \int dx e^{s_k x} G'_{k-1}(x), \quad (4.7)$$

donde se puede conocer  $G_{k-1}(x)$  de manera recursiva aplicando la Ec. (4.6) para  $k - 1$

$$G_{k-1}(x) = e^{-s_{k-1} x} \int dx e^{s_{k-1} x} G_{k-2}(x), \quad (4.8)$$

derivando la Ec(4.8) y de manera recursiva sabiendo  $G_{k-1}(x)$  se tiene

$$G'_{k-1}(x) = G_{k-2}(x) - s_{k-1} G_{k-1}(x). \quad (4.9)$$

Por lo tanto sustituyendo la Ec. (4.9) en la Ec. (4.7) se tiene

$$s_k G_k(x) = G_{k-1}(x) - e^{-s_k x} \int dx e^{s_k x} G_{k-2}(x) + s_{k-1} e^{-s_k x} \int dx e^{s_k x} G_{k-1}(x) \quad (4.10)$$

sustituyendo la Ec.(4.6) y agrupando, se tiene la siguiente propiedad

$$(s_k - s_{k-1})G_k(x) = G_{k-1}(x) - e^{-s_k x} \int dx e^{s_k x} G_{k-2}(x), \quad (4.11)$$

Aplicando la propiedad (4.11) de manera recursiva se tiene la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} (s_M - s_{M-1})G_M(x) &= G_{M-1}(x) - e^{-s_M x} \int dx e^{s_M x} G_{M-2}(x), \\ (s_{M-1} - s_{M-2})G_{M-1}(x) &= G_{M-2}(x) - e^{-s_{M-1} x} \int dx e^{s_{M-1} x} G_{M-3}(x), \\ &\vdots \\ (s_2 - s_1)G_2(x) &= G_1(x) - e^{-s_2 x} \int dx e^{s_2 x} G_0(x). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora sustituyendo de manera recursiva la propiedad de la Ec. (4.12) se puede obtener  $G_M(x)$  en terminos de  $g(x)$  que para el caso es conocido. Definiendo  $g_k(x)$  de la forma

$$g_k(x) = e^{-s_k x} \int dx e^{s_k x} g(x), \quad (4.13)$$

de donde se puede observar que  $g_1(x)$  coincide con  $G_1(x)$ , esto debido a que la estructura es de gran utilidad para analizar los siguientes casos: Para el caso  $M = 1$

$$a_{1,1}f(x) = C_0 + g_1(x). \quad (4.14)$$

Para el caso  $M = 2$ , y aplicando la propiedad de la Ec. (3.13)

$$a_{1,2}f(x) = C_0 + a_{1,2}g_1(x) - a_{1,2}g_2(x). \quad (4.15)$$

Para el caso  $M = 3$ , y aplicando la propiedad de la Ec. (3.47)

$$a_{1,3}f(x) = C_0 + a_{1,3}g_1(x) - \frac{1}{s_2(s_3 - s_2)}g_2(x) - \frac{1}{s_3(s_2 - s_3)}g_3(x). \quad (4.16)$$

Para el caso  $M = 4$ , y aplicando la propiedad de la Ec. (3.61)

$$\begin{aligned} a_{1,4}f(x) = & C_0 + a_{1,4}g_1(x) - \frac{1}{s_2(s_3 - s_2)(s_4 - s_2)}g_2(x) \\ & - \frac{1}{s_3(s_2 - s_3)(s_4 - s_3)}g_3(x) - \frac{1}{s_4(s_2 - s_4)(s_3 - s_4)}g_4(x). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Despues de varias manipulaciones algebraicas se puede deducir el caso general

$$\begin{aligned} a_{1,M}f(x) = & C_0 + a_{1,M}g_1(x) - \frac{1}{s_2(s_3 - s_2)\dots(s_M - s_2)}g_2(x) \\ & - \dots - \frac{1}{s_M(s_2 - s_M)\dots(a_{1,M}s_{M-1} - s_M)}g_M(x). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Del mismo modo la solución para  $\phi(x; y)$  por analogía puede ser expresada como

$$a_{1,M}\phi(x; y) = C_0 + a_{1,M}g_1(x; y) - \frac{1}{s_2(s_3 - s_2)\dots(s_M - s_2)}g_2(x; y) \quad (4.19)$$

$$- \dots - \frac{1}{s_M(s_2 - s_M)\dots(a_{1,M}s_{M-1} - s_M)}g_M(x; y), \quad (4.20)$$

donde  $g_k(x; y)$  es de la forma

$$g_k(x; y) = e^{-s_k x} \int dx e^{s_k x} g(x; y). \quad (4.21)$$

## 4.2. Solución numérica de ED de $M$ -ésimo orden

En este apartado se explica la implementación numérica de la solución de ecuaciones diferenciales de  $M$ -ésimo orden, el modelo matemático implementado es como el mostrado en la primera sección del presente capítulo, el cual consiste de una suma de  $M$  términos, donde cada término es una integral simple o desconcatenada con respecto a la solución de la misma ecuación diferencial que esta concatenada, implicando  $M$  integrales en serie, dada al final del capítulo 3. La Fig. (4.1) muestra el diagrama a bloques que se sigue en la implementación computacional, aunque cabe señalar que este algoritmo resuelve el caso de coeficientes constantes, la situación dada cuando son funciones esta fuera de los objetivos del presente trabajo de tesis.

En el diagrama de flujo, el primer paso es definir un desplazamiento  $\Delta x$

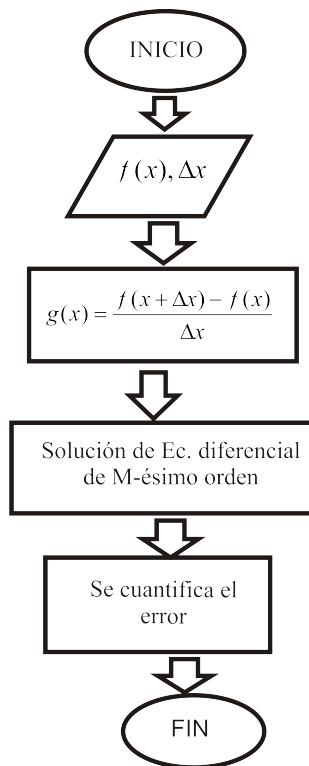


Figura 4.1: Diagrama de Flujo

dado de 0.5 y una función  $f(x)$  de la forma  $Exp[-x^2]$ , la Fig.(4.2a) muestra a ésta y a su versión desplazada  $f(x + \Delta x)$ , para posteriormente definir  $g(x)$  de acuerdo a la Ec.(3.1), mostrada en la Fig.(4.2b), que como se mencionó en líneas anteriores, representa los datos medidos en un experimento, ya que como se planteó el objetivo del presente trabajo se trata de calcular  $f(x)$

a partir de suponer conocido  $g(x)$ , debido a que se toman  $M$  términos de la serie de Taylor la solución obtenida es aproximada por lo que esta será nombrada como  $f_M(x)$ . La aplicación de éste algoritmo para los casos de  $M = 1 - 5$  son mostrados en la Fig. (4.3).

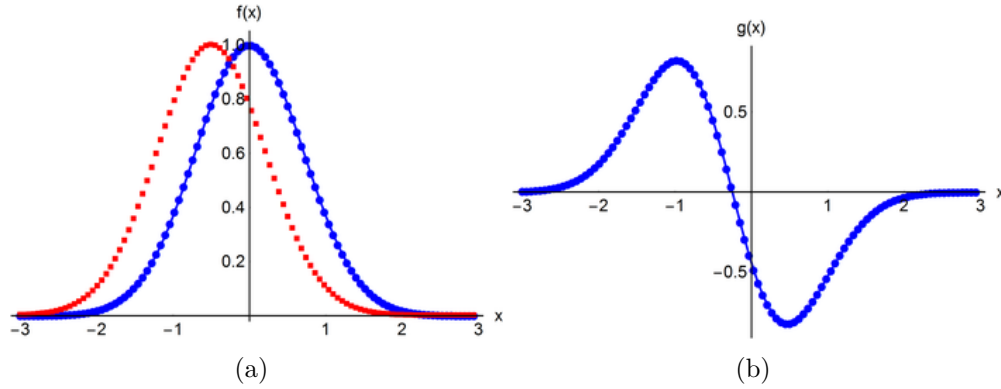


Figura 4.2: a)  $f(x)$  vs  $f(x + \Delta x)$ , b)  $g(x)$

En una situación práctica, típicamente se acostumbra tomar el primer término de la serie de Taylor, debido a quizá por ser el caso más simple para resolver el problema, sin embargo, como se puede observar de las gráficas, el mayor error en la aproximación sucede cuando  $M = 1$ , por lo que es recomendable considerar tomar el mayor número de términos posibles, la Fig.(4.11) muestra todas la aproximaciones obtenidas en una sola gráfica para una mejor visualización. Aunque cabe aclarar que debido a múltiples factores en una implementación numérica existe una cota superior para  $M$ , pero determinar los criterios de esta limitante estan fuera de los alcances del presente trabajo. Con la intención de cuantificar la aproximación de la función encontrada con respecto a la función ideal, se calculan las diferencias  $f(x) - f_M(x)$ , como mostradas en la Fig.(4.5), donde se puede ver que el error decrece conforme  $M$  aumenta, y para el caso  $M = 5$  la diferencia es casi inapreciable. Finalmente, una vez calculado el error para los diferentes casos se puede cuantificar la precisión y la exactitud del método propuesto mediante el cálculo de la desviación estandar y la varianza, respectivamente, como son mostrados en la Fig (4.12).

### 4.3. Algoritmo de reconstrucción de fase

El primer paso es definir una función  $\phi(x; y)$  de la forma

$$\phi(x; y) = 120 \text{Exp} \left[ \frac{-x^2 - y^2}{50} \right], \quad (4.22)$$

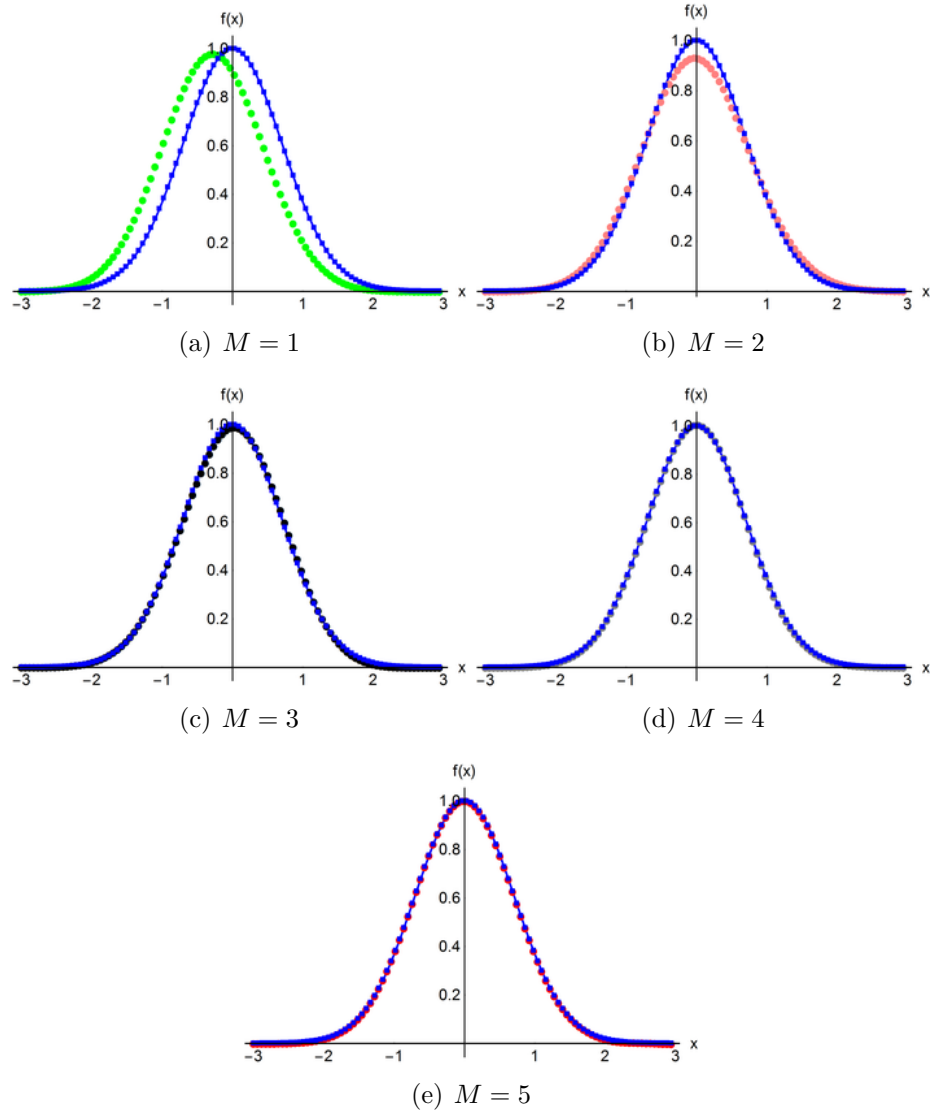


Figura 4.3: Aproximación de  $f_M(x)$  para diferentes valores de  $M = 1 - 5$  en la Ec. (4.18).

mostrada en la Fig.(4.7a), y por simplicidad una amplitud  $A(x; y) = 1$  mostrada en la Fig(4.7b) para poder definir el campo  $E_t(x; y)$  de acuerdo a la Ec.(2.2) mostrado en la Fig.(4.7), una vez obtenidas las versiones desplazadas del campo se pueden hacer interferir mediante corrimiento de fase, los patrones de interferencia para distintos corrimientos mostrados en la figura (4.8), usando un algoritmo convencional de extracción de fase de tres pasos se obtiene la función de fase envuelta mostrada en la Fig.(4.9). Aplicando un algoritmo conocido de desenvolvimiento de fase se puede obtener  $\Delta\phi(x; y)$  mostrado en la Fig.(4.10). Teniendo conocida la función de incremento de fase y el incremento  $\Delta x$  es posible definir  $g(x; y)$  de acuerdo a la Ec.(3.63),

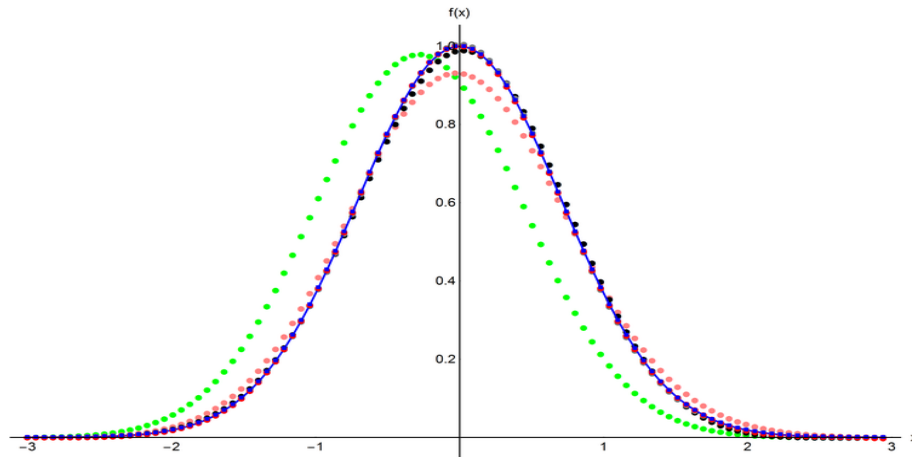


Figura 4.4: Comparación de  $f(x)$  para  $M = 1 - 5$

su graficado no se realiza debido a que solo es un reescalamiento de  $\Delta\phi(x; y)$ . Ya que el objetivo del presente trabajo se plantea calcular  $\phi(x; y)$  teniendo conocido  $g(x; y)$  debido a que se considera  $y$  constante en la Ec.(3.63), el problema se vuelve unidimensional, el cual es solucionar una ecuación diferencial de  $M$ -ésimo orden similar al discutido en secciones anteriores para  $f(x)$ . Debido a que se toman  $M$  términos de la serie de Taylor la solución obtenida es aproximada por lo que esta será nombrada como  $\phi_M(x; y)$ , la aplicación de éste algoritmo para los casos de  $M = 1 - 4$  son mostrados en la Fig. (4.11), de la cual se puede observar del lado izquierdo como es la comparación de la función aproximada  $\phi_M(x; y)$  con la función propuesta  $\phi(x; y)$  y del lado derecho se muestran los errores para las mismas funciones, de donde se puede verificar que mientras  $M$  aumenta el error disminuye gradualmente. Finalmente, una vez calculado el error para los diferentes casos se puede cuantificar la precisión y la exactitud del método propuesto línea por línea, mediante el cálculo de la desviación estandar y la varianza, respectivamente, como son mostrados en la Fig. (??).

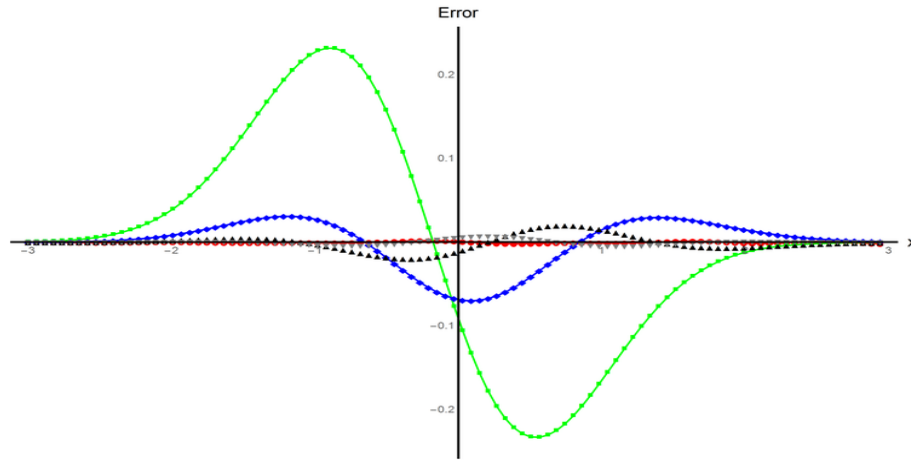


Figura 4.5: Comparaciones de  $f(x)$  con a)  $f(x + \Delta x)$ , b)  $f(x)$  para  $M = 1$ , c)  $f(x)$  para  $M = 2$ , d)  $f(x)$  para  $M = 3$

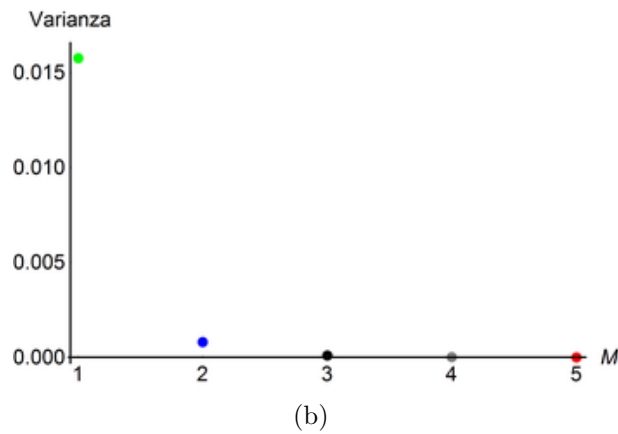
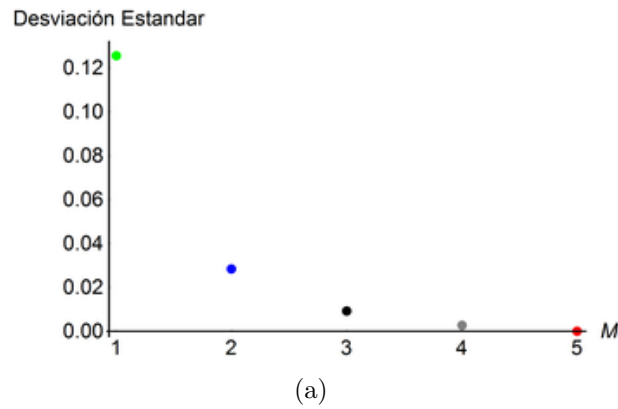
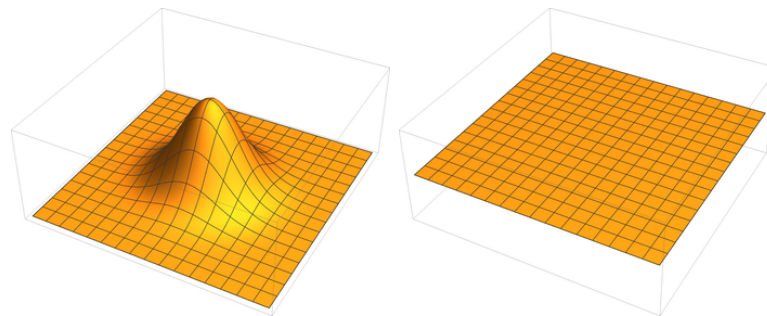


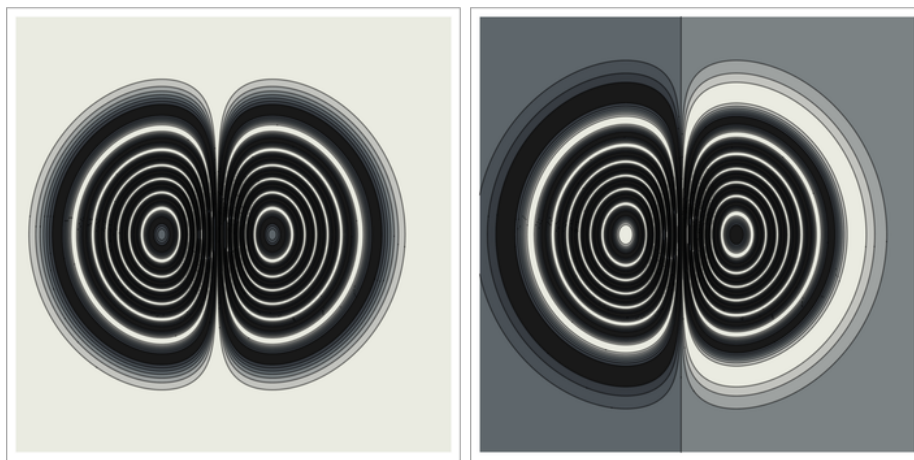
Figura 4.6: a) Desviación Estandar, b) Varianza



(a) Fase

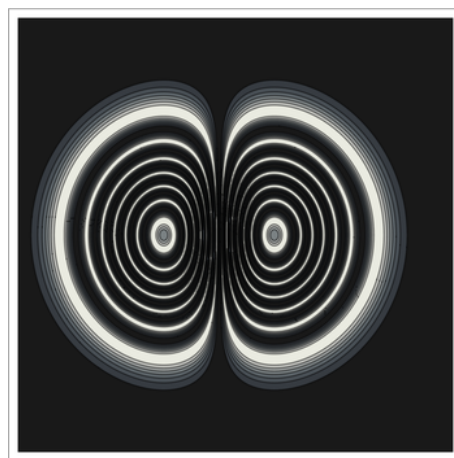
(b) Amplitud

Figura 4.7: Campo de prueba



(a)  $I_0, \alpha_0 = 0$

(b)  $I_1, \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$



(c)  $I_2, \alpha_2 = \pi$

Figura 4.8: Interferogramas para corrimientos:  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$

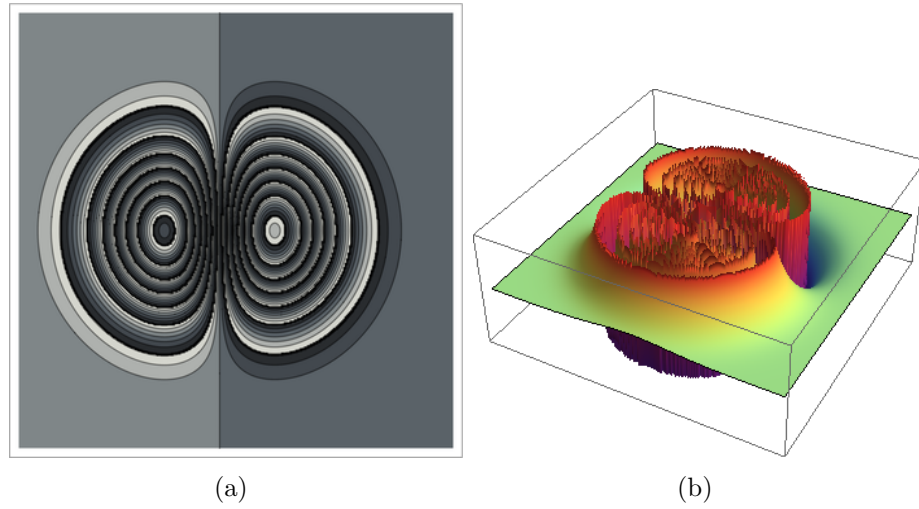


Figura 4.9: Fase envuelta: a) Niveles de gris, b) Visión 3D.

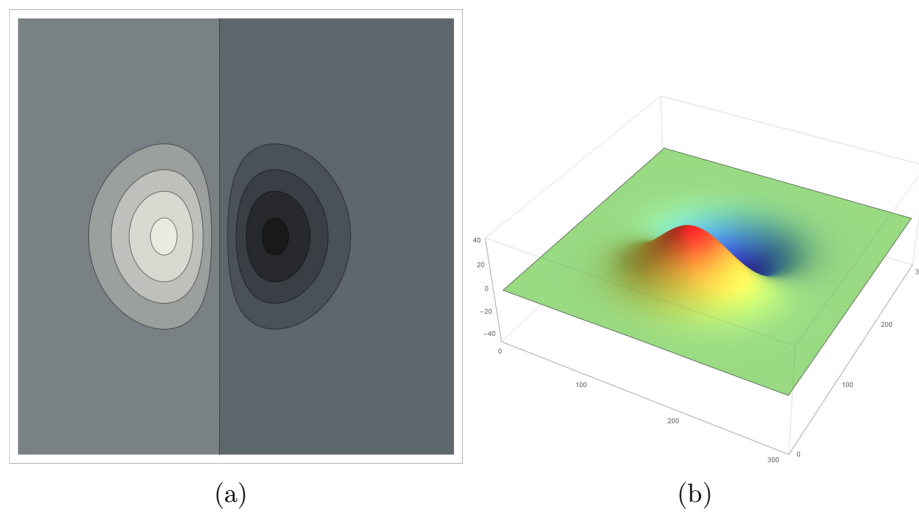


Figura 4.10: Fase desenvuelta  $\Delta\phi(x; y)$ : a) Niveles de gris, b) Visión 3D.

**CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN NUMÉRICA**  
**4.3. ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN DE FASE**

---

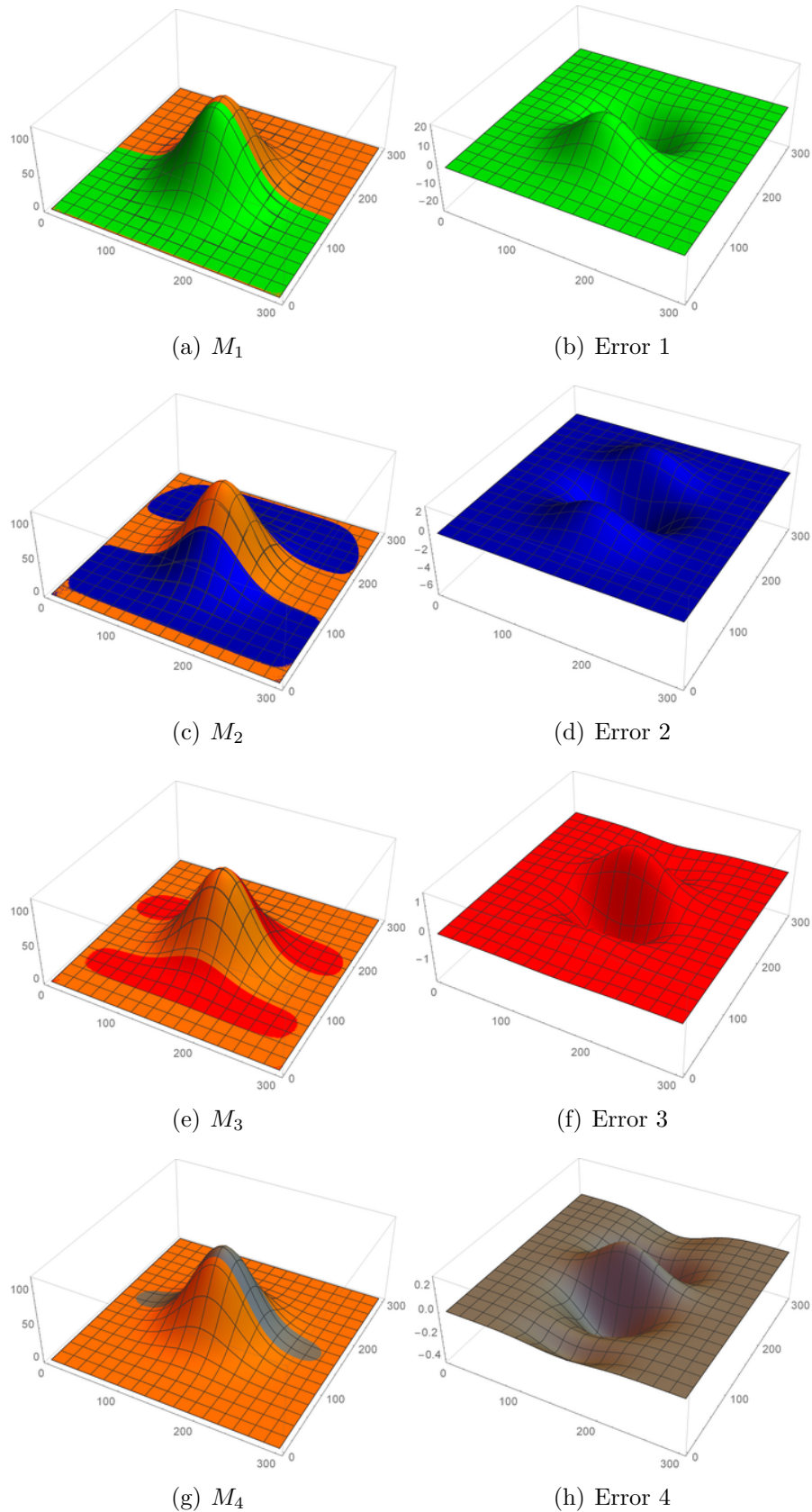


Figura 4.11: Aproximaciones de la función de fase  $v_s$  Errores

---

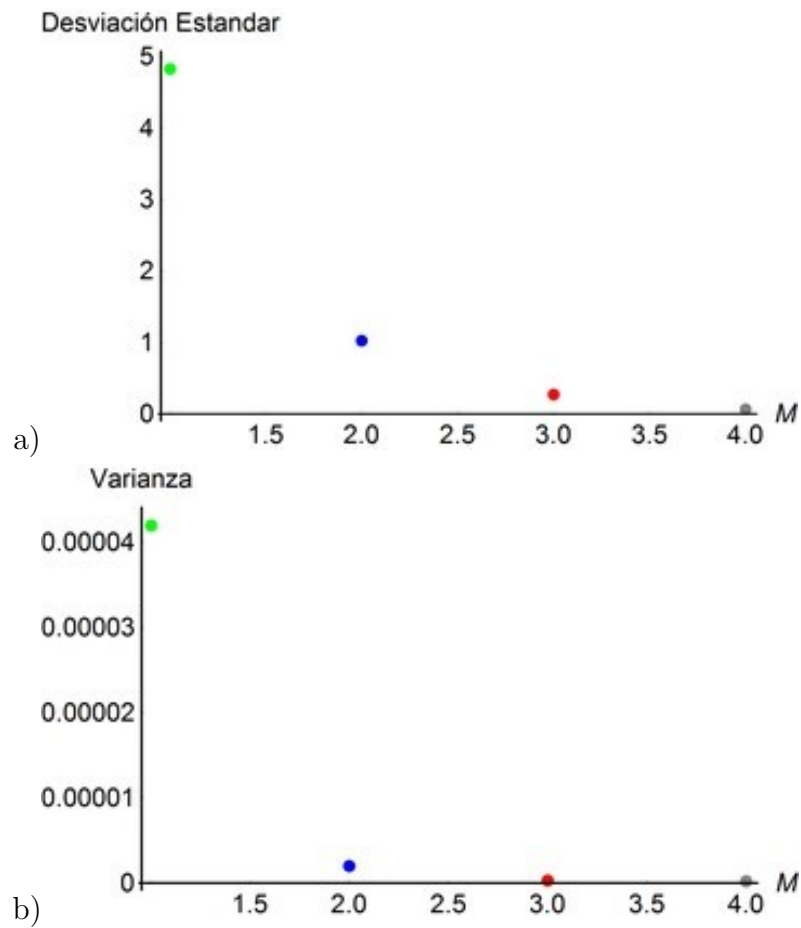


Figura 4.12: a)Desviación Estandar, b)Varianza

# Capítulo 5

## Conclusiones Generales

Se mostró un modelo matemático para encontrar la función de fase a partir del incremento de fase para  $M$  términos en la serie de Taylor, lo que implicó resolver una ecuación diferencial de  $M$ -ésimo orden.

Los resultados obtenidos en la simulación numérica demuestran que el mayor error en el método, esta cuando se toma el primer término y que con cuatro o cinco términos el error se reduce de manera considerable.

En este tipo de interferometría de desplazamiento lateral no es recomendable conformarse con el primer término, sería bueno tomar mayor a dos términos por lo menos.

Se resolvió el conjunto de  $M$  integrales concatenadas, con un modelo matemático, resolviendo  $M$  integrales simples con la ventaja que se agiliza el algoritmo.

## 5.1. Trabajo a futuro

Resolver el problema de desplazamiento vectorial en lugar de solo ser horizontal.

Desarrollar el experimento y aplicar el algoritmo propuesto a patrones de interferencia reales.

Resolver el mismo problema mediante el análisis de Fourier.

Justificar el por qué se eliminan las constantes.

Hacer el estudio de error en el método propuesto, investigar el efecto que tiene el desplazamiento  $\Delta x$  y el paso  $\epsilon$ , así como la resolución de la cámara para analizar la limitante de  $M$ .

# Bibliografía

- [1] **D. Malacara**, “Optical Shop Testing”, Ed. Wiley, New York, (1992).
- [2] **Hecht E.**, “Optics”, Addison Wesley , 4 edition, 2002.
- [3] **J. Schwider**, “Advanced Evaluation Techniques in Interferometry”, in Progress in Optics XXVIII, E. Wolf, Eds. (ELSEVIER Science Publishers, 1990).
- [4] **J. H. Bruning, D.R. Herriott, J. E. Gallagher, D. P. Rosenfeld, A. D. White, and D. J. Brangaccio**, “Digital Wavefront Measurement Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses ”, Appl. Opt. 13, 2693 (1974).
- [5] **Guanming Lai and Toyohiko Yatagai**, “Generalized phase-shifting interferometry”, J. Opt. Soc. Am. A 8(5), 822-827 (1991).
- [6] **D. Malacara, M. Servín, and Z. Malacara**, “Interferogram Analysis for Optical Testing”, (Optical Engineering (Marcel Dekker, Inc.,) New York, 1998).
- [7] **Ronchi V.**, “Le Frange di Combinazioni Nello Studio delle Superficie e dei Sistemi Ottici”, Riv. Ottica Mecc. Precis., 2, 9, (1923a).
- [8] **K. Itoh**, “ Analysis of the phase unwrapping algorithm ”, J. Opt. Soc. Am.0003-6935/82/142470-01 (1982).
- [9] **Y. P. Kumar and S. Chatterjee**, “Opaque optics thickness measurement using a cyclic path optical configuration setup and polarization phase shifting interferometry” , Appl. Opt. 51, 1352-1356 (2012).
- [10] **D. Farrant , GH. Kaufmann, JN. Petzing, J.R. Tyrer, B.F. Oreb, D. Kerr**, “Measurement of transient deformations with dual-pulse addition electronic speckle-pattern interferometry ”, Appl. Opt., 37, 7259-67,(1998).

- [11] **Y.-L. Yeh**, “Simultaneous measurement of refractive index and thickness of birefringent wave plates”, *APPLIED OPTICS*, Vol. 47, 1457-1464, 2008.
- [12] **Deqing Ren and Eugene Serabyn**, “Symmetric nulling coronagraph based on a rotational shearing interferometer”, *Appl. Opt.* 44, 7070-7073 (2005).
- [13] **N. Shaked, Y. Zhu, M. Rinehart, A. Wax**, “Two-step-only phase-shifting interferometry with optimized detector bandwidth for microscopy of live cells”, *Opt. Express* 17 (2009).
- [14] **P. Gao, B. Yao, I. Harder, J. Min, R. Guo, J. Zheng, T. Ye**, “Parallel two-step phase-shifting digital holograph microscopy based on a grating pair”, *J. Opt. Soc. Am.*, 28 (2011).
- [15] **P. Bu, X. Wang, O. Sasaki**, “One-shot parallel complex Fourier-domain optical coherence tomography using a spatial carrier frequency”, *Opt. Eng.*, 47, 050502,(2008).
- [16] **D. N. Naik, G. Pedrini, and W. Osten**, “Recording of incoherent-object hologram as complex spatial coherence function using Sagnac radial shearing interferometer and a Pockels cell”, *Opt. Express* 21, 3990-3995 (2013).
- [17] **K. Watanabe and T. Nomura**, “Recording spatially incoherent Fourier hologram using dual channel rotational shearing interferometer”, *Appl. Opt.* 54, A18-A22 (2015).
- [18] **M. Takeda, I. Ina, S. Kobayashi**, “Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer based topography and interferometry”, *J. Opt. Soc. Am./ Vol 72, No. 1 /Enero 1982*.
- [19] **H. Schreiber y J. H. Bruning**, “Phase Shifting Interferometry”, *Optical Shop Testing*, D. Malacara, ed., Wiley, New York, 1992, pp. 547-656.
- [20] **Soobitsky J. A.**, “Piezoelectric Micromotion Actuator”, U.S. Patent No. 4,577,131, 1986.
- [21] **Hayes J. B.**, “Compact Micromotor Translator”, U.S. Patent 4.884.003 (1989).
- [22] **Wyant J. C. and R. N. Shagam**, “Use of Electronic Phase Measurement Techniques in Optical Testing”, *Proceedings of ICO-11, International Congress of Optics Madrid, 1978*, p. 659.

- [23] **Bryngdahl O.**, “Heterodyne Shearing Interferometers Using Diffractive Filters with Rotational Symetry”, *Opt. Comm.*, 17, 43 (1976).
- [24] **Stevenson W. H.**, “Optical Frequency Shifting by Means of a Rotating Diffraction Grating”, *Appl. Opt.*, 9, 649 (1970).
- [25] **Massie N. A. and R. D. Nelson**, “Beam Quality of Acousto-Optic Frequency Shifters”, *Opt. Lett.*, 3, 46 (1978).
- [26] **Crane R.**, “Interference Phase Measurement”, *Appl. Opt.*, 8, 538 (1969).
- [27] **Bryngdahl O.**, “Polarization-Type Interference Fringe Shifter ”, 62, 462
- [28] **Zvyagin A. V. and D. D. Sampson**, “Achromatic Optical Phase Shiftermodulator”, *Opt. Lett.*, (4), 187-189 (2001).
- [29] **Henderson A. D., C. Hoffman, R. Culhane, and D.Viggiano III**, “Kilohertz Scanning, All-Fiber Optical Delay Line Using Piezoelectric Actuation”, *Proc. SPIE*, 5589, 99-106 (2004).
- [30] **Ishii Y., J. Chen, and K. Murata**, “Digital Phase-Measuring Interferometry With a Tunable Laser Diode”, *Opt. Lett.*, 12, 233 (1987).
- [31] **Suzuki T., X. Zhao, and O. Sasaki**, “Phase-Locked Phase-Shifting Laser Diode Interferometer With Photothermal Modulation”, *Appl. Opt.* 40, 2126-2131 (2001).
- [32] **C. Meneses-Fabian and U. Rivera-Ortega**, “Phase-shifting interferometry by the wave amplitude modulation”, *Opt. Lett.* 36, 2417-2419 (2011).
- [33] **C. Meneses-Fabian and U. Rivera-Ortega**, “Phase-shifting interferometry by the wave amplitude modulation: General case”,, *Opt. Laser Eng.* 50, 905-909 (2012).
- [34] **C. Meneses-Fabian and U. Rivera-Ortega**, “Phase-shifting interferometry by amplitude modulation in: Interferometry research and applications in science and technology”, Ivan Padron (Ed.), ISBN 978-953-51-0403-2, InTech, (2012).
- [35] **Greivenkamp J. E.**, “ Generalized Data Reduction for Heterodyne Interferometry ”, *Opt. Eng.*,23, 350 (1984).
- [36] **Wyant J. C. and R. N. Shagam**, “ Use of Electronic Phase Measurement Techniques in Optical Testing ”, *Proceedings of ICO-11, International Congress of Optics Madrid, 1978*, p. 659.

- [37] **Wyant, J.C.**, “ Laser Focus (may) ”, p. 65, 1982.
- [38] **Carré P.**, “ Installation et utilisation du comparateur photoelectrique et Interferencetiel du Bureau International des Poids ek Measures ”, Metrologia, 1, 13-23, (1966).
- [39] **Kelsal D.**, Thesis, University of London, 1959, Proc. Phys. Soc., 73, 465 (1959).
- [40] **Murty M. V. R. K.**, “ Some Modifications of the Jamin Interferometer Useful in Optical Testing ”, Appl. Opt., 3, 535-538,(1964).
- [41] **Paez G., M. Strojnik, and G. Garcia-Torales**, “ Vectorial Shearing Interferometer ”, Appl. Opt., 39(28), 5172-5178, (2000).
- [42] **Murty M. V. R. K. and R. P. Shukla**, “ Liquid CrystalWedge as a Polarizing Element and its Use in Shearing Interferometry ”, Opt. Eng., 19, 113-115 (1980).
- [43] **Komissaruk V. A. and N. P. Mende**, “ A Polarization Interferometer with Simplified Double-Refracting Prisms ”, Opt. Laser Technol., 13, 151-154 (1981).
- [44] **O. D. D. Soares**, “ Analysis and aligment of cyclic interferometer ”, J. Phys. E: Sci. Instrum., Vol. 11, (1978).
- [45] **Hariharan P. and D. Sen**, “ Cyclic Shearing Interferometer ”, J. Sci. Instrum., 37, 374 (1960).
- [46] **George Arfken**. Methods for Physicists, (Third Edition).
- [47] **Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba**. Cálculo vectorial, (4th. ed.Addison Wesley Longman de México,1998).
- [48] **Stephen Wolfram**. The Mathematica Book, (9th ed. Wolfram Media,2015).