

Topos de Grothendieck y algunas relaciones con la mecánica cuántica

Orlando Pérez Ramírez

Junio del 2021

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicomatemáticas

Topos de Grothendieck y algunas relaciones con la mecánica cuántica

Orlando Pérez Ramírez

- | | |
|-------------------|---|
| <i>1. Sinodal</i> | Dr. José Juan Angoa Amador
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |
| <i>2. Sinodal</i> | Dr. Cesar Cejudo Castilla
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |
| <i>3. Sinodal</i> | Dr. Agustín Contreras Carreto
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |
| <i>Asesor</i> | Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |

Junio del 2021



Benemérita Universidad Autónoma de
Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICOMATEMÁTICAS

**TOPOS DE GROTHENDIECK Y ALGUNAS
RELACIONES CON LA MECÁNICA CUÁNTICA**

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para obtener el grado de

Licenciado en Física

por

Orlando Pérez Ramírez

bajo la dirección de

Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo

24 de junio del 2021

A Monica, mi madre
A Felipe, mi padre.
A mis hermanos: Monica, Fernanda y Uriel.
A Madelein.

Agradecimientos

” “**Proposición 0.** Para todo a, b números reales, $a > 0$, existe un número natural n de tal manera que $na > b$.

— La propiedad Arquimediana

Prometo que he tratado de ser breve, he de advertir el uso desmedido pero intencional de la palabra “Gracias” .

Gracias *Señora Monica*, madre. Gracias por todo tu amor. No hay demostración ms precisa de la *Proposición 0.*, que tú, pues siempre has sido perseverante, y me has enseñado a serlo, a no rendirme; y si en algún momento he sido valiente, lo he aprendido de ti mamá. Gracias por ser mi madre. *Don Felipe*, papá, gracias. Gracias por enseñarme a ser paciente, a trabajar. He aprendido mucho del mundo, sentado a tu lado por largas horas en el coche, saltando de obra en obra, siempre alimentados por la vitamina D del sol, a veces en dosis poco sanas, pero lo que nunca es demasiado es tu compañía y tus enseñanzas. Gracias mamá y papá, me siento muy orgulloso de ustedes.

A mis hermanos, Gracias. *Fernanda*, hermana, gracias por enseñarme lo es defender lo que uno piensa, siempre valiente. Gracias también por Madelein, por la ilusión que solo la infancia invita. A mi hermana *Pamela*, gracias, he aprendido mucho de ti, tu valentía y tu carácter. Mi Uris, hermanito, a ti te agradezco reirtodos los días, con tus ocurrencias. Gracias por contagiarme de tu entusiasmo.

Morgan, Lula, Summer, Mugres y Paos; gracias. Gracias porque aunque ustedes no hablen, se comunican y me han enseñado el significado de la sinceridad y la gratitud.

A partir de aquí agradeceré con cierto orden cronológico. Walberto, gracias, porque fuiste la primera amistad sincera que conocí. *Eliza*, amiga. Gracias por enseñarme lo que es la amistad, lo que es quitarle

los ´´kilos a los kilómetros", porque siempre estas ahí a pesar de la distancia. *Maestro Catalino*, a usted le debo el empujon que trajo hasta la Universidad, pue sin esa guía para examen de admision y esa invitación a seguir con la prepa, tal vez no estaría aquí; gracias también por su clase de matematicas. A los chinos: *Juan, Diego y Oswaldo*; gracias. Gracias, por esas risas y por su confianza, pero sobre todo, por su amistad. Deborah amiga. Gracias por todo, por saber estar, y por tu valentía. *Manuel y Daniel*, amigos. Debo iniciar, agardeciendo a Diana, por ella nos conocimos, y viva por eso. Daniel, a ti te agradezco en especial, el haberme mostrado este mundo tal bonito de las categorías; también por tu paciencia al trabajar conmigo, y por mantener esa llama hasta el final, la llama de la ilusión y la perseverancia. ¡Lo logramos!. *Maestro Ibarra*, tengo mucho que agradecerle, pero, dejeme resaltar su amistad, y esas charlas en su cubo sobre matemáticas, anarquía y comida. Le agradezco por enseñarme que las matemáticas, no solo son para ganarse la vida sini también para vivirla. Les agradezco, Martín y Jim, por aceptarme en sus momentos de estudio, por ayudarme en los mios, y por los tacos de mixiote.

Dr Vilchis, maestro. Gracias, por ser valiente, y aceptar a un par de fisicos, eso si muy entusiasmados, como tesisas. Sobre todo, porque lo exótico del tema que elegimos, no fue facil, pero fue muy divertido, y lo seguira siendo; esto aún no termina. Gracias, también, por enseñarme una pasión por las matemáticas que no conocia.

Gracias a mi sinodales *Dr. César Cejudo*, *Dr Agustín Contreras*, *Dr Juan Angoa*, por su disposición y apoyo, al revisar este trabajo. A mi profesor *Juan Angoa*, he aprendido de usted, un respeto y devoción por las matematicas, que nunca había visto. Una ilusión que parece crecer con los años, por descubrir un mundo matemático cada vez mas grande.

” *“Oí a mi alma cantando detrás de una hoja, arranqué la hoja, pero entonces la oí cantando detrás de un velo. Desgarré el velo, pero entonces la oí cantando detrás de un muro. Derribé el muro, y oí a mi alma cantando contra mí. Levanté el muro, zurcí el velo, pero no pude devolver la hoja a su sitio. La cogí en mi mano y oí a mi alma cantando poderosamente contra mí. Es lo que pasa por estudiar sin un amigo.”*

— **L. Cohen**

El libro de la misericordia.

” *“No son esos dones, ni la ambición más ardiente, servida por una voluntad de hierro, los que nos permiten cruzar esos “círculos invisibles y imperiosos” que encierran nuestro Universo. Sólo la inocencia los cruza, sin saberlo y sin preocuparse, en los momentos en que estamos solos escuchando a las cosas, intensamente absorbidos en un juego de niños...”*

— **A. Grothendieck**

Cosechas y Siembras.

Índice

Introducción	1
1 Límites y colímites	5
1.1 Límites	5
1.2 Colímites	25
1.3 Definiciones y resultados útiles sobre límites y colímites .	30
2 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es un topos	41
2.1 Cartesiana Cerrada	51
2.2 Definición de subobjeto y clasificador de subobjetos . . .	61
2.3 Subobjetos en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$	65
2.4 Clasificador de subobjetos en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$	68
3 Gavillas en un sitio	75
3.1 Gavillas, gavillas en un sitio y algunas equivalencias. . . .	75
3.2 La estructura de la categoría de gavillas	106
3.3 Ejemplos de Topologías y Topos de Grothendieck	109
4 TLT sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}}$ inducida por un funtor de cuantización.	113
4.1 Categorías de precuantización y funtor de cuantización .	113
4.2 Categoría de precuantización propia	118
4.3 Topologías cuánticas	119
Bibliografía	123

Introducción

Este es un trabajo matemático en mayor medida, puesto que hablar de topos no es tarea fácil, al menos al nivel licenciatura, y se necesita una buena cantidad de material puramente matemático para lograr siquiera asomar las posibilidades que le ofrece a la física. Esta tesis es uno de dos trabajos realizados en colaboración y dialogo entre Daniel Joshua Anaya Palacios y Orlando Pérez Ramírez, que se dividio de esta manera por simple requisito y según la aplicación en la física que cada uno decidio estudiar, pero que originalmente era un solo trabajo. Fue necesario el conjunto debido a las dificultades que presenta la meta escogida, puesto que no contamos con clases dirigidas a este tema ni una comunidad universitaria que nos ayude a resolver las dudas que nos han surgido (lo que es entendible por lo exótico del tema que hemos decidido estudiar), hemos conseguido progresar mediante el dialogo y con el apoyo de dos o tres profesores que tienen intereses similares, uno de los cuales (el que más nos ha apoyado) es nuestro asesor. El hermano siames de esta tesis se titula: “Topos de Grothendieck y algunas conexiones con la mecánica cuántica: Álgebras cuánticas como gavillas en un sitio”.

La teoría de categorías ve la luz alrededor en los 40's, de la mano de Samuel Eilenberg (1913-1998) y Saunders Mc Lane (1904-2005), como una presentación de las matemáticas en términos de los conceptos fundamentales de transformación, y composición de transformaciones. A pesar de que esta es una teoría reciente, ya ha dado para un intento de fundamentación de las matemáticas, orquestado por W. Lawvere y S. Mc Lane, además de tener presencia ya en distintos campos de investigación, siendo una teoría aplicada en Biología (Varenne, 2013,

p. 167), Física, Lingüística (Bradley, 2018), Ciencias de la computación (Pitt et al., 1995, p. 1-3) e incluso con aplicaciones en la matemática que la precede. Es dentro del marco de esta teoría que A. Grothendieck (1928-2014) logra concretar la que es la idea central de este trabajo, la idea de topos. Esta surge de la generalización del concepto de gavilla topológica, que es un funtor cuyo dominio es la categoría de abiertos de un espacio topológico y codominio la categoría de conjuntos, que se generaliza en el sentido de que se cambia la categoría dominio por una categoría más general (solo necesita ser localmente pequeña). Esta generalización, que consiste en pedir menos al dominio de un funtor y exigirle que conserve ciertas propiedades, genera un gran número de nuevos conceptos y resultados que permiten remarcar nuevos contornos y dibujar nuevas figuras en antiguos paisajes, dando paso al estudio de *espacios generalizados*, como lo describe el mismo Grothendieck, siendo las categorías de gavillas sobre una categoría localmente pequeña, determinadas por una estructura llamada Topología de Grothendieck, lo que define al concepto de Topos. Actualmente, la noción de Topos es algo distinta a la noción que Grothendieck estableció, pues la definición moderna no se realiza a partir de categorías de gavillas, sino de categorías con ciertas propiedades similares a las propiedades que tiene la categoría de conjuntos, esto se debe al trabajo de Lawvere y Tierney (Lawvere, 1971, p. 329-33), quienes llaman a esto un Topos elemental. En este trabajo llamaremos simplemente Topos a los Topos elementales de Lawvere y Topos de Grothendieck a los topos primitivos.

En cuanto a la realización y el contenido del trabajo, desde el inicio asumimos que el lector conoce las definiciones básicas de teoría de categorías como: categoría, funtor, transformación natural, funtor adjunto y equivalencia de categorías. También, que reconoce la manera en que se definen dentro de esa teoría nociones que se utilizan en la teoría de conjuntos, como monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo y que conoce el Lema de Yoneda. Por eso el primer capítulo va directamente a la presentación de límites y colímites, algunos ejemplos muy comunes de éstos y resultados útiles para el desarrollo del resto del trabajo y aunque este capítulo quede más bien de paso hacia la teoría de topos, consideramos que contiene suficientes resultados como para tener valor

didáctico para los que se inician en la teoría de categorías.

En el segundo capítulo estudiamos las categorías de pregavillas, su definición, ejemplos, algunos de sus objetos y su estructura. La importancia de este tipo de categorías está en que son muy parecidas a la categoría de conjuntos, por ejemplo, una pregavilla sobre la categoría discreta con un solo objeto es precisamente un conjunto. También, para cada categoría localmente pequeña, estas categorías son Topos. Por lo que en este capítulo definimos lo que es un Topos y demostramos ese hecho.

El Capítulo 3 está dedicado casi por completo a un teorema, es importante porque establece cuatro estructuras equivalentes, una de las cuales es un Topos de Grothendieck. Estas estructuras son: Topologías de Grothendieck, Topologías de Lawvere-Tierney, una operación universal de clausura en la categoría de pregavillas y una subcategoría plena de la categoría de pregavillas cuya inclusión es adjunto izquierdo de un funtor que preserva límites finitos. En este caso, la equivalencia de estas estructuras se refiere a que cada una determina de manera única a las otras tres. Esto no quiere decir que en una categoría de pregavillas se encuentre solo una de cada una de éstas, todo lo contrario, hay diversas, pero podemos decir que siempre vienen de cuatro en cuatro. A lo largo de ese capítulo se desarrolla con detalle la equivalencia que necesita de más trabajo, para esto, primero se presenta una versión B del teorema, en el que se establece que las primeras tres estructuras son equivalentes. Luego, partiendo de esto, construimos una serie de resultados que nos ayudan a seleccionar de entre todas las pregavillas a aquellas que llamaremos gavillas, éstas conformarán la subcategoría plena que estamos buscando, y describimos el proceso de gavillinización que ideó Grothendieck para construir una gavilla desde cualquier pregavilla, esto es porque, además de que este proceso determina un funtor (el funtor gavillinización), es el adjunto derecho del funtor inclusión y preserva colímites. Para terminar la equivalencia, consideramos una subcategoría plena con las características ya mencionadas y demostramos que esto nos permite determinar una operación de clausura universal sobre toda la categoría de pregavillas,

terminando así de demostrar todas las equivalencias. Una vez hecho eso, demostramos que un topos de Grothendieck es precisamente un topos y damos algunos ejemplos de topologías de Grothendieck.

El capítulo 3 es central en el trabajo pues nos permite establecer las diferencias entre un Topos arbitrario y uno que es Grothendieck (al menos en su definición), pero más porque nos permite, a través de las equivalencias ya mencionadas, afirmar que los topos de Grothendieck tienen aplicación en la física. Concretamente porque en el siguiente capítulo, el capítulo 4, se investiga qué estructura es inducida en el topos $\mathbf{Set}^{\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}}$ mediante el proceso de cuantización, veremos que induce una topología de Lawvere Tierney sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}}$ (una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, la categoría de subálgebras conmutativas del álgebra de von Neumann de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$) siendo esta la aplicación más directa del teorema central del capítulo 3 pues permite ver que la cuantización tiene estructura.

En este capítulo daremos la definición de límite y, su concepto dual, colímite basados en [2]. Así como algunas definiciones y resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo.

1.1 Límites

Definición 1.1.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña.

- a) Un funtor de $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ es llamado un **diagrama** en $\mathcal{C}$ de **silueta** $\mathbf{I}$.
- b) Un **cono** sobre D es un objeto $A \in \mathcal{C}$ (llamado el **vértice** del cono) junto con una familia

$$(A \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.1)$$

de morfismos en $\mathcal{C}$ tal que para cualquier morfismo $u : i \longrightarrow j$ en $\mathbf{I}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ D(i) & \xrightarrow{D(u)} & D(j) \end{array} \quad (1.2)$$

conmuta. Otra forma de denotar los conos será $(A, f_i)_{i \in \mathbf{I}}$.

- c) Un **límite** del diagrama D es un cono $(L \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$ con la propiedad de que para cualquier otro cono $(A \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$ sobre D , existe un único morfismo $\check{f} : A \rightarrow L$ en $\mathcal{C}$ tal que $p_i \circ \check{f} = f_i$ para todo $i \in \mathbf{I}$. Los morfismos p_i son llamados **proyecciones**.

En la práctica, abusando del lenguaje, nos referimos a L como el límite de D y escribiremos $L = \lim D$. También, denotaremos por $\text{Con}_D(A)$ al conjunto de los conos sobre D con vértice A . En general, la propiedad universal del cono límite, nos dice para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, existe una correspondencia biyectiva entre los morfismos $A \rightarrow L$ y los

conos sobre D con vértice A , es decir, asignamos a cada cono sobre A la flecha universal y para cada morfismo $f \in \mathcal{C}(A, L)$ el único cono conformado por morfismos $(A \xrightarrow{f_i = p_i \circ f} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$.

Podemos ver a $Con_D(A)$ como una categoría, cuyos objetos son los conos sobre D con vértice A y como el vértice es el mismo, podemos determinarlos solo por su familia de flechas indizadas por $\mathbf{I}$. Dados dos conos, dos objetos de esta categoría $(f_i)_{i \in \mathbf{I}}, (g_i)_{i \in \mathbf{I}} \in Con_D(A)$, un morfismo entre ellos:

$$f : (f_i)_{i \in \mathbf{I}} \rightarrow (g_i)_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.3)$$

es una flecha $f \in \mathcal{C}(A, A)$ tal que $g_i \circ f = f_i$ para cada $i \in \mathbf{I}$. La composición entre $f \in Con_D(A)((f_i)_{i \in \mathbf{I}}, (g_i)_{i \in \mathbf{I}})$ y $g \in Con_D(A)((g_i)_{i \in \mathbf{I}}, (r_i)_{i \in \mathbf{I}})$ es el morfismo $g \circ f \in \mathcal{C}(A, A)$. Pues

$$\begin{aligned} r_i \circ (g \circ f) &= (r_i \circ g) \circ f \\ &= g_i \circ f \\ &= f_i \end{aligned}$$

De esta manera cada objeto tiene su flecha identidad, la cual es la misma para todos, $Id_A \in \mathcal{C}(A, A)$, y la composición hereda la asociatividad de la categoría $\mathcal{C}$.

Dando un paso más, se puede construir la categoría Con_D cuyos objetos son todos los conos sobre el diagrama D en la categoría $\mathcal{C}$, y una flecha $h \in Con_D((A, f_i)_{i \in \mathbf{I}}, (B, g_i)_{i \in \mathbf{I}})$ es una flecha $h \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $f_i \circ h = g_i$, para todo $i \in \mathbf{I}$. Es útil notar que toda flecha $h \in \mathcal{C}(B, A)$ define una flecha $h \in Con_D((A, f_i)_{i \in \mathbf{I}}, (B, f_i \circ h)_{i \in \mathbf{I}})$. Ahora, si D tiene límite $(L, p_i)_{i \in \mathbf{I}} = \lim(D)$, este cono es el objeto terminal de categoría Con_D , pues, para cada cono $(A, f_i)_{i \in \mathbf{I}}$ existe un único morfismo $\check{f} \in \mathcal{C}(A, L)$ tal que $p_i \circ \check{f} = f_i$, para todo $i \in \mathbf{I}$, por definición, entonces $Con_D((A, f_i), (L, p_i)) = \{\check{f}\}$, consistentemente, el límite es único salvo isomorfismos, la demostración está en la Proposición 1.1.1. También, para cada $A \in \mathcal{C}$ es fácil de ver que la categoría $Con_D(A)$ es una subcategoría plena de Con_D .

Proposición 1.1.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría e $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Si existe un límite de un diagrama $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$, entonces es único salvo isomorfismos.

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ una categoría e $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Considere $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagrama en $\mathcal{C}$, y supongamos que

$$(L \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.4)$$

es un límite sobre D . Ahora, como (1.4) es un límite, en particular, es un cono, entonces existe un único morfismo $\check{f} \in \mathcal{C}(L, L)$ tal que $p_i \circ \check{f} = p_i$ para todo $i \in \mathbf{I}$. Sin embargo, el morfismo $id_L \in \mathcal{C}(L, L)$ también cumple que $p_i \circ id_L = p_i$ para todo $i \in \mathbf{I}$, por lo tanto, $\check{f} = id_L$. Considere otro cono límite sobre D

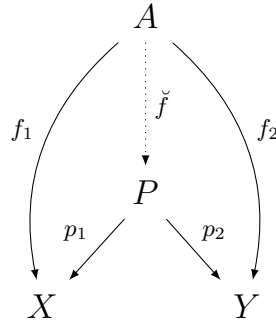
$$(L' \xrightarrow{p'_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.5)$$

entonces como (1.4) es otro cono sobre D , existe un único morfismo $\check{f}_1 \in \mathcal{C}(L, L')$ tal que $p'_i \circ \check{f}_1 = p_i$ para todo $i \in \mathbf{I}$. Similarmente, como (1.4) es un cono límite sobre D y (1.5) es otro cono sobre D , entonces existe un único morfismo $\check{f}_2 \in \mathcal{C}(L', L)$ tal que $p_i \circ \check{f}_2 = p'_i$ para todo $i \in \mathbf{I}$. De donde, $p_i = p'_i \circ \check{f}_1 = p_i \circ \check{f}_2 \circ \check{f}_1$ para toda $i \in \mathbf{I}$. Por lo tanto $\check{f}_2 \circ \check{f}_1 = id_L$. Análogamente, $\check{f}_1 \circ \check{f}_2 = id_{L'}$. Por lo tanto, $\check{f}_1 \in \mathcal{C}(L, L')$ es un isomorfismo. $\square$

Definición 1.1.2. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Diremos que $\mathcal{C}$ **tiene límites** de silueta $\mathbf{I}$ si todo diagrama $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene límite en $\mathcal{C}$.

Algunos tipos de límites particularmente útiles son: productos, igualadores y pullbacks (en seguida, enunciaremos sus definiciones correspondientes y daremos ejemplos), para estos, en vez de decir que una categoría "tiene límites de silueta..." los llamaremos por su nombre, por ejemplo "tiene productos" o "tiene pullbacks". Y cuando tenga límites de cualquier silueta (para cualquier categoría pequeña $\mathbf{I}$), diremos simplemente que "tiene límites", o bien, "tiene límites finitos" si la categoría $\mathbf{I}$ debe ser finita para que los diagramas de forma $\mathbf{I}$ tengan límite.

Definición 1.1.3. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $X, Y \in \mathcal{C}$. Un **producto** de X y Y consiste de un objeto $P \in \mathcal{C}$ y morfismos $p_1 : P \rightarrow X$ y $p_2 : P \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, llamados proyecciones, con la propiedad de que para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ y morfismos $f_1 : A \rightarrow X$ y $f_2 : A \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\check{f} : A \rightarrow P$ tal que el diagrama



conmuta.

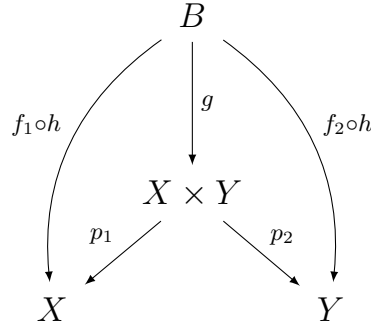
Estrictamente hablando, un producto es un objeto P equipado con dos proyecciones p_1 y p_2 , pero se suele referir como producto solo al objeto y escribirse como $X \times Y$ (el producto de X y Y) en vez de P . Para cada par de morfismos $f_1 \in \mathcal{C}(A, X)$, $f_2 \in \mathcal{C}(A, Y)$ denotaremos por $\langle f_1, f_2 \rangle$ al único morfismo $\check{f} \in \mathcal{C}(A, X \times Y)$ de la propiedad universal del producto. Respecto a esta notación para el morfismo $\check{f} : A \rightarrow X \times Y$, cabe notar lo siguiente: sean $f_1, g_1 \in \mathcal{C}(A, X)$, $f_2, g_2 \in \mathcal{C}(A, Y)$. Si $\langle f_1, f_2 \rangle, \langle g_1, g_2 \rangle \in \mathcal{C}(A, X \times Y)$ son iguales, entonces ambas cumplen la propiedad universal del producto, y por lo tanto

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 \circ \langle f_1, f_2 \rangle \\ &= p_1 \circ \langle g_1, g_2 \rangle \\ &= g_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_2 &= p_2 \circ \langle f_1, f_2 \rangle \\ &= p_2 \circ \langle g_1, g_2 \rangle \\ &= g_2 \end{aligned}$$

También, si consideramos $f_1 \in \mathcal{C}(A, X)$, $f_2 \in \mathcal{C}(A, Y)$ y $h \in \mathcal{C}(B, A)$, entonces el diagrama



donde $g = \langle f_1, f_2 \rangle \circ h$, conmuta. Sin embargo, por definición, el morfismo $\langle f_1 \circ h, f_2 \circ h \rangle \in \mathcal{C}(B, X \times Y)$ hace conmutar el diagrama anterior, y por lo tanto, $\langle f_1 \circ h, f_2 \circ h \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \circ h$. La definición anterior, nos habla del producto de dos objetos. Sin embargo, podemos generalizar la definición de producto, al producto de una familia de objetos de una categoría.

Definición 1.1.4. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $(X_i)_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ indizada por un conjunto I . Un **producto** de $(X_i)_{i \in I}$ consiste de un objeto $P \in \mathcal{C}$ y una familia de proyecciones

$$(P \xrightarrow{p_i} X_i)_{i \in I}$$

en $\mathcal{C}$, con la propiedad de que para cualquier objeto $A \in \mathcal{C}$ y cualquier familia de morfismos

$$(A \xrightarrow{f_i} X_i)_{i \in I}$$

en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\check{f} : A \rightarrow P$ tal que $p_i \circ \check{f} = f_i$ para todo $i \in I$. A este producto lo escribiremos como $\prod_{i \in I} X_i$. Cuando la categoría I es finita diremos que $\prod_{i \in I} X_i$, es un producto finito.

Ejemplo 1.1.1. Sean $X, Y \in \mathbf{Set}$. Veamos que

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \in \mathbf{Set}$$

(producto cartesiano de X y Y), junto con las proyecciones usuales

$$p_1 : X \times Y \rightarrow X \quad \text{y} \quad p_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

es un producto en **Set**: sea $A \in \mathbf{Set}$ y sean las funciones

$$f_1 : A \rightarrow X \quad \text{y} \quad f_2 : A \rightarrow Y.$$

Veamos que existe una única función $\check{f} : A \rightarrow X \times Y$ tal que $p_i \circ \check{f} = f_i$ para $i = 1, 2$. Para esto, definamos $\check{f}(a) = (f_1(a), f_2(a))$ para toda $a \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} (p_1 \circ \check{f})(a) &= p_1(\check{f}(a)) \\ &= p_1((f_1(a), f_2(a))) \\ &= f_1(a) \end{aligned}$$

similarmente $(p_2 \circ \check{f})(a) = f_2(a)$, como requeríamos. Resta probar que $\check{f}$ es única. Supongamos que existe otra $\hat{f} : A \rightarrow X \times Y$ tal que $p_i \circ \hat{f} = f_i$ para $i = 1, 2$. Escribamos $\hat{f}(a)$ como (x, y) . Así, tenemos que

$$f_1(a) = p_1(\hat{f}(a)) = p_1((x, y)) = x$$

y similarmente, $f_2(a) = y$. Entonces, $\hat{f}(a) = (x, y) = (f_1(a), f_2(a)) = \check{f}(a)$ para toda $a \in A$. Por lo tanto, $\check{f} = \hat{f}$, como queríamos probar.

Definición 1.1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

a) Un **tenedor** en $\mathcal{C}$ consiste de objetos y morfismos

$$A \xrightarrow{f} X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y \quad (1.6)$$

en $\mathcal{C}$, tales que $s \circ f = t \circ f$.

b) Sean $X, Y \in \mathcal{C}$ y $s, t \in \mathcal{C}(X, Y)$. Un **igualador** de s y t en $\mathcal{C}$, es un objeto $E \in \mathcal{C}$, junto con un morfismo $i : E \longrightarrow X$ en $\mathcal{C}$ tal que

$$E \xrightarrow{i} X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y \quad (1.7)$$

es un tenedor, y con la propiedad de que para cualquier otro tenedor (1.6), existe un único morfismo $\check{f} : A \rightarrow E$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
A & & \\
\check{f} \downarrow & \searrow f & \\
E & \xrightarrow{i} & X
\end{array}$$

conmuta.

Informalmente, como en caso de los productos, diremos que el igualador de $s, t \in \mathcal{C}(X, Y)$, es el objeto E .

Ejemplo 1.1.2. Sean $s, t \in \mathbf{Set}(X, Y)$, $E = \{x \in X | s(x) = t(x)\} \in \mathbf{Set}$. En el caso en que $E = \emptyset$, el igualador es la única función del vacío a otro conjunto, en este ejemplo $i : \emptyset \rightarrow X$, la propiedad universal se cumple por vacuidad, pues, si suponemos otro tenedor

$$A \xrightarrow{f} X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y$$

y $x \in A$ entonces, $s(f(x)) = t(f(x))$ entonces $f(x) \in \{x \in X | s(x) = t(x)\} = \emptyset$, lo cual implica que A es vacío, y esto es una contradicción. En el otro caso

$$E \xrightarrow{i} X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y \quad (1.8)$$

es un tenedor, con i la inclusión. En efecto, sea $x \in E$, entonces $(s \circ i)(x) = s(i(x)) = s(x)$ y $(t \circ i)(x) = t(x)$, y como $x \in E$, entonces $t(x) = s \circ i(x) = t \circ i(x) = s(x)$. Por lo tanto, $s \circ i = t \circ i$. Resta probar, que para cualquier otro tenedor (1.6) en $\mathbf{Set}$, existe una única función $\check{f} : A \rightarrow E$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & & \\
\check{f} \downarrow & \searrow f & \\
E & \xrightarrow{i} & X
\end{array}$$

conmuta. Para esto definamos $\check{f}(a) = f(a)$ para toda $a \in A$, lo que tiene sentido porque $f(a) \in E$ siempre que f forme el tenedor 1.6, entonces, claramente el triángulo anterior conmuta. Veamos que es única, sea f' tal que para cada $a \in A$, $i \circ f'(a) = f(a)$, esto implica que $f'(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, por transitividad, $\check{f} = f'$.

Ejemplo 1.1.3. Un igualador particular en la categoría **Grp**, cuyos objetos son todos los grupos y sus morfismos, morfismos de grupos, es:

$$\ker(\theta) \xrightarrow{i} G \rightrightarrows_{\epsilon}^{\theta} H \quad (1.9)$$

Donde $\ker(\theta) = \{g \in G \mid \theta(g) = e_H\}$, con e_H el neutro de H , i la inclusión y ϵ el morfismo de grupos trivial. Es inmediato ver que (1.9) es un tenedor. Ahora, si existe

$$A \xrightarrow{f} G \rightrightarrows_{\epsilon}^{\theta} H \quad (1.10)$$

tenedor, entonces, para cada $a \in A$ sucede que $\theta(f(a)) = e_H$, entonces $f(a) \in \ker(\theta)$ por lo que definimos

$$\begin{aligned} \check{f} : A &\rightarrow \ker(\theta) \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

como f es un morfismo de grupos, entonces $\check{f}$ es morfismo en **Grp**. Así, el triángulo

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \check{f} \downarrow & \searrow f & \\ \ker(\theta) & \xrightarrow{i} & G \end{array}$$

conmuta. Por último, veamos que $\check{f}$ es única con la propiedad de que el triángulo anterior conmuta: supongamos que existe otro morfismo $\hat{f} : A \rightarrow \ker(\theta)$ tal que $(i \circ \hat{f})(a) = f(a)$ para toda $a \in A$. Pero esto implica que, $(i \circ \hat{f})(a) = (i \circ \check{f})(a)$ para cada $a \in A$, y como $\ker(\theta)$ es un subgrupo de G entonces i es monomorfismo; y por lo tanto, $\check{f} = \hat{f}$.

Por último, tenemos los pullbacks.

Definición 1.1.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y sean objetos y morfismos

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow t & \\ X & \xrightarrow{s} & Z \end{array} \quad (1.11)$$

en $\mathcal{C}$. Un **pullback** en $\mathcal{C}$, del diagrama anterior, es un objeto $P \in \mathcal{C}$ junto con morfismos $p_1 : P \rightarrow X$ y $p_2 : P \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ tales que

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{s} & Z \end{array} \quad (1.12)$$

conmuta, y con la propiedad de que para cualquier otro cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{s} & Z \end{array} \quad (1.13)$$

en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\check{f} : A \rightarrow P$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow f_2 & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & \swarrow f_1 & \downarrow p_1 & & \downarrow t \\ & & X & \xrightarrow{s} & Z \end{array} \quad (1.14)$$

$\check{f}$

conmute. Note que para que (1.14) conmute, basta que $p_i \circ \check{f} = f_i$ para $i = 1, 2$, pues el cuadrado (1.12) se supone conmutativo.

Al cuadrado (1.12) se le llama **cuadrado pullback**.

Ejemplo 1.1.4. Sean los objetos y morfismos

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ & \downarrow i & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (1.15)$$

en **Set**, donde $Y' \subseteq Y$ y $i : Y' \rightarrow Y$ es la inclusión. Podemos obtener un nuevo conjunto, $f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\} \subseteq X$ y una nueva función $f' : f^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ definida como $f'(x) = f(x)$ para toda $x \in f^{-1}(Y')$. Veamos que el conjunto $f^{-1}(Y')$, junto con la función f' y

la inclusión $j : f^{-1}(Y') \rightarrow X$ es el pullback de (1.15). Primero veamos que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Y') & \xrightarrow{f'} & Y' \\ j \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (1.16)$$

conmuta: sea $x \in f^{-1}(Y')$, entonces $(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x)$ y $(j \circ f')(x) = j(f'(x)) = f'(x) = f(x)$, donde la última igualdad es por la definición de f' . Entonces, por transitividad tenemos que $(f \circ i)(x) = (j \circ f')(x)$ para toda $x \in f^{-1}(Y')$, y así $f \circ i = j \circ f'$. Ahora, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (1.17)$$

en **Set**. Debemos probar que existe una única función $\check{f} : A \rightarrow f^{-1}(Y')$, tal que, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow h & & & \\ & & f^{-1}(Y') & \xrightarrow{f'} & Y' \\ & \searrow \check{f} & \downarrow j & & \downarrow i \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (1.18)$$

conmuta. Para la existencia: note que como el cuadrado (1.17) conmuta, para todo $a \in A$ tenemos que $f(g(a)) = i(h(a)) = h(a)$, y como $h(a) \in Y'$ y $g(a) \in X$, entonces $f(g(a)) \in Y'$ y $g(a) \in f^{-1}(Y')$. Por lo que es posible definir a $\check{f} : A \rightarrow f^{-1}(Y')$ como $\check{f}(a) = g(a)$ con $a \in A$. Entonces para todo $a \in A$, $j(\check{f}(a)) = \check{f}(a)$ y $f'(\check{f}(a)) = f(\check{f}(a)) = f(g(a)) = i(h(a)) = h(a)$ (las dos primeras igualdades son por definición de f' y de $\check{f}$, la tercer igualdad es por que el cuadrado (1.17) conmuta). Por lo tanto, $j \circ \check{f} = g$ y $f' \circ \check{f} = h$. Para la unicidad: tenemos que, $j(\check{f}(a)) = g(a)$ para cada $a \in A$, esto es, $\check{f}(a) = g(a)$ para cada

$a \in A$, y esto determina a $\check{f} : A \rightarrow f^{-1}(Y')$ de forma única.

Ejemplo 1.1.5. Sea $(A, \leq)$ un copo, visto como una categoría. Consideremos $a, b, c \in A$, tales que $a \leq b$ y $c \leq b$. Veamos que, si existe, $\inf\{a, c\}$ (el ínfimo de $\{a, b\}$) es el pullback para

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ & \downarrow & \\ c & \longrightarrow & b \end{array} \quad (1.19)$$

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} \inf\{a, c\} & \longrightarrow & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \longrightarrow & b \end{array} \quad (1.20)$$

conmuta, pues $\inf\{a, c\} \leq b$ por transitividad. Ahora, considere el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \longrightarrow & b \end{array} \quad (1.21)$$

conmutativo, como $d \leq a$ y $d \leq c$, entonces $d \leq \inf\{a, c\}$, es decir, existe una única flecha de b a $\inf\{a, c\}$. Resta probar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} d & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & \inf\{a, c\} & \longrightarrow & a \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & c & \longrightarrow & b \end{array} \quad (1.22)$$

conmuta: como $d \leq \inf\{a, c\}$ y $\inf\{a, c\} \leq a$, entonces $d \leq a$; y como $d \leq \inf\{a, c\}$ y $\inf\{a, c\} \leq c$, entonces $d \leq c$. Como sabemos, en las categoría de este tipo (de conjuntos parcialmente ordenados), existe a lo más una flecha entre dos objetos, por lo que la unicidad del morfismo universal es inmediata.

Ejemplo 1.1.6. Sea $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}$, definimos

$$L = \{(X_i)_{i \in \mathbf{I}} \mid X_i \in D(i) \text{ y } Dh(X_i) = X_j, \text{ para toda } h \in \mathbf{I}(i, j)\} \quad (1.23)$$

con las proyecciones $p_k \in \mathbf{Set}(L, D(k))$ definidas por $p_k((X_i)_{i \in \mathbf{I}}) = X_k$ para cada $k \in \mathbf{I}$. Claramente

$$(L \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.24)$$

es un cono sobre D . Comencemos con el caso en que L es no vacío, tomemos $(A \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$ un cono sobre D . Si definimos:

$$\begin{aligned} \check{f} : A &\rightarrow L \\ a &\mapsto (f_i(a))_{i \in \mathbf{I}} \end{aligned}$$

Está bien definida porque $f_i(a) \in D(i)$ y dada $h \in \mathbf{I}(i, j)$ sucede que $Dh(f_i(a)) = f_j(a)$ porque $(A, f_i)_{i \in \mathbf{I}}$ es un cono, por lo que $(f_i(a))_{i \in \mathbf{I}} \in L$. Luego

$$\begin{aligned} (p_i \circ \check{f})(a) &= p_i((f_i(a))_{i \in \mathbf{I}}) \\ &= f_i(a) \end{aligned}$$

para toda $a \in A$. Por lo tanto $p_i \circ \check{f} = f_i$. La unicidad de $\check{f}$ es por las propiedades del conjunto L y la definición de las proyecciones, pues implican que, si existe K , tal que $p_i \circ K = f_i$ entonces $K(a) = (f_i(a))_{i \in \mathbf{I}} = \check{f}(a)$ puesto que lo son para cada elemento de la familia. En el caso en el que $L = \emptyset$ esto implica que el único cono sobre D es

$$\begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ \swarrow & & \searrow \\ D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j) \end{array} \quad (1.25)$$

Entonces, se cumple que, para todo cono existe una flecha única con la propiedad universal, pues solo existe este cono, la flecha es $\check{f} \in \mathbf{Set}(\emptyset, \emptyset)$ (la única en ese conjunto) y la propiedad se cumple por vacuidad.

Proposición 1.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría que tiene pullbacks. Considere los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f'} & Z \\ h \downarrow & & h' \downarrow & & h'' \downarrow \\ A & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{g'} & C \end{array} \quad (1.26)$$

en $\mathcal{C}$: si ambos son pullbacks, entonces el cuadrado exterior

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f' \circ f} & Z \\ h \downarrow & & \downarrow h'' \\ A & \xrightarrow{g' \circ g} & C \end{array} \quad (1.27)$$

es pullback.

Demostración. Supongamos que el cuadrado de la derecha y de la izquierda en la proposición (1.26) son pullbacks, así que en particular, conmutan. Entonces, el cuadrado (1.27) conmuta. Considere otro cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & Z \\ q \downarrow & & \downarrow h'' \\ A & \xrightarrow{g' \circ g} & C \end{array} \quad (1.28)$$

en $\mathcal{C}$. Que también se puede pensar con la forma

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & Z \\ g \circ q \downarrow & & \downarrow h'' \\ B & \xrightarrow{g'} & C \end{array} \quad (1.29)$$

pues, como (1.28) conmuta, entonces $h'' \circ p = (g' \circ g) \circ q = g' \circ (g \circ q)$. Ahora, como el cuadrado de la derecha de (1.26) es un pullback, existe

un único morfismo $\check{f}_1 \in \mathcal{C}(X', Y)$ tal que $f' \circ \check{f}_1 = p$ y $h' \circ \check{f}_1 = g \circ q$. De donde, el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\check{f}_1} & Y \\ q \downarrow & & \downarrow h' \\ A & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (1.30)$$

conmuta. Entonces, como el cuadrado de la izquierda en (1.26) es pullback, existe una única $\check{f}_2 \in \mathcal{C}(X', X)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X' & & & & Y \\ & \searrow \check{f}_1 & & & \downarrow h' \\ & \searrow \check{f}_2 & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & q \searrow & \downarrow h & & \downarrow h' \\ & & A & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad (1.31)$$

conmuta, es decir, $f \circ \check{f}_2 = \check{f}_1$ y $h \circ \check{f}_2 = q$, de modo que,

$$\begin{aligned} f' \circ (f \circ \check{f}_2) &= f' \circ \check{f}_1 \\ &= p \end{aligned}$$

Por lo tanto, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X' & & & & Z \\ & \searrow \check{f}_2 & p & & \downarrow h' \\ & \searrow q & X & \xrightarrow{f' \circ f} & Z \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' \\ & & A & \xrightarrow{g' \circ g} & C \end{array} \quad (1.32)$$

conmuta. Resta demostrar que $\check{f}_2$ es la única flecha que hace conmutar (1.32): supongamos que existe otra $j \in \mathcal{C}(X', X)$ tal que $(f' \circ f) \circ j = p$ y

$h \circ j = q$. Entonces, como el cuadrado de la izquierda en la proposición (1.26) conmuta, tenemos $h' \circ f = g \circ h$, de donde

$$\begin{aligned}(h' \circ f) \circ \check{f}'_2 &= (g \circ h) \circ j \\ &= g \circ (h \circ j) \\ &= g \circ q\end{aligned}$$

entonces $h' \circ (f \circ j) = (h' \circ f) \circ j = g \circ q$, y por la unicidad de $\check{f}_1$ tenemos que $f \circ j = \check{f}_1$. Pero, por el diagrama (1.31), tenemos que $f \circ \check{f}_2 = \check{f}_1$, y por la unicidad de $\check{f}_2$ concluimos que $\check{f}_2 = \check{f}'_2$. $\square$

La siguiente proposición tiene distintas versiones. Sin embargo, la manera en que lo presentaremos, resulta útil en el siguiente capítulo.

Proposición 1.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que tiene pullbacks. Considere el siguiente pullback*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ m' \downarrow & & \downarrow m \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \quad (1.33)$$

en $\mathcal{C}$. Si m es monomorfismo, entonces m' es monomorfismo.

Demostración. Considere $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(A, X')$ tales que $m' \circ h_1 = m' \circ h_2$. Entonces, $g \circ (m' \circ h_1) = g \circ (m' \circ h_2)$, pero como el cuadrado (1.33) conmuta, tenemos que $g \circ m' = m \circ f$, entonces $m \circ f \circ h_1 = m \circ f \circ h_2$ y como m es monomorfismo, entonces $f \circ h_1 = f \circ h_2$; si consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f \circ h_1} & X \\ m' \circ h_2 \downarrow & & \downarrow m \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \quad (1.34)$$

como (1.33) es pullback, entonces existe una única $h \in \mathcal{C}(A, X')$ tal que

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & & & \\
 & \searrow^{f \circ h_1} & & & \\
 & \text{---} h \text{---} & X' & \xrightarrow{f} & X \\
 & \swarrow_{m' \circ h_2} & \downarrow m' & & \downarrow m \\
 & & B & \xrightarrow{g} & C
 \end{array} \quad (1.35)$$

conmuta, es decir, $f \circ h = f \circ h_1$ y $m' \circ h = m' \circ h_2$. Entonces $h_1 = h_2$.
□

Proposición 1.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $\mathcal{C}$ tiene objeto terminal y pullbacks, entonces $\mathcal{C}$ tiene productos finitos e igualadores.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal y pullbacks. Note que si

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & B \\
 f \downarrow & & \\
 C & &
 \end{array} \quad (1.36)$$

son objetos y morfismos en $\mathcal{C}$, entonces el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow 1_B \\
 C & \xrightarrow{1_C} & 1
 \end{array} \quad (1.37)$$

conmuta, pues 1 es el objeto terminal de $\mathcal{C}$. Ahora, demostraremos que $\mathcal{C}$ tiene productos finitos, para esto, veremos primero que tiene productos binarios. Sean $P, B, C \in \mathcal{C}$, 1 el objeto terminal de $\mathcal{C}$, $p_1 \in \mathcal{C}(P, B)$ y $p_2 \in \mathcal{C}(P, C)$. Considere el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{p_2} & B \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow 1_B \\
 C & \xrightarrow{1_C} & 1
 \end{array} \quad (1.38)$$

(el cual existe pues, (1.38) conmuta porque 1 es terminal, y la categoría tiene pullbacks) donde 1_C y 1_B son las únicas flechas desde B y C hacia 1 respectivamente. Entonces, P junto con los morfismos p_1 y p_2 , es un

producto en $\mathcal{C}$, pues como (1.38) es un pullback, dado otro diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2} & B \\ f_1 \downarrow & & \downarrow 1_B \\ C & \xrightarrow{1_C} & 1 \end{array} \quad (1.39)$$

existe una única flecha $\check{f} \in \mathcal{C}(X, P)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f_1 \swarrow & \check{f} \downarrow & \searrow f_2 \\ & P & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & & Y \end{array}$$

conmuta. Así hemos demostrado que $\mathcal{C}$ tiene productos binarios. Por supuesto, con un argumento inductivo, podemos probar que si $\mathcal{C}$ tiene productos binarios, entonces tiene productos para un número finito n de objetos de $\mathcal{C}$.

Ahora, demostraremos que $\mathcal{C}$ tiene igualadores. Sean $X, Y \in \mathcal{C}$ y $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$. Considere los morfismos

$$\langle f, g \rangle: X \rightarrow Y \times Y$$

y

$$\langle id_Y, id_Y \rangle: Y \rightarrow Y \times Y.$$

Entonces, si

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & X \\ h' \downarrow & & \downarrow \langle f, g \rangle \\ Y & \xrightarrow{\langle id_Y, id_Y \rangle} & Y \times Y \end{array} \quad (1.40)$$

es un pullback, en particular conmuta, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \langle f \circ h, g \circ h \rangle &= \langle f, g \rangle \circ h \\ &= \langle id_Y, id_Y \rangle \circ h' \\ &= \langle h', h' \rangle \end{aligned}$$

Así, $h' = g \circ h = f \circ h$, es decir

$$E \xrightarrow{h} X \xrightleftharpoons[g]{f} Y \quad (1.41)$$

es un tenedor. Por otro lado, si consideremos un tenedor

$$E \xrightarrow{k} X \xrightleftharpoons[g]{f} Y \quad (1.42)$$

entonces el siguiente digrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & X \\ k' \downarrow & & \downarrow \langle f, g \rangle \\ C & \xrightarrow{\langle id_Y, id_Y \rangle} & Y \times Y \end{array} \quad (1.43)$$

es conmutativo; y como (1.40) es un pullback, entonces el siguiente triángulo

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \check{f} \downarrow & \searrow k & \\ E & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

donde $\check{f}$ es el morfismo de la propiedad universal del pullback, conmuta. Por lo tanto, (1.41) es un igualador. $\square$

Proposición 1.1.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $\mathcal{C}$ tiene productos finitos e igualadores, entonces tiene los límites finitos.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con todos los productos finitos, $\mathbf{I}$ una categoría pequeña y finita en objetos, $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagrama y la familia $\{D(i)\}_{i \in \mathbf{I}}$ de elementos en $\mathcal{C}$. Ahora, como $\mathcal{C}$ tiene productos finitos, para cada morfismo $u \in \mathbf{I}(i, j)$, construimos las siguientes flechas

$$\prod_{i \in \mathbf{I}} D(i) \xrightleftharpoons[\delta]{\tau} \prod_{u \in \mathbf{I}(i, j)} D(j) \quad (1.44)$$

donde δ define mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_{i \in I} D(i) & \xrightarrow{p_i} & D(i) \\
\delta \downarrow & & \downarrow Du \\
\Pi_{u \in \mathbf{I}(i,j)} D(j) & \xrightarrow{p'_j} & D(j)
\end{array}$$

de la siguiente manera, $p'_j \circ \delta = Du \circ p_i$; y τ se define mediante el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_{i \in I} D(i) & & \\
\tau \downarrow & \searrow p_j & \\
\Pi_{u \in \mathbf{I}(i,j)} D(j) & \xrightarrow{p'_j} & D(j)
\end{array}$$

de la siguiente manera, $p'_j \circ \tau = p_j$. Note que la conmutatividad de ambos diagramas es por la propiedad universal del producto $\Pi_{u \in \mathbf{I}(i,j)} D(j)$. Ahora, el igualador de (1.44) lo denotaremos por E según el diagrama

$$E \xrightarrow{h} \Pi_{i \in I} D(i) \xrightleftharpoons[\delta]{\tau} \Pi_{u \in \mathbf{I}(i,j)} D(j) \quad (1.45)$$

que existe en $\mathcal{C}$ porque tiene igualadores. Por otro lado, la familia $\{\alpha_k = p_k \circ h : E \rightarrow D(k)\}_{k \in \mathbf{I}}$ es una transformación natural entre el funtor constante $\Delta E : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ y el funtor $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$; pues, el siguiente digrama

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{id_E} & E \\
p_i \circ h \downarrow & & \downarrow p_j \circ h \\
D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j)
\end{array} \quad (1.46)$$

conmuta, porque (1.45) es un tenedor. Note que esto significa, entre otras cosas, que $p'_j \circ \tau \circ h = p'_j \circ \delta \circ h$, así $Du \circ p_i \circ h = p_j \circ h$ para toda $u \in \mathbf{I}(i, j)$. Es decir,

$$(E \xrightarrow{\alpha_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.47)$$

es un cono sobre D . Veamos que (1.47) es un límite sobre D . Considere el siguiente cono sobre D

$$(A \xrightarrow{\beta_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.48)$$

Entonces, existe un único morfismo $A \xrightarrow{g} \prod_{i \in I} D(i)$ de tal manera que $\beta_i = p_i \circ g$ para cada $i \in I$. También, como es un cono tenemos para cada $D(i) \xrightarrow{Du} D(j)$, con $u \in I(i, j)$, que $f \circ \beta_i = \beta_j$. Por otro lado, tenemos que

$$Du \circ p_i \circ g = p_j \circ g \quad \text{luego} \quad p'_j \circ \delta \circ g = p'_j \circ \tau \circ g.$$

Por lo tanto, $\delta \circ g = \tau \circ g$. Entonces

$$A \xrightarrow{g} \prod_{i \in I} D(i) \xrightleftharpoons[\delta]{\tau} \prod_{u \in I(i, j)} D(j) \quad (1.49)$$

es un tenedor sobre D , y como (1.44) es igualador, entonces existe un único morfismo $\check{f} : A \rightarrow E$ tal que $h \circ \check{f} = g$. Entonces, $\beta_i = p_i \circ g = p_i \circ h \circ \check{f}$. Lo que demuestra que (1.47) es límite sobre D . $\square$

En la demostración anterior, vimos que la transformación natural $\alpha : \Delta E \rightarrow D$ nos determinaba un cono (1.46), sobre D . En general, consideremos $\mathcal{C}$ una categoría e I una categoría pequeña. Sean $C \in \mathcal{C}$, el funtor constante $\Delta C : I \rightarrow \mathcal{C}$, un diagrama $D : I \rightarrow \mathcal{C}$. Ahora, si $\alpha : \Delta C \rightarrow D$ es una transformación natural, entonces el cuadrado siguiente

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{id_C} & C \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha_j \\ D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j) \end{array} \quad (1.50)$$

conmuta, esto equivale a que el siguiente triángulo

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \alpha_j \swarrow & & \searrow \alpha_i \\ D(i) & \xrightarrow{D(u)} & D(j) \end{array} \quad (1.51)$$

conmute; esto es, que $(C \xrightarrow{\alpha_i} D(i))_{i \in I}$ sea un cono sobre D . Por otro lado, cada "brazo" de un cono $(A \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in I}$ con vértice $A \in \mathcal{C}$ sobre D , lo podemos ensamblar como componentes de una

transformación natural $\alpha : \Delta A \rightarrow D$. De manera dual, tenemos que una transformación natural $\alpha : D \rightarrow \Delta C$ determina un cocono $(D(i) \xrightarrow{\alpha_i} C)_{i \in I}$, y viceversa.

Corolario 1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $\mathcal{C}$ tiene objeto terminal y pullbacks, entonces tiene límites finitos.

1.2 Colímites

Definición 1.2.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría e I una categoría pequeña. Considere un diagrama $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$, un **cocono** sobre D , es un objeto $A \in \mathcal{C}$ (vértice del cocono) junto con una familia

$$(D(i) \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \quad (1.52)$$

de morfismos en $\mathcal{C}$, tales que para cualquier $u \in I(i, j)$ el diagrama

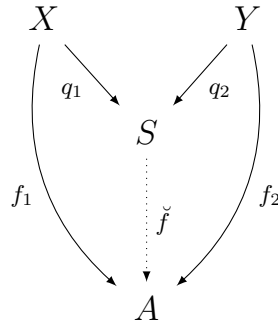
$$\begin{array}{ccc} D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j) \\ & \searrow f_i & \swarrow f_j \\ & A & \end{array} \quad (1.53)$$

conmuta. Un **colímite** de D , es un cocono $(D(i) \xrightarrow{q_i} L)_{i \in I}$, tal que para cualquier otro cocono (1.52), existe un único morfismo $\check{f} \in \mathcal{C}(L, A)$ tal que $\check{f} \circ q_i = f_i$ para toda $i \in I$.

Denotaremos como $Colim D$ al vértice del colímite del diagrama D . Análogo al caso de los límites, la propiedad universal del cocono colímite, nos dice para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, existe una correspondencia biyectiva entre morfismos $L \rightarrow A$ y los coconos sobre D con vértice A . Denotaremos por $Cocon_D(A)$ a la categoría de los coconos sobre D con vértice A . Es claro que también podemos darle estructura de categoría a los coconos sobre D , $Cocon_D$ de manera similar a como lo hicimos con Con_D , y si D tiene colímite, este es el objeto inicial en esa categoría.

Definición 1.2.2. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $X, Y \in \mathcal{C}$. Un **coproducto** (o **suma**) de X y Y , es un objeto $S \in \mathcal{C}$, junto con morfismos $q_1 : X \rightarrow S$

y $q_2 : Y \rightarrow S$ (llamados **inclusiones**) en $\mathcal{C}$, tales que, para cualquier otro objeto $A \in \mathcal{C}$ y morfismos $f_1 : X \rightarrow A$ y $f_2 : Y \rightarrow A$ en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\check{f} \in \mathcal{C}(S, A)$ tal que el diagrama



conmuta.

Estrictamente hablando, un coproducto es un objeto S equipado con dos inclusiones q_1 y q_2 , pero se suele referir como producto solo al objeto y escribirse como $X + Y$ (el coproducto de X y Y) en vez de S . La definición anterior, nos habla del coproducto de dos objetos. Sin embargo, podemos generalizar la definición de coproducto, al coproducto de una familia de objetos de una categoría.

Definición 1.2.3. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $(X_i)_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ indizada por una categoría pequeña I . Un **coproducto** de $(X_i)_{i \in I}$ consiste de un objeto $S \in \mathcal{C}$ y una familia de inclusiones

$$(X_i \xrightarrow{q_i} S)_{i \in I}$$

en $\mathcal{C}$, con la propiedad de que para cualquier objeto $A \in \mathcal{C}$ y cualquier familia de morfismos

$$(X_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$$

en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\check{f} : S \rightarrow A$ tal que $\check{f} \circ q_i = f_i$ para todo $i \in I$. A este coproducto lo escribiremos como $\sum_{i \in I} X_i$.

Ejemplo 1.2.1. El coproducto en **Set** de una familia de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbf{I}}$, con $\mathbf{I}$ un conjunto, es el conjunto:

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i)) = \bigcup_{i \in \mathbf{I}} (\{i\} \times D(i)) = \{(i, a) | i \in \mathbf{I} \text{ y } a \in A_i\} \quad (1.54)$$

conocido como la unión ajena. La notación $\sum$ es por pensar este coproduco como una suma en **Set**. Las inclusiones de esta suma se definen:

$$\begin{aligned} q_i : D(i) &\rightarrow \sum_{i \in \mathbf{I}} D(i) \\ x &\rightarrow (i, x) \end{aligned}$$

Veamos que se cumple la propiedad universal:

Consideremos un cono $(C \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$ sobre D , si definimos:

$$\begin{aligned} \check{f} : \sum_{i \in \mathbf{I}} D(i) &\rightarrow A \\ (i, x) &\mapsto f_i(x) \end{aligned}$$

sucede que

$$\begin{aligned} \check{f} \circ q_i(x) &= \check{f}((i, x)) \\ &= f_i(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in D(i)$. La unicidad es clara.

Definición 1.2.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

a) Un **diapasón** en $\mathcal{C}$ consiste de objetos y morfismos

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y \xrightarrow{f} D \quad (1.55)$$

tales que $f \circ s = f \circ t$

b) Considere el diagrama

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y \quad (1.56)$$

en $\mathcal{C}$. Un **coigualador** del diagrama anterior es un objeto $C \in \mathcal{C}$ junto con morfismo $c \in \mathcal{C}(Y, C)$ tal que

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y \xrightarrow{c} C \quad (1.57)$$

es un diapasón , y con con la propiedad de que para cualquier diagrama (1.55) existe un único morfismo $\check{f} \in \mathcal{C}(C, D)$ tal que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{c} & C \\ & \searrow f & \downarrow \check{f} \\ & & D \end{array}$$

conmuta.

Definición 1.2.5. Sean $\mathcal{C}$ una categoría, y los objetos y morfismos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \\ Z & & \end{array} \quad (1.58)$$

en $\mathcal{C}$. Un **pushout** en $\mathcal{C}$, del diagrama anterior, es un objeto $P \in \mathcal{C}$ junto con morfismos $p_1 : Y \rightarrow P$ y $p_2 : Z \rightarrow P$ en $\mathcal{C}$ tales que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ Z & \xrightarrow{p_2} & P \end{array} \quad (1.59)$$

conmuta, y con la propiedad de que para cualquier otro diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{h} & A \end{array} \quad (1.60)$$

en $\mathcal{C}$, existe una única $\check{f} : P \rightarrow A$ en $\mathcal{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_2} & Y & & \\ f_1 \downarrow & & \downarrow p_1 & \searrow g & \\ Z & \xrightarrow{p_2} & P & \xrightarrow{\check{f}} & A \\ & \searrow h & & & \end{array} \quad (1.61)$$

conmuta.

Ejemplo 1.2.2. Podemos calcular el colímite en **Set** de cualquier diagrama mediante la fórmula:

$$\text{Colim}(D) = \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i)) / R \quad (1.62)$$

dónde $\sum_{i \in \mathbf{I}} D(i)$ se define en el Ejemplo 1.2.1 y

$$R \subseteq \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i)) \times \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i))$$

es la menor relación de equivalencia en $\sum_{i \in \mathbf{I}} D(i)$ tal que:

$$((i, x), (j, Dh(x))) \in R \quad (1.63)$$

para toda $h \in \mathbf{I}(i, j)$ para cualesquier $i, j \in \mathbf{I}$.

Es decir, si

$$r \subseteq \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i)) \times \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i))$$

es una relación de equivalencia y $((i, x), (j, Dh(x))) \in r$ para toda $h \in \mathbf{I}(i, j)$, para cualesquier $i, j \in \mathbf{I}$ entonces $R \subseteq r$.

Esto claramente es un cocono con las inclusiones

$$(D(i) \xrightarrow{q_i} \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i)) / R)_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.64)$$

siendo $q_i(x) = [(i, x)]$, dónde $[(i, x)]$ denota la clase de equivalencia que contiene a $(i, x) \in \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i))$, por lo que, si $i, j \in \mathbf{I}$ y $h \in \mathbf{I}(i, j)$ sucede que $q_i(x) = [(i, x)] = [(j, Dh(x))] = q_j(Dh(x))$. Veamos que éste es efectivamente el colímite de D . Sea

$$(D(i) \xrightarrow{f_i} A)_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.65)$$

otro cocono sobre D , definimos

$$\begin{aligned} \check{f} : \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i)) / R &\rightarrow A \\ [(i, x)] &\mapsto f_i(x) \end{aligned}$$

para ver que efectivamente eso define una función necesitamos asegurarnos de que, cuando $((i, x), (j, y)) \in R$, sucede que $f_i(x) = f_j(y)$. Para ver esto notemos que, en el caso en que $((i, x), (j, y)) \in R$, de la definición de R , esta relación puede darse directamente de la condición (1.63) que pedimos que R sea mínima cumpliendo, es decir, que exista una flecha $h \in \mathbf{I}$ tal que $y = Dh(x)$. Lo que probaría fácilmente que tiene que $f_i(x) = f_j(y)$ porque las f_i conforman un cono. Pero podría pasar que esa relación se de indirectamente, es decir, que no exista una flecha que las “una”, en ese caso, esos elementos deben estar relacionados para cumplir con reflexividad (como $Dh(y) = x$), o darse por transitividad y reflexividad, por ejemplo, $(i, x)R(j, Dh(x) = Dh'(z))R(k, z)$ con $i, j, k \in \mathbf{I}$, $x \in D(i)$, $z \in D(j)$ y $h \in \mathbf{I}(i, j)$ y $h' \in \mathbf{I}(k, j)$. En este caso $(i, x)R(k, z)$ pero no existe ninguna flecha $h \in \mathbf{I}(i, k)$ tal que $Dh(x) = z$, o bien, $h' \in \mathbf{I}(k, i)$ tal que $Dh'(z) = x$. Aún así, se cumple lo que deseamos porque

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_j(Dh(x)) \\ &= f_j(Dh'(z)) \\ &= f_k(z). \end{aligned}$$

Hecho eso, claramente, $\check{f} \circ q_i = f_i$ y si existe otra f^* con esa propiedad sucede que $\check{f} \circ q_i = f_i = f^* \circ q_i$ para todo $i \in \mathbf{I}$, por lo que $\check{f}([(i, x)]) = f^*([(i, x)])$ para toda $[(i, x)] \in \sum_{i \in \mathbf{I}} (D(i))/R$. Por lo tanto, hemos determinado el colímite del diagrama D .

1.3 Definiciones y resultados útiles sobre límites y colímites

En este apartado enunciaremos algunas definiciones y resultados útiles para el resto del trabajo, que involucran los conceptos estudiados en el apartado anterior.

Proposición 1.3.1. Sea $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagrama con colímite $(D(i) \xrightarrow{q_i} L)_{i \in \mathbf{I}}$. Si existen $f, f' \in \mathcal{C}(L, K)$, con K cualquier objeto de $\mathcal{C}$, tales que $f \circ q_i = f' \circ q_i$ para todo $i \in \mathbf{I}$, entonces, $f = f'$

Demostración. Llamemos $k_i = f \circ q_i$ y notemos que esto define un cocono $(D(i) \xrightarrow{k_i} K)_{i \in \mathbf{I}}$, pues, si $h \in \mathbf{I}(i, j)$ sucede que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D(i) & \xrightarrow{Dh} & D(j) \\ & \searrow k_i & \swarrow k_j \\ & K & \end{array} \quad (1.66)$$

conmuta porque

$$\begin{aligned} k_j \circ Dh &= f \circ (q_j \circ Dh) \\ &= f \circ q_i \\ &= k_i. \end{aligned}$$

Luego, la propiedad universal del colímite implica que existe una flecha $\check{f} \in \mathcal{C}(K, L)$ única con la propiedad de que $\check{f} \circ q_i = k_i$ pero, por la definición de k_i , tanto f como f' cumplen esa propiedad, por lo tanto $f = f'$. $\square$

La propiedad dual, para los conos límites, se cumple también:

Proposición 1.3.2. Sea $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagrama con límite $(L \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$. Si existen $f, f' \in \mathcal{C}(K, L)$, con K cualquier objeto de $\mathcal{C}$, tales que $q_i \circ f = q_i \circ f'$ para todo $i \in \mathbf{I}$, entonces, $f = f'$.

La demostración es muy similar a la demostración de la proposición anterior, como debe de esperarse de una versión dual.

Es natural preguntarse que si tenemos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, entonces si existe el límite del diagrama $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$, ¿existirá el límite para el diagrama $\mathcal{F} \circ D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{D}$?. La siguiente definición formaliza esa inquietud

Definición 1.3.1. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{A}$ e $\mathbf{I}$ categorías, con $\mathcal{A}$ e $\mathbf{I}$ pequeñas, y $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor.

a) $\mathcal{F}$ **preserva límites de tipo I** si para cualquier diagrama $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ y cualquier cono $(A \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$ sobre D , si $(A \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$

es un límite sobre D en $\mathcal{C}$, entonces $(\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}f_i} \mathcal{F}D(i))_{i \in I}$ es un límite sobre $\mathcal{F} \circ D$ en $\mathcal{D}$.

- b) $\mathcal{F}$ **preserva colímites de tipo I** si para cualquier diagrama $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ y cualquier cocono $(D(i) \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ sobre D , si $(D(i) \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ es un colímite sobre D en $\mathcal{C}$, entonces $(\mathcal{F}D(i) \xrightarrow{\mathcal{F}f_i} \mathcal{F}A)_{i \in I}$ es un colímite sobre $\mathcal{F} \circ D$ en $\mathcal{D}$.

- c) Sea $C \in \mathcal{A}$, el funtor

$$y_C : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

se define en cada objeto $C' \in \mathcal{C}$ por: $y_C(C') = \mathcal{C}(C', C)$ y a cada flecha $g : C' \rightarrow C'' \in \mathcal{C}$ asigna la función:

$$\begin{aligned} y_C(\bar{g}) &= - \circ g : \mathcal{C}(C'', C) \rightarrow \mathcal{C}(C', C) \\ h &\mapsto h \circ g \end{aligned}$$

- d) Sea $C \in \mathcal{A}$, el funtor

$$y^C : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

se define en cada objeto $C' \in \mathcal{C}$ por: $y^C(C') = \mathcal{C}(C, C')$ y a cada flecha $g : C' \rightarrow C'' \in \mathcal{C}$ asigna la función:

$$\begin{aligned} y^C(g) &= g \circ - : \mathcal{C}(C, C') \rightarrow \mathcal{C}(C, C'') \\ h &\mapsto g \circ h \end{aligned}$$

- e) Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ es **representable** si es isomorfo al funtor y_C para algún $C \in \mathcal{C}$. Del mismo modo, un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ es **representable** si es isomorfo al funtor y^C para algún $C \in \mathcal{C}$.

Una notación alternativa para los funtores y_C y y^C es $\mathcal{C}(-, C)$ y $\mathcal{C}(C, -)$, para algún $C \in \mathcal{C}$, respectivamente.

Teorema 1.3.1. (Representables preservan límites). Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña y $A \in \mathcal{C}$. Entonces el funtor $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites.

Demostración. La demostración consiste en verificar que $\mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ envía conos sobre algún diagrama $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ a conos en $\mathbf{Set}$ sobre $\mathcal{C}(A, -) \circ D : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}$. Aún más, que envía límites en $\mathcal{C}$ a límites en $\mathbf{Set}$.

Tomemos un cono en $\mathcal{C}$, es decir, un objeto $B \in \mathcal{C}$ y un familia

$$(B \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$$

de flechas en $\mathcal{C}$ tal que para toda flecha $u : i \rightarrow j$ en $\mathbf{I}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j) \end{array} \quad (1.67)$$

conmuta.

El funtor $\mathcal{C}(A, -)$, envía al vértice B y a $D(i)$, a $\mathcal{C}(A, B)$ y $\mathcal{C}(A, D(i))$ para cada $i \in \mathbf{I}$, respectivamente; y a cada $f_i : B \rightarrow D(i)$ lo manda a la función

$$\begin{aligned} f_i \circ - & : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, D(i)) \\ g & \mapsto f_i \circ g \end{aligned}$$

similarmente a $Du : D(i) \rightarrow D(j)$ lo manda a la función

$$\begin{aligned} Du \circ - & : \mathcal{C}(A, D(i)) \rightarrow \mathcal{C}(A, D(j)) \\ h & \mapsto Du \circ h \end{aligned}$$

Por otro lado, como (1.67) conmuta tenemos que $f_j = Du \circ f_i$. Si aplicamos el funtor $\mathcal{C}(A, -)$ a f_j tenemos que $f_j \circ - = (Du \circ -) \circ (f_i \circ -)$. Es decir, si el triángulo (1.67) conmuta, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}(A, B) & \\ f_i \circ - \swarrow & & \searrow f_j \circ - \\ \mathcal{C}(A, D(i)) & \xrightarrow{Du \circ -} & \mathcal{C}(A, D(j)) \end{array} \quad (1.68)$$

conmuta. Lo cual demuestra que si tenemos un cono sobre D en $\mathcal{C}$, entonces tendremos un cono sobre $\mathcal{C}(A, -) \circ D$. Ahora veremos que lo

mismo pasa para los límites.
Supongamos que

$$(L \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$$

es un límite sobre $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Entonces,

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j) \end{array} \quad (1.69)$$

es un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$, entonces

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}(A, L) & \\ f_i \circ - \swarrow & & \searrow f_j \circ - \\ \mathcal{C}(A, D(i)) & \xrightarrow{Du \circ -} & \mathcal{C}(A, D(j)) \end{array} \quad (1.70)$$

es un diagrama conmutativo en **Set**. Ahora, consideremos el siguiente diagrama conmutativo en **Set**,

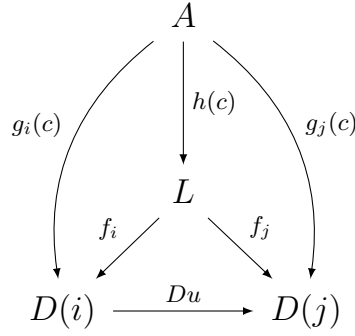
$$\begin{array}{ccc} & C & \\ g_i \swarrow & & \searrow g_j \\ \mathcal{C}(A, D(i)) & \xrightarrow{Du \circ -} & \mathcal{C}(A, D(j)) \end{array} \quad (1.71)$$

entonces, para cada $c \in C$, tenemos las flechas $g_i(c) \in \mathcal{C}(A, D(i))$ y $g_j(c) \in \mathcal{C}(A, D(j))$. Y como (1.71) conmuta, tenemos $g_j = (Du \circ -) \circ g_i$, entonces para cada $c \in C$, $g_j(c) = ((Du \circ -) \circ g_i)(c) = Du \circ g_i(c)$. Esto quiere decir que el diagrama

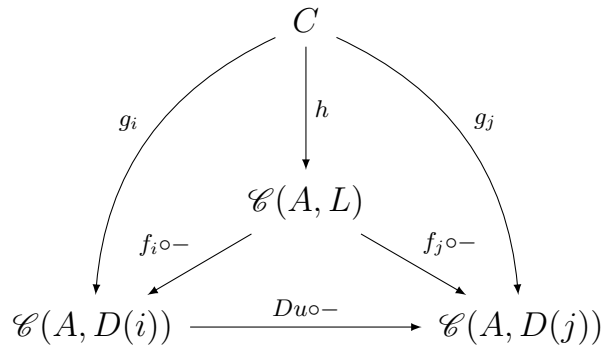
$$\begin{array}{ccc} & A & \\ g_i(c) \swarrow & & \searrow g_j(c) \\ D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j) \end{array} \quad (1.72)$$

conmuta en $\mathcal{C}$, para cada $c \in C$.

Entonces tenemos una flecha $h(c) : A \rightarrow L$, para cada $c \in C$. Ahora, como el diagrama



conmuta, tenemos que $g_i(c) = f_i \circ h(c)$ y $g_j(c) = f_j \circ h(c)$, y como esto sucede para cada c , podemos definir una flecha $h \in \mathbf{Set}(C, \mathcal{C}(A, L))$. Entonces $g_i = (f_i \circ -) \circ h$ y $g_j = (f_j \circ -) \circ h$. Por lo tanto, el diagrama



conmuta en **Set**. Finalmente como $h(c)$ es única para toda c , entonces h es única, y por tanto

$$(\mathcal{C}(A, L) \xrightarrow{f_i \circ -} \mathcal{C}(A, D(i)))_{i \in I}$$

es un límite sobre $\mathcal{C}(A, -) \circ D$ en **Set**. □

Para dualizar el teorema anterior, reemplazamos $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}^{op}$. Entonces el funtor $\mathcal{C}(-, A) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites, o bien, transforma colímites en la categoría opuesta a su categoría dominio, por límites en **Set**.

Los funtores adjuntos son comunes en el panorama matemático, y nos brindan una herramienta poderosa y sencilla para trabajar, en particular, dentro de un universo categórico, pues nos ayudan a investigar, al menos parcialmente, el inverso de un morfismo dado. Por ejemplo, en particular, si tenemos un funtor $\mathcal{F}$ de una categoría en otra, Kan observó

que hay a veces otro funtor determinado en la dirección contraria que aunque en realidad no invierte $\mathcal{F}$, es la *mejor aproximación a un inverso* en el sentido derecho o en el sentido izquierdo. Aunque el funtor $\mathcal{F}$ resulte obvio y sencillo, su funtor adjunto resulta cargado de información útil para el desarrollo de la matemática. A continuación daremos una definición de funtores adjuntos, e inmediatamente un resultado que los relaciona con los límites y colímites existentes en sus categorías dominio. Esto último nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

Definición 1.3.2. Sean las categorías y funtores

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \quad (1.73)$$

$$\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \quad (1.74)$$

Diremos que $\mathcal{F}$ es **adjunto izquierdo** de $\mathcal{G}$, y que $\mathcal{G}$ es el **adjunto derecho** de $\mathcal{F}$, si y sólo si, la asignación

$$(-)_{C,D}^* : \mathcal{D}(\mathcal{F}(C), D) \rightarrow \mathcal{C}(C, \mathcal{G}(D)) \quad (1.75)$$

$$f \mapsto f^* \quad (1.76)$$

es una biyección natural en $D \in \mathcal{D}$ y $C \in \mathcal{C}$.

Diremos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ (con su respectiva la biyección (1.75)) forman una **adjunción**. La inversa de (1.75), es la siguiente asignación:

$$(-)_{C,D}^* : \mathcal{C}(C, \mathcal{G}(D)) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}(C), D) \quad (1.77)$$

$$g \mapsto g^* \quad (1.78)$$

El uso de la misma notación (en este caso un asterisco) para la asignación (1.75) y su inversa, es estándar. Es fácil notar que si $f \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), C)$ y $g \in \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(B))$, entonces $(f^*)^* = f$ y $(g^*)^* = g$. Además, de la naturalidad en $B \in \mathcal{B}$, si $k \in \mathcal{B}(B, B')$, entonces el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), B) & \xrightarrow{(-)_{A,B}^*} & \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(B)) \\ k \circ - \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(k) \circ - \\ \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), B') & \xrightarrow{(-)_{A,B'}^*} & \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(B')) \end{array} \quad (1.79)$$

conmuta, es decir, dada $f \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), B)$, $(k \circ f)^* = \mathcal{G}(K) \circ f^*$. Similarmente para (1.77), si $l \in \mathcal{A}(A', A)$, entonces $(g \circ l)^* = g^* \circ \mathcal{G}(l)$ para cada $g \in \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(B))$.

Proposición 1.3.3. Sean $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ dos funtores. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ forman una adjunción, entonces $\mathcal{F}$ preserva colímites que existan en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{G}$ preserva límites que existan en $\mathcal{B}$.

Demostración. Primero demostraremos que $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ preserva límites. Supongamos que $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ forman una adjunción, esto es, entre otras cosas, que $\mathcal{G}$ es adjunto izquierdo de $\mathcal{F}$ y que

$$(-)^*_{A,B} : \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), C) \rightarrow \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(B)) \quad (1.80)$$

$$f \mapsto f^* \quad (1.81)$$

es una biyección natural en $C \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$; supongamos también que el diagrama $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{B}$ tiene límite

$$(L \xrightarrow{p_i} D(i))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.82)$$

Es fácil notar que

$$(\mathcal{G}(L) \xrightarrow{\mathcal{G}(p_i)} \mathcal{G}(D(i)))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.83)$$

es un cono sobre $\mathcal{G} \circ D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$. Veamos que es límite. Considere otro cono

$$(A \xrightarrow{f_i} \mathcal{G}(D(i)))_{i \in \mathbf{I}} \quad (1.84)$$

sobre $\mathcal{G} \circ D$, entonces para cada $u \in \mathbf{I}(i, j)$, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ \mathcal{G}(D(i)) & \xrightarrow{\mathcal{G}(Du)} & \mathcal{G}(D(j)) \end{array} \quad (1.85)$$

conmutativo, es decir, $\mathcal{G}(Du) \circ f_i = f_j$. Por lo que,

$$f_j^* = (\mathcal{G}(Du) \circ f_i)^* \quad (1.86)$$

$$= ((Du \circ f_i^*)^*)^* \quad (1.87)$$

$$= Du \circ (f_i)^* \quad (1.88)$$

es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}(A) & \\ f_i^* \swarrow & & \searrow f_j^* \\ D(i) & \xrightarrow{Du} & D(j) \end{array} \quad (1.89)$$

conmuta para cada $u \in \mathbf{I}(i, j)$. Por lo tanto, $(\mathcal{F}(A) \xrightarrow{f_i^*} D(i))_{i \in \mathbf{I}}$ es un cono sobre D . Y, como (1.82) es límite, entonces existe una única $\check{f} \in \mathcal{A}(\mathcal{F}(A), L)$, tal que $f_i^* = p_i \circ \check{f}$ para toda $i \in \mathbf{I}$.

Ahora, de la naturalidad en $C \in \mathcal{B}$ tenemos, para cada $p_i \in \mathcal{B}(L, D(i))$, que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), L) & \xrightarrow{(-)^*_{A,L}} & \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(L)) \\ p_i \circ - \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(p_i) \circ - \\ \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), D(i)) & \xrightarrow{(-)^*_{A,D(i)}} & \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(D(i))) \end{array} \quad (1.90)$$

conmuta. En particular, para $\check{f} \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), L)$, tenemos $\mathcal{G}(p_i) \circ \check{f}^* = (p_i \circ \check{f})^*$. Además, como $f_i^* = p_i \circ \check{f}$ para cada $i \in \mathbf{I}$, tenemos que $f_i = \mathcal{G}(p_i) \circ \check{f}^*$. Esto es, existe $\check{f}_2 = \check{f}^* \in \mathcal{A}(A, \mathcal{G}(L))$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f_i \swarrow & \downarrow \check{f}_2 & \searrow f_j \\ & \mathcal{G}(L) & \\ p_i \swarrow & & \searrow p_j \\ \mathcal{G}(D(i)) & \xrightarrow{\mathcal{G}(Du)} & \mathcal{G}(D(j)) \end{array}$$

conmuta. La unicidad de $\check{f}_2$ se sigue de la unicidad de $\check{f}$.

La demostración de que $\mathcal{F}$ (adjunto izquierdo de $\mathcal{G}$) preserva colímites, es dual. $\square$

Definición 1.3.3. Una categoría $\mathcal{C}$ tiene todos los límites (colímites) si cada diagrama $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene límite (colímite) en $\mathcal{C}$. Una categoría es **completa** (**cocompleta**) si tiene todos los límites (colímites).

Proposición 1.3.4. *La categoría **Set** es completa y cocompleta.*

Demostración. Sea $D : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}$, por el Ejemplo 1.2.2, D tiene colímite y por el Ejemplo (1.1.6) tiene límite. $\square$

En esta sección estudiaremos la estructura de la categoría de pregavillas.

Definición 2.0.1. a) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías, la categoría $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ tiene por objetos a los funtores $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y como flechas a las transformaciones naturales entre ellos.

b) Si $\mathcal{B} = \mathbf{Set}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}^{op}$ (una categoría localmente pequeña), a la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ se le conoce como **categoría de pregavillas sobre $\mathcal{C}$** y sus objetos, los funtores $X : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, se llaman **pregavillas sobre $\mathcal{C}$** .

A lo largo de las siguientes páginas, la categoría de pregavillas será el entorno en el que nos moveremos, por eso vale la pena hablar de algunas pregavillas peculiarmente importantes y de la notación que usaremos. Primero, como las pregavillas tienen por dominio una categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ las flechas sobre las que se evalúan no existen en $\mathcal{C}$, aún así, en la mayoría de los casos, usaremos las flechas $f \in \mathcal{C}$ como referencia, podríamos decir que tomaremos las flechas “sin voltear” al momento de desarrollar el discurso, pero, al momento de evaluar, denotaremos con una barra $\bar{f}$ a la flecha sobre la que se evalúa el funtor, para que quede claro que está en la categoría opuesta, por lo que si está “volteada”. Algunos ejemplos peculiares de pregavillas son:

- Las pregavillas constantes.
 ΔA con A algún conjunto, que definimos

$$\begin{aligned} \Delta A : \mathcal{C}^{op} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ C &\mapsto A \end{aligned}$$

y para cada flecha $f \in \mathcal{C}(C, C')$ definimos $\Delta A(\bar{f}) = Id_A$, por lo que es claramente un funtor y específicamente una pregavilla sobre $\mathcal{C}$.

- Las pregavillas representables.
Definidas en el capítulo anterior como funtores representables,

Definición 1.3.1, son también pregavillas pues su dominio es $\mathcal{C}^{op}$ y su codominio es **Set**

Ahora, veamos que la categoría de pregavillas es ideal para trabajar con diagramas, límites y colímites, al menos tanto como **Set**, en el siguiente sentido.

Proposición 2.0.1. *La categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es cocompleta y completa.*

Demostración. Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña y $\mathcal{F} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ un diagrama en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Lo que queremos es demostrar que este diagrama tiene colímite y el argumento principal de la demostración será que cada vez que “evaluamos” (en cierto sentido) el funtor $\mathcal{F}$ en un $C \in \mathcal{C}$ este determina un diagrama en **Set** que tiene colímite, porque **Set** es cocompleta, y si lo hacemos para cada $C \in \mathcal{C}$ eso nos permitirá construir el colímite del funtor $\mathcal{F}$. Para esto aclaremos primero como $\mathcal{F}$ define para cada $C \in \mathcal{C}$, un diagrama $\mathcal{F}_C$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_C : \mathbf{I} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ i &\mapsto \mathcal{F}(i)(C) \end{aligned}$$

y a un morfismo $h \in \mathbf{I}(i, j)$ le asigna

$$\mathcal{F}_C(h) = (\mathcal{F}h)_C$$

donde $(\mathcal{F}h)_C \in \mathbf{Set}(\mathcal{F}(i)(C), \mathcal{F}(j)(C))$. Ahora, como **Set** es cocompleta, cada diagrama $\mathcal{F}_C$ sobre **Set** tiene colímite en **Set**. Llamemos

$$(\mathcal{F}_C(i) \xrightarrow{q_{i,C}} X_C)_{i \in \mathbf{I}}$$

al colímite de $\mathcal{F}_C$ y como podemos hacer esto para cada $C \in \mathcal{C}$, construimos una asignación

$$\begin{aligned} X : \mathcal{C}^{op} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ C &\mapsto X_C \end{aligned}$$

y para que X sea funtor aún le falta definirse en flechas, para esto veamos que hay una manera de determinar de manera única, para cada $f \in \mathcal{C}(C, C')$ una flecha $X(\bar{f}) \in \mathbf{Set}(X_{C'}, X_C)$, para esto notemos que la familia

$$(\mathcal{F}_{C'}(i) \xrightarrow{(q_{i,C}) \circ \mathcal{F}i(\bar{f})} X_C)_{i \in \mathbf{I}} \quad (2.1)$$

es un cocono con vértice en X_C , pues, para cada $h \in \mathbf{I}(i, j)$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{C'}(i) & \xrightarrow{(\mathcal{F}h)_{C'}} & \mathcal{F}_{C'}(j) \\ & \searrow (q_{i,C}) \circ \mathcal{F}i(\bar{f}) & \swarrow (q_{j,C}) \circ \mathcal{F}j(\bar{f}) \\ & X_C & \end{array} \quad (2.2)$$

conmuta, ya que, por la naturalidad de $\mathcal{F}h$, sucede que

$$((q_{j,C}) \circ \mathcal{F}(j)(\bar{f})) \circ (\mathcal{F}h)_{C'} = (q_{j,C}) \circ (\mathcal{F}h)_C \circ \mathcal{F}(i)(\bar{f})$$

y como

$$(\mathcal{F}_C(i) \xrightarrow{q_{i,C}} X_C)_{i \in \mathbf{I}}$$

es un cocono, entonces

$$q_{i,C} = (q_{j,C}) \circ \mathcal{F}_C(h) = (q_{j,C}) \circ (\mathcal{F}h)_C \quad (2.3)$$

(la última igualdad es por como definimos $\mathcal{F}_C$ en flechas). Por lo tanto,

$$((q_{j,C}) \circ \mathcal{F}(j)(\bar{f})) \circ (\mathcal{F}h)_{C'} = (q_{i,C}) \circ (\mathcal{F}i)(\bar{f})$$

Es decir, el diagrama (2.2) conmuta.

Ahora, dado el colímite,

$$(\mathcal{F}_{C'}(i) \xrightarrow{q'_{i,C'}} X_{C'})_{i \in \mathbf{I}}$$

para el cocono (2.1) existe una única flecha

$$\check{f} : X_{C'} \rightarrow X_C$$

con la propiedad

$$\check{f} \circ q'_{i,C'} = q_{i,C} \circ \mathcal{F}(i)(\bar{f}) \quad (2.4)$$

para todo $i \in \mathbf{I}$. Esto nos permite, primero, definir a X en flechas como $X(\bar{f}) = \check{f}$, y es fácil ver que esta definición cumple la asociatividad y preserva la identidad, entonces, $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$; también es fácil demostrar que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(i)(C') & \xrightarrow{q'_{i,C'}} & X(C') \\ \mathcal{F}(i)(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow X(\bar{f}) \\ \mathcal{F}(i)(C) & \xrightarrow{q_{i,C}} & X(C) \end{array} \quad (2.5)$$

conmuta. Entonces, para cada $i \in \mathbf{I}$

$$\mathcal{F}(i) \xrightarrow{q_i} X$$

es una transformación natural. También para $h \in \mathbf{I}(i, j)$, la transformación natural $\mathcal{F}(h) : \mathcal{F}(i) \rightarrow \mathcal{F}(j)$ cumple que

$$(q_j)_C \circ \mathcal{F}(h)_C = (q_i)_C$$

como se ve en (2.3), para cada $C \in \mathcal{C}$. Lo que equivale a

$$(q_j) \circ \mathcal{F}(h) = q_i.$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{F}(i) \xrightarrow{q_i} X)_{i \in \mathbf{I}}$$

es un cocono en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, con vertice en X . Ahora supongamos un cocono

$$(\mathcal{F}(i) \xrightarrow{f_i} \mathcal{G})_{i \in \mathbf{I}}$$

y recordado que $\mathcal{F}_C(i) = \mathcal{F}(C)(i)$, esto determina, para cada $C \in \mathcal{C}$, un cocono

$$(\mathcal{F}(i)(C) \xrightarrow{(f_i)_C} \mathcal{G}(C))_{i \in \mathbf{I}}$$

entonces, existe un morfismo $h_C \in \mathbf{Set}(X_C, \mathcal{G}(C))$ tal que

$$h_C \circ (q_{i,C}) = (f_i)_C. \quad (2.6)$$

Lo que queremos ahora, es demostrar que esto define una transformación natural $h \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, G)$ por lo que deseamos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X(C') & \xrightarrow{h_{C'}} & \mathcal{G}(C') \\ X(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(\bar{f}) \\ X(C) & \xrightarrow{h_C} & \mathcal{G}(C) \end{array} \quad (2.7)$$

donde $X(C) = X_C$ para cada $C \in \mathcal{C}$, conmute para cada $f \in \mathcal{C}(C, C')$ pero, partiendo de la naturalidad de f_i en la misma f sucede que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(i)(C') & \xrightarrow{(f_i)_{C'}} & \mathcal{G}(C') \\ \mathcal{F}(i)(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(\bar{f}) \\ \mathcal{F}(i)(C) & \xrightarrow{(f_i)_C} & \mathcal{G}(C) \end{array} \quad (2.8)$$

es decir, $\mathcal{G}(\bar{f}) \circ (f_i)_{C'} = (f_i)_C \circ \mathcal{F}(i)(f)$ y por (2.6) tenemos que

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \circ (h_{C'} \circ (q_i)_{C'}) = (h_C \circ (q_i)_C) \circ \mathcal{F}(i)(\bar{f})$$

y por la naturalidad de q_i , según el diagrama (2.5) sucede que

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \circ h_{C'} \circ (q_i)_{C'} = h_C \circ X(\bar{f}) \circ (q_i)_{C'} \quad (2.9)$$

para cada $i \in I$, entonces, por la Proposición 1.3.1 y porque $(\mathcal{F}_{C'}(i) \xrightarrow{q'_{i,C'}} X_{C'})_{i \in I}$ es un colímite, tenemos que

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \circ h_{C'} = h_C \circ X(\bar{f}) \quad (2.10)$$

es decir, el diagrama (2.7) conmute como deseabamos, por lo tanto h si es transformación natural y es única con la propiedad de que $h \circ q_i = f_i$, para cada $i \in I$, porque h_C lo es para cada $C \in \mathcal{C}$. Por lo tanto X es el colímite de $\mathcal{F}$.

La demostración de que $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es completa, es dual a la anterior. $\square$

El procedimiento de la demostración anterior, podemos expresarlo en la siguiente frase: *los colímites (límites) en la categoría de pregavillas*

se calculan punto por punto. Por “punto” nos referiamos a los objetos de la categoría $\mathcal{C}$. Por ejemplo, si tomamos dos pregavillas $X, Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ su coproducto, puede ser calculado primero tomando el coproducto $X(C) + Y(C) \in \mathbf{Set}$ para cada “punto” en $\mathcal{C}$, entonces ensamblamos todos los coproductos para construir una pregavilla $X + Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Precisamente es lo que se hizo en la demostración: tomamos un funtor $\mathcal{F} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ y para calcular su colímite en la categoría de pregavillas, primero calculamos el colímite del funtor $\mathcal{F}_C : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}$ en $\mathbf{Set}$ para cada $C \in \mathcal{C}$, y a partir de estos colímites se contruyó el colímite para $\mathcal{F} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Esperamos que esta explicación baste para que se comprenda el sentido en que usamos de la frase “punto por punto”.

Algunas consecuencias inmediatas son:

- I) Si una flecha $\mu : X \rightarrow Y$ en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es monomorfismo entonces para cada $C \in \mathcal{C}$, μ_C es monomorfismo en $\mathbf{Set}$:

Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es monomorfismo si y solo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{Id_X} & X \\ \downarrow Id_X & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (2.11)$$

es un pullback. Esto no es más que una equivalencia entre la definición de monomorfismo y la propiedad universal de este cuadrado particular, pues dado otro cuadrado que conmute

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (2.12)$$

es decir, $f \circ g = f \circ h$ y por la propiedad universal del pullback debe existir una flecha $\check{f}$ tal que $f = Id_X \circ \check{f} = g$ esto es equivalente a que $f = g$.

Así, si μ es monomorfismo, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ \downarrow 1 & & \downarrow \mu \\ X & \xrightarrow{\mu} & Y \end{array} \quad (2.13)$$

es un pullback en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, el cual existe pues la categoría es completa. Que (2.13) es pullback, como los límites se calculan punto por punto en esta categoría, equivale a que

$$\begin{array}{ccc} X(C) & \xrightarrow{1} & X(C) \\ \downarrow 1 & & \downarrow \mu_C \\ X(C) & \xrightarrow{\mu_C} & Y(C) \end{array} \quad (2.14)$$

sea un pullback en $\mathbf{Set}$. Es decir cada μ_C es monomorfismo en $\mathbf{Set}$.

- II) El objeto inicial de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es la pregavilla constante con valor $\emptyset$:
Pues ser objeto inicial (terminal) se puede ver como el colímite (límite) del único funtor que se define desde la categoría sin objetos. Para este tipo de diagrama un cono es simplemente un objeto, como los límites (colímites) en la categoría de pregavillas se calculan punto por punto y $\mathbf{Set}$ tiene objeto inicial $\emptyset$ y por terminal el singular $\{*\}$, el inicial y terminal de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ son la pregavilla $\Delta\emptyset \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ y el funtor que todo lo manda a un conjunto con un solo elemento, $\Delta\{*\} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, respectivamente.

Las categorías de pregavillas, mas allá de su definición, tienen gran cantidad de presentaciones, dependiendo de su categoría subyacente, para ver esto, tres ejemplos de este tipo de categorías indicando las peculiaridades de cada uno:

Ejemplo 2.0.1. Sea $\mathcal{M}$ una categoría localmente pequeña, de un solo objeto, digamos $*$. Por ser $\mathcal{M}$ categoría, asegura la existencia de $1 = Id_* \in \mathcal{M}(*, *)$; además, si f y g son morfismos en $\mathcal{M}$ entonces fg está en $\mathcal{M}$. Y también, si f , g y h son morfismos en $\mathcal{M}$, entonces $f(gh) = (fg)h$. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{M}(*, *)$, forma un monoide M . Luego, un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ asocia al único objeto un conjunto X y a cada elemento $m \in M$ (que corresponde a una flecha en $\mathcal{M}$) con una función $\mathcal{F}(\overline{m}) : X \rightarrow X$. Lo que nos permite definir otra función:

$$\begin{aligned} \cdot : X \times M &\rightarrow X \\ (x, m) &\mapsto x \cdot m = \mathcal{F}(\overline{m})(x) \end{aligned}$$

Que cumple:

- Dado 1, el neutro de M , $x \cdot 1 = \mathcal{F}(\overline{Id_*})(x) = x$ pues 1 es la identidad en el único objeto de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{F}$ es un funtor.
- También

$$\begin{aligned}
 x \cdot (m_1 m_2) &= \mathcal{F}(\overline{m_1 m_2})(x) \\
 &= \mathcal{F}(\overline{m_2} \circ \overline{m_1})(x) \\
 &= \mathcal{F}\overline{m_2}(\mathcal{F}(\overline{m_1})(x)) \\
 &= (x \cdot m_1) \cdot m_2
 \end{aligned}$$

para todo $m_1, m_2 \in M$ y para todo $x \in X$.

Si definimos **Set** M como la categoría de acciones derechas del monoide M sobre cualquier conjunto, el desarrollo anterior nos permite definir un funtor:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} : \mathbf{Set}^{\mathcal{M}^{op}} &\rightarrow \mathbf{Set}M \\
 \mathcal{F} &\mapsto (\mathcal{F}(*), \cdot)
 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}(*)$ es el conjunto que le asigna el funtor $\mathcal{F}$ al único elemento de $\mathcal{C}$ y $\cdot$ es la función $\mathcal{F}(*) \times M \rightarrow \mathcal{F}(*)$ que define a la acción derecha de M sobre $\mathcal{F}(*)$. También, la definición de $\mathcal{M}$ en una transformación natural $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es la función $\mathcal{M}(\mu) = \mu_* : \mathcal{F}(*) \rightarrow \mathcal{G}(*)$. Por la naturalidad de la transformación, para cualquier $m \in M$ y para todo $x \in \mathcal{F}(*)$, se cumple:

$$\begin{aligned}
 \mu_*(x \cdot m) &= \mu_*(\mathcal{F}(\overline{m})(x)) \\
 &= \mathcal{G}(\overline{m})(\mu_*(x)) \\
 &= \mu_*(x) \bullet m
 \end{aligned}$$

donde $\bullet$ es la acción que se define mediante el funtor $\mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{M}(\mu) \in \mathbf{Set}M((\mathcal{F}(*), \cdot), (\mathcal{G}(*), \bullet))$.

El funtor $\mathcal{M}$ tiene inverso:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}^{-1} : \mathbf{Set}M &\rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{M}^{op}} \\
 (X, \cdot) &\rightarrow \mathcal{F}_X
 \end{aligned}$$

donde el funtor $\mathcal{F}_X$ debe quedar determinado por la acción, $\mathcal{F}_X(*) = X$ y para $m \in M$ la función $\mathcal{F}_X(\overline{m}) : X \rightarrow X$ asigna, a cada $x \in X$, $\mathcal{F}(\overline{m})(x) = x \cdot m$. Dada $f \in \mathbf{Set}M((X, \cdot), (Y, \bullet))$, se define

$$\mathcal{M}^{-1}(f) = \mu : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_Y$$

Cuya única instancia se define $\mu_* = f$. Se cumple

$$\begin{aligned} \mu_*(\mathcal{F}_X(\overline{m})(x)) &= \mu_*(x \cdot m) \\ &= f(x \cdot m) \\ &= f(x) \bullet m \\ &= \mathcal{F}_Y(\overline{m})(\mu_*(x)) \end{aligned}$$

por lo que es una transformación natural. Por último, veamos que la composición es la identidad, en las dos formas:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \circ \mathcal{M}^{-1}(X, \cdot) &= \mathcal{M}(\mathcal{F}_X) \\ &= (X, \bullet) \end{aligned}$$

y $(X, \cdot) = (X, \bullet)$ pues $X = X$ y $x \cdot m = \mathcal{F}_X(\overline{m})(x) = x \bullet m$, para toda $m \in M$ y $x \in X$. La otra composición es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{M}(\mathcal{F}) &= \mathcal{M}^{-1}((\mathcal{F}(*), \cdot)) \\ &= \mathcal{F}_{\mathcal{F}(*)} \end{aligned}$$

aquí, claramente $\mathcal{F}(*) = \mathcal{F}_{\mathcal{F}(*)}(*)$ y $\mathcal{F}(\overline{m})(x) = x \cdot m = \mathcal{F}_{\mathcal{F}(*)}(\overline{m})(x)$. También, si f es un morfismo en $\mathbf{Set}M$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \circ \mathcal{M}^{-1}(f) &= \mathcal{M}(\mathcal{M}^{-1}(f)) \\ &= \mathcal{M}(\mu) \\ &= \mu_* \\ &= f \end{aligned}$$

la última igualdad es porque definimos la única instancia de μ como f . Por otro lado, si μ es un morfismo en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{M}(\mu) &= \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{M}(\mu)) \\ &= \mathcal{M}^{-1}(\mu_*) \\ &= \mu\end{aligned}$$

ya que las transformaciones naturales en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ quedan completamente determinadas por su instancia en el único objeto. Por lo tanto, $\mathbf{Set}M \cong \mathbf{Set}^{\mathcal{M}^{op}}$, es decir, la categoría $\mathbf{Set}M$ es una categoría de pregavillas.

Ejemplo 2.0.2. Consideremos un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ visto como una categoría, es decir, una categoría $\mathcal{P}$ cuyos objetos son los elementos de P y dados $p, q \in P$, el conjunto de las flechas entre ellos es $\mathcal{C}(p, q) = \{i\}$ si $p \leq q$ o el vacío en otro caso. Veamos qué es una pregavilla representable sobre $\mathcal{P}$. Sea $p \in P$ y si $\downarrow(p) = \{q \in P \mid q \leq p\}$ la pregavilla $y_p \in \mathbf{Set}^{\mathcal{P}^{op}}$ es tal que:

$$y_p(q) = \{i\} \iff q \in \downarrow(p)$$

Por lo tanto, el funtor representable y_p con $p \in P$ se puede asociar con un conjunto $\downarrow(p)$.

Ejemplo 2.0.3. Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado T con elemento mínimo que además cumple que para cualquier $x \in T$ el conjunto $\downarrow(x) = \{y \in T \mid y \leq x\}$ es un subconjunto finito de T linealmente ordenado. Un morfismo de árboles $f : T \rightarrow S$ es una función que preserva el orden con la propiedad de que para cada elemento $x \in T$, la restricción de f a $\downarrow(x)$ es una biyección de $\downarrow(x)$ a $\downarrow(f(x))$. Un bosque es un conjunto de árboles, un morfismo entre bosques es una función $\phi : X \rightarrow Y$ junto con una colección $(f_x \mid x \in X)$ de morfismos de árboles tales que $f_x : x \rightarrow \phi(x)$. La categoría de los bosques y los morfismos entre ellos es precisamente la categoría de pregavillas sobre ω , el primer ordinal infinito.

2.1 Cartesiana Cerrada

En esta sección y en el Capítulo 3 utilizaremos el famoso **Lema de Yoneda** por lo que, consideramos que vale la pena mencionarlo. Principalmente con fines de establecer notación y dejar en claro su naturalidad en dos instancias.

Lema 2.1.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña y $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ su categoría de pregavillas. Entonces, para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ y cada $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. La asignación

$$((-)_C(Id_C))_X : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, X) \rightarrow X(C) \quad (2.15)$$

$$\alpha \mapsto \alpha_C(Id_C) \quad (2.16)$$

es una biyección natural en X y en C , es decir, si $g \in \mathcal{C}(C', C)$ y $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, X')$, entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, X) & \xrightarrow{((-)_C(Id_C))_X} & X(C) \\ \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_g, \alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha_{C'} \circ X(\bar{g}) = X'(\bar{g}) \circ \alpha_C \\ \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{C'}, X') & \xrightarrow{((-)_{C'}(Id_{C'}))_{X'}} & X'(C') \end{array}$$

conmuta.

Donde $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_g, \alpha) = \alpha \circ - \circ y_g$ y el morfismo y_g es la transformación natural entre los representables $y_{C'}$ y y_C . La naturalidad en C se expresa, cuando $\alpha = Id_X$ como

$$(\mu \circ y_g)_{C'}(Id_{C'}) = X(\bar{g})(\mu)_C(Id_C) \quad (2.17)$$

La inversa de la asignación (2.15), para $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, es

$$\hat{\cdot} : X(C) \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, X) \quad (2.18)$$

$$x \mapsto \hat{x} = X(-)(x) \quad (2.19)$$

cuya instancia en $C' \in \mathcal{C}$, para cada $f \in y_C(C')$, es

$$(X(-)(x))_{C'}(f) = X(f)(x).$$

Definición 2.1.1. Dadas categorías $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y funtores entre ellas $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ & \downarrow \mathcal{F} & \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{C} \end{array}$$

La **categoría comma** $(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ (algunas veces denotada por $(\mathcal{F} \downarrow \mathcal{G})$) tiene por objetos tripletas (A, h, B) con $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, h \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(B))$ y una flecha $(f, g) : (A, h, B) \rightarrow (A', h', B')$ es un par de morfismos $f : A \rightarrow A'$ y $g : B \rightarrow B'$ en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{B}$ respectivamente, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{h} & \mathcal{G}(B) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(g) \\ \mathcal{F}(A') & \xrightarrow{h'} & \mathcal{G}(B') \end{array}$$

conmuta en $\mathcal{C}$.

Un caso particular de esta categoría lo tenemos cuando elegimos las categorías y funtores:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \downarrow \Delta X & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{y_-} & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \end{array}$$

donde X es alguna pregavilla y ΔX es el funtor constante, que manda a cualquier objeto a la pregavilla X y a cada morfismo a la identidad Id_X , el dominio de ΔX no tiene importancia por las características del funtor, lo que simplifica el tratamiento de esta categoría comma. Se suele denotar $(y_- \downarrow X)$ y sus objetos, en principio, son tripletas (C, μ, A) donde $C \in \mathcal{C}, \mu \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, X)$ y $A \in 1$, pero 1 tiene solo un objeto, por lo tanto, se escriben como pares (C, μ) , en este sentido esta categoría es pequeña si $\mathcal{C}$ lo es, pues los objetos de $(y_- \downarrow X)$ son tantos como $\prod_{C \in \mathcal{C}} (\{C\} \times X(C)) \cong \prod_{C \in \mathcal{C}} (X(C))$, es decir, es isomorfo a un

conjunto si los objetos de $\mathcal{C}$ son un conjunto. Un morfismo de (C, μ) a (C', μ') es un morfismo f en $\mathcal{C}(C, C')$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} y_C & \xrightarrow{y_f} & y_{C'} \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu' \\ & X & \end{array} \quad (2.20)$$

en la categoría de pregavillas sobre $\mathcal{C}$ entonces, claramente, $(y_- \downarrow X)((C, \mu), (C', \mu'))$ es isomorfo a un subconjunto de $\mathcal{C}(C, C')$. Por lo que $(y_- \downarrow X)$ es una categoría pequeña.

Aquí vale la pena notar que, cuando el diagrama (2.20) conmuta, por el *Lema de Yoneda*, en su naturalidad en C , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{C'}, X) & \xrightarrow{(-)_{C'}(Id_{C'})} & X(C') \\ \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_f, X) \downarrow & & \downarrow X(\bar{f}) \\ \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, X) & \xrightarrow{(-)_C(Id_C)} & X(C) \end{array}$$

con $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_f, X) = y_f \circ -$, conmuta también, por lo que

$$\begin{aligned} X(\bar{f})(\mu'_{C'})(Id_{C'}) &= (y_f \circ \mu')_C(Id_C) \\ &= \mu_C(Id_C). \end{aligned}$$

y si $x \in X(C')$, como

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{C'}, X) & \xleftarrow{\quad} & X(C') \\ y_f \circ - \downarrow & & \downarrow X(\bar{f}) \\ \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, X) & \xleftarrow{\quad} & X(C) \end{array}$$

conmuta, sucede que

$$\begin{array}{ccc} y_C & \xrightarrow{y_f} & y_{C'} \\ & \searrow & \swarrow \\ \widehat{X(\bar{f})(x)} & & \hat{x} \\ & X & \end{array} \quad . \quad (2.21)$$

conmuta.

Ahora, para la misma pregavilla X , definimos el funtor:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_X : (y_- \downarrow X) &\rightarrow \mathcal{C} \\ (C, \mu) &\mapsto C \end{aligned}$$

que para cada flecha $f \in (y_- \downarrow X)((C, \mu), (C', \mu'))$, $\mathcal{U}_X(f) = f$.

Y la transformación natural $\rho : (y_- \circ \mathcal{U}_X) \rightarrow \Delta X$, cuya instancia en $(C, \mu) \in (y_- \downarrow X)$ define como $\rho_{(C, \mu)} = \mu$.

Proposición 2.1.1. *El funtor $(y_- \circ \mathcal{U}_X) : (y_- \downarrow X) \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, tiene colímite. Además, este colímite es el cocono determinado por la transformación natural*

$$\rho : (y_- \circ \mathcal{U}_X) \rightarrow \Delta X.$$

Demostración. La demostración consiste en establecer que para cada cocono

$$(y_- \circ \mathcal{U}_X(C, \mu) \xrightarrow{\lambda_{(C, \mu)}} Y)_{(C, \mu) \in (y \downarrow X)} \quad (2.22)$$

con $Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, existe una única transformación natural $\alpha : X \rightarrow Y$ tal que $\alpha \circ \rho_{(C, \mu)} = \lambda_{(C, \mu)}$. Ahora, como (2.22) es un cocono, si tomamos $f \in \mathcal{C}(C, C')$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} y_C & \xrightarrow{y_f} & y_{C'} \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu' \\ & X & \end{array}$$

conmuta; entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} y_- \circ \mathcal{U}_X(C, \mu) & \xrightarrow{y_- \circ \mathcal{U}_X(f)} & y_- \circ \mathcal{U}_X(C', \mu') \\ & \searrow \lambda_{(C, \mu)} & \swarrow \lambda_{(C', \mu')} \\ & Y & \end{array} \quad (2.23)$$

conmuta, pues f es un morfismo en $(y_- \downarrow X)((C, \mu), (C', \mu'))$ también. Podemos reescribir el diagrama (2.23) como

$$\begin{array}{ccc} y_C & \xrightarrow{y_f} & y_{C'} \\ & \searrow \lambda_{(C, \mu)} & \swarrow \lambda_{(C', \mu')} \\ & Y & \end{array}$$

que claramente conmuta porque solo hemos evaluado el funtor. Ahora, probemos la existencia:

Ahora, definimos $\alpha_C(x) = (\lambda_{(C,\widehat{x})})_C(Id_C) \in Y(C)$, esto está bien definido por la correspondencia biyectiva que asegura el *Lema de Yoneda*. Veamos que esto es precisamente una transformación natural $\alpha : X \rightarrow Y$, cuya instancia α_C es la función:

$$\begin{aligned}\alpha_C : X(C) &\rightarrow Y(C) \\ x &\mapsto (\lambda_{(C,\widehat{x})})_C(Id_C)\end{aligned}$$

Es decir, demostremos que, para cualquier $f \in \mathcal{C}(C, C')$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc}X(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & Y(C') \\ X(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow Y(\bar{f}) \\ X(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & Y(C)\end{array}$$

conmuta. Eso es inmediato del diagrama (2.21), porque implica que

$$\begin{array}{ccc}y_C & \xrightarrow{y_f} & y_{C'} \\ & \searrow \lambda_{(C, X(\bar{f})(x))} & \swarrow \lambda_{(C', \widehat{x})} \\ & X & \end{array} \quad (2.24)$$

conmuta. Entonces

$$\begin{aligned}\alpha_C(X(\bar{f})(x)) &= (\lambda_{(C, X(\bar{f})(x))})_C(Id_C) \\ &= (\lambda_{(C', \widehat{x})} \circ y_f)_C(Id_C) \\ &= (\lambda_{(C', \widehat{x})})_C(f) \\ &= Y(\bar{f})(\alpha_{(C', \widehat{x})})_{C'}(Id_{C'}) \\ &= Y(\bar{f})(\alpha_{C'}(x))\end{aligned}$$

dónde la penúltima igualdad es por la naturalidad de $\lambda_{(C', \widehat{x})}$ según el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} y_{C'}(C') & \xrightarrow{(\lambda_{(C', \widehat{x})})_{C'}} & Y(C') \\ \downarrow y_{C'}(\bar{f}) & & \downarrow Y(\bar{f}) \\ y_{C'}(C) & \xrightarrow{(\lambda_{(C', \widehat{x})})_C} & Y(C) \end{array} .$$

Por lo tanto α es una transformación natural. Ahora, para verificar que $\alpha \circ \rho_{(C, \mu)} = \lambda_{(C, \mu)}$ notemos que dada $g : C' \rightarrow C$:

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \rho_{(C, \mu)})_{C'}(g) &= (\alpha \circ \mu)_{C'}(g) \\ &= \alpha_{C'}(\mu_{C'}(g)) \\ &= (\lambda_{(C', \widehat{\mu_{C'}(g)})})_{C'}(id_{C'}) \end{aligned}$$

entonces deseamos que

$$(\lambda_{(C', \widehat{\mu_{C'}(g)})})_{C'}(id_{C'}) = (\lambda_{(C, \mu)})_{C'}(g) \quad (2.25)$$

lo que sería consecuencia de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} y_{C'}(C') & \xrightarrow{y_g} & y_C(C') \\ & \searrow (\lambda_{(C', \widehat{\mu_{C'}(g)})})_{C'} & \swarrow (\lambda_{(C, \mu)})_{C'} \\ & Y(C') & \end{array} \quad (2.26)$$

conmute. Pero para eso, es suficiente que, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} y_{C'} & \xrightarrow{y_g} & y_C \\ & \searrow \widehat{\mu_{C'}(g)} & \swarrow \mu \\ & Y & \end{array} \quad (2.27)$$

conmute. De modo que demostrar la igualdad (2.25) se reduce a demostrar que $\mu \circ y_g = \widehat{\mu_{C'}(g)}$, para esto, consideremos la naturalidad de μ a lo largo de la misma flecha $g : C \rightarrow C'$ como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
y_C(C) & \xrightarrow{\mu_C} & Y(C) \\
y_C(\bar{g}) \downarrow & & \downarrow Y(\bar{g}) \\
y_C(C') & \xrightarrow{\mu_{C'}} & Y(C')
\end{array}$$

que implica que

$$Y(\bar{g})(\mu_C(Id_C)) = \mu_{C'}(g) \quad (2.28)$$

y, como en el diagrama (2.21), el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
y_{C'} & \xrightarrow{y_g} & y_C \\
\searrow & & \swarrow \\
\widehat{Y(\bar{g})(\mu_C(Id_C))} & & \widehat{\mu_C(Id_C)}
\end{array}$$

conmuta, entonces, sucede que (2.27) conmuta pues $Y(\bar{g})(\mu_C(Id_C)) = \mu_{C'}(g)$ y $\widehat{\mu_C(Id_C)} = \mu$ porque $\widehat{}$ es la inversa de $(-)_C(Id_C)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(\lambda_{(C', \widehat{\mu_{C'}(g)})})_{C'}(id_{C'}) &= (\lambda_{(C', \mu)})_{C'}(y_g(id_{C'})) \\
&= (\lambda_{(C, \mu)})_{C'}(g)
\end{aligned}$$

La unicidad es inmediata. $\square$

Esta proposición nos dice que **toda pregavilla es un colímite de representables**, pues, lo que acabamos de demostrar es que el cocono

$$(y_- \circ U_X(C, \mu) \xrightarrow{\lambda_{(C, \mu)}} X)_{(C, \mu) \in (y \downarrow X)} \quad (2.29)$$

es el colímite del funtor $(y_- \circ \mathcal{U}_X)$. Podemos reescribir el colímite (2.29) como

$$(y_C \xrightarrow{\lambda_{(C, \mu)}} Y)_{(C, \mu) \in (y \downarrow X)} \quad (2.30)$$

Además, para cada pregavilla X , podemos construir una categoría $(y_- \downarrow X)$, que determina una colección de flechas $\rho_{(C, \mu)}$ tales que X es el colímite de silueta $(y_- \downarrow X)$. Por lo que X se puede ver como un colímite, específicamente de silueta $(y_- \downarrow X)$, de funtores representables y_C .

Este resultado se puede generalizar en forma de una adjunción.

Teorema 2.1.2. Para cada funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de una categoría localmente pequeña a una categoría localmente pequeña y cocompleta. El funtor

$$\begin{aligned} J : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \\ D &\longmapsto J(D) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set} \\ C &\mapsto \mathcal{D}(\mathcal{F}(C), D) \end{aligned}$$

tiene adjunto izquierdo

$$\begin{aligned} L : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} &\rightarrow \mathcal{D} \\ X &\mapsto L(X) = \text{Colim}(\mathcal{F} \circ \mathcal{U}_X) \end{aligned}$$

Demostración. La demostración consiste en ver que cada transformación natural α entre X y $J(D)$ determina un cocono en $\mathcal{D}$ de silueta $\mathcal{F} \circ \mathcal{U}_X$ y por lo tanto un morfismo entre $L(X)$ y D .

Definimos $\lambda_{(C, \mu)} = \alpha_C(\bar{\mu})$ para un $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, J(D))$, con $\mu \in$. Dada $f \in \mathcal{C}(C', C)$, entonces, existe una flecha $f \in (y \downarrow \mathcal{U}_X)((C, \mu), (C', \mu'))$, con $\bar{\mu}' = X(f)(\bar{\mu})$, también, el diagrama (2.20) conmuta en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ y por la naturalidad de α

$$\begin{aligned} J(D)(f)(\alpha_C(\bar{\mu})) &= \alpha'_C(X(f)(\bar{\mu})) \\ &= \alpha'_C(\bar{\mu}') \end{aligned}$$

Lo que equivale a $J(D)(f)(\lambda_{(C, \mu)}) = \lambda_{(C', \mu')}$, esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} J(D)(C) & \xrightarrow{J(D)(f)} & J(D)(C') \\ & \searrow \lambda_{(C, \mu)} & \swarrow \lambda_{(C', \mu')} \\ & D & \end{array}$$

conmuta en $\mathcal{D}$, por lo tanto $\lambda_{(C, \mu)}$ es un cocono.

La propiedad universal de $L(X)$ nos permite concluir precisamente

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, J(D)) \cong \mathcal{D}(L(X), D)$$

naturalmente en X y en D , esto es, la adjunción entre L y J . $\square$

Corolario 2. Para cada funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ de una categoría localmente pequeña a una categoría cocompleta. Hay un funtor que preserva colímites $L : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow \mathcal{D}$, único salvo isomorfismos, tal que el digrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{D} \\ & \searrow y \quad \nearrow L & \\ & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} & \end{array}$$

conmuta. Este funtor es el mismo L del Teorema 2.1.2.

Definición 2.1.2. a) Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y sea $C \in \mathcal{C}$. Definimos el funtor producto

$$- \times C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad (2.31)$$

en objetos $A \in \mathcal{C}$ como $A \times C$; y en morfismos $f \in \mathcal{C}(B, D)$ como

$$\begin{aligned} f \times id_C : B \times C &\rightarrow D \times C \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y). \end{aligned}$$

b) Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y sea $C \in \mathcal{C}$. Siempre que el funtor $- \times C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene adjunto derecho, se denota por $(-)^C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ y decimos que C es un **objeto exponenciable** de $\mathcal{C}$. Para cada $A \in \mathcal{C}$ el objeto A^C se llama **exponencial**.

c) Una categoría $\mathcal{C}$ es **cartesiana cerrada** si tiene productos finitos y para cada $C \in \mathcal{C}$, el funtor $- \times C$ tiene un adjunto derecho.

Como primer ejemplo de categoría cartesiana cerrada tenemos a la categoría **Set**, que como ya vimos es completa y cocompleta (Proposición 1.3.4), entonces tiene productos, el producto cartesiano de dos conjuntos (Ejemplo 1.1.1). Por otro lado, si $A, B \in \mathbf{Set}$, el objeto exponencial A^B , es el conjunto de todas las funciones con dominio B y codominio A . La adjunción se da al identificar naturalmente a la función $f \in \mathbf{Set}(C \times B, A)$ con la función $g \in \mathbf{Set}(C, A^B)$ definida por $g(b)(c) = f(c, b)$ con $c \in C$ y $b \in B$. El siguiente resultado nos será útil para demostrar, que la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es cartesiana cerrada.

Proposición 2.1.2. Sea $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. El funtor $- \times X : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ preserva colímites.

Demostración. Como los límites (en particular los productos) y los colímites en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ se calculan punto por punto, demostrar que el funtor $- \times X : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ preserve colímites, es equivalente a probar que el funtor $- \times A : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, para cualquier conjunto A , preserva colímites, pero esto se sigue del hecho de que $\mathbf{Set}$ es cartesiana cerrada y de que $- \times A : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ es adjunto izquierdo de $(-)^A$ (Proposición 1.3.3) para cualquier conjunto A .

□

Proposición 2.1.3. La categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es cartesiana cerrada.

Demostración. Como $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es completa, tiene productos, y en particular, productos finitos. Entonces resta demostrar que tiene exponenciales. Para esto definiremos exponenciales en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ y demostraremos la adjunción de la Definición 2.1.2. Sea $Y \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$. Para cada pregavilla $Z : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, sea Z^Y la pregavilla definida en objetos como

$$Z^Y(A) = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_A \times Y, Z) \quad (2.32)$$

para cada $A \in \mathcal{C}$. Esto define en objetos de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ al funtor

$$(-)^Y : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$$

Por otro lado, como toda pregavilla es un colímite de prerepresentables, si tomamos una pregavilla X , tenemos al diagrama

$$y_{\mathcal{U}_X} = (y_- \circ \mathcal{U}_X) : (y_- \downarrow X) \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \quad (2.33)$$

del cual X es colímite, es decir, $X \cong \text{Colim}(y_{\mathcal{U}_X})$. Así, bajo el representable $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(-, Z^Y)$ tenemos

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Z^Y) \cong \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(\text{Colim}(y_{\mathcal{U}_X}), Z^Y) \quad (2.34)$$

Y como los representables trasforman colímites en límites, tenemos que

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Z^Y) \cong \text{Lim}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{\mathcal{U}_X}, Z^Y)) \quad (2.35)$$

Nombremos, para hacer mas clara la notación, al funtor

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{\mathcal{U}_X}, Z^Y) = (\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(-, Z^Y) \circ y \circ \mathcal{U}_X)$$

Por el *Lema de Yoneda* tenemos que $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, Z^Y) \cong Z^Y(C)$, y por como definimos Z^Y en objetos,

$$\text{Lim}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{\mathcal{U}_X}, Z^Y)) \cong \text{Lim}(Z^Y(\mathcal{U}_X)) = \text{Lim}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{\mathcal{U}_X} \times Y, Z)) \quad (2.36)$$

Finalmente tenemos que

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Z^Y) \cong \text{Lim}(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_{\mathcal{U}_X} \times Y, Z)) \quad (2.37)$$

$$\cong \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(\text{Colim}(y_{\mathcal{U}_X} \times Y), Z) \quad (2.38)$$

$$\cong \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(\text{Colim}(y_{\mathcal{U}_X}) \times Y, Z) \quad (2.39)$$

$$\cong \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X \times Y, Z) \quad (2.40)$$

naturalmente en X y Z . Donde (2.38) es de nuevo por (2.34) y (2.35) ; (2.39) es porque el funtor $- \times Y$ preserva colímites y (2.40) porque X es el colímite del funtor $y_{\mathcal{U}_X}$. $\square$

2.2 Definición de subobjeto y clasificador de subobjetos

La noción de subobjeto surge del interés por generalizar algunas propiedades de la categoría $\mathbf{Set}$, en particular, que cada conjunto tiene subconjuntos. Para esto, dado un monomorfismo $m \in \mathcal{C}(A, X)$, se construye su clase de equivalencia de monomorfismos con la relación de ser isomorfos en la categoría $\mathcal{C}/X$. Categoría cuyos objetos son los morfismos de $\mathcal{C}$ con codominio X . Dados dos objetos de $\mathcal{C}/X$, f y g , son $f : A \rightarrow X$ y $g : B \rightarrow X$ morfismos de $\mathcal{C}$, un morfismo entre ellos, es una flecha $F : A \rightarrow B$ que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

conmute.

Definición 2.2.1. Dada $\mathcal{C}$ una categoría y $X \in Ob(\mathcal{C})$. Un **subobjeto** de X es una clase de equivalencia de monomorfismos $m \in \mathcal{C}(M, X)$.

Dado que estas clases de equivalencia están formadas por flechas isomorfas, se suele elegir una familia de flechas, una por cada clase, que la represente. Así, si se demuestra alguna afirmación para esta familia de representantes, entonces se prueba para todas las clases. Las inclusiones, que siempre son monomorfismos y fáciles de manejar, se pueden usar como representantes de su clase de equivalencia. Para esto habría que probar que cada clase de equivalencia tiene una inclusión que la representa. En la siguiente sección resolveremos de esto lo necesario.

Definición 2.2.2. Sea $\mathcal{C}$ un categoría con objeto terminal, 1 . Un **clasificador de subobjetos** en $\mathcal{C}$ es un objeto $\Omega \in \mathcal{C}$ junto con un morfismo $t \in \mathcal{C}(1, \Omega)$ tal que para cada monomorfismo $m \in \mathcal{C}(C, C')$ existe un único morfismo $\phi \in \mathcal{C}(C', \Omega)$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{1_C} & 1 \\ m \downarrow & & \downarrow t \\ C' & \xrightarrow{\phi} & \Omega \end{array}$$

es un pullback.

Donde 1_C es el único morfismo posible puesto que 1 es terminal.

Si $\mathcal{C}$ también tiene pullbacks (entonces tiene todos los límites finitos), existe una correspondencia entre los subobjetos de X y los morfismos $\phi \in \mathcal{C}(X, \Omega)$ pues para cada subobjeto m de X existe una flecha ϕ y,

como $\mathcal{C}$ tiene pullbacks, cada flecha $\phi \in \mathcal{C}(X, \Omega)$, nos permite construir un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \downarrow t & \\ X & \xrightarrow{\phi} & \Omega \end{array} \quad (2.41)$$

que tiene límite, un pullback, como el siguiente

$$\begin{array}{ccc} M' & \longrightarrow & 1 \\ m' \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{\phi} & \Omega \end{array} \quad (2.42)$$

que cumple que m' es monomorfismo porque t lo es, como se ve en la Proposición 2.11, es decir, determina un subobjeto de X . Por el resto del trabajo las flechas ϕ serán llamadas flechas clasificadoras, refiriendonos a que determinan, o bien, **clasifican** a un subobjeto de m' de X . En este sentido, si una flecha ϕ “clasificara” a dos subobjetos, digamos m y m' , los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f'} & L' \\ m \searrow & & \downarrow m' \\ & X & \xrightarrow{\phi} \Omega \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L' & \xrightarrow{f} & M \\ m' \searrow & & \downarrow t \\ & X & \xrightarrow{\phi} \Omega \end{array}$$

conmutan. Entonces, $m \circ f \circ f' = m' \circ f' = m$ y $m' \circ f' \circ f = m' \circ f = m'$, entonces $L \cong L'$ en $\mathcal{C}$ (y ambos son monomorfismos). Por lo tanto, $m \cong m'$ en $\mathcal{C}/X$.

Si denotamos como $Sub(X)$ a las clases de equivalencia $[m]$ tales que m es subobjeto de X , entonces la correspondencia es biyectiva entre $Sub(X)$ y $\mathcal{C}(X, \Omega)$. Además, esta correspondencia es natural en X , en el siguiente sentido:

Sea $\mu : Y \rightarrow X$ en $\mathcal{C}$, m subobjeto de X y ϕ_m la flecha que lo clasifica. Por un lado, μ determina un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow m & \\ Y & \xrightarrow{\mu} & X \end{array} \quad (2.43)$$

cuyo pullback es:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & 1 \\ \mu^\#(m) \downarrow & & \downarrow m \\ Y & \xrightarrow{\mu} & X \end{array} \quad (2.44)$$

y como m es monomorfismo, $\mu^\#(m)$ también lo es (Proposición 2.11), por lo tanto $\mu^\#(m) \in \text{Sub}(Y)$. Lo que hace posible definir la asignación:

$$\begin{aligned} \mu^\# : \text{Sub}(X) &\rightarrow \text{Sub}(Y) \\ m &\mapsto \mu^\#(m) \end{aligned}$$

Por otro lado $\phi_m \circ \mu \in \mathcal{C}(Y, \Omega)$, entonces determina al subobjeto clasificado por ella mediante un pullback, que por ser un límite, es único salvo isomorfismos. Lo podemos construir, utilizando la Proposición 1.1.2, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 1 \\ \mu^\#(m) \downarrow & & m \downarrow & & t \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\phi_m} & \Omega \end{array}$$

por lo tanto $\phi_m \circ \mu$ clasifica a $\mu^\#(m)$. Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}(X) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}(X, \Omega) \\ \mu^\# \downarrow & & \circ \mu \downarrow \\ \text{Sub}(Y) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathcal{C}(Y, \Omega) \end{array} \quad (2.45)$$

conmuta.

2.3 Subobjetos en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$

Definición 2.3.1. Dados $\mathcal{F}, \mathcal{P} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ diremos que $\mathcal{P}$ es un **subfunctor** de $\mathcal{F}$ (usaremos la notación $\mathcal{P} \leq \mathcal{F}$) si y sólo si para cada $C \in \mathcal{C}$ se cumple que

$$\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{F}(C)$$

y dada $\bar{g} \in \mathcal{C}^{op}(C', C)$ sucede que

$$\mathcal{F}\bar{g}(x) = \mathcal{P}\bar{g}(x)$$

para todo $x \in \mathcal{P}(C)$.

Ahora bien, si $\mathcal{P}$ es subfunctor de $\mathcal{F}$ podemos definir una transformación natural $P \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ cuya instancia en $C \in \mathcal{C}$ es:

$$\begin{aligned} P_C : \mathcal{P}(C) &\rightarrow \mathcal{F}(C) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

y bastará comprobar que dada $\bar{g} \in \mathcal{C}^{op}(C, C')$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(C) & \xrightarrow{P_C} & \mathcal{F}(C) \\ \mathcal{P}\bar{g} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}\bar{g} \\ \mathcal{P}(C') & \xrightarrow{P_{C'}} & \mathcal{F}(C') \end{array}$$

conmuta.

Para esto, tomemos $x \in \mathcal{P}(C)$, luego

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\bar{g} \circ P_C(x) &= \mathcal{F}\bar{g}(x) \\ &= \mathcal{P}\bar{g}(x) \\ &= P_{C'} \circ \mathcal{P}\bar{g}(x) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es por la definición de P_C , la segunda igualdad es por la definición de subfunctor, en particular porque $\mathcal{F}\bar{g}(x) = \mathcal{P}\bar{g}(x)$ para todo $x \in \mathcal{P}(C)$ y la tercera por la definición de $P_{C'}$. Además, dadas transformaciones naturales θ y θ' tales que

$$P \circ \theta = P \circ \theta'$$

por el hecho de ser transformaciones naturales esto es equivalente a

$$(P \circ \theta)_C = (P \circ \theta')_C$$

naturalmente en C y esto, si y solo si

$$P_C \circ \theta_C = P_C \circ \theta'_C$$

y como cada P_C es inyectiva (porque es una inclusión), entonces

$$\theta_C = \theta'_C$$

naturalmente en C , por lo tanto

$$\theta = \theta'.$$

Lo que demuestra que P es un monomorfismo en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, P será llamada la transformación natural inclusión definida entre un subfunctor $\mathcal{P}$ del functor $\mathcal{F}$.

Hecho esto, tenemos que, según la definición 2.3.1, la transformación natural inclusión P determina un **subobjeto** $[P]$ de $\mathcal{F}$. Aún más, cada clase de mono-morfismos $[m]$ subobjeto de un functor $\mathcal{F}$, contiene una inclusión:

Lema 2.3.1. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla, $m : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{F}$ un monomorfismo en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, entonces existe $\mathcal{P}$ subfunctor de $\mathcal{F}$ tal que m es isomorfo a P (la transformación natural inclusión definida entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{F}$) en la categoría $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}/\mathcal{F}$.

Demostración. Sea $\mathcal{P}(C) = m_C(\mathcal{R}(C)) \subseteq \mathcal{F}(C)$ y para cada $f \in \mathcal{C}(C', C)$, entonces definimos a $\mathcal{P}(\bar{f}) : \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C')$ como $\mathcal{P}(\bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{f})|_{\mathcal{P}(C)}$, veamos que $\mathcal{P}$ es subfunctor de $\mathcal{F}$; además, demostremos que m es isomorfo a P la transformación natural inclusión del subfunctor $\mathcal{P}$ de $\mathcal{F}$.

Para la primera parte, bastará demostrar que si $y \in \mathcal{P}(C)$, entonces $\mathcal{P}(\bar{f})(y) \in \mathcal{P}(C')$, pero el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}(C) & \xrightarrow{m_C} & \mathcal{P}(C) \\
\mathcal{R}(\bar{f}) \downarrow & & \mathcal{P}(\bar{f}) \downarrow \\
\mathcal{R}(C') & \xrightarrow{m_{C'}} & \mathcal{P}(C')
\end{array}$$

es conmutativo, luego, si $y = m_C(x)$ con $x \in \mathcal{R}(C)$ (es decir $y \in \mathcal{P}(C)$), entonces $\mathcal{P}(\bar{f})(y) = \mathcal{P}(\bar{f})m_C(x) = m_{C'}\mathcal{R}(\bar{f})(x)$, como $\mathcal{R}(\bar{f})(x) \in \mathcal{R}(C')$, entonces $\mathcal{P}(\bar{f})(y) \in \mathcal{P}(C')$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es subfunctor de $\mathcal{F}$.

Daremos ahora el isomorfismo $m^p : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}$, definido en su instancia C por

$$\begin{aligned}
m_C^p : \mathcal{R}(C) &\rightarrow \mathcal{P}(C) \\
x &\mapsto m_C(x)
\end{aligned}$$

que es, inmediatamente de su definición, una transformación natural y hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R} & \xrightarrow{m^p} & \mathcal{P} \\
& \searrow m & \downarrow P \\
& & \mathcal{F}
\end{array}$$

lo cual hace que sea morfismo en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}/\mathcal{F}$. Además, como m es monomorfismo, cada una de sus instancias m_C es monomorfismo en $\mathbf{Set}$, por lo que son inyectivas. Ahora, como cada m_C^p es la restricción en el codominio de m_C a su imagen, cada instancia es inyectiva y sobreyectiva (toda función es sobreyectiva en su imagen), entonces biyectiva, entonces invertible, por lo que m_C^p es un isomorfismo, naturalmente en C . Entonces m^p es un isomorfismo natural.

Por lo tanto, $m \cong P$ en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}/\mathcal{F}$. $\square$

Esto nos permite asumir, sin pérdida de generalidad, que cada subobjeto de una pregavilla X es un subfunctor $F \leq X$. Además, si dos subobjetos F y F' de X son clasificados por la misma flecha clasificadora ϕ , entonces son isomorfos, por lo que podemos encontrar un solo subfunctor que represente a ambos, es decir, estos subobjetos son, esencialmente, el mismo.

Por lo que resta del trabajo, todo subobjeto $[m]$ de un funtor $\mathcal{F}$ que con-

sideremos, será visto como el subfunctor $\mathcal{P}$ cuya inclusión P es isomorfa a m .

2.4 Clasificador de subobjetos en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$

Definición 2.4.1. Dado $C \in \mathcal{C}$. Una **criba** sobre C es una familia $S(C)$ de flechas en $\mathcal{C}$ con codominio C , tales que, si $f \in S(C)$ y g cualquier otra flecha en la categoría, si la composición $f \circ g$ está definida, entonces $f \circ g \in S(C)$.

Ahora, podemos ver que para cada $\mathcal{F}$ subfunctor de y_C podemos construir una criba

$$S_{\mathcal{F}}(C) = \bigcup_{C' \in \mathcal{C}} \mathcal{F}(C')$$

que claramente es una colección de flechas con codominio C y se cumple, para una flecha $f \in S_{\mathcal{F}}(C)$, que si g una flecha en $\mathcal{C}$ es tal que la composición $f \circ g$ está definida, entonces $f \circ g \in S_{\mathcal{F}}(C)$, porque $f \in \mathcal{F}(C') \subseteq \mathcal{C}(C', C)$ y, dada $g \in \mathcal{C}(C'', C')$ tenemos $\mathcal{F}(\bar{g}) = f \circ g$, que se define a través de la composición en $\mathcal{C}$. Recíprocamente, dada una criba $S(C)$ podemos definir un subfunctor de y_C

$$F_S : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (2.46)$$

$$C' \mapsto y_C(C') \cap S(C) \quad (2.47)$$

y si $g \in \mathcal{C}(C', C'')$, la función $F_S(\bar{g})$ es

$$\begin{aligned} F_S(\bar{g}) : F_S(C'') &\rightarrow F_S(C') \\ f &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

cumplíndose que $f \circ g \in y_C(C'') \cap S(C)$ por la definición de $S(C)$ y del funtor y_C .

Queda claro que $F_S(C') \subseteq y_C(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}$ y que, dado g en $\mathcal{C}$, $F_S(\bar{g})(x) = y_C(\bar{g})(x)$ para todo x en el dominio de $F_S(\bar{g})$. Por lo tanto $F_S \leq y_C$. Lo que nos permite decir que las cribas sobre C y los

subobjetos de y_C se corresponden uno a uno. Y nos hace intuir quien es el objeto clasificador Ω . Ahora, construimos a Ω , sea $C \in \mathcal{C}$

$$\Omega : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$C \mapsto \Omega(C) = \{S(C) \mid S(C) \text{ es una criba sobre } C\}$$

Si $g \in \mathcal{C}(C', C)$ tenemos

$$\Omega \bar{g} : \Omega(C) \rightarrow \Omega(C')$$

$$S(C) \mapsto S(C) \cdot g = \{h \mid g \circ h \in S(C)\}$$

Ahora, tomando $Id_C \in \mathcal{C}(C, C)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega(Id_C)(S(C)) &= \{h \mid Id_C \circ h \in S(C)\} \\ &= S(C) \end{aligned}$$

para cada $S(C) \in \Omega(C)$, por lo tanto, $\Omega(Id_C) = Id_{\Omega(C)}$.

También, si f y g son flechas en $\mathcal{C}$ cuya composición $g \circ f$ está definida en $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \Omega(\overline{g \circ f}) &= \{h \mid g \circ f \circ h \in S(C)\} \\ &= \{h \mid f \circ h \in S(C) \cdot g\} \\ &= \{h \mid h \in (S(C) \cdot g) \cdot f\} \\ &= (S(C) \cdot g) \cdot f \\ &= \Omega(\bar{f})(\Omega(\bar{g})(S(C))) \end{aligned}$$

Para demostrar que esta manera de definir al funtor Ω lo hace subobjeto clasificador, necesitamos encontrar al objeto terminal de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$.

Recordemos que el funtor:

$$\Delta\{*\} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$C \mapsto \{*\}$$

es el objeto terminal de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ como se aclaró en el capítulo anterior, a partir de ahora, lo nombraremos 1.

Ahora, el morfismo t , de la definición de subobjeto clasificador es, en este caso, una transformación natural. Si definimos cada instancia t_C

asignando al único punto la criba maximal sobre C , denotada por $t(C)$ o simplemente tC , es decir:

$$\begin{aligned} t_C : 1(C) &\rightarrow \Omega(C) \\ * &\mapsto tC = \{f \in \mathcal{C}(A, C) \mid A \in \mathcal{C}\} \end{aligned}$$

tenemos que , dado $g \in \mathcal{C}(C', C)$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{t_C} & \Omega(C) \\ Id_{\{*\}} \downarrow & & \downarrow \Omega g \\ \{*\} & \xrightarrow{t_{C'}} & \Omega(C') \end{array}$$

conmuta si $\Omega g \circ t_C(*) = t_{C'}(*)$, para esto basta probar que $\Omega(g)(tC) = tC'$, es decir, para todo $A \in \mathcal{C}$ y para toda $f \in \mathcal{C}(A, C')$ se cumple que $g \circ f \in tC$.

En efecto, dada $A \in \mathcal{C}$, de la definición de tC , $\mathcal{C}(A, C) \subseteq tC$ por lo tanto, dada $f \in \mathcal{C}(A, C')$ se cumple que $g \circ f \in tC$, es decir , $\Omega g(tC) = tC'$.

Lo que muestra que t es transformación natural.

Ahora bien, si $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, con $\mathcal{C}$ localmente pequeña, y si tiene subobjeto clasificador, entonces $Sub(y_C)$ para todo C es un conjunto (el conjunto de subobjetos de y_C), entonces $\{S(C) \mid S(C) \text{ es una criba sobre } C\}$ es conjunto, luego $\Omega \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$.

Teorema 2.4.1. *Si $\mathcal{C}$ es localmente pequeña y con límites finitos, y tiene un subobjeto clasificador, entonces el funtor Ω con la transformación natural t es el subobjeto clasificador de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$*

Demostración De la definición de subobjeto clasificador y por el Lema 2.3.1, queremos probar que dados $\mathcal{R}, \mathcal{P} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ funtores tales que $\mathcal{R} \leq \mathcal{P}$, y i la inclusión, existe una flecha $\phi^i \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{P}, \Omega)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{1_{\mathcal{R}}} & 1 \\ i \downarrow & & \downarrow t \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\phi^i} & \Omega \end{array} \quad (2.48)$$

es un pullback.

Definimos ϕ^i en la instancia C como

$$\begin{aligned}\phi_C^i : \mathcal{P}(C) &\rightarrow \Omega(C) \\ x &\mapsto \{f \in \mathcal{C}(A, C) \mid \mathcal{P}\bar{f}(x) \in \mathcal{P}(A) \wedge A \in \mathcal{C}\}.\end{aligned}$$

Veamos que ϕ^i es transformación natural:

Si $g \in \mathcal{C}(C', C)$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{P}(C) & \xrightarrow{\phi_C^i} & \Omega(C) \\ \mathcal{P}g \downarrow & & \downarrow \Omega\bar{g} \\ \mathcal{P}(C') & \xrightarrow[\phi_{C'}^i]{} & \Omega(C')\end{array} \quad (2.49)$$

conmuta si $\Omega\bar{g} \circ \phi_C^i = \phi_{C'}^i \circ \mathcal{P}g$.

Para esto, si $x \in \mathcal{P}(C)$

$$\begin{aligned}\Omega\bar{g} \circ \phi_C^i(x) &= \Omega\bar{g}(\{f \in \mathcal{C}(A, C) \mid \mathcal{P}\bar{f}(x) \in \mathcal{R}(A)\}) \\ &= \{h \mid g \circ h \in \{f \in \mathcal{C}(A, C) \mid \mathcal{P}\bar{f}(x) \in \mathcal{R}(A)\}\} \\ &= \{h \in \mathcal{C}(A, C') \mid \mathcal{P}(\overline{g \circ h})(x) \in \mathcal{R}(A)\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(\phi_{C'}^i \circ \mathcal{P}g)(x) &= \phi_{C'}^i(\mathcal{P}g(x)) \\ &= \{f \in \mathcal{C}(A, C') \mid \mathcal{P}\bar{f}(\mathcal{P}g(x)) \in \mathcal{R}(A)\}\end{aligned}$$

Como $\mathcal{P}$ es un funtor, entonces $\mathcal{P}(\bar{f} \circ \bar{g})(x) = (\mathcal{P}\bar{f} \circ \mathcal{P}\bar{g})(x)$ para cada $x \in \mathcal{P}(C)$, entonces, los conjuntos son iguales para cada x , por lo tanto $\Omega\bar{g} \circ \phi_C^i = \phi_{C'}^i \circ \mathcal{P}g$. De esta manera ϕ^i es una transformación natural y podemos construir el diagrama (2.48) que conmuta, en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, si y sólo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{R}(C) & \xrightarrow{1_{\mathcal{R}}} & 1(C) \\ i_C \downarrow & & \downarrow t_C \\ \mathcal{P}(C) & \xrightarrow[\phi_C^i]{} & \Omega(C)\end{array} \quad (2.50)$$

conmuta en $\mathcal{C}$. La prueba de esto último consiste en ver que, dado $x \in \mathcal{R}(C)$ se cumple que $t_C \circ 1_{\mathcal{R}}(x) = \phi_C^i \circ i_C(x)$ lo que es equivalente a que si $x \in \mathcal{R}$, entonces $\phi_C^i(x) = t_C$. Esto es inmediato a la definición

$$\phi_C^i(x) = \{f \in \mathcal{C}(A, C) \mid A \in \mathcal{C} \text{ y } \mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)\}$$

y de que $\mathcal{R} \leq \mathcal{P}$, pues esto asegura que $\mathcal{P}f(x) = \mathcal{R}f(x)$ por lo tanto, para toda $f \in \mathcal{C}(A, C)$ y $A \in \mathcal{C}$ sucede que $\mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)$, es decir, $\phi_C^i(x) = \{f \in \mathcal{C}(A, C) \mid A \in \mathcal{C}\} = t_C$.

El diagrama (2.48) en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es un pullback si y sólo si el diagrama (4.8) es pullback en $\mathcal{C}$ para toda $C \in \mathcal{C}$.

Supongamos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}'(C) & \xrightarrow{1_{\mathcal{R}}} & 1(C) \\ m'_C \downarrow & & \downarrow t_C \\ \mathcal{P}(C) & \xrightarrow{\phi_C^i} & \Omega(C) \end{array} \quad (2.51)$$

conmuta.

Para esto simplemente verificamos la propiedad universal considerando la flecha

$$\begin{aligned} \check{f}_C : \mathcal{R}(C) &\rightarrow \mathcal{R}'(C) \\ r &\mapsto m'_C(r) \end{aligned}$$

que claramente hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}'(C) & & & & \\ & \searrow 1_{\mathcal{R}'} & & & \\ & & \mathcal{R}(C) & \xrightarrow{1_{\mathcal{R}}} & 1(C) \\ & \check{f}_C \searrow & \downarrow i_C & & \downarrow t_C \\ & & \mathcal{P}(C) & \xrightarrow{\phi_C^i} & \Omega(C) \end{array} \quad (2.52)$$

Resta demostrar que es única. Para esto considere $\check{f}_C^*$ tal que $m'_C = i_C \circ \check{f}_C^*$, entonces $i_C \circ \check{f}_C^* = i_C \circ \check{f}_C$, y como i_C es mono, se tiene que $\check{f}_C^* = \check{f}_C$.

Por último, supongamos que existe $\theta \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{P}, \Omega)$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{1_{\mathcal{R}}} & 1 \\ i \downarrow & & \downarrow t \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\theta} & \Omega \end{array} \quad (2.53)$$

es un pullback.

Comparando (2.48) con este último diagrama (2.53), si tomamos $x \in \mathcal{P}(C)$ y $f \in \mathcal{C}(A, C)$ entonces $\mathcal{P}\bar{f}(x) \in \mathcal{R}(A)$ si y sólo si $\theta_A(\mathcal{P}\bar{f}(x)) = tA$, y usando la naturalidad de θ según el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(C) & \xrightarrow{\phi_C^i} & \Omega(C) \\ \mathcal{P}\bar{f} \downarrow & & \downarrow \Omega\bar{f} \\ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\phi_A^i} & \Omega(A) \end{array}$$

esto es equivalente a que $\mathcal{P}\bar{f}(x) \in \mathcal{R}(A)$ si y solo si $\Omega\bar{f} \circ \theta_C(x) = tA$, lo que, por la definición de Ω , nos dice que $\{h \mid f \circ h \in \theta_C(x)\} = tA$. Luego, en particular $Id_A \in tA$, entonces $f \in \theta_C(x)$, es decir $\mathcal{P}f(x) \in \mathcal{R}(A)$ si y sólo si $f \in \theta_C(x)$, entonces $\phi_C^i = \theta_C$ para cada C y esto si y sólo si $\phi^i = \theta$. $\square$

Definición 2.4.2. Un **topos** es una categoría con límites finitos, cartesiana cerrada y con clasificador de subobjetos.

Proposición 2.4.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, la categoría de pregavillas sobre $\mathcal{C}$ es un Topos.

3.1 Gavillas, gavillas en un sitio y algunas equivalencias.

En esta sección generalizaremos la noción de *gavilla* sobre un espacio topológico, a gavillas sobre categorías más generales.

Sea X un espacio topológico, denotaremos como $\mathcal{O}(X)$ al conjunto de los abiertos de X , considerado como un conjunto parcialmente ordenado, con el orden $\subseteq$. Antes de hablar de gavillas, puntualicemos lo que es una pregavilla sobre $\mathcal{O}(X)$, es decir, esto tiene sentido solo considerando a $\mathcal{O}(X)$ como categoría, cuyos objetos son los subconjuntos abiertos U de X y, para $U, V \in \mathcal{O}$, el conjunto $\mathcal{O}(V, U)$ es el conjunto con un solo elemento siempre que $V \subseteq U$ y en otro caso es vacío. Entonces, una pregavilla sobre $\mathcal{O}(X)$ es un funtor:

$$\mathcal{F} : \mathcal{O}^{op}(X) \rightarrow \mathbf{Set}$$

que en objetos $U \in \mathcal{O}(X)$ es algún conjunto $\mathcal{F}(U)$; y para el morfismo $f \in \mathcal{O}(U, V)$, que podemos denotar $U \subseteq V$, en el entendido de que no hay más que un morfismo y está determinado por esa condición, la pregavilla lo asocia con una función

$$\mathcal{F}(\overline{U \subseteq V}) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V).$$

Definición 3.1.1. Sean I, U conjuntos con $U \in \mathcal{O}(X)$ y I arbitrario. Una pregavilla $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{op}(X) \rightarrow \mathbf{Set}$ se llama **gavilla** si para cada familia $(U_i)_{i \in I}$, de subconjuntos $U_i \subseteq U$ abiertos, tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ entonces $\mathcal{F}$ satisface:

- a) Para cualesquier $x, y \in \mathcal{F}(U)$, si $\mathcal{F}(\overline{U_i \subseteq U})(x) = \mathcal{F}(\overline{U_i \subseteq U})(y)$ para todo $i \in I$, entonces $x = y$;
- b) Si una familia $\{x_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$, es tal que para cada i, j sucede que

$$\mathcal{F}(\overline{U_i \cap U_j \subseteq U_i})(x_i) = \mathcal{F}(\overline{U_i \cap U_j \subseteq U_j})(x_j)$$

entonces, existe un único $x \in \mathcal{F}(U)$ tal que $x_i = \mathcal{F}(\overline{U_i \subseteq U})(x)$ para cada i .

La generalización de $\mathcal{O}(X)$ se realiza a partir de lo que se definió en el capítulo anterior como criba (Definición 2.4.1). Denotaremos $\max(C)$ a la criba máxima sobre C , es decir, $\max(C) = \{f \in \mathcal{C}(C', C) | C' \in \mathcal{C}\}$.

Definición 3.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una **Topología de Grothendieck** (que denotaremos **TG**) sobre $\mathcal{C}$ asigna a cada objeto C una familia $\text{Cov}(C)$ de cribas que “cubren a C ” de manera que se cumplan las condiciones:

- i) $\max(C) \in \text{Cov}(C)$
- ii) Si $R \in \text{Cov}(C)$, entonces por cada $f \in \mathcal{C}(C', C)$, sucede que $R \cdot f \in \text{Cov}(C')$
- iii) Si R es un haz sobre C y $S \in \text{Cov}(C)$ tal que, para cada flecha $f \in \mathcal{C}(C', C)$, en S , sucede que $R \cdot f \in \text{Cov}(C')$, entonces $R \in \text{Cov}(C)$.

Dos consecuencias inmediatas son:

- Proposición 3.1.1.** a) Si $R \in \text{Cov}(C)$ y S una criba sobre C tal que $R \subseteq S$, entonces $S \in \text{Cov}(C)$.
- b) Si $R, S \in \text{Cov}(C)$ entonces $R \cap S \in \text{Cov}(C)$.

Demostración.

- a) Para todo $f \in R$, cuyo codominio es algún C' , sucede que $\text{Id}_{C'} \in R \cdot f$, esto es equivalente a que $R \cdot f = \max(C')$ y de la hipótesis $R \subseteq S$, entonces también $S \cdot f = \max(C')$ por lo que $S \cdot f \in \text{Cov}(C')$ (por i) por lo que, según iii, $S \in \text{Cov}(C)$
- b) Consideremos $f \in \mathcal{C}(C', C)$ entonces

$$(R \cap S) \cdot f = \{g \in \mathcal{C}(D, C') | f \circ g \in R \cap S\}$$

y si $f \in R$ toda $g \in \mathcal{C}(D, C')$ cumple que $f \circ g \in R$. Entonces

$$(R \cap S) \cdot f = \{g \in \mathcal{C}(D, C') | f \circ g \in S\} = S \cdot f \in \text{Cov}(C')$$

(por ii), esto se cumple para toda $f \in R$ y por iii, $R \cap S \in \text{Cov}(C)$.

□

Definición 3.1.3. Llamaremos **Sitio** a una pareja $(\mathcal{C}, Cov)$ en la que $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y Cov es una **TG**.

Definición 3.1.4. Una **operación Universal de clausura** sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ asigna a cada pregavilla X una operación $(\tilde{\cdot}) : Sub(X) \rightarrow Sub(X)$ de manera que lo siguiente se cumpla:

- i) $A \leq \tilde{A}$.
- ii) $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$.
- iii) $A \leq B$ implica $\tilde{A} \leq \tilde{B}$.
- iv) Dadas dos pregavillas X y X' , $\phi : X' \rightarrow X$ y $A \in Sub(X)$, se cumple $\phi^\#(\tilde{A}) = \widetilde{\phi^\#(A)}$.

dónde la última propiedad se refiere a la operación definida en el capítulo 2.

Definición 3.1.5. Una **Topología de Lawvere-Tierney** (que denotaremos **TLT**) sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ es una flecha $J : \Omega \rightarrow \Omega$ (donde, como lo hemos hecho hasta ahora, Ω es el clasificador de subobjetos de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$) tal que lo siguiente se cumpla:

- i) $R \subseteq J_C(R)$ para toda criba R sobre C
- ii) $J_C(R \cap S) = J_C(R) \cap J_C(S)$
- iii) $J_C(J_C(R)) = J_C(R)$

Teorema 3.1.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Cada una de las siguientes nociones determina a las demás de manera única:

- 1) Una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$.
- 2) Una topología de Lawvere-Tierney sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$.
- 3) Una operación universal de clausura sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$.
- 4) Una subcategoría plena ε de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, tal que la inclusión tiene adjunto izquierdo que preserva límites finitos.

Este teorema es el punto central del capítulo presente, pues nos permitirá conocer una categoría de Gavillas de diferentes formas, pero

no tenemos las herramientas necesarias para probarlo ahora, en su lugar probaremos la versión B), que se encuentra inmediatamente adelante, y en cuanto se obtenga lo necesario completaremos el teorema original.

Teorema 3.1.2. (3.1.1 B)) Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Cada una de las siguientes nociones determina a las demás de manera única:

- 1) Una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$
- 2) Una topología de Lawvere-Tierney sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$
- 3) Una operación universal de clausura sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$

Demostración 1) $\Rightarrow$ 2): Dada una topología de Grothendieck Cov sobre $\mathcal{C}$, definimos en cada $C \in \mathcal{C}$:

$$J_C : \Omega(C) \rightarrow \Omega(C)$$

$$R \mapsto J_C(R) = \{h \in \mathcal{C}(C', C) \mid R \cdot h \in Cov(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\}$$

Sean $h \in \mathcal{C}(C', C)$ y $g \in \mathcal{C}(C'', C')$ con $h \in J_C(R)$, entonces

$$\begin{aligned} R \cdot (h \circ g) &= \{f \in \mathcal{C}(D, C'') \mid h \circ g \circ f \in R\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}(D, C'') \mid g \circ f \in R \cdot h\} \\ &= (R \cdot h) \cdot g \end{aligned}$$

entonces $h \circ g \in J_C(R)$, por lo tanto, $J_C(R)$ es una criba sobre C . Usando un argumento similar, J es una transformación natural pues, dada $f \in \mathcal{C}(C', C)$:

$$\begin{aligned} J_{C'}(R \cdot f) &= \{h \in \mathcal{C}(C'', C') \mid R \cdot f \cdot h \in Cov(C'') \text{ y } C'' \in \mathcal{C}\} \\ &= \{h \in \mathcal{C}(C'', C') \mid R \cdot (f \circ h) \in Cov(C'') \text{ y } C'' \in \mathcal{C}\} \\ &= \{h \in \mathcal{C}(C'', C') \mid (f \circ h) \in J_C(R) \text{ y } C'' \in \mathcal{C}\} \\ &= J_C(R) \cdot f \end{aligned}$$

es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega(C) & \xrightarrow{J_C} & \Omega(C) \\ \Omega(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow \Omega(\bar{f}) \\ \Omega(C') & \xrightarrow{J_{C'}} & \Omega(C') \end{array}$$

conmuta.

- Para probar i) de 3.1.5 basta notar que si $h \in R$, con $h \in \mathcal{C}(C', C)$, entonces $Id_{C'} \in R \cdot h$ por lo que $R \cdot h = \max(C') \in Cov(C)$ por lo tanto $h \in J_C(R)$
- Para demostrar ii) de 3.1.5, la proposición 3.1.1 nos asegura que si $S, R \in Cov(C)$ entonces $S \cap R \in Cov(C)$ además, de ii) de la definición 3.1.2, sucede que

$$\begin{aligned} (R \cap S) \cdot h &= \{f \in \mathcal{C}(C'', C') | h \circ f \in S \cap R\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}(C'', C') | h \circ f \in S \text{ y } h \circ f \in R\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}(C'', C') | h \circ f \in S\} \cap \{f \in \mathcal{C}(C'', C') | h \circ f \in R\} \\ &= (R \cdot h \cap S \cdot h) \in Cov(C') \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} J_C(R \cap S) &= \{h \in \mathcal{C}(C', C) | (R \cap S) \cdot h \in Cov(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \\ &= \{h \in \mathcal{C}(C', C) | R \cdot h \cap S \cdot h \in Cov(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \\ &= J_C(R) \cap J_C(S) \end{aligned}$$

- Para iii), ya por ser $J_C(R)$ una criba sobre C , se cumple que $J_C(R) \subseteq J_C(J_C(R))$.
Para la otra contención tomemos $h \in J_C(J_C(R))$ y $g \in J_C(J_C(R)) \cdot h$, con $g \in \mathcal{C}(C'', C')$. Entonces $h \circ g \in J_C(R)$ lo que significa que $R \cdot (h \circ g) \in Cov(C')$, por lo tanto $(R \cdot h) \cdot g \in Cov(C')$ para toda $g \in J_C(J_C(R)) \cdot h \in Cov(C')$, estas son las hipótesis de la Definición 3.1.2 iii) por lo que concluimos $R \cdot h \in Cov(C')$, esto es, $h \in J_C(R)$.

2) $\Rightarrow$ 3) Partiendo de la correspondencia biyectiva:

$$\begin{aligned} Sub(X) &\cong \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, \Omega) \\ A &\mapsto \phi_A \end{aligned}$$

natural en X , demostrada en el capítulo anterior.

Una TLT J sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ permite definir:

$$\begin{aligned} J \circ _- : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, \Omega) &\rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, \Omega) \\ \phi &\mapsto J \circ \phi \end{aligned}$$

Eso determina una relación $(\tilde{\cdot}) : Sub(X) \rightarrow Sub(X)$, en la cual, si tomamos $A \in Sub(X)$, se define $\tilde{A}$ desde $\phi_{\tilde{A}} = J \circ \phi_A$. Es decir, determinamos a $\tilde{A}$ por la función que lo clasifica, por lo que:

$$\tilde{A}(C) = \{x \in X(C) \mid J_C((\phi_A)_C(x)) = max(C)\}$$

Probemos ahora las propiedades según la Definición 3.1.4:

- Para i), para cualquier haz R sobre C , sucede, por i) que $R \subseteq J_C(R)$ entonces $(\phi_A)_C(x) \subseteq J_C((\phi_A)_C(x))$, para todo $x \in X(C)$, y naturalmente en C . Esto nos dice que si $x \in A(C)$ entonces $max(C) = (\phi_A)_C(x) \subseteq J_C((\phi_A)_C(x)) = J_C(max(C))$ por lo tanto $J_C((\phi_A)_C(x)) = max(C)$ lo que equivale a $x \in \tilde{A}(C)$, para toda C . Por último, dada $f \in \mathcal{C}(C', C)$, si $x \in \tilde{A}(C)$, por la naturalidad de ϕ_A sucede que

$$\begin{aligned} J_{C'}((\phi_A)_{C'}(A(\bar{f})(x))) &= J_C((\phi_A)_C(x)) \cdot f \\ &= max(C) \cdot f \\ &= max(C') \end{aligned}$$

entonces $A(\bar{f})(x) \in \tilde{A}(C')$. Por lo tanto $A \leq \tilde{A}$.

- Para ii), por iii) de 3.1.2 $J_C(R) = J_C(J_C(R))$ para cualquier gavilla R , y por un argumento similar al desarrollado en el punto anterior esto implica $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}$.

- Para iii), partimos de ii) de 3.1.2, tomando $R \subseteq S$ sucede que $J_C(R) = J_C(R \cap S) = J_C(R) \cap J_C(S) \subseteq J_C(S)$. Entonces, si $A \leq B$, luego, $A(C) \subseteq B(C)$ entonces, para todo $x \in A(C)$, $\max(C) = (\phi_A)_C(x) = (\phi_B)_C(x)$ por lo que $J_C((\phi_A)_C(x)) = J_C((\phi_B)_C(x)) = \max(C)$ entonces, por un desarrollo similar al de los puntos anteriores, $\tilde{A} \leq \tilde{B}$.
- Para iv) de la Definición 3.1.2: consideremos $\mu : Y \rightarrow X$, entonces $\mu^\#(\tilde{A})$ es un subobjeto de Y clasificado por $(J \circ \phi_A) \circ \mu$, por otro lado, $\mu^\#(A)$ es clasificado por $(\phi_A \circ \mu)$, luego $\mu^\#(\tilde{A})$ es clasificado por $J \circ (\phi_A \circ \mu)$ y como la operación se determina por las flechas que clasifican al subobjeto concluimos que $\mu^\#(\tilde{A}) = \widetilde{\mu^\#(A)}$ porque son clasificados por la misma flecha $J \circ \phi_A \circ \mu$.

3) $\Rightarrow$ 1) Dada una Operación de Clausura Universal en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, tenemos el caso particular de $(\tilde{\cdot}) : Sub(y_C) \rightarrow Sub(y_C)$, y como todos los subfuntores de y_C determinan una criba y viceversa, como se prueba en el capítulo 2, la operación se puede pensar como una asignación $(\tilde{\cdot}) : \Omega(C) \rightarrow \Omega(C)$ y partiendo de eso se define :

$$Cov(C) = \{R \in \Omega(C) | \widetilde{F_R} = y_C\} \quad (3.1)$$

con F_R como se definió en (2.46), probemos ahora que eso determina una **TG**.

- Para i) de la Definición 3.1.2 tomemos $R = \max(C)$, entonces $F_R = y_C$. Por otro lado i) de la Definición 3.1.4 asegura que $F_R \leq \widetilde{F_R}$ entonces $\widetilde{F_R} = y_C$, por lo tanto $R \in Cov(C)$.
- Para ii), si $R \in Cov(C)$ y $f \in \mathcal{C}(C', C)$, entonces a $R \cdot f$ le corresponde $(y_f)^\#(F_R)$, como en el diagrama (2.45), en este caso

$$\begin{array}{ccc} F_R \cdot f & \longrightarrow & 1 \\ i \downarrow & & \downarrow t \\ y_{C'} & \xrightarrow{\phi_{F_R} \circ y_f} & \Omega \end{array}$$

y por iv) de 3.1.4

$$\begin{aligned}\widetilde{F_{R \cdot f}} &= ((y_f)^\#(\widetilde{F_R})) \\ &= (y_f)^\#(\widetilde{F_R}) \\ &= (y_f)^\#(y_C) \\ &= y_{C'}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$R \cdot f \in Cov(C').$$

- Para demostrar iii) Sean R una criba sobre C y $S \in Cov(C)$ tales que para todo $C' \in \mathcal{C}$ y $f \in S$, con $f \in \mathcal{C}(C', C)$, $R \cdot f \in Cov(C')$. Entonces $y'_C = \widetilde{F_{R \cdot f}} = (y_f)^\#(\widetilde{F_R})$ entonces la criba $\tilde{R}$ que le corresponde al funtor $\widetilde{F_R}$ es tal que $\tilde{R} \cdot f = max(C')$ entonces $f \in \tilde{R}$, por lo que $S \subseteq \tilde{R}$, esto equivale a que $F_S \leq \widetilde{F_R}$. Por i) y ii) de 3.1.4

$$\begin{aligned}y_C &= \widetilde{F_S} \\ &= \widetilde{\widetilde{F_R}} \\ &= \widetilde{F_R}\end{aligned}$$

por lo tanto $R \in Cov(C)$.

□

De ahora en más, continuaremos desarrollando las herramientas necesarias para completar la demostración original, pero, notemos que la versión B) está completa en si misma, es decir, esas tres equivalencias están completas. Por lo que podemos usar esos resultados y, aún más, nos serán útiles las formas en que definimos una estructura partiendo de la otra a lo largo de la demostración (por ejemplo en como definimos en 3.1 una topología de Grothendieck a partir de una operación universal de clausura).

Definición 3.1.6. Sean Cov una TG sobre una categoría $\mathcal{C}$, $(\tilde{\cdot})$ la operación universal de clausura y J la TLT sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ asociadas.

- i) Una pregavilla $\mathcal{F}$ es **separable** para Cov si para cada $C \in \mathcal{C}$ y $x, y \in \mathcal{F}(C)$, si la criba $\{f : C' \rightarrow C | \mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}f(y)\} \in Cov(C)$,

entonces $x = y$

ii) Una subpregavilla $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ es **cerrada** si $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$ en $Sub(\mathcal{F})$

iii) Una subpregavilla $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ es **densa** si $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{F}$ en $Sub(\mathcal{F})$.

Proposición 3.1.2. Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, Cov una **TG** sobre $\mathcal{C}$, J la **TLT** y $(\cdot)$ la operación de clausura universal asociadas.

i) Una pregavilla $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ es densa si y sólo si para cada $x \in \mathcal{F}(C)$, la criba $\{f : C' \rightarrow C \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C')\} \in Cov(C)$.

ii) Si R es una criba sobre C . F_R , considerado como un subobjeto de y_C , es denso para Cov si y sólo $R \in Cov(C)$.

iii) Una pregavilla $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ es cerrada para Cov si y sólo si para cada $x \in \mathcal{F}(C)$: si $\{f \in \mathcal{C}(C', C) \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C')\} \in Cov(C)$, entonces $x \in \mathcal{G}(C)$.

iv) $\mathcal{F}$ es seccionada para Cov si y sólo si, pensandolo como un subobjeto $\mathcal{F} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, es cerrado para Cov .

Para estas definiciones y en general para el resto del desarrollo consideraremos una **TG** Cov y las equivalencias demostradas en el teorema anterior, pero, hacemos la aclaración de que, no hay una única manera de definir una Topología de Grothendieck en cada categoría $\mathcal{C}$, por lo que, debe entenderse que las propiedades que se le den a una pregavilla no dependen solo de la pregavilla, sino tambien de la **TG** que estemos usando. En este sentido podría ser ambiguo decir que una pregavilla es cerrada o densa sin decir para que Topología de Grothendieck. Pero, para evitar reiterar constantemente que una propiedad es “para Cov ” le rogamos al lector que considere, a lo largo del capítulo, que usamos una misma **TG** a menos que se especifique lo contrario.

Demostración

- i): Partimos de que para $C \in \mathcal{C}$

$$\tilde{\mathcal{G}}(C) = \{x \in \mathcal{G}(C) \mid J_C((\phi_{\mathcal{G}})_C(x)) = \max(C)\}$$

lo que equivale a que

$$\tilde{\mathcal{G}}(C) = \{x \in \mathcal{G}(C) \mid (\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \in \text{Cov}(C)\}$$

pues, si $(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \in \text{Cov}(C)$, entonces para cada $f \in \mathcal{C}(D, C)$ tenemos que $(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \cdot f \in \text{Cov}(D)$. Por lo tanto,

$$J_C((\phi_{\mathcal{G}})_C(x)) = \{f \in \mathcal{C}(C', C) \mid (\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \cdot f \in \text{Cov}(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \quad (3.2)$$

$$= \max(C) \quad (3.3)$$

Del otro lado, si se cumple (3.3) entonces, $(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \cdot f \in \text{Cov}(C')$ para toda flecha $f \in \{f \in \mathcal{C}(C', C) \mid C' \in \mathcal{C}\}$. Por lo tanto, por iii) de la Definición 3.1.2, $(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \in \text{Cov}(C)$

$\Rightarrow$] Si $\mathcal{G}$ es densa tenemos que $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{F}$, entonces

$$\mathcal{F}(C) = \{x \in \mathcal{G}(C) \mid (\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \in \text{Cov}(C)\}.$$

Por lo tanto, para cada $x \in \mathcal{F}(C)$,

$$(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) = \{f \in \mathcal{C}(C', C) \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \in \text{Cov}(C)$$

$\Leftarrow$] Tenemos que para cada $x \in \mathcal{F}(C)$, la criba

$$\{f \in \mathcal{C}(C', C) \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C')\} \in \text{Cov}(C)$$

entonces, $(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \in \text{Cov}(C)$ para cada $x \in \mathcal{F}(C)$. Por otro lado, $h \in \mathcal{C}(A, C')$, $(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \cdot h \in \text{Cov}(C')$. Por lo tanto,

$$J_C((\phi_{\mathcal{G}})_C(x)) = \{h \in \mathcal{C}(A, C') \mid (\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \cdot h \in \text{Cov}(C')\} = \max(C').$$

Por otro lado,

$$\tilde{\mathcal{G}}(C) = \{x \in \mathcal{F}(C) \mid J_C((\phi_{\mathcal{G}})_C(x)) = \max(C)\}$$

Entonces, $\tilde{\mathcal{G}}(C) = \mathcal{F}(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}$, por lo tanto, $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{F}$.

- ii): Por la Definición (3.1), si R es una criba sobre $C \in \mathcal{C}$ y $F_R \leq y_C$ es denso, entonces $R \in Cov(C)$. Y, si $R \in Cov(C)$, entonces $\widetilde{F_R} = y_C$.
- iii): $\Rightarrow$] Sea $\mathcal{F}$ una gavilla y $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ una subpregavilla cerrada. Consideremos $x \in \mathcal{F}(C)$ tal que

$$\mathcal{F}(\cdot)(x) = \{f \in \mathcal{C}(C', C) \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \in Cov(C)$$

entonces,

$$(\phi_{\mathcal{G}})_{C'}(\mathcal{F}f(x)) = \max(C') = (\phi_{\mathcal{G}})_{C'} \cdot f$$

donde la última igualdad es por la naturalidad de $\phi_{\mathcal{G}}$. Por lo tanto, $(\phi_{\mathcal{G}})_{C'} \cdot f \in Cov(C')$ para cada $f \in \mathcal{F}(\cdot)(x)$, entonces $(\phi_{\mathcal{G}})_C(x) \in Cov(C)$, por lo tanto

$$x \in \tilde{\mathcal{G}}(C) = \{x \in \mathcal{F}(C) \mid J_C((\phi_{\mathcal{G}})_C)(x) = \max(C)\}$$

y como $\mathcal{G}$ es cerrada, $x \in \mathcal{G}(C)$.

$\Leftarrow$] Tenemos que $\{x \in \mathcal{F}(C) \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \in Cov(C)$ y que $\{x \in \mathcal{F}(C) \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{G}(C)$. Por otro lado, como demostramos en el inciso anterior,

$$\begin{aligned} \{x \in \mathcal{F}(C) \mid \mathcal{F}f(x) \in \mathcal{G}(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} &= \{x \in \mathcal{F}(C) \mid (\phi_{\mathcal{G}})_C \in Cov(C)\} \\ &= \{x \in \mathcal{F} \mid J_C((\phi_{\mathcal{G}})_C)(x) = \max(C)\} \\ &= \tilde{\mathcal{G}}(C) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{\mathcal{G}}(C) \subseteq \mathcal{G}(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}$, por i) de la Definición 3.1.4, tenemos que $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$. Es decir, $\mathcal{G}$ es cerrada.

- iv): Podemos pensar cualquier pregavilla $\mathcal{F}$ como un subfunctor de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, definido por

$$\mathcal{F}(C) = \{(x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}(C) \mid x = y\}$$

en este sentido, por definición,

$$\widetilde{\mathcal{F}(C)} = \{(x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}(C) | J_C((\phi_{\mathcal{F}})_C((x, y))) = \max(C)\} \quad (3.4)$$

Ahora, sean $x, y \in F(C)$ tal que $\mathcal{F}(\cdot)[x, y] \in Cov(C)$, entonces

$$\begin{aligned} (\phi_{\mathcal{F}})_C(x, y) \cdot f &= (\phi_{\mathcal{F}})_D(\mathcal{F} \times \mathcal{F}(\bar{f})(x, y)) \\ &= \max(D) \in Cov(D) \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{F}(\cdot)[x, y] \in Cov(C)$, cuyo dominio denotamos con D . Por lo tanto, $(\phi_{\mathcal{F}})_C(x, y) \in Cov(C)$.

También si $(\phi_{\mathcal{F}})_C(x, y) \in Cov(C)$ Pero

$$\begin{aligned} (\phi_{\mathcal{F}})_C(x, y) &= \{f \in \mathcal{C} | \mathcal{F} \times \mathcal{F}(f)(x, y) \in \mathcal{F}(C') \text{ y } \} \\ &= \{f \in \mathcal{C} | \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(y) \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \\ &= \mathcal{F}(\cdot)[x, y] \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{F}(\cdot)[x, y] \in Cov$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}(\cdot)[x, y] \in Cov(C) \Leftrightarrow (\phi_{\mathcal{F}})_C(x, y) \in Cov(C) \Leftrightarrow (x, y) \in \widetilde{F}(C)$$

Partiendo de esto:

$\Rightarrow$] Sean $(x, y) \in \widetilde{F}(C)$ entonces $\mathcal{F}(\cdot)[x, y] \in Cov(C)$, si $\mathcal{F}$ es separable, $x = y$, entonces $(x, y) \in \mathcal{F}(C)$, esto es $\widetilde{F}(C) \subseteq \mathcal{F}C$, para cada $C \in \mathcal{C}$ por lo que $\widetilde{F} \leq \mathcal{F}$, esto implica, por *i*) de la Definición 3.1.4, que $\mathcal{F}$ es cerrada.

$\Leftarrow$] Si $\mathcal{F}$ es cerrada y $\mathcal{F}(\cdot)[x, y] \in Cov(C)$ entonces $(x, y) \in \widetilde{F}C = \mathcal{F}C$ por lo tanto $x = y$, es decir, $\mathcal{F}$ es separable.

□

Definición 3.1.7. Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre $\mathcal{C}$, Cov un **TG** y C, C', C'' un objetos de $\mathcal{C}$.

- a) Una **familia compatible** en $\mathcal{F}$ indizada por una criba R sobre C es una familia $x_R = \{x_f | f \in R\}$ de elementos $x_f \in \mathcal{F}(C')$, para cada flecha $f \in \mathcal{C}(C', C) \cap R$ tal que para $g \in \mathcal{C}(C'', C')$ arbitraria, $x_{fg} = \mathcal{F}g(x_f)$. En términos de la teoría de categorías, una familia

compatible es una flecha $x_R \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(F_R, \mathcal{F})$. Para dejar esto claro, x_R es una transformación natural que, a cada flecha $f \in \mathcal{C}(C', C) \cap R$ le asigna $x_f \in \mathcal{F}(C')$, de manera que se e diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_R(C') & \xrightarrow{(x_R)_{C'}} & \mathcal{F}(C') \\ F_R(\bar{g}) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{g}) \\ F_R(C'') & \xrightarrow{(x_R)_{C''}} & \mathcal{F}(C'') \end{array}$$

conmute.

- b) Una **amalgama** de tal familia es un elemento x de $\mathcal{F}(C)$ tal que $x_f = \mathcal{F}f(x)$ para toda $f \in R$. En otras palabras una amalgama es una extensión de la flecha $x_R \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(F_R, \mathcal{F})$ a una flecha $x \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, \mathcal{F})$, pues determina una transformación natural $x \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, \mathcal{F})$ mediante $x_{C'}(f) = \mathcal{F}(\bar{f})(x)$ para toda $f \in \mathcal{C}(C', C)$ que cumple que $(x_R)_{C'}(f) = x_{C'}(f)$ para toda $f \in R$.

Proposición 3.1.3. *Sea $\mathcal{F}$ una pregvilla. $\mathcal{F}$ es separable si y sólo si cada familia compatible en $\mathcal{F}$, indizada por una criba $R \in Cov(C)$ para algún $C \in \mathcal{C}$, tiene a lo más una amalgama.*

Demostración $\Rightarrow$] Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla separable y $C \in \mathcal{C}$. Consideremos la criba $R \in Cov(C)$ y $\{x_f | f \in R\}$ una familia compatible para $\mathcal{F}$, entonces si $x, y \in \mathcal{F}(C)$ cumplen ser amalagama para $\{x_f | f \in R\}$, entonces para toda $f \in R$ sucede que

$$\mathcal{F}\bar{f}(x) = x_f = \mathcal{F}\bar{f}(y).$$

Entonces, $R \subseteq \mathcal{F}(\cdot)[x, y] = \{f \in \mathcal{C}(D, C) | \mathcal{F}\bar{f}(x) = \mathcal{F}\bar{f}(y)\}$, entonces $\mathcal{F}(\cdot)[x, y] \in Cov(C)$ (por la proposición 3.1.1 a)); y como $\mathcal{F}$ es separable, $x = y$. Por lo tanto, $\{x_f | f \in R\}$ tiene a lo más una amalgama.

$\Leftarrow$] Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla y $C \in \mathcal{C}$, tal que toda familia compatible en $\mathcal{F}$ indizada por una criba $R \in Cov(C)$, tiene a lo más una amalgama. Consideremos $x, y \in \mathcal{F}(C)$ tales que

$$\mathcal{F}(\cdot)[x, y] = \{f \in \mathcal{C}(D, C) | \mathcal{F}\bar{f}(x) = \mathcal{F}\bar{f}(y)\} \in Cov(C)$$

entonces la familia $\{x_f | f \in \mathcal{F}(\cdot)[x, y]\}$ tiene a lo más una amalgama. Y tanto x como y cumplen que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\bar{f}(x) &= x_f \\ &= \mathcal{F}\bar{f}(y)\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{F}(\cdot)[x, y]$, es decir, ambas cumplen ser amalgama, entonces $x = y$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es separable. $\square$

Definición 3.1.8. Una pregavilla $\mathcal{F}$ es una **gavilla sobre un sitio** si:

- La categoría $\mathcal{C}$ sobre la que se define la **TG** Cov , es pequeña.
- Toda familia compatible en $\mathcal{F}$, indizada por una criba $R \in Cov(C)$ para algún $C \in \mathcal{C}$, tiene exactamente una amalgama.

En este caso el sitio es $(\mathcal{C}, Cov)$.

En adelante usaremos solo este tipo de gavillas, es decir, se asumirá el sitio $(\mathcal{C}, Cov)$ y diremos simplemente gavilla, en vez de gavilla sobre el sitio $(\mathcal{C}, Cov)$. En el caso en que consideramos que puede ser ambiguo, usaremos la terminología completa.

Proposición 3.1.4. *Toda subpregavilla cerrada de una gavilla es una gavilla.*

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ una gavilla y $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ una subpregavilla cerrada. Como $\mathcal{G}$ es cerrada, entonces para cada $x \in \mathcal{F}(C)$ para alguna $C \in \mathcal{C}$,

$$\text{si } \{f \in \mathcal{C}(D, C) | \mathcal{F}\bar{f}(x) \in \mathcal{G}(D)\} \in Cov(C), \text{ entonces } x \in \mathcal{G}(C)$$

por 3.1.2. Ahora, sean $R \in Cov(C)$ y $\{x_f | f \in R\}$ una familia compatible sobre $\mathcal{G}$. Veamos que $\{x_f | f \in R\}$ tiene una única amalgama. Para esto, basta notar que $\{x_f | f \in R\}$ también es una familia compatible para $\mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es gavilla, entonces existe $x \in \mathcal{F}(C)$ tal que $\mathcal{F}\bar{f}(x) = x_f$ para toda $f \in R$. Entonces, $x \in \mathcal{G}(C)$ y es una amalgama para $\{x_f | f \in R\}$. La unicidad es inmediata pues si existiera otra amalgama, entonces, $\mathcal{F}$ no sería gavilla. $\square$

Proposición 3.1.5. $\mathcal{F}$ es una gavilla si y solo si para cada pregavilla X y cada subpregavilla densa $P \leq X$, sucede que, cada flecha $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(P, \mathcal{F})$ tiene una extensión única a una flecha $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, \mathcal{F})$.

Demostración $\implies$] Como P es densa, por la Proposición 3.1.2 i), para cada $x \in X(C)$ la criba

$$\dot{x} = \{f \in \mathcal{C}(C', C) \mid X(\bar{f})(x) \in P(C') \text{ y } C' \in \mathcal{C}\} \quad (3.5)$$

cumple $\dot{x} \in Cov(C)$.

Partiendo de esto definimos la familia compatible

$$\{\alpha_{C'}(X(\bar{f})(x)) \mid f \in \dot{x}\} \quad (3.6)$$

luego, si $f \in \mathcal{C}(C', C) \cap \dot{x}$ y $g \in \mathcal{C}(D, C')$ entonces

$$\mathcal{F}(\bar{g})(\alpha_{C'}(X(\bar{f})(x))) = \alpha_D(P(\bar{g})(X(\bar{f})(x))) \quad (3.7)$$

por la naturalidad de α , luego

$$\mathcal{F}(\bar{g})(\alpha_{C'}(X(\bar{f})(x))) = \alpha_D(X(\bar{g})(X(\bar{f})(x))) \quad (3.8)$$

dado que si $f \in \dot{x}$ entonces $X(\bar{f})(x) \in P(C')$, entonces, por definición de subfunctor, $P(\bar{g})(X(\bar{f})(x)) = X(\bar{g})(X(\bar{f})(x))$, por lo tanto

$$\mathcal{F}\bar{g}(\alpha_{C'}(X(\bar{f})(x))) = \alpha_D(X(\overline{\bar{f} \circ g})(x)). \quad (3.9)$$

Tambien sucede que la familia indizada por una criba en Cov tiene una amalgama única porque $\mathcal{F}$ es gavilla, entonces, existe $k \in \mathcal{F}(C)$ tal que

$$\alpha_{C'}(X(\bar{f})(x)) = \mathcal{F}(\bar{f})k \quad (3.10)$$

para toda $f \in \mathcal{C}(C', C)$ con C' un objeto arbitrario de $\mathcal{C}$. Esto nos permite extender la transformación natural, es decir, construir una $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, \mathcal{F})$ tal que $\alpha|_P = \alpha$, de la siguiente manera

$$\alpha_{C'}(X(\bar{f})(x)) = \mathcal{F}(\bar{f})k \quad (3.11)$$

para toda $f \in \mathcal{C}(C', C)$, en particular, cuando $f = Id_C$

$$\alpha_C(x) = \alpha_C(X(Id_C)(x)) = \mathcal{F}(Id_C)k = k \quad (3.12)$$

dando así, punto por punto, la asignación. La naturalidad de la transformación se verifica ya que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & \mathcal{F}(C) \\ X(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\bar{f}) \\ X(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & \mathcal{F}(C') \end{array}$$

conmuta, pues

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{f})\alpha_C(x) &= \mathcal{F}(\bar{f})(k) \\ &= \alpha_{C'}(X(\bar{f})(x)) \end{aligned}$$

dónde la primera igualdad es por la definición de α y la segunda de (3.10).

Esta extensión es única debido a que si existiera $\beta \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, F)$ tal que $\beta|_P = \alpha$ entonces, para $x \in XC$ podemos definir la familia compatible

$$\{\beta_{C'}(X(\bar{f})x | f \in \dot{x})\} \quad (3.13)$$

cuya amalgama tendría que ser la misma que la de la familia determinada por α , luego, al extender ambas,

$$\beta_C(x) = k = \alpha_C(x)$$

$\Leftarrow$] Sea $R \in Cov(C)$, luego $F_R \leq y_C$ es denso, por la Proposición 3.1.2 ii), luego, por hipótesis, cada flecha $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(F_R, \mathcal{F})$ tiene una extensión única a una flecha $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, \mathcal{F})$, es decir, cada familia compatible indizada por una criba $R \in Cov(C)$ tiene una única amalgama, esto es, $\mathcal{F}$ es gavilla. $\square$

En algunos de los textos, como [3], se define una gavilla sobre un sitio de la manera en la que esta proposición la caracteriza, pero en esta tesis, como en [6], se definen pidiendo menos (Definición 3.1.8) y esta

proposición demuestra la equivalencia de ambas definiciones.

Ahora, construiremos un funtor de particular importancia para definir la categoría de Gavillas. Este es el funtor $()^+ : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$.

Para esto, definimos la relación $\sim$: consideremos los pares $(R, \mu), (S, \mu')$ con $R, S \in Cov(C)$ para alguna $C \in \mathcal{C}$. $(R, \mu) \sim (S, \mu')$ si y sólo si existe una criba $T \in Cov(C)$ tal que $T \subseteq R \cap S$ y $\mu|_{F_T} = \mu'|_{F_T}$.

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia:

- i) Claramente $(R, \beta) \sim (R, \beta)$
- ii) Supongamos que $(R, \beta) \sim (S, \mu)$, entonces tenemos $T \in Cov(C)$ tal que $T \subseteq R \cap S$ y $\beta|_{F_T} = \mu|_{F_T}$. Veamos que $(S, \mu) \sim (R, \beta)$, pero sabemos que esto pasa si y sólo si existe $U \in Cov(C)$ tal que $U \subseteq S \cap R$ y $\mu|_{F_U} = \beta|_{F_U}$. Basta tomar $U = T$.
- iii) Supongamos que $(R, \beta) \sim (S, \mu)$ y $(S, \mu) \sim (U, \gamma)$. Entonces, existen $T, T' \in Cov(C)$ tales que $T \subseteq R \cap S$, $T' \subseteq S \cap U$, $\beta|_{F_T} = \mu|_{F_T}$ y $\mu|_{F_{T'}} = \gamma|_{F_{T'}}$. Considere $T \cap T' \in Cov(C)$ (por la proposición 3.1.1 b)), entonces $T \cap T' \subseteq (R \cap S) \cap (S \cap U) = S \cap (R \cap U)$, entonces $\beta|_{F_{T \cap T'}} = \mu|_{F_{T \cap T'}} = \gamma|_{F_{T \cap T'}}$. Es decir, $(R, \beta) \sim (U, \gamma)$.

Definición 3.1.9. Sea X una pregavilla. Definimos la pregavilla X^+ :

- a) En cada objeto $C \in \mathcal{C}$ por el conjunto de clases de equivalencia $X^+(C)$ de pares (R, μ) con $R \in Cov(C)$ y $\mu : F_R \rightarrow X$, con relación de equivalencia $\sim$.
- b) En morfismos $f \in \mathcal{C}(D, C)$ como:

$$X^+(f) : X^+(C) \rightarrow X^+(D)$$

$$[(R, \mu)] \mapsto [(R \cdot f, \mu \circ y_{f|_{F_{R \cdot f}}})].$$

La definición de $X^+(\bar{f})$ tiene sentido pues si $(R, \mu) \sim (S, \mu')$, entonces existe $T \in Cov(C)$ tal que $T \subseteq R \cap S$ y $\mu|_{F_T} = \mu'|_{F_T}$. Veamos que $X^+(f)((R, \mu)) \sim X^+(\bar{f})((S, \mu'))$. En efecto, como $T \in Cov(C)$, entonces $T \cdot f \in Cov(D)$, y $T \cdot f \subseteq (R \cdot f \cap S \cdot f) = (R \cap S) \cdot f$, pues si $g \in T \cdot f$, entonces $f \circ g \in T \subseteq R \cap S$, por lo tanto $g \in (R \cap S) \cdot f$. Y además, como $\mu|_{F_T} = \mu'|_{F_T}$, entonces $\mu|_{F_T} \circ y_{f|_{F_{R \cdot f}}} = \mu'|_{F_T} \circ y_{f|_{F_{R \cdot f}}}$.

Definición 3.1.10. Sea $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$. Definimos $\alpha^+ : X^+ \rightarrow Y^+$, para cada $C \in \mathcal{C}$, como

$$\begin{aligned}\alpha_C^+ : X^+(C) &\rightarrow Y^+(C) \\ (R, \mu) &\mapsto (R, \alpha \circ \mu)\end{aligned}$$

Notemos que $\alpha^+ : X^+ \rightarrow Y^+$ es transformación natural: sea $C \in \mathcal{C}$ y $f \in \mathcal{C}(C', C)$, entonces

$$\begin{aligned}Y^+ \bar{f}(\alpha_C^+((R, \mu))) &= Y^+((R, \alpha \circ \mu)) \\ &= (R \cdot f, (\alpha \circ \mu) \circ y_{f|_{F_{R \cdot f}}})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\alpha_{C'}^+(X^+ \bar{f}((R, \mu))) &= \alpha_{C'}((R \cdot f, \mu \circ y_{f|_{F_{R \cdot f}}})) \\ &= (R \cdot f, \alpha \circ (\mu \circ y_{f|_{F_{R \cdot f}}}))\end{aligned}$$

Además, si $(R, \mu) \sim (S, \mu')$, entonces existe $T \in \mathcal{C}ov(C)$ tal que $T \subseteq R \cap S$ y $\mu|_{f_T} = \mu'|_{f_T}$, entonces $\alpha \circ \mu|_{f_T} = \alpha \circ \mu'|_{f_T}$ con $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$; es decir, $(R, \alpha \circ \mu) \sim (S, \alpha \circ \mu')$.

Lema 3.1.3. La asignación

$$\begin{aligned}(\cdot)^+ : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} &\rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \\ X &\mapsto X^+\end{aligned}$$

y para cada $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$, $(\alpha)^+ = \alpha^+$, es un funtor.

Demostración Sean $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ y $\alpha' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z)$. Entonces, si $(R, \mu) \in X^+(C)$

$$\begin{aligned}((\alpha' \circ \alpha)^+)_C(R, \mu) &= (R, (\alpha' \circ \alpha) \circ \mu) \\ &= (R, \alpha' \circ (\alpha \circ \mu)) \\ &= \alpha_C'^+(R, \alpha \circ \mu) \\ &= \alpha_C'^+(\alpha_C^+(R, \mu))\end{aligned}$$

Por lo que $(\alpha' \circ \alpha)^+ = (\alpha')^+ \circ (\alpha)^+$. También, claramente, $(Id_X)^+ = Id_{X^+}$.
 $\square$

Definimos la siguiente asignación

$$\varepsilon : Id_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}} \rightarrow (\cdot)^+$$

que para cada pregavilla X es

$$\varepsilon_X : X \rightarrow X^+$$

definida para cada $C \in \mathcal{C}$ como $(\varepsilon_X)_C(x) = (max(C), \hat{x})$; donde $\hat{\cdot}$ es del isomorfismo del *Lema de Yoneda*. Veamos que ε , es una transformación natural, es decir, que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & X^+ \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha^+ \\ Y & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y^+ \end{array}$$

con $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$, conmuta. Esto es equivalente a probar que para cada $C \in \mathcal{C}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X(C) & \xrightarrow{(\varepsilon_X)_C} & X^+(C) \\ \alpha_C \downarrow & & \downarrow \alpha_C^+ \\ Y(C) & \xrightarrow{(\varepsilon_Y)_C} & Y^+(C) \end{array}$$

conmute: sea $x \in X(C)$, por un lado

$$\begin{aligned} \alpha_C^+((\varepsilon_X)_C(x)) &= \alpha_C^+((R, \hat{x})) \\ &= (R, \alpha \circ \hat{x}) \end{aligned}$$

por el otro lado

$$(\varepsilon_Y)_C(\alpha_C(x)) = (max(C), \widehat{\alpha_C(x)})$$

pero el isomorfismo del *Lema de Yoneda* es natural en X , por lo que $\widehat{\alpha_C(x)} = \alpha \circ \hat{x}$, por lo tanto $(max(C), \alpha \circ \hat{x}) = (max(C), \widehat{\alpha_C(x)})$.

Lema 3.1.4. Sean $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y X una pregavilla sobre $\mathcal{C}$.

- i) X es separable si y sólo si ε_X es monomorfismo.
- ii) X es gavilla si y sólo si ε_X es isomorfismo.

Demostración.

- i) $\Rightarrow$] Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dos transformaciones naturales y supongamos que para $C \in \mathcal{C}$ y $x \in X(C)$, $(\varepsilon_X \circ \varepsilon_1)_C(x) = (\varepsilon_X \circ \varepsilon_2)_C(x)$, entonces

$$(max(C), X(\cdot)((\varepsilon_1)_C(x))) = (max(C), X(\cdot)((\varepsilon_2)_C(x))).$$

Entonces, para cada $f \in max(C)$ y para cada $C \in \mathcal{C}$

$$X(\bar{f})((\varepsilon_2)_C(x)) = X(\bar{f})((\varepsilon_1)_C(x))$$

entonces, si X es separable, $(\varepsilon_1)_C(x) = (\varepsilon_2)_C(x)$. Por lo tanto, ε_X es monomorfismo.

$\Leftarrow$] Tenemos que ε_X es monomorfismo si y sólo si $(\varepsilon_X)_C$ es monomorfismo en **Set** (es decir, es inyectiva). Entonces, si $(\varepsilon_X)_C(y) = (\varepsilon_X)_C(x)$, entonces $x = y$ con $x, y \in X(C)$. Por lo tanto, para cada $f \in max(C)$, si $X\bar{f}(x) = X\bar{f}(y)$, entonces $x = y$. Por lo tanto, X es separable.

- ii) $\Rightarrow$] Sea X una gavilla. Sea $(R, \mu) \in X^+(C)$ con $C \in \mathcal{C}$. $\mu : F_R \rightarrow X$ determina $\{x_f | f \in R\}$ con $R \in Cov(C)$, una familia compatible para X . Como X es gavilla, existe una amalgama tal que $\mu_C(f) = X\bar{f}(x)$ con $x \in X(C)$, la cual es única, por lo que

$$\begin{aligned} \varepsilon_X^{-1} : X^+ &\rightarrow X \\ (R, \mu) &\mapsto x \end{aligned}$$

donde x es la amalgama de $\{x_f | f \in R \in Cov(C)\}$, queda bien definida. Por otro lado, $(\varepsilon_X \circ \varepsilon_X^{-1})((R, \mu)) = (max(C), X(\cdot)(x)) \sim (R, \mu)$, pues $R \subseteq max(C)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_X^{-1} \circ \varepsilon_X)(x) &= \varepsilon_X^{-1}((R, \mu)) \\ &= x \end{aligned}$$

$\Leftarrow]$ Supongamos que ε_X es isomorfismo, entonces $(\varepsilon_X)_C$ es isomorfismo para cada $C \in \mathcal{C}$. Entonces, $X(C) \cong X^+(C)$ en **Set**. Ahora, como cada familia compatible $\{x_f | f \in R\}$ y $R \in \text{Cov}(C)$ define una única pareja (R, μ) (salvo equivalencias), determina también un único $x \in X(C)$ con la propiedad de que $(\varepsilon_X)_C(x) = (\max(C), X(\cdot)(x)) \sim (R, \mu)$. Por lo tanto, x es la amalgama de $\{x_f | f \in R\}$.

□

Lema 3.1.5. Sean X una pregavilla, Y una gavilla y $g \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$. Entonces existe una única $\tilde{g} : X^+ \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow \varepsilon_X & \nearrow \tilde{g} \\ & X^+ & \end{array}$$

conmuta.

Demostración Para cada $C \in \mathcal{C}$ definimos $(\tilde{g})_C((R, \mu)) = x$ donde x es la amalgama de $g \circ \mu : F_R \rightarrow Y$. Entonces, si $a \in X(C)$,

$$\tilde{g}_C((\varepsilon_X)_C(a)) = \tilde{g}_C((\max(C), X(\cdot)(a))) = x$$

donde x es la amalgama de $g \circ X(\cdot)(a)$. Veamos que $x = g_C(a)$: por la naturalidad de $g : X \rightarrow Y$, tenemos

$$g_{C'}(X\bar{f}(a)) = Y\bar{f}(g_C(a))$$

Por otro lado,

$$(g \circ X(\cdot)(a))_{C'}(f) = g_{C'}(X\bar{f}(a)) = Y\bar{f}(g_C(a))$$

para toda $f \in \max(C)$, y como Y es gavilla, entonces $g_C(a)$ es amalgama de $g \circ X(\cdot)(a)$. Por lo tanto el diagrama conmuta. La unicidad es clara desde que la amalgama única determina toda la transformación natural. □

Lema 3.1.6. Para toda pregavilla X , X^+ es separable.

Demostración Sean $[(R, \mu)], [(R', \mu')] \in X^+(C)$ tales que la criba

$$S = \{f \in \mathcal{C}(D, C) | X^+ \bar{f}((R, \mu)) = X^+ \bar{f}((R', \mu'))\}$$

esta en $Cov(C)$ para algún $C \in \mathcal{C}$. Sea $f \in S$, entonces

$$\begin{aligned} (R \cdot f, \mu \circ y_f|_{F_{R \cdot f}}^{F_R}) &= X^+ \bar{f}((R, \mu)) \\ &= X^+ \bar{f}((R', \mu')) \\ &= (R' \cdot f, \mu' \circ y_f|_{F_{R' \cdot f}}^{F_{R'}}) \end{aligned}$$

De modo que $R \cdot f = R' \cdot f$ y $\mu \circ y_f|_{F_{R \cdot f}}^{F_R} = \mu' \circ y_f|_{F_{R' \cdot f}}^{F_{R'}}$, es decir $\mu \circ y_f$ y $\mu' \circ y_f$ coinciden en $F_{R \cdot f} = F_{R' \cdot f}$, y μ coincide con μ' en $F_R = F_{R'}$; pues, para $B \in \mathcal{C}$, $(y_f)_B(g) = f \circ g$, y como $g \in R \cdot f = R' \cdot f$, entonces $f \circ g \in R$ y $f \circ g \in R'$. Esto es, $(R, \mu) \sim (R', \mu')$. Por lo tanto, X^+ es separable. $\square$

Lema 3.1.7. Si X es una pregavilla separable, entonces X^+ es gavilla.

Demostración Sea $S \in Cov(C)$. Considere la siguiente familia compatible $\beta = \{(R_f, \mu_f) | f \in S\}$ para X^+ . Definimos la criba

$$\frac{R_f}{f} = \{f \circ g | g \in R_f \text{ y } f \in S \text{ y } f \circ g \in \mathcal{C}(dom(g), cod(f))\}$$

en $Cov(C)$. Una amalgama para β es $(\bigcup_{f \in S} \frac{R_f}{f}, \alpha)$, donde para $C' \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \alpha_{C'} : F_{\bigcup_{f \in S} \frac{R_f}{f}}(C') &\rightarrow X(C') \\ f \circ g &\mapsto \mu_f(g) \end{aligned}$$

que está bien definida, en general, pero en el peor de los casos, pudiera suceder que existan cribas $R_f, R_{f'}$, flechas $g \in R_f$ y $g' \in R_{f'}$, tales que $f \circ g = f' \circ g'$. Pero, eso implica que $(R_{f \circ g}, \mu_{f \circ g}) = (R_{f' \circ g'}, \mu_{f' \circ g'})$, entonces

$$(R_f \cdot g, \mu_f \circ y_g|_{f_{R_f \circ g}}) = (R_{f'} \cdot g', \mu_{f'} \circ y_{g'}|_{f_{R_{f'} \circ g'}})$$

es decir, existe $T \in Cov(dom(G))$ tal que $T \subseteq (R_f \cdot g) \cap (R_{f'} \cdot g')$. Entonces, para cada $t \in T$ tenemos que $\mu_f \circ y_g|_{F_{R_f \cdot g}}(t) = \mu_{f'} \circ y_{g'}|_{F_{R_{f'} \cdot g'}}(t)$,

y por la naturalidad de μ_f y $\mu_{f'}$, $X\bar{t}(\mu_f(g)) = X\bar{t}(\mu_{f'}(g'))$. Por lo tanto, como X es separable y $T \in Cov(dom(g))$, entonces $\mu_f(g) = \mu_{f'}(g')$. Por lo tanto α está bien definida.

□

Definición 3.1.11. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y Cov una **TG** sobre $\mathcal{C}$. Llamaremos $Gav(\mathcal{C}, Cov)$ a la subcategoría de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ conformada por todas las gavillas para Cov . Dadas $X, Y \in Gav(\mathcal{C}, Cov)$ definimos $Gav(\mathcal{C}, Cov)(X, Y) = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$. Cuando $\mathcal{C}$ es pequeña esta es la categoría será de Gavillas en el sitio $\mathcal{C}, Cov$. Cuando no exista ambigüedad utilizaremos simplemente Gav , asumiendo que queda claro en qué sitio están las gavillas.

Por definición, $Gav(\mathcal{C}, Cov)$ es una subcategoría plena, aún así pudiera haber duda sobre si esto es una buena definición, es decir, si las flechas entre pregavillas son las mismas que entre las gavillas. En principio, toda pregavilla puede ser gavilla, dependiendo la **TG** que se utilice. Además, lo que se puede decir es que si $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ para $X, Y \in Gav(\mathcal{C}, Cov)$, sucede que α preserva amalgamas en el siguiente sentido:

Consideremos una familia compatible $\{x_f | f \in R \in Cov(C)\}$ sobre X , vista como una transformación natural, podemos escribirla como $\beta_R : F_R \rightarrow X$ y como X es gavilla, esta transformación se puede extender a $\beta : y_C \rightarrow X$ con la amalgama $x \in X(C)$. La composición $\alpha \circ \beta_R$ define una familia compatible sobre Y , con una amalgama determinada por $\alpha \circ \beta$ pues

$$\begin{aligned} \beta_{C'} : y_{C'}(C') &\rightarrow X(C') \\ f &\mapsto X(\bar{f})(x) \end{aligned}$$

entonces $\alpha_{C'}(X(\bar{f})(x)) = Y(\bar{f})(\alpha_C(x))$ por la naturalidad de α . Entonces una amalgama de $\alpha \circ \beta$ es $\alpha_C(x)$ con x la amalgama de β y como Y también es gavilla, es la única.

Por los lemas 3.1.6 y 3.1.7, para cada $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ podemos construir la gavilla X^{++} . Esta asignación es un funtor porque es la composición del funtor $(\cdot)^+$ consigo mismo.

Definición 3.1.12. Llamaremos **El Gavillador** al funtor:

$$\begin{aligned} (\cdot)^{++} : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} &\rightarrow \mathbf{Gav}(\mathcal{C}, \mathbf{Cov}) \\ X &\mapsto X^{++} \end{aligned}$$

Ahora nombramos $\nu_X = \varepsilon_{X^+} \circ \varepsilon_X$ y esto define la instancia X de la transformación

$$\nu : Id_{\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}} \rightarrow (\cdot)^{++} \quad (3.14)$$

que es natural porque ε lo es. Como corolario del lema 3.1.5 tiene la siguiente propiedad:

Corolario 3. Si $g \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ con X una pregavilla y G una gavilla. Se puede factorizar de forma única a través de ν_X , según el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow \nu_X & \nearrow \tilde{g} \\ & X^{++} & \end{array} \quad (3.15)$$

Demostración Precisamente del lema 3.1.5, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & Y & & \\ & \searrow \varepsilon_X & \nearrow \tilde{g} & & \\ & X^+ & \xrightarrow{\varepsilon_{X^+}} & X^{++} & \end{array}$$

y $\tilde{g}$ queda únicamente determinada. □

También, del lema 3.1.4 se sigue que

Lema 3.1.8. Sean $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, X una pregavilla sobre $\mathcal{C}$ y $\mathbf{Cov}$ una **TG**.

- i) X es separable para $\mathbf{Cov}$ si y sólo si ν_X es monomorfismo.
- ii) X es gavilla para $\mathbf{Cov}$ si y sólo si ν_X es isomorfismo.

Demostración i) $\Rightarrow$] Sea X una pregavilla separable para $\mathbf{Cov}$, entonces ε_X es monomorfismo, además, por el lema 3.1.7 X^+ es una gavilla,

entonces ε_{X^+} es un isomorfismo.

Consideremos morfismo f y g tales que

$$\nu_X \circ f = \nu_X \circ g$$

y nombrando K a la inversa de ε_{X^+}

$$\begin{aligned} K \circ \nu_X \circ f &= K \circ \nu_X \circ g \\ K \circ (\varepsilon_{X^+} \circ \varepsilon_X) \circ f &= K \circ (\varepsilon_{X^+} \circ \varepsilon_X) \circ g \\ \varepsilon_X \circ f &= \varepsilon_X \circ g \\ f &= g \end{aligned}$$

Por lo tanto ν_X es monomorfismo.

$\Leftarrow$] Si ν_X es monomorfismo, y como X^+ siempre es separable, según 3.1.6, ε_{X^+} siempre es monomorfismo.

Si f y g son tales que

$$\varepsilon_X \circ f = \varepsilon_X \circ g$$

entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon_{X^+} \circ (\varepsilon_X \circ f) &= \varepsilon_{X^+} \circ (\varepsilon_X \circ g) \\ \nu_X \circ f &= \nu_X \circ g \\ f &= g \end{aligned}$$

Por lo tanto ε_X es monomorfismo, lo que equivale a que X es separable para Cov . ii) $\Rightarrow$] Si X es gavilla ε_X es isomorfismo, además, por 3.1.7 X^+ es gavilla, entonces ε_{X^+} es isomorfismo también.

Si denotamos K a la inversa de ε_X y K' a la inversa de ε_{X^+} sucede que

$$\begin{aligned} \nu_X \circ (K \circ K') &= \varepsilon_{X^+} \circ \varepsilon_X \circ K \circ K' \\ &= \varepsilon_{X^+} \circ K' \\ &= Id_{X^{++}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(K \circ K') \circ \nu_X &= K \circ (K' \circ \varepsilon_{X+}) \circ \varepsilon_X \\ &= K \circ \varepsilon_X \\ &= Id_X\end{aligned}$$

por lo tanto ν_X es isomorfismo.

$\Leftarrow$] Si ν_X es isomorfismo, nombramos K a su inversa, entonces ε_X es monomorfismo, porque, si existen f y g tales que $\varepsilon_X \circ f = \varepsilon_X \circ g$ entonces

$$\begin{aligned}K \circ \varepsilon_{X+} \circ (\varepsilon_X \circ f) &= K \circ \varepsilon_{X+} \circ (\varepsilon_X \circ g) \\ (K \circ \nu_X) \circ f &= (K \circ \nu_X) \circ g \\ f &= g\end{aligned}$$

por lo que X es separable, entonces X^+ es gavilla, lo que equivale a que ε_{X+} es isomorfismo. Si nombramos K' a la inversa de ε_{X+} resulta que

$$\begin{aligned}K' &= K' \circ Id_{X^{++}} \\ &= K' \circ ((\varepsilon_{X+} \circ \varepsilon_X) \circ K) \\ &= (K' \circ \varepsilon_{X+}) \circ \varepsilon_X \circ K \\ &= \varepsilon_X \circ K\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\varepsilon_X \circ (K \circ \varepsilon_{X+}) &= (\varepsilon_X \circ K) \circ \varepsilon_{X+} \\ &= K' \circ \varepsilon_{X+} \\ &= Id_{X^+}\end{aligned}$$

y ya sabemos que $(K \circ \varepsilon_{X+}) \circ \varepsilon_X = Id_X$, lo que nos dice que $(K \circ \varepsilon_X)$ es la inversa de ε_X , es decir, ε_X es isomorfismo, lo que equivale a que X es gavilla. $\square$

Lema 3.1.9. *El Gavillador es el adjunto izquierdo de la inclusión*

$$i : Gav(\mathcal{C}, Cov) \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$$

Demostración Definimos las asignaciones

$$\begin{aligned} \circ \nu_X : Gav(X^{++}, Y) &\rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) \\ \alpha &\mapsto \alpha \circ \nu_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{(\cdot)} : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) &\rightarrow Gav(X^{++}, Y) \\ \beta &\mapsto \widetilde{\beta} \end{aligned}$$

según el corolario 3. Estas asignaciones están bien definidas, la primera porque se define a través de la composición y la segunda porque la flecha que completa el diagrama es única y siempre existe.

Estas son inversas:

Primero, consideremos $\alpha \in Gav(X^{++}, Y)$ entonces

$$\widetilde{(\cdot)} \circ (\circ \nu_X)(\alpha) = \widetilde{\alpha \circ \nu_X} \quad (3.16)$$

la cual hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha \circ \nu_X} & Y \\ & \searrow \nu_X & \nearrow \widetilde{\alpha \circ \nu_X} \\ & X^{++} & \end{array}$$

pero tambien α lo hace conmutar, por lo que, de la unicidad, $\widetilde{\alpha \circ \nu_X} = \alpha$. Ahora consideremos $\beta \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$, la otra composición es $(\circ \nu_X) \circ \widetilde{(\cdot)}(\alpha) = \widetilde{\beta} \circ \nu_X = \beta$ por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & Y \\ & \searrow \nu_X & \nearrow \widetilde{\beta} \\ & X^{++} & \end{array}$$

Por lo tanto $Gav(X^{++}, Y) \cong \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$. Para probar la naturalidad, consideremos $\mu \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X', X)$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) & \xrightarrow{\widetilde{(\cdot)}} & Gav(X, Y) \\ \circ\mu \downarrow & & \downarrow \circ\mu^{++} \\ \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X', Y) & \xrightarrow[\widetilde{(\cdot)}]{} & Gav(X', Y) \end{array} \quad (3.17)$$

conmuta si y solo si, para cada $\beta \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ se cumple que $\widetilde{\widetilde{\beta}} \circ \mu^{++} = \widetilde{\widetilde{\beta \circ \mu}}$. Para esto consideremos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\beta \circ \mu} & Y \\ & \searrow \nu_{X'} & \nearrow \widetilde{\widetilde{\beta \circ \mu}} \\ & X^{++} & \end{array} \quad (3.18)$$

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \nu_{X'} \downarrow & & \downarrow \nu_X & & \nearrow \widetilde{\widetilde{\beta}} \\ Y^{++} & \xrightarrow{\mu^{++}} & X^{++} & & \end{array} \quad (3.19)$$

que conmutan. El triángulo (3.18) es la definición de $\widetilde{\widetilde{\beta \circ \mu}}$ y el segundo 3.19 está conformado por dos diagramas que conmutan, el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\mu} & X \\ \nu_{X'} \downarrow & & \downarrow \nu_X \\ Y^{++} & \xrightarrow{\mu^{++}} & X^{++} \end{array}$$

conmuta porque ν , ver (3.14), es transformación natural y el triángulo es el que determina a $\widetilde{\widetilde{\beta}}$. Por lo que, tanto $\widetilde{\widetilde{\beta}} \circ \mu^{++}$ como $\widetilde{\widetilde{\beta \circ \mu}}$ hacen factorizar a $\beta \circ \mu$ mediante ν_X por lo que el corolario 3 nos permite

concluir la igualdad, entonces, el diagrama (3.17) conmuta. Lo que demuestra la naturalidad del isomorfismo en X , para Y consideremos

$$\begin{array}{ccc} Gav(X^{++}, Y) & \xrightarrow{\circ \nu_X} & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) \\ \mu \circ \downarrow & & \downarrow \mu \circ \\ Gav(X^{++}, Y') & \xrightarrow{\circ \nu_X} & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Y') \end{array} \quad (3.20)$$

que conmuta claramente desde que la composición de transformaciones naturales es asociativa. $\square$

Proposición 3.1.6. *El Gavillador preserva límites finitos.*

Demostración Como ya vimos en el capítulo 1, todos los límites finitos se construyen solo con el objeto terminal y los pullbacks, entonces, bastará demostrar que se preservan estos dos tipos de límites.

Primero, el objeto terminal, que denotamos por 1 , siempre es una gavilla, pues, dada cualquier familia compatible sobre 1 , como el terminal envía a cada $C \in \mathcal{C}$ a un único objeto, este será la amalgama única, en particular para cada familia indizada por una criba en un $Cov(C)$, por lo que 1 siempre es gavilla, luego, ν_X es isomorfismo, entonces, $1^{++} \cong 1$ es terminal en $Gav(\mathcal{C}, Cov)$.

Para probar que $(\cdot)^{++}$ preserva límites, bastará probar que lo hace $(\cdot)^+$: Sean $X, Y, Z \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, $f \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(X, Z)$, $g \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z)$ y su pullback en $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad (3.21)$$

lo que queremos probar es que

$$\begin{array}{ccc} A^+ & \xrightarrow{g'^+} & X^+ \\ f'^+ \downarrow & & \downarrow f^+ \\ Y^+ & \xrightarrow{g^+} & Z^+ \end{array} \quad (3.22)$$

es un pullback en $Gav(\mathcal{C}, Cov)$ para una **TG** Cov , para esto supongamos que existen objetos y morfismos tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{h} & X^+ \\ h' \downarrow & & \downarrow f^+ \\ Y^+ & \xrightarrow{g^+} & Z^+ \end{array} \quad (3.23)$$

conmuta, entonces, si $x \in G(C)$, $h_C(X) \in X^+$ es decir, es una clase de equivalencia con un representante de la forma (R, α) con $R \in Cov(C)$ y $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(F_R, X)$ y similarmente $h'_C(X) \in Y^+$ con un representante de la forma (S, α') con $S \in Cov(C)$ y $\alpha' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(F_S, Y)$ y que el diagrama conmute sucede que

$$(f \circ h)_C(x) = (g \circ h')_C(x)$$

lo que implica que

$$(S, g \circ \alpha') \sim (R, f \circ \alpha)$$

esto significa que existe una $T \subseteq R \cap S$, tal que $T \in Cov(C)$ y

$$(g \circ \alpha')|_{F_T} = (f \circ \alpha)|_{F_T}$$

por lo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_T & \xrightarrow{\alpha'} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad (3.24)$$

conmuta. Entonces, como (3.21) es pullback, esto determina una única $\check{f}$ tal que e diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F_T & & & & \\ & \searrow \alpha' & & & \\ & & A & \xrightarrow{g'} & X \\ & \swarrow \check{f} & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad (3.25)$$

conmuta. Lo que nos muestra el mecanismo para definir una flecha $\check{f} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(G, A^+)$ siendo que podemos definir $\check{f}_C(x) = [(T, \check{f})] \in A^+$ que tiene la propiedad de que

$$g'_C \circ \check{f}(x) = (T, g' \circ \check{f}) \smile (R, \alpha') = h_C(x)$$

y

$$f'_C \circ \check{f}_C(x) = (T, f' \circ \check{f}) \smile (S, \alpha) = h'_C(x)$$

es decir, pertenecen a la misma clase de equivalencia en X^+ y Y^+ respectivamente, esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G & & & & X \\ & \searrow \check{f} & & \searrow h & \\ & A^+ & \xrightarrow{g'^+} & & X \\ & \downarrow f'^+ & & \downarrow f^+ & \\ & Y & \xrightarrow{g^+} & & Z \end{array} \quad (3.26)$$

conmuta. Por lo tanto $(\cdot)^+$ preserva pullbacks. $\square$

Para terminar la demostración del teorema 3.1.1 notemos que hemos construido una subcategoría plena de la categoría de pregavillas, cuya inclusión tiene adjunto izquierdo, que preserva límites finitos. Por lo que para concluir la equivalencia 4) necesitamos demostrar que, dada una subcategoría plena con tales características, podemos determinar únicamente alguna de las otras 3, en este caso, demostraremos que determina una operación universal de clausura.

Proposición 3.1.7. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, ε una subcategoría plena de la categoría de pregavillas sobre $\mathcal{C}$, tal que el funtor inclusión $i : \varepsilon \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene un adjunto izquierdo $\mathcal{G}$ que preserva límites finitos. Entonces, esto determina una operación universal de clausura.*

Demostración. Para cada $X \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ definimos la operación

$$\begin{aligned} (\tilde{\cdot}) : \text{Sub}(X) &\rightarrow \text{Sub}(X) \\ A &\rightarrow \tilde{A} \end{aligned}$$

dónde $\tilde{A}$ es tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \longrightarrow & i\mathcal{G}(A) \\ \downarrow & & \downarrow i\mathcal{G}(j) \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & i\mathcal{G}(X) \end{array} \quad (3.27)$$

es un pullback. Siendo $j \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(A, X)$ la transformación natural inclusión y η_X la unidad de la adjunción en su instancia X . $\square$

3.2 La estructura de la categoría de gavillas

Proposición 3.2.1. $Gav(\mathcal{C}, Cov)$ es cerrada bajo límites arbitrarios.

Demostración. Sea $\mathcal{F} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ un diagrama, cuyo cono límite es $(X \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{F}(i))_{i \in \mathbf{I}}$; Cov una **TG**, $R \in Cov(C)$ con $C \in \mathcal{C}$ y $\phi \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(F_R, X)$. Suponemos que cada $\mathcal{F}(i) \in Gav$ y queremos concluir que $X \in Gav$.

Partiendo de la propiedad del cono

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha_i \swarrow & & \searrow \alpha_j \\ \mathcal{F}(i) & \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} & \mathcal{F}(j) \end{array} \quad (3.28)$$

podemos componer con la transformación natural ϕ y resulta que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & F_R & \\ \alpha_i \circ \phi \swarrow & & \searrow \alpha_j \circ \phi \\ \mathcal{F}(i) & \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} & \mathcal{F}(j) \end{array} \quad (3.29)$$

conmuta, además como cada $\mathcal{F}(i) \in Gav$, cada composición $\alpha_i \circ \phi$ tiene una amalgama única, digamos, $y_i \in \mathcal{F}(i)$, esto extiende las transfor-

maciones naturales de manera única, por lo que tambien el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & y_C & \\
 \overline{\alpha_i \circ \phi} \swarrow & & \searrow \overline{\alpha_j \circ \phi} \\
 \mathcal{F}(i) & \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} & \mathcal{F}(j)
 \end{array} \tag{3.30}$$

por lo que es tambien un cono sobre $\mathcal{F}$. Como X es el vértice del cono límite debe existir una transformación natural $K \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(y_C, X)$ tal que $\alpha_i \circ K = \overline{\alpha_i \circ \phi}$, pero esto implica que $\alpha_i \circ K|_{F_R} = \alpha_i \circ \phi$ para todo $i \in \mathbf{I}$ y como se muestra en (3.29) la composición de ϕ con los α_i tambien es un cono sobre $\mathcal{F}$ entonces sucede que $K|_{F_R} = \phi$ por la unicidad en la propiedad del cono límite, por lo tanto, si tomamos $f \in \mathcal{C}(C', C) \cap R$ y utilizamos la naturalidad de K junto con la definición del funtor y_C tenemos que

$$\begin{aligned}
 \phi_{C'}(f) &= K_{C'}(f) \\
 &= K_{C'}(y_C(f)(Id_C)) \\
 &= X(f)(K(Id_C))
 \end{aligned}$$

esto significa que $K(Id_C) \in X(C)$ es la amalgama única de la familia compatible determinada por ϕ . Por lo tanto $X \in Gav(\mathcal{C}, Cov)$ $\square$

Proposición 3.2.2. Sean $X, G \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ y Cov una **TG** tal que G es gavilla, entonces, G^X es una gavilla.

Demostración. Utilizando la proposición 3.1.5: Tomemos $A \leq Z$ denso con $Z \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ y $\alpha \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(A, G^X)$. Entonces, por la adjunción, esto determina una flecha $\tilde{\alpha} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(A \times X, G)$. Ahora, como X es densa como subobjeto de si misma y A lo es por hipotesis, tambien así lo es $A \times X$ como subobjeto de $Z \times X$, luego, existe una extensión única $\tilde{\tilde{\alpha}} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(Z \times X, G)$. Por último, usando una vez más la adjunción se determina de manera única una flecha $\tilde{\tilde{\tilde{\alpha}}} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(Z, G^X)$. Por lo que, toda flecha de una subpregavilla densa a G^X tiene una única extensión, por lo tanto G^X es gavilla. $\square$

De la Proposición 3.1.4 tenemos que los subobjetos cerrados de una gavilla son gavillas, esto nos dice que el clasificador de subobjetos en la categoría de gavillas debe ser aquel que distinga no solo a los subfuntores sino a aquellos que son cerrados con respecto a la topología de Grothendieck que determina las gavillas. Esto es fácil de hacer por la definición de subpregavilla cerrada en 3.1.6.

Definición 3.2.1. Llamaremos Ω_J al subfuntor de Ω

$$\Omega_J : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$C \mapsto \Omega_J(C) = \{S \in \Omega(C) \mid \text{Existe algún } R \text{ criba sobre } C, \text{ tal que } J(R) = S\}$$

y para una flecha $f \in \mathcal{C}(C, C')$

$$\begin{aligned} \Omega_J(\bar{f}) : \Omega_J(C') &\rightarrow \Omega_J(C) \\ S' &\rightarrow S' \cdot f \end{aligned}$$

de esta manera es subfuntor de Ω .

El único inconveniente que podría existir es que $S' \cdot f$ no fuera elemento de $\Omega_J(C)$, por lo que hay que probar que existe alguna criba R tal que $J(R) = S' \cdot f$. Para esto, llamemos R' a una criba tal que $J(R') = S'$ luego

$$\begin{aligned} J(R') \cdot f &= \{h \in \mathcal{C}(D, C') \mid f \circ h \in J(R') \text{ y } D \in \mathcal{C}\} \\ &= \{h \in \mathcal{C}(D, C') \mid f \circ h \in \{k \in \mathcal{C}(D, C) \mid R' \cdot k \in \text{Cov}(D)\} \text{ y } D \in \mathcal{C}\} \\ &= \{h \in \mathcal{C}(D, C') \mid R' \cdot (f \circ h) \in \text{Cov}(D) \text{ y } D \in \mathcal{C}\} \\ &= \{h \in \mathcal{C}(D, C') \mid (R' \cdot f) \cdot h \in \text{Cov}(D) \text{ y } D \in \mathcal{C}\} \\ &= J(R' \cdot f) \end{aligned}$$

esto es $S = J(R' \cdot f)$, por lo que $S \in \Omega_J(C)$.

Este es el clasificador de subobjetos:

Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre $\mathcal{C}$ y $G \in \text{Gav}(\mathcal{C}, \text{Cov})$, el siguiente dia-

grama conmuta si y solo si F es cerrada con respecto de la **TG**, Cov

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & 1 \\ i \downarrow & & \downarrow t \\ G & \xrightarrow{J \circ \phi_{\mathcal{F}}} & \Omega_J \end{array} \quad (3.31)$$

pues $\mathcal{F}(C) = \tilde{\mathcal{F}}(C) = \{x \in G(C) | J_C(\phi_{\mathcal{F}}(x)) = \max(C)\}$. Para ver que es un pullback, suponemos que existe $\mathcal{F}'$ una pregavilla y $m' \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{F}', G)$ monomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}' & \longrightarrow & 1 \\ m' \downarrow & & \downarrow t \\ G & \xrightarrow{J \circ \phi_{\mathcal{F}}} & \Omega_J \end{array} \quad (3.32)$$

conmuta. Esto implica que para todo $x \in \mathcal{F}'(C)$ se cumple que $J \circ \phi_{\mathcal{F}}(m'(x)) = \max(C)$ pero esto equivale a que $m(x) \in \tilde{\mathcal{F}}(C) = \mathcal{F}(C)$ por lo tanto se puede definir una flecha $\check{f}$ de una única manera, esto es, $\check{f}_C(x) = m'(x)$, de tal manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}'(C) & & & & \\ & \searrow \check{f}_C & & \searrow & \\ & \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{1_{\mathcal{F}}} & 1(C) & \\ & \downarrow i_C & & \downarrow t_C & \\ & G(C) & \xrightarrow{\phi_C^i} & \Omega & \end{array} \quad (3.33)$$

conmuta. Siendo así que Ω_J cumple ser el clasificador de subobjetos en la categoría de Gavillas. Despues de esto, queda claro que la categoría de Gavillas, de cualquier Topología de Grothendieck, es un Topos.

3.3 Ejemplos de Topologías y Topos de Grothendieck

Definición 3.3.1. Un **Topos de Grothendieck** es una categoría equivalente a una categoría de gavillas sobre un sitio.

Los topos de Grothendieck son propiamente Topos como ya se mostró en el capítulo anterior, algunos ejemplos de Topos de Grothendieck se enuncian a continuación.

- Toda categoría de pregavillas es un Topos de Grothendieck. Esto es consecuencia que de se puede definir una **TG** que contenga solo a la criba máxima, es decir, $Cov(C) = \{max(C)\}$: Si X es una pregavilla y $\{x_f \in X(C) | f \in R\}$ una familia compatible sobre X con $R \in Cov(C)$, como R no tiene de otra que ser $max(C)$, $F_R = y_C$ entonces esta familia compatible determina la transformación natural $\alpha \in \mathbf{Set}^{cop}(y_C, X)$ cuyas instancias se definen como $\alpha_C(f) = x_f$, entonces $\alpha_C(Id_C)$ es la única amalgama, por lo tanto, según la Definición 3.1.8 de gavilla, X es una gavilla.
- **Set** es un topos de Grothendieck. Esto se debe a que

$$\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}^1 = Gav(1, Cov)$$

la categoría de gavillas sobre el sitio $(1, Cov)$, siendo 1 la categoría discreta con un solo objeto y Cov la única **TG** que existe en esa categoría, esto es $Cov(*) = \{max(*)\}$ pues la única flecha en esta categoría es la identidad del único objeto, siendo así que solo existe una criba, la criba maximal. En este caso cada pregavilla es precisamente un conjunto (pues todo lo que hace es asociar al único objeto de 1, algún objeto en **Set**) y según esta **TG** (la más pequeña) es una gavilla. Como todo isomorfismo de categorías es una equivalencia **Set** es equivalente a una categoría de gavillas sobre un sitio.

- Todo espacio topológico determina un Topos de Grothendieck. Esto es inmediato de la definición de gavilla en un espacio topológico (Definición 3.1.1), en ese caso el

$$Cov(U) = \{R \in \Omega(U) | \cup_{f \in R} Dom(f) = U\}$$

Esto se corresponde con la manera en la que se define una cubierta en un espacio topológico en el sentido de que R es una cubierta si y solo si $R \in Cov(U)$, salvo que en un caso se piensa en la cubierta

como una colección de conjuntos abiertos y en el otro como una colección de sus inclusiones, por a) de esa definición las gavillas sobre un espacio topológico son pregavillas separables para Cov y por b) estas gavillas tienen una amalgama única para cada familia compatible de una cubierta de U , es decir, para cada $R \in Cov(U)$, por lo tanto estas gavillas son las mismas que las gavillas sobre el sitio $(\mathcal{O}(X), Cov)$. En otras palabras, la categoría de gavillas sobre un espacio topológico es un Topos de Grothendieck.

Topología de Lawvere-Tierney 4 sobre **Set** ^{$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}$} inducida por un functor de cuantización.

En este capítulo veremos como por medio de la cuantización algunos operadores sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ estan relacionados con observables clásicos. A partir de esta correspondencia, veremos como el proceso de cuantización, induce un functor, el functor de cuantización. El cual nos permitirá definir una topología, a la que llamaremos topología cuántica.

4.1 Categorías de precuantización y functor de quantización

Comenzaremos definiendo, del topos cuantico **Set** ^{$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}$} [1] , lo necesario, para el objetivo del capítulo.

Definición 4.1.1. La categoría $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ tiene por objetos, $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, las subálgebras conmutativas de un álgebra, $B_{\mathcal{H}}$, de von Neumann sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$; y por morfismos, las inclusiones $i_{V_2, V_1} \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}(V_2, V_1)$, si y sólo si $V_2 \subseteq V_1$ para cada $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$.

En el Capítulo 3, definimos lo que es una criba, sin embargo, para el caso particular de este capítulo, es decir, las cribas sobre objetos de $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, la definición de criba puede formularse de la siguiente manera:

Definición 4.1.2. Para todo $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, una criba S sobre V es una colección de subálgebras $V_1 \in V$, tal que si $V_1 \in S$ y $V_2 \subseteq V_1$, entonces $V_2 \in S$.

En el topos **Set** ^{$\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}$} , el clasificador de subobjetos se identifica con la pregavilla Ω definida:

i) En objetos $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ como el conjunto, $\Omega(V)$, de todas las cribas sobre V

ii) En morfismos $i_{V_1, V} \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}(V_1, V)$, como

$$\begin{aligned}\Omega(\overline{i_{(V_1, V)}}) : \Omega(V) &\rightarrow \Omega(V_1) \\ \omega &\mapsto \Omega(\overline{i_{(V_1, V)}})(\omega) := \{V_2 \subset V_1 \mid V_2 \in \omega\}\end{aligned}$$

Ahora, consideremos un conjunto de observables clásicas a cuantizar, $\mathcal{O}$, el cual es un álgebra de Lie, con respecto a un conmutador adecuadamente definido, como un álgebra de Poisson de un conjunto de funciones en el espacio de fase.

La cuantización de $\mathcal{O}$, viene dada por una función inyectiva, v , a la que llamaremos función de cuantización, entre $\mathcal{O}$ y el álgebra, $\widehat{\mathcal{H}}$, de operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$. Es decir, por :

$$\begin{aligned}v : \mathcal{O} &\rightarrow \widehat{\mathcal{H}} \\ a &\mapsto v(a) := \hat{a}\end{aligned}$$

donde $\hat{a}$ es un operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Además, la función de cuantización refleja estructura en el siguiente sentido: la (no) conmutatividad en el álgebra de Lie $\mathcal{O}$ se refleja en la (no) conmutatividad en el álgebra de operadores sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En general los operadores $\hat{a} \in \widehat{\mathcal{H}}$ no son operadores acotados, definimos el mapeo de unitarización $\check{v}$:

$$\begin{aligned}\check{v} : \mathcal{O} &\rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{H}} \\ a &\mapsto e^{iv(a)} = e^{i\hat{a}}\end{aligned}$$

Este mapeo asigna a cada observable $a \in \mathcal{O}$ un operador acotado sobre espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Además, refleja la conmutatividad o no conmutatividad en $\mathcal{O}$ al álgebra de von Neumann $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ de operadores acotados sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Note que la función de unitarización es inyectivo, pues la función de cuantización lo es.

Definición 4.1.3. a) La categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, es la categoría que tiene por objetos subconjuntos conmutativos $C \subseteq \mathcal{O}$, y que tiene por morfismos

mos, inclusiones de conjuntos, es decir, si $C' \subseteq C$ para cualesquiera $C, C' \in \mathcal{C}_\theta$, entonces tenemos un morfismo $i_{C',C} \in \mathcal{C}_\theta$

- b) Llamaremos a cualquier subcategoría plena de $\mathcal{C}_\theta$, **categoría de precuántización**.
- c) La categoría $\mathfrak{C}$, tiene por objetos todas las categorías precuánticas, y como morfismos a los funtores inclusión.

Note que la categoría $\mathcal{C}_\theta$ definida en la sección anterior, forma un conjunto parcialmente ordenado, con la relación $\subseteq$. Por otro lado, para cada objeto $C \in \mathcal{C}_\theta$, los conjuntos

$$\check{v}(C) := \{e^{i\hat{a}} \in \mathcal{B}_{\mathcal{H}} \mid \text{existe } a \in \mathcal{O} \text{ tal que } v(a) = \hat{a}\}$$

y

$$\check{v}(C)^* := \{e^{-i\hat{a}} \in \mathcal{B}_{\mathcal{H}} \mid \text{existe } a \in \mathcal{O} \text{ tal que } v(a) = \hat{a}\}$$

son conjuntos conmutativos de operadores acotados, pues el objeto C es un conjunto conmutativo de observables clásicas.

Definición 4.1.4. a) Para cada álgebra $B \subset \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$, definimos el **conmutador de B** como

$$B' := \{\hat{a} \in \mathcal{B}_{\mathcal{H}} \mid \hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{a} \cdot \hat{b} \text{ para todo } b \in B\}$$

- b) El **doble conmutador de B** , se define como $B'' = (B')'$.

La función de unitarización $\check{v} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$, induce el siguiente funtor :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{C}_\theta &\rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}} \\ C &\mapsto \phi(C) := (\check{v}(C) \cup \check{v}(C)^*)'' \end{aligned}$$

Y a cada morfismo $i_{C'_1, C'_2} \in \mathcal{C}_\theta(C_1, C_2)$, le asigna la inclusión

$$\phi(i_{C'_1, C'_2}) := i_{\phi(C_1), \phi(C_2)} : \phi(C_1) \rightarrow \phi(C_2)$$

en $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}$. Ahora, sea $id_C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}(C, C)$, la cual es la inclusión $i_{C,C}$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, entonces $\phi(id_C) = i_{\phi(C), \phi(C)} = id_{\phi(C)}$. Por otro lado, si $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y $C_1 \subset C_2 \subset C_3$, entonces $\phi(C_1) \subset \phi(C_2) \subset \phi(C_3)$; es decir,

$$\phi(i_{C_1, C_2} \circ i_{C_2, C_3}) = \phi(i_{C_1, C_2}) \circ \phi(i_{C_2, C_3})$$

También para cada $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$, definimos al funtor $\phi|_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, como la restricción de $\phi : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ sobre $\mathbf{C}$ (De aquí en adelante, escribiremos $\phi|_{\mathbf{C}}$ simplemente como ϕ). Es claro, que si $i_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2} \in \mathfrak{C}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_1 & \xrightarrow{i_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2}} & \mathbf{C}_2 \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi \\ & \mathcal{V}_{\mathcal{H}} & \end{array} \quad (4.1)$$

conmuta.

Definición 4.1.5. Al funtor $\phi : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ y su restricción $\phi|_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ para cada $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$, le llamaremos **functor de cuantización** inducidos por la función de unitarización.

Ahora, definiremos un funtor $\psi : \mathcal{V}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ para cada $V \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$

$$\psi(V) := \check{v}^{-1} = \{a \in \mathcal{O} \mid \check{v}(a) \in V\}$$

Ahora, para cada morfismo $i_{V_1, V_2} \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}(V_1, V_2)$, entonces $\psi(i_{V_1, V_2}) = i_{\psi(V_1), \psi(V_2)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}(\psi(V_1), \psi(V_2))$. Los axiomas de identidad y composición, claramente se cumplen.

Definición 4.1.6. Al funtor $\psi : \mathcal{V}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ le llamaremos **functor de clasicificación** inducido por la función de unitarización.

Proposición 4.1.1. El par (ϕ, ψ) del funtor de cuantización y el funtor de clasicificación es una conexión de Galois. Es decir, para cada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, se cumple que

$$\phi(C) \subseteq V \quad \text{si y sólo si} \quad C \subseteq \psi(V). \quad (4.2)$$

Equivalentemente, los funtores $\lrcorner : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y $\lrcorner : \mathcal{V}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ definidos por

$$\lrcorner := \psi \circ \phi \quad \text{y} \quad \lrcorner := \phi \circ \psi \quad (4.3)$$

respectivamente; satisfacen

$$C \subseteq \mathfrak{T}(C) \quad y \quad \mathfrak{J}(V) \subseteq V. \quad (4.4)$$

Demostración. Primero probaremos las relaciones en (4.4). Como $\phi(C) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, es un álgebra de von Neumann conmutativa tal que $\check{v}(C) \subseteq \phi(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, entonces

$$C \subseteq \check{v}^{-1}(\phi(C)) = \psi(\phi(C))$$

También, como $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, tenemos que $\check{v}(\check{v}^{-1}(V)) = \check{v}(\psi(V)) \subset V$. Entonces, $\phi(\psi(V)) \subseteq V$.

Ahora, para demostrar la relación en (4.2), supongamos $\phi(C) \subseteq V$ para cada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$; entonces

$$\mathfrak{T}(C) = \psi(\phi(C)) \subseteq \psi(V)$$

y por las relaciones en (4.4) concluimos que $C \subseteq \psi(V)$. Por otro lado, si $C \subseteq \psi(V)$ para cada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, entonces

$$\psi(C) \subseteq \phi(\psi(V)) = \mathfrak{J}(V)$$

Por lo que, $\phi(C) \subseteq V$ se sigue de las relaciones en (4.4)

Note que derivamos la relación (4.2) desde las relaciones en (4.4). Por otro lado, si la relación en (4.2), entonces las relaciones en (4.4) se cumplen. En efecto, como $\phi(C) \subseteq \phi(C)$ para cada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, entonces $C \subseteq \mathfrak{T}(C)$ por (4.2); similarmente $\mathfrak{J}(V) \subseteq V$ para cada $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$. Es decir, (4.2) y (4.4) son equivalentes. $\square$

Proposición 4.1.2. Los funtores $\phi : \mathcal{C}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ y $\psi : \mathcal{V}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ satisfacen

$$\phi(\psi(\phi(C))) = \phi(C) \quad y \quad \psi(\phi(\psi(V))) = \psi(V) \quad (4.5)$$

para cada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y para cada $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$. Por la Proposición 4.1.1 tenemos que $C \subseteq \mathfrak{T}(C)$, entonces $\phi(C) \subseteq \phi(\psi(\phi(C)))$, mientras que

$$\phi(\psi(\phi(C))) = \mathfrak{J}(\phi(C)) \subseteq \phi(C)$$

pues $\phi(C) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ (Proposición 4.1.1). Por lo tanto, $\phi(\psi(\phi(C))) = \phi(C)$. De manera similar podemos mostrar que $\psi(\phi(\psi(C))) = \psi(C)$. $\square$

4.2 Categoría de precuantización propia

Hasta ahora, no se ha supuesto que los objetos de $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$ tengan estructura algebraica. Algunas categorías de precuantización, sin embargo, tienen objetos dotados de algunas estructuras algebraicas. Entre ellas, existe una distinguida:

Definición 4.2.1. La **categoría de precuantización propia**, $\mathbf{A}$, es una categoría de precuantización cuyos objetos son los puntos fijos del funtor $\mathcal{T} : \mathcal{C}_{\theta} \rightarrow \mathcal{C}_{\theta}$; es decir,

$$C \in \mathbf{A} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{T}(C) = C \quad (4.6)$$

Ahora, consideremos al funtor $\mathcal{T} : \mathcal{C}_{\theta} \rightarrow \mathcal{C}_{\theta}$. Tenemos que para cada $C \in \mathcal{C}_{\theta}$, $\mathcal{T}(C) \in \mathbf{A}$ de la definición de $\mathbf{A}$; podemos restringir el dominio del funtor $\mathcal{T}$ a cualquier categoría de precuantización $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$, tal que incluya a la categoría de precuantización propia, $\mathbf{A}$, como subcategoría. También, por supuesto, podemos restringir el dominio de $\mathcal{T}$ a cualquier categoría de precuantización, como en el caso de los funtores de cuantización y clasicización. Escribiremos $\mathcal{T}$ para los funtores restringidos de $\mathcal{T}$. Note que si tomamos una categoría $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathbf{A}$ es una subcategoría de $\mathbf{C}$, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{i_{\mathbf{A},\mathbf{C}}} & \mathbf{C} \\ & \searrow id_{\mathbf{A}} & \swarrow \mathcal{T} \\ & \mathbf{A} & \end{array} \quad (4.7)$$

conmuta por la definición de $\mathbf{A}$. Por otro lado, note que la Proposición 4.1.2, implica que, para cualquier $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$, el funtor $\phi : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ se factoriza a través de $\mathbf{A}$; esto es, que el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{\quad \top \quad} & \mathbf{A} \\ & \searrow \phi \quad \swarrow \phi & \\ & \mathcal{V}_{\mathcal{H}} & \end{array} \quad (4.8)$$

conmute.

Proposición 4.2.1. Sean $\mathbf{C}, \mathbf{C}_2 \in \mathfrak{C}$. Si la categoría de precuantización, $\mathbf{A}$, es subcategoría de $\mathbf{C}$, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{C}_2 & \xrightarrow{\quad \top \quad} & \mathbf{A} & \xrightarrow{i_{\mathbf{A}, \mathbf{C}}} & \mathbf{C} \\ & \searrow \phi & \downarrow \phi & \swarrow \phi & \\ & & \mathcal{V}_{\mathcal{H}} & & \end{array} \quad (4.9)$$

conmuta.

Demostración. Es inmediato de la conmutatividad de los diagramas (4.7) y (4.8), y la Proposición 4.1.2. $\square$

4.3 Topologías cuánticas

En el capítulo anterior mostramos que son equivalentes una **Operación de clausura universal**, una **TG** y una **TLT** (Teorema 3.1.1). En [4] Nakayama, construye un morfismo geométrico a partir del funtor de quantización (Definición 4.1.5), y a partir de esto deriva una **Operación universal de clausura** sobre $Sub(V)$ con $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$; y posteriormente define una **TG**. Finalmente, deriva una **TLT**, en términos de la **TG**. Sin embargo, este proceso es demasiado largo, y hace uso de herramientas que no definimos en este trabajo; por ello solo escribiremos la expresión para la topología de Lawvere-Tierney, en terminos del funtor de quantización definido anteriormente; y mostraremos que cumple con la Definición 3.1.5.

Considere la siguiente asignación sobre el subobjeto clasificador de $\mathbf{Set}^{\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}}$:

$$J : \Omega \rightarrow \Omega \quad (4.10)$$

Definida para cada $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ por:

$$J_V : \Omega(V) \rightarrow \Omega(V) \quad (4.11)$$

$$\omega \mapsto J_V(\omega) \quad (4.12)$$

donde $\mathbf{C} \in \mathcal{C}$ y

$$J_V(\omega) := \{V_1 \subseteq V \mid \text{Si } \phi(C) \subseteq V_1 \text{ entonces } \phi(C) \in \omega, C \in \mathbf{C}\} \quad (4.13)$$

Veamos que (4.10) cumple las condiciones de la Definición 3.1.5. En orden, primero veremos que (4.13) es una criba sobre $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$: Considere $\mathbf{C} \in \mathcal{C}$. Sean $V_1 \in J_V(\omega)$ y $C \in \mathbf{C}$, entonces tenemos que $\phi \subseteq V_1$ y $\phi(C) \in \omega$. Pero ω es una criba sobre V , entonces, $\phi(C) \subseteq V$. Por otro lado tenemos que $\phi(C) \subseteq \phi(C)$, entonces $\phi(C) \in \omega$. Por lo tanto, $\phi(C) \in J_V(\omega)$.

Ahora $J : \Omega \rightarrow \Omega$ es una transformación natural, pues, si $i_{V_1, V} \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}(V_1, V)$ y $\omega \in \Omega(C)$ con $C \in \mathbf{C}$, entonces

$$\begin{aligned} J_{V_1}(\Omega(i_{V_1, V})(\omega)) &= \{V_2 \subseteq V_1 \mid \phi(C) \subseteq V_2 \text{ entonces } \phi(C) \in \Omega(i_{V_1, V})(\omega)\} \\ &= \{V_2 \subseteq V_1 \mid \phi(C) \subseteq V_2 \text{ entonces } , \phi(C) \subseteq V_1 \text{ y } \phi(C) \in \omega\} \\ &= \{V_2 \subseteq V_1 \mid V_2 \in J_V(\omega)\} \\ &= \Omega(i_{V_1, V})(J_V(\omega)) \end{aligned}$$

Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega(V) & \xrightarrow{J_V} & \Omega(V) \\ \Omega(i_{V_1, V}) \downarrow & & \downarrow \Omega(i_{V_1, V}) \\ \Omega(V_1) & \xrightarrow{J_{V_1}} & \Omega(V_1) \end{array}$$

conmuta. Ahora, comprobaremos las condiciones de la Definición (3.1.5). Para *ii*): sean $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ y $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(V)$, entonces

$$\begin{aligned} J_V(\omega_1 \cap \omega_2) &= \{V_1 \subseteq V \mid \phi(C) \subseteq V_1 \text{ entonces } \phi(C) \in \omega_1 \cap \omega_2, C \in \mathbf{C}\} \\ &= \{V_1 \subseteq V \mid \phi(C) \subseteq V_1 \text{ entonces } \phi(C) \in \omega_1 \text{ y } \phi(C) \in \omega_2\} \\ &= \{V_1 \subseteq V \mid \phi(C) \subseteq V_1 \text{ entonces } \phi(C) \in \omega_1\} \\ &\quad \cap \{V_1 \subseteq V \mid \phi(C) \subseteq V_1 \text{ entonces } \phi(C) \in \omega_2\} \\ &= J_V(\omega_1) \cap J_V(\omega_2) \end{aligned}$$

Para *iii*) de la Definición (3.1.5): considera $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ y $\omega \in \Omega(V)$, entonces,

$$\begin{aligned} J_V(J_V(\omega)) &= \{V_1 \subseteq V \mid \phi(C) \subseteq V_1 \text{ entonces } \phi(C) \in J_V(\omega)\} \\ &= \{V_1 \subseteq V \mid \phi(C) \subseteq V_1 \text{ entonces } \phi(C) \in \omega\} \\ &= J_V(\omega) \end{aligned}$$

Por último, la propiedad *i*) de la Definición de **TLT**: sea $\omega \in \Omega(V)$ con $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$. Entonces, si $V_1 \in \omega$, entonces $V_1 \subseteq V$, y si $\phi(C) \subseteq V_1$, entonces $\phi(C) \in \omega$. Por lo tanto, $V_1 \in J_V(\omega)$, es decir, $\omega \subseteq J_V(\omega)$.

Teorema 4.3.1. *Cualquier categoría $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$ que incluya a la categoría $\mathbf{A}$ como subcategoría, induce la misma topología de Lawvere-Tierney dada por*

$$J_V(\omega) = \{V_1 \subseteq V \mid \mathfrak{J}(V_1) \in \omega\} \quad (4.14)$$

Demostración. Sea $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}$. Supongamos que $\mathbf{A}$ es subcategoría de $\mathbf{C}$. Entonces, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathfrak{J}} & \mathbf{A} & \xrightarrow{i_{\mathbf{A}, \mathbf{C}}} & \mathbf{C} \\ & \searrow \phi & \downarrow \phi & \swarrow \phi & \\ & & \mathcal{V}_{\mathcal{H}} & & \end{array} \quad (4.15)$$

conmuta (Proposición 4.2.1). Bajo esta condición demostraremos que (4.14) y (4.13) son iguales. Sea $V_1 \subseteq V$ tal que $\mathfrak{J}(V_1) \in \omega$. Entonces

para cada $C \in \mathbf{C}$ tal que $\phi(C) \subseteq V_1$, tenemos, por el diagrama (1.15), que

$$\begin{aligned}\phi(C) &= \phi(\mathbb{I}(C)) \\ &= \phi(\psi(\phi(C))) \\ &= \mathbb{I}(\phi(C))\end{aligned}$$

Note que $\mathbb{I}(\phi(C)) \subseteq \mathbb{I}(V_1)$. Ahora, como $\mathbb{I}(\phi(V_1)) \in \omega$ y $\phi(C) \subseteq \mathbb{I}(V_1)$, entonces $\phi(C) \in \omega$.

. La otra contención es clara. □

Definición 4.3.1. Una **topología de quantización** es una topología de Lawvere-Tierney sobre $\mathbf{Set}^{\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{op}}$

Bibliografía

- [1] Butterfield, J., Isham, C.J. (1999). A Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem II. Conceptual Aspects and Classical Analogues. *International Journal of Theoretical Physics* 38, 827-859 . <https://doi.org/10.1023/A:1026652817988>
- [2] Leinster, T. (2014). *Basic Category Theory*. Cambridge University Press.
- [3] MacLane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in geometry and logic*. New York: Springer.
- [4] Nakayama, K. (2013). Topologies on quantum topoi induced by quantization. *Journal of Mathematical Physics*, 54(7), 072-102. <https://doi.org/10.1063/1.4813960>.
- [5] Rawling, J. P. and Selesnick, S. A. (2000). Orthologic and quantum logic. models and computational elements, *Journal of the Association for Computing Machinery* 47, 721.
- [6] van Oosten, J. (2014). *Lecture Notes. Category Theory and Topos Theory*, Spring 2016. <https://webpace.science.uu.nl/~ooste110/cattoptheory16.html>.
- [7] Zafiris, E. (2001). On quantum event structures. Part I: The categorical scheme, *Found. Phys. Lett.* 14(2), 147.
- [8] Zafiris, E. (2001). On quantum event structures. Part II: Interpretational aspects, *Found. Phys. Lett.* 14(2), 167.
- [9] Zafiris, E. (2004). Quantum Event Structures from the Perspective of Grothendieck Topoi. *Foundations of Physics*, 34, 1063-1090. <https://doi.org/10.1023/B:F00P.0000037623.08379.df>.