



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**Morfología Matemática en Variedades Riemannianas:
Aplicaciones al Procesamiento Digital de Imágenes**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LIC. MARISOL MARES JAVIER

DIRECTORES DE TESIS:

DR. CARLOS GUILLÉN GALVÁN, FCFM, BUAP
DR. GONZALO URCID SERRANO, ÓPTICA, INAOE

MARZO 2017

Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla el haberme brindado las facilidades y el apoyo necesario para realizar mis estudios de la Maestría en Ciencias Matemáticas. También doy gracias por la beca otorgada CVU No. 635888 por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) para la realización de esta tesis y a la Universidad por haberme apoyado económicamente para asistir y participar en el XLVIII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) realizado en la Universidad de Sonora de la ciudad de Hermosillo del 19 al 23 de Octubre del presente año.

Agradezco de manera especial a mi director de tesis, Dr. Carlos Guillén Galván, por su constante apoyo, por guiarme en mis avances durante la realización de este trabajo de investigación y por su ayuda en la tramitación de becas y apoyos para mi participación en los Congresos Nacionales arriba mencionados. Al Dr. Gonzalo Urcid Serrano (codirector) por sus oportunos consejos en relación al contenido y escritura de la tesis. También les doy las gracias a mis sinodales, al Maestro Julio Erasto Poisot Macías y a las Dras. Lucía Cervantes Gómez e Irene O. Ayaquica Martínez por el tiempo empleado y sus valiosos comentarios que me permitieron enriquecer el contenido y la presentación de este escrito.

Marisol Mares Javier
febrero, 2017.

Dedicatorias

A mi madre: Celia Javier Alonso con todo cariño y amor a la persona que ha luchado junto a mí durante mis 26 años de vida para lograr cada una de mis metas.

A mis hermanos: Carlos, José Juan y Guadalupe que siempre han estado conmigo para apoyarme y aconsejarme.

A mi novio: Martín Hernández López por lo mucho que significa para mí.

A mis amigas y amigos: Karen Tamayo, Leonardo Remedios, Silvia Pérez, Patricia Rosas, M. de los Ángeles Calderón, Andrea Peñafort, Verónica Ramírez, Beatriz Peña, Pablo Alonso, Miguel A. Saloma y a todos los que me faltan, gracias por acompañarme y hacerme grato todo este tiempo.

A todas aquellas personas importantes en mi vida que siempre estuvieron dispuestas a ayudarme. Esta tesis se las dedico a todos Ustedes con mucho cariño.

Introducción

En la medida del aumento del poder de las computadoras, la sociedad científica ha asumido nuevos retos que implican el análisis de una gran cantidad de datos que están dados, ya sea a través de una señal, una gráfica o una imagen. Uno de los retos consiste en reconocer ciertos patrones de comportamiento en los datos proporcionados o de sustraer cierta información de interés. El área de visión computacional se ocupa de muchos problemas cuyos datos e información da origen al análisis de una imagen o una señal. Dentro del campo de visión computacional se encuentra el área del procesamiento digital de imágenes, que se ocupa de la representación geométrica y el análisis de características funcionales a través de modelos n -dimensionales y que pueden ser obtenidas por métodos de segmentación. Existen otros problemas importantes del procesamiento digital de imágenes como el filtrado, la eliminación de ruido, la restauración, la compresión, la encriptación, la comparación de formas, por mencionar algunos. Cada uno de estos problemas presentan un alto grado de dificultad computacional; para darnos una idea de la magnitud del problema, si consideramos tan solo una imagen simple, como las imágenes binarias (blanco y negro), se tiene una representación en un espacio discreto de tamaño $n \times m$ y el espacio de búsqueda, en primera instancia, tiene tamaño $2^{n \times m}$; esto es, una imagen pequeña de 32×32 pixeles se puede modificar de 2^{1024} maneras. Para vencer esta dificultad computacional existen muchas técnicas de procesamiento cuyo sustento teórico va desde el cálculo y álgebra lineal hasta la teoría de espacios Teichmüller [15, 6, 30].

Los métodos matemáticos y las técnicas computacionales usadas en el procesamiento digital de imágenes dependen en general de la naturaleza de la imagen y de lo que se quiere obtener de ella. En este sentido, se han desarrollado diversos enfoques como el lineal, el estadístico y el físico-matemático, cada uno de ellos basado en distintas teorías matemáticas que le dan ciertas ventajas con respecto de los otros. Muchos de los métodos usados con frecuencia se basan en procesamientos lineales, esto es, el procesamiento se hace a través de operadores lineales. Esto constituye un inconveniente para muchos problemas cuya naturaleza no es lineal, por ejemplo si el ruido en una imagen es generado por una función cuadrática, los filtros correspondientes deberán ser no lineales. Por tal motivo, los métodos de procesamiento no lineales de imágenes

cobran vital interés para una buena parte de la comunidad investigadora en el campo de la visión por computadora, [5, 4, 15, 18].

La morfología matemática se desarrolló en forma paralela e independiente desde mediados de 1960 como una teoría con métodos propios que se utilizó inicialmente para encontrar relaciones entre la geometría de un medio poroso y sus permeabilidades, la cuantificación de la petrografía de minerales de hierro para predecir sus propiedades de molido y que hoy en día es considerada como una poderosa herramienta de análisis de imágenes, especialmente en aquellas aplicaciones donde los aspectos geométricos son relevantes [25, 36, 37]. La palabra “morfología” considera como su principal objetivo el análisis de las formas y de objetos y la matemática subyacente se basa en teoría de conjuntos, teoría de retículos y topología [36]. La idea esencial para procesar una imagen es utilizar como elemento escudriñador otra imagen más pequeña con una geometría predeterminada adecuada para evaluar las características geométricas y topológicas de los objetos presentes en la imagen y su elección depende de dichas características. El objetivo final es transformar la imagen original en otra que sea más adecuada para su análisis e interpretación [36, 39].

En su primera etapa, la morfología matemática es aplicada a imágenes representadas en el plano Euclidiano y en estructuras tipo rejillas. En esta etapa, se pueden citar numerosas contribuciones desde Matheron y Serra a la fecha como [29, 36, 18, 35, 1, 9, 12, 19, 42, 39, 31, 26, 16]. En una segunda etapa, la representación geométrica y el análisis de características funcionales se puede facilitar mediante modelos tridimensionales obtenidos por métodos de segmentación. La representación del objeto debe dar cuenta de su geometría, de sus propiedades visuales (p.ej., su comportamiento ante la luz), así como algunas propiedades físicas. Una característica que suele exigirse es que sean variedades bidimensionales donde de manera intuitiva, no existan puntos singulares en los cuales la superficie se corte a sí misma o se abra en varias hojas. Como ejemplos de este tipo de objetos tenemos la adquisición 3D de un rostro, la reconstrucción 3D del cerebro o de algún otro órgano, y la inmersión de una imagen 2D en una superficie 3D. Una vez obtenida la representación tridimensional del objeto, la determinación de características geométricas y funcionales como longitudes y áreas es un problema crítico. En esta dirección, existen diversas investigaciones que apuntan a la generalización de los métodos de procesamiento digital de imágenes cuyo dominio no es necesariamente Euclidiano. Puesto que la morfología matemática tiene como principal objetivo extraer características geométricas de los objetos, ésta también resulta ser una herramienta útil para analizar imágenes en superficies tridimensionales o, de manera más general, en variedades Riemannianas.

Como caso particular de imágenes definidas en superficies, tenemos el caso de las imágenes cuyo soporte es una esfera, que surgen en diversas situaciones en visión artificial y gráficos por ordenador. Algunos ejemplos de este tipo de imágenes son las obtenidas mediante una deformación de una superficie compleja (a través un mapeo conforme

entre la superficie y la esfera), las imágenes omnidireccionales o los mapeos de entornos, [10]. Como este tipo de imágenes están definidas naturalmente en la esfera parece natural considerar la geometría intrínseca de ésta para su análisis.

Por otro lado, las imágenes desplegadas en variedades Riemannianas pueden no ser funciones suaves y su regulación (es decir, aproximar la función a una función suave) puede ser necesaria en la aplicación. En el caso de que la imagen este definida sobre el espacio Euclidiano, la regularización de ésta se lleva a cabo mediante operaciones morfológicas que involucran la distancia Euclidiana. Para el caso más general en que el soporte de la imagen no sea necesariamente una imagen su regularización involucrará la distancia geodésica definida sobre la variedad.

En este trabajo consideramos aquellas funciones cuyo espacio soporte es una variedad Riemanniana y con base en este supuesto se definirán las operaciones básicas de dilatación y erosión, así como las operaciones de abertura y cerradura, que son operaciones derivadas de la composición de las operaciones básicas y se presentarán algunas propiedades de estas operaciones. Finalmente se ejemplificarán tales resultados aplicándolos a imágenes valuadas en los reales cuyo soporte es la esfera. Se asume que el lector tiene conocimientos generales de topología, análisis y álgebra.

El documento se encuentra distribuido de la siguiente manera. En el **capítulo 1** se introducen las herramientas elementales usadas para el estudio de las operaciones de la morfología matemática en variedades Riemannianas en las cuales se sustenta el trabajo a desarrollar. Con lo que respecta a la morfología matemática en espacios Euclidianos, en el **capítulo 2**, se recuerdan los conceptos básicos, así como sus principales propiedades. También se presenta la manera en la que se utiliza el espacio conocido como “espacio-escala” en morfología matemática. En el **capítulo 3**, se presenta el desarrollo teórico de la morfología matemática para variedades Riemannianas sustituyendo la distancia euclidiana por la distancia geodésica definida en la variedad. Se demuestran algunas de las propiedades básicas de las operaciones elementales y se ejemplifican en una y dos dimensiones. Además, se presenta teoría sobre regularización usando operadores morfológicos y se ilustran en una y dos dimensiones, en este último caso, para la regularización de una imagen con ruido frecuencial. En el **capítulo 4**, se muestran ejemplos de la aplicación de las operaciones Riemannianas sobre imágenes desplegadas en la esfera como, por ejemplo, los gradientes morfológicos y la transformación sombrero de copa (top-hat) para la detección de bordes y realce de picos, también se ilustra el uso de los resultados de regularización en la esfera. Finalmente se presentan las conclusiones, aportaciones y trabajo futuro de este trabajo.

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatorias	II
Introducción	III
1. Variedades Riemannianas	3
1.1. Variedades diferenciables y campos vectoriales	3
1.2. Formas bilineales y métricas Riemannianas	5
1.3. Campos vectoriales a lo largo de curvas	6
1.4. Distancia Riemanniana, geodésicas y curvatura	9
1.5. La función exponencial	12
2. Morfología Matemática en Espacios Euclidianos	14
2.1. Enfoque morfológico al procesamiento de imágenes	14
2.2. Operaciones morfológicas de conjuntos	15
2.3. Operaciones morfológicas de funciones	19
2.4. Espacio-escala en morfología matemática	21
3. Morfología Matemática en Variedades Riemannianas	24
3.1. Operaciones Morfológicas Riemannianas Generales	24
3.2. Operaciones Riemannianas canónicas	25
3.2.1. Erosiones y dilataciones Riemannianas canónicas	26
3.2.2. Aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas	28
3.2.3. Propiedades generales	29
3.3. Regularización de imágenes usando $(\epsilon_\lambda, \delta_\lambda)$	36
3.3.1. Regularización de Moreau-Yosida	36
3.3.2. Regularización de Lasry-Lions	37

3.3.3. Regularización en variedades Riemannianas de variación acotada	41
3.4. Erosión y dilatación Riemannianas isotrópicas planas	46
4. Morfología Matemática en la Esfera	47
4.1. La esfera	47
4.2. Imágenes con soporte en la esfera	48
4.3. Distancia en la esfera	48
4.4. Erosiones, dilataciones, aberturas y cerraduras en la esfera	50
4.5. Regularización en la esfera: datos del espesor cortical	52
4.6. Gradientes Morfológicos	55
4.7. Transformación Sombrero de Copa	57
Conclusiones y trabajo futuro	59
Bibliografía	61

Capítulo 1

Variedades Riemannianas

En esta sección se introducen las herramientas elementales usadas para el estudio de las operaciones de la morfología matemática en variedades Riemannianas. A lo largo de esta sección se enuncian una serie de resultados de los cuales omitiremos sus demostraciones ya que no son nuestra finalidad.

1.1. Variedades diferenciables y campos vectoriales

Definición 1.1 Una *variedad topológica* M de dimensión n , es un espacio topológico de Hausdorff, localmente Euclidiano de dimensión n y que cuenta con una base contable de conjuntos abiertos.

Que M sea localmente Euclidiano de dimensión n significa que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad $U \subseteq M$, la cual es homeomorfa a un subconjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Los ejemplos más simples de variedades son el propio espacio Euclidiano \mathbb{R}^n , el círculo \mathbb{S}^1 y la esfera \mathbb{S}^2 . Cada par (U, ϕ) donde U es un conjunto abierto de M y ϕ es un homeomorfismo de U en un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , es llamado vecindad coordenada. Para cada $p \in U$ asignamos n coordenadas $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ de su imagen $\phi(p)$ en \mathbb{R}^n . Cada x^i es una función real valuada en U llamada la i -ésima función coordenada. La sola estructura de espacio topológico no permite realizar cálculos sobre la variedad, es por esto que se introduce el concepto de estructura suave que dará sentido a los conceptos de diferenciación e integración.

Definición 1.2 Una *estructura diferenciable* o suave, denotada por C^∞ , en una variedad topológica M , es una familia, $\Omega = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, de vecindades coordenadas tal que

1. $\{U_\alpha\}$ cubre a M ,
2. para cualesquiera α, β las vecindades (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son C^∞ compatibles, esto significa que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo entre los conjuntos abiertos $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ de \mathbb{R}^n , y
3. cualquier vecindad coordinada (U, ψ) compatible con cada $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \Omega$ está en Ω .

Una variedad suave o C^∞ es una variedad topológica junto con una estructura suave.

Definición 1.3 Sea M una variedad suave de dimensión n , $W \subseteq M$ un conjunto abierto y $f : W \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^k$, con $k > 0$. La función f se dice *suave* o C^∞ si para cada $p \in W$, existe una vecindad coordinada (U, φ) para M , tal que $p \in U$ y $f \circ \varphi^{-1}$ es suave en $\varphi(W \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sea $C^\infty(U)$ la colección de todas las funciones suaves en el conjunto abierto U , incluyendo el caso especial en que $U = M$, y $C^\infty(p)$ el conjunto de las funciones suaves cuyo dominio de definición incluye alguna vecindad abierta de p , con funciones identificadas si ellas coinciden en cualquier vecindad de p . En seguida se define el concepto de espacio tangente en un punto de una variedad, relativo al concepto de derivada direccional.

Definición 1.4 El *espacio tangente* $T_p(M)$ para un punto $p \in M$, es el conjunto de todos los mapeos $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty$ se cumplen

1. $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$ (linealidad),
2. $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$ (regla de Leibniz).

Con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} (X_p + Y_p)f &= X_p f + Y_p f \quad \text{y} \\ (\alpha X_p)f &= \alpha(X_p f), \end{aligned}$$

el espacio tangente define un espacio vectorial con $\dim(T_p(M)) = \dim(M)$. Un vector tangente a M en p es cualquier X_p en $T_p(M)$.

Proposición 1.1 Si (U, ϕ) es una vecindad coordenada en M , entonces el mapeo coordenado ϕ induce un isomorfismo ϕ_* del espacio tangente $T_p(M)$ (en cada punto $p \in M$), sobre $T_{\phi(p)}(\mathbb{R}^n)$, y también se cumple que ϕ_*^{-1} mapea $T_{\phi(p)}(\mathbb{R}^n)$ a $T_p(M)$ isomórficamente. Las imágenes $E_{ip} = \phi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, $i = 1, \dots, n$ de la base natural $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ en cada $a \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, $a = \phi(p)$, determinan en cada punto $p = \phi^{-1}(a) \in M$ una base E_{1p}, \dots, E_{np} de $T_p(M)$, esta base se denomina *marco coordenado*. En particular, tenemos que $\dim(T_p(M)) = \dim(M)$.

Sea f una función C^∞ definida en una vecindad de p y sea, $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$, su expresión en coordenadas locales relativas a (U, ϕ) , entonces $E_{ip} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}|_{\phi(p)}$. En particular si, $x^i(q)$ es la i -ésima función coordenada, entonces $X_p x^i$ es la i -ésima componente de X_p en esta base, esto es, $X_p = \sum_{i=1}^n (X_p x^i) E_{ip}$.

Definición 1.5 Un C^r -campo vectorial X , es un mapeo que va de M a $T(M) = \cup_{p \in M} T_p(M)$, de manera que a cada punto p de M le asigna un elemento de su espacio tangente $X_p \in T_p(M)$, tal que si $T_p(M) = \sum_{i=1}^n \alpha^i E_{ip}$, las componentes $\alpha^i = \alpha^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$ en $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, son de clase C^r en cada sistema de coordenadas locales (U, ϕ) . En particular, un *campo vectorial* es un C^∞ -campo vectorial.

1.2. Formas bilineales y métricas Riemannianas

En el caso de un espacio vectorial V sobre \mathbb{R} , una *forma bilineal* en V se define como un mapeo $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, que es lineal en cada variable, es decir, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha v_1 + \beta v_2, w) &= \alpha \Phi(v_1, w) + \beta \Phi(v_2, w) \quad y \\ \Phi(v, \alpha w_1 + \beta w_2) &= \alpha \Phi(v, w_1) + \beta \Phi(v, w_2). \end{aligned}$$

Las formas bilineales en V están completamente determinadas por sus n^2 valores en la base e_1, \dots, e_n de V . Si $\alpha_{ij} = \Phi(e_i, e_j)$ con $1 \leq i, j \leq n$ son dadas y si $v = \sum_{i=1}^n \lambda^i e_i$ y $w = \sum_{j=1}^n \mu^j e_j$ son cualesquiera dos vectores en V , entonces

$$\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \lambda^i \mu^j. \quad (1.1)$$

de manera inversa, dada una matriz $A = (\alpha_{ij})$ de números reales, la fórmula dada anteriormente determina una forma bilineal. Así, hay una correspondencia biyectiva

entre matrices $n \times n$ y formas bilineales en V una vez que una base e_1, \dots, e_n haya sido seleccionada. Una forma bilineal es llamada simétrica si $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ y es definida positiva si $\Phi(v, v) \geq 0$. Si además, $\Phi(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, entonces Φ se llama producto interior en V . La longitud de un vector v se define como $\|v\| = (\Phi(v, v))^{1/2}$.

Definición 1.6 Un campo Φ de formas bilineales C^r , con $r \geq 0$, en una variedad M es un mapeo que asigna a cada punto $p \in M$ una forma bilineal Φ_p en $T_p(M)$, esto es, $\Phi_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cualquier vecindad coordinada (U, ϕ) las funciones $\alpha_{ij} = \Phi_p(E_i, E_j)$, se definen por Φ en los marcos coordinados E_1, \dots, E_n , son de clase C^r .

Las n^2 funciones, $\alpha_{ij} = \Phi_p(E_i, E_j)$ para $i, j = 1, \dots, n$, en V son llamadas *las componentes* de Φ en la vecindad coordinada (U, ϕ) .

Definición 1.7 Una variedad suave M , en la cual está definido un campo Φ de una forma bilineal simétrica definida positiva, es llamada una *variedad Riemanniana* y Φ la *métrica Riemanniana*. Se asume siempre que Φ es de clase C^∞ . Una métrica Riemanniana Φ determina un producto interior en cada espacio tangente $T_p(M)$ de modo que, para cada X_p y Y_p en $T_p(M)$, está dado por

$$\langle X_p, Y_p \rangle_p = \Phi_p(X_p, Y_p). \quad (1.2)$$

Un ejemplo sencillo de variedad Riemanniana es el espacio \mathbb{R}^n dotado del producto interior usual. Así, para cada $p \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\Phi_p(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \beta^i \quad \text{donde} \quad X_p = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad Y_p = \sum_{i=1}^n \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.3)$$

En cada punto tenemos que $\Phi(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por lo tanto, la matriz de componentes de Φ relativa a la base estándar es igual a la matriz identidad I , de lo que se concluye que Φ es de clase C^∞ .

1.3. Campos vectoriales a lo largo de curvas

Se introduce un nuevo concepto denominado “conexión”, que esencialmente es un conjunto de reglas, que determinan propiedades invariantes bajo un cambio de coordenadas para la determinación de derivadas direccionales en campos vectoriales. Este

concepto es de hecho utilizado para definir curvas geodésicas que generalizan el concepto de línea recta.

Definición 1.8 Sea $\mathcal{C}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales suaves en M . Una *conexión lineal* es un mapeo $\nabla : \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$, denotada como $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, que satisface las siguientes propiedades

1. $\nabla_X Y$ es lineal sobre $C^\infty(M)$ en X , esto es, $\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$ para $f, g \in C^\infty(M)$.
2. $\nabla_X Y$ es lineal sobre \mathbb{R} en Y , esto es, $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$ para $a, b \in \mathbb{R}$.
3. ∇ satisface la siguiente igualdad respecto al producto, $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$ para $f \in C^\infty(M)$.

$\nabla_X Y$ es llamada la *derivada covariante* de Y en la dirección de X . Se puede demostrar que para cada variedad existe una conexión lineal. Por otra parte, una curva en una variedad M , es una curva paramétrica suave, esto es, un mapeo suave, $\gamma : I \rightarrow M$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es algún intervalo abierto de \mathbb{R} . Un segmento de curva es una curva cuyo dominio es de la forma $[a, b]$. La propiedad de que un segmento de curva sea suave significa que ésta se puede extender a un intervalo abierto que contenga al intervalo cerrado de tal suerte que la extensión resulte ser suave.

Definición 1.9 Un *campo vectorial a lo largo de una curva* $\gamma : I \rightarrow M$, es un campo vectorial $V : I \rightarrow T(M)$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$ para todo $t \in I$. Denotemos $T(\gamma)$ el conjunto de los campos vectoriales a lo largo de γ .

Un ejemplo de campo vectorial a lo largo de una curva γ es el conjunto de sus vectores tangente (“velocidad”), es decir, los $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$ para cada t , donde $\gamma(t)f = (f \circ \gamma)'(t)$.

Proposición 1.2 Sea ∇ una conexión lineal en M . Para cada curva $\gamma : I \rightarrow M$, ∇ determina un operador único, $D_t : T(\gamma) \rightarrow T(\gamma)$, que satisface las siguientes propiedades:

1. Linealidad del producto sobre \mathbb{R} , $D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Regla del producto, $D_t(fV) = Vf' + fD_tV$ para $f \in C^\infty(I)$.
3. Si V es extendible, entonces para cada extensión \tilde{V} de V , $D_tV(t) = \nabla_{\gamma'}\tilde{V}$

$D_tV(t)$ es la derivada covariante de V a lo largo de γ para todo $V \in T(\gamma)$.

Definición 1.10 Sea M una variedad diferenciable con una conexión lineal ∇ . Un campo vectorial V a lo largo de una curva γ se dice *paralelo a lo largo de γ* con respecto a ∇ si $D_t(V) = 0$.

Un campo vectorial se dice que es *paralelo* si éste es paralelo a lo largo de cada curva. Uno de los resultados más importantes de los campos vectoriales paralelos es que cualquier vector tangente en cualquier punto se puede extender de manera única a un campo vectorial paralelo a lo largo de la curva entera.

Teorema 1.1 Dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$, $t_0 \in I$ y un vector $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}(M)$, existe un único campo vectorial paralelo V a lo largo de γ tal que $V(t_0) = V_0$.

El campo vectorial del teorema anterior es llamado *traslación paralela* de V_0 a lo largo de γ , ver fig 1.1. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un segmento de curva, con $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, y $v \in T_p(M)$. Sea V el único campo vectorial paralelo a lo largo de γ tal que $V(a) = v$. El mapeo $P_\gamma : T_p(M) \rightarrow T_q(M)$ dado por $P_\gamma(v) = V(b)$ es denominado el *transporte paralelo de p a q a lo largo de γ* , y $P_\gamma(v)$ el *trasladado paralelo de v a lo largo de γ a q* .

Sea M una variedad suave con una conexión lineal ∇ y sea γ una curva en M , la *concauidad* (“aceleración”) de γ es el campo vectorial $D_t\gamma'$ a lo largo de γ . Una curva γ se denomina *geodésica* con respecto a ∇ si su concauidad es cero, esto es, $D_t\gamma' = 0$. En otras palabras, una geodésica es aquella cuyo campo de vectores tangentes es paralelo a lo largo de la curva.

Teorema 1.2 Sea M una variedad suave con una conexión lineal. Para $p \in M$, $V \in T_p(M)$ y cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a t_0 y una geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ que satisface $\gamma(t_0) = p$ y $\gamma'(t_0) = V$. Cualquier par de tales geodésicas coinciden en sus dominios en común.

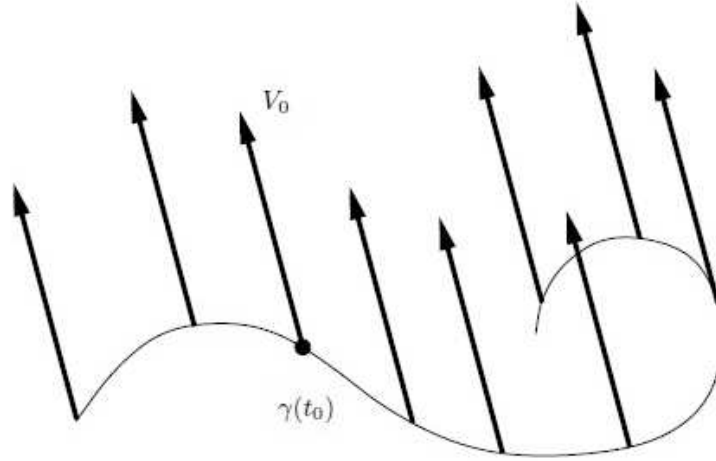


Figura 1.1: Traslación paralela de V_0 a lo largo de γ .

La unicidad de las geodésicas dadas en el teorema anterior implica que para cualquier $p \in M$, $V \in T_p(M)$, hay una única *geodésica maximal* que no puede extenderse a cualquier $\gamma : J \rightarrow M$, donde $I \subset J$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma' = V$. Tal geodésica maximal se llama la *geodésica con punto inicial p y vector tangente inicial V* y denotada por γV .

1.4. Distancia Riemanniana, geodésicas y curvatura

En las variedades Riemannianas hay una conexión lineal que predomina, esta es denominada *conexión de Levi-Civita*. Para definirla es necesario antes definir dos conceptos importantes, la compatibilidad y la simetría de una conexión.

Definición 1.11 Sea M una variedad Riemanniana con una métrica Φ . Una conexión lineal ∇ se dice que es *compatible* con Φ si satisface las siguiente regla del producto

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (1.4)$$

Proposición 1.3 Sea ∇ una conexión lineal en una variedad Riemanniana M con métrica Φ , las siguientes condiciones son equivalentes

- 1) ∇ es compatible con Φ .

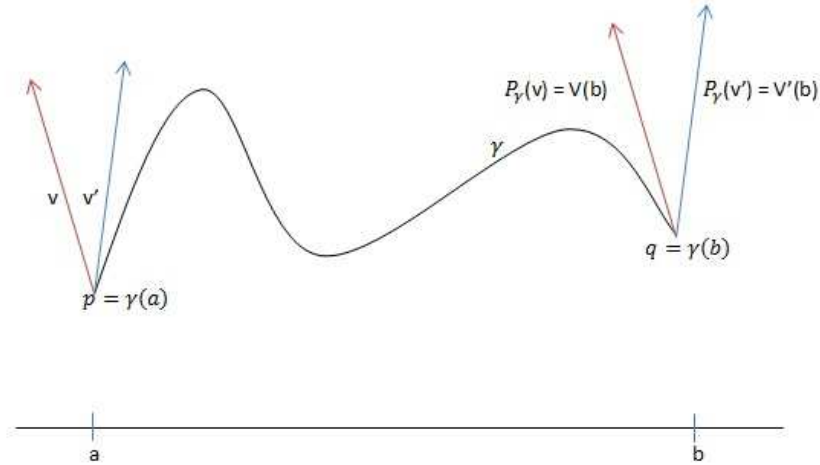


Figura 1.2: Transporte paralelo de p a q a lo largo de γ .

2) Si V, W son campos de vectores a lo largo de una curva γ , entonces

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle. \quad (1.5)$$

3) Si V, W son campos de vectores paralelos a lo largo de γ , entonces, $\langle V, W \rangle$ es constante.

Definición 1.12 Sea M una variedad Riemanniana y ∇ una conexión lineal sobre M . La aplicación $\tau : \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$ se define por $\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, es llamada la *torsión* de ∇ , donde $[X, Y]$ es el corchete de Lie de los campos X e Y , [43].

Una conexión lineal se dice simétrica si la torsión es nula, i.e., $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Teorema 1.3 (Teorema fundamental de la geometría Riemanniana). Sea M una variedad Riemanniana y Φ una métrica. Entonces existe una única conexión lineal ∇ sobre M que es compatible con Φ y simétrica. Esta única conexión es llamada *conexión de Levi-Civita*.

Sea (M, Φ) una variedad Riemanniana conexa. Si $\gamma[a, b] \rightarrow M$ es un segmento de curva, se define la longitud de γ como

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\Phi} dt \quad (1.6)$$

La característica esencial del concepto de *longitud* de la curva es que ésta es independiente de la parametrización. Una *curva regular* es una curva suave $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para $t \in I$. Intuitivamente, esto puede entenderse como la ausencia de “picos” y “doblecés”. Nótese que las geodésicas son curvas regulares ya que tienen velocidad constante. Un mapeo continuo $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es llamado *segmento de curva regular a trozos* o simplemente *curva admisible* si existe una partición $a = a_0, \dots, a_k = b$, del intervalo $[a, b]$, tal que $\gamma[a_{i-1}, a_i]$ es una curva regular para $i = 1, \dots, k$.

Definición 1.13 Sea M una variedad Riemanniana conexa como espacio topológico. Para cualesquiera par de puntos $p, q \in M$ se define la *distancia geodésica* como el ínfimo de todas las curvas admisibles de p a q .

Con la distancia definida anteriormente, la variedad Riemanniana conexa resulta ser un espacio métrico cuya topología es la misma topología definida en la variedad. Una curva admisible γ en una variedad Riemanniana se dice *mínima* si $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ para cualquier otra curva admisible $\tilde{\gamma}$ con los mismos puntos finales. Estas curvas mínimas resultan ser geodésicas en la variedad Riemanniana.

Definición 1.14 Sea M una variedad con una conexión ∇ , entonces la *curvatura* R de la variedad M es un operador que a cada par de campos vectoriales, $X, Y \in \mathcal{C}(M)$, le asocia una función $R(X, Y) : \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$ tal que si, $Z \in \mathcal{C}(M)$, se define por la siguiente ecuación

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (1.7)$$

El concepto de curvatura sobre una variedad Riemanniana, intuitivamente hablando, mide que tanto una variedad Riemanniana se aleja o se acerca de un espacio Euclidiano. También se puede entender como la forma en que la conexión lineal definida sobre la variedad difiere de la conexión de Levi-Civita. Si la conexión en la definición anterior es la conexión de Levi-Civita entonces se denomina *tensor de curvatura* (4-tensor), simbolizado por, $R(X, Y, Z, W)$ e igual a $\Phi(R(X, Y)Z, W)$.

Definición 1.15 Sean M una variedad Riemanniana, $p \in M$ un punto arbitrario, $\Pi \subseteq T_p(M)$ un espacio bidimensional del espacio tangente a M en p y $X_p, Y_p \in \Pi$ vectores linealmente independientes. Entonces, la *curvatura seccional* de Π se define por

$$K(\Pi) = -\frac{R(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p \rangle^2} \quad (1.8)$$

La definición de curvatura seccional no depende de los vectores X_p y Y_p . La curvatura seccional de una superficie regular es la curvatura de Gauss, por ejemplo la curvatura de la esfera \mathbb{S}^2 es 1.

1.5. La función exponencial

Anteriormente se estableció que una geodésica se puede determinar completamente mediante un punto $p \in M$ y un vector tangente $V \in T_p(M)$. El mapeo que a continuación se define dará información de como una geodésica cambia al cambiar el punto inicial ó el vector tangente inicial. Además parametriza localmente una variedad suave M . Las propiedades de este mapeo son fundamentales para el estudio de la geometría de Riemann.

Definición 1.16 Sea M una variedad suave, el *mapeo exponencial* se denota y se define como

$$\begin{aligned} \text{Exp} : E &\rightarrow M \\ \text{Exp}(V) &:= \gamma_V(1), \end{aligned}$$

donde $E = \{V \in T(M) : \gamma_V \text{ está definido en un intervalo que contiene a } [0, 1]\}$.

Para cada $p \in M$ se define *el mapeo exponencial restringido*, denotado por Exp_p como la restricción de la función Exp al conjunto $E \cap T_p(M)$. El mapeo exponencial tiene las siguientes propiedades

- a) Para cada $V \in T(M)$ geodésica γ_V está dada por, $\gamma_V(t) = \exp(tV)$.
- b) La función exponencial es suave.

La geodésica γ_V tiene velocidad constante, i.e., $\|d\gamma_V/dt\|(t) = \|V\|$ y así el mapeo exponencial preserva distancias para el punto inicial, $d(p, \exp_p(V)) = \|v\|$. Una variedad

Riemanniana es *geodésicamente completa* si y sólo si el mapeo exponencial está definido para todo $p \in M$ y para todo $V \in T_p(M)$. La operación inversa del mapeo exponencial Exp_p^{-1} es llamada *logaritmo* y se denota como Log_p , la cual mapea un punto $q \in M$ a su vector asociado $V \in T_p(M)$. El mapeo exponencial en general sólo es invertible para vecindades suficientemente pequeñas en $T_p(M)$. Para un punto q en el dominio de Log_p la distancia geodésica entre p y q está dada por $d(p, q) = \| \text{Log}_p(q) \|$.

Capítulo 2

Morfología Matemática en Espacios Euclidianos

2.1. Enfoque morfológico al procesamiento de imágenes

La morfología matemática es un enfoque no lineal al procesamiento digital de imágenes, cuyo fundamento matemático se encuentra en la teoría de conjuntos, teoría de retículos, topología y geometría integral. El objetivo de este enfoque es obtener información de las formas o estructuras geométricas contenidas en los objetos que se encuentran en las imágenes bajo estudio. Así, dada una imagen, la morfología matemática la transforma en otra imagen más apropiada para su análisis posterior, conservando las características geométricas esenciales contenidas en ella. Para lograr lo anterior, la morfología matemática considera a las imágenes como subconjuntos de \mathbb{R}^2 o \mathbb{Z}^2 , y la extracción de las formas o estructuras esenciales se logra a través de un sondeo a estos conjuntos mediante otro conjunto llamado *elemento estructural*, cuyo tamaño y forma geométrica dependerá de la información que se quiera obtener. Una de las características principales del elemento estructural es que generalmente es de menor tamaño que la imagen bajo estudio. La morfología matemática estudia las imágenes considerándolas como conjuntos y usa operaciones como la unión, la intersección y el complemento de conjuntos. En [27] podemos encontrar un caso de aplicación de estos filtros para la eliminación de ruido impulsivo. Enseguida se definen dos conceptos de

carácter geométrico que son importantes en la morfología matemática.

Definición 2.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la *traslación* de A , denotada por A_x , se define de la siguiente manera

$$A_x = \{a + x : a \in A\}, \quad (2.1)$$

y la *transposición* o el *simétrico* de A se define como

$$\hat{A} = -A = \{-a : a \in A\}. \quad (2.2)$$

2.2. Operaciones morfológicas de conjuntos

La morfología matemática es una teoría constructiva que tiene como base de partida dos operaciones básicas que a continuación se describen. Los conjuntos que se consideran en las definiciones son subconjuntos del espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

Definición 2.2 La *erosión* del conjunto A mediante el conjunto B (llamado *elemento estructural*) es una operación binaria que da como resultado otro conjunto, denotado $A \ominus B$, formado por aquellos puntos que cumplen que al trasladar el conjunto B con cada uno de ellos, la traslación está contenida en A , esto es,

$$A \ominus B = \{x : B_x \subseteq A\}. \quad (2.3)$$

También, $A \ominus B$, puede expresarse mediante la siguiente igualdad

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_{-b}. \quad (2.4)$$

Definición 2.3 La *dilatación* del conjunto A mediante el conjunto B es una operación binaria que da como resultado otro conjunto, denotado $A \oplus B$. Un punto x pertenece a este conjunto si la intersección del conjunto A con el simétrico del trasladado del conjunto B con x no es vacía, esto es,

$$A \oplus B = \{x : \hat{B}_x \cap A \neq \emptyset\}. \quad (2.5)$$

No es difícil observar que la dilatación de A mediante B puede ser expresada de la siguiente manera

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b. \quad (2.6)$$

Una de las características fundamentales de las operaciones binarias antes definidas, es que *no son invertibles*. A pesar de esta limitación y como resultado de la composición de éstas, pueden construirse otras operaciones morfológicas útiles que a continuación se definen.

Definición 2.4 La *abertura* del conjunto A mediante el conjunto B , denotada como $A \circ B$, se define como

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B. \quad (2.7)$$

La abertura también se puede expresar como la unión de los conjuntos resultantes al trasladar el conjunto B con algún $x \in \mathbb{R}^n$, de tal manera que esta traslación se encuentre contenida en el conjunto A , esto es,

$$A \circ B = \bigcup_{B_x \subseteq A} B_x. \quad (2.8)$$

Definición 2.5 La *cerradura* del conjunto A mediante B , denotada como $A \bullet B$, se define como

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B. \quad (2.9)$$

La cerradura también puede expresarse como el complemento de la unión de los conjuntos resultantes al trasladar el simétrico del conjunto B por algún $x \in \mathbb{R}^n$, tal que esa traslación se encuentra en el complemento de A , esto es,

$$A \bullet B = \left(\bigcup_{\hat{B}_x \subseteq A^c} \hat{B}_x \right)^c = \bigcap_{\hat{B}_x \subseteq A^c} \hat{B}_x^c. \quad (2.10)$$

Las primeras definiciones de las operaciones anteriores se usan para el cálculo de los conjuntos resultantes, mientras que sus equivalencias se quieren para justificar relaciones algebraicas. Los elementos estructurales son elegidos dependiendo de lo que se quiera obtener de la imagen. Los elementos estructurales de dimensión 2, se denominan *elementos estructurales planos*, en cambio, los elementos estructurales de dimensión 3 se conocen como *volumétricos* o *en escala de grises*. Los elementos estructurales empleados

comúnmente en el procesamiento digital de imágenes, expresados en forma matricial, son la cruz denotada por B_c y el cuadrado denotado por B_s .

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede apreciarse en la Fig. 2.1 las propiedades de *antiextensividad* y *extensividad*, respectivamente, de la erosión y la dilatación, que se describen más adelante. La Fig. 2.2 ejemplifica las operaciones morfológicas elementales de forma simultánea usando el elemento estructural B_c .



Figura 2.1: Erosión y dilatación binarias: dilatación (amarillo), erosión (azul) e imagen original (gris).

En seguida se listan algunas propiedades que interrelacionan las operaciones antes definidas.

- **Dualidad.** Las parejas, erosión y dilatación, abertura y cerradura son operaciones duales respecto a la complementación de conjuntos. Esto es,

$$A \ominus B = (A^c \ominus \hat{B})^c \quad \text{y} \quad A \circ B = (A^c \bullet \hat{B})^c.$$

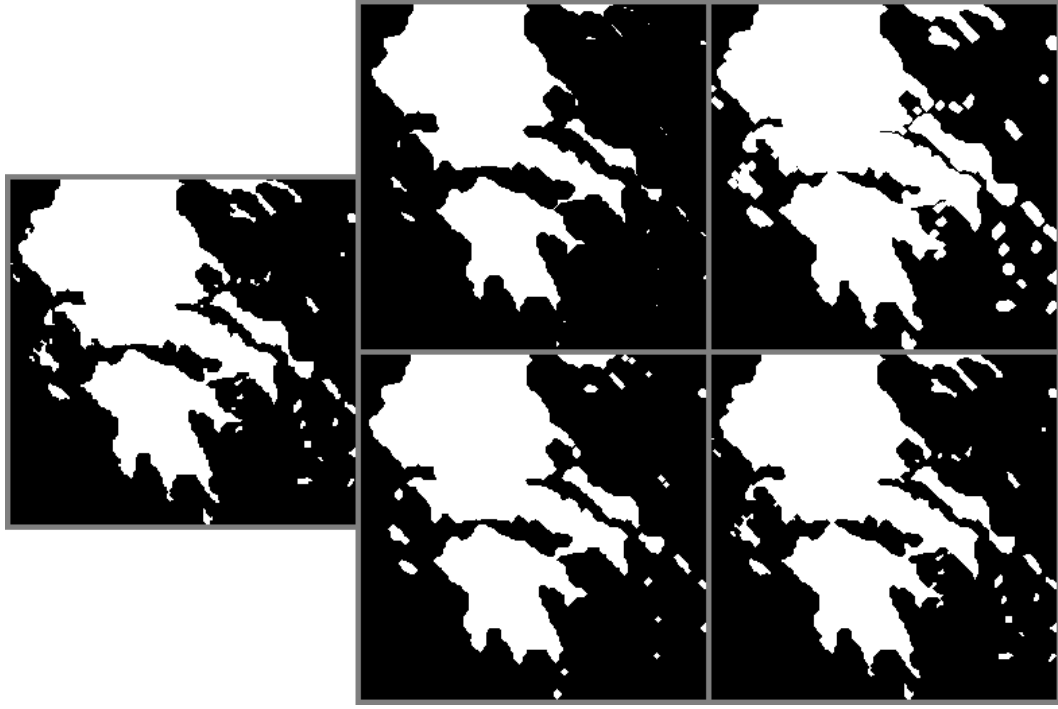


Figura 2.2: Operaciones morfológicas básicas de conjuntos. 1era columna, imagen original; 2da columna, erosión y abertura; 3ra columna, dilatación y cerradura.

- **Relaciones de orden.** Se cumple que si el elemento estructural contiene al origen, entonces la erosión es antiextensiva mientras que la dilatación es extensiva. Análogamente, la abertura es antiextensiva y la cerradura es extensiva, i.e.,

$$0 \in B \Rightarrow A \ominus B \subseteq A \subseteq A \oplus B \quad \text{y} \quad A \circ B \subseteq A \subseteq A \bullet B.$$

- **Monotonía.** La erosión, la dilatación, la abertura y la cerradura morfológicas son operaciones crecientes en relación con la inclusión de conjuntos, esto es, si $A \subseteq C$ entonces

$$A \ominus B \subseteq C \ominus B, \quad A \oplus B \subseteq C \oplus B, \quad A \circ B \subseteq C \circ B \quad \text{y} \quad A \bullet B \subseteq C \bullet B.$$

- **Idempotencia.** la abertura y cerradura son operaciones idempotentes, esto es, cuando componemos una de estas operaciones con ella misma el resultado no cambia. Así

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B \quad \text{y} \quad (A \bullet B) \bullet B = A \bullet B.$$

- **Distributividad.** En seguida se listan propiedades distributivas de las operaciones elementales de la morfología matemática relativas a la unión e intersección de conjuntos.

1. $(A \cap C) \ominus B = (A \ominus B) \cap (C \ominus B)$ y $(A \cup C) \oplus B = (A \oplus B) \cup (C \oplus B)$,
2. $A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$ y $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$.

- **Asociatividad.** Las siguientes igualdades hacen referencia a la propiedad asociativa tanto de la erosión como de la dilatación.

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \quad \text{y} \quad (A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C).$$

- **Invarianza bajo traslaciones.** La dilatación, la erosión, la abertura y la cerradura morfológicas son invariantes bajo traslaciones, esto es,

1. $(A \oplus B)_x = A_x \oplus B = A \oplus B_x$ y $(A \ominus B)_x = A_x \ominus B = A \ominus B_{-x}$,
2. $(A \circ B)_x = A_x \circ B = A \circ B_x$ y $(A \bullet B)_x = A_x \bullet B = A \bullet B_x$.

- **Conmutatividad de la dilatación.** Se verifica que $A \oplus B = B \oplus A$.

2.3. Operaciones morfológicas de funciones

Las imágenes en escala de grises se modelan a través de funciones reales cuyo soporte es \mathbb{R} , no obstante las definiciones de las operaciones morfológicas no pueden aplicarse directamente a este caso, por esta razón se generalizan las definiciones de las operaciones morfológicas. Sea E el espacio \mathbb{R}^n ó \mathbb{Z}^n y $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ el conjunto extendido de los números reales. Se define $\mathcal{F}(E, \bar{\mathbb{R}})$ como el conjunto de todas las funciones (p.ej., imágenes) que van de E al conjunto $\bar{\mathbb{R}}$ (p.ej., escala en tonos de gris).

Definición 2.6 Sea $f \in \mathcal{F}(E, \bar{\mathbb{R}})$, el simétrico de f se define por la función

$$\hat{f}: E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \text{donde} \quad \hat{f}(x) = f(-x).$$

Definición 2.7 Si $b \in \mathcal{F}(E, \bar{\mathbb{R}})$, la *erosión* y la *dilatación* de la función f mediante b , son funciones de $\mathcal{F}(E, \bar{\mathbb{R}})$ a $\mathcal{F}(E, \bar{\mathbb{R}})$, definidas por

$$\varepsilon_b(f)(x) = f \ominus b = \bigwedge_{a \in E} \{f(x+a) - b(a)\}, \quad (2.11)$$

$$\delta_b(f)(x) = f \oplus b = \bigvee_{a \in E} \{f(x-a) + b(a)\}. \quad (2.12)$$

Donde $\bigwedge_{a \in E}$ y $\bigvee_{a \in E}$ denotan el ínfimo y el supremo sobre E respectivamente.

En la práctica, la función estructurante comúnmente usada es la función $b = 0$ con soporte no vacío B (elemento estructural plano). En este caso las definiciones de erosión y dilatación se reducen, respectivamente, a las siguientes expresiones,

$$(f \ominus B)(x) = \bigwedge_{b \in B} f(x + b) = \bigwedge_{b \in B} f_{-b} \quad \text{con } (x + b) \in D_f, \quad (2.13)$$

$$(f \oplus B)(x) = \bigvee_{b \in B} f(x - b) = \bigvee_{b \in B} f_b \quad \text{con } (x - b) \in D_f. \quad (2.14)$$

Las definiciones de operaciones morfológicas para funciones generaliza el caso de morfología matemática para conjuntos ya que en este caso la función f toma solo dos valores, 1 si el punto pertenece al conjunto y 0 de lo contrario, y la función estructurante b es por tanto la función 0. Estas definiciones de dilatación y erosión para funciones no son invertibles y como en el caso de conjuntos esto motiva a definir otras operaciones a partir de su composición.

Definición 2.8 La *abertura* y la *cerradura* de f mediante b son las siguientes operaciones compuestas

$$\gamma_b(f) = f \circ b = \delta_b \varepsilon_b(f) \quad \text{y} \quad \varphi_b(f) = f \bullet b = \varepsilon_b \delta_b(f). \quad (2.15)$$

En la Fig. 2.3 se muestran ejemplos de las operaciones de erosión, dilatación, abertura y cerradura para imágenes en escala de grises usando como función estructurante el elemento estructural plano B_c . En seguida se listan las propiedades de las operaciones básicas de la morfología matemática para funciones.

- **Dualidad.** Si $x \in E$ entonces

$$-\delta_b(f)(x) = \varepsilon_b(-f)(x) \quad \text{y} \quad -\varepsilon_b(f)(x) = \delta_b(-f)(x).$$

- **Relaciones de orden.** Si $x \in E$ entonces se cumple lo siguiente,

1. Si $b(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon_b(f)(x) \leq f \leq \delta_b(f)(x)$,
2. $\gamma_b(f) \leq f \leq \varphi_b(f)$.

- **Isotonía** (preservación del orden). Si $f \leq g$ entonces

$$\varepsilon_b(f) \leq \varepsilon_b(g), \quad \delta_b(f) \leq \delta_b(g), \quad \gamma_b(f) \leq \gamma_b(g) \quad \text{y} \quad \varphi_b(f) \leq \varphi_b(g).$$



Figura 2.3: Operaciones morfológicas en escala de grises: 1era columna, imagen original; 2da columna, erosión y abertura; 3era columna, dilatación y cerradura.

- **Idempotencia**

$$\gamma_b \gamma_b(f) = \gamma_b(f) \quad \text{y} \quad \varphi_b \varphi_b(f) = \varphi_b(f).$$

- **Distributividad**

1. $\varepsilon_b(f \wedge g) = \varepsilon_b(f) \wedge \varepsilon_b(g)$ y $\delta_b(f \wedge g) = \delta_b(f) \wedge \delta_b(g)$,
2. $\varepsilon_{g \vee b}(f) = \varepsilon_b(f) \vee \varepsilon_b(g)$ y $\delta_{(g \vee b)}(f) = \delta_b(f) \vee \delta_b(g)$.

- **Iteratividad**

$$\varepsilon_b(\varepsilon_g(f)) = \varepsilon_{(\varepsilon_b(g))}(f) \quad \text{y} \quad \delta_b(\delta_g(f)) = \delta_{(\delta_b(g))}(f).$$

- **Conmutatividad.** La dilatación es una operación conmutativa, i.e., $f \oplus g = g \oplus f$.

2.4. Espacio-escala en morfología matemática

Dentro del marco teórico del análisis de imágenes y la visión por computadora el uso de filtros que dependen de un parámetro de escala ha resultado de gran utilidad.

Un aspecto importante de este enfoque se refiere a la relación que hay entre una escala (espacial) y otra, y puede modelarse considerando un nuevo espacio conocido como *espacio-escala* de la siguiente manera: sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, denominada *núcleo*. La “imagen espacio-escala” es la función $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, \lambda) = f(x) * g(x, \lambda) \quad (2.16)$$

donde $*$ denota la convolución (multidimensional). El dominio de la función F es llamado el espacio-escala. La idea para relacionar las escalas se basa en la siguiente observación: si la escala es considerada como una variable continua entonces la función de características de una escala se relaciona con otra escala si se encuentran en la misma curva de características en el espacio-escala. Es común usar como función núcleo la función Gaussiana

$$g(x, \lambda) = \frac{1}{(2\pi\lambda^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda^2}x^t x\right), \quad (2.17)$$

donde, x^t denota el vector transpuesto de $x \in \mathbb{R}^n$.

El estudio más amplio que se ha hecho de morfología matemática está basado en elementos estructurales planos ($b = 0$). No obstante, la idea de usar funciones estructurantes con parámetros de escala fue introducida por Jackway y Deriche [21], quienes definieron la función estructurante, $g_\lambda : G_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g_\lambda(x) = |\lambda| g(|\lambda|^{-1} x) \quad \text{con } x \in G_\lambda \quad \text{y } \lambda \neq 0, \quad (2.18)$$

donde λ representa el *parámetro de escala* y $G_\lambda = \{x : |\lambda|^{-1} x \in G\}$. La función g_λ es conocida como *función estructurante de escala*. Para asegurar un comportamiento de escala razonable ante cambios de escala, se exige que g_λ sea monótonamente creciente alrededor de cualquier dirección radial del origen. En particular, el conjunto de las *funciones convexas* cumplen tal propiedad. Boomgaard y Dorst [32] definieron a los operadores morfológicos en el espacio-escala basándose en un conocimiento a priori acerca de las simetrías en el espacio de observación. Las condiciones impuestas a las funciones candidatas para fungir como funciones estructurantes son las siguientes:

1. Principio de superposición, $\Psi^\lambda[\bigvee_{i \in I}(a_i + f^i)] = \bigvee_{i \in I}(a_i + \Psi^\lambda(f^i))$,
2. Invarianza bajo traslaciones, $\Psi(f)_t = (\Psi f)_t$,
3. Principio de composición, $\Psi^\lambda \Psi^\mu = \Psi^{\lambda+\mu}$,
4. Invarianza bajo escala, $\Psi^\lambda(\alpha f) = \alpha \Psi^{\Gamma(\lambda)}(f)$,

donde Γ es una función arbitraria monótonamente creciente. En este contexto se puede demostrar que el espacio-escala morfológico es generado por las *dilataciones cuadráticas*

o *parabólicas*, $f \oplus \Psi^\lambda$, donde

$$\Psi^\lambda(x) = -\frac{1}{2\lambda} \|x\|^2. \quad (2.19)$$

Esta última función ha sido aplicada por su capacidad en la regularización de funciones. Más adelante, en la subsección 4.3.3 se mostrará el potencial de este tipo de operadores aplicados a la regularización de imágenes. El enfoque morfológico tiene ventajas sobre el espacio-escala Gaussiano como, por ejemplo, la propiedad de ser monótonamente creciente en cualquier dimensión, las operaciones están definidas para valores negativos del parámetro de escala y permiten un cálculo eficiente. Sin embargo, Boomgaard y Dorst [32] opinan que dicho enfoque no es un sustituto del enfoque basado en el *espacio-escala lineal* ya que cada uno da una metodología diferente para mirar los mismos fenómenos en una imagen, aunque aceptaron que tienen gran verosimilitud a nivel algebraico y en general el enfoque morfológico da información de carácter local de las imágenes. Otros autores como Verveek (1989) han estudiado las ventajas de las propiedades de escalamiento de las funciones estructurantes en los operadores morfológicos.

Capítulo 3

Morfología Matemática en Variedades Riemannianas

En este capítulo consideraremos el caso en el que el espacio soporte no es Euclidiano sino una superficie suave o de modo más general una variedad de Riemann.

3.1. Operaciones Morfológicas Riemannianas Generales

Para comenzar, definimos las operaciones de erosión y dilatación para una función f sobre una variedad Riemanniana, de acuerdo a una familia de operadores definida a través de dos propiedades que (al menos) debería verificar una función estructurante. Las funciones consideradas serán elementos de $F(M, \bar{\mathbb{R}})$, el conjunto formado por todas aquellas funciones cuyo soporte es una variedad Riemanniana M y su imagen es un subconjunto de los reales extendidos $\bar{\mathbb{R}}$.

Definición 3.1 Sea M una variedad Riemanniana. Un operador $b : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es una *función estructurante Riemanniana admisible* en M si para todo $x, y \in M$,

1. $b(x, y) \leq 0$ (negatividad),
2. $b(x, x) = 0$ (maximalidad en la diagonal).

Enseguida se definen las operaciones de dilatación y erosión para cualquier imagen f de acuerdo a la función estructurante Riemanniana admisible b .

Definición 3.2 Sea b una función estructurante Riemanniana admisible, la *erosión y dilatación Riemannianas por b* , $\epsilon_b : F(M, \bar{\mathbb{R}}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ y $\delta_b : F(M, \bar{\mathbb{R}}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, respectivamente, se definen de la siguiente manera

$$\epsilon_b(f)(x) = \inf\{f(y) - b(x, y)\} \quad (3.1)$$

$$\delta_b(f)(x) = \sup\{f(y) + b(x, y)\} \quad (3.2)$$

En la definición anterior se permiten los valores $\{-\infty, +\infty\}$, así que en los casos donde se opere con esos valores se deben hacer las siguientes consideraciones: $\infty + a = \infty$, $\infty - a = \infty$, $-\infty + a = -\infty$ y $-\infty - a = -\infty$. Por la propiedad de maximalidad en la diagonal tenemos que $f(y) - b(x, y) = f(x)$, cuando $y = x$, así $\inf_{y \in M}\{f(y) - b(x, y)\} \leq f(x)$ por tanto la erosión resulta ser antiextensiva. Por la negatividad de la función b , $f(y) \leq f(y) - b(y, x)$ entonces $\inf f(y) \leq \inf_{y \in M}\{f(y) - b(y, x)\} = \epsilon_b f(x)$ así pues $\inf_{y \in M} f(y) \leq \inf_{x \in M} \epsilon_b f(x)$ y puesto que $\epsilon_b f(x) \leq f(x)$ entonces $\inf_{y \in M} \epsilon_b f(x) \leq \inf_{x \in M} f(x)$ por tanto $\inf_{x \in M} f(x) = \inf_{x \in M} \epsilon_b f(x)$, esto es, la erosión preserva el ínfimo. De manera similar se puede probar que la dilatación es extensiva y preserva el supremo. Además es sencillo demostrar que el par (ϵ_b, δ_b) resulta ser una adjunción, esto es, $\delta_b(f) \leq g \Leftrightarrow f \leq \epsilon_b(g)$, consecuentemente, podemos definir la *apertura y cerradura Riemannianas de acuerdo a la función estructurante admisible b* como

$$\gamma_b(f)(x) = \sup_{z \in M} \inf_{y \in M} \{f(y) - b(y, z) + b(z, x)\}, \quad (3.3)$$

$$\phi_b(f)(x) = \inf_{z \in M} \sup_{y \in M} \{f(y) + b(y, z) - b(z, x)\}. \quad (3.4)$$

En la siguiente sección trataremos el caso particular de una función estructurante admisible que tiene importantes propiedades de regularización. Otros ejemplos de este tipo de funciones pueden encontrarse en [5, 14].

3.2. Operaciones Riemannianas canónicas

En esta sección se presentan una familia particular de operaciones Riemannianas en la que la función estructurante se define como $b(x, y) = -\frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}$ con parámetro de escala $\lambda > 0$. Esta familia es una generalización de la familia parabólica (o cuadrática) definida en el espacio Euclidiano, ver sección 2.4.

3.2.1. Erosiones y dilataciones Riemannianas canónicas

Las definiciones de las operaciones morfológicas básicas para variedades Riemannianas se obtienen a partir de una sustitución de la distancia Euclidiana, en la función estructurante cuadrática canónica, por la distancia geodésica Riemanniana definida en la variedad.

Definición 3.3 Sea M una variedad Riemanniana completa, $d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \rightarrow d_M(x, y)$, la distancia geodésica en M y $\lambda > 0$. La erosión Riemanniana canónica con parámetro escalar λ , $\epsilon_\lambda : F(M, \bar{\mathbb{R}}) \rightarrow F(M, \bar{\mathbb{R}})$, se define como

$$\begin{aligned} \epsilon_\lambda(f) : M &\rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \epsilon_\lambda(f)(x) &= \inf_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

de manera similar, la dilatación Riemanniana canónica con parámetro escalar λ , $\delta_\lambda : F(M, \bar{\mathbb{R}}) \rightarrow F(M, \bar{\mathbb{R}})$, se define como

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(f) : M &\rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \delta_\lambda(f)(x) &= \sup_{y \in M} \left\{ f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

El concepto de *adjunción*, introducido por Heijmans and Ronse (1990), en el marco teórico de retículos completos [18], es un concepto fundamental de morfología matemática clásica, puesto que está estrechamente relacionado con los conceptos de erosión y dilatación. El siguiente resultado muestra que si las funciones f y g son definidas en la misma variedad Riemanniana entonces tenemos una relación de adjunción entre las operaciones Riemannianas canónicas elementales. Al par $(\epsilon_\lambda, \delta_\lambda)$ se llama la *adjunción Riemanniana canónica*.

Proposición 3.1 Si f y $g \in F(M, \bar{\mathbb{R}})$ se cumple que $\delta_\lambda(f) \leq g \Leftrightarrow f \leq \epsilon_\lambda(g)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\forall x \in M, \delta_\lambda(f)(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow \forall x \in M : \sup_{y \in M} \left\{ f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} \leq g(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in M, \forall y \in M, f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \leq g(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in M, \forall y \in M, f(y) \leq g(x) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \\
&\Leftrightarrow \forall y \in M, f(y) \leq \inf_{x \in M} \left\{ g(x) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} \\
&\Leftrightarrow \forall y \in M, f(y) \leq \epsilon_\lambda(g)(y) \blacksquare
\end{aligned}$$

La propiedad siguiente es muy importante en morfología matemática clásica. En retículos completos es usada para definir las operaciones que resultan ser erosiones y dilataciones. Este resultado puede ser deducido de la propiedad de adjunción, (ver [18], proposición 2.5).

Proposición 3.2 Dada una familia de funciones $f_i \in F(M, \bar{\mathbb{R}})$, se tiene que la erosión canónica conmuta con el ínfimo y la dilatación canónica conmuta con el supremo, esto es:

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda(\bigvee_{i \in I} f_i) &= \bigvee_{i \in I} \delta_\lambda(f_i) \\
\epsilon_\lambda(\bigwedge_{i \in I} f_i) &= \bigwedge_{i \in I} \epsilon_\lambda(f_i)
\end{aligned}$$

Demostración,

$$\begin{aligned}
& a) f_i(y) \leq (\vee_j f_j)(y) \quad \forall i \\
& \Leftrightarrow f_i - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2 \leq (\vee_j f_j)(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2 \quad \forall i \\
& \Leftrightarrow \sup_y \{f_i(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2\} \leq \sup_y \{(\vee_j f_j)(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2\} \quad \forall i \\
& \Leftrightarrow \delta_\lambda f_i(x) \leq \sup_y \{(\vee_j f_j)(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2\} \quad \forall i \\
& \Leftrightarrow \vee_i (\delta_\lambda f_i(x)) \leq \delta_\lambda (\vee_j f_j)(x) \\
& \Leftrightarrow \vee_i (\delta_\lambda f_i)(x) \leq \delta_\lambda (\vee_j f_j)(x) \\
& b) f_i - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2 \leq \sup_z \{f_i - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, z)^2\} \\
& \Leftrightarrow \vee_i \{f_i(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2\} \leq \vee_i \{\delta_\lambda f_i(x)\} \\
& \Leftrightarrow \vee_i \{f_i(y)\} - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2 \leq \vee_i \{\delta_\lambda f_i(x)\} \\
& \Leftrightarrow \sup_y \{\vee_i f_i(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(x, y)^2\} \leq \vee_i \{f_i(x)\} \\
& \Leftrightarrow \delta_\lambda (\vee_i f_i)(x) \leq \vee_i \delta_\lambda f_i(x)
\end{aligned}$$

Procediendo de manera similar, se puede obtener el resultado para el caso de la erosión Riemanniana canónica. En la figura 3.1 se muestra el resultado de erosionar y dilatar la función $f(x) = \text{sen}(x)$, definida en un subconjunto de \mathbb{R} , contaminada con ruido Gaussiano con diferentes valores para λ . En la figura 3.2 se muestra la erosión y dilatación Riemannianas canónicas para una imagen en escala de gris de 300×369 con diferentes valores para λ .

3.2.2. Aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas

La morfología matemática es una teoría constructiva, y la construcción se basa en el hecho de que sus operaciones no son invertibles. De la definición 3.2 se tiene que, para cada variedad M se define el par de operaciones $(\delta_\lambda, \varepsilon_\lambda)$ cuyo dominio y contradominio es $F(M, \bar{\mathbb{R}})$. Así pues, la *abertura Riemanniana canónica* y la *cerradura Riemanniana canónica con parámetro λ* , $\gamma_\lambda(f) : F(M, \bar{\mathbb{R}}) \rightarrow F(M, \bar{\mathbb{R}})$ con $\gamma_\lambda(f) = \delta_\lambda(\varepsilon_\lambda(f))$, y $\varphi_\lambda(f) : F(M, \bar{\mathbb{R}}) \rightarrow F(M, \bar{\mathbb{R}})$ con $\varphi_\lambda(f) = \varepsilon_\lambda(\delta_\lambda(f))$, respectivamente, están bien definidas. Estas operaciones pueden ser calculadas de manera directa según

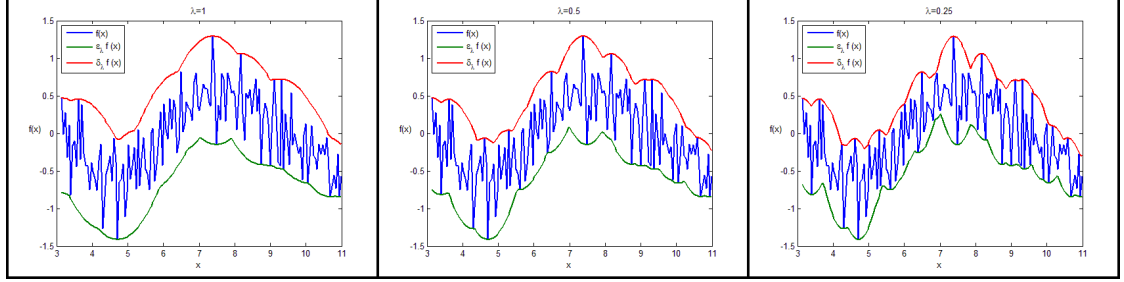


Figura 3.1: Erosiones y dilataciones Riemannianas canónicas, con $M = (\pi, \frac{7}{2}\pi) \subseteq \mathbb{R}$ y $f(x) = \text{sen}(x)$ contaminada con ruido Gaussiano. De izq. a der.: $\lambda = 1$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 0.25$.

la siguiente proposición.

Proposición 3.3 La abertura Riemanniana canónica y la cerradura Riemanniana canónica con parámetro de escala λ , se pueden escribir como

$$\gamma_\lambda(f)(x) = \sup_{z \in M} \inf_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} d_M(z, y)^2 - \frac{1}{2\lambda} d_M(z, x)^2 \right\}, \quad (3.7)$$

$$\varphi_\lambda(f)(x) = \inf_{z \in M} \sup_{y \in M} \left\{ f(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(z, y)^2 + \frac{1}{2\lambda} d_M(z, x)^2 \right\}. \quad (3.8)$$

En algunas ocasiones la variedad Riemanniana en la que se trabaja depende de la función a evaluar. Una vez aplicada la operación de erosión ó dilatación, la función cambia y con ello su dominio. Así pues, si fuera necesario la aplicación de más operaciones morfológicas habría que redefinirlas de acuerdo a la nueva variedad, si así resultara, para que tuviera sentido aplicarlas. En la figura 3.3 se muestra el resultado de aplicar una aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas a la función $f(x) = \text{sen}(x)$ contaminada con ruido Gaussiano, definida en un subconjunto de \mathbb{R} , con diferentes valores para λ . En la figura 3.4 se muestra el resultado de aplicar aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas para una imagen en escala de gris de 300×369 con diferentes valores para λ .

3.2.3. Propiedades generales

Dualidad. Para $f \in F(M, \mathbb{R})$, se define el complemento de f como $f^c(x) = -f(x)$. La erosión y dilatación Riemannianas canónicas son operaciones duales con respecto a la complementación de funciones. Análogamente, la abertura y cerradura son duales en el mismo sentido.

$$\delta_\lambda(f) = \epsilon_\lambda^c(f^c) \quad \text{y} \quad \gamma_\lambda(f) = \varphi_\lambda^c(f^c).$$

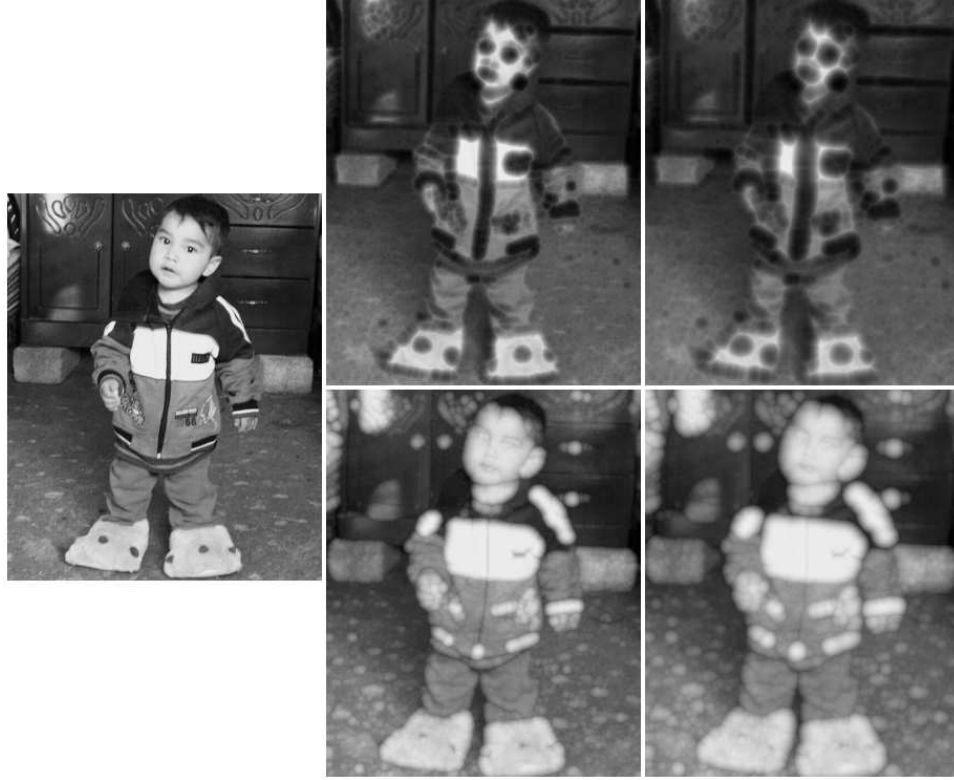


Figura 3.2: Erosiones y dilataciones Riemannianas canónicas, con $M = (0, 300) \times (0, 369) \subseteq \mathbb{R}^2$. Por columna, de izq. a der.: 1er. columna: imagen original; 2da columna y 3ra. columna, erosión y dilatación Riemannianas canónicas con $\lambda = 0.25$ y $\lambda = 0.5$, respectivamente.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\lambda^c(f^c)(x) &= - \inf_{y \in M} \left\{ -f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} \\
 &= - \inf_{y \in M} \left\{ -(f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}) \right\} \\
 &= \sup_{y \in M} \left\{ f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} \\
 &= \delta_\lambda(f)(x)
 \end{aligned}$$

La demostración de la dualidad de γ_λ y φ_λ se obtiene aplicando la dualidad para ϵ_λ y δ_λ como sigue: $\gamma_\lambda(f) = \delta_\lambda(\epsilon_\lambda(f)) = \epsilon_\lambda^c((\epsilon_\lambda^c(f))) = \epsilon_\lambda^c(\delta_\lambda(f^c)) = \varphi_\lambda^c(f^c)$. ■

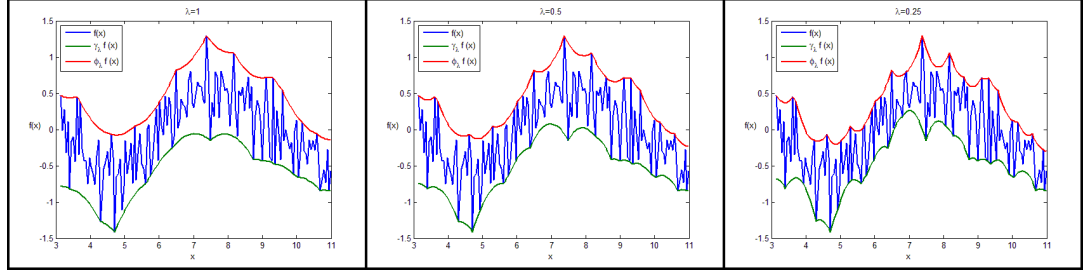


Figura 3.3: Aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas, con $M = (\pi, \frac{7}{2}\pi) \subseteq \mathbb{R}$: de izq. a der.: $\lambda = 1$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 0.25$.

Crecimiento. Sean $f, g \in F(M, \bar{R})$. Si para cada $x \in M$ se cumple que $f(x) \leq g(x)$ entonces, para cada $x \in M$ y para cada $\lambda > 0$, se cumplen las siguientes relaciones de orden,

- a) $\delta_\lambda(f)(x) \leq \delta_\lambda(g)(x)$ y $\epsilon_\lambda(f)(x) \leq \epsilon_\lambda(g)(x)$,
- b) $\gamma_\lambda(f)(x) \leq \gamma_\lambda(g)(x)$ y $\varphi_\lambda(f)(x) \leq \varphi_\lambda(g)(x)$.

Demostración:

a)

$$\begin{aligned}
 \text{Si } f(y) \leq g(y) &\Rightarrow f(y) - \frac{1}{2\lambda}d_M(x, y)^2 \leq g(y) - \frac{1}{2\lambda}d_M(x, y)^2 \\
 &\Rightarrow \sup_y \{f(y) - \frac{1}{2\lambda}d_M(x, y)^2\} \leq \sup_y \{g(y) - \frac{1}{2\lambda}d_M(x, y)^2\} \\
 &\quad \text{y } \inf_y \{f(y) - \frac{1}{2\lambda}d_M(x, y)^2\} \leq \inf_y \{g(y) - \frac{1}{2\lambda}d_M(x, y)^2\} \\
 &\Rightarrow \delta_\lambda(f)(x) \leq \delta_\lambda(g)(x) \text{ y } \epsilon_\lambda(f)(x) \leq \epsilon_\lambda(g)(x) \blacksquare
 \end{aligned}$$

La demostración de *b* se deduce fácilmente de a).

Extensividad y antiextensividad. Por definición, la dilatación y la cerradura Riemannianas canónicas resultan ser extensivas, mientras que la erosión y la abertura Riemannianas canónicas resultan ser antiextensivas, esto es,

- a) $\forall x \in M$ y $\forall \lambda > 0$, $\epsilon_\lambda(f)(x) \leq f(x) \leq \delta_\lambda(f)(x)$,
- b) $\forall x \in M$ y $\forall \lambda > 0$, $\gamma_\lambda(f)(x) \leq f(x) \leq \varphi_\lambda(f)(x)$.

Demostración:

a) Note que si $y = x$ entonces $f(y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(y, x) = f(y) - \frac{1}{2\lambda}d^2(y, x) = f(x)$ así pues,

$$\epsilon_\lambda(f)(x) = \inf_{y \in M} \{f(y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(y, x)\} \leq f(x) \leq \sup_{y \in M} \{f(y) - \frac{1}{2\lambda}d^2(y, x)\} = \delta_\lambda(f)(x).$$



Figura 3.4: Aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas, con $M = (0, 300) \times (0, 369) \subseteq \mathbb{R}^2$. Por columna, de izq. a der.: 1er. columna: imagen original; 2da columna y 3ra. columna, erosión y dilatación Riemannianas canónicas con $\lambda = 0.25$ y $\lambda = 0.5$, respectivamente.

b) Por otra parte, si $y = x$ entonces $f(y) + \frac{1}{2\lambda}d_M(z, y)^2 - \frac{1}{2\lambda}d_M(z, x)^2 = f(x)$. Luego

$$\begin{aligned} & \inf_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda}d_M(z, y)^2 - \frac{1}{2\lambda}d_M(z, x)^2 \right\} \leq f(x) \\ \Rightarrow \sup_{z \in M} \inf_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda}d_M(z, y)^2 - \frac{1}{2\lambda}d_M(z, x)^2 \right\} & \leq \sup_{z \in M} \{f(x)\} = f(x) \\ \Rightarrow \gamma_\lambda(f)(x) & \leq f(x). \end{aligned}$$

De manera similar se obtiene la demostración para la extensividad de la cerradura Riemanniana canónica. ■

De estos resultados podemos deducir fácilmente las siguientes dos propiedades: $\epsilon_\lambda(f)(x) \leq \gamma_\lambda(f)(x)$ y $\varphi_\lambda(f)(x) \leq \delta_\lambda(f)(x)$.

Propiedad de orden. Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ entonces,

- a) $\delta_{\lambda_1}(f)(x) \leq \delta_{\lambda_2}(f)(x)$ y $\epsilon_{\lambda_2}(f)(x) \leq \epsilon_{\lambda_1}(f)(x)$.
b) $\varphi_{\lambda_1}(f)(x) \leq \varphi_{\lambda_2}(f)(x)$ y $\gamma_{\lambda_2}(f)(x) \leq \gamma_{\lambda_1}(f)(x)$.

Demostración:

a)

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < \lambda_1 < \lambda_2 &\Rightarrow f(y) - \frac{1}{2\lambda_1}d_M(x, y)^2 \leq f(y) - \frac{1}{2\lambda_2}d_M(x, y)^2 \\ &\text{y } f(y) + \frac{1}{2\lambda_2}d_M(x, y)^2 \leq f(y) + \frac{1}{2\lambda_1}d_M(x, y)^2 \\ &\Rightarrow \sup_y \left\{ f(y) - \frac{1}{2\lambda_1}d_M(x, y)^2 \right\} \leq \sup_y \left\{ f(y) - \frac{1}{2\lambda_2}d_M(x, y)^2 \right\} \\ &\text{y } \inf_y \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda_2}d_M(x, y)^2 \right\} \leq \inf_y \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda_1}d_M(x, y)^2 \right\} \\ &\Rightarrow \delta_{\lambda_1}(f)(x) \leq \delta_{\lambda_2}(f)(x) \text{ y } \epsilon_{\lambda_2}(f)(x) \leq \epsilon_{\lambda_1}(f)(x) \blacksquare \end{aligned}$$

b) La demostración de este resultado es una consecuencia directa de adjunción, ver [5].

De donde se sigue que $\varphi_{\lambda_1}(f)(x) \leq \varphi_{\lambda_2}(f)(x)$ de manera similar se prueba que $\gamma_{\lambda_2}(f)(x) \leq \gamma_{\lambda_1}(f)(x)$ ■.

Idempotencia. Las operaciones de abertura y cerradura son operaciones idempotentes, esto es

$$\gamma_\lambda \gamma_\lambda(f) = \gamma_\lambda(f) \quad \text{y} \quad \varphi_\lambda \varphi_\lambda(f) = \varphi_\lambda(f)$$

Demostración: Por la propiedad de extesividad de la cerradura se tiene que $\epsilon_\lambda f \leq \varphi_\lambda(\epsilon_\lambda f)$, entonces $\epsilon_\lambda f \leq \epsilon_\lambda \delta_\lambda \epsilon_\lambda f$. Por otro lado, por la propiedad de antiextensividad de la abertura y la erosión se cumple que $\epsilon_\lambda(\gamma_\lambda(f)) \leq \epsilon_\lambda(f)$ y por tanto $\epsilon_\lambda \delta_\lambda \epsilon_\lambda(f) = \epsilon_\lambda(f)$. Usando esta última igualdad se tiene que

$$\gamma_\lambda \gamma_\lambda(f) = \delta_\lambda \epsilon_\lambda \delta_\lambda \epsilon_\lambda(f), \quad (3.9)$$

$$= \delta_\lambda(\epsilon_\lambda \delta_\lambda \epsilon_\lambda)(f), \quad (3.10)$$

$$= \gamma_\lambda(f). \quad (3.11)$$

De manera similar se comprueba que $\delta_\lambda \epsilon_\lambda \delta_\lambda(f) = \delta_\lambda(f)$ y por tanto que $\varphi_\lambda \varphi_\lambda(f) = \varphi_\lambda(f)$. ■.

Invarianza bajo isometrías. Si $T : M \rightarrow M$ es una isometría, es decir, T es una función biyectiva que preserva distancias, es decir, $d_M(T(x), T(y)) = d_M(x, y)$ para todo $x, y \in M$, y si f es invariante bajo T , $f(Tz) = f(z)$, entonces la erosión y dilatación Riemannianas canónicas son invariantes bajo T , es decir, $\delta_\lambda(f)(Tz) = \delta_\lambda(f)(z)$ y $\epsilon_\lambda(f)(Tz) = \epsilon_\lambda(f)(z) \quad \forall z \in M$ y $\forall \lambda > 0$.

Demostración:

Puesto que T es biyectiva entonces $M = T(M)$, así para cada $y \in M$ existe $w \in M$ tal

que $y = Tw$. Además $Tw \in T(M) \Leftrightarrow w \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda(f)(Tz) &= \sup_{y \in M} \left\{ f(y) - \frac{1}{2\lambda} d^2(Tz, y) \right\} \\
&= \sup_{Tw \in M = T(M)} \left\{ f(Tw) - \frac{1}{2\lambda} d^2(Tz, Tw) \right\} \\
&= \sup_{Tw \in T(M)} \left\{ f(w) - \frac{1}{2\lambda} d^2(z, w) \right\} \\
&= \sup_{w \in M} \left\{ f(w) - \frac{1}{2\lambda} d^2(z, w) \right\} \\
&= \delta_\lambda(f)(z)
\end{aligned}$$

la invarianza para la erosión Riemannina canónica se demuestra de manera similar. ■

Preservación de extremos. La erosión y abertura Riemannianas canónicas preservan el supremo absoluto, mientras que la dilatación y la cerradura Riemannianas canónicas preservan el ínfimo absoluto, esto es, $\inf f = \inf \epsilon_\lambda(f) = \inf \gamma_\lambda(f)$ y $\sup(f) = \sup \delta_\lambda(f) = \sup \varphi(f)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
1) \quad f(x) &\leq \delta_\lambda f(x) \quad \forall x \in M && \Rightarrow \sup f \leq \sup \delta_\lambda f \\
2) \quad f(y) - \frac{1}{2\lambda} d^2(x, y) &\leq f(y) \quad \forall x \in M && \Rightarrow \sup_{y \in M} \left\{ f(y) - \frac{1}{2\lambda} d^2(x, y) \right\} \leq \sup_{y \in M} f(y) \quad \forall x \in M \\
&&& \Rightarrow \delta_\lambda(f)(x) \leq \sup f \quad \forall x \in M \\
&&& \Rightarrow \sup \delta_\lambda f \leq \sup f
\end{aligned}$$

De 1) y 2) se tiene que $\sup f = \sup \delta_\lambda f$, y ya que $\gamma_\lambda f(x) \leq f(x) \leq \delta_\lambda(f)(x)$ entonces $\sup f = \sup \gamma_\lambda f = \sup \delta_\lambda f$. De manera similar se demuestran las igualdades para el ínfimo. ■

También tenemos que si f es semicontinua inferiormente (superiormente) entonces cada mínimo (máximo) de $\epsilon_\lambda(f)$ ($\delta_\lambda(f)$) es un mínimo de f y viceversa.

Demostración:

Por la propiedad de crecimiento, es claro que si x_0 es un mínimo de f , entonces también es un mínimo de $\epsilon_\lambda(f)$. Supongamos que x_0 es un mínimo de $\epsilon_\lambda(f)$ y que existe $x_1 \in M$ tal que $f(x_1) < f(x_0)$. Para $\epsilon = f(x_0) - f(x_1)$, por la semicontinuidad inferior existe una vecindad U de x_0 tal que $f(x_1) = f(x_0) - \epsilon \leq f(x)$ para todo $x \in U$, entonces por crecimiento $\epsilon_\lambda(f)(x_1) \leq \epsilon_\lambda(f)(x)$, para cada $x \in U$, en particular $\epsilon_\lambda(f)(x_1) \leq \epsilon_\lambda(f)(x_0)$, pero $\epsilon_\lambda(f)(x_1) = \epsilon_\lambda(f)(x_0) - \epsilon < \epsilon_\lambda(f)(x_0)$ lo cual contradice que x_0 sea el mínimo de $\epsilon_\lambda(f)$. ■

Propiedad de localización. En la práctica, las imágenes a estudiar son funciones acotadas. En este caso el siguiente resultado da una idea acerca de la localización de los operadores morfológicos canónicos así como de sus efectos en cualquier variedad Riemanniana. Sea M una variedad Riemanniana, f y g dos funciones reales acotadas sobre M , esto es, $a \leq f(x)$ y $g(x) \leq b \forall x \in M$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\epsilon_\lambda(f)(x) = \inf_{y \in B_{r_x}(x)} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}, \quad (3.12)$$

$$\delta_\lambda(g)(x) = \sup_{y \in B_{r_x}(x)} \left\{ g(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}. \quad (3.13)$$

Donde $r_x = \sqrt{2\lambda(f(x) - a)}$ en el caso de la erosión, y $r_x = \sqrt{2\lambda(b - g(x))}$ en el caso de la dilatación. Demostración:

Si $A^x = \{y \in M : f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \leq f(x)\}$ y $B^x = \{y \in M : f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} > f(x)\}$, entonces

$$\inf_{y \in A^x} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} \leq f(x) \leq \inf_{y \in B^x} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\},$$

y ya que $M = A^x \cup B^x$, entonces

$$\begin{aligned} \inf_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} &= \min \left\{ \inf_{y \in A^x} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}, \inf_{y \in B^x} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} \right\}, \\ &= \inf_{y \in A^x} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}. \quad (*) \end{aligned}$$

Así $\epsilon_\lambda f(x) = \inf_{y \in A^x} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}$. Por otra parte, puesto que $a \leq f(y) \forall y \in A^x$, entonces

$$\begin{aligned} a + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} &\leq f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \leq f(x) \\ \Rightarrow d_M(x, y) &\leq \sqrt{2\lambda(f(x) - a)} \\ \Rightarrow A^x &\subseteq B_{r_x}(x), \end{aligned}$$

donde $r_x = \sqrt{2\lambda(f(x) - a)}$. De (*) y ya que $B_{r_x}(x) \subseteq M$, entonces

$$\inf_{y \in A^x} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} = \inf_{y \in B_{r_x}(x)} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}.$$

Por tanto $\epsilon_\lambda f(x) = \inf_{y \in B_{r_x}(x)} \left\{ f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\}$. Por otro lado, en el caso de la dilatación Riemanniana canónica, defínase $A^x = \{y \in M : f(x) \leq f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\}$ y $B^x = \{y \in M : f(x) > f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\}$. Así pues tenemos que

$$\sup_{y \in A^x} \left\{ f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\} \geq f(x) \geq \sup_{y \in B^x} \left\{ f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda} \right\},$$

y ya que $M = A^x \cup B^x$ entonces

$$\begin{aligned}\delta_\lambda f(x) &= \max\left\{\sup_{y \in A^x} \left\{f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\right\}, \sup_{y \in B^x} \left\{f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\right\}\right\} \\ &= \sup_{y \in A^x} \left\{f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\right\}.\end{aligned}$$

Además $A^x \subseteq B_{r_x}(x)$ con $r_x = \sqrt{2\lambda(b - f(x))}$ y puesto que $B_{r_x}(x) \subseteq M$, entonces

$$\delta_\lambda f(x) = \sup_{y \in B_{r_x}(x)} \left\{f(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\right\}. \blacksquare$$

En el caso de que la función f , en la proposición anterior, también fuera acotada superiormente por T , entonces $f(x) - a \leq T - a$ y $T - f(x) \leq T - a$, por tanto

$$\epsilon_\lambda(f)(x) = \inf_{y \in B_r(x)} \left\{f(y) + \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\right\}, \quad (3.14)$$

$$\delta_\lambda(g)(x) = \sup_{y \in B_r(x)} \left\{g(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\lambda}\right\}. \quad (3.15)$$

Donde $r = \sqrt{2\lambda(T - a)}$.

3.3. Regularización de imágenes usando $(\epsilon_\lambda, \delta_\lambda)$

La regularización de funciones ha sido aplicada en muchas áreas del procesamiento digital de imágenes y visión por computadora. El objetivo de los modelos de regularización es obtener un modelo simple de la imagen de tal manera que sólo las características importantes se conserven. Este tipo de método ha sido aplicado en una amplia gama de problemas de procesamiento de imágenes como la restauración, visualización de flujo, la estabilización de los movimientos de la cámara, el aprendizaje automático, etc. Actualmente existen diferentes modalidades de imágenes que son desplegadas sobre superficies, las cuales frecuentemente no son suaves y su regularización puede ser necesaria en la aplicación. Las principales técnicas desarrolladas en este ámbito están basadas principalmente en núcleo de calor (heat-kernel) y difusión parecida (diffusion-like) PDE [40, 11].

3.3.1. Regularización de Moreau-Yosida

En el campo del análisis convexo y optimización [17], el método de regularización propuesto por Moreau-Yosida [28] para funciones definidas en un espacio vectorial E ,

(Euclidiano o de Hilbert), propone la operación de erosión donde la función estructurante es una función convexa. Más precisamente tenemos la siguiente definición.

Definición 3.4 Dada una función semicontinua inferiormente $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la *regularización de Moreau-Yosida* de f o *envolvente de Moreau*, se define como

$$f_\lambda(x) = \inf_{y \in E} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|x - y\|^2 \right\}. \quad (3.16)$$

Teorema 3.1 Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una función semiconvexa y semicontinua inferiormente. Entonces, para cada $\lambda > 0$ la aproximación de Moreau-Yosida f_λ es una función convexa, suave y su derivada es Lipschitz continua, esto es

$$|f'_\lambda(x_1) - f'_\lambda(x_2)| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

En terminos morfológicos $f_\lambda(x) = \epsilon_\lambda f(x)$, por lo tanto esta función tiene todas las propiedades de la erosión demostradas anteriormente. Note que si $\lambda \rightarrow 0$, entonces $f_\lambda \rightarrow f$. En general si f no es convexa f_λ no es suave y esto limita la aplicación de estos resultados al análisis de imágenes puesto que las imágenes son convexas raramente.

Ejemplo 3.1 sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = |x|$. La envolvente Moreau de f es la función $\epsilon_\lambda f(x)$ conocida como función Huber

$$\epsilon_\lambda f(x) = \inf_y \left\{ |y| + \frac{1}{2\lambda} |x - y|^2 \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} x^2 & \text{si } |x| \leq \lambda \\ |x| - \frac{\lambda}{2} & \text{si } |x| > \lambda \end{cases}$$

3.3.2. Regularización de Lasry-Lions

La regularización de Lasry-Lions es una generalización de la regularización de Moreau-Yosida para funciones definidas en espacios de Hilbert usando combinaciones de erosiones y dilataciones con funciones cuadráticas como funciones estructurantes. Estos resultados no asumen que las funciones a considerar son convexas.

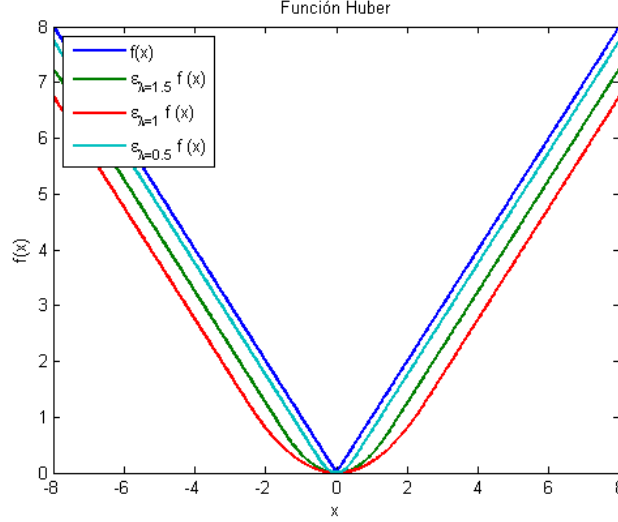


Figura 3.5: Regularización de la función $f = |x|$ con $\lambda = 1.5$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 0.5$.

Definición 3.5 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $0 < \mu < \lambda$ se definen las *regularizaciones de Lasry-Lions* como el siguiente par de funciones

$$(f_\lambda)^\mu(x) = \sup_{z \in M} \inf_{y \in M} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} d_M(z, y)^2 - \frac{1}{2\mu} d_M(z, x)^2 \right\}, \quad (3.17)$$

$$(f^\lambda)_\mu(x) = \inf_{z \in M} \sup_{y \in M} \left\{ f(y) - \frac{1}{2\lambda} d_M(z, y)^2 + \frac{1}{2\mu} d_M(z, x)^2 \right\}. \quad (3.18)$$

Enseguida se presenta el resultado principal de esta regularización.

Teorema 3.2 Si $f \in BUC(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotada y uniformemente continua}\}$ entonces las funciones $(f_\lambda)^\mu$ y $(f^\lambda)_\mu$ se encuentran en $C_b^{1,1}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b^1(\mathbb{R}^n) : \nabla f \text{ es Lipschitz}\}$, donde $C_b^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^1(\mathbb{R}^n) : f, \nabla f \text{ son acotadas}\}$, y convergen uniformemente a f cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Además, Si la función f es convexa entonces $(f_\lambda)^\mu$ y $(f^\lambda)_\mu$ resultan ser suaves y convergen uniformemente a f cuando $\lambda \rightarrow 0$. Si f es uniformemente continua en bolas abiertas entonces las regularizaciones convergen en bolas abiertas a f , si f es semicontinua inferiormente y acotada por abajo, entonces para $0 < \mu < \lambda$, $(f^\lambda)_\mu$ es suave y converge puntualmente a f cuando $\lambda \rightarrow 0$. Dualmente, si f es semicontinua superiormente y acotada superiormente entonces $(f_\lambda)^\mu$ es suave para $0 < \mu < \lambda$, y converge puntualmente

cuando $\lambda \rightarrow 0$. como regla general, si f es una función convexa entonces disfruta de más regularidad o simetría, entonces $(f_\lambda)^\mu$ y $(f^\lambda)_\mu$ también podrán disfrutar de una mayor regularidad y la simetría se preserva, por ejemplo, si la función f es convexa (o cóncava) entonces $(f_\lambda)^\mu$ es también convexa (o $(f^\lambda)_\mu$ es cóncava).

Por otra parte, en el marco de morfología matemática las anteriores definiciones se pueden reescribir de la siguiente manera: $(f_\lambda)^\mu = \delta_\mu \varepsilon_\lambda f$ y $(f^\lambda)_\mu = \varepsilon_\mu \delta_\lambda f$. Así pues, en un sentido cualitativo podemos ver estas operaciones como pseudo-aberturas y pseudo-cerraduras Euclidianas que cumplen las siguientes propiedades, similares a las propiedades para la abertura y la cerradura.

Crecimiento. Si $f \leq g$ entonces

$$(f_\lambda)^\mu \leq (g_\lambda)^\mu \quad \text{y} \quad (f^\lambda)_\mu \leq (g^\lambda)_\mu. \quad (3.19)$$

La demostración de esta propiedad se obtiene fácilmente empleando las propiedad de crecimiento de la erosión y dilatación Riemannias canónicas.

Orden. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \mu_2 \geq \mu_1 > 0$ entonces

$$(f_{\lambda_1})^{\mu_1} \leq (f_{\lambda_2})^{\mu_2} \leq f \leq (f^{\lambda_2})_{\mu_2} \leq (f^{\lambda_1})_{\mu_1} \quad (3.20)$$

Demostración

Puesto que $\lambda_2 \leq \lambda_1$, por la propiedad de orden de la erosión tenemos que $f_{\lambda_1} \leq f_{\lambda_2}$. Puesto que $\mu_1 \leq \mu_2$ y por las propiedades de crecimiento y orden de la dilatación y erosión tenemos las siguientes desigualdades

$$(f_{\lambda_1})^{\mu_1} \leq (f_{\lambda_2})^{\mu_1} \leq (f_{\lambda_2})^{\mu_2}.$$

Por otra parte, puesto que $\mu_2 < \lambda_2$, por la propiedad de orden de la dilatación y la antiextensividad de la abertura tenemos que

$$(f_{\lambda_2})^{\mu_2} \leq (f_{\lambda_2})^{\lambda_2} \leq f.$$

De manera similar se obtiene el resto de la desigualdad. ■

En caso de que $\lambda_1 = \mu_1$ y $\lambda_2 = \mu_2$ obtenemos las operaciones de abertura y cerradura Riemannianas canónicas. Así pues, la diferencia esencial entre estas operaciones y las regularizaciones de Lasry-Lions es que estas últimas no son idempotentes, además las funciones $\gamma_\lambda f$ y $\varphi_\lambda f$ no son suaves en general, mientras que $(f_\lambda)^\mu$ y $(f^\lambda)_\mu$ son suaves bajo hipótesis de acotamiento y semicontinuidad.

Una de las “desventajas” de estas regularizaciones es el comportamiento asimétrico que presentan. Bernard (2010) propuso recientemente otro par de operaciones que regularizan funciones acotadas localmente y que son más simétricas.

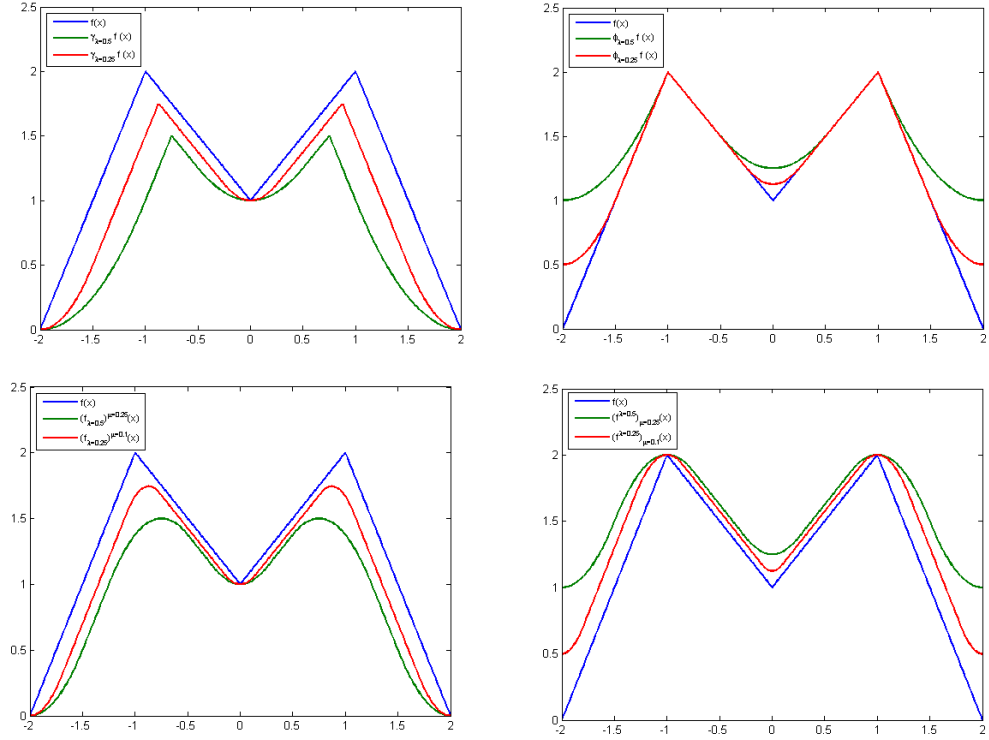


Figura 3.6: Aberturas y cerraduras VS Regularización de Lasry-Lions.

Definición 3.6 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Las regularizaciones de Bernard se definen, desde un punto de vista morfológico, como

$$R_{\lambda}^{-}(f)(x) = \varepsilon_{\lambda} \delta_{2\lambda} \varepsilon_{\lambda} f, \quad (3.21)$$

$$R_{\lambda}^{+}(f)(x) = \delta_{\lambda} \varepsilon_{2\lambda} \delta_{\lambda} f. \quad (3.22)$$

Teorema 3.3 Para cada función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada localmente y para cada $\lambda > 0$, las regularizaciones $R_{\lambda}^{-}(f)$ y $R_{\lambda}^{+}(f)$ son $C^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ y si f es uniformemente continua, estas regularizaciones convergen a f cuando $\lambda \rightarrow 0$.

En la figura 3.7 se hace una comparación entre las regularizaciones de Lasry-Lions y las regularizaciones de Bernard, donde se puede observar que estas últimas son más simétricas. En la figura 3.8 se presentan las regularizaciones de Bernard en dos dimensiones.

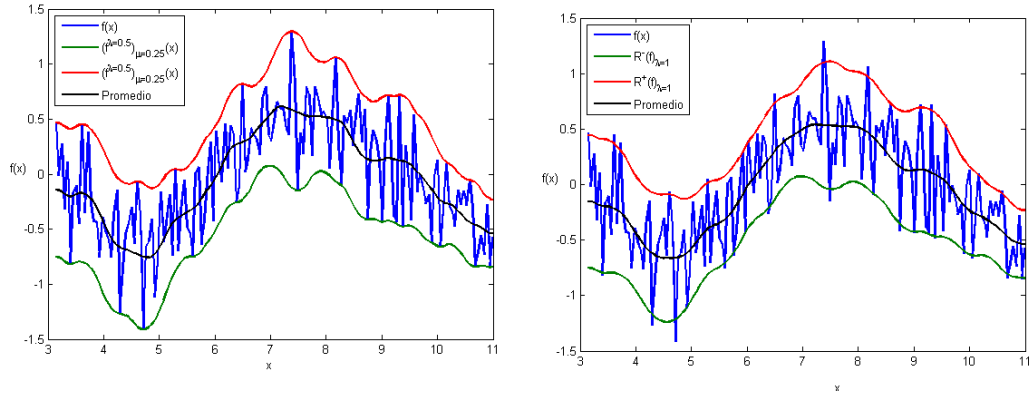


Figura 3.7: Regularización de Lasry-Lions VS Regularización de Bernard.

3.3.3. Regularización en variedades Riemannianas de variación acotada

Los resultados de Lasry-Lions se han extendido para variedades compactas, y de manera más general, para variedades Riemannianas de variación acotada. Una dificultad encontrada en esta tarea de generalización es la extensión de la definición de suavidad global $C^{1,1}$ a variedades Riemannianas. Recordemos que dado H un espacio de Hilbert o \mathbb{R}^n , si U es un subconjunto abierto de H , y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que $f \in C^{1,1}$ si $f \in C^1(U)$ y el gradiente $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz, esto es, existe $C \geq 0$ tal que $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq C\|x - y\|$ para todo $x, y \in U$. La extensión al caso de variedades Riemannianas no es trivial puesto que los vectores $\nabla f(x)$ y $\nabla f(y)$ se encuentran en diferentes fibras de TM . En esta tesis se trabaja bajo el marco teórico presentado en [8] donde se presenta una definición de suavidad global $C^{1,1}$ que hace sentido en cada variedad Riemanniana, que se reduce al caso de espacios planos, además permite trabajar con la forma de la constante de Lipschitz y que cumple con la mayoría de las expectativas que uno espera tener sobre una definición razonable de este concepto. Para presentar la definición de una función de suavidad global $C^{1,1}$ recordemos de manera breve dos conceptos importantes: el radio de inyectividad y convexidad de una variedad Riemanniana M .

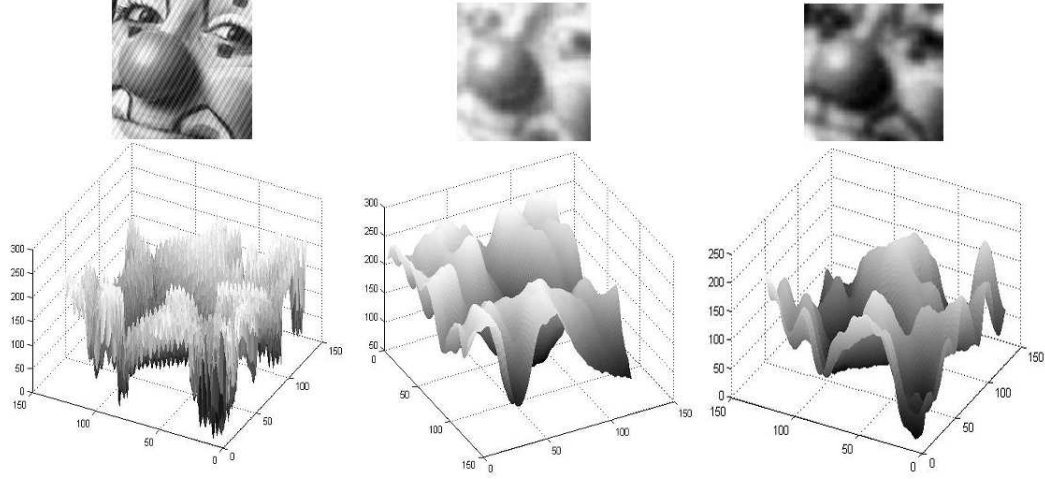


Figura 3.8: Regularización de Bernard en dos dimensiones con $\lambda = 0.5$: de izq. a der.: imagen original, $R_\lambda^+(f)(x)$ y $R_\lambda^-(f)(x)$.

Definición 3.7 Sea M una variedad Riemanniana. El radio de inyectividad de M en un punto x , $i(x)$, se define como el supremo de los radios para los cuales la función exponencial \exp_x es un difeomorfismo de clase C^∞ entre $B_{T_x M}(0, r)$ y su imagen. El radio de inyectividad de M se define como $i(M) = \inf\{i(x) : x \in M\}$. Por otra parte el radio de convexidad en un punto $x \in M$ se define como el supremo de todos los radios $r > 0$ tales que la bola $B(x, r)$ es convexa. El radio de convexidad de M se define como $c(M) = \inf\{c(x) : x \in M\}$.

Es bien sabido que $i(x) > 0$ y $c(x) > 0$. Por tanto, para cada $x_0 \in M$, $\exists R > 0$ tal que la bola $B(x_0, 2R)$ es convexa y $\exp_x : B_{T_x M}(0, R) \rightarrow B(0, R)$ es un difeomorfismo C^∞ para cada $x \in B(x_0, R)$. Si $x, y \in B(x_0, R)$ y la curva $\eta : [0, \ell] \rightarrow M$ es la única geodésica con $\eta(0) = x$, $\eta(\ell) = y$, $\ell = d(x, y)$, $h \in T_x M$ y $P : [0, \ell] \rightarrow TM$ es el único campo vectorial paralelo a lo largo de η con $P(0) = h$, entonces se define $L_{xy}(h) = P(\ell)$. cuando $i(M) > 0$ y $c(M) > 0$, la función $L_{xy} : T_x M \rightarrow T_y M$ nos permite comparar dos vectores que se encuentran en diferentes fibras de TM .

Definición 3.8 Sea M una variedad Riemanniana y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que f es

de clase $C^{1,1}(M)$ si $f \in C^1(M)$ y existe $C \geq 0$ tal que para cada $x_0 \in M$ existe $r \in \{0, \text{mín}\{x_0, c(x_0)\}\}$, tal que para cada $x, y \in B(x_0, r)$,

$$\|\nabla f(x) - L_{xy}\nabla f(y)\| \leq Cd(x, y). \quad (3.23)$$

Se dice que C es la *constante de Lipschitz* de ∇f y que ∇f es C -Lipschitz. Definimos $Lip(\nabla f)$ como el ínfimo de tales C . A continuación se definen otros conceptos que tienen una conexión importante con el concepto de suavidad global $C^{1,1}$.

Definición 3.9 Sea M una variedad Riemanniana, se dice que una función $f : M \rightarrow (-\infty, \infty)$ es *semiconvexa* (globalmente) si existe $c > 0$ tal que para cada $x_0 \in M$, la función $f + Cd(\cdot, x_0)^2$ es convexa en M . De manera similar, se dice que $h : M \rightarrow [-\infty, \infty]$ es *semicóncava* (globalmente) si existe $D > 0$ tal que $h - Dd(\cdot, x_0)^2$ es cóncava en M , para cada $x_0 \in M$. Decimos que f es *semiconvexa localmente* (o *semicóncava localmente*) si para cada $x \in M$ existe r tal que $f|_{B(x,r)} : B(x, r) \rightarrow (-\infty, \infty)$ es semiconvexa (o *semicóncava*).

Note que h es semiconvexa si $-h$ es *semicóncava*. Si existe $C \geq 0$ tal que para cada $x_0 \in M$, existe $r > 0$ tal que la función $x \in B(x_0, r) \rightarrow f(x) + Cd(x, y_0)^2$ es convexa (o cóncava) para cada $y_0 \in B(x_0, r)$ se dice que la función $f : M \rightarrow (-\infty, \infty)$ es *C-semiconvexa localmente* (o *C-semicóncava localmente*). Finalmente, se dice que $f : M \rightarrow (-\infty, \infty)$ es *uniformemente semiconvexa localmente* (o *uniformemente semicóncava localmente*) si existen $C, R > 0$ tal que para cada $x_0 \in M$ la función $x \in B(x_0, R) \rightarrow f(x) + Cd(x, y)^2$ es convexa (o cóncava) y se dice que f es *C-semiconvexa* (o *semicóncava*) localmente. El siguiente resultado es muy importante puesto que relaciona los conceptos de semiconvexidad local y suavidad $C^{1,1}$ en variedades Riemannianas. La demostración de este resultado puede encontrarse en [8]. Claramente la semiconvexidad global implica la uniformidad *semicóncava localmente* y esta última implica semiconvexidad local.

Proposición 3.4 Sea M una variedad Riemanniana tal que $\dim(M) < \infty$. Si una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es *C-semiconvexa localmente* y *C-semicóncava localmente*, entonces $f \in C^{1,1}(M)$ y $Lip(\nabla f) \leq 12C$.

El conjunto de funciones definidas en variedades Riemannianas para las cuales se han extendidos los resultados de Lasry-Lions se definen a continuación.

Definición 3.10 Dadas M una variedad Riemanniana y una función $f : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se dice que f es *minorizada cuadráticamente* si existe $c > 0$, $x_0 \in M$ tal que para cada $x \in M$,

$$f(x) \geq -\frac{c}{2}(1 + d(x, x_0)^2). \quad (3.24)$$

de manera similar, una función $g : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, está *mayorizada cuadráticamente* si existe $d > 0$ y $x_0 \in M$ tal que para cada $x \in M$

$$g(x) \leq \frac{d}{2}(1 + d(x, x_0)^2). \quad (3.25)$$

Enseguida se presenta el resultado que establece la convexidad local de las funciones $(f_\lambda)^\mu$.

Proposición 3.5 Sea M una variedad Riemanniana con curvatura seccional K tal que $|K| \leq K_0$, $i(M) > 0$ y $c(M) > 0$. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función minorizada cuadráticamente y $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función mayorizada cuadráticamente. Esto es,

$$f(x) \geq -\frac{c}{2}(1 + d(x, x_0)^2) \quad \text{y} \quad h(x) \leq \frac{c}{2}(1 + d(x, x_0)^2) \quad (3.26)$$

para cada $x \in M$ y para algún $c > 0$. Sea $q > 1$, si f es acotada en M entonces existe $\lambda_0(K_0, \|f\|_\infty, q) > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$ la función f_λ es uniformemente $\frac{q}{2\lambda}$ -semicóncava localmente. Similarmente, si h es acotada en M , entonces existe $\mu_0 > 0$ tal que h^μ es uniformemente $\frac{q}{2\mu}$ -semiconvexa localmente para cada $\mu \in (0, \mu_0]$.

Observación 3.1 Si f es una función acotada y mayorizada cuadráticamente, entonces f_λ también tiene estas propiedades puesto que $\inf_{y \in M} f(y) \leq f_\lambda(x) \leq f(x)$. Luego, si hacemos $h = f_\lambda$ en la proposición anterior, entonces $h^\mu = (f_\lambda)^\mu$ es uniformemente $\frac{q}{2\mu}$ -semiconvexa localmente para todo $\mu \in (0, \mu_0]$ con $\mu_0 > 0$.

En la siguiente proposición se establece que la función $(f_\lambda)^\mu$ es uniformemente semicóncava localmente.

Proposición 3.6 Sea M una variedad Riemanniana con curvatura seccional K tal que $|K| \leq K_0$, $i(M) > 0$ y $c(M) > 0$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función mayorizada cuadráticamente. Si f es acotada en M entonces existe λ_0 tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$ y para cada $\mu \in (0, \frac{\lambda}{2q}]$ la función $(f_\lambda)^\mu$ es uniformemente semicóncava localmente con constante $B_\mu = \frac{q}{2\mu}$.

Para la aplicación de los resultados de la proposición 3.5 y la proposición 3.6 es muy importante determinar los valores de λ_0 y μ_0 . Estos valores se pueden deducir de las demostraciones de los resultados anteriores, que se pueden consultar en [8], como sigue: sea $\frac{1}{4} > \epsilon > 0$ tal que

$$q \geq \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \quad y \quad q \geq \frac{8\epsilon + 1 - \epsilon^2}{4(1 - \epsilon)^2 - 1 + \epsilon^2}.$$

Entonces, podemos encontrar R tal que $0 < 2R < \min\{i(M), c(M), \frac{\pi}{4}\sqrt{K_0}\}$ y para cada $\ell \in (0, 2R]$,

a) $\frac{\sqrt{K_0}\ell \operatorname{sen}(\sqrt{K_0}\ell) \cos(\sqrt{K_0}\ell)}{\operatorname{senh}^2(\sqrt{K_0}\ell)} \geq (1 - \epsilon),$

b) $\frac{\sqrt{K_0}\ell}{\operatorname{sen}(\sqrt{K_0}\ell)} \leq (1 + \epsilon),$

c) $\frac{\cosh(\sqrt{K_0}\ell)}{\operatorname{senh}(\sqrt{K_0}\ell)} \leq (1 + \epsilon).$

Por otra parte, usando la propiedad de localización podemos escribir

$$h^\mu(x) = \sup_{y \in B_r(x)} \left\{ h(y) - \frac{d_M(x, y)^2}{2\mu} \right\},$$

donde $r = \sqrt{k\mu}$, $k = 4T$ y $|h| < T$. Finalmente, calculamos μ_0 usando la siguiente ecuación

$$\mu_0 = \frac{R^2}{4k}. \tag{3.27}$$

El valor de λ_0 se elige bajo las mismas restricciones. Así pues, si f es minimizada y mayorizada cuadráticamente, y acotada, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ y para todo $\mu \in (0, \frac{\lambda}{2q}]$ la función $(f_\lambda)^\mu$ es uniformemente semiconvexa localmente y uniformemente semicóncava localmente con constante $B_\mu = \frac{q}{2\mu}$, en ambos casos. De acuerdo a la proposición 3.4 se tiene que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ y para todo $\mu \in (0, \frac{\lambda}{2q}]$, la función $(f_\lambda)^\mu \in C^{1,1}(M)$ y $\operatorname{Lip}(\nabla f) \leq 12(\frac{q}{2\mu})$.

Finalmente, la importancia de este método de regularización en el procesamiento digital de imágenes, radica en el hecho de que las operaciones de regularización $(f_\lambda)^\mu$ son completamente explícitas y preservan muchas características geométricas de la imagen. Como ejemplo de aplicación de esta teoría en el capítulo 4 presentamos el caso de imágenes cuyo soporte es una esfera y que pueden surgir en diversos problemas de procesamiento de imágenes.

3.4. Erosión y dilatación Riemannianas isotrópicas planas

En esta sección se definen las operaciones de erosión y dilatación Riemannianas usando un elemento estructural plano, definido sobre una bola geodésica en la variedad. Estas definiciones corresponden al caso de la morfología matemática para imágenes en escala de grises usando como elemento estructural un disco en el espacio euclidiano. Sea $B_r(x) = \{y : d_M(x, y) \leq r\}$ la bola geodésica de radio r ,

Definición 3.11 La *erosión y dilatación isotrópicas planas* de tamaño r están dadas, respectivamente, por

$$\epsilon_{B_r}(f)(x) = \inf\{f(y) : y \in B_r(x)\} \quad (3.28)$$

$$\delta_{B_r}(f)(x) = \sup\{f(y) : y \in B_r(x)\}, \quad (3.29)$$

Las operaciones de *cerradura y abertura isotrópicas planas* se definen como la composición de las dos anteriores, es decir

$$\phi_{B_r}(f) = \epsilon_{B_r}(\delta_{B_r}(f)) \quad (3.30)$$

$$\gamma_{B_r}(f) = \delta_{B_r}(\epsilon_{B_r}(f)) \quad (3.31)$$

Todas las propiedades formuladas para las operaciones Riemannianas canónicas se mantienen para los filtros isotrópicos planos, no obstante, en la práctica, estos últimos resultan ser más apropiados en problemas que tienen que ver con extracción de objetos o estructuras geométricas y no con la regularización. En las secciones 4.6 y 4.7, se ilustra la aplicación de filtros resultantes de la combinaciones de las operaciones isotrópicas planas para imágenes con soporte en la esfera.

Capítulo 4

Morfología Matemática en la Esfera

4.1. La esfera

Después del plano, la esfera es una de las superficies más estudiadas en varias áreas de las matemáticas debido a su simplicidad. La esfera, denotada \mathbb{S}^2 , en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 se define como el conjunto de todos los puntos que equidistan del origen en \mathbb{R}^3 . Esto es,

$$\mathbb{S}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad (4.1)$$

Note que la esfera \mathbb{S}^2 es una superficie bidimensional. La esfera \mathbb{S}^2 también se puede especificar en coordenadas esféricas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta \sin \phi \\ x_2 &= \sin \theta \sin \phi \\ x_3 &= \cos \phi \end{aligned}$$

donde θ varía en el intervalo $[0, 2\pi]$ y ϕ varía en el intervalo $[0, \pi]$. En el campo de procesamiento de imágenes existen muchas situaciones en las que la superficie, la cual es dominio de definición de una imagen a estudiar, se puede modelar mediante una esfera para simplificar el problema. Así pues, tal imagen se puede definir como una función f cuyo soporte es la esfera \mathbb{S}^2 y que es valuada en los reales extendidos, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

4.2. Imágenes con soporte en la esfera

Las imágenes definidas en una superficie esférica en lugar de un plano surgen en diversas situaciones en visión artificial y gráficos por ordenador. Algunos ejemplos de este tipo de imágenes son las obtenidas mediante una deformación de una **superficie compleja**, mediante un mapeo conforme entre la superficie y la esfera, justificado con la aplicación de teoría de superficies de Riemann que afirma que cualquier superficie sin hoyos, o sin intersecciones con ella misma, se puede mapear de manera conforme a una esfera. Las principales aplicaciones de este tipo de mapeo se pueden encontrar en el área de medicina, ver figura 4.1, a). Por otra parte, las **imágenes omnidireccionales** que representan un gran subconjunto de la esfera de visualización aparecen distorcionadas en el plano, puesto que son definidas naturalmente en la esfera, ver figura 4.1, b). Otros ejemplos son los **mapeos de entornos** que se utilizan como fuentes de luz globales en los gráficos por ordenador, figura 4.1, c). Puesto que este tipo de imágenes están definidas naturalmente sobre la esfera parece natural considerar la geometría intrínseca de la esfera para su análisis.

En el estado del arte podemos encontrar diversos trabajos en los que se presentan teorías y aplicaciones para imágenes definidas en la esfera. El intento más inmediato para filtrar este tipo de imágenes es mapear la imagen al plano y aplicar los filtros ya conocidos y ampliamente usados y finalmente volver a la esfera. Este tipo de filtros es invariante bajo traslaciones en el plano, no obstante el mapeo a la esfera puede modificar su forma. En otro tipo de investigaciones han extendido los filtros lineales definidos en el plano al caso de la esfera [11].

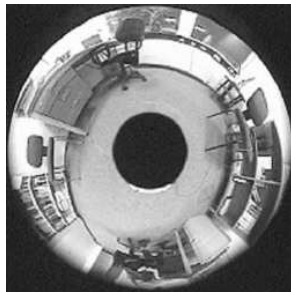
En el área de morfología matemática, Roerdink extendió la morfología matemática de conjuntos a la esfera, ver [33]. El proceso general de esta teoría es enviar un subconjunto de la esfera, mediante un mapeo biyectivo, a un subconjunto de su grupo de rotaciones, donde previamente se han definido operadores generalizados de Minkowsky, aplicar las operaciones morfológicas en este último, y volver a la esfera. Este tipo de teoría es aplicable a imágenes binarias definidas en la esfera. Posteriormente Roerdink presentó un marco teórico más general para imágenes definidas en superficies más generales, ver [34]. En este trabajo se presenta procesamiento de imágenes cuyo soporte es una esfera que se basa en teoría de variedades Riemannianas.

4.3. Distancia en la esfera

La distancia geodésica en la esfera juega un papel importante en el resultado de las aplicaciones de las operaciones Riemannianas canónicas. En efecto, el resultado de las aplicaciones de tales operaciones en cada punto x dependerá de los valores de la función en puntos cercanos a él (ver propiedad de localización, sección 3.2.3). Esta cercanía se



a)



b)



c)

Figura 4.1: Imágenes definidas en la esfera. a) Deformación de una superficie compleja en una esfera; b) imagen omnidireccional; c) vista panorámica de un entorno.

mide mediante la distancia geodésica definida en la esfera. Consideremos dos puntos en una esfera los cuales no son puntos antipodales, la distancia geodésica es la distancia más corta entre estos dos puntos que se mide a lo largo de una curva en la superficie esférica. En la esfera estas curvas son los círculos más grandes cuyo centro es el mismo que el de \mathbb{S}^2 . Así pues, los dos puntos separan a uno de estos círculos más grandes en dos arcos y la longitud más corta de estos dos arcos es la distancia geodésica en la esfera. Sea $\xi_i, \xi_j \in \mathbb{S}^2$, la distancia entre estos dos puntos se puede calcular de la siguiente manera

$$d_{\mathbb{S}^2}(\xi_i, \xi_j) = \arccos(\xi_i \cdot \xi_j) \quad (4.2)$$

donde \cdot representa el producto escalar. Si el radio de la esfera no es uno, simplemente se multiplica por el valor obtenido con la expresión anterior. En el paquete de Matlab, el `arccos` se puede calcular mediante la función `acos`. Las imágenes en escala de grises se encuentran regularmente en un rango de 0 a 255 y los valores de las distancias entre puntos en la esfera \mathbb{S}^2 van de 0 a π , así, puesto que las operaciones de erosión y dilatación Riemannianas canónicas involucran operaciones entre estos valores que se encuentran en escalas diferentes, el programa en el que se implementen estos filtros puede necesitar ciertos ajustes en su manera de operar, no obstante, puede ser más conveniente reescalar los valores de las distancias en la esfera (para evitar trabajar con decimales) a valores que se encuentre en el rango de la escala de grises. Por lo tanto, puede considerarse que el dominio de definición de la imagen es una esfera centrada en el origen de radio $r = \frac{255}{\pi}$.

4.4. Erosiones, dilataciones, aberturas y cerraduras en la esfera

En esta sección se ejemplifica el resultado de aplicar las operaciones de erosión, dilatación, abertura y cerradura de imágenes desplegadas en la esfera. También se presentan dos pseudo-algoritmos que pueden servir como base para la implementación de estas operaciones.

Un código de computadora para la erosión Riemanniana canónica se puede basar en el siguiente pseudo-algoritmo.

Entrada

- 1 Un conjunto de coordenadas $S = \{(x, y, z)\}$ que representan a la esfera \mathbb{S}^2 con sus respectivos valores de intensidad $\{f(x, y, z)\}$.
- 2 El valor de λ .

Establezca $d = 0$ y $p = 0$.

Para cada $X \in S$

Para cada $Y \in S$

$$d = \arccos(X \cdot Y);$$

$$s = f(Y) + d;$$

$$p = \min\{p, s\}$$

finalice

$$\epsilon_\lambda f(X) = p$$

finalice

Salida $\{\epsilon_\lambda f(X)\}$.

El algoritmo anterior es muy lento debido a la cantidad de operaciones que hay que realizar. Otro algoritmo basado en operaciones con matrices puede mejorar el tiempo de ejecución del código anterior. A continuación se presenta un pseudo-algoritmo para la dilatación Riemanniana canónica usando esta última idea.

Entrada

- 1 Cuatro matrices X, Y, Z y F que contienen las coordenadas x, y, z , de los puntos del conjunto $S = \{(x, y, z)\}$ que representa a \mathbb{S}^2 y el valor de intensidad $f(x, y, z)$, respectivamente.
- 2 El valor del parámetro λ .

Establezca $D = 0$ y $P = 0$, donde D y P representan la matriz 0;

Para cada $(x, y, z) \in S$, donde $x \in X, y \in Y$ y $z \in Z$

$$D = \arccos(x \cdot X, y \cdot Y, z \cdot Z)$$

$$P = F - D$$

$$\epsilon_\lambda f(x, y, z) = \max(P)$$

finalice

Salida La matriz $\epsilon_\lambda F$.

Aquí \cdot representa el producto entre un escalar y una matriz. La manera más sencilla de implementar los algoritmos para la abertura (ó cerradura) Riemanniana canónica es usar los algoritmos anteriores, y aplicarlos como una composición de funciones. En la figura 4.2 se ejemplifican las operaciones de erosión y dilatación Riemannianas canónicas de una imagen (función) en escala de grises definida sobre la esfera. El resultado de aplicar la erosión Riemanniana canónica, es una imagen más “obscura” que la original

en la que sobresalen la forma de las vecindades en la esfera alrededor de los puntos con los niveles más bajos en la escala de grises. En el caso de la erosión Riemanniana canónica, las vecindades se forman alrededor de los puntos más altos de la escala de grises y la imagen resultante es más “clara” que la original. En ambos casos estas operaciones resaltan los objetos que tienen forma “circular” (estos objetos se definen por los niveles de gris). En la figura 4.3 se realizan las operaciones de apertura y cerradura usando los algoritmos anteriores y diferentes valores para el parámetro λ .

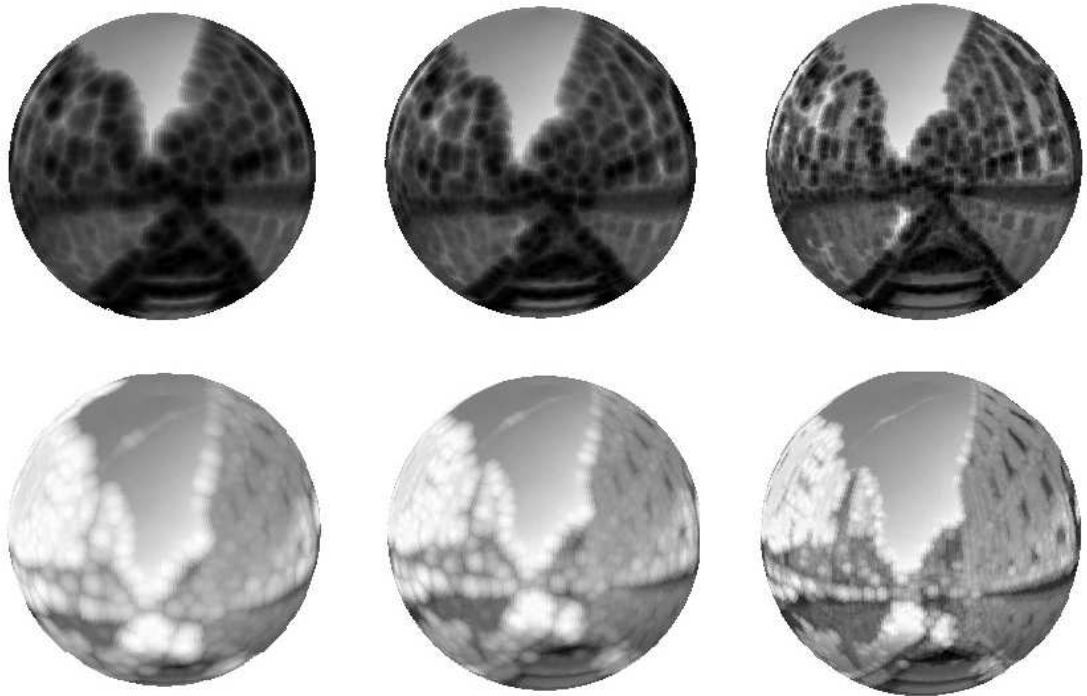


Figura 4.2: Erosiones y dilataciones Riemannianas canónicas en la esfera. Por columna, de izq. a der.: 1er. columna, 2da columna y 3ra. columna, erosión y dilatación Riemannianas canónicas con $\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.3$ y $\lambda = 0.1$, respectivamente.

4.5. Regularización en la esfera: datos del espesor cortical

En las imágenes del cerebro los datos de la corteza cerebral, tal como los datos del espesor cortical, curvaturas de la superficie cortical y las coordenadas de la superficie,

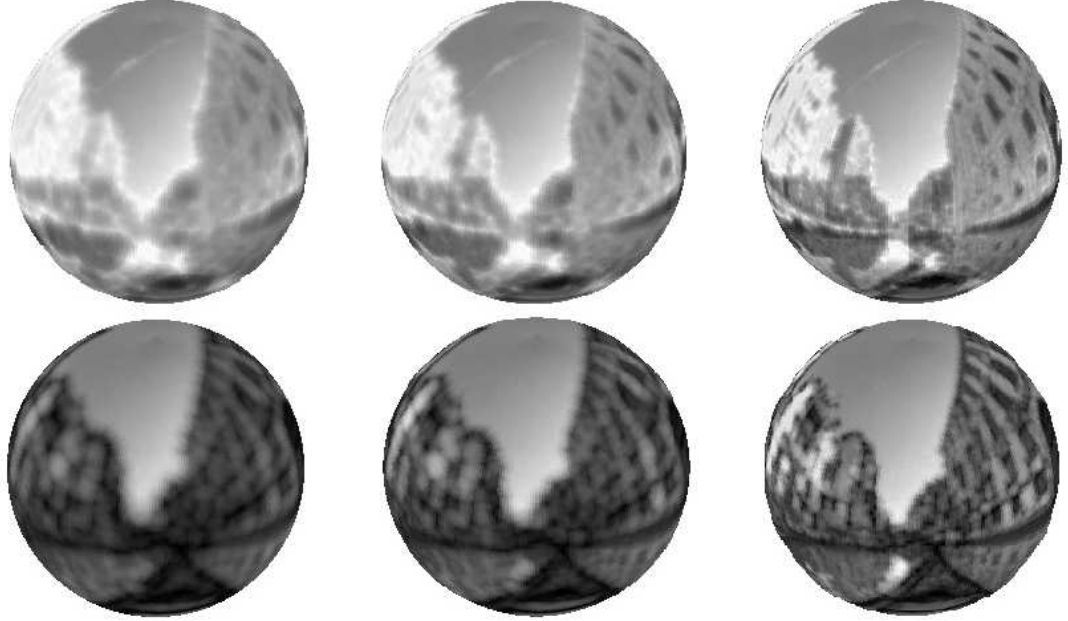


Figura 4.3: Aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas en la esfera. Por columna, de izq. a der.: 1er. columna, 2da columna y 3ra. columna, aberturas y cerraduras Riemannianas canónicas con $\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.3$ y $\lambda = 0.3$, respectivamente.

se asignan a una esfera unidad para fines de visualización, el registro de la superficie y el análisis estadístico. Puesto que la esfera es una superficie simple y ampliamente estudiada, los datos corticales pueden ser cuantificados con respecto a las características de la superficie esférica. En esta sección se presenta un marco matemático de regularización no lineal usando los operadores morfológicos canónicos definidos en la esfera. Como ilustración se presenta un caso de aplicación a datos del espesor cortical.

Para la validación de la regularización usando las operaciones Riemannianas canónicas al caso particular de la esfera verifiquemos las hipótesis de las proposiciones 3.5 y 3.6. En el estado del arte de variedades Riemannianas es bien sabido que el radio de inyectividad de una esfera unitaria es $i(\mathbb{S}^2) = \pi$, el radio de convexidad es $c(\mathbb{S}^2) = \frac{\pi}{2}$ y su curvatura es $K(\mathbb{S}^2) = 1$. Sea f una imagen con soporte $D_f \subseteq \mathbb{S}^2$ tal que $a \leq f(x) \leq b$ para cada $x \in D_f$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Sean $c = 2|a|$ y $d = 2|b|$, entonces tenemos que

$$-\frac{c}{2}(1 + d(x, x_0)^2) = -\frac{c}{2} - \frac{c}{2}d(x, x_0)^2 \leq -\frac{c}{2} = -|a| \leq a \leq f(x) \text{ y} \quad (4.3)$$

y

$$f(x) \leq b \leq |b| + |b|d(x, x_0)^2 = |b|(1 + d(x, x_0)^2) = \frac{d}{2}(1 + d(x, x_0)^2) \quad (4.4)$$

Por tanto $f(x)$ es minimizada y mayorizada cuadráticamente. Así, existe un $\lambda_0 > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $f \in C^{1,1}(\mathbb{S}^2)$ y $\text{Lip}\nabla f \leq 12(\frac{q}{2\mu})$. Podemos resumir lo anterior en la siguiente proposición.

Proposición 4.1 Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a \leq f(x) \leq b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces existe un λ_0 tal que si $\lambda \in (0, \lambda_0]$ y $\mu \in (0, \frac{\lambda}{2q}]$, entonces $(f_\lambda)^\mu \in C^{1,1}(\mathbb{S}^2)$ y $\text{Lip}(\nabla f) \leq 12(\frac{q}{2\mu})$.

De acuerdo a la propiedad de dualidad entre la erosión y dilatación y puesto que $(f^c)^c = f$, tenemos la siguiente secuencia de igualdades

$$\begin{aligned} \delta_\mu \epsilon_\lambda f(x) &= \delta_\mu (\delta_\lambda^c f^c) \\ &= \epsilon_\mu^c ((\delta_\lambda^c)^c f^c) \\ &= \epsilon_\mu^c \delta_\lambda f^c. \end{aligned}$$

De manera similar tenemos que $\epsilon_\mu \delta_\lambda f(x) = \delta_\mu^c \epsilon_\lambda f^c$. Por lo tanto, el resultado de la propocisión 4.1 también se cumple para el operador $(f^\lambda)_\mu = \epsilon_\mu \delta_\lambda f(x)$.

Debido a la naturaleza altamente complicada de la corteza cerebral humana, algún tipo de normalización sobre una superficie más simple es necesaria para la cuantificación de los datos corticales. Una de tales técnicas de normalización es el aplanamiento cortical que mapea la superficie cortical complicada a una esfera con el mínimo de distorsión geométrica. Alternativamente, se puede aplanar la corteza mediante el proceso inverso de un algoritmo de superficie deformable, que deforma la esfera para que coincida con la corteza. Una vez que los datos corticales son mapeados a la esfera se procede a su análisis. Los datos corticales han sido regularizados mediante la solución de la ecuación de difusión mediante un núcleo de calor iterativo o basado en armónicos esféricos, ver [11]. No obstante, los enfoques de suavizado mediante difusión requieren de un esquema de elementos finitos que computacionalmente no es algo trivial. Por otra parte, los enfoques basados en un kernel de calor iterativos son bastante lentos mientras que los basados en armónicos esféricos no tienen una expresión completamente explícita y son aproximados numéricamente. En este trabajo presentamos un marco teórico de suavizado no lineal para datos del espesor cortical basado en operaciones morfológicas definidas sobre la esfera, cuya expresiones son explícitas y sencillas y el suavizado esta validado por los resultados 3.4, 3.5 y 3.6.

El espesor cortical se puede utilizar como un índice anatómico para cuantificar las diferencias corticales locales. Éste es medido usando la frontera interior y exterior de la materia gris. Los datos del espesor cortical mapeados a la esfera pueden ser modelados mediante una función real acotada mediante una función cuyo soporte un conjunto en la esfera \mathbb{S}^2 , esto es, $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. De esta manera podemos modelar los datos del

espesor cortical como una imagen desplegada sobre \mathbb{S}^2 y aplicar los resultados 3.4, 3.5 y 3.6, para la obtención de una versión regularizada de los datos del espesor cortical. Nuestro objetivo no es hacer un estudio profundo de este tipo de datos, así pues, para fines ilustrativos se utiliza una textura sintética similar la textura que generan este tipo de datos, para ejemplificar la regularización de los filtros propuestos. Para tales fines usaremos una imagen de tamaño 90×180 , desplegada sobre una sección de una esfera de radio $r = \frac{255}{\pi}$. Tal esfera es realizada como una malla de 300×300 puntos (ver figura 4.4), a los puntos no cubiertos con la imagen se les asigna el valor de 255 para obtener una imagen cuyo dominio sea toda la esfera \mathbb{S}^2 .

En las figura 4.5 y 4.6 se presentan las regularizaciones de una textura usando los filtros $\delta_\mu \epsilon_\lambda f$ y $\epsilon_\mu \delta_\lambda f$, respectivamente, con $\lambda = 0.5$, $\mu = 0.125$ y $q = 2$, donde puede observarse el efecto suavizante de tales filtros.

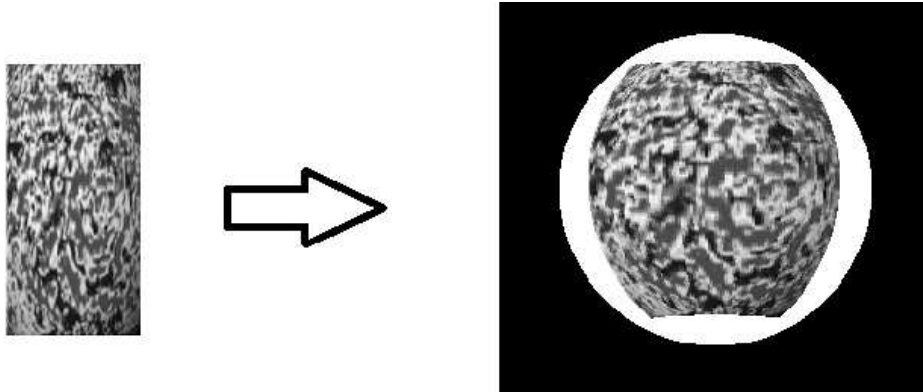


Figura 4.4: Despliegue de una textura sobre una sección de la esfera.

4.6. Gradientes Morfológicos

En morfología matemática plana los gradientes morfológicos se definen como la diferencia entre las operaciones de dilatación y erosión y la función f . El resultado es una imagen en la que cada punto indica la intensidad de contraste en una vecindad alrededor de ese punto. El gradiente es usado para aplicaciones como la detección de bordes y segmentación. En seguida se definen tres gradientes morfológicos en la esfera \mathbb{S}^2 .

Definición 4.1 Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \bar{R}$, una imagen en escala de grises cuyo dominio es la

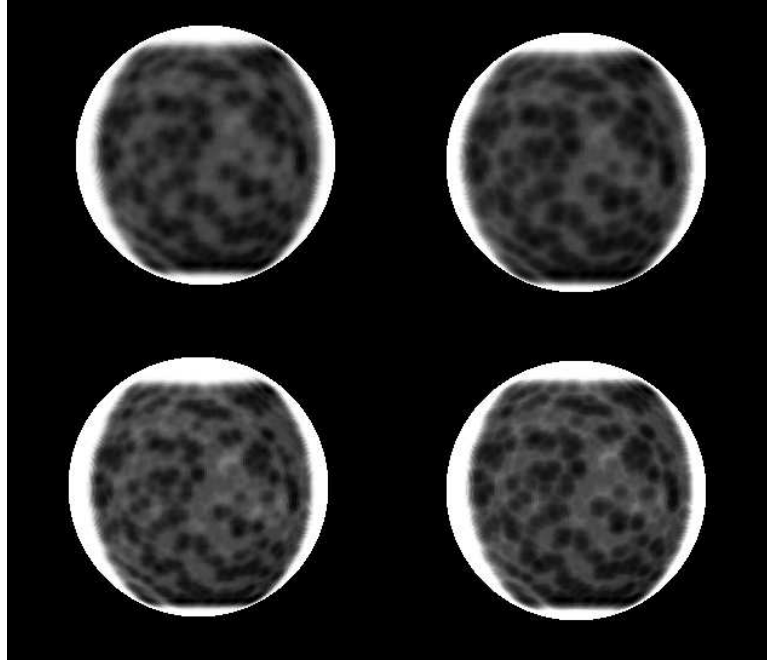


Figura 4.5: Regularización de una imagen desplegada sobre una esfera usando el filtro $(f_\lambda)^\mu$, 1era fila, $\lambda = 1$, de izq. a der., $\mu = 0.4$ y $\mu = 0.3$. 2da fila, $\lambda = 0.5$, de izq. a der., $\mu = 0.2$ y $\mu = 0.1$.

esfera \mathbb{S}^2 y $r > 0$,

1. el *gradiente morfológico central* de f está dado por: $G(f) = \delta_{B_r}(f)(x) - \epsilon_{B_r}(f)(x)$,
2. el *gradiente morfológico interno* de f está dado por: $G_i(f) = f - \epsilon_{B_r}(f)(x)$,
3. el *gradiente morfológico externo* de f está dado por: $G_e(f) = \delta_{B_r}(f)(x) - f$.

Las operaciones anteriores están bien definidas debido a las propiedades de orden de las operaciones morfológicas isotrópicas planas. En figura 4.7 se ejemplifican los tres gradientes morfológicos aplicados a una imagen de un entorno usando una bola geodésica de radio 0.01.

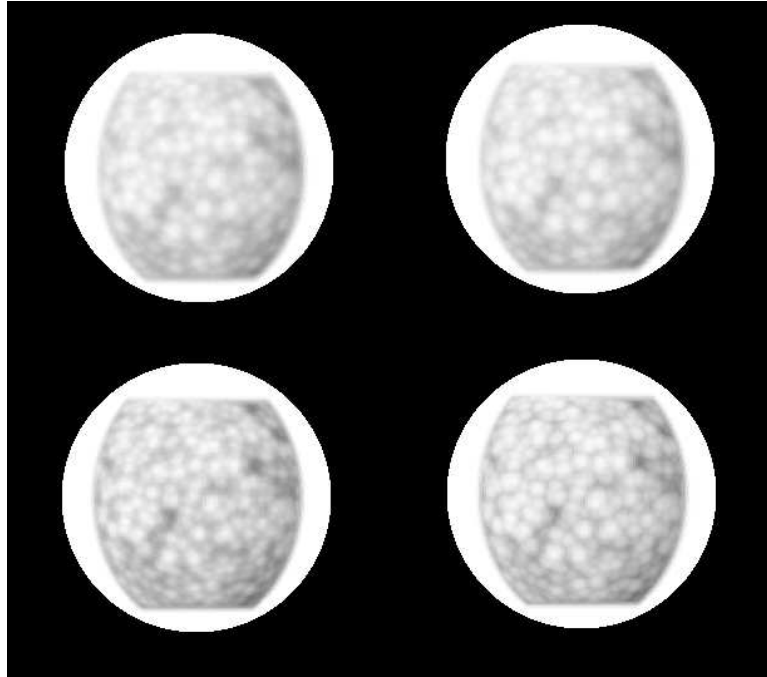


Figura 4.6: Regularización de una imagen desplegada sobre una esfera usando el filtro $(f^\lambda)_\mu$, 1era fila, $\lambda = 1$, de izq. a der., $\mu = 0.4$ y $\mu = 0.3$. 2da fila, $\lambda = 0.5$, de izq. a der., $\mu = 0.2$ y $\mu = 0.1$.

4.7. Transformación Sombrero de Copa

Otras operaciones importantes dentro de morfología matemática plana son las operaciones sombrero de copa (top-hat), que consisten en calcular la diferencia entre la función f y su abertura o cerradura. Estas transformadas buscan resaltar los "detalles" de la imagen, manteniendo en segundo plano las regiones más uniformes de ésta. A continuación se da una definición de estas operaciones para el caso de funciones definidas en la esfera \mathbb{S}^2 en las que se considera la geometría de \mathbb{S}^2 .

Definición 4.2 Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \bar{R}$, una imagen en escala de grises cuyo dominio es la esfera \mathbb{S}^2 y $r > 0$ la operación *top-hat por abertura* se define como la diferencia entre la

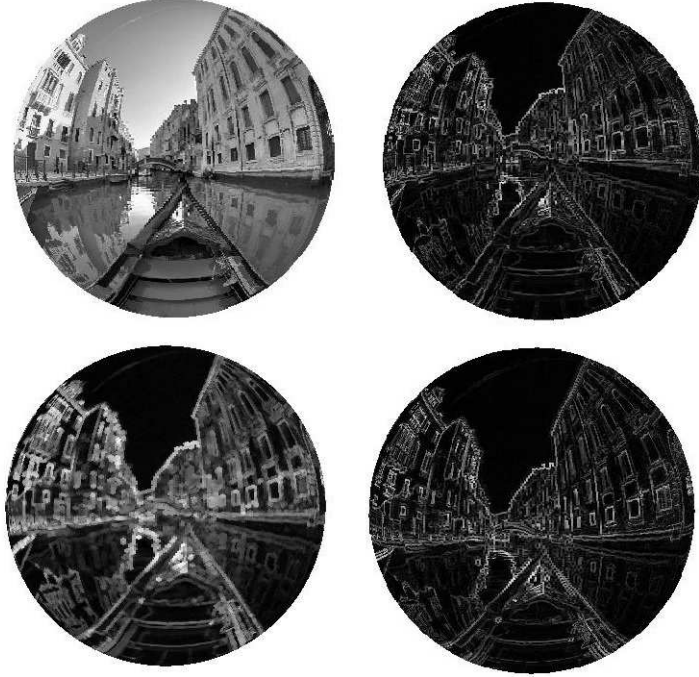


Figura 4.7: Gradientes: 1ra fila, imagen original y gradiente morfológico interno; 2da fila, gradientes morfológicos central y externo. Donde $r=0.01$.

función f y su abertura con una bola geodésica de radio r , esto es,

$$\rho_{B_r}(x) = f(x) - \gamma_{B_r}f(x), \quad (4.5)$$

mientras que la operación *top-hat por cerradura* se define como la diferencia entre la función f y su abertura con una bola geodésica de radio r , esto es,

$$\rho_{B_r}(x) = \varphi_{B_r}f(x) - f(x). \quad (4.6)$$

La operación top-hat por abertura es también llamada top-hat blanco debido a que destaca los objetos claros que han sido eliminados en la abertura. Por razones similares, la operación top-hat por cerradura es llamada top-hat negro. Estas dos operaciones tienen la propiedad de idempotencia. En la figura 4.8 se ilustran el top-hat por abertura y cerradura usando la imagen de un entorno y una bola geodésica de radio 0.015.

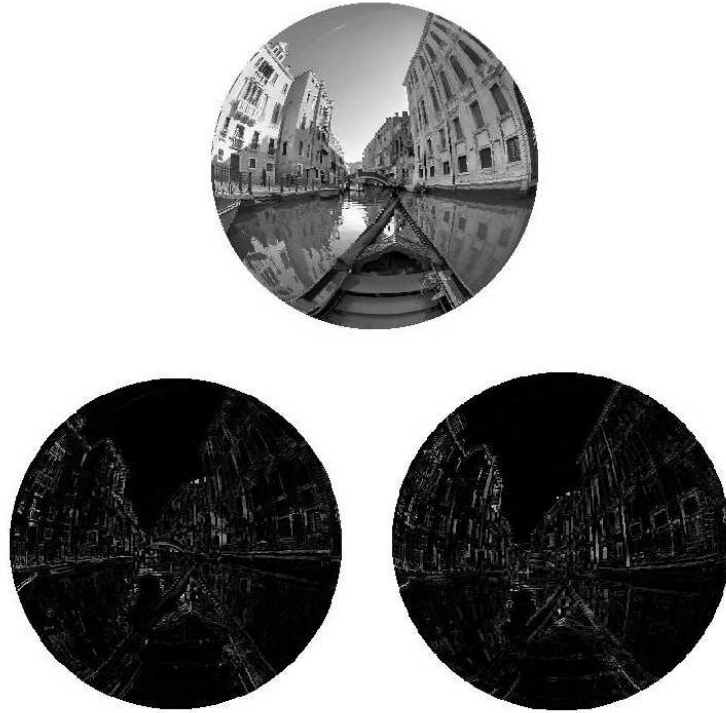


Figura 4.8: Top-hat: 1ra fila, imagen original; 2da fila, top hat por abertura y por cerradura. Donde $r=0.015$.

Los efectos de las operaciones morfológicas isotrópicas planas son más intuitivos que los efectos de las operaciones morfológicas canónicas. Es por esto que pueden ser usadas para aplicaciones de mayor dificultad geométrica.

Conclusiones

La morfología matemática, que en sus inicios se desarrolló para resolver problemas de procesamiento de imágenes en el espacio Euclidiano, resulta ser una herramienta útil en el procesamiento de funciones o imágenes cuyo soporte es una superficie o de manera más general una variedad Riemanniana. En esta tesis se presentó la teoría básica de la morfología matemática generalizada a variedades Riemannianas así como su correspondiente aplicación a funciones o imágenes definidas en una, dos y tres dimensiones, en particular el caso de imágenes definidas en una esfera. Esta exposición incluye el desarrollo detallado de la mayoría de las demostraciones relativas a las propiedades básicas de sus operaciones elementales, así como la exposición de teoremas relativos a la regularización de funciones definidas en variedades Riemannianas.

La morfología matemática Riemanniana se presenta como una teoría alternativa al procesamiento lineal de imágenes definidas en una variedad Riemanniana, particularmente en la esfera, donde los cálculos se hacen directamente en la variedad donde está definida la imagen sin cambiar al plano. Así pues, no se tendría la dificultad de mapear la imagen al plano y consecuentemente las deformaciones originadas por este mapeo se evitarán.

Por otra parte, las propiedades de los operadores Riemannianos son bastante útiles tanto para la reducción de costo computacional como para la obtención de resultados importantes como los resultados sobre regularización. Además la existencia de algoritmos rápidos junto con la propiedad de localización, para el cómputo de los operadores morfológicos Riemannianos, hace de esos filtros una herramienta práctica para una amplia gama de aplicaciones en procesamiento de imágenes.

Los operadores morfológicos canónicos tienen como principales propiedades la regularización de funciones, mientras que las operaciones morfológicas isotrópicas planas conducen a resultados de filtrado más fuertes.

Contribuciones de la tesis

- Se realizan las demostraciones de la mayoría de las propiedades de las operaciones

morfológicas que no se han realizado anteriormente.

- Se aplica teoría de regularización en variedades Riemannianas de curvatura no negativa al caso particular de imágenes cuyo soporte es la esfera y se propone este enfoque no lineal para la regularización de datos de la corteza cerebral.
- Se ilustran y explican los efectos de los operadores morfológicos Riemannianos en una y dos dimensiones.
- Se propone los filtros morfológicos Riemannianos para el análisis de imágenes omnidireccionales considerando la curvatura de la esfera donde las imágenes se definen.

Trabajo futuro

En este trabajo realizamos la regularización de los datos de la corteza cerebral con respecto a la curvatura de la esfera, no obstante, estos datos están definidos sobre la superficie más compleja del cerebro, así pues, plantemos trabajar los resultados de regularización directamente sobre ésta superficie. Además se deberían estudiar la extensión de otros filtros morfológicos más complejos, como Watershed o esqueletizaciones, definidos ahora para variedades Riemannianas. Por otra parte, también se debería considerar la teoría de las variedades Riemannianas como una base para la generalización de la morfología matemática adaptada.

Bibliografía

- [1] Alvarez, L., Guichard, F., Lions, P.L. , Morel J. M., “Axioms and fundamental equations of image processing”, Arch. Ration. Mech. Anal. 123, pp.199-257, 1993.
- [2] Angulo J., Velasco-Forero S., “Mathematical morphology for real-valued images on Riemannian manifolds,” *Proceedings of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology*, Uppsala, Sweden, pp. 279-291, 2013.
- [3] Angulo J., Velasco-Forero S., “Riemannian Mathematical Morphology,” 2013, <hal-00877144v1>, <https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-00877144v1>.
- [4] Angulo J., “Lipschitz Regularization of Images supported on Surfaces using Riemannian Morphological Operators,” 2014, <hal-01108130>, <https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-01108130>.
- [5] Angulo, J., Velasco-Forero, S., “Stochastic morphological filtering and Bellman-Maslov chains”, International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing, pp. 171-182. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [6] Aubert, G., Kornprobst, P., *Mathematical Problems in Image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Applied Mathematical Sciences, 2nd ed, Vol. 147., Springer, 2006.
- [7] Azagra D., Ferrera J., “Inf-Convolution and Regularization of Convex Functions on Riemannian Manifolds of Nonpositive Curvature,” Rev. Mat. Complut. 19(2), pp. 323–345, 2006.
- [8] Azagra D., Ferrera J., “Regularization by sup-inf convolutions on Riemannian manifolds: An extension of Lasry-Lions theorem to manifolds of bounded curvature,” Journal of mathematical analysis and applications, 423(2), pp. 994-1024, 2014.
- [9] Brockett, R.W., Maragos, P., Evolution equations for continuous-scale morphological filtering, IEEE Trans. Signal Process. 42, pp. 3377-3386, 1994.

- [10] Bülow, T., “Multiscale image processing on the sphere,” Joint Pattern Recognition Symposium, pp. 609-617, Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [11] Chung, M. K., “Heat kernel smoothing on unit sphere,” *3rd IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: Nano to Macro*, pp. 992-995, 2006.
- [12] Cousty, J., Najman, L., Dias, F., Serra, J., Morphological filtering on graphs, *Comput. Vision Image Understand*, pp. 1-20, 2012.
- [13] Čurić, Vladimir, et al., Adaptive mathematical morphology? a survey of the field, *Pattern Recognition Letters* 47, pp. 18-28, 2014.
- [14] Čurić, V., Hendriks, C. L. L., “Salience-based parabolic structuring functions”, *International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, pp. 183-194, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [15] Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing, 3rd Ed.*, Pearson & Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2008.
- [16] Urcid S. G., Mares J. M., “MorfologĀa matemĀjtica y procesamiento de imĀjgenes,” *Aportaciones MatemĀjticas: Comunicaciones, Memorias de la Sociedad MatemĀjtica Mexicana, Instituto de MatemĀjticas, UNAM, Vol.49*, pp.41-77, 2015.
- [17] Hiriart-Urruty, J. B., LemarĀchal, C. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [18] Heijmans H.J.A.M., and Ronse C., “The Algebraic Basis of Mathematical Morphology. I. Dilations and Erosions,” *Comput. Vision Graphics Image Process.*, Vol. 50, pp. 245–295, 1990.
- [19] Heijmans, H., Nacken, P., Toet A., Vincent, L., Graph morphology, *J. Visual Commun. Image Representation* 3, pp. 24-38, 1992.
- [20] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, J. Willey, New York, 1975.
- [21] Jackway, P.T., Deriche, M., “Scale-Space Properties of the Multiscale Morphological Dilation-Erosion,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 18, No. 1, 1996.
- [22] Lasry J.-M., Lions P.-L., “A remark on regularization in Hilbert spaces,” *Israel J. Math.* 55 (1986), no. 3, pp. 257-266.
- [23] Lee, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds, 2nd Ed.*, Springer-Verlag, New York, 2013.

- [24] Lee, J.M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.*, Springer, New York, 1997.
- [25] Maragos P. “Tutorial on advances in morphological image processing and analysis,” *Optical Engineering*, Vol. 26, No. 7, pp. 623-632, 1987.
- [26] Mares J. M., *Morfología Matemática: Un Enfoque al Procesamiento Digital de Imágenes*, (tesis de licenciatura), Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemerita universidad Autónoma de Puebla, 2014.
- [27] Mares J. M., Guillón G. C., Lemuz L. R., “Impulsive Noise Removal by Adaptive Mathematical Morphology,” *Research in Computing Science*, No. 112, pp. 65-76, 2016.
- [28] Moreau J., “Fonctionnelles convexes,” Lecture notes, College de France, Paris, 1967.
- [29] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, J. Willey, New York, 1975.
- [30] Sharon, Eitan, Mumford, D., “2d-shape analysis using conformal mapping.” *International Journal of Computer Vision* 70, No. 1, pp. 55-75, 2006.
- [31] Najman, L., Talbot, H. (Eds.), *Mathematical Morphology*, John Wiley & Sons, 2013.
- [32] van den Boomgaard R., Dorst. L., “The morphological equivalent of Gaussian scale-space,” *Gaussian Scale-Space Theory*, J. Sporring, M. Nielsen, y L. Florack and P. Johansen (eds), Series: *Computational Imaging and Vision*, Kluwer Academic Publishers, pp. 203-220, mayo, 1997.
- [33] Roerdink, J. B., “Mathematical morphology on the sphere,” *Lausanne-DL tentative*, International Society for Optics and Photonics, pp. 263-271, septiembre, 1990.
- [34] Roerdink, J. B., “Manifold shape: from differential geometry to mathematical morphology,” *Shape in Picture*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 209-223, 1994.
- [35] Ronse, C., Heijmans, H.J.A.M., The algebraic basis of mathematical morphology. II Openings and closings, *Comput. Vision Graphics Image Process.* 55, pp. 74-97, 1991.
- [36] Serra J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, London, United Kingdom, 1982.

- [37] Serra J. “An introduction to mathematical morphology” en Special Section on Mathematical Morphology, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 35, pp. 283-305, 1986.
- [38] Serra J. “The Centre de Morphologie Mathématique: An Overview” en *Mathematical Morphology and Its Applications to Image Processing*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, pp. 369–374, 1994.
- [39] Soille P. *Morphological Image Analysis: Principles and Applications, 2nd Ed.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2003.
- [40] Spira A., Kimmel R., Sochen N., “A short-time Beltrami kernel for smoothing images and manifolds,” *IEEE Trans. on Image Processing*, 16(6), pp. 1628–1636, 2007.
- [41] Verbeek, P. and Verwer, B. J. H., “2D adaptive smoothing by 3D distance transforms,” *Pattern Recognition Letters*, pp. 53-65, 1989.
- [42] Vincent, L., Graphs and mathematical morphology, *Signal Process.* 16, pp. 365-388, 1989.
- [43] Wolfgang Kühnel, *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, 2da. ed., 2002.