BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CONSTRUCCIÓN DE POLINOMIOS DE LA MEJOR APROXIMACIÓN UNILATERAL Y TEMAS AFINES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
M. C. REINALDO MARTÍNEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE BUSTAMANTE GONZÁLEZ

PUEBLA, PUEBLA, MÉXICO JUNIO 2014

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CONSTRUCCIÓN DE POLINOMIOS DE LA MEJOR APROXIMACIÓN UNILATERAL Y TEMAS AFINES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
M. C. REINALDO MARTÍNEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE BUSTAMANTE GONZÁLEZ

PUEBLA, PUEBLA, MÉXICO JUNIO 2014

DR. JOSÉ ENRIQUE BARRADAS GUEVARA
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

REINALDO MARTÍNEZ CRUZ

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 5 de junio de 2014, con la tesis titulada:

"CONSTRUCCIÓN DE POLINOMIOS DE LA MEJOR APROXIMACIÓN UNILATERAL Y TEMAS AFINES"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 1 de julio de 2014.

DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.

DR. JEBG/mtrv

Dedicatoria

A mi Esposa

Elisabec Villalva Villalva

A mis Hijos

Yamín, Jesús y Guadalupe

Agradecimientos

Todo estudiante que haya realizado estudios de posgrado en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, debe sentirse afortunado de poder encontrar en ella a todo un grupo de profesores que, comparten sus enseñanzas y se convierten en personas imprescindibles. Culpables de fomentar y alimentar espiritualmente a todo aquel que incursione en el maravilloso mundo de las Matemáticas. A todos y cada uno de ellos mis muestras de agradecimientos por tan meritoria labor.

Agradezco de manera especial al Doctor Jorge Bustamante González, profesor y amigo, quien ha sabido desempeñar ambas actividades de la mejor manera. Como asesor de tesis, fue el pilar principal en el desarrollo de este trabajo. Por todo lo acontecido en mi desarrollo académico y por estar siempre dispuesto a colaborar de la mejor manera, gracias Profesor.

Asimismo, dirijo mis muestras de agradecimiento a los Doctores: Miguel Antonio Jiménez Pozo, Slavisa Djordjevic, Arnoldo Bezanilla López, Ivonne Lilian Martínez Cortés, José Margarito Hernández Morales, Daniel Cárdenas Morales y Juan Alberto Escamilla Reyna, quienes se dieron a la tarea de revisar y hacer las observaciones y comentarios, siempre acertados, al presente trabajo. Aprovecho también para agradecer al Doctor José María Quesada por su colaboración en los artículos publicados.

Es momento de dirigirme a mis compañeros que con su apoyo permitieron que el trabajo fuese más ameno: Verónica Borja, Miguel Pérez, Juan Pablo Muñoz, Iván Martínez, Marcos Ramírez, Rubén Vélez, Javier Casas, Sergio García, Alejandro Pérez, Juan Manuel, Alejandro Ramírez, Luis Ángel Gutiérrez y a mi gran amigo José Arrazola por brindarme ese espacio llamado Laboratorio de Lógica Matemática.

Deseo también agradecer y dedicar el presente trabajo a mi familia, que con su apoyo, confianza y cariño, me han permitido llegar hasta este momento.

Finalmente, agradezco al PROMEP por el apoyo económico brindado, sin éste aliciente el trabajo no hubiese sido posible.

Reinaldo Martínez Cruz

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

Puebla, Puebla, MÉXICO

4 de Julio 2014

Introducción

La Teoría de la Aproximación tiene una larga historia, aunque aparece como una rama independiente de la matemática en los inicios del siglo pasado.

En los últimos años, varios trabajos han sido dedicados al estudio de la aproximación polinomial con restricciones. Para no abrumar con citas remitimos a los trabajos [17] y [21] en los cuales se incluye una larga lista de referencias. En particular en [16], [25], [26], [27] y [33] se considera la aproximación unilateral.

La aproximación unilateral en la métrica de L_1 fue estudiada por Markov 1884. Él observó que algunos problemas relacionados con la mejor aproximación unilateral están vinculados con la teoría de las fórmulas de cuadratura (ver [24] p. 15). En un trabajo de Weyl en 1916 también se consideraron problemas de aproximación unilateral (ver [34] p. 565).

Se conoce que, para cualquier función f, Riemann integrable en $[a, b]$ y cada $\varepsilon > 0$, existen polinomios p y P tales que, para cada $t \in [a, b]$,

$$p(t) \leq f(t) \leq P(t) \quad \text{y} \quad \int_a^b (P(t) - p(t))dt < \varepsilon.$$

Un caso especial de este resultado corresponde a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{e}], \\ \\ 1/x, & x \in (\frac{1}{e}, 1]. \end{cases} \tag{1}$$

Esta función jugó un papel importante en la demostración de Karamata del teorema tauberiano de Hardy y Littlewood (ver [24]). Freud en [12] obtuvo una mejora al método de Karamata, basada en un estimado más preciso de las aproximaciones unilaterales para la misma función (1). Resultados más generales fueron presentados luego por Ganelius [13]. Este último trabajo marca el inicio de la teoría de la aproximación unilateral.

Aunque se han estudiado varios temas relacionados con la mejor aproximación unilateral, la teoría no está tan desarrollada como es el caso de la aproximación polinomial clásica. Nótese que en [23] se le dedican sólo algunos comentarios entre las páginas 76 y 81. En la monografía [18] se estudian varios detalles de la teoría, pero se presentan fundamentalmente los resultados de los autores. Además el texto tiene el inconveniente de estar en idioma ruso. Finalmente en [29] se estudian problemas relacionados con la existencia y la caracterización de los elementos de la mejor aproximación, pero el estudio se limita a los espacios L_1. Por estos motivos, en esta tesis se consideran problemas concretos relacionados con la construcción de polinomios que permitan obtener buenas aproximaciones unilaterales para funciones acotadas inferior y/o superiormente.

Durante todo el trabajo utilizaremos las notaciones siguientes. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, denotaremos por $\mathbb{P}_n$ a la familia de polinomios algebraicos de grado no mayor que n y por $\mathbb{T}_n$ a la colección de polinomios trigonométricos de grado a lo más n.

Como es usual, dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L_p[0,1]$ al espacio de Lebesgue con la norma usual

$$\|f\|_{p,[0,1]} = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Denotaremos por $AC[0,1]$ a la familia de las funciones absolutamente continuas en $[0,1]$.

Para $1 \leq p < \infty$ y $r \in \mathbb{N}$, denotamos por

$$W_p^r[0,1] = \left\{ f : f^{(r-1)} \in AC[0,1] \text{ y } f^{(r)} \in L_p[0,1] \right\},$$

donde $f^{(k)}$ denota la k-ésima derivada de la función f.

Como se verá en la Proposición 1.10, si $r \in \mathbb{N}$ y $f \in W_p^r[0,1]$, entonces f está acotada.

Formalmente, la mejor aproximación unilateral se define en los términos siguientes. Si $f \in L_p[-1,1]$ está acotada inferiormente (superiormente), se define la mejor aproximación unilateral por abajo (o por arriba) para f de grado n como

$$E_n^-(f)_p = \inf\{||f - Q||_{p,[-1,1]} : Q \in \mathbb{P}_n, \quad Q \leq f\}$$

$$(E_n^+(f)_p = \inf\{||f - Q||_{p,[-1,1]} : Q \in \mathbb{P}_n, \quad f \leq Q\})$$

y la familia constituida por los elementos de la mejor aproximación unilateral se denota por $\mathcal{P}_n^-(f)$ y se define como

$$\mathcal{P}_n^-(f) = \{Q \in \mathbb{P}_n : Q \leq f, \quad \| f - Q \|_{p,[-1,1]} = E_n^-(f)_p\}.$$

Los problemas principales que se estudian en este trabajo son los siguientes:

Problema 1: Se quieren encontrar, de forma explícita, aproximantes unilaterales para las funciones de los espacios $W_p^r[0,1]$. Por ello se desean construir dos sucesiones de operadores

$$\lambda_n, \Lambda_n : W_p^r[0,1] \to \mathbb{P}_n$$

tales que, para cada $f \in W_p^r[0,1]$,

(i)

$$\lambda_n(f,x) \leq f(x) \leq \Lambda_n(f,x), \quad \text{para todo } x \in [0,1],$$

y

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n(f) - \lambda_n(f)\|_{p,[0,1]} = 0.$$

Problema 2: Encontrar buenos estimados para el error

$$||\Lambda_n(f) - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]}.$$

Problema 3: Consideremos la función de Heaviside

$$G_\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -1 \leq x \leq \theta, \\ \\ 1, & \text{si} \quad \theta < x \leq 1. \end{cases}$$

Los polinomios que dan la mejor aproximación unilateral para la función de Heaviside G_θ en la métrica de $L_1[-1,1]$ tienen algunas aplicaciones. En particular, como se verá más adelante, estos polinomios se pueden utilizar para construir soluciones al Problema 1. Las propiedades asintóticas de $E_n^-(G_\theta)$ se estudiaron en [25].

En este trabajo queremos obtener representaciones explícitas para los polinomios de la mejor aproximación unilateral de las funciones $G_\theta(x)$. Para el análisis de este problema utilizaremos métodos similares a los presentados en [3] y [10] además de algunos resultados de Pinkus en [29]. Como Pinkus mostró, los mejores aproximantes unilaterales en la métrica de $L_1[-1,1]$ están relacionados con ciertas fórmulas optimales de cuadratura. Esto nos lleva a otro problema.

Problema 4: Para un número $\theta \in (-1,1)$ dado, ¿bajo qué condiciones existe una fórmula de cuadratura positiva con grado máximo de precisión tal que la abscisa prefijada θ esté entre los nodos de la fórmula?

Resaltamos que los problemas dados anteriormente son complicados. En particular, muchas de las técnicas constructivas tradicionales en la teoría de la aproximación clásica no funcionan, ya que los operadores que resuelven el Problema 1 no pueden ser lineales (ver Proposición 1.11).

Fijemos dos sucesiones de polinomios $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ con $P_n, Q_n \in \mathbb{P}_n$ tales que

$$P_n(t) \leq G_\theta(t) \leq Q_n(t), \ t \in [-1,1]$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n - P_n\|_{1,[-1,1]} = 0.$$

La hipótesis fundamental que motiva los estudios presentados en el último capítulo es la siguiente. A cada pareja de sucesiones $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ como las anteriores se le pueden asociar sucesiones de operadores que resuelvan el Problema 1. Otros autores estudiaron problemas similares. Esto se discutirá en la sección 4.5 del Capítulo 4.

Para presentar nuestros resultados, este trabajo lo hemos dividido en cuatro capítulos como indicamos a continuación.

En el primer capítulo damos algunos preliminares referente a la teoría de aproximación, polinomios ortogonales, funciones absolutamente continuas, polinomios de Jacobi y la mejor aproximación unilateral. Este capítulo no contiene resultados nuevos, sólo recordamos hechos conocidos que se necesitan para comprender los análisis que se presentan en los otros capítulos.

En el segundo capítulo atendemos la cuestión: para una $\theta \in (-1, 1)$ dada, ¿bajo qué condiciones existe una fórmula de cuadratura positiva con grado máximo de precisión tal que la abscisa prefijada θ esté entre los nodos de la fórmula? Como indicamos antes, de los resultados de Pinkus se infiere que debemos ser capaces de construir ciertas fórmulas de cuadratura. En especial, las fórmulas deben contener al punto θ como uno de sus nodos. Para la solución de este problema necesitamos algunos estudios recientes de la teoría de fórmulas de cuadratura y de la teoría de los polinomios cuasi-ortogonales (ver [4], [5] y [11]). Esto explica la inclusión de los polinomios de Jacobi en el primer capítulo.

En el tercer capítulo resolvemos el problema de encontrar todos los polinomios que dan la mejor aproximación unilateral de la función de Heaviside $G_\theta(x)$ en la métrica de $L_1[-1, 1]$. Estos, como veremos allá, son obtenidos por el proceso de interpolación de Hermite en los ceros de algunos polinomios cuasi-ortogonales asociados a los polinomios de Jacobi. Además, damos un estimado del error de aproximación y caracterizamos los puntos extremales del conjunto convexo de los mejores aproximantes. La solución es complicada pues apare-

cen cuatro casos a discutir, según los extremos del intervalo $[-1, 1]$ estén o no incluidos en las fórmulas de cuadratura.

En el cuarto capítulo atendemos el Problema 1. Esto es, presentamos nuevos operadores polinomiales para la aproximación unilateral de funciones diferenciables que, a nuestro juicio, son más convenientes para las aplicaciones que otras construcciones conocidas.

Por lo demás, en cada capítulo, damos las definiciones necesarias y antes de cada uno de los teoremas, incluimos los resultados básicos que se requieren. El símbolo $\square$ denota el fin de una demostración. Los resultados que no son nuestros incluyen las referencias correspondientes.

Finalmente mencionamos lo que, a nuestro juicio, son las principales aportaciones de esta tesis:

(a) En el Teorema 2.12 damos condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de una fórmula de cuadratura positiva con un grado de exactitud dado que contiene a un punto $\theta \in (-1, 1)$ entre sus nodos. En los Teoremas 2.14, 2.15, 2.16 y 2.17 indentificamos las fórmulas precisas. Estas dependen de la posición del punto θ en $(-1, 1)$ con respecto a las raíces de algunos polinomios de Jacobi.

(b) En el Teorema 3.5, para cada $\theta \in (-1, 1)$ presentamos una caracterización de los polinomios $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. En particular, damos condiciones que nos serán de utilidad para construir los polinomios de la mejor aproximación unilateral que interpolarán a la función G_θ.

(c) En las Proposiciones 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 analizamos todos los puntos donde los polinomios de la mejor aproximación unilateral interpolan a la función G_θ.

(d) En el Teorema 3.12 mostramos explícitamente los elementos del espacio $\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$.

(e) El Teorema 4.6 (con su Corolario) resuelve uno de los problemas principales de esta tesis. En el Teorema 4.8, damos una construcción para aproximar funciones con derivadas de orden superior. En el exhibimos una sucesión de operadores

$\{V_{n,r}\}$(para la aproximación unilateral) para el cual

$$||f - V_{n,r}||_p \leq \left(\frac{4\pi^2}{n+2}\right)^r ||f^{(r)}||_p.$$

Parte de los resultados presentados en este trabajo han sido publicados en tres artículos:

(i) J. Bustamante, J.M. Quesada y R. Martínez-Cruz, *Best one-side L_1 approximation to the Heaviside and sign functions*, J. Approx. Theory, 164 (2012), 791-812.

(ii) J. Bustamante, J.M. Quesada y R. Martínez-Cruz, *Polynomial operators for one-sided approximation to functions in $W_p^r[0,1]$*, J. Math. Anal. Appl., 393 (2012), 517-525.

(iii) B. Beckermann, J. Bustamante, R. Martínez-Cruz and J.M. Quesada, *Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa*, Calcolo, 51 (2014), 319-328.

Índice general

1. Preliminares **10**
1.1. Teoría de la aproximación 10
1.2. Polinomios ortogonales 12
1.3. Polinomios de Jacobi 16
1.4. Mejor aproximación unilateral 17
1.5. Funciones absolutamente continuas 21

2. Reglas de cuadratura positivas **23**
2.1. Algunos resultados generales 24
2.2. Cuadraturas con un nodo fijo 53

3. Aproximación en L_1 de la función de Heaviside **65**
3.1. Funciones Signo y Heaviside 66
3.2. Caracterización de la mejor aproximación 67
3.3. Identificación de los polinomios 87

4. Operadores polinomiales para la aproximación unilateral en $W_p^r[0,1]$ **113**
4.1. Módulos de continuidad locales 114
4.2. Aproximantes unilaterales para la función de Heaviside 118
4.3. Aproximación de funciones diferenciables 125
4.4. Algunas extensiones 131

4.5. Comparación de resultados 135
4.5.1. Operadores de Lenze 135
4.5.2. Construcción de Hristov e Ivanov . . . 139

Conclusiones **143**

Bibliografía **145**

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de la aproximación

A continuación establecemos algunas convenciones y notaciones, sin embargo, los resultados referentes a la teoría de aproximación, así como definiciones, nos hemos basado en la misma que se emplea en [30].

Sea X un espacio lineal normado sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ y G un subconjunto de X. Para cada $f \in X$, el error de la mejor aproximación lo denotamos por $E(f;G)$ y definimos como

$$E(f;G) = \inf\{||f-g|| : g \in G\}.$$

Un subconjunto G de X se dice proximal si para cada $f \in X$, existe un $g^* \in G$ tal que, para cada $g \in G$,

$$||f-g^*|| \leq ||f-g||,$$

esto es,

$$E(f;G) = ||f-g^*||$$

y en este caso, decimos que g^* es el elemento más cercano a f.

Si G es proximal, denotamos por $\mathcal{L}_G(f)$ al conjunto constituido por los elementos de la mejor aproximación de f, es

decir

$$\mathcal{L}_G(f) = \left\{ g^* \in G : ||f - g^*|| = \inf_{g \in G} ||f - g|| \right\}.$$

Notemos que, si $f \in G$, entonces $\mathcal{L}_G(f) = \{f\}$.

Como ejemplos, se encuentran estos, importantes en la teoría de la aproximación.

Ejemplo 1.1. Para cada $f \in C[0,1]$, denotamos mediante

$$||f||_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

la norma uniforme.

Para $1 \leq p < \infty$ y $g \in L_p[0,1]$, denotamos mediante

$$||g||_{p,[0,1]} = \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

la norma en $L_p[0,1]$.

Si $f \in L_p[0,1]$ está acotada inferiormente (superiormente), podemos definir la mejor aproximación unilateral por abajo (por arriba) para f de grado n como:

$$E_n^-(f)_p = \inf\{||f - Q||_{p,[0,1]} : Q \in \mathbb{P}_n, Q \leq f\},$$

$$\left(E_n^+(f)_p = \inf\{||f - Q||_{p,[0,1]} : Q \in \mathbb{P}_n, f \leq Q\} \right).$$

No es difícil verificar (utilizando un argumento de compacidad) que siempre existe un polinomio de la mejor aproximación unilateral por abajo (por arriba).

1.2. Polinomios ortogonales

Dado $x \in (-1,1)$ y una medida positiva σ en $[-1,1]$, se dice que x es un punto de crecimiento de σ si, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\sigma\Big([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [-1,1]\Big) > 0.$$

En esta Sección σ denota una medida en $[-1,1]$ con infinitos puntos de crecimiento. Esta condición asegura la existencia de una sucesión infinita de polinomios ortogonales (ver [32, p. 23, 25 y 26]).

Definición 1.1. *Un sistema de polinomios*

$$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

es llamado ortonormal si satisface las condiciones siguientes:
i) Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $P_n \in \mathbb{P}_n$,
ii)

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)d\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n \neq m, \\ 1, & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{1.1}$$

La familia de los polinomios ortonormales en el intervalo $[-1,1]$ con respecto a $d\sigma$ y coeficientes principales positivos se denotará por $\{p_n(x,\sigma)\}$.

Recordemos que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituye una base para $\mathbb{P}_n$ si y sólo si, para cada $P_n \in \mathbb{P}_n$, existen escalares k_j tales que

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} k_j x^j, \quad k_n > 0$$

y el conjunto

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

es linealmente independiente.

La fórmula de Christoffel-Darboux es de utilidad para calcular los coeficientes de ciertas fórmulas de integración aproximadas.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [-1,1]$, sean $p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$ y $p_{n-2}(x)$ polinomios ortogonales consecutivos.

Pongamos

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots, \quad (1.2)$$

donde $p_1(x) = 1$ y $p_{-1}(x) = 0$.

Notemos que $p_n(x) - A_n x p_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado no mayor que $n-1$ y así, este puede ser expresado como una combinación lineal

$$p_n(x) - A_n x p_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j p_j(x).$$

Los números λ_j son los coeficientes de Fourier

$$\lambda_j = \int_{-1}^{1} [p_n(x) - A_n x p_{n-1}(x)] p_j(x) d\sigma(x).$$

Ahora, debido a la propiedad de ortogonalidad, tenemos que, para $j < n-2$, $\lambda_j = 0$. Así,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j p_j(x) = \lambda_{n-2} p_{n-2}(x) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x).$$

De aquí obtenemos (1.2). Además, al multiplicar por $p_n(x)$ ambos miembros de la igualdad de (1.2), obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x) d\sigma(x) = 1 = A_n \int_a^b x p_{n-1}(x) p_n(x) d\sigma(x).$$

Como

$$\int_{-1}^{1} x p_{n-1}(x) p_n(x) d\sigma(x) = \int_{-1}^{1} p_n(x)(k_{n-1}x^n + \ldots) d\sigma(x)$$

$$= \frac{k_{n-1}}{k_n} \int_{-1}^{1} p_n^2(x) d\sigma(x),$$

se sigue que $A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}$. También, dado que

$$\int_{-1}^{1} x p_{n-1}(x) p_{n-2}(x) d\sigma(x) = \int_{-1}^{1} p_{n-1}(x)(k_{n-2}x^{n-1} + \ldots) d\sigma(x)$$

y

$$\int_{-1}^{1} p_{n-1}(x)(k_{n-2}x^{n-1} + \ldots) d\sigma(x) = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \int_{-1}^{1} p_{n-1}^2(x) d\sigma(x),$$

tenemos que

$$C_n = A_n \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}.$$

Hemos obtenido el teorema que sigue.

Teorema 1.2. [32, p. 42] *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [-1, 1]$, sean $p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$ y $p_{n-2}(x)$ polinomios ortogonales consecutivos. La relación siguiente se satisface*

$$p_n(x) = (A_n x + B_n) p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

donde $p_1(x) = 1$ y $p_{-1}(x) = 0$. Aquí, A_n, B_n y C_n son constantes con $A_n > 0$ y $C_n > 0$.

Si denotamos por k_n el coeficiente principal de p_n, tenemos que

$$A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}, \quad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2}. \tag{1.3}$$

Por la fórmula de recurrencia (1.2), obtenemos la identidad de Christoffel-Darboux.

Teorema 1.3. [32, p. 43] *Para $x, y \in [-1, 1]$ con $x \neq y$,*

$$\sum_{j=0}^{n} p_j(x) p_j(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x - y}. \tag{1.4}$$

Al sustituir $y = x$ en el primer miembro y derivar con respecto a x el segundo miembro de la igualdad (1.4), nos queda.

$$p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x) = \frac{k_{n+1}}{k_n}\sum_{j=0}^{n} p_j^2(x) > 0. \quad (1.5)$$

Teorema 1.4. [32, p. 44] *Para $n \geq 1$, las raíces de p_n son reales, distintas y se localizan en el interior del intervalo $[-1, 1]$.*

Teorema 1.5. [32, p. 46] *Sean $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$ las raíces del polinomio p_n y denotemos $x_{n,0} = -1$ y $x_{n,n+1} = 1$. Se tiene que cada intervalo $(x_{n,j}, x_{n,j+1})$ con $0 \leq j \leq n$, contiene exactamente un cero de p_{n+1}.*

Como una primera consecuencia señalamos que dos polinomios ortogonales consecutivos $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$ no pueden tener ceros en común.

Los ceros de los polinomios ortogonales se pueden utilizar para construir fórmulas que permiten calcular de forma aproximada ciertas integrales. A este tipo de fórmulas se le suelen llamar cuadraturas mecánicas.

Teorema 1.6. [32, p. 47] *Sea σ una medida en el intervalo $[-1, 1]$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$-1 < x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n} < 1$$

denotan los ceros del polinomio $p_n(x)$, entonces existen números reales $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots, \lambda_{n,n}$ tales que, para cada $Q \in \mathbb{P}_{2n-1}$

$$\int_{-1}^{1} Q(x)d\sigma(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} Q(x_{n,j}).$$

1.3. Polinomios de Jacobi

Entre los sistemas de polinomios ortogonales clásicos, está el de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, el cual es ortogonal en el intervalo $[-1,1]$ con respecto a la función peso

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \text{para} \quad \alpha > -1 \quad \text{y} \quad \beta > -1.$$

En esta parte damos un breve resumen sobre los polinomios de Jacobi los cuales juegan un papel importante en el desarrollo de este trabajo, el lector interesado puede consultar la referencia [32].

Para $\alpha > -1$, $\beta > -1$ y $r \in \mathbb{N}$, el polinomio de Jacobi $P_r^{(\alpha,\beta)}$ es el único polinomio de grado r el cual satisface que, para cada $Q_{r-1} \in \mathbb{P}_{r-1}$,

$$\int_{-1}^{1} Q_{r-1}(x) P_r^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx = 0, \tag{1.6}$$

y

$$P_r^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{r+\alpha}{r}. \tag{1.7}$$

Los polinomios $P_r^{(\alpha,\beta)}$ satisfacen la relación de recurrencia a tres términos

$$P_{r+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (A_r x + B_r) P_r^{(\alpha,\beta)}(x) + C_r P_{r-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \text{con } r = 1, 2, ...,$$

donde $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ y A_r, B_r, C_r son constantes que dependen de r, α, β (ver [32], p.71).

Los ceros del polinomio de Jacobi son reales, distintos y se localizan en el interior del intervalo $[-1,1]$ (ver [32], p. 43). Además (ver [32], p. 58 y p. 71); para cada $x \in [-1,1]$,

$$P_r^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^r P_r^{(\beta,\alpha)}(-x). \tag{1.8}$$

Así, si $P_r^{(\alpha,\alpha)}(z) = 0$, entonces $P_r^{(\alpha,\alpha)}(-z) = 0$ y r par, implica que $P_r^{(\alpha,\alpha)}(0) \neq 0$.

Para cada $r \in \mathbb{N}$, sean $-1 < x_{r,1} < \ldots < x_{r,r} < 1$ los ceros del polinomio de Jacobi $P_r^{(\alpha,\beta)}$. Es conocido (ver [32], p. 47-48) que existen números reales positivos $\gamma_{r,i}$, con $1 \leq i \leq r$ tales que, para cada polinomio $Q \in \mathbb{P}_{2r-1}$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{r,i} Q(x_{r,i}). \tag{1.9}$$

Para cada $r \in \mathbb{N}$, la familia $\{P_j^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^{r}$ constituye una base para $\mathbb{P}_r$. El siguiente resultado se sigue de la expresión (1.6).

Proposición 1.7. *Sean $n, r \in \mathbb{N}$, con $r \leq n < 2r$ y $w_r(x)$ un polinomio en $\mathbb{P}_r$. Supongamos que, para cada $Q_{n-r} \in \mathbb{P}_{n-r}$,*

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-r}(x) w_r(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = 0. \tag{1.10}$$

Entonces existen números reales c_j, con $n-r+1 \leq j \leq r$ tales que

$$w_r(x) = \sum_{j=n-r+1}^{r} c_j P_j^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{1.11}$$

Notemos que, para el caso $n = 2r-1$, $w_r(x) = c_r P_r^{(\alpha,\beta)}(x)$.

1.4. Mejor aproximación unilateral

Para empezar, recordemos

Definición 1.2. *Para cada $f \in L_1[-1,1]$ acotada por abajo (por arriba) la mejor aproximación unilateral por abajo (por arriba) para la función f de grado n se define como*

$$E_n^-(f)_1 = \inf\{\| f - P \|_{1,[-1,1]} \colon P \in \mathbb{P}_n, \quad P \leq f\}$$

$$(E_n^+(f)_1 = \inf\{\| f - P \|_{1,[-1,1]} \colon P \in \mathbb{P}_n, \quad f \leq P\}.)$$

Así, si denotamos por $\mathcal{P}_n^-(f)$ y $\mathcal{P}_n^+(f)$ al conjunto de los polinomios extremales en $\mathbb{P}_n$. Es decir,

$$\mathcal{P}_n^-(f) = \{Q \in \mathbb{P}_n : Q \leq f \ , \ \| f - Q \|_{1,[-1,1]} = E_n^-(f)_1\}$$

$$(\mathcal{P}_n^+(f) = \{Q \in \mathbb{P}_n : f \leq Q \ , \ \| Q - f \|_{1,[-1,1]} = E_n^+(f)_1\}).$$

Tenemos que son distintos del vacío (veáse la Sección 1.1).

Sea $P \in \mathcal{P}_n^-(f)$ y Q cualquier polinomio en $\mathbb{P}_n$ tal que $Q \leq f$ en $[-1,1]$, entonces $||f - P||_{1,[-1,1]} \leq ||f - Q||_{1,[-1,1]}$. De aquí que $\int_{-1}^{1} Q(x)dx \leq \int_{-1}^{1} P(x)dx$.

Recíprocamente, si para cada $x \in [-1,1]$, $P(x) \leq f(x)$ y Q es cualquier polinomio en $\mathbb{P}_n$ con $Q \leq f$ en $[-1,1]$ tal que $\int_{-1}^{1} Q(x)dx \leq \int_{-1}^{1} P(x)dx$, entonces

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - Q(x))dx \geq \int_{-1}^{1} (f(x) - P(x))dx.$$

Es decir, $||f - P||_{1,[-1,1]} \leq ||f - Q||_{1,[-1,1]}$. Así, $P \in \mathcal{P}_n^-(f)$.

Este hecho nos conduce a dar la siguiente caracterización.

Proposición 1.8. [29, p. 103] *$P \in \mathcal{P}_n^-(f)$ si y sólo si $P \leq f$ en $[-1,1]$ y*

$$\int_{-1}^{1} Q(x)dx \leq \int_{-1}^{1} P(x)dx,$$

para cada $Q \in \mathbb{P}_n$ con $Q \leq f$ en el intervalo $[-1,1]$.

Un subconjunto A de un espacio vectorial Y es un conjunto convexo si $x, y \in A$ implican que el conjunto

$$\{z \in Y : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está contenido en A.

Para cada $f \in L_p[-1,1]$ acotada, sea

$$\mathcal{P}_n^-(f) = \{Q \in \mathbb{P}_n : Q \leq f, \ ||f - Q||_{p,[-1,1]} = E_n^-(f)\},$$

la familia constituida por los elementos de la mejor aproximación unilateral para f.

Observemos que, si $P, Q \in \mathcal{P}_n^-(f)$ y $\lambda \in (0,1)$, entonces

$$\lambda P + (1-\lambda)Q \leq \lambda f + (1-\lambda)f = f.$$

Por otro lado, cualquiera sea $R \in \mathbb{P}_n$ con $R \leq f$, se tiene que

$$\int_{-1}^{1} R(x)dx \leq \int_{-1}^{1} P(x)dx \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} R(x)dx \leq \int_{-1}^{1} Q(x)dx.$$

De aquí que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} R(x)dx &= \lambda \int_{-1}^{1} R(x)dx + (1-\lambda)\int_{-1}^{1} R(x)dx \\ &\leq \lambda \int_{-1}^{1} P(x)dx + (1-\lambda)\int_{-1}^{1} Q(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} \Big(\lambda P(x) + (1-\lambda)Q(x)\Big)dx.\end{aligned}$$

Luego, por la Proposición 1.8,

$$\lambda P + (1-\lambda)Q \in \mathcal{P}_n^-(f).$$

Esto prueba que $\mathcal{P}_n^-(f)$ es un conjunto convexo.

Por otra parte, si f es una función acotada e impar en el espacio $L_{1,[-1,1]}$, entonces calcular el elemento de la mejor aproximación por abajo es equivalente a calcular el elemento de la mejor aproximación por arriba. Veamos como es esto.

Proposición 1.9. *Sea f una función acotada e impar en el espacio $L_{1,[-1,1]}$. Entonces $P(-x) \in \mathcal{P}_n^+(f)$ si y sólo si $-P(-x) \in \mathcal{P}_n^-(f)$.*

Demostración. Supongamos que $-P(-x) \in \mathcal{P}_n^-(f)$, entonces para cada $x \in [-1,1]$, $-P(-x) \leq f(x)$ y

$$E_n^-(f) = \int_{-1}^{1} \left(f(x) + P(-x)\right) dx.$$

Como f es impar, para cada $x \in [-1,1]$, $-P(-x) \leq -f(-x)$ y

$$E_n^-(f) = \int_{-1}^{1} (-f(-x) + P(-x))\, dx.$$

Esto implica que, para cada $x \in [-1,1]$, $f(-x) \leq P(-x)$ y

$$E_n^-(f) = \int_{-1}^{1} (P(-x) - f(-x))\, dx.$$

Pongamos $y = -x$. Se sigue que, para cada $y \in [-1,1]$,

$$f(y) \leq P(y) \quad \text{y} \quad E_n^+(f) = \int_{-1}^{1} (P(y) - f(y))\, dy.$$

Así, $P(-x) \in \mathcal{P}_n^+(f)$.

Recíprocamente, si $P(-x) \in \mathcal{P}_n^+(f)$, entonces para cada $x \in [-1,1]$,

$$f(x) \leq P(-x) \quad \text{y} \quad E_n^+(f) = \int_{-1}^{1} (P(-x) - f(x))\, dx.$$

Dado que f es impar, para cada $x \in [-1,1]$,

$$-f(-x) \leq P(-x) \quad \text{y} \quad E_n^+(f) = \int_{-1}^{1} (P(-x) + f(-x))\, dx.$$

Es decir, para cada $x \in [-1,1]$, $-P(-x) \leq f(-x)$ y

$$E_n^+(f) = \int_{-1}^{1} (f(-x) + P(-x))\, dx.$$

Pongamos $y = -x$. Se sigue que, para cada $y \in [-1,1]$,

$$-P(y) \leq f(y)$$

y

$$E_n^-(f) = -\int_{1}^{-1} (f(y) + P(y))\, dy = \int_{-1}^{1} (f(y) - (-P(y)))\, dy.$$

Luego, $-P(-x) \in \mathcal{P}_n^-(f)$. □

Con argumentos similares se puede demostrar que $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ si y sólo si $1 - P_n(-x) \in \mathcal{P}_n^+(G_{-\theta})$. Por esta razón, en lo que sigue, consideramos solamente la mejor aproximación unilateral por abajo.

1.5. Funciones absolutamente continuas

Las funciones absolutamente continuas intervienen en la teoría de la integración y diferenciación de Lebesgue. Aquí, no es la excepción y el lector interesado puede encontrar en ([1] p. 168) los ejercicios propuestos por el autor para ejercitarse.

Definición 1.3. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es absolutamente continua en $[0,1]$ si dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$$

implica que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon,$$

donde $\{(a_k, b_k) : k = 1, ..., n\}$ es una familia finita de subintervalos disjuntos en $[0,1]$.

Más adelante necesitaremos el resultado siguiente.

Proposición 1.10. *Fijemos $1 \leq p < \infty$ y $r \in \mathbb{N}$. Si $f \in W_p^r[0,1]$, entonces f es continua en $[0,1]$.*

Demostración. Supongamos que $f \in W_p^r[0,1]$. Como $r \geq 1$, f es absolutamente continua. Así, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

siempre que

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta,$$

donde $\{(a_k, b_k) : k = 1, \ldots, n\}$ es una familia finita de subintervalos disjuntos en $[a, b]$. En particular, si $x, x + h \in [0, 1]$ y $\mid h \mid < \delta$, entonces $|f(x + h) - f(x)| < \epsilon$. En otras palabras, f es continua en $[0, 1]$. □

Recordermos que una función $\lambda : A \to A$, donde A es un espacio lineal real, es homogénea si $\lambda(\alpha f) = \alpha\lambda(f)$, cualesquiera sean $f \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

La proposición siguiente muestra que, en general, no se puede buscar approximación unilateral polinomial utilizando operadores lineales.

Proposición 1.11. *Sea A un espacio lineal de funciones*

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Si $\lambda : A \to A$ es un operador homogéneo y para cada $f \in A$, tenemos que $\lambda(f) \leq f$, entonces λ es el operador identidad.

Demostración. Fijemos $f \in A$. Como $-f \in A$ y λ es homogéneo, $-\lambda(f) = \lambda(-f) \leq -f$. Esto es, $f \leq \lambda(f)$. De aquí se sigue que $\lambda(f) = f$. □

Capítulo 2

Reglas de cuadratura positivas

El objetivo en este capítulo es estudiar el problema siguiente: para una $\theta \in (-1,1)$ dada, ¿bajo qué condiciones existe una fórmula de cuadratura positiva con grado máximo de precisión tal que θ sea uno de los nodos de la fórmula?. Para la regla de Gauss, este problema ha sido estudiado por completo (ver [5], Teorema 2.9). Posteriormente daremos otra caracterización.

En la Sección 2.1 damos algunos resultados generales que serán de gran utilidad para abordar los teoremas principales que se demostrarán en la Sección 2.2.

En este capítulo σ denota una medida positiva definida en el intervalo compacto $[-1,1]$ con infinitos puntos de crecimiento.

En lo que sigue, nuestro interés radica en estudiar fórmulas de cuadratura de orden n de la forma

$$I_\sigma(f) = \int_{-1}^{1} f(x)d\sigma(x) = Q_n(f) + R_n(f), \tag{2.1}$$

donde

$$Q_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} f(x_{n,j}), \tag{2.2}$$

con nodos (también llamados abscisas) distintos $x_{n,j} \in [-1,1]$ y pesos $\lambda_{n,j} \in \mathbb{R}$. Es común referirse a (2.2) como a una fórmula de cuadratura interpolatoria y a cualquier polinomio

$$w_n(x) = C\prod_{j=1}^{n}(x - x_{n,j}), \qquad (C \neq 0),$$

se le llama un polinomio generador.

La fórmula de cuadratura (2.2) se dice positiva, si $\lambda_{n,j} > 0$, para $1 \leq j \leq n$. Además, diremos que la fórmula tiene grado de precisión (o exactitud) m, si m es el mayor entero tal que $R_n(P) = 0$ para cualquier polinomio $P \in \mathbb{P}_m$ y $R_n(Q) \neq 0$ para algún polinomio $Q \in \mathbb{P}_{m+1}$.

2.1. Algunos resultados generales

Estamos interesados en encontrar fórmulas de cuadratura con grado de precisión $m \geq n-1$. De este modo, los pesos serán calculables a partir de los nodos mediante el proceso de integración de ciertos polinomios de Lagrange.

Definición 2.1. *Dada una medida σ en $[-1,1]$, diremos que un polinomio $w_n \in \mathbb{P}_n$ con n ceros simples,*

$$-1 < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1,$$

genera una fórmula de cuadratura positiva del tipo:

(i) *Gauss, si para todo $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$,*

$$\int_{-1}^{1} P(x)d\sigma(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}P(x_{n,j}),$$

donde $\lambda_{n,j} > 0$ para toda $1 \leq j \leq n$.

(ii) *Radau por la izquierda, si para todo $P \in \mathbb{P}_{2n}$,*

$$\int_{-1}^{1} P(x)d\sigma(x) = \lambda_{n,0}P(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}P(x_{n,j}),$$

donde $\lambda_{n,j} > 0$ *para toda* $0 \leq j \leq n$.

(iii) *Radau por la derecha, si para todo* $P \in \mathbb{P}_{2n}$,

$$\int_{-1}^{1} P(x)d\sigma(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} P(x_{n,j}) + \lambda_{n,n+1} P(1),$$

donde $\lambda_{n,j} > 0$ *para toda* $1 \leq j \leq n+1$.

(iv) *Lobatto, si para todo* $P \in \mathbb{P}_{2n+1}$,

$$\int_{-1}^{1} P(x)d\sigma(x) = \lambda_{n,0} P(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} P(x_{n,j}) + \lambda_{n,n+1} P(1),$$

donde $\lambda_{n,j} > 0$ *para toda* $0 \leq j \leq n+1$.

La existencia y unicidad de tales fórmulas se puede justificar a partir del hecho que Q_n posee grado de precisión $m \geq n-1$ si y sólo si tenemos las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} x^j w_n(x)d\sigma(x) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-n, \tag{2.3}$$

para un polinomio generador w_n, que debe poseer raíces simples en $(-1, 1)$.

En la teoría clásica se conoce que, para cada n, existe una única fórmula de cuadratura de orden n con grado de precisión $2n-1$, a saber, la de Gauss.

Recordemos algunos resultados que necesitaremos luego.

Teorema 2.1. [32, p. 47] *Sean* $\rho : [-1, 1] \to \mathbb{R}^+$ *un peso fijo y* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ *la familia de polinomios ortonormales (con coeficientes principales positivos) relacionada con* ρ.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $-1 < x_{n,1} < \cdots < x_{n,n} < 1$ *denotan los ceros de* P_n *y*

$$A_{n,k} := \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{\Big(x - x_{n,k}\Big) P_n'\Big(x_{n,k}\Big)} \rho(x)dx, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{2.4}$$

entonces $A_{n,k} > 0$ *y, para cada polinomio* $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\rho(x)\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\,P(x_{n,k}).$$

Por otra parte, si uno desea prefijar uno o ambos extremos como abscisas, se pueden obtener fórmulas interpolatorias positivas pero con grado de precisión menor. Existe una única regla de Lobatto de orden n, con abscisas -1 y 1 con grado de precisión $2n-3$.

Teorema 2.2. [19, p. 172] *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sean*

$$-1 < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$$

puntos fijos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) *Para cada polinomio* $P \in \mathbb{P}_{2n+1}$, *tenemos que*

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = BP(-1) + \sum_{k=1}^{n} A_k P(x_{n,k}) + CP(1). \qquad (2.5)$$

(ii) *Las abscisas*

$$-1 < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$$

son los ceros del polinomio de Jacobi $P_n^{(1,1)}$,

$$A_k = \frac{8(n+1)}{\left(1-\left(x_{n,k}\right)^2\right)^2\left(n+2\right)}\frac{1}{\left[\left(P_n^{(1,1)}\right)'\left(x_{n,k}\right)\right]^2}, \qquad (2.6)$$

para $1 \le k \le n$, *y*

$$B = C = \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \qquad (2.7)$$

En cualquier caso, todos los coeficientes son positivos.

Por otra parte, existe una única regla de Radau (por la izquierda o por la derecha) de orden n con abscisa -1 o 1 con grado de precisión $2n-2$.

Teorema 2.3. [19, p. 169] *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean*

$$-1 < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$$

puntos fijos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) *Para cualquier polinomio $P \in \mathbb{P}_{2n}$, tenemos que*

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = A\,P(-1) + \sum_{k=1}^{n} R_k P(x_{n,k}). \tag{2.8}$$

(ii) *Las abscisas*

$$-1 < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$$

son los ceros del polinomio de Jacobi $P_n^{(0,1)}$,

$$R_k = \frac{4}{(1+x_{n,k})} \frac{1}{\left(1-(x_{n,k})^2\right)\left[\left(P_n^{(0,1)}\right)'\left(x_{n,k}\right)\right]^2},$$

con $1 \leq k \leq n$ y

$$A = \frac{2}{(n+1)^2}.$$

En cualquier caso, todos los coeficientes son positivos.

Para el nodo 1, tenemos un teorema similar.

Teorema 2.4. [19, p. 169] *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean*

$$-1 < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$$

puntos fijos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) *Para cada polinomio $P \in \mathbb{P}_{2n}$,*

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = B\,P(1) + \sum_{k=1}^{n} S_k P(x_{n,k}). \tag{2.9}$$

(ii) *Las abscisas*

$$-1 < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$$

son los ceros del polinomio de Jacobi $P_n^{(1,0)}$,

$$S_k = \frac{4}{\left(1-x_{n,k}\right)} \frac{1}{\left(1-(x_{n,k})^2\right)\left[\left(P_n^{(1,0)}\right)'\left(x_{n,k}\right)\right]^2},$$

para $1 \leq k \leq n$ *y*

$$B = \frac{2}{(n+1)^2}.$$

En cualquier caso, todos los coeficientes son positivos.

Regresemos a las fórmulas (2.1) y (2.2). Si denotamos por $\omega(x)$,

$$\omega(x) \in \{1, 1-x, 1+x, 1-x^2\},$$

a la parte del polinomio generador determinada por los nodos prefijados, se sigue de (2.3) que para hallar las abscisas restantes debemos encontrar las raíces del polinomio ortogonal w_n/ω con grado $n - \deg \omega$ respecto a la medida positiva $\omega d\sigma$ en $[-1, 1]$. Se sabe que dichas raíces entán en $(-1, 1)$ y son simples. Además, la fórmula de cuadratura resultante es positiva.

Como en [4], [5] y [11], los polinomios cuasi-ortogonales introducidos por Shohat [31] juegan un papel central en este estudio.

Definición 2.2. *Sea* $\theta \in (-1, 1)$. *Diremos que una fórmula de cuadratura de orden* n *es*

(i) *cuasi-Gauss con abscisa* θ*, si ésta contiene la abscisa* θ *y tiene grado de precisión* $2n-2$*:*

(ii) *cuasi-Radau por la izquierda con abscisa* θ*, si tienen grado de precisión* $2n-3$ *y ésta contiene las abscisas* θ *y* -1*:*

(iii) *cuasi-Radau por la derecha con abscisa* θ*, si tienen grado de precisión* $2n-3$ *y ésta contiene las abscisas* θ *y* 1*:*

(iv) *cuasi-Lobatto con abscisa* θ*, si tienen grado de precisión* $2n-4$ *y ésta contiene las abscisas* θ*,* -1 *y* 1.

Denotemos por

$$-1 < x_{n,1}^G < \ldots < x_{n,n}^G < 1,\ -1 = x_{n,1}^{LR} < \ldots < x_{n,n}^{LR} < 1,$$

$$-1 < x_{n,1}^{RR} < \ldots < x_{n,n}^{RR} = 1,\ -1 = x_{n,1}^{L} < \ldots < x_{n,n}^{L} = 1,$$

a las abscisas de las fórmulas de Gauss, de Radau por la izquierda, de Radau por la derecha y de Lobatto de orden n correspondientes a la medida σ, respectivamente. La notación correcta es de la forma $x_{n,j}^G(\sigma)$ pero, cuando no haya peligro de confusión, omitiremos la medida.

Se verá en la demostración del Teorema 2.12 (y de manera alternativa en un resultado debido a Markov [32, Theorem 3.3.4]) que

$$j = 1, \ldots, n: \qquad x_{n,j}^{LR} < x_{n,j}^G < x_{n,j}^{RR}, \tag{2.10}$$

$$j = 1, \ldots, n-1: \quad x_{n-1,j}^G < x_{n,j+1}^{LR} < x_{n,j+1}^L, \tag{2.11}$$

$$j = 1, \ldots, n-1: \qquad x_{n,j}^L < x_{n,j}^{RR} < x_{n-1,j}^G \tag{2.12}$$

y

$$j = 1, \ldots, n-2: \quad x_{n-1,j}^{RR} < x_{n,j+1}^L < x_{n-1,j+1}^{LR}. \tag{2.13}$$

Como todas las raíces de $p_n(x, \sigma)$ son simples y están contenidas en $(-1, 1)$, las enumeraremos como sigue:

$$-1 < x_{n,1}(\sigma) < \ldots < x_{n,n}(\sigma) < 1 \tag{2.14}$$

y convengamos en que $x_{n,0}(\sigma) = -1$, $x_{n,n+1}(\sigma) = 1$.

Para una función ω,

$$\omega(x) \in \{1, 1-x, x+1, 1-x^2\},$$

usamos la notación $p_n(x, \omega\sigma)$ para representar a los polinomios correspondientes a la medida $\omega d\sigma$. También necesitamos de la fracción racional

$$f_n(x, \sigma) = \frac{p_n(x, \sigma)}{p_{n-1}(x, \sigma)}. \tag{2.15}$$

En la afirmación siguiente (debida esencialmente a Shohat [31]) enumeramos algunas condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de fórmulas cuadraturas con ciertas propiedades.

Lema 2.5. *Sean* $\theta \in (-1,1)$ *arbitrario,*

$$\omega(x) \in \{1, 1-x, x+1, 1-x^2\} \quad y \quad \nu = n - \deg(\omega).$$

(i) *Si* $p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma) = 0$*, entonces no existe una fórmula de cuadratura de orden* n *con grado de precisión*

$$m \geq n + \nu - 2$$

que tenga como abscisas prefijadas a la raíces del polinomio

$$(x-\theta)\omega(x).$$

(ii) *Si* $p_{\nu}(\theta, \omega\sigma) = 0$*, entonces existe una única fórmula de cuadratura de orden* n *con grado de precisión*

$$m \geq n + \nu - 2$$

que tiene como abscisas prefijadas a la raíces del polinomio

$$(x-\theta)\omega(x).$$

(iii) *Si* $p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma)p_{\nu}(\theta, \omega\sigma) \neq 0$*, entonces existe a lo sumo una fórmula de cuadratura de orden* n *con grado de precisión*

$$m \geq n + \nu - 2$$

que tiene como abscisas prefijadas a la raíces de

$$(x-\theta)\omega(x).$$

Tal fórmula tiene como polinomio generador a

$$w_n(x) = \omega(x)\left(p_{\nu}(x, \omega\sigma) - \frac{p_{\nu}(\theta, \omega\sigma)}{p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma)} p_{\nu-1}(x, \omega\sigma)\right), \quad (2.16)$$

con $p_j(x, \omega\sigma)$ el j-ésimo polinomio ortonormal con respecto a la medida positiva $\omega d\sigma$, por lo tanto la fórmula de cuadratura dada anteriormente es única.

(iv) *Recíprocamente, supongamos que*

(a) $p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma)p_\nu(\theta, \omega\sigma) \neq 0$ *y* w_n *está definido como en* (2.16),

(b) *Todas las raíces del polinomio* w_n/ω *son simples y están contenidas en* $(-1, 1)$,

(c) *En la fórmula de cuadratura cuya existencia se afirma en* (iii) *los pesos correspondientes a las raíces de* ω *son positivos.*

Entonces el polinomio w_n *genera una fórmula de cuadratura positiva de orden n con grado de precisión*

$$m = n + \nu - 2$$

y posee como abscisas prefijadas la raíces de

$$(x - \theta)\omega(x).$$

Demostración. Para demostrar los incisos (i)-(iii), procedamos como sigue. Sea Q_n una fórmula de cuadratura como la dada en (2.1)-(2.2) de orden n, grado de precisión $m \geq n+\nu-2$ y polinomio generador $W(x)$ divisible por $(x - \theta)w(x)$. Si R_n está dado como en (2.1), se sigue que, para $j = 0, 1, \ldots, \nu-2$,

$$R_n(x^j W) = 0 = I_\sigma(x^j W) = \int_a^b x^j W(x) d\sigma(x).$$

Como $\{p_j(x, \omega\sigma)\}_{j=0}^{\nu}$ es una base para $\mathbb{P}_\nu$, representando a W/ω en esta base, deducimos que existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$W(x) = \omega(x) \left[c_1 p_\nu(x, \omega\sigma) + c_2 p_{\nu-1}(x, \omega\sigma)\right]. \tag{2.17}$$

Notemos que $c_1 \neq 0$, ya que de lo contrario $\deg(Q_n) = n - 1$ y esto es una contradicción.

Como $W(\theta) = 0$ y $0 \neq \omega(\theta)$, se tiene que

$$c_1 p_\nu(\theta, \omega\sigma) + c_2 p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma) = 0.$$

Ahora, como las raíces de los polinomios ortogonales se entrelazan (ver Teorema 1.5), las cantidades $p_\nu(\theta, \omega\sigma)$ y $p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma)$ no se anulan simultáneamente. Luego, si suponemos que

$$p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma) = 0$$

llegamos a una contradicción. Esto prueba (i). Además, si

$$p_\nu(\theta, \omega\sigma) = 0,$$

entonces $c_2 p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma) = 0$. Luego $c_2 = 0$ y

$$W(x) = c_1 \omega(x) p_\nu(x, \omega\sigma).$$

De aquí que, los ceros de W son las raíces de $\omega(x)p_\nu(x, \omega\sigma)$. Hemos obtenido la regla clásica de Gauss/Radau/Lobatto descrita más arriba. Esto demuestra (ii).

Para verificar (iii), supongamos que

$$p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma)p_\nu(\theta, \omega\sigma) \neq 0.$$

No es difícil probar que si

$$c_1 p_\nu(\theta, \omega\sigma) + c_2 p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma) = 0,$$

entonces $w_n = W/c_1$. Así, w_n es un polinomio generador para Q_n. Observemos que,

$$\begin{aligned} R_n\left(p_{\nu-1}(x, \omega\sigma)W\right) &= I_\sigma\left(p_{\nu-1}(x, \omega\sigma)W\right) \\ &= c_1 \int_a^b p_\nu(x, \omega\sigma)p_{\nu-1}(x, \omega\sigma)\omega(x)d\sigma(x) \\ &\quad + c_2 \int_a^b p_{\nu-1}(x, \omega\sigma)^2 \omega(x)d\sigma(x) \\ &= c_2 \int_a^b p_{\nu-1}(x, \omega\sigma)^2 \omega(x)d\sigma(x) \neq 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, hemos encontrado un polinomio de grado $n+\nu-1$, a saber $p_{\nu-1}(x,\omega\sigma)W \in \mathbb{P}_{n+\nu-1}$ con $n+\nu-2 < n+\nu-1$ tal que

$$R_n\left(p_{\nu-1}(x,\omega\sigma)W\right) \neq 0.$$

Luego, el mayor entero es $m = n+\nu-2$. Hemos demostrado (iii).

Veamos (iv). Por (iii), podemos construir a lo sumo una fórmula de cuadratura como la dada en (2.2), de orden n y grado de precisión $m \geq n+\nu-2$ que tenga como abscisas a la raíces de $(x-\theta)\omega(x)$. En caso de que exista ésta es generada por el polinomio w_n.

Si $x_{n,j}$ son las raíces distintas de w_n en $[a,b]$ y

$$l_{n,j}(x) = \frac{w_n(x)}{w_n'(x_{n,j})(x-x_{n,j})},$$

denotan los polinomios fundamentales de Lagrange asociados con las abscisas $x_{n,j}$, entonces por el proceso de interpolación de Lagrange (vea Teorema 1.6), tenemos que

$$\lambda_{n,j} = \int_{-1}^{1} \frac{w_n(x)}{w_n'(x_{n,j})(x-x_{n,j})} d\sigma(x). \tag{2.18}$$

Así, Q_n posee grado de precisión $m \geq n-1$.

Dado que cada $f \in \mathbb{P}_{n+\nu-2}$ se puede expresar como

$$f = f_1 w_n + f_2, \quad \text{con} \quad f_1 \in \mathbb{P}_{\nu-2} \quad \text{y} \quad f_2 \in \mathbb{P}_{n-1},$$

se sigue que

$$R_n(f) = R_n(f_1 w_n) + R_n(f_2) = R_n(f_1 w_n),$$

donde $R_n(f_2)$ se anula por ortogonalidad. Por lo que Q_n tiene grado de precisión $m \geq n+\nu-2$, y así $n+\nu-2$ por la parte (iii).

Falta discutir la positividad de los pesos. Si $\omega(x_{n,j}) = 0$, la propiedad de que $\lambda_{n,j} > 0$ se ha incluido en las hipótesis. Por otra parte, observamos que el polinomio

$$P_j(x) = \frac{w_n(x)}{w_n'(x_{n,j})(x - x_{n,j})} \frac{P(x)}{P'(x_{n,j})(x - x_{n,j})},$$

donde $P(x) = w_n(x)/\omega(x)$, es de grado no mayor que $n+\nu-2$. Además, para $j = 0, 1, \ldots, n, n+1$,

$$Q_n(P_j) = \lambda_{n,0} P_0(x_{n,0}) + \lambda_{n,n+1} P_{n+1}(x_{n,n+1}) > 0.$$

De aquí que $\lambda_{n,j} = Q_n(P_j) = I_\sigma(P_j) > 0$. □

Se deduce del Lema 2.5 (incisos (iii) y (iv)) que existe una estrecha relación entre las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de una cierta fórmula de cuadratura; a saber, la localización de las raíces de w_n/ω en $(-1, 1)$ y la positividad de los pesos. Estas condiciones se analizarán más adelante.

Recordemos algunos resultados de Brezinski y Peherstorfer (ver [4] y [28]), que nos serán de utilidad para localizar las raíces del polinomio cuasi-ortogonal w_n dado en (2.16).

Definición 2.3. *Fijemos una función peso positiva w en $[-1, 1]$ y sea $S_n \in \mathbb{P}_n$. Diremos que S_n es cuasi-ortogonal de orden r en $[-1, 1]$ con respecto a w si satisface que*

$$\int_{-1}^{1} x^k S_n(x) w(x) dx = 0, \quad \text{para} \quad k = 0, \ldots n - 1 - r.$$

Si $r = 2n - (m + 1)$, recuperamos la condición de ortogonalidad (2.3) con $w_n(x) = S_n(x)$ y $w(x)dx = d\sigma(x)$.

Teorema 2.6. [4] *Fijemos una función peso positiva w en $[-1, 1]$ y sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de polinomios ortogonales en $[-1, 1]$ con respecto a w. Sea $r \in \mathbb{N}$ un entero fijo y para $i = 1, \ldots, r$, sean c_i números reales con $c_r \neq 0$. Si*

$$S_n = P_n(x) + c_1 P_{n-1}(x) +, \ldots, + c_r P_{n-r},$$

entonces S_n es un polinomio cuasi-ortogonal de orden r en $[-1, 1]$ con respecto a w.

Teorema 2.7. [4] *Sea w una función peso positiva fija en $[-1,1]$. Si S_n es cuasi-ortogonal de orden r en $[-1,1]$ con respecto a w, entonces al menos $(n-r)$ ceros distintos de S_n están en $(-1,1)$.*

Sea f_n la función dada en la ecuación (2.15). Supongamos que los coeficientes principales de los polinomios p_n tienen el mismo signo. Tenemos que, $f_n(x)$ es creciente en cada subintervalo

$$(x_{n-1,j}(\sigma), x_{n-1,j+1}(\sigma)), \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

donde utilizamos la notación (2.14). Así,

$$f_n(x) < 0, \qquad \text{para} \quad x < x_{n,1}(\sigma) \tag{2.19}$$

y

$$f_n(x) > 0, \qquad \text{si} \quad x > x_{n,n}(\sigma).$$

En particular

$$f_n(-1) < 0 < f_n(1). \tag{2.20}$$

Consideremos el polinomio

$$S_n(x) = p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad \text{con} \quad a_n \neq 0.$$

Como $S_n(x) = 0$ si y sólo si $f_n(x) = -a_n$, tenemos que

$$f_n(-1) = \frac{p_n(-1)}{p_{n-1}(-1)} \leq -a_n \leq \frac{p_n(1)}{p_{n-1}(1)} = f_n(1).$$

Por el Teorema 2.6, S_n es cuasi-ortogonal de orden $r = 1$. Además, si $y_1 < \ldots < y_n$ denotan los ceros de S_n, entonces por el Teorema 2.7, al menos $(n-1)$ de ellos están en el intervalo $(-1,1)$. Hemos obtenido el teorema que sigue.

Teorema 2.8. [4] (i) *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, los ceros*

$$y_1 < \ldots < y_n$$

de S_n *son reales, distintos y a lo sumo uno de ellos se encuentra fuera de* $(-1, 1)$*.*

(ii) *a) Si* $-a_n > 0$*, entonces*

$$x_{n,i}(\sigma) < y_i < x_{n-1,i}(\sigma) \quad y \quad x_{n,n}(\sigma) < y_n,$$

para $i = 1, \ldots, n-1$*.*

b) Si $-a_n < 0$*, entonces*

$$x_{n-1,i-1}(\sigma) < y_i < x_{n,i}(\sigma) \quad y \quad y_1 < x_{n,1}(\sigma),$$

para $i = 2, \ldots, n$*.*

(iii) *Si* $-a_n < f_n(-1) < 0$*, entonces* $y_1 < -1$*.*

(iv) *Si* $-a_n > f_n(1) > 0$*, entonces* $1 < y_n$*.*

(v) *Si* $f_n(-1) < -a_n < f_n(1)$*, entonces* S_n *tiene todos sus ceros en* $(-1, 1)$*.*

Lema 2.9. *Tomemos* $\omega(x) \in \{1, x+1, 1-x, 1-x^2\}$ *y denotemos por* $\nu = n - \deg\omega$*.*

Fijemos $\theta \in (-1, 1)$ *y supongamos que*

$$p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma) p_\nu(\theta, \omega\sigma) \neq 0.$$

Sean w_n *el polinomio dado en el* Lema 2.5 *inciso* (iii)*.*

Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) *Las raíces de* w_n/ω *son simples y están en* $(-1, 1)$*.*

(ii)

$$f_\nu(-1, \omega\sigma) < f_\nu(\theta, \omega\sigma) < f_\nu(1, \omega\sigma). \tag{2.21}$$

Demostración. Por el Teorema 1.4, las ν raíces del polinomio cuasi-ortogonal w_n/ω son reales, distintas y al menos $\nu - 1$ de ellas se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$. Sólo queda localizar la raíz restante.

Como $p_{\nu-1}(\theta) \neq 0$, podemos definir

$$S_\nu(x) = p_\nu(x) - f_\nu(\theta, \omega\sigma) p_{\nu-1}(x),$$

Nótese que (ver Lema 2.5)

$$\frac{w_n(x)}{w(x)} = p_\nu(x, \omega\sigma) - \frac{p_\nu(\theta, \omega\sigma)}{p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma)} p_{\nu-1}(x, \omega\sigma) = S_\nu(x).$$

Supongamos que las raíces de w_n/ω son simples, están en $(-1, 1)$ y $f_\nu(\theta, \omega\sigma) \leq f_\nu(-1, \omega\sigma)$. Como $\frac{w_n(-1)}{w(-1)} \neq 0$, se sigue que $f_\nu(\theta, \omega\sigma) \neq f_\nu(-1, \omega\sigma)$. Se tiene entonces que

$$f_\nu(\theta, \omega\sigma) < f_\nu(-1, \omega\sigma).$$

A partir de (iii) en el Teorema 2.8 la raíz menor de S_n es menor que -1, lo cual contradice (i).

La desigualdad $f_\nu(\theta, \omega\sigma) < f_\nu(1, \omega\sigma)$ se prueba de manera similar, utilizando (iv) en el Teorema 2.8.

Para ver el recíproco, notemos que por (2.21)

$$f_\nu(-1, \omega\sigma) < f_\nu(\theta, \omega\sigma) < f_\nu(1, \omega\sigma).$$

Luego, de (v) en el Teorema 2.8, se sigue que S_ν tiene todos sus ceros en $(-1, 1)$. □

Lema 2.10. *Bajo las hipótesis de* Lema 2.9*, se tiene que las raíces de w_n/ω son simples y están en $(-1, 1)$ si y sólo si*

$$\theta \in \bigcup_{j=1}^{\nu} \Big(x_{\nu-1,j-1}(\omega_{-1}\sigma), x_{\nu-1,j}(\omega_1\sigma) \Big), \tag{2.22}$$

donde

$$\omega_{-1}(y) = (y+1)\omega(y) \quad \text{y} \quad \omega_1(y) = (1-y)\omega(y).$$

Demostración. Con el fin de establecer un vínculo con la condición (2.22), escribimos la descomposición en fracciones simples

$$f_\nu(x, \omega\sigma) = \alpha x + \beta + \sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{c_j}{x - x_{\nu-1,j}(\omega\sigma)},$$

donde $\left\{x_{\nu-1,j}(\omega\sigma)\right\}_{j=1}^{\nu-1}$ denotan los ceros de $p_{\nu-1}$. Sean

$$x_{\nu-1,j-1}(\omega\sigma) \quad \text{y} \quad x_{\nu-1,j}(\omega\sigma)$$

dos ceros consecutivos de $p_{\nu-1}$. Por el Teorema 1.5, existe al menos un punto

$$x_{\nu,j} \in (x_{\nu-1,j-1}(\omega\sigma), x_{\nu-1,j}(\omega\sigma))$$

tal que $p_\nu(x_{\nu,j}) = 0$. Así, para $j = 1, \ldots, \nu - 1$,

$$c_j = \frac{1}{f'_\nu(x_{\nu,j})} > 0,$$

donde por la igualdad (1.5),

$$f'_\nu(x_{\nu,j}) = \frac{p'_\nu(x_{\nu,j})p_{\nu-1}(x_{\nu,j}) - p_\nu(x_{\nu,j})p'_{\nu-1}(x_{\nu,j})}{p_{\nu-1}(x_{\nu,j})^2} > 0.$$

Además, $\alpha > 0$.

Fijemos $j \in \{1, \ldots, \nu\}$ y denotemos

$$I_j := \Big(x_{\nu-1,j-1}(\omega\sigma), x_{\nu-1,j}(\omega\sigma)\Big).$$

Como f_ν es continua y estrictamente creciente en el intervalo I_j y $f_\nu(I_j, \omega\sigma) = \mathbb{R}$, se sigue que, existen dos puntos únicos $z_{j,1}, z_{j,2} \in I_j$ tales que

$$f_\nu(z_{j,1}, \omega\sigma) = f_\nu(-1, \omega\sigma) \text{ y } f_\nu(z_{j,2}, \omega\sigma) = f_\nu(1, \omega\sigma). \quad (2.23)$$

Luego, θ satisface (2.21) si y sólo si $z_{j,1} < \theta < z_{j,2}$. Basta identificar los puntos $z_{j,1}$ y $z_{j,2}$. Pero los $z_{j,1}$ son las raíces del polinomio

$$Q_1(x) = p_\nu(x, w\sigma) - f_\nu(-1, w\sigma)p_{\nu-1}(x, w\sigma)$$

y los $z_{j,2}$ son las raíces del polinomio

$$Q_2(x) = p_\nu(x, w\sigma) - f_\nu(1, w\sigma)p_{\nu-1}(x, w\sigma).$$

Por construcción

$$R_1(x) = \frac{Q_1(x)}{1+x} \in \mathbb{P}_{\nu-1}$$

y R_1 es ortogonal a $\mathbb{P}_{\nu-2}$, con respecto a la medida $(1+x)\sigma(x)$. De hecho, si $S \in \mathbb{P}_{\nu-2}$, se tiene que

$$\int_{-1}^{1} R_1(x)S(x)(1+x)d\sigma(x) = \int_{-1}^{1} Q_1(x)S(x)d\sigma(x) = 0.$$

Dado que

$$Q_1(x) = (1+x)R_1(x),$$

los ceros de Q_1 distintos de -1, coinciden con los ceros del polinomio ortonormal de grado $\nu-1$ con respecto a la medida $(1+x)d\sigma(x)$. Esto es, para $1 < j \leq \nu$

$$z_{j,1} = x_{\nu-1,j}((1+x)d\sigma) = x_{\nu-1,j}(\omega_{-1}\sigma).$$

De forma similar, por construcción

$$R_2(x) = \frac{Q_2(x)}{1-x} \in \mathbb{P}_{\nu-1}.$$

y R_2 es ortogonal a $\mathbb{P}_{\nu-2}$, con respecto a la medida $(1-x)\sigma(x)$. De hecho, si $S \in \mathbb{P}_{\nu-2}$, se tiene que

$$\int_{-1}^{1} R_2(x)S(x)(1-x)d\sigma(x) = \int_{-1}^{1} Q_2(x)S(x)d\sigma(x) = 0.$$

Dado que,

$$Q_2(x) = (1-x)R_2(x),$$

se sigue que, los ceros de Q_2, distintos de 1, coinciden con las raíces del polinomio ortonormal de grado $\nu-1$ con respecto a la medida $(1-x)d\sigma(x)$. Es decir, para $1 \leq j \leq \nu-1$,

$$z_{j,2} = x_{\nu-1,j}((1-x)d\sigma) = x_{\nu-1,j}(\omega_1\sigma).$$

□

Se sigue de la demostración del Lema 2.10 que la condición (2.22) implica la condición $p_{\nu-1}(\theta, \omega\sigma) \neq 0$, pero puede suceder que $p_\nu(\theta, \omega\sigma) = 0$.

Falta discutir la positividad de los pesos correspondientes a las abscisas prefijadas que son raíces de ω para la fórmula de cuadratura de orden n con polinomio generador w_n dado en (2.16).

Lema 2.11. *Supongamos que*

$$\omega(x) \in \{1, x+1, 1-x, 1-x^2\}, \quad \nu = n - \deg(\omega)$$

y existe $j = 1, \ldots, \nu$ *tal que*

$$\theta \in I_j = \Big(x_{\nu-1,j-1}(\omega_{-1}\sigma), x_{\nu-1,j}(\omega_1\sigma)\Big),$$

con $p_\nu(\theta, \omega\sigma) \neq 0$, *donde*

$$\omega_{-1}(y) = (y+1)\omega(y) \quad \text{y} \quad \omega_1(y) = (1-y)\omega(y).$$

(i) *Si* $\omega(-1) = 0$, *entonces el peso* $\lambda_{n,0}$ *correspondiente a la abscisa prefijada* -1 *en las fórmulas de cuadratura* 2.5 *y* 2.8 *es positivo si y sólo si*

$$\theta > x_{\nu,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma), \quad \text{con} \quad \widetilde{\omega}_{-1}(y) = \omega(y)/(y+1).$$

(ii) *Si* $\omega(1) = 0$, *entonces el peso* $\lambda_{n,n+1}$ *correspondiente a la abscisa prefijada* 1 *en las fórmulas de cuadratura* 2.5 *y* 2.9 *es positivo si y sólo si*

$$\theta < x_{\nu,j}(\widetilde{\omega}_1\sigma), \quad \text{si} \quad \widetilde{\omega}_1(y) = \omega(y)/(1-y).$$

Demostración. Como la segunda afirmación se puede obtener a partir de la primera al sustituir x por $-x$, únicamente vamos a demostrar la primera.

En lo que sigue, escribiremos $p_j(x, \widetilde{\omega}_{-1}\sigma) = p_j(x)$. Por el Teorema 1.2, para cada $m \geq 0$ existe un escalar $a_m > 0$ tal que

$$a_m \frac{p_{m+1}(x)p_m(y) - p_{m+1}(y)p_m(x)}{x-y} = \sum_{j=0}^{m} p_j(x)p_j(y). \quad (2.24)$$

Pongamos $K_m(x,y) = \sum_{j=0}^{m} p_j(x)p_j(y)$. Como antes, observemos que, para cada $q_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$,

$$\int_{-1}^{1} K_m(x,-1)q_{m-1}(x)(x+1)\widetilde{\omega}_{-1}(x)d\sigma(x) = 0,$$

así existe una constante $\epsilon \neq 0$ tal que

$$K_m(x,-1) = \epsilon p_m(x,\omega\sigma),$$

y por lo tanto

$$\frac{K_m(x,-1)}{K_m(-1,-1)} = \frac{p_m(x,\omega\sigma)}{p_m(-1,\omega\sigma)} := r_m(x). \quad (2.25)$$

Por (2.24), así como por la ortogonalidad de p_j, deducimos que

$$\int_{-1}^{1} r_m(x)\widetilde{\omega}_{-1}(x)d\sigma(x) = \frac{1}{K_m(-1,-1)} \int_{-1}^{1} p_0^2(-1)\widetilde{\omega}_{-1}(x)d\sigma(x)$$
$$= \frac{1}{K_m(-1,-1)} > 0.$$

Para encontrar el peso correspondiente para la abscisa -1, sustituyamos la ecuación (2.16) en (2.18) para obtener

$$\lambda_{n,\,0} = \int_{-1}^{1} \frac{[p_\nu(x,\omega\sigma) - f_\nu(\theta,\omega\sigma)p_{\nu-1}(x,\omega\sigma)]\widetilde{\omega}_{-1}(x)d\sigma(x)}{[p_\nu(-1,\omega\sigma) - f_\nu(\theta,\omega\sigma)p_{\nu-1}(-1,\omega\sigma)]\widetilde{\omega}_{-1}(-1)}$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{f_\nu(-1,\omega\sigma)r_\nu(x) - f_\nu(\theta,\omega\sigma)r_{\nu-1}(x)}{f_\nu(-1,\omega\sigma) - f_\nu(\theta,\omega\sigma)} \frac{\widetilde{\omega}_{-1}(x)}{\widetilde{\omega}_{-1}(-1)} d\sigma(x)$$
$$= \frac{1}{\widetilde{\omega}_{-1}(-1)} \frac{\dfrac{f_\nu(\theta,\omega\sigma)}{K_{\nu-1}(-1,-1)} - \dfrac{f_\nu(-1,\omega\sigma)}{K_\nu(-1,-1)}}{f_\nu(\theta,\omega\sigma) - f_\nu(-1,\omega\sigma)}.$$

Por el Lema 2.9, $f_\nu(-1,\omega\sigma) < f_\nu(\theta,\omega\sigma)$, de aquí que

$$\widetilde{\omega}_{-1}(-1)(f_\nu(\theta,\omega\sigma) - f_\nu(-1,\omega\sigma)) > 0.$$

Con el fin de discutir la positividad de la expresión

$$\left(\frac{f_\nu(\theta,\omega\sigma)}{K_{\nu-1}(-1,-1)} - \frac{f_\nu(-1,\omega\sigma)}{K_\nu(-1,-1)}\right),$$

sea la función racional

$$r(x) = \left(\frac{f_\nu(x,\omega\sigma)}{K_{\nu-1}(-1,-1)} - \frac{f_\nu(-1,\omega\sigma)}{K_\nu(-1,-1)}\right).$$

Así, concluimos que $\lambda_{n,0} > 0$ si y sólo si $r(\theta) > 0$. Para analizar el signo de la función $r(\theta)$, observemos que, si $x \leq z_{j,1}$, entonces $r(x) \leq r(z_{j,1}) < 0$ y si $x \geq z_{j,2}$, se tiene que $r(x) \geq 0$ vea (2.23). Además, $z_{j,1} < x < z_{j,2}$ implica que $r(z_{j,1}) < r(x) < r(z_{j,2})$ si y sólo si

$$f_\nu(-1) < f_\nu(x) < f_\nu(1).$$

Luego, $\lambda_{n,0} > 0$ si y sólo si $\theta > x_{\nu,j}$, con $x_{\nu,j}$ la única raíz de f_ν en $(z_{j,1}, z_{j,2}) \subset I_j$.

Por (2.24) y (2.25) obtenemos

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{f_\nu(-1)}{K_\nu(-1,-1)}\left(\frac{K_\nu(x,-1)}{K_{\nu-1}(x,-1)} - 1\right) \\ &= \frac{f_\nu(-1)}{K_\nu(-1,-1)}\frac{p_\nu(-1)p_\nu(x)}{K_{\nu-1}(x,-1)} \end{aligned}$$

con raíces $x_{\nu,1}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma), \ldots, x_{\nu,\nu}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma)$. Comparando con los intervalos ordenados y disjuntos $I_1, \ldots, I_\nu$, encontramos que $x_{\nu,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma) \in I_j$, y así $z_{j,1} = x_{\nu,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma)$ como se afirmó anteriormente. □

Enunciemos el resultado principal

Teorema 2.12. *(a) Existe una regla positiva cuasi-Gauss de orden n con abscisa θ para $n \geq 1$ si y sólo si*

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n} \left(x_{n,j}^{LR}, x_{n,j+1}^{RR}\right) \setminus \left\{x_{n,j}^{G}\right\}.$$

(b) Existe una regla positiva cuasi-Radau por la izquierda de orden n con abscisa θ para $n \geq 2$ si y sólo si

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n-1} \left(x_{n-1,j}^{G}, x_{n-1,j+1}^{L}\right) \setminus \left\{x_{n,j}^{LR}\right\}.$$

(c) Existe una regla positiva cuasi-Radau por la derecha de orden n con abscisa θ para $n \geq 2$ si y sólo si

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n-2} \left(x_{n-1,j}^{L}, x_{n-1,j+1}^{G}\right) \setminus \left\{x_{n,j}^{RR}\right\}.$$

(d) Existe una regla positiva cuasi Lobatto de orden n con abscisa θ para $n \geq 3$ si y sólo si

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n-3} \left(x_{n-1,j}^{RR}, x_{n-1,j+1}^{LR}\right) \setminus \left\{x_{n,j}^{L}\right\}.$$

(e) Poniendo $\omega(x) \in \{1, x+1, 1-x, 1-x^2\}$ respectivamente y $\nu = n - \deg(\omega)$, tenemos que un polinomio generador para cualquier fórmula de cuadratura está dada por la ecuación (2.16).

Demostración. (a). Pongamos $\omega(x) = 1$ y $\nu = n$. Supongamos que

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n} \left(x_{n,j}^{LR}, x_{n,j+1}^{RR}\right) \setminus \left\{x_{n,j}^{G}\right\}.$$

En particular, $p_n(\theta, \sigma) \neq 0$.

Por otro lado, como

$$f_n(x, \sigma) = \frac{p_n(x, \sigma)}{p_{n-1}(x, \sigma)},$$

$p_{n-1}(\theta,\sigma) \neq 0$. Luego

$$p_{n-1}(\theta,\sigma)p_n(\theta,\sigma) \neq 0.$$

Ahora sabemos que el polinomio w_n dado en (2.16) está bien definido.

Por el Lema 2.10 con

$$x_{n-1,j-1}(\omega_{-1}\sigma) = x_{n,j}^{LR} < x_{n,j}(\sigma) = x_{n,j}^{G} < x_{n-1,j}(\omega_1\sigma)$$
$$= x_{n,j+1}^{RR},$$

las raíces $(x_{n,i})_{i=1}^n$ de w_n son simples y están en $(-1,1)$. Por el Lema 2.5 inciso (iii), existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n-2$ que posee como abscisa prefijada a θ. Esto es, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que

$$\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} Q(x_{n,j}), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad Q \in \mathbb{P}_{2n-2}.$$

Por la Definición 2.2 (inciso (i)) ésta es cuasi-Gauss. Veamos que es positiva.

Para $1 \leq i \leq n$, sea

$$g_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \Big(\frac{x - x_{n,j}}{x_{n,i} - x_{n,j}}\Big)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n-2$. Luego

$$0 < \int_{-1}^{1} g_i(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} g_i(x_{n,j}) = \lambda_{n,i}.$$

Recíprocamente, supongamos que existe una regla positiva cuasi-Gauss de orden n y con abscisa θ. Luego por el inciso (i) de la Definición (2.2), ésta tiene grado de precisión $2n-2$.

Pongamos $\omega(x) = 1$ y $\nu = n$. Por el inciso (i) del Lema 2.5, $P_{n-1}(\theta,\sigma) \neq 0$. Así, el polinomio $w_n(x)$ dado por (2.16) está bién definido.

Si $P_n(\theta,\sigma)=0$, se sigue de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P_n(x,\sigma)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, segun en el Teorema 2.1 la fórmula tendría grado de precisión $2n-1$ y esto es una contradicción. Además, como la fórmula tiene grado de precisión $2n-2$, ésta no es la Gauss (ver Teorema 2.1), luego $P_n(\theta,\sigma)\neq 0$.

Hemos obtenido que $P_n(\theta,\sigma)P_{n-1}(\theta,\sigma)\neq 0$. Por el inciso (iii) del Lema 2.5, w_n es un polinomio generador. Por lo que sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Gauss todas las raíces están en $(-1,1)$. Por el Lema 2.9 (ver (2.21)),

$$f_n(-1,\sigma)<f_n(\theta,\sigma)<f_n(1,\sigma),$$

donde

$$f_n(x,\sigma)=\frac{p_n(x,\sigma)}{p_{n-1}(x,\sigma)}.$$

Como las raíces de w_n son simples y están en $(-1,1)$, según el Lema 2.10 se tiene que

$$\theta\in\bigcup_{j=0}^{n}\left(x_{n,j}^{LR},x_{n,j+1}^{RR}\right).$$

(b). Pongamos $\omega(x)=x+1$, $\nu=n-1$. Supongamos que

$$\theta\in\bigcup_{j=0}^{n-2}\left(x_{n-1,j}^{G},x_{n-1,j+1}^{L}\right)\setminus\left\{x_{n,j}^{LR}\right\}.$$

En particular, $p_{n-1}(\theta,(x+1)\sigma)\neq 0$.

Por otro lado, como

$$f_{n-1}(x,\sigma)=\frac{p_{n-1}(x,\sigma)}{p_{n-2}(x,\sigma)},$$

$p_{n-2}(\theta,(x+1)\sigma)\neq 0$.

Luego

$$p_{n-2}(\theta,(x+1)\sigma)p_{n-1}(\theta,(x+1)\sigma)\neq 0.$$

En este caso, aplicando los Lemas 2.10 y 2.5 con

$$\omega(x) = 1 + x, \qquad \nu = n - 1$$

y

$$w_n(x) = \omega(x) \left(p_{n-1}(x, \omega\sigma) - \frac{p_{n-1}(\theta, \omega\sigma)}{p_{n-2}(\theta, \omega\sigma)} p_{n-2}(x, \omega\sigma) \right),$$

concluimos que las raíces $(x_{n,j})_{j=1}^{n-1}$ de w_n/ω son simples y están en $(-1, 1)$. Además, existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n - 3$ que posee como abscisa prefijada a las raíces de $(x - \theta)\omega(x)$: es decir, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que para todo $Q \in \mathbb{P}_{2n-3}$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)(x + 1)dx = \lambda_{n,0} Q(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} Q(x_{n,j}).$$

Según la Definición 2.2 (inciso (ii)) ésta fórmula es cuasi-Radau por la izquierda.

Veamos que es positiva. Para $1 \leq i \leq n - 1$, sea

$$g_i(x) = \frac{1 + x}{1 + x_{n,i}} \prod_{j=1, j\neq i}^{n-1} \left(\frac{x - x_{n,j}}{x_{n,i} - x_{n,j}} \right)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n - 3$. Así,

$$0 < \int_{-1}^{1} g_i(x)(x + 1)dx = \lambda_{n,0} g_i(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} g_i(x_{n,j}) = \lambda_{n,i}.$$

Por otra parte, como $\omega(-1) = 0$ y para $0 \leq j \leq n - 2$ $x_{n-1,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma) = x^G_{n-1,j} < \theta$, por el inciso (i) del Lema 2.11, el peso $\lambda_{n,0}$ es positivo.

Recíprocamente, supongamos que existe una regla positiva cuasi-Radau por la izquierda de orden n con abscisa θ. Pongamos $\omega(x) = x + 1$ y $\nu = n - 1$. Luego por el inciso (ii) de la Definición (2.2), ésta tiene grado de precisión $2n - 3$. Por

el inciso (i) del Lema 2.5, $P_{n-2}(\theta, \omega\sigma) \neq 0$. Así, el polinomio $w_n(x)/\omega(x)$ dado por (2.16) está bién definido.

Si $P_{n-1}(\theta, \omega\sigma) = 0$, se sigue de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P_{n-1}(x, \omega\sigma)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, segun en el Teorema 2.3 la fórmula tendría grado de precisión $2n-2$ y esto es una contradicción. Además, como la fórmula tiene grado de precisión $2n-3$, ésta no es la de Radau (ver Teorema 2.3), luego $P_n(\theta, \omega\sigma) \neq 0$.

Hemos obtenido que $P_{n-2}(\theta, \omega\sigma)P_{n-1}(\theta, \omega\sigma) \neq 0$. Por el inciso (iii) del Lema 2.5, w_n/ω es un polinomio generador. Por lo que sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Radau por la izquierda todas las raíces distintas de -1 están en $(-1, 1)$. Por el Lema 2.9 (ver (2.21)),

$$f_n(-1, \sigma) < f_n(\theta, \sigma) < f_n(1, \sigma),$$

donde

$$f_{n-1}(x, \sigma) = \frac{p_{n-1}(x, \sigma)}{p_{n-2}(x, \sigma)}.$$

Como las raíces de w_n/ω son simples y están en $(-1, 1)$, según el Lema 2.10 se tiene que

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n-1} \left(x_{n-1,j}^{G}, x_{n-1,j+1}^{L}\right) \setminus \left\{x_{n,j}^{LR}\right\}.$$

(c). Pongamos $\omega(x) = 1 - x$, $\nu = n - 1$. Supongamos que

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n-2} \left(x_{n-1,j}^{L}, x_{n-1,j+1}^{G}\right) \setminus \left\{x_{n,j}^{RR}\right\}.$$

En particular, $p_{n-1}(\theta, (1-x)\sigma) \neq 0$.

Por otro lado, como

$$f_{n-1}(x, \sigma) = \frac{p_{n-1}(x, \sigma)}{p_{n-2}(x, \sigma)},$$

$p_{n-2}(\theta, (1-x)\sigma) \neq 0$.

Luego

$$p_{n-2}(\theta,(1-x)\sigma)p_{n-1}(\theta,(1-x)\sigma)\neq 0.$$

En este caso, aplicando los Lemas 2.10 y 2.5 con

$$\omega(x)=1-x,\qquad \nu=n-1$$

y

$$w_n(x)=\omega(x)\left(p_{n-1}(x,\omega\sigma)-\frac{p_{n-1}(\theta,\omega\sigma)}{p_{n-2}(\theta,\omega\sigma)}p_{n-2}(x,\omega\sigma)\right),$$

concluimos que las raíces $(x_{n,j})_{j=1}^{n-1}$ de w_n/ω son simples y están en $(-1,1)$. Además, existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n-3$ que posee como abscisa prefijada a las raíces de $(x-\theta)\omega(x)$: es decir, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que para todo $Q\in\mathbb{P}_{2n-3}$,

$$\int_{-1}^{1}Q(x)(1-x)dx=\lambda_{n,n+1}Q(1)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{n,j}Q(x_{n,j}).$$

Según la Definición 2.2 (inciso (iii)) ésta fórmula es cuasi-Radau por la derecha.

Veamos que es positiva. Para $1\leq i\leq n-1$, sea

$$g_i(x)=\frac{1-x}{1-x_{n,i}}\prod_{j=1,j\neq i}^{n-1}\Big(\frac{x-x_{n,j}}{x_{n,i}-x_{n,j}}\Big)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n-3$. Así,

$$0<\int_{-1}^{1}g_i(x)(1-x)dx=\lambda_{n,n+1}g_i(1)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{n,j}g_i(x_{n,j})=\lambda_{n,i}.$$

Por otra parte, como $\omega(1)=0$ y para $0\leq j\leq n-2$ $x_{n-1,j}(\widetilde{\omega}_1\sigma)=x^G_{n-1,j+1}>\theta$, por el inciso (i) del Lema 2.11, el peso $\lambda_{n,n+1}$ es positivo.

Recíprocamente, supongamos que existe una regla positiva cuasi-Radau por la derecha de orden n con abscisa θ.

Pongamos $\omega(x) = 1-x$ y $\nu = n-1$. Luego por el inciso (iii) de la Definición (2.2), ésta tiene grado de precisión $2n-3$. Por el inciso (i) del Lema 2.5, $P_{n-2}(\theta, \omega\sigma) \neq 0$. Así, el polinomio $w_n(x)/\omega(x)$ dado por (2.16) está bién definido.

Si $P_{n-1}(\theta, \omega\sigma) = 0$, se sigue de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P_{n-1}(x, \omega\sigma)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, según en el Teorema 2.4 la fórmula tendría grado de precisión $2n-2$ y esto es una contradicción. Además, como la fórmula tiene grado de precisión $2n-3$, ésta no es la de Radau (ver Teorema 2.4), luego $P_n(\theta, \omega\sigma) \neq 0$.

Hemos obtenido que $P_{n-2}(\theta, \omega\sigma)P_{n-1}(\theta, \omega\sigma) \neq 0$. Por el inciso (iii) del Lema 2.5, w_n/ω es un polinomio generador. Por lo que sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Radau por la derecha todas las raíces distintas de 1 están en $(-1, 1)$. Por el Lema 2.9 (ver (2.21)),

$$f_n(-1, \sigma) < f_n(\theta, \sigma) < f_n(1, \sigma),$$

donde

$$f_{n-1}(x, \sigma) = \frac{p_{n-1}(x, \sigma)}{p_{n-2}(x, \sigma)}.$$

Como las raíces de w_n/ω son simples y están en $(-1, 1)$, según el Lema 2.10 se tiene que

$$\theta \in \bigcup_{j=0}^{n-2} \left(x^L_{n-1,j}, x^G_{n-1,j+1}\right) \setminus \left\{x^{RR}_{n,j}\right\}.$$

(d). Pongamos $\omega(x) = (x+1)(1-x)$, $\nu = n-2$. Supongamos que existe $j \in \{1, \ldots, n-3\}$, tal que

$$\theta \in \left(x^{RR}_{n-1,j}, x^{LR}_{n-1,j+1}\right) \quad \text{y} \quad \theta \neq x^L_{n,j}.$$

En particular, $p_{n-2}(\theta, (1-x)(1+x)\sigma) \neq 0$.

Por otro lado, como

$$f_{n-2}(x, \sigma) = \frac{p_{n-2}(x, \sigma)}{p_{n-3}(x, \sigma)},$$

$p_{n-3}(\theta,(1-x)(1+x)\sigma) \neq 0$.

Luego

$$p_{n-2}(\theta,(1-x)(1+x)\sigma)p_{n-3}(\theta,(1-x)(1+x)\sigma) \neq 0.$$

En este caso, aplicando los Lemas 2.10 y 2.5 con

$$\omega(x) = (1-x)(1+x), \qquad \nu = n-2$$

y

$$w_n(x) = \omega(x)\left(p_{n-2}(x,\omega\sigma) - \frac{p_{n-2}(\theta,\omega\sigma)}{p_{n-3}(\theta,\omega\sigma)}p_{n-2}(x,\omega\sigma)\right),$$

concluimos que las raíces $(x_{n,j})_{j=1}^{n-2}$ de w_n/ω son simples y están en $(-1,1)$. Además, existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n-4$ que posee como abscisa prefijada a las raíces de $(x-\theta)\omega(x)$: es decir, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que para todo $Q \in \mathbb{P}_{2n-4}$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)(1-x)(1+x)dx = \lambda_{n,0}Q(-1) + \lambda_{n,n+1}Q(1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}Q(x_{n,j}).$$

Según la Definición 2.2 (inciso (iv)) ésta fórmula es cuasi-Lobatto.

Veamos que es positiva. Para $1 \leq i \leq n-2$, sea

$$g_i(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x_{n,i})(1-x_{n,i})} \prod_{j=1, j\neq i}^{n-2} \left(\frac{x-x_{n,j}}{x_{n,i}-x_{n,j}}\right)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n-4$. Así,

$$0 < \int_{-1}^{1} g_i(x)(1-x)(1+x)dx = \lambda_{n,0}g_i(-1) + \lambda_{n,n+1}g_i(1)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{n,j}g_i(x_{n,j})=\lambda_{n,i}.$$

Por otra parte, dado que $\omega(-1)=0$, $\omega(1)=0$ y para $0\leq j\leq n-2$,

$$x_{n-2,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma)=x^G_{n-1,j}<\theta,\qquad x_{n-2,j}(\widetilde{\omega}_1\sigma)=x^G_{n-1,j+1}>\theta,$$

por los incisos (i) y (ii) del Lema 2.11, los pesos $\lambda_{n,0}$ y $\lambda_{n,n+1}$ son positivos.

Recíprocamente, supongamos que existe una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Lobatto de orden n, con abscisa θ.

Pongamos $\omega(x)=1-x^2$ y $\nu=n-2$. Luego por el inciso (iv) de la Definición (2.2), ésta fórmula tiene grado de precisión $2n-4$. Por el inciso (i) del Lema 2.5, $P_{n-3}(\theta,\omega\sigma)\neq 0$. Así, el polinomio $w_n(x)/\omega(x)$ dado por (2.16) está bién definido.

Si $P_{n-2}(\theta,\omega\sigma)=0$, se sigue de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P_{n-2}(x,\omega\sigma)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, según en el Teorema 2.2 la fórmula tendría grado de precisión $2n-3$ y esto es una contradicción. Además, como la fórmula tiene grado de precisión $2n-3$, ésta no es la de Lobatto (ver Teorema 2.2), luego $P_{n-2}(\theta,\omega\sigma)\neq 0$.

Hemos obtenido que $P_{n-2}(\theta,\omega\sigma)P_{n-3}(\theta,\omega\sigma)\neq 0$. Por el inciso (iii) del Lema 2.5, w_n/ω es un polinomio generador. Por lo que sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Lobatto todas las raíces distintas de -1 y 1 están en $(-1,1)$. Por el Lema 2.9 (ver (2.21)),

$$f_n(-1,\sigma)<f_n(\theta,\sigma)<f_n(1,\sigma),$$

donde

$$f_{n-2}(x,\sigma)=\frac{p_{n-2}(x,\sigma)}{p_{n-3}(x,\sigma)}.$$

Como las raíces de w_n/ω son simples y están en $(-1,1)$, según el Lema 2.10 se tiene que existe j, $0\leq j\leq n-3$ tal que

$$\theta\in\left(x^{RR}_{n-1,j},x^{LR}_{n-1,j+1}\right)\quad\text{y}\quad\theta\neq x^L_{n,j}.$$

(e). Se sigue del Lema 2.5 inciso (iv). □

Dado que los intervalos considerados en el Teorema 2.12 incisos (b) y (c) son distintos y la unión de sus clausuras da el intervalo $[-1,1]$ (y de manera similar los incisos (a) y (d) cuando n es reemplazado por $n-1$), se sigue que podemos obtener dos conclusiones diferentes para cualquier abscisa prefijada $\theta \in [-1,1]$.

Corolario 2.13. *Supongamos que* $\theta \in (-1,1)$.

(i) *Si* $n \geq 3$ *y*

$$\theta \in \bigcup_{j=1}^{n} \left\{x_{n,j}^{LR}, x_{n,j}^{RR}, x_{n,j}^{L}\right\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} \left\{x_{n-1,j}^{G}\right\},$$

entonces existe una regla positiva de cuadratura con abscisa θ *que puede ser de Gauss de orden* $(n-1)$*, de Radau de orden* n *o de Lobatto de orden* n*. Si* θ *no está en el conjunto anterior, existe una regla positiva de orden* n *con abscisa* θ *que puede ser cuasi-Radau por la izquierda o cuasi-Radau por la derecha.*

(ii) *Si* $n \geq 3$ *y*

$$\theta \in \bigcup_{j=1}^{n} \{x_{n,j}^{L}\} \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} \{x_{n-1,j}^{G}, x_{n-1,j}^{LR}, x_{n-1,j}^{RR}\},$$

entonces existen ya sea una regla positiva con abscisa θ *que puede ser de Gauss de orden* $(n-1)$*, de Radau de orden* n *o de Lobatto de orden* n*. Si* θ *no está en el conjunto anterior, existe una regla positiva con abscisa* θ *que pueder cuasi-Gauss de orden* $(n-1)$ *o cuasi-Lobatto de orden* n*.*

Observación 2.1. Con el fin de comprender mejor las restricciones del parámetro θ, analizemos la regla cuasi-Radau por la izquierda enunciada en el Teorema 2.12.

Cuando θ se acerca al punto $x_{n,j+1}^{LR}$, nuestra fórmula de cuadratura se convierte en la regla clásica de Radau por la izquierda de orden n, con grado de precisión $2n-2$ y no $2n-3$ como se requiere para una regla cuasi-Radau.

Por otra parte, si θ se acerca por el lado izquierdo al punto $x^G_{n-1,j}$, obtenemos la regla clásica de Gauss de orden $(n-1)$ (con grado de precisión $2n-3$), puesto que el peso correspondiente a la abscisa -1 se anula, como se vio en la demostración del Lema 2.11.

Finalmente, cuando θ se acerca al punto $x^L_{n,j+1}$ por el lado derecho, el nodo mayor de nuestra fórmula de cuadratura se aproxima a 1 (ver Lema 2.9); así obtenemos la fórmula clásica de Lobatto de orden n (con grado de precisión $2n-3$).

Fenómenos similares ocurren para las otras tres fórmulas de cuadratura del Teorema 2.12.

2.2. Cuadraturas con un nodo fijo

Estamos en condiciones de demostrar los Teoremas principales de está sección, a saber los Teoremas 2.14, 2.15, 2.16 y 2.17. Estos resultados serán de utilidad para identificar todos los puntos donde los polinomios de la mejor aproximación unilateral interpolan a la función G_θ.

Para $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ y $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $x^{(\alpha,\beta)}_{n,i}$ a los ceros del polinomio de Jacobi $P^{(\alpha,\beta)}_n$, $1 \leq i \leq n$.

Teorema 2.14. *Para $\theta \in (-1,1)$ y $n \geq 3$, existe una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Gauss con abscisa θ de orden n y grado de precisión $2n-2$ si y sólo si*

$$\theta \in QG_n := \bigcup_{j=1}^{n} \left(x^{(0,1)}_{n-1,j-1}, x^{(1,0)}_{n-1,j} \right) \setminus \left\{ x^{(0,0)}_{n,j} \right\}.$$

Si existe, la fórmula de cuadratura es única y

$$w_n(x) = \left(P^{(0,0)}_n(x) - \frac{P^{(0,0)}_n(\theta)}{P^{(0,0)}_{n-1}(\theta)} P^{(0,0)}_{n-1}(x) \right) \tag{2.26}$$

es un polinomio generador.

Demostración. Supongamos que $\theta \in QG_n$. En particular, $P_n^{(0,0)}(\theta) \neq 0$.

Por otra parte, dado que

$$f_n(x,\sigma) = \frac{p_n^{(0,0)}(x,\sigma)}{p_{n-1}^{(0,0)}(x,\sigma)},$$

se sigue que $p_{n-1}^{(0,0)}(x,\sigma) \neq 0$. De aquí que

$$P_{n-1}^{(0,0)}(\theta) P_n^{(0,0)}(\theta) \neq 0.$$

Luego el polinomio w_n dado en (2.26) está bién definido.

Por el Lema 2.10 con

$$x_{n-1,j-1}(\omega_{-1}\sigma) = x_{n-1,j-1}^{(0,1)} < x_{n,j}(\sigma) = x_{n,j}^{(0,0)}$$

$$< x_{n-1,j}(\omega_1\sigma) = x_{n-1,j}^{(1,0)},$$

las raíces $\left(x_{n,i}^{(0,0)}\right)_{i=1}^{n}$ de w_n son simples y están en $(-1,1)$. Por el Lema 2.5 inciso (iii), existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n-2$ que posee como abscisa prefijada a θ. Esto es, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que

$$\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} Q\left(x_{n,j}^{(0,0)}\right), \quad \text{para todo} \quad Q \in \mathbb{P}_{2n-2}.$$

Por la Definición 2.2 (inciso (i)), ésta es cuasi-Gauss. Veamos que es positiva.

Para $1 \leq i \leq n$, sea

$$g_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_{n,j}^{(0,0)}}{x_{n,i}^{(0,0)} - x_{n,j}^{(0,0)}}\right)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n-2$. Luego

$$0 < \int_{-1}^{1} g_i(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} g_i\left(x_{n,j}^{(0,0)}\right) = \lambda_{n,i}.$$

Recíprocamente, supongamos que existe una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Gauss de orden n con grado de precisión $2n-2$ y abscisa θ.

Pongamos $\omega(x)=1$ y $\nu=n$. Por el inciso (i) del Lema 2.5, $P_{n-1}^{(0,0)}(\theta)\neq 0$. Luego el polinomio $w_n(x)$ dado por (2.26) está bién definido.

Si $P_n^{(0,0)}(\theta)=0$, se sigue de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P_n^{(0,0)}(x)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, según en el Teorema 2.1 la fórmula tendría grado de precisión $2n-1$ y esto es una contradicción. Además, como la fórmula tiene grado de precisión $2n-2$, ésta no es la Gauss (ver Teorema 2.1), luego $P_n^{(0,0)}(\theta)\neq 0$.

Hemos obtenido que $P_n^{(0,0)}(\theta)P_{n-1}^{(0,0)}(\theta)\neq 0$. Se sigue de (iii) en el Lema 2.5 que w_n es un polinomio generador. Por lo tanto sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Gauss todas las raíces están en $(-1,1)$. Por el Lema 2.9 (ver (2.21)),

$$f_n(-1)<f_n(\theta)<f_n(1),$$

donde

$$f_n(x)=\frac{p_n^{(0,0)}(x,\sigma)}{p_{n-1}^{(0,0)}(x,\sigma)}.$$

Como las raíces de w_n son simples y están $(-1,1)$, según el Lema 2.10 se tiene que

$$\theta\in\bigcup_{j=1}^{n}\left(x_{n-1,j-1}^{(0,1)},x_{n-1,j}^{(1,0)}\right).$$

□

Teorema 2.15. *Para $\theta\in(-1,1)$ y $n\geq 3$, existe una regla de cuadratura positiva cuasi-Radau por la izquierda con abscisa θ de orden n y grado de precisión $2n-3$ si y sólo si*

$$\theta\in QLR_n:=\bigcup_{j=1}^{n-1}\left(x_{n-2,j-1}^{(0,0)},x_{n-2,j}^{(1,1)}\right)\setminus\left\{x_{n-1,j}^{(0,1)}\right\}.$$

Si existe, la fórmula de cuadratura es única y

$$w_n(x) = (1+x)\Big(P_{n-1}^{(0,1)}(x) - \frac{P_{n-1}^{(0,1)}(\theta)}{P_{n-2}^{(0,1)}(\theta)} P_{n-2}^{(0,1)}(x)\Big) \qquad (2.27)$$

es polinomio generador.

Demostración. Supongamos que $\theta \in QLR_n$. Se sigue que $P_{n-1}^{(0,1)}(\theta) \neq 0$. Además, como

$$f_n(x,\sigma) = \frac{P_{n-1}^{(0,1)}(x,\sigma)}{P_{n-2}^{(0,1)}(x,\sigma)},$$

$P_{n-2}^{(0,1)}(x,\sigma) \neq 0$. De aquí que

$$P_{n-1}^{(0,1)}(\theta) P_{n-2}^{(0,1)}(\theta) \neq 0.$$

Luego el polinomio w_n/ω dado en (2.27), esta bién definido.

Por el Lema 2.10 con $\omega(x) = 1+x$, $\nu = n-1$ y

$$x_{n-2,j-1}(\omega_{-1}\sigma) < x_{n-1,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma) = x_{n-2,j-1}^{(0,0)} < x_{n-1,j}(\omega\sigma)$$
$$= x_{n-1,j}^{(0,1)} < x_{n-2,j}(\omega_1\sigma) = x_{n-2,j}^{(1,1)},$$

concluimos que las raíces $\Big(x_{n,j}^{(0,1)}\Big)_{j=1}^{n-1}$ de w_n/ω son simples y están en $(-1,1)$. Además, existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n-3$ que posee como abscisa prefijada a las raíces de $(x-\theta)\omega(x)$: es decir, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que para todo $Q \in \mathbb{P}_{2n-3}$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)(x+1)dx = \lambda_{n,0} Q(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} Q\Big(x_{n,j}^{(0,1)}\Big).$$

Según la Definición 2.2 (inciso (ii)) ésta fórmula es cuasi-Radau por la izquierda.

Veamos que es positiva. Para $1 \leq i \leq n-1$, sea

$$g_i(x) = \frac{1+x}{1+x_{n,i}^{(0,1)}} \prod_{j=1, j\neq i}^{n-1} \Big(\frac{x - x_{n,j}^{(0,1)}}{x_{n,i}^{(0,1)} - x_{n,j}^{(0,1)}}\Big)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n-3$. Así,

$$0 < \int_{-1}^{1} g_i(x)(x+1)dx = \lambda_{n,0} g_i(-1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} g_i\Big(x_{n,j}^{(0,1)}\Big)$$
$$= \lambda_{n,i}.$$

Por otra parte, como $\omega(-1) = 0$ y para $0 \leq j \leq n-2$ $x_{n-1,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma) = x_{n-1,j}^{(0,0)} < \theta$, por el inciso (i) del Lema 2.11, el peso $\lambda_{n,0}$ es positivo.

Recíprocamente, supongamos que existe una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Radau por la izquierda de orden n, con abscisa θ y grado de precisión $2n-3$.

Se sigue del Lema 2.5 (con $\omega(x) = x+1$, $\nu = n-1$) que $P_{n-2}^{(0,1)}(\theta) \neq 0$. Luego el polinomio $w_n(x)$ dado por (2.27) está bién definido.

Si $P_{n-1}^{(0,1)}(\theta) = 0$, se sigue de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P_{n-1}^{(0,1)}(x)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, según en el Teorema 2.3 la fórmula tendría grado de precisión $2n-2$ y esto es una contradicción. Además, como la fórmula tiene grado de precisión $2n-3$, ésta no es Radau por la izquierda (ver Teorema 2.3), luego $P_{n-1}^{(0,1)}(\theta) \neq 0$.

Hemos obtenido que $P_{n-1}^{(0,1)}(\theta)P_{n-2}^{(0,1)}(\theta) \neq 0$. Por el Lema 2.5 inciso (iii), w_n es un polinomio generador. Por lo tanto sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Radau por la izquierda todas las raíces están en $(-1,1)$. Por el Lema 2.9 (ver (2.21)),

$$f_n(-1) < f_n(\theta) < f_n(1),$$

donde

$$f_n(x) = \frac{p_n^{(0,1)}(x)}{p_{n-1}^{(0,1)}(x)}.$$

Como las raíces de w_n son simples y están en $[-1,1)$, según el Lema 2.10 se tiene que

$$\theta \in \bigcup_{j=1}^{n-1} \Big(x_{n-2,j-1}^{(0,0)}, x_{n-2,j}^{(1,1)}\Big).$$

□

Teorema 2.16. *Para $\theta \in (-1,1)$ y $n \geq 3$, existe una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Radau por la derecha con abscisa θ de orden n y grado de precisión $2n-3$ si y sólo si*

$$\theta \in QRR_n := \bigcup_{j=1}^{n-1} \left(x_{n-2,j-1}^{(1,1)}, x_{n-2,j}^{(0,0)} \right) \setminus \left\{ x_{n-1,j}^{(1,0)} \right\}.$$

Si existe, la regla de cuadratura es única y

$$w_n(x) = (1-x)\Big(P_{n-1}^{(1,0)}(x) - \frac{P_{n-1}^{(1,0)}(\theta)}{P_{n-2}^{(0,1)}(\theta)} P_{n-2}^{(1,0)}(x) \Big) \tag{2.28}$$

es polinomio generador.

Demostración. Supongamos que $\theta \in QRR_n$. En particular, $p_{n-1}^{(1,0)}(\theta,\sigma) \neq 0$.

Por otro lado, como

$$f_{n-1}(x,\sigma) = \frac{p_{n-1}^{(1,0)}(x,\sigma)}{p_{n-2}^{(1,0)}(x,\sigma)},$$

$p_{n-2}^{(1,0)}(\theta,\sigma) \neq 0$.

Luego

$$p_{n-2}^{(1,0)}(\theta,\sigma) p_{n-1}^{(1,0)}(\theta,\sigma) \neq 0.$$

En este caso, aplicando los Lemas 2.10 y 2.5 con

$$\omega(x) = 1-x, \qquad \nu = n-1$$

y

$$w_n(x) = \omega(x) \left(p_{n-1}^{(1,0)}(x,\omega\sigma) - \frac{p_{n-1}^{(1,0)}(\theta,\omega\sigma)}{p_{n-2}^{(1,0)}(\theta,\omega\sigma)} p_{n-2}^{(1,0)}(x,\omega\sigma) \right),$$

concluimos que las raíces $\left(x_{n,j}^{(1,0)} \right)_{j=1}^{n-1}$ de w_n/ω son simples y están en $(-1,1)$. Además, existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n-3$ que posee

como abscisa prefijada a las raíces de $(x-\theta)\omega(x)$: es decir, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que para todo $Q \in \mathbb{P}_{2n-3}$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)(1-x)dx = \lambda_{n,n+1}Q(1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} Q\Big(x_{n,j}^{(1,0)}\Big).$$

Según la Definición 2.2 (inciso (iii)) ésta fórmula es cuasi-Radau por la derecha.

Veamos que es positiva. Para $1 \leq i \leq n-1$, sea

$$g_i(x) = \frac{1-x}{1-x_{n,i}^{(1,0)}} \prod_{j=1, j\neq i}^{n-1} \Big(\frac{x - x_{n,j}^{(1,0)}}{x_{n,i}^{(1,0)} - x_{n,j}^{(1,0)}}\Big)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n-3$. Así,

$$0 < \int_{-1}^{1} g_i(x)(1-x)dx = \lambda_{n,n+1} g_i(1) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} g_i\Big(x_{n,j}^{(1,0)}\Big)$$

$$= \lambda_{n,i}.$$

Por otra parte, como $\omega(1) = 0$ y para $0 \leq j \leq n-2$ $x_{n-1,j}^{(1,0)}(\widetilde{\omega}_1\sigma) = x_{n-1,j}^{(0,0)} > \theta$, por el inciso (i) del Lema 2.11, el peso $\lambda_{n,n+1}$ es positivo.

Recíprocamente, supongamos que existe una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Radau por la derecha de orden n, con abscisa θ y grado de precisión $2n-3$.

Se sigue del Lema 2.5 (con $\omega(x) = 1-x$, $\nu = n-1$) que $P_{n-2}^{(1,0)}(\theta) \neq 0$. Luego el polinomio $w_n(x)$ dado por (2.28) está bién definido.

Si $P_{n-1}^{(1,0)}(\theta) = 0$, entonces de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P_{n-1}^{(1,0)}(x)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, según en el Teorema 2.4 la fórmula tendría grado de precisión $2n-2$ y esto es una contradicción. Además, dado que la fórmula tiene grado de precisión $2n-3$, ésta no es Radau por la derecha (ver Teorema 2.4), luego $P_{n-1}^{(1,0)}(\theta) \neq 0$.

Hemos obtenido que $P_{n-1}^{(1,0)}(\theta)P_{n-2}^{(1,0)}(\theta) \neq 0$. Se sigue de (iii) en el Lema 2.5 que w_n es un polinomio generador. Por lo tanto

sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Radau por la derecha todas las raíces están en $(-1, 1]$. Por el Lema 2.9 (ver (2.21)),

$$f_n(-1) < f_n(\theta) < f_n(1),$$

donde

$$f_n(x) = \frac{p_n^{(1,0)}(x)}{p_{n-1}^{(1,0)}(x)}.$$

Como las raíces de w_n son simples y están en $(-1, 1)$, según el Lema 2.10 se tiene que

$$\theta \in \bigcup_{j=1}^{n-1} \Big(x_{n-2,j-1}^{(1,1)}, x_{n-2,j}^{(0,0)} \Big).$$

□

Teorema 2.17. *Para $\theta \in (-1, 1)$ y $n \geq 3$, existe una regla de cuadratura positiva cuasi-Lobatto de orden n, con abscisa θ y grado de precisión $2n-4$ si y sólo si*

$$\theta \in QL_n := \bigcup_{j=1}^{n-2} \Big(x_{n-3,j-1}^{(1,0)}, x_{n-3,j}^{(0,1)} \Big) \setminus \Big\{ x_{n-2,j}^{(1,1)} \Big\}.$$

Si existe, la fórmula de cuadratura es única y

$$w_n(x) = (1-x^2)\Big(P_{n-2}^{(1,1)}(x) - \frac{P_{n-2}^{(1,1)}(\theta)}{P_{n-3}^{(1,1)}(\theta, \omega\sigma)} P_{n-3}^{(1,1)}(x) \Big). \quad (2.29)$$

es polinomio generador.

Demostración. Sea $\theta \in QL_n$, existe $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ tal que

$$x_{n-3,j-1}^{(1,0)} < \theta < x_{n-3,j}^{(0,1)} \qquad \text{y} \qquad \theta \neq x_{n-2,j}^{(1,1)}.$$

En particular, $p_{n-2}^{(1,1)}(\theta, \sigma) \neq 0$.

Por otro lado, como

$$f_{n-2}(x, \sigma) = \frac{p_{n-2}^{(1,1)}(x, \sigma)}{p_{n-3}^{(1,1)}(x, \sigma)},$$

$p_{n-3}^{(1,1)}(\theta,\sigma) \neq 0$.

Luego

$$p_{n-2}^{(1,1)}(\theta,\sigma)p_{n-3}^{(1,1)}(\theta,\sigma) \neq 0.$$

En este caso, aplicando los Lemas 2.10 y 2.5 con

$$\omega(x) = (1-x)(1+x), \qquad \nu = n-2$$

y

$$w_n(x) = \omega(x)\left(p_{n-2}^{(1,1)}(x,\omega\sigma) - \frac{p_{n-2}^{(1,1)}(\theta,\omega\sigma)}{p_{n-3}^{(1,1)}(\theta,\omega\sigma)}p_{n-2}^{(1,1)}(x,\omega\sigma)\right),$$

concluimos que las raíces $\left(x_{n,j}^{(1,1)}\right)_{j=1}^{n-2}$ de w_n/ω son simples y están en $(-1,1)$. Además, existe una única fórmula de cuadratura de orden n, con grado de precisión $2n-4$ que posee como abscisa prefijada a las raíces de $(x-\theta)\omega(x)$: es decir, existen escalares $\lambda_{n,j}$ tales que para todo $Q \in \mathbb{P}_{2n-4}$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)(1-x)(1+x)dx = \lambda_{n,0}Q(-1) + \lambda_{n,n+1}Q(1)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}Q\left(x_{n,j}^{(1,1)}\right).$$

Según la Definición 2.2 (inciso (iii)) ésta fórmula es cuasi-Lobatto.

Veamos que es positiva. Para $1 \leq i \leq n-2$, sea

$$g_i(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x_{n,i}^{(1,1)})(1-x_{n,i}^{(1,1)})} \prod_{j=1, j\neq i}^{n-2} \left(\frac{x - x_{n,j}^{(1,1)}}{x_{n,i}^{(1,1)} - x_{n,j}^{(1,1)}}\right)^2.$$

Notemos que g_i es un polinomio de grado $2n-4$. Así,

$$0 < \int_{-1}^{1} g_i(x)(1-x)(1+x)dx = \lambda_{n,0}g_i(-1) + \lambda_{n,n+1}g_i(1)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{n,j}g_i\Big(x_{n,j}\Big)=\lambda_{n,i}.$$

Por otra parte, dado que $\omega(-1)=0$, $\omega(1)=0$ y para $0\le j\le n-2$,

$$x_{n-2,j}(\widetilde{\omega}_{-1}\sigma)=x^{(0,0)}_{n-1,j}<\theta,\qquad x_{n-2,j}(\widetilde{\omega}_{1}\sigma)=x^{(0,0)}_{n-1,j+1}>\theta,$$

por los incisos (i) y (ii) del Lema 2.11, los pesos $\lambda_{n,0}$ y $\lambda_{n,n+1}$ son positivos.

Supongamos que existe una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Lobatto de orden n, con abscisa θ y grado de precisión $2n-4$.

Se sigue del Lema 2.5 (con $\omega(x)=(1-x)(1+x)$, $\nu=n-2$) que $P^{(1,1)}_{n-3}(\theta)\neq 0$. Luego el polinomio $w_n(x)$ dado por (2.29) está bién definido.

Si $P^{(1,1)}_{n-2}(\theta)=0$, se sigue de la demostración de (ii) en el Lema 2.5 que $P^{(1,1)}_{n-2}(x)$ es un polinomio generador. Pero en tal caso, según en el Teorema 2.2 la fórmula tendría grado de precisión $2n-3$ y esto es una contradicción. Más aún, como la fórmula tiene grado de precisión $2n-4$, ésta no es Lobatto (ver Teorema 2.2), luego $P^{(1,1)}_{n-2}(\theta)\neq 0$.

Hemos obtenido que $P^{(1,1)}_{n-1}(\theta)P^{(1,1)}_{n-2}(\theta)\neq 0$. Se sigue de (iii) en el Lema 2.5 que w_n es un polinomio generador. Por lo tanto sus raíces son simples. Dado que la fórmula es cuasi-Lobatto todas las raíces están en $(-1,1)$. Se sigue del Lema 2.9 (ver (2.21)) que

$$f_n(-1)<f_n(\theta)<f_n(1),$$

donde

$$f_n(x)=\frac{p^{(1,1)}_n(x)}{p^{(1,1)}_{n-1}(x)}.$$

Como las raíces de w_n son simples y están en $[-1,1]$, según el Lema 2.10 se tiene que $\theta\in\bigcup_{j=1}^{n-2}\Big(x^{(1,0)}_{n-3,j-1},x^{(0,1)}_{n-3,j}\Big)$.

□

Proposición 2.18. *Para cada $n \geq 2$, sean QG_n, QL_n, QRR_n, QLR_n los conjuntos dados anteriormente y*

$$A = Z\Big(P_n^{(0,0)}\Big) \cup Z\Big(P_n^{(1,0)}\Big) \cup Z\Big(P_{n-1}^{(0,1)}\Big) \cup Z\Big(P_n^{(1,1)}\Big),$$

donde

$$Z\Big(P_n^{(\alpha,\beta)}\Big) = \Big\{x \in [-1,1] : P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0\Big\}.$$

Tenemos que

$$QG_n \cap QL_{n+1} = \emptyset, \qquad QRR_n \cap QLR_n = \emptyset,$$

$$QG_n \cup QL_{n+1} = A^C \qquad y \qquad QRR_n \cup QLR_n = A^C,$$

con $A^C = [-1,1] \setminus A$.

Demostración. Supongamos que $QG_n \cap QL_{n+1} \neq \emptyset$ y sea $t \in QG_n \cap QL_{n+1}$. Existe $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que

$$x_{n-1,j-1}^{(0,1)} < t < x_{n-1,j}^{(1,0)}, \quad t \neq x_{n,j}^{(0,0)}$$

y

$$x_{n-2,j-1}^{(1,0)} < t < x_{n-2,j}^{(0,1)}, \quad t \neq x_{n-1,j}^{(1,1)}.$$

Pongamos $m = n-1$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$x_{m,j-1}^{(0,1)} < t < x_{m,j}^{(1,0)}, \quad t \neq x_{m+1,j}^{(0,0)}$$

y

$$x_{m-1,j-1}^{(1,0)} < t < x_{m-1,j}^{(0,1)}, \quad t \neq x_{m,j}^{(1,1)}.$$

Luego,

$$\Big(x_{m-1,j-1}^{(1,0)}, x_{m-1,j}^{(0,1)}\Big) \cap \Big(x_{m,j-1}^{(0,1)}, x_{m,j}^{(1,0)}\Big) \neq \emptyset,$$

$$t \neq x_{m,j}^{(1,1)} \quad \text{y} \quad t \neq x_{m+1,j}^{(0,0)}.$$

Lo cual nos da una contradicción.

Verifiquemos que $QG_n \cup QL_{n+1} = A^C$. Si $t \in A^C$, entonces

$$t \in [-1,1] \setminus Z\Big(P_n^{(0,0)}\Big), \quad t \in [-1,1] \setminus Z\Big(P_n^{(1,0)}\Big),$$

$$t \in [-1,1] \setminus Z\Big(P_n^{(0,1)}\Big) \quad \text{y} \quad t \in [-1,1] \setminus Z\Big(P_n^{(1,1)}\Big).$$

Se sigue que

$$t \in [-1,1], \quad P_n^{(0,0)}(t) \neq 0, \quad P_n^{(1,0)}(t) \neq 0,$$

$$P_n^{(0,1)}(t) \neq 0 \quad \text{y} \quad P_n^{(1,1)}(t) \neq 0.$$

De aquí que

$$t \in [-1,1], \quad t \neq x_{n,j}^{(0,0)}, \quad t \neq x_{n,j}^{(1,0)} \quad \text{y} \quad t \neq x_{n,j}^{(0,1)}.$$

Sin perder generalidad, supongamos que existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que

$$x_{n,j}^{(0,1)} < t < x_{n,j}^{(1,0)} \quad \text{y} \quad t \neq x_{n,j}^{(0,0)}.$$

Se sigue que, $t \in QG_n$.

Recíprocamente, sea $t \in QG_n \cup QL_{n+1}$. Si $t \in QG_n$, entonces existe un $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que

$$x_{n-1,j-1}^{(0,1)} < t < x_{n-1,j}^{(1,0)}, \quad t \neq x_{n,j}^{(0,0)}$$

Es decir,

$$t \notin Z(P_n^{(0,0)}), \quad t \notin Z(P_n^{(1,0)}) \quad \text{y} \quad t \notin Z(P_n^{(0,1)}).$$

Luego,

$$t \in \Big(Z(P_n^{(0,0)}) \cup Z(P_n^{(1,0)}) \cup Z(P_n^{(0,1)}) \cup Z(P_n^{(1,1)})\Big)^C.$$

Similarmente se demuestra las otras igualdades. □

Capítulo 3

Aproximación en L_1 de la función de Heaviside

En este capítulo, consideramos el problema de encontrar expresiones explícitas para los polinomios que dan la mejor aproximación unilateral de las funciones de Heaviside, en la métrica de $L_1[-1,1]$. Para tal fin, consideramos secciones que a continuación detallamos. En la sección 3.1, mencionamos la relación que guardan los polinomios para la mejor aproximación unilateral de las funciones de Heaviside y Signo. La sección 3.2 (ver Teorema 3.5) caracterizamos los polinomios $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Mostramos que estos polinomios interpolan a la función G_θ en algunos puntos $y_{n,i}$. Así, para obtener una descripción completa de los polinomios identificamos los puntos $y_{n,i}$. Se prueba que estos puntos son precisamente los ceros de un polinomio de Jacobi. Finalmente, en la sección 3.3 damos expresiones explícitas para los polinomios en $\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Para este problema fue fundamental considerar las ideas dadas por Pinkus (ver [29]). Él da una descripción detallada de algunos resultados relacionados con la existencia, unicidad y caracterización de la mejor aproximación unilateral.

3.1. Funciones Signo y Heaviside

En este apartado, mostramos la relación que guardan los polinomios para la mejor aproximación unilateral de la funciones de Heaviside y Signo. Estas se definen de la manera siguiente:

Definición 3.1. *Para cualquier $\theta \in (-1,1)$, sean*

$$G_\theta : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

la función de Heaviside definida como

$$G_\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -1 \leq x \leq \theta, \\ 1, & \text{si} \quad \theta < x \leq 1, \end{cases}$$

y $S_\theta : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función Signo dada por

$$S_\theta(x) := \begin{cases} -1, & x \in [-1,\theta), \\ 0, & x = \theta, \\ 1, & x \in (\theta,1], \end{cases}$$

Los polinomios para la mejor aproximación unilateral de las funciones G_θ y S_θ están relacionados de la forma siguiente.

Proposición 3.1. *Para cada $\theta \in (-1,1)$ y $P \in \mathbb{P}_n$, se tiene que $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ si y sólo si $2P-1 \in \mathcal{P}_n^-(S_\theta)$.*

Demostración. Nótese que $S_\theta(x) = 2G_\theta(x) - 1$, casi-dondequiera. Luego, para todo polinomio R

$$\int_{-1}^{1} \mid S_\theta(x) - R(x) \mid dx = \int_{-1}^{1} \mid 2G_\theta(x) - 1 - R(x) \mid dx.$$

Supongamos que $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$, como $2P - 1 \leq 2G_\theta - 1$ en $[-1,1]$,

$$E_n^-(S_\theta)_1 \leq \int_{-1}^{1} (S_\theta(x) - 2P(x) + 1)\, dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} (G_\theta(x) - P(x))\,dx = 2E_n^-(G_\theta)_1.$$

Si $Q \in \mathcal{P}_n^-(S_\theta)$, entonces

$$2E_n^-(G_\theta)_1 \leq \int_{-1}^{1} (2G_\theta(x) - Q(x) - 1)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (S_\theta(x) - Q(x))\,dx = E_n^-(S_\theta)_1.$$

Hemos verificado que

$$2E_n^-(G_\theta)_1 = E_n^-(S_\theta)_1 = \int_{-1}^{1} (S_\theta(x) - 2P(x) + 1)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2G_\theta(x) - Q(x) - 1)\,dx.$$

□

3.2. Caracterización de la mejor aproximación

En esta Sección presentamos una caracterización de los polinomios $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Veremos que estos interpolan a la función G_θ en ciertos puntos $y_{n,i}$. Probaremos que dichos puntos son los ceros de algún polinomio de Jacobi. Para lograr tal objetivo, mostramos con algunas propiedades y una proposición útil para obtener la caracterización.

Proposición 3.2. *Para cada $\theta \in (-1, 1)$ y $n \in \mathbb{N}$, existe una constante $M_n = M(\theta, n)$ tal que*

$$\| P' \|_\infty \leq n^2 M_n. \tag{3.1}$$

para todo $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$,

Demostración. Si $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$, de la desigualdad triangular se sigue que

$$\| P \|_1 \leq \int_{-1}^{1} | P(x) - G_\theta(x) | dx + \int_{-1}^{1} | G_\theta(x) | dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(G_\theta(x) - P(x) \Big) dx + \int_{-1}^{1} G_\theta(x) dx \leq E_n^-(G_\theta) + 1 - \theta.$$

Se sabe que en los espacios normados de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante C_n tal que

$$\|Q\|_\infty \leq C_n \| Q \|_1,$$

para todo $Q \in \mathbb{P}_n$. En particular, si $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$, entonces

$$\|P\|_\infty \leq C_n \| P \|_1 \leq C_n \Big(E_n^-(G_\theta) + 1 - \theta \Big).$$

Finalmente, de la desigualdad de Markov (ver [22], p. 40), obtenemos que

$$\| P' \|_\infty \leq C_n \Big(E_n^-(G_\theta) + 1 - \theta \Big) \; n^2.$$

□

Para cada $h \in (0, 1-\theta)$, sea $L_h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$L_h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, \theta], \\ (x - \theta)/h, & x \in (\theta, \theta + h], \\ 1, & x \in (\theta + h, 1]. \end{cases}$$

Proposición 3.3. *Para cada $\theta \in (-1, 1)$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $h_0 \in (0, 1-\theta)$ tal que, si $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y $h \in (0, h_0)$, entonces $P \in \mathcal{P}_n^-(L_h)$ y*

$$P(x) < L_h(x), \; x \in (\theta, \theta + h]. \tag{3.2}$$

Demostración. Sea

$$\lambda = \sup\{|R'(x)| : x \in [\theta, 1], R \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)\}.$$

Por (3.1), $\lambda < \infty$.

Pongamos

$$h_0 = \text{mín}\left\{\frac{1}{1+\lambda}, 1-\theta\right\}.$$

Fijemos $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y $h \in (0, h_0)$. Es claro que $P \leq L_h$, en $[-1, 1] \setminus (\theta, \theta + h)$. Veamos que se tiene la desigualdad estricta en $(\theta, \theta + h)$. Nótese que $-P(\theta) \geq 0$. Si $x \in (\theta, \theta + h)$, por el Teorema del Valor Medio, existe $\alpha \in (\theta, x)$ tal que

$$\begin{aligned} P(x) \leq P(x) - P(\theta) &= P'(\alpha)(x - \theta) \\ &\leq \lambda(x - \theta) < \frac{x - \theta}{h} = L_h(x). \end{aligned}$$

Se concluye que, para cada $P \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$, $h \in (0, h_0]$ y cada $x \in [-1, 1]$,

$$P(x) \leq L_h(x) \leq G_\theta(x).$$

Luego $E_n^-(G_\theta) \leq E_n^-(L_h)$ y es claro que $E_n^-(L_h) \leq E_n^-(G_\theta)$, lo cual prueba la relación $\mathcal{P}_n^-(G_\theta) \subset \mathcal{P}_n^-(L_h)$. □

El teorema siguiente es un resultado bien conocido de la teoría de aproximación en el espacio L_1. Su demostración se puede consultar, por ejemplo, en el libro de Pinkus, [29] [Teorema 5.2, p. 103-104].

Sean K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ con $K = \overline{int(K)}$, U un subespacio de $C[K]$, $\mathcal{U}(f) = \{u \in U : u \leq f\}$ y para cada $u \in \mathcal{U}(f)$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}(f)} = \{u^* \in \mathcal{U}(f) : ||f - u^*||_1 \leq ||f - u||_1\}.$$

Teorema 3.4. [29] *Sean U, $C[K]$, $\mathcal{U}(f)$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{U}(f)}$ como antes. Supongamos que existe $u \in U$ tal que $\int_K u d\mu \neq 0$, donde μ es una medida. Sea $f \in C[K]$ tal que existe $v \in U$ que satisface*

$v < f$ en K. Entonces $u^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}(f)}$, si y sólo si, $u^* \in \mathcal{U}(f)$ y existen puntos distintos $\{x_i\}_{i=1}^k$ en K, con $1 \leq k \leq n$ y números positivos $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ tales que

$$(f - u^*)(x_i) = 0, \text{ con } 1 \leq i \leq k$$

y

$$\int_K u d\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i u(x_i), \text{ para toda } u \in U.$$

Para el caso de la recta real $\mathbb{R}$,

$$K = [-1, 1], \quad \mathcal{P}_{\mathcal{U}(f)} = \mathcal{P}_n^-(f) \quad \text{y} \quad U = \mathbb{P}_n.$$

Ahora, con la ayuda del Teorema 3.4 y la Proposición 3.3 obtenemos la caracterización siguiente.

Teorema 3.5. *Fijemos un $n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in (-1, 1)$. Para $P_n \in \mathbb{P}_n$, se tiene que $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ si y sólo si $P_n \leq G_\theta$ y existen un entero positivo q_n, puntos $-1 \leq y_{n,1} < \cdots < y_{n,q_n} \leq 1$ y números positivos $\{\lambda_{n,i}\}_{i=1}^{q_n}$, tales que:*

$$G_\theta(y_{n,i}) = P_n(y_{n,i}), \qquad 1 \leq i \leq q_n, \tag{3.3}$$

y para cada $Q \in \mathbb{P}_n$

$$\int_{-1}^1 Q(x)dx = \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} Q(y_{n,i}). \tag{3.4}$$

Además, $Q \in \mathbb{P}_n$ es otro polinomio en $\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ si y sólo si, $Q \leq G_\theta$ en el intervalo $(-1, 1)$ y

$$Q(y_{n,i}) = P_n(y_{n,i}), \qquad 1 \leq i \leq q_n. \tag{3.5}$$

Demostración. Supongamos que $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Es claro que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1, 1]$.

Por la Proposición 3.3, existe $h_0 \in (0, 1 - \theta)$ tal que, si $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y $h \in (0, h_0]$, entonces $P_n \in \mathcal{P}_n^-(L_h)$. Dado que $L_h \in C[-1, 1]$, por el Teorema 3.4, existen enteros q_n con

$1 \leq q_n \leq n+1$, puntos $-1 \leq y_{n,1} < \ldots < y_{n,q_n} \leq 1$ y números positivos $\{\lambda_{n,i}\}_{i=1}^{q_n}$ tales que

$$L_h(y_{n,i}) = P_n(y_{n,i}), 1 \leq i \leq q_n$$

y para cada $Q \in \mathbb{P}_n$,

$$\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} Q(y_{n,i}).$$

Esta última igualdad nos proporciona (3.4). Ahora, por (3.2), $y_{n,i} \notin (\theta, \theta + h]$, para $i = 1, \ldots, q_n$. Pero, para tal caso

$$L_h(y_{n,i}) = G_\theta(y_{n,i}).$$

Recíprocamente, supongamos que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1, 1]$, existen un entero positivo q_n, puntos

$$-1 \leq y_{n,1} < \ldots < y_{n,q_n} \leq 1$$

y números positivos $\{\lambda_{n,i}\}_{i=1}^{q_n}$ tales que se satisfacen las condiciones (3.3) y (3.4).

Si $Q \in \mathbb{P}_n$ con $Q \leq G_\theta$ en $[-1, 1]$, entonces

$$\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} Q(y_{n,i}) \leq \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} G_\theta(y_{n,i}) \tag{3.6}$$

$$= \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} P_n(y_{n,i}) = \int_{-1}^{1} P(x)dx. \tag{3.7}$$

Por la Proposición 1.8, $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$.

Para verificar (3.5), sea $Q \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y supongamos que existe $i_0 \in \{1, ..., q_n\}$ tal que $P_n(y_{n,i_0}) \neq Q(y_{n,i_0})$. Como $G_\theta(y_{n,i}) = P_n(y_{n,i})$, para $1 \leq i \leq q_n$; en particular, para $i = i_0$, $G_\theta(y_{n,i_0}) = P_n(y_{n,i_0})$. Luego, $G_\theta(y_{n,i_0}) \neq Q(y_{n,i_0})$ y así

$$\sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} Q(y_{n,i}) \neq \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} G_\theta(y_{n,i}).$$

Pero, esto contradice a (3.6) y (3.7). □

Para una función $f \in L_1[-1,1]$, denotemos

$$Z(f) = \{x \in [-1,1] : f(x) = 0\}.$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ fijo y $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ (en el caso, $n = 1$ asumiremos que $P_n \neq 0$ véase Sección **??**). Observe que $Z(P_n - G_\theta)$ es un conjunto finito. En caso contrario $P \equiv 0$ o $P \equiv 1$.

Sean $-1 \leq z_{n,1} < \ldots < z_{n,r_n} \leq 1$ las raíces distintas de la función $P_n - G_\theta$ en $[-1,1]$.

$$w_{r_n}(x) = \prod_{i=1}^{r_n}(x - z_{n,i}). \tag{3.8}$$

Definición 3.2.

$$a = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad w_{r_n}(1) = 0, \\ \\ 0, & \text{si} \quad w_{r_n}(1) \neq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad b = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad w_{r_n}(-1) = 0, \\ \\ 0, & \text{si} \quad w_{r_n}(-1) \neq 0. \end{cases}$$

Pongamos

$$w_{r_n-a-b}^{(a,b)}(x) := \frac{w_{r_n}(x)}{(1-x)^a(1+x)^b}. \tag{3.9}$$

Corolario 3.6. *Fijemos $\theta \in (-1,1)$, $n > 2$ y supongamos que $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Sean a, b, w_{r_n} y $w_{r_n-a-b}^{(a,b)}$ definidos como en* (3.8) *y* (3.9)*. Entonces:*

(i)*Para cada $Q_{n-r_n} \in \mathbb{P}_{n-r_n}$,*

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-r_n}(x) w_{r_n}(x) dx = 0. \tag{3.10}$$

(ii)

$$2r_n - 2 - a - b \leq \deg(P_n) \leq n \leq 2r_n - 1 - a - b \tag{3.11}$$

y, en particular, $r_n \leq n$.

(iii) $w_{r_n}(\theta) = 0$.

Demostración. (i) Sean q_n, $A_n = \{y_{n,i} : 1 \leq i \leq q_n\}$ y $\{\lambda_{n,i}\}_{i=1}^{q_n}$ como en el Teorema 3.5. Por (3.3), $A_n \subseteq Z(P_n - G_\theta)$. Sea $Q = Q_{n-r_n} w_{r_n}$. Notemos que $Q \in \mathbb{P}_n$; así, por (3.4),

$$\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} Q(y_{n,i}).$$

Esto es,

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-r_n}(x) w_{r_n}(x)dx = \sum_{i=1}^{q_n} \lambda_{n,i} Q_{n-r_n}(y_{n,i}) w_{r_n}(y_{n,i}).$$

Pero, $w_{r_n}(y_{n,i}) = 0$, para $1 \leq i \leq q_n$. De aquí, obtenemos la relación de ortogonalidad (3.10).

(ii) Por (3.9),

$$w_{r_n}(x) = w^{(a,b)}_{r_n-a-b}(x)(1-x)^a(1+x)^b;$$

sustituyendo en (3.10) obtenemos, para cada $Q_{n-r_n} \in \mathbb{P}_{n-r_n}$,

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-r_n}(x) w^{(a,b)}_{r_n-a-b}(x)(1-x)^a(1+x)^b dx = 0. \qquad (3.12)$$

Puesto que $\deg\left(w^{(a,b)}_{r_n-a-b}\right) = r_n - a - b$ y

$$\int_{-1}^{1} \left(w^{(a,b)}_{r_n-a-b}(x)\right)^2 (1-x)^a(1+x)^b dx \neq 0,$$

se sigue $w^{(a,b)}_{r_n-a-b} \notin \mathbb{P}_{n-r_n}$. Esto implica que $n - r_n < r_n - a - b$, es decir, $n < 2r_n - a - b$. Como n es un entero positivo, entonces $n+1 \leq 2r_n - a - b$. Así, $n \leq 2r_n - a - b - 1$. Esto proporciona la última desigualdad de (3.11).

Para verificar que $2r_n - a - b - 2 \leq n$; empecemos por suponer que, para cada $1 \leq i \leq r_n$, $z_{n,i} \in (-1, 1) \setminus \{\theta\}$. De aquí que, para cada $1 \leq i \leq r_n$,

$$-1 < z_{n,i} < \theta \quad \text{o} \quad \theta < z_{n,i} < 1.$$

Sin perder generalidad, supongamos que $-1 < z_{n,i} < \theta$, entonces $P'(z_{n,i}) = 0$, puesto que la función $P_n - G_\theta$ posee un máximo en cada uno de estos puntos. Así, $z_{n,i}$ son raíces distintas del polinomio P_n'. Esto nos da al menos $r_n - a - b - 1$ ceros del polinomio P_n' en el conjunto

$$Z(P_n - G_\theta) \setminus \{-1, 1, \theta\}.$$

Por otra parte, si $z_{n,i} \in (-1, 1)$, para algún $1 \leq i \leq r_n$, entonces $z_{n,i+1} \leq \theta$ o $\theta < z_{n,i} < z_{n,r_n}$. Luego,

$$P_n(z_{n,i}) = P_n(z_{n,i+1}),$$

ya que suponer lo contrario, nos induce a concluir que P_n es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en una vecindad de $z_{n,i}$ y, esto contradice el hecho de que

$$P_n \leq G_\theta \qquad \text{y} \qquad P_n(z_{n,i}) = G_\theta(z_{n,i}).$$

Por Teorema del Valor Medio, existe $z^*_{n,i} \in (z_{n,i}, z_{n,i+1})$ tal que $P_n'(z^*_{n,i}) = 0$. Esto nos provee otros $r_n - 2$ ceros distintos del polinomio P_n' en el intervalo $(-1, 1)$. En resumen, P_n' tiene al menos $2r_n - a - b - 3$ ceros en $(-1, 1)$, y como

$$2r_n - a - b - 3 < 2r_n - a - b - 2,$$

se sigue que

$$2r_n - a - b - 2 \leq \deg(P_n) \leq n.$$

En particular, para $a = 1$ y $b = 1$, tenemos $2r_n \leq n+4$. Como $r_n < 2r_n$, se sigue que $r_n < n + 4$; es decir $r_n - 4 < n$ y, dado que $r_n - 4$ es un entero, entonces $r_n \leq n$ para $n > 2$. Esto implica la primera desigualdad de (3.11).

(iii) Supongamos que

$$Z(P_n - G_\theta) \cap (-1, \theta) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad Z(P_n - G_\theta) \cap (\theta, 1) \neq \emptyset.$$

Dado que $\{z_{n,i} : 1 \leq i \leq r_n\}$ es un conjunto finito, podemos garantizar la existencia del máximo. Sea

$$z_{n,j} = \max\{z_{n,i} : z_{n,i} \leq 0\}.$$

Si para cualquier $1 \leq j \leq r_n$, $z_{n,j} \neq \theta$, entonces

$$-1 < z_{n,j} < \theta \quad \text{o} \quad \theta < z_{n,j} < 1, \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad 1 \leq j \leq r_n.$$

Supóngase que, para cada $1 \leq j \leq r_n$, $-1 < z_{n,j} < \theta$. Se sigue que $P_n(z_{n,j}) = 0$, ya que $Z(P_n - G_\theta) \cap (-1, \theta) \neq \emptyset$. Así, obtenemos j raíces distintas. También, como G_θ es continua en el intervalo cerrado $[z_{n,j-1}, z_{n,j}]$, diferenciable en cada punto del abierto $(z_{n,j-1}, z_{n,j})$ y

$$G_\theta(z_{n,j-1}) = G_\theta(z_{n,j}) = 0,$$

entonces por el Teorema de Rolle, existen $c_{j-1} \in (z_{n,j-1}, z_{n,j})$ tales que

$$P_n^{'}(c_{j-1}) = G_\theta^{'}(c_j) = 0.$$

Es decir, c_{j-1} son raíces distintas del polinomio P_n'. Para este caso, P_n' debe poseer $j-1$ raíces distintas; en suma se obtienen $2j - 1 + b$ ceros en el intervalo $(-1, \theta)$.

Por otra parte, si $\theta < z_{n,j} < 1$ para cada $1 \leq j \leq r_n$, entonces $P_n'(z_{n,j}) = 0$. De aquí, se obtienen $2(r_n - a - j - b) - 1 + a$ ceros en $(\theta, 1)$ y un cero adicional en el intervalo $(z_{n,j}, z_{n,j+1})$. En total nos da $2r_n - 1 - a - b$ ceros distintos en $(-1, 1)$; como

$$2r_n - 1 - a - b < 2r_n - a - b,$$

entonces $2r_n - a - b \leq \deg(P_n)$. Pero, esto contradice a (3.11). Así, existe $1 \leq j \leq r_n$ tal que $z_{n,j} = \theta$ y, dado que $z_{n,i}$, con $1 \leq i \leq r_n$ son raíces del polinomio w_{r_n}, se sigue que $w_{r_n}(\theta) = 0$.

Con argumentos similares se demuestra los casos

$$Z(P_n - G_\theta) \cap (-1, \theta) = \emptyset \quad \text{y} \quad Z(P_n - G_\theta) \cap (\theta, 1) = \emptyset.$$

□

En las proposiciones siguientes, identificaremos todos los puntos donde los polinomios de la mejor aproximación unilateral interpolan a la función G_θ de acuerdo con la Proposición

2.18. Pero, primero recordemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 4k-2$ o $n = 4k-1$ o $n = 4k$ o $n = 4k+1$.

Proposición 3.7. *Fijemos $\theta \in (-1,1)$, $k \in \mathbb{N}$ y sea $n = 4k$. Supongamos que $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y el polinomio $w_{r_n}(x)$ está dado por* (3.8)*. Entonces existe una constante $C_n \neq 0$ tal que una y sólo una de las afirmaciones siguientes se satisface:*

(i) *Si $\theta \in Z(P_{2k}^{(1,0)})$, entonces $w_{r_n}(x) = C_n(1-x)P_{2k}^{(1,0)}(x)$ y la fórmula de cuadratura* (3.4) *contiene exactamente $2k+1$ nodos.*

(ii) *Si $\theta \in Z(P_{2k}^{(0,1)})$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1+x)P_{2k}^{(0,1)}(x).$$

(iii) *Si $\theta \in Z(P_{2k}^{(1,1)})$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x^2)P_{2k}^{(1,1)}(x).$$

(iv) *Si $\theta \in Z(P_{2k+1}^{(0,0)})$, entonces $w_{r_n}(x) = C_n P_{2k+1}^{(0,0)}(x)$.*

(v) *Si $\theta \in QG_{2k+1}$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n \left(P_{2k+1}^{(0,0)}(x) - \frac{P_{2k+1}^{(0,0)}(\theta)}{P_{2k}^{(0,0)}(\theta)} P_{2k}^{(0,0)}(x) \right).$$

(vi) *Si $\theta \in QL_{2k+2}$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x^2) \left(P_{2k}^{(1,1)}(x) - \frac{P_{2k}^{(1,1)}(\theta)}{P_{2k-1}^{(1,1)}(\theta)} P_{2k-1}^{(1,1)}(x) \right).$$

Demostración. Analizaremos varios casos de acuerdo con las condiciones $a+b=0$, $a+b=1$ o $a+b=2$.

a) Si $a+b=1$, entonces por (3.11),

$$4k = 2r_n - 2, \qquad r_n = 2k+1 \qquad \text{y} \qquad n - r_n = 2k-1.$$

Notemos que, para $a = 1$ la expresión (3.10) puede ser escrita como

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k}(x)(1-x)dx = 0, \quad \text{para cada} \quad Q \in \mathbb{P}_{2k-1},$$

donde $\widetilde{w}_{2k}(x) = w_{r_n}(x)/(1-x)$. De aquí que, existe una constante C tal que

$$w_{2k+1}(x) = C(1-x)P_{2k}^{(1,0)}(x).$$

Por el Corolario 3.6 inciso (iii), $w_{2k+1}(\theta) = 0$. Así,

$$C(1-\theta)P_{2k}^{(1,0)}(\theta) = 0.$$

Pero, $(1-\theta) \neq 0$ implica que $CP_{2k}^{(1,0)}(\theta) = 0$. Luego, $C \neq 0$.

Para verificar que la fórmula de cuadratura dada en (3.4) contiene exactamente $2k+1$ nodos, observemos que, esta es positiva con nodos q_n y grado de precisión n. Por otra parte, según la teoría clásica, existe una fórmula de cuadratura positiva de tipo Radau por la derecha (RR_n), con grado de exactitud n tal que, los nodos distintos de 1 son los ceros del polinomio de Jacobi $P_{2k}^{(1,0)}(n = 4k = 2(2k+1)-2$) ver Teorema 2.4. Más aún, existe única fórmula de cuadratura de este tipo. De este modo, concluimos que $q_n = 2n+1$, donde q_n es dado por (3.4). Hemos probado el inciso (i).

Para ver el inciso (ii). Supongamos que $b = 1$, entonces la expresión (3.10) puede ser escrita como

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k}(x)(1+x)dx = 0, \quad \text{para cada} \quad Q \in \mathbb{P}_{2k-1},$$

donde $\widetilde{w}_{2k}(x) = w_{r_n}(x)/(1+x)$. Luego, existe una constante C tal que

$$w_{2k+1}(x) = C(1+x)P_{2k}^{(0,1)}(x).$$

Por el Corolario 3.6 inciso (iii), $w_{2k+1}(\theta) = 0$. Es decir,

$$C(1+\theta)P_{2k}^{(0,1)}(\theta) = 0.$$

Pero, $(1+\theta) \neq 0$ implica que $CP_{2k}^{(0,1)}(\theta) = 0$. Se sigue que $C \neq 0$.

Los argumentos presentados anteriormente muestran que, si

$$\theta \notin Z\Big(P_{2k}^{(1,0)}\Big) \cup Z\Big(P_{2k}^{(0,1)}\Big),$$

entonces $a+b \neq 1$. De aquí que, $a+b=0$ o $a+b=2$.

b) Si $a+b=0$, entonces al sustituir en la desigualdad (3.11), $2r_n - 2 = 4k$ y $r_n = 2k+1$. Ahora (3.10) puede expresarse como

$$\int_{-1}^{1} Q(x) w_{2k+1}(x) dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-1}.$$

Por la Proposición 1.7, existen constantes A y B, con $A \neq 0$ tales que

$$w_{2k+1}(x) = AP_{2k+1}^{(0,0)}(x) + BP_{2k}^{(0,0)}(x).$$

Dado que $w_{2k+1}(\theta) = 0$, se sigue que

$$AP_{2k+1}^{(0,0)}(\theta) + BP_{2k}^{(0,0)}(\theta) = 0.$$

Por hipótesis $\theta \in Z\Big(P_{2k+1}^{(0,0)}\Big)$, se sigue que $\theta \notin Z\Big(P_{2k}^{(0,0)}\Big)$, ya que $P_{2k+1}^{(0,0)}$ y $P_{2k}^{(0,0)}$ no poseen ceros en comun y $A \neq 0$. Pero, esto implica que $B=0$ y por lo tanto

$$w_{r_n}(x) = AP_{2k+1}^{(0,0)}(x).$$

Hemos demostrado (iv).

Si $\theta \notin Z\Big(P_{2k}^{(0,0)}\Big) \cup Z\Big(P_{2k+1}^{(0,0)}\Big)$, entonces el polinomio cuasi-ortogonal

$$w_{2k+1}(x) = A\Big(P_{2k+1}^{(0,0)}(x) - \frac{P_{2k+1}^{(0,0)}(\theta)}{P_{2k}^{(0,0)}(\theta)} P_{2k}^{(0,0)}(x)\Big),$$

genera una fórmula de cuadratura de tipo Gauss la cual contiene $2k+1$ nodos y es exacta para polinomios de grado n. Luego, por el Teorema 2.14, esto es posible únicamente si $\theta \in QG_{2k+1}$ ($n = 4k = 2(2k+1) - 2$). Esto demuestra el inciso (v).

c) Si $a+b=2$, al sustituir en (3.11), nos queda que $2r_n-4=4k$. Esto es, $r_n=2k+2$ y $n-r_n=2k-2$. La fórmula (3.10), puede expresarse como

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k}(x)(1-x^2)dx=0, \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad Q\in\mathbb{P}_{2k-2},$$

donde $\widetilde{w}_{2k}(x)=w_{r_n}(x)/(1-x^2)$. Por lo que existen constantes A y B, con $A\neq 0$ tales que

$$w_{2k+2}(x)=A(1-x^2)P_{2k}^{(1,1)}(x)+BP_{2k-1}^{(1,1)}(x).$$

Dado que $w_{2k+2}(\theta)=0$, se sigue que

$$A(1-\theta^2)P_{2k}^{(1,1)}(\theta)+BP_{2k-1}^{(1,1)}(\theta)=0.$$

Como $\theta\notin Z(P_{2k-1}^{(1,1)})$, puesto que $P_{2k-1}^{(1,1)}$ y $P_{2k}^{(1,1)}$ no poseen ceros en común y $A\neq 0$, se sigue que $B=0$. Luego,

$$w_{2k+2}(x)=A(1-x^2)P_{2k}^{(1,1)}(x) \quad \text{siempre} \quad \text{que} \quad \theta\in Z(P_{2k}^{(1,1)}).$$

Hemos verificado el inciso (iii).

Si $\theta\notin Z\Big(P_{2k+1}^{(1,1)}\Big)\cup Z\Big(P_{2k}^{(1,1)}\Big)$, entonces el polinomio cuasi-ortogonal

$$w_{2k+2}(x)=A(1-x^2)\Big(P_{2k}^{(1,1)}(x)-\frac{P_{2k}^{(1,1)}(\theta)}{P_{2k-1}^{(1,1)}(\theta)}P_{2k-1}^{(1,1)}(x)\Big),$$

genera una fórmula de cuadratura positiva de tipo Lobatto con $2k+2$ nodos ($n=4k=2(2k+2)-4$), si y sólo si, $\theta\in QL_{2k+2}$ vea Teorema 2.17. Hemos obtenido (vi). □

Proposición 3.8. *Fijemos $\theta\in(-1,1)$, $k\in\mathbb{N}$ y supongamos que $n=4k+1$. Sean $P_n\in\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y $w_{r_n}(x)$ el polinomio dado por* (3.8)*. Entonces existe una constante $C_n\neq 0$ tal que:*

(i) *Si $\theta\in Z(P_{2k+1}^{(0,0)})$, entonces $w_{r_n}(x)=C_nP_{2k+1}^{(0,0)}(x)$.*

(ii) *Si* $\theta \in Z(P_{2k+1}^{(1,0)})$, *entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x)P_{2k+1}^{(1,0)}(x).$$

(iii) *Si* $\theta \in Z(P_{2k+1}^{(0,1)})$, *entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1+x)P_{2k+1}^{(0,1)}(x).$$

(iv) *Si* $\theta \in Z(P_{2k}^{(1,1)})$, *entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x^2)P_{2k}^{(1,1)}(x).$$

(v) *Si* $\theta \in QRR_{2k+1}$, *entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x)\left(P_{2k+1}^{(1,0)}(x) - \frac{P_{2k+1}^{(1,0)}(\theta)}{P_{2k}^{(1,0)}(\theta)}P_{2k}^{(1,0)}(x)\right).$$

(vi) *Si* $\theta \in QLR_{2k+1}$, *entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1+x)\left(P_{2k+1}^{(0,1)}(x) - \frac{P_{2k+1}^{(0,1)}(\theta)}{P_{2k}^{(0,1)}(\theta)}P_{2k}^{(0,1)}(x)\right).$$

Demostración. Analicemos los casos $a+b=0$, $a+b=1$ y $a+b=2$.

Caso I. Si $a+b=0$, entonces por (3.11), $4k+1 = 2r_n - 1$ y $r_n = 2k+1$, así $n - r_n = 2k$. Ahora (3.10) puede expresarse como

$$\int_{-1}^{1} Q(x)w_{r_n}(x)dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k}.$$

De aqui que, existe una constante C_n tal que

$$w_{r_n}(x) = C_n P_{2k+1}^{(0,0)}(x).$$

Si $C_n = 0$, entonces para cada $x \in [-1,1]$, $w_{r_n}(x) = 0$. En particular, para $x = 1$ y $x = -1$, $w_{r_n}(1) = 0 = w_{r_n}(-1)$.

Así, por la Definición 3.2, $a + b = 2$. Lo cual nos da una contradicción. Luego,

$$w_{r_n}(x) = C_n P_{2k+1}^{(0,0)}(x),$$

siempre que $\theta \in Z(P_{2k+1}^{(0,0)})$. Esto prueba (i).

Caso II. Supongamos que $a + b = 1$. De la desigualdad (3.11), $2r_n - 3 = 4k + 1$. Así, $r_n = 2k + 2$ y $n - r_n = 2k - 1$.

Notemos que la condición $a = 1$ implica que la fórmula (3.10) puede ser escrita como

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k+1}(x)(1-x)dx = 0, \quad \text{para cada} \quad Q \in \mathbb{P}_{2k-1},$$

donde $\widetilde{w}_{2k+1}(x) = w_{r_n}(x)/(1-x)$. De aquí que

$$w_{2k+2}(x) = A(1-x)P_{2k+1}^{(1,0)}(x) + BP_{2k}^{(1,0)}(x), \qquad (A \neq 0).$$

Como $w_{2k+2}(\theta) = 0$, se sigue que

$$A(1-\theta)P_{2k+1}^{(1,0)}(\theta) + BP_{2k}^{(1,0)}(\theta) = 0.$$

Como antes $\theta \in Z\left(P_{2k+1}^{(1,0)}\right)$ implica que $\theta \notin Z\left(P_{2k}^{(1,0)}\right)$, ya que $P_{2k}^{(1,0)}$ y $P_{2k+1}^{(1,0)}$ no poseen raíces comunes y $A \neq 0$. Así, $B = 0$ y obtenemos (ii).

Si $\theta \notin Z\left(P_{2k+1}^{(1,0)}\right) \cup Z\left(P_{2k}^{(1,0)}\right)$, entonces el polinomio

$$w_{r_n}(x) = A(1-x)\left(P_{2k+1}^{(1,0)}(x) - \frac{P_{2k+1}^{(1,0)}(\theta)}{P_{2k}^{(1,0)}(\theta)}P_{2k}^{(1,0)}(x)\right),$$

genera una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Radau por la derecha con nodos $2k + 1$, si y sólo si, $\theta \in QRR_{2k+1}$ vea Teorema 2.16 y uno tiene el inciso (v).

Por otra parte, si $b = 1$, entonces la fórmula (3.10) puede ser escrita como

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k+1}(x)(1+x)dx = 0, \quad \text{para cada} \quad Q \in \mathbb{P}_{2k-1},$$

donde $\widetilde{w}_{2k+1}(x) = w_{r_n}(x)/(1+x)$. De aquí que

$$w_{2k+2}(x) = A(1+x)P_{2k+1}^{(0,1)}(x) + BP_{2k}^{(0,1)}(x), \qquad (A \neq 0).$$

Como $w_{2k+2}(\theta) = 0$, se sigue que

$$A(1+\theta)P_{2k+1}^{(0,1)}(\theta) + BP_{2k}^{(0,1)}(\theta) = 0.$$

Como antes $\theta \in Z\left(P_{2k+1}^{(0,1)}\right)$ implica que $\theta \notin Z\left(P_{2k}^{(0,1)}\right)$, ya que $P_{2k+1}^{(0,1)}$, $P_{2k}^{(0,1)}$ no poseen raíces comunes y $A \neq 0$. Así, $B = 0$ y obtenemos (iii).

Si $\theta \notin Z\left(P_{2k+1}^{(0,1)}\right) \cup Z\left(P_{2k}^{(0,1)}\right)$, entonces el polinomio

$$w_{r_n}(x) = A(1+x)\left(P_{2k+1}^{(0,1)}(x) - \frac{P_{2k+1}^{(0,1)}(\theta)}{P_{2k}^{(0,1)}(\theta)}P_{2k}^{(0,1)}(x)\right),$$

genera una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Radau por la izquierda con nodos $2k+1$, si y sólo si, $\theta \in QLR_{2k+1}$ ver Teorema 2.15, y uno tiene el inciso (vi).

Caso III. Si $a + b = 2$, entonces al sustituir en (3.11), $4k+1 = 2r_n - 3$. Así, $r_n = 2k+2$ y $n - r_n = 2k-1$. En este caso

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k}(x)(1-x^2)dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-1},$$

donde $\widetilde{w}_{2k}(x) = w_{r_n}(x)/(1-x^2)$. Por lo tanto

$$w_{2k+2}(x) = C_n(1-x^2)P_{2k}^{(1,1)}(x).$$

Pero esto puede suceder si y sólo si $\theta \in Z(P_{2k}^{(1,1)})$. Esto demuestra el inciso (iv). □

Proposición 3.9. *Fijemos $\theta \in (-1,1)$, $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n = 4k-1$. Sean $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y $w_{r_n}(x)$ el polinomio dado por* (3.8)*. Entonces, existe una constante $C_n \neq 0$ tal que:*

(i) *Si $\theta \in Z(P_{2k}^{(0,0)})$, entonces $w_{r_n}(x) = C_n P_{2k}^{(0,0)}(x)$.*

(ii) *Si $\theta \in Z(P_{2k}^{(1,0)})$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x)P_{2k}^{(1,0)}(x).$$

(iii) *Si $\theta \in Z(P_{2k}^{(0,1)})$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1+x)P_{2k}^{(0,1)}(x).$$

(iv) *Si $\theta \in Z(P_{2k-1}^{(1,1)})$, entonces*

$$\omega_{r_n}(x) = C_n(1-x^2)P_{2k-1}^{(1,1)}(x).$$

(v) *Si $\theta \in QRR_{2k+1}$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x)\left(P_{2k}^{(1,0)}(x) - \frac{P_{2k}^{(1,0)}(\theta)}{P_{2k-1}^{(1,0)}(\theta)}P_{2k-1}^{(1,0)}(x)\right).$$

(vi) *Si $\theta \in QLR_{2k+1}$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1+x)\left(P_{2k}^{(0,1)}(x) - \frac{P_{2k}^{(0,1)}(\theta)}{P_{2k-1}^{(0,1)}(\theta)}P_{2k-1}^{(0,1)}(x)\right).$$

Demostración. **a)** Supongamos que $a+b=0$. Se sigue de (3.11) que $4k-1 = 2r_n - 1$. Es decir, $r_n = 2k$. En este caso

$$\int_{-1}^{1} Q(x)w_{r_n}(x)dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-1},$$

así, existe una constante A tal que

$$w_{r_n}(x) = AP_{2k}^{(0,0)}(x).$$

Si $A = 0$, entonces para cada $x \in [-1, 1]$, $w_{r_n}(x) = 0$. En particular, para $x = 1$ y $x = -1$, $w_{r_n}(1) = 0 = w_{r_n}(-1)$. Por la Definición 3.2, $a + b = 2$, lo cual nos da una contradicción. Luego, $w_{r_n}(x) = AP_{2k}^{(0,0)}(x)$, si y sólo si, $\theta \in Z(P_{2k}^{(0,0)})$. Esto prueba el inciso (i).

b) Supongamos que $a+b = 1$. En tal caso $4k-1 = 2r_n-3$. Esto es $r_n = 2k + 1$.

Si $a = 1$, entonces

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k}(x)(1-x)dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-2},$$

donde $\widetilde{w}_{2k}(x) = w_{r_n}(x)/(1-x)$. Por lo tanto

$$w_{2k+1}(x) = A(1-x)P_{2k}^{(1,0)}(x) + BP_{2k-1}^{(1,0)}(x), \qquad (A \neq 0).$$

Por el Corolario 3.6 inciso (iii), $w_{2k+1}(\theta) = 0$ y

$$\theta \in Z\Big(P_{2k}^{(1,0)}\Big) \quad \text{implica} \quad \text{que} \quad \theta \notin Z\Big(P_{2k-1}^{(1,0)}\Big).$$

Así, $B = 0$ y obtenemos (ii).

Si $\theta \notin Z\Big(P_{2k}^{(1,0)}\Big) \cup Z\Big(P_{2k-1}^{(1,0)}\Big)$, entonces el polinomio cuasi-ortogonal

$$w_{r_n}(x) = A(1-x)\Big(P_{2k}^{(1,0)}(x) - \frac{P_{2k}^{(1,0)}(\theta)}{P_{2k-1}^{(1,0)}(\theta)}P_{2k-1}^{(1,0)}(x)\Big),$$

genera una fórmula de cuadratura positiva de tipo cuasi-Radau por la derecha si y sólo si, $\theta \in QRR_{2k+1}(n = 2(2k+1) - 3)$ vea Teorema 2.16 y así el inciso (v) se satisface.

De manera similar, si $b = 1$, obtenemos (iii) y (vi).

c) Si $a + b = 2$, entonces $r_n = 2k + 1$ y

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k-1}(x)(1-x^2)dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-2},$$

donde $\widetilde{w}_{2k-1}(x) = w_{r_n}(x)/(1-x^2)$. En tal caso, existe una constante C_n tal que $\omega_{r_n}(x) = C_n(1-x^2)P_{2k-1}^{(1,1)}(x)$.

Pero esto ocurre, sólo si $\theta \in Z(P_{2k-1}^{(1,1)})$. Hemos obtenido (iv). □

Proposición 3.10. *Fijemos $\theta \in (-1,1)$, $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n = 4k-2$. Sean $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ y $w_{r_n}(x)$ el polinomio dado por* (3.8)*. Entonces, existe una constante $C_n \neq 0$ tal que:*

(i) *Si $\theta \in Z(P_{2k}^{(0,0)})$, entonces $w_{r_n}(x) = C_n P_{2k}^{(0,0)}(x)$.*

(ii) *Si $\theta \in Z(P_{2k-1}^{(1,0)})$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x)P_{2k-1}^{(1,0)}(x).$$

(iii) *Si $\theta \in Z(P_{2k-1}^{(0,1)})$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1+x)P_{2k-1}^{(0,1)}(x).$$

(iv) *Si $\theta \in Z(P_{2k-1}^{(1,1)})$, entonces*

$$\omega_{r_n}(x) = C_n(1-x^2)P_{2k-1}^{(1,1)}(x).$$

(v) *Si $\theta \in QG_{2k}$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n \left(P_{2k}^{(0,0)}(x) - \frac{P_{2k}^{(0,0)}(\theta)}{P_{2k-1}^{(0,0)}(\theta)} P_{2k-1}^{(0,0)}(x) \right).$$

(vi) *Si $\theta \in QL_{2k+1}$, entonces*

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x^2) \left(P_{2k-1}^{(1,1)}(x) - \frac{P_{2k-1}^{(1,1)}(\theta)}{P_{2k-2}^{(1,1)}(\theta)} P_{2k-2}^{(1,1)}(x) \right).$$

Demostración. **a)** Supongamos que $a+b=0$. Se sigue de (3.11) que $r_n = 2k$. En este caso

$$\int_{-1}^{1} Q(x) w_{r_n}(x) dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-2}$$

y

$$w_{r_n}(x) = A P_{2k}^{(0,0)}(x) + B P_{2k-1}^{(0,0)}(x), \qquad (A \neq 0).$$

Como antes $\theta \in Z\left(P_{2k}^{(0,0)}\right)$ implica que $\theta \notin Z\left(P_{2k-1}^{(0,0)}\right)$, así $B = 0$. Esto prueba el inciso (i).

Si $\theta \notin Z\left(P_{2k}^{(0,0)}\right) \cup Z\left(P_{2k-1}^{(0,0)}\right)$, entonces por el Teorema 2.14,

$$w_{r_n}(x) = C_n \left(P_{2k}^{(0,0)}(x) - \frac{P_{2k}^{(0,0)}(\theta)}{P_{2k-1}^{(0,0)}(\theta)} P_{2k-1}^{(0,0)}(x) \right),$$

genera una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Gauss, si y sólo si, $\theta \in QG_{2k}$ $(n = 2(2k) - 2)$ y el inciso (v) se satisface.

b) Supongamos que $a + b = 1$. Se sigue de (3.11) que $r_n = 2k$.

Si $a = 1$, entonces

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k-1}(x)(1-x)dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-2},$$

donde $\widetilde{w}_{2k-1}(x) = w_{r_n}(x)/(1-x)$. Así,

$$w_{r_n}(x) = A(1-x)P_{2k-1}^{(1,0)}(x).$$

Si $A = 0$, entonces $w_{r_n}(x) = 0$, para cada $x \in [-1, 1]$. En particular, para $x = -1$, $w_{r_n}(-1) = 0$. Así, por la Definición 3.2, $b = 1$. Luego, $a + b = 2$ el cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$w_{r_n}(x) = A(1-x)P_{2k-1}^{(1,0)}(x),$$

si y sólo si, $\theta \in Z\left(P_{2k-1}^{(1,0)}\right)$. Esto prueba (ii).

Similarmente, si $b = 1$, obtenemos el inciso (iii).

c) Si $a + b = 2$, entonces $r_n = 2k + 1$ y

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\widetilde{w}_{2k-1}(x)(1-x^2)dx = 0, \text{ para cada } Q \in \mathbb{P}_{2k-3},$$

donde $\widetilde{w}_{2k-1}(x) = w_{r_n}(x)/(1-x^2)$. Por lo tanto

$$w_{2k-1}(x) = A(1-x^2)P_{2k-1}^{(1,1)}(x) + BP_{2k-2}^{(1,1)}(x), \qquad (A \neq 0).$$

Por el Corolario 3.6 inciso (iii), $w_{2k-1}(\theta) = 0$. Por otra parte, $\theta \in Z\left(P_{2k-1}^{(1,1)}\right)$ implica que $\theta \notin Z\left(P_{2k-2}^{(1,1)}\right)$. Se sigue que, $B = 0$ y así, obtenemos el inciso (iv).

Si $\theta \notin Z\left(P_{2k-1}^{(1,1)}\right) \cup Z\left(P_{2k-2}^{(1,1)}\right)$, entonces por el Teorema 2.17,

$$w_{r_n}(x) = C_n(1-x^2)\left(P_{2k-1}^{(1,1)}(x) - \frac{P_{2k-1}^{(1,1)}(\theta)}{P_{2k-2}^{(1,1)}(\theta)}P_{2k-2}^{(1,1)}(x)\right),$$

genera una fórmula de cuadratura positiva cuasi-Lobatto, si y sólo si, $\theta \in QL_{2k+1}$ $(n = 2(2k+1) - 4)$ y el inciso (vi) se satisface. □

Los casos para $n = 1$ y $n = 0$ se comentan en la observación que sigue.

Observación 3.1. *No es difícil demostrar que*

$$\mathcal{P}_1^-(G_\theta) = \{\lambda x + \beta : \lambda \in (0, 1]\}.$$

Por otra parte, $\mathcal{P}_0^-(G_\theta)$ es un conjunto singular.

3.3. Identificación de los polinomios

En las últimas cuatro proposiciones hemos identificado todos los puntos donde los polinomios de la mejor aproximación unilateral interpolan a la función G_θ. Con estos resultados podemos construir polinomios P_n que satisfacen las ecuaciones (3.3) y (3.4) del Teorema 3.5. Pero también necesitamos de la desigualdad $P_n \leq G_\theta$.

Fijemos $q \in \mathbb{N}$ y sean

$$-1 < x_{q,1}^{\alpha,\beta} < x_{q,2}^{\alpha,\beta} < \ldots < x_{q,q-1}^{\alpha,\beta} < x_{q,q}^{\alpha,\beta} < 1$$

los ceros del polinomio de Jacobi $P_q^{(\alpha,\beta)}$.

Fijemos j, con $1 \leq j \leq q$ y sea $M_{q,j}^{\alpha,\beta} \in \mathbb{P}_{2q-2}$ el único polinomio que satisface las condiciones de interpolación

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 1, \quad (M_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.13}$$

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad (M_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.14}$$

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,j}^{\alpha,\beta}) = 0. \tag{3.15}$$

Denotemos por $N_{q,j}^{\alpha,\beta}$ al único polinomio en $\mathbb{P}_{2q}$ que satisface las condiciones siguientes

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 1, \quad (N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.16}$$

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad (N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.17}$$

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,j}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad N_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) = 0 \quad \text{y} \quad N_{j}^{\alpha,\beta}(1) = 1. \tag{3.18}$$

Sea $R_{q,j}^{\alpha,\beta}$ el único polinomio en $\mathbb{P}_{2q-1}$ que satisface estas condiciones

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 1, \quad (R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.19}$$

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad (R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.20}$$

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,j}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad \text{y} \quad R_{q,j}^{\alpha,\beta}(1) = 1, \tag{3.21}$$

y, por último, $L_{q,j}^{\alpha,\beta}$ denota al único polinomio en $\mathbb{P}_{2q-1}$ que satisface las condiciones de interpolación

$$L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 1, \quad (L_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.22}$$

$$L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad (L_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.23}$$

$$L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,j}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad \text{y} \quad L_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) = 0. \tag{3.24}$$

Además, sea

$$\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{q} \frac{x - x_{q,i}^{\alpha,\beta}}{x_{q,j}^{\alpha,\beta} - x_{q,i}^{\alpha,\beta}}.$$

Asociemos a $M_{q,j}^{\alpha,\beta}$, $N_{q,j}^{\alpha,\beta}$, $R_{q,j}^{\alpha,\beta}$ y $L_{q,j}^{\alpha,\beta}$ otros polinomios como sigue. Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, sean

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) = M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x) + \rho(x - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x)\Big)^2, \qquad (3.25)$$

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) = N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x)+\rho(1-x^2)(x-x_{q,j}^{\alpha,\beta})\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x)\Big)^2, \quad (3.26)$$

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) = R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x) + \rho(1-x)(x - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x)\Big)^2, \quad (3.27)$$

y

$$L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) = L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x) + \rho(1+x)(x - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x)\Big)^2. \quad (3.28)$$

Tenemos que

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q-1}, \qquad N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q+1}.$$

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q}, \quad \text{y} \quad L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q}.$$

Más aún, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$ satisface las condiciones de interpolación (3.13)–(3.15), puesto que

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta},\rho) = 1, \ (M_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta},\rho) = 0, \quad j < i \le q,$$

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,i}^{\alpha,\beta},\rho) = 0, \quad (M_{j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta},\rho) = 0, \quad 1 \le i < j,$$

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x_{q,j}^{\alpha,\beta},\rho) = 0.$$

Cada polinomio en $\mathbb{P}_{2q-1}$ que satisfaga estas condiciones puede ser expresado en la forma dada en (3.25) para algún $\rho \in \mathbb{R}$.

Afirmaciones similares se satisfacen para los polinomios $N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$, $L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$ y $R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$.

Proposición 3.11. *Sean*

$$P_q^{(\alpha,\beta)},\ \ M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho),\ \ N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho),\ \ R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)\ \ y\ \ L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$$

los polinomios definidos anteriormente y $\theta = x_{q,j}$. Entonces

(i) *Para cada $x \in [-1,1]$, tenemos que*

$$\max\Big\{ M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x),\ N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x),\ R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x),\ L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x)\Big\} \le G_\theta(x).$$

(ii) *En los puntos -1 y 1,*

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) < 0, \qquad M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1) < 1,$$

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1) < 0, \qquad (N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1) > 0,$$

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) < 0, \qquad (R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1) > 0,$$

$$(L_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1) < 0 \quad y \quad L_{q,j}^{\alpha,\beta}(1) < 1.$$

(iii) *Para cada $\rho \in \mathbb{R}$ y cada $x \in [-1,1]$, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \le G_\theta(x)$ si y sólo si*

$$\frac{M_j^{\alpha,\beta}(-1)}{(1+\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \le \rho \le \frac{1 - M_j^{\alpha,\beta}(1)}{(1-\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}. \quad (3.29)$$

(iv) *Para cada $\rho \in \mathbb{R}$ y cada $x \in [-1,1]$, $N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \le G_\theta(x)$ si y sólo si*

$$\frac{(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1)}{(1+\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \le 2\rho \le \frac{(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1)}{(1-\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}. \quad (3.30)$$

(v) *Para cada* $\rho \in \mathbb{R}$ *y cada* $x \in [-1,1]$, $R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$ *si y sólo si*

$$\frac{R_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1)}{2(1+\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \leq \rho \leq \frac{(R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1)}{(1-\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}. \tag{3.31}$$

(vi) *Para cada* $\rho \in \mathbb{R}$ *y cada* $x \in [-1,1]$, $L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$ *si y sólo si*

$$\frac{(L_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1)}{(1+\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \leq \rho \leq \frac{1-L_{q,j}^{\alpha,\beta}(1)}{2(1-\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}. \tag{3.32}$$

Demostración. (i) La derivada del polinomio dado en la ecuación (3.25) es

$$(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x,\rho) = (M_j^{\alpha,\beta})'(x) + \rho\ell_{q,j}^{\alpha,\beta}(x)\left(\ell_{q,j}^{\alpha,\beta}(x) + 2(x - x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x)\right).$$

Así, por las condiciones (3.13)-(3.15), para cada $1 \leq i \leq q$ con $i \neq j$,

$$(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta},\rho) = (M_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x_{q,i}^{\alpha,\beta}) = 0.$$

Entonces los puntos $x_{q,i}^{\alpha,\beta}$ son raíces distintas del polinomio $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$, con $i = 1,2,\ldots,q$; dándonos $q-1$ raíces.

Por otra parte, también obtenemos al menos un cero en algún punto

$$t_i \in (x_{q,i}^{\alpha,\beta}, x_{q,i+1}^{\alpha,\beta}), \text{ con } 1 \leq i \leq j-1,$$

y otro en algún punto

$$t_i^* \in (x_{q,i}^{\alpha,\beta}, x_{q,i+1}^{\alpha,\beta}), \text{ para } j < i \leq q-1,$$

obteniéndose $(j-1)+(q-1-j)$ raíces.

En total, $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ posee al menos $2q-3$ ceros distintos en el intervalo $(-1,1)$. En particular, para $\rho = 0$, $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})' \in \mathbb{P}_{2q-3}$

tiene exactamente $2q-3$ ceros distintos en $(-1,1)$. Luego estos ceros son simples y $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ no tiene otros ceros. Por lo tanto, las condiciones de interpolación (3.13)-(3.15) implican necesariamente que, para cada $x \in [-1,\theta]$, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq 0$ y para $x \in [\theta,1]$, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq 1$. De acuerdo con la definición de la función G_θ,

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq G_\theta(x), \text{ para cada } x \in [-1,1].$$

La demostración para los otros polinomios se obtiene de forma similar.

(ii) En el inciso (i) se ha demostrado que

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq G_\theta(x), \text{ para cada } x \in [-1,1].$$

De aquí, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1,\rho) \leq 1$ y $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1,\rho) \leq 0$. Si $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1,\rho) = 1$, entonces $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$, debe tener un cero adicional en el intervalo $(x_{q,q}^{\alpha,\beta}, 1)$, lo cual nos da una contradicción. Así, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1,\rho) < 1$. También, si $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1,\rho) = 0$, entonces $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ tiene un cero adicional en el intervalo $(-1, x_{q,1}^{\alpha,\beta})$ y esto es una contradicción. Luego, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1,\rho) < 0$.

La demostración para los otros polinomios es similar.

(iii) Supongamos que, para cada $x \in [-1,1]$,

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq G_\theta(x).$$

Sustituimos $x = 1$ y $x = -1$ en (3.25), para obtener

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1,\rho) = M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1) + \rho(1-\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1)\Big)^2$$

y

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1,\rho) = M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) - \rho(1+\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1)\Big)^2.$$

Por hipótesis,

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1,\rho) \leq 1 \quad \text{y} \quad M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1,\rho) \leq 0.$$

Se sigue que

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1) + \rho(1-\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1)\Big)^2 \leq 1$$

y

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) - \rho(1+\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1)\Big)^2 \leq 0.$$

A su vez

$$\rho(1-\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1)\Big)^2 \leq 1 - M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1)$$

y

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) \leq \rho(1+\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1)\Big)^2.$$

Al dividir la primera y la segunda desigualdad por los factores

$$(1-\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1)\Big)^2 \quad \text{y} \quad (1+\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1)\Big)^2,$$

obtenemos (3.29). Es decir,

$$\frac{M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1)}{(1+\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \leq \rho \leq \frac{1 - M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1)}{(1-\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}.$$

Para ver el recíproco, supongamos que (3.29) se satisface y pongamos

$$\tau(m) = \frac{M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1)}{(1+\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \quad \text{y} \quad \tau(M) = \frac{1 - M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1)}{(1-\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}.$$

Dado que

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1,\tau(m)) = M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) - \tau(m)(1+\theta)\Big(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1)\Big)^2 = 0,$$

se sigue que $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ tiene un cero adicional en el intervalo $(-1, x_{q,1}^{\alpha,\beta})$. Como en el inciso (i), podemos deducir que $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ tiene exactamente $2q-3$ ceros distintos en $(-1,1)$. Así,

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \tau(m)) \leq G_\theta(x), \text{ para cada } x \in [-1,1]. \tag{3.33}$$

Por otra parte, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1, \tau(M)) = 1$ implica que $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ tiene un cero adicional en $(x_{q,q}^{\alpha,\beta}, 1)$. Por el inciso (i), deducimos que $(M_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ tiene exactamente $2q-3$ ceros distintos en $(-1,1)$. Luego,

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \tau(M)) \leq G_\theta(x), \text{ para cada } x \in [-1,1]. \tag{3.34}$$

Finalmente, para cada $\rho \in \mathbb{R}$ con

$$\frac{M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1)}{(1+\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \leq \rho \leq \frac{1 - M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1)}{(1-\theta)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2},$$

existe $\lambda \in [0,1]$ tal que

$$\rho = \lambda\, \tau(m) + (1-\lambda)\tau(M).$$

Además, por (3.25), para cada $x \in [-1,1]$

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \rho) = \lambda M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \tau(m)) + (1-\lambda) M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \tau(M)). \tag{3.35}$$

Por lo tanto, las desigualdades (3.33) y (3.34) implican que

$$M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \rho) \leq G_\theta(x), \text{ para cada } x \in [-1,1].$$

(iv) Supongamos que, para cada $\rho \in \mathbb{R}$ y cada $x \in [-1,1]$, $N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \rho) \leq G_\theta(x)$.

Como la derivada del polinomio dado en (3.26) viene dada por

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x, \rho) = (N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(x) - 2\rho x(x - x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x))^2$$

$$+\rho(1-x^2)\{(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x))^2 + 2(x - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x)(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)})'(x)\},$$

se sigue que, para $x = 1$ y $x = -1$,

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1,\rho) = (N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1) - 2\rho(1 - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2$$

y

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1,\rho) = (N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1) - 2\rho(1 + x_{q,j}^{\alpha,\beta})\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2.$$

Pero, por hipótesis,

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1,\rho) \leq 0 \quad \text{y} \quad (N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1,\rho) \geq 0.$$

Entonces

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1) - 2(1 + x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2 \leq 0$$

y

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1) - 2(1 - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2 \geq 0.$$

Es decir,

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1) \leq 2(1 + x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2$$

y

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1) \geq 2(1 - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2.$$

Las últimas desigualdades implican (3.30). En otras palabras,

$$\frac{(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1)}{2(1 + x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \leq \rho \leq \frac{(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1)}{2(1 - x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}.$$

Recíprocamente, supongamos que se satisface (3.30) y denotemos

$$\lambda(m) = \frac{(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1)}{2(1 + x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2}$$

y

$$\lambda(M) = \frac{(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1)}{2(1 - x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}.$$

Notemos que $(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(-1,\lambda(m)) = 0$. Entonces $(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ tiene un cero adicional en $x = -1$. Por el inciso i), deducimos que $(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ tiene exactamente $2q-1$ ceros distintos en $(-1,1)$ y podemos proceder como antes para concluir que

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\lambda(m)) \leq G_\theta(x) \text{ para cada } x \in [-1,1]. \tag{3.36}$$

Los mismos argumentos son válidos para $N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\lambda(M))$, ya que

$$(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1,\lambda(M)) = 0$$

y esto nos proporciona un cero adicional de $(N_{q,j}^{\alpha,\beta})'$ en $x = 1$. Así,

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\lambda(M)) \leq G_\theta(x) \text{ para cada } x \in [-1,1]. \tag{3.37}$$

Para finalizar con este inciso, supongamos que $\rho \in \mathbb{R}$ satisface (3.30), entonces existe $\mu \in [0,1]$ tal que

$$\rho = \mu\,\lambda(m) + (1-\mu)\lambda(M).$$

Además, por (3.26),

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) = \mu N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\lambda(m)) + (1-\mu)N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\lambda(M)). \tag{3.38}$$

Por lo tanto, por (3.36) y (3.37),

$$N_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq G_\theta(x), \text{ para cada } x \in [-1,1].$$

(v) Asumamos que $R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho) \leq G_\theta$ en $[-1,1]$. En particular,

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1,\rho) \leq 0 \quad \text{y} \quad (R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1,\rho) \geq 0.$$

Dado que

$$(R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1,\rho) = (R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1) - (1 - x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2$$

y

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1,\rho) = R_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) - 2(1+x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2,$$

se sigue que,

$$(R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1) - (1-x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2 \;\geq\; 0$$

y

$$R_{q,j}^{\alpha,\beta})(-1) - 2(1+x_{q,j}^{\alpha,\beta})\rho\,(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2 \;\leq\; 0.$$

De aquí,

$$\frac{R_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1)}{2(1+x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \leq \rho \leq \frac{(R_{q,j}^{\alpha,\beta})'(1)}{(1-x_{q,j}^{\alpha,\beta})(\ell_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(1))^2}$$

y esto nos proporciona (3.30). Considerando los argumentos dados anteriormente se obtiene la demostración.

(vi) La demostración para este inciso, es similar a la del v). □

Observación 3.2. Como $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(-1) < 0$ y $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(1) < 1$, se sigue que (3.29) define un intervalo no vacío. Similarmente (3.30), (3.31) y (3.32) definen intervalos no vacíos.

En el teorema siguiente se muestran explícitamente los elementos de la mejor aproximación para la función G_θ de acuerdo con las proposiciones (3.7), (3.8), (3.9) y (3.10) cuando θ es raíz de algún polinomio clásico.

Teorema 3.12. *Para cada $r \in \mathbb{N}$, sean $\{x_{r,i}^{(\alpha,\beta)}\}_{i=1}^{r}$ los ceros del polinomio de Jacobi $P_r^{(\alpha,\beta)}$, con $\alpha, \beta \in \{0,1\}$.*

Fijemos $k \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1,\ldots,2k+1\}$ y cada $i \in \{1,\ldots,2k\}$, sean $M_{2k+1,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$, $N_{2k,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$, $R_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$ y $L_{q,j}^{\alpha,\beta}(x,\rho)$ los polinomios definidos en (3.25), (3.26), (3.27) *y* (3.28) *respectivamente.*

i) *Si* $n = 4k$ *y* $\theta = x_{2k+1,j}^{(0,0)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, *entonces* $M_{2k+1,j}^{0,0}(x, \rho)$ *es el único polinomio en* $P_n^-(G_\theta)$.

Si $n = 4k+1$ *y* $\theta = x_{2k+1,j}^{(0,0)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si existe* ρ *que satisface* (3.29) *tal que*

$$P_n(x) = M_{2k+1,j}^{0,0}(x, \rho).$$

ii) *Si* $n = 4k$ *y* $\theta = x_{2k,j}^{(1,0)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si*

$$P_n(x) = R_{2k,j}^{(1,0)}(x, \rho),$$

para algún ρ *que satisface* (3.31).

Si $n = 4k-1$ *y* $\theta = x_{2k,j}^{(1,0)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, *entonces* $R_{2k,j}^{(1,0)}$ *es el único polinomio en* $P_n^-(G_\theta)$.

iii) *Si* $n = 4k$ *y* $\theta = x_{2k,j}^{(0,1)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si*

$$P_n(x) = L_{2k,j}^{(0,1)}(x, \rho),$$

para algún ρ *que satisface* (3.32).

Si $n = 4k-1$ *y* $\theta = x_{2k,j}^{(0,1)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, *entonces* $L_{2k,j}^{(0,1)}$ *es el único polinomio en* $P_n^-(G_\theta)$.

iv) *Si* $n = 4k+1$ *y* $\theta = x_{2k,j}^{(1,1)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si*

$$P_n(x) = N_{2k,j}^{(1,1)}(x, \rho),$$

para algún ρ *que satisface* (3.30).

Si $n = 4k$ *y* $\theta = x_{2k,j}^{(1,1)}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, *entonces* $N_{2k,j}^{(1,1)}$ *es el único polinomio en* $P_n^-(G_\theta)$.

v) *Si* $n = 4k+1$ *y* $\theta = x^{(1,0)}_{2k+1,j}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si existe* ρ *que satisface* (3.31) *tal que*

$$P_n(x) = R^{(1,0)}_{2k+1,j}(x, \rho).$$

Si $n = 4k-2$ *y* $\theta = x^{(1,0)}_{2k-1,j}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si existe* ρ *que satisface* (3.31) *tal que*

$$P_n(x) = R^{(1,0)}_{2k-1,j}(x, \rho).$$

vi) *Si* $n = 4k+1$ *y* $\theta = x^{(0,1)}_{2k+1,j}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si existe* ρ *que satisface* (3.32) *tal que*

$$P_n(x) = R^{(0,1)}_{2k+1,j}(x, \rho).$$

Si $n = 4k-2$ *y* $\theta = x^{(0,1)}_{2k-1,j}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si existe* ρ *que satisface* (3.32) *tal que*

$$P_n(x) = R^{(0,1)}_{2k-1,j}(x, \rho).$$

vii) *Si* $n = 4k-1$ *y* $\theta = x^{(1,1)}_{2k-1,j}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si*

$$P_n(x) = N^{(1,1)}_{2k-1,j}(x, \rho),$$

para algún ρ *que satisface* (3.30).

Si $n = 4k-2$ *y* $\theta = x^{(1,1)}_{2k-1,j}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$, *entonces* $N^{(1,1)}_{2k-1,j}(x)$ *es el único polinomio en* $\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$.

viii) *Si* $n = 4k-1$ *y* $\theta = x^{(0,0)}_{2k,j}$, *con* $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, *entonces* $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ *si y sólo si*

$$P_n(x) = M^{(0,0)}_{2k,j}(x, \rho),$$

para algún ρ que satisface (3.29).

Si $n = 4k-2$ y $\theta = x_{2k,j}^{(0,0)}$, con $j \in \{1, \ldots, 2k\}$, entonces $M_{2k,j}^{(0,0)}(x)$ es el único polinomio en $\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$.

Demostración. (i) Supongamos que $n = 4k$ o $n = 4k+1$ y sea $\theta = x_{2k+1,j}^{(0,0)}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.7 inciso (iv),

$$\{x_{2k+1,i}^{(0,0)}\}_{i=1}^{2k+1} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, se sigue que P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.13)-(3.15). Así, si $n = 4k$, entonces $P_n = M_{2k+1,j}^{(0,0)}$ y, dado que P_n es un elemento de la mejor aproximación unilateral para G_θ, se sigue que $M_{2k+1,j}^{(0,0)}$ es único en $\mathcal{P}^-(G_\theta)$. Ahora, si $n = 4k+1$, entonces por la Proposición 3.11 inciso (iii), existe $\rho \in \mathbb{R}$ que satisface (3.29) tal que $M_{2k+1,j}^{(0,0)}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$ en $[-1,1]$. De aquí,

$$P_n(x) = M_{2k+1,j}^{0,0}(x,\rho).$$

Esto demuestra las condiciones necesarias de la primera y la segunda parte de las afirmaciones del inciso (i).

Veamos la suficiencia de la segunda parte.

Supongamos que el polinomio $M_{2k+1,j}^{(0,0)}(x,\rho)$ está dado por (3.25), para algún ρ que satisface (3.29) y pongamos

$$P_n(x) = M_{2k+1,j}^{(0,0)}(x,\rho).$$

Se sigue de la Proposición 3.11 inciso (iii) que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$.

Pongamos

$$y_{n,i} = x_{2k+1,i}^{(0,0)}, \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq 2k+1.$$

Como P_n satisface las condiciones (3.13)-(3.15),

$$P_n(y_{n,i}) = G_\theta(y_{n,i}), \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, 2k+1.$$

Esto nos proporciona (3.3). Además, dado que $P_{2k+1}^{(0,0)}$ genera una fórmula de cuadratura positiva de tipo Gauss en $\mathbb{P}_{4k+1}$

con nodos $y_{n,i}$ (ver Teorema 2.1), se sigue que (3.4) también se satisface. Luego, por el Teorema 3.5, $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Para el caso $\rho = 0$, tenemos que $M_{2k+1,j}^{(0,0)}(x) \in \mathcal{P}_{4k}^-(G_\theta)$.

(ii) Supongamos que $n = 4k$ o $n = 4k-1$ y sea $\theta = x_{2k,j}^{(1,0)}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$, entonces por la Proposición 3.7 inciso (i),

$$\{x_{2k,i}^{(1,0)}\}_{i=1}^{2k} \cup \{1\} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$, se sigue que P_n satisface las condiciones interpolantes (3.19)-(3.21). Luego, si $n = 4k$, entonces $P_n = R_{2k,j}^{(1,0)}$.

Por otro lado, si $n = 4k-1$, entonces por la Proposición 3.11 inciso (v), existe ρ que satisface (3.31) tal que $R_{2k,j}^{(1,0)}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$ en $[-1,1]$. Así,

$$P_n(x) = R_{2k,j}^{(1,0)}(x,\rho).$$

Hemos verificado las condiciones necesarias de las afirmaciones del inciso (ii).

Veamos la suficiencia. Supongamos que $R_{2k,j}^{(1,0)}(x,\rho)$ está dado por (3.27) para algún ρ que satisface (3.31) y pongamos

$$P_n(x) = R_{2k,j}^{(1,0)}(x,\rho).$$

Por (v) en la Proposición 3.11, para $x \in [-1,1]$,

$$R_{2k,j}^{(1,0)}(x,\rho) \leq G_\theta(x).$$

Es decir, $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$. Además, considerando las condiciones (3.19)-(3.21), tenemos que (3.3) se satisface. Finalmente, como $P_{2k}^{(1,0)}$ genera una fórmula de cuadratura positiva de tipo Gauss en $\mathbb{P}_{4k}$ con nodos

$$y_{n,i} = x_{2k,i}^{(1,0)}, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq 2k \quad \text{y} \quad y_{2k+1} = 1$$

(ver Teorema 2.4), se sigue que (3.4) también se satisface. Luego, por el Teorema 3.5, concluimos que $P_n \in \mathcal{P}_{4k+1}^-(G_\theta)$.

En el caso $\rho = 0$, tenemos que $R^{(1,0)}_{2k,j}(x) \in \mathcal{P}^-_{4k-1}(G_\theta)$.

(iii) Supongamos que $n = 4k$ o $n = 4k-1$ y sea $\theta = x^{(0,1)}_{2k,j}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}^-_n(G_\theta)$, entonces por la Proposición 3.7 inciso (ii), tenemos que

$$\{x^{(0,1)}_{q,i}\}_{i=1}^{2k} \cup \{-1\} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, se sigue que P_n satisface las condiciones interpolantes (3.22)-(3.24). Así, si $n = 4k$, entonces $P_n(x) = L^{(0,1)}_{2k,j}(x,\rho)$.

Ahora, si $n = 4k-1$, entonces por la Proposición 3.11 inciso (vi), existe ρ que satisface (3.32) tal que

$$L^{(0,1)}_{2k,j}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$$

para $x \in [-1,1]$. Así, $P_n(x) = L^{(0,1)}_{2k,j}(x,\rho)$.

Hemos verificado que las condiciones en inciso (iii) son necesarias.

Veamos la suficiencia.

Sea $L^{(0,1)}_{2k,j}(x,\rho)$ el polinomio dado por (3.28) para algún ρ que satisface (3.32) y pongamos

$$P_n(x) = L^{(0,1)}_{2k,j}(x,\rho).$$

Por la Proposición 3.11 inciso (vi),

$$L^{(0,1)}_{2k,j}(x,\rho) \leq G_\theta(x), \quad x \in [-1,1].$$

Además, las condiciones (3.22)-(3.24), implican que (3.3) se satisface. Finalmente, dado que $P^{(0,1)}_{2k}$ genera una regla de cuadratura positiva de tipo Gauss en $\mathbb{P}_{4k}$ con nodos

$$y_1 = -1 \quad \text{y} \quad y_{n,i+1} = x^{(0,1)}_{2k,i},\ 1 \leq i \leq 2k$$

(vea Teorema 2.3), se sigue que (3.4) también se satisface. Así, por el Teorema 3.5, concluimos que $L^{(0,1)}_{2k,j}(x,\rho) \in \mathcal{P}^-_n(G_\theta)$. Notemos que, para el caso $\rho = 0$, $L^{(0,1)}_{2k,j}(x) \in \mathcal{P}^-_{4k-1}(G_\theta)$.

(iv) Supongamos que $n = 4k+1$ o $n = 4k$ y sea $\theta = x_{2k,j}^{(1,1)}$. Si $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$, entonces por la Proposición 3.8 inciso (iv) o por la Proposición 3.7 inciso (iii),

$$\{x_{2k,i}^{(1,1)}\}_{i=1}^{2k} \cup \{-1, 1\} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Como $P_n \leq G_\theta$ en $[-1, 1]$, se sigue que P_n satisface (3.16)-(3.18). Si $n = 4k$, entonces $P_n = N_{2k,j}^{(1,1)}$. Ahora, si $n = 4k+1$, entonces por la Proposición 3.11 inciso (iv), existe un ρ que satisface (3.30) tal que

$$P_n(x) = N_{2k,j}^{(1,1)}(x, \rho).$$

Luego las condiciones del inciso (iv) son necesarias.

Para ver la suficiencia, asumamos que $N_{2k,j}^{(1,1)}(x, \rho)$ está dada por (3.16) para algún ρ que satisface (3.30) y pongamos

$$P_n(x) = N_{2k,j}^{(1,1)}(x, \rho).$$

Por la Proposición 3.11 inciso (iv),

$$N_{2k,j}^{(1,1)}(x, \rho) \leq G_\theta(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Además, las condiciones interpolantes (3.16)-(3.18) implican que (3.3) se satisface. Como $P_{2k}^{(1,1)}$ genera una fórmula de cuadratura positiva de tipo Gauss en $\mathbb{P}_{4k+1}$ con nodos

$$y_1 = -1, \ y_{n,i+1} = x_{2k,i}^{(1,1)}, \ 1 \leq i \leq 2k \quad \text{y} \quad y_{2k+2} = 1$$

(vea Teorema 2.2), se sigue que (3.4) también se satisface. Luego, por el Teorema 3.5, concluimos que $N_{2k,j}^{(1,1)}(x, \rho) \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. En el caso $\rho = 0$, $N_{2k,j}^{(1,1)}(x) \in \mathbb{P}_{4k}$.

(v) Sean $n = 4k+1$ y $\theta = x_{2k+1,j}^{(1,0)}$. Si $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$, entonces por la Proposición 3.8 inciso (ii), tenemos que

$$\{x_{2k+1,i}^{(1,0)}\}_{i=1}^{2k+1} \cup \{1\} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Ahora, por la Proposición 3.11 inciso iii), existe $\rho \in \mathbb{R}$ que satisface (3.31) tal que $R^{(1,0)}_{2k+1}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$, $x \in [-1,1]$. Por lo tanto,

$$P_n = R^{(1,0)}_{2k+1,j}(x,\rho).$$

Por otra parte, supongamos que $R^{(1,0)}_{2k+1,j}(x,\rho)$ está dado por (3.27) para algún ρ que satisface (3.31) y pongamos

$$P_n = R^{(1,0)}_{2k+1,j}.$$

Podemos repetir los argumentos utilizados en el inciso (ii), para concluir que $R^{(1,0)}_{2k+1,j} \in \mathcal{P}^-_n(G_\theta)$. La demostración, para el caso, $n = 4k-2$ y $\theta = x^{(1,0)}_{2k-1,j}$ es similar.

(vi) Supongamos que $n = 4k+1$ y $x^{(0,1)}_{2k+1,j} = \theta$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}^-_n(G_\theta)$, entonces por la Proposición 3.8 inciso (iii),

$$\{x^{(0,1)}_{2k+1,i}\}_{i=1}^{2k+1} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Por la Proposición 3.11 inciso iii), existe $\rho \in \mathbb{R}$ que satisface (3.31) tal que $R^{(0,1)}_{2k+1,j}(x,\rho)(x,\rho) \leq G_\theta(x)$, $x \in [-1,1]$. Por lo tanto,

$$P_n(x) = R^{(0,1)}_{2k+1,j}(x,\rho).$$

Como antes, podemos demostrar que

$$P_n = R^{(0,1)}_{2k+1,j} \in \mathcal{P}^-_n(G_\theta),$$

siempre que $R^{(0,1)}_{2k+1,j}$ esté definido por (3.27) y ρ satisfaga (3.31). La prueba, para el caso, $n = 4k-2$ y $\theta = x^{(0,1)}_{2k-1,j}$ es similar.

(vii) Supongamos que $n = 4k-1$ y sea $x^{(1,1)}_{2k-1,j} = \theta$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}^-_n(G_\theta)$, entonces por las Proposiciones 3.9 y 3.10 inciso (iv),

$$\{x^{(1,1)}_{2k-1,i}\}_{i=1}^{2k-1} \cup \{-1,1\} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Por la Proposición 3.11 inciso iv), existe $\rho \in \mathbb{R}$ que satisface (3.30) tal que $N^{(1,1)}_{2k-1,j}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$, $x \in [-1,1]$. Por lo tanto,

$$P_n(x) = N^{(1,1)}_{2k-1,j}(x,\rho).$$

Hemos obtenido la condición necesaria.

Veamos la condición suficiente. Si $N_{2k-1,j}^{(1,1)}(x,\rho)$ está dado por (3.26) para algún ρ que satisface (3.30), pongamos

$$P_n = N_{2k-1,j}^{(1,1)}.$$

De la Proposición 3.11 inciso (iv), se sigue que

$$N_{2k-1,j}^{(1,1)}(x,\rho) \leq G_\theta(x), \qquad x \in [-1,1].$$

Además, las condiciones (3.16)-(3.18) implican (3.3). Dado que $P_{2k-1}^{(1,1)}$ genera una fórmula de cuadratura positiva de tipo Gauss en $\mathbb{P}_{4k-1}$ con nodos

$$y_1 = -1, \quad y_{i+1} = x_{2k-1,i}^{(1,1)}, \quad 1 \leq i \leq 2k \quad \text{y} \quad y_{2k+2} = 1$$

(ver Teorema 2.2), entonces (3.4) también se satisface. Así, por el Teorema 3.5, concluimos que $N_{2k-1,j}^{(1,1)} \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. La demostración, para el caso $n = 4k-2$ y $\theta = x_{2k-1,j}^{(1,1)}$ es similar.

Como $N_{2k-1,j}^{(1,1)} \in \mathbb{P}_{4k-2}$ para $\rho = 0$, se sigue que $N_{2k-1,j}^{(1,1)}$ es el único polinomio en $\mathcal{P}_{4k-2}^-(G_\theta)$.

(viii) Supongamos que $n = 4k-1$ y sea $x_{2k,j}^{(0,0)} = \theta$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por las Proposiciones 3.9 y 3.10 inciso (i),

$$\{x_{2k-1,i}^{(0,1)}\}_{i=1}^{2k-1} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Por la Proposición 3.11 inciso iii), existe $\rho \in \mathbb{R}$ que satisface (3.29) tal que $M_{2k,j}^{(0,0)}(x,\rho) \leq G_\theta(x)$, $x \in [-1,1]$. Por lo tanto,

$$P_n = M_{2k,j}^{(0,0)}(x,\rho).$$

Por otra parte, supongamos que $M_{2k,j}^{(0,0)}(x,\rho)$ está dado por (3.25) para algún ρ que satisface (3.29) y sea

$$P_n(x) = M_{2k,j}^{(0,0)}(x,\rho).$$

Ahora, por la Proposición 3.11 inciso (iii),

$$M_{2k,j}^{(0,0)}(x,\rho) \leq G_\theta(x), \quad \text{para} \quad \text{cada} \quad x \in [-1,1].$$

Las condiciones (3.13)-(3.15) implican que (3.3) se satisface. Finalmente, como $P_{2k}^{(0,0)}$ genera una fórmula de cuadratura positiva de tipo Gauss en $\mathbb{P}_{4k-1}$ con nodos

$$y_1 = -1, \quad y_{i+1} = x_{2k,i}^{(0,0)}, \quad 1 \leq i \leq 2k \quad \text{y} \quad y_{2k+2} = 1$$

(ver Teorema 2.1), tenemos que (3.4) también se satisface. Luego, por el Teorema 3.5, $M_{2k,j}^{(0,0)} \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$.

Dado que $M_{2k,j}^{(0,0)} \in \mathbb{P}_{4k-2}$ para $\rho = 0$, se sigue que $M_{2k,j}^{(0,0)}$ es el único polinomio en $\mathcal{P}_{4k-2}^-(G_\theta)$. La prueba para el caso $n = 4k-2$ es similar. □

Observación 3.3. Para $n = 4k+1$, tenemos que $\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$ no es un conjunto singular. Las ecuaciones (3.35) y (3.38) implican que $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \tau(m))$, $M_{q,j}^{\alpha,\beta}(x, \tau(M))$, $N_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x, \lambda(m))$ y $N_{q,j}^{(\alpha,\beta)}(x, \lambda(M))$ son precisamente los puntos extremales de la familia $\mathcal{P}_n^-(G_\theta)$.

Similarmente, toca ahora analizar los elementos de la mejor aproximación unilateral en el caso en que θ no coincide con un cero de algún polinomio clásico.

Para $q > 1$ y $\theta \in (-1, 1)$, consideremos los siguientes polinomios:

$$A_{q,\theta}(x) = P_q^{(0,0)}(x) - \frac{P_q^{(0,0)}(\theta)}{P_{q-1}^{(0,0)}(\theta)} P_{q-1}^{(0,0)}(x), \qquad \theta \notin Z\Big(P_{q-1}^{(0,0)}\Big),$$

$$B_{q,\theta}(x) = P_q^{(1,1)}(x) - \frac{P_q^{(1,1)}(\theta)}{P_{q-1}^{(1,1)}(\theta)} P_{q-1}^{(1,1)}(x), \qquad \theta \notin Z\Big(P_{q-1}^{(1,1)}\Big),$$

$$C_{q,\theta}(x) = P_q^{(1,0)}(x) - \frac{P_q^{(1,0)}(\theta)}{P_{q-1}^{(1,0)}(\theta)} P_{q-1}^{(1,0)}(x), \qquad \theta \notin Z\Big(P_{q-1}^{(1,0)}\Big),$$

y

$$D_{q,\theta}(x) = P_q^{(0,1)}(x) - \frac{P_q^{(0,1)}(\theta)}{P_{q-1}^{(0,1)}(\theta)} P_{q-1}^{(0,1)}(x), \qquad \theta \notin Z\Big(P_{q-1}^{(0,1)}\Big).$$

Nos interesan sólo los casos cuando todos los ceros de estos polinomios son reales, diferentes y se encuentran en el interior del intervalo $(-1, 1)$.

Denotemos por $y_{q,i}^{(0,0)}$ a los ceros del polinomio $A_{q,\theta}(x)$. Fijemos j, con $1 \leq j \leq q$ y sea $A_{q,j}^{\theta} \in \mathbb{P}_{2q-2}$ el único polinomio que satisface las condiciones de interpolación

$$A_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(0,0)}) = 1, \quad (A_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(0,0)}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.39}$$

$$A_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(0,0)}) = 0, \quad (A_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(0,0)}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.40}$$

$$A_{q,j}^{\theta}(y_{q,j}^{(0,0)}) = 0, \tag{3.41}$$

Sean los puntos $y_{q,i}^{(1,1)}$ los ceros del polinomio $B_{q,\theta}(x)$. Fijemos j, con $1 \leq j \leq q$ y denotemos por $B_{q,j}^{\theta}$ al único polinomio en $\mathbb{P}_{2q}$ que satisface las condiciones

$$B_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(1,1)}) = 1, \quad (B_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(1,1)}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.42}$$

$$B_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(1,1)}) = 0, \quad (B_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(1,1)}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.43}$$

$$B_{q,j}^{\theta}(y_{q,j}^{(1,1)}) = 0, \quad B_{q,j}^{\theta}(-1) = 0 \quad \text{y} \quad B_{q,j}^{\theta}(1) = 1. \tag{3.44}$$

Sean los puntos $y_{q,i}^{(1,1)}$ los ceros del polinomio $C_{q,\theta}(x)$. Fijemos j, con $1 \leq j \leq q$ y sea $C_{q,j}^{\theta}$ el único polinomio en $\mathbb{P}_{2q-1}$ que satisface las condiciones de interpolación

$$C_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(1,0)}) = 1, \quad (C_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(1,0)}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.45}$$

$$C_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(1,0)}) = 0, \quad (C_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(1,0)}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.46}$$

$$C_{q,j}^{\theta}(y_{q,j}^{(1,0)}) = 0 \quad \text{y} \quad C_{q,j}^{\theta}(1) = 1. \tag{3.47}$$

Sean los puntos $y_{q,i}^{(0,1)}$ los ceros del polinomio $D_{q,\theta}(x)$. Fijemos j, con $1 \leq j \leq q$ y denotemos por $D_{q,j}^{\theta}$ el único polinomio en $\mathbb{P}_{2q-1}$ que satisface las condiciones

$$D_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(0,1)}) = 1, \quad (D_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(0,1)}) = 0, \quad j < i \leq q, \tag{3.48}$$

$$D_{q,j}^{\theta}(y_{q,i}^{(0,1)}) = 0, \quad (D_{q,j}^{\theta})'(y_{q,i}^{(0,1)}) = 0, \quad 1 \leq i < j, \tag{3.49}$$

$$D_{q,j}^{\theta}(y_{q,j}^{(0,1)}) = 0 \quad \text{y} \quad D_{q,j}^{\theta}(-1) = 0. \tag{3.50}$$

Además, sea

$$\ell_{q,j}^{\alpha,\beta}(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{q} \frac{x - y_{q,i}^{\alpha,\beta}}{y_{q,j}^{\alpha,\beta} - y_{q,i}^{\alpha,\beta}}.$$

Asociemos a $A_{q,j}^{\theta}$, $B_{q,j}^{\theta}$, $C_{q,j}^{\theta}$ y $D_{q,j}^{\theta}$ otros polinomios. Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, definamos

$$A_{q,j}^{\theta}(x,\rho) = A_{q,j}^{\theta}(x) + \rho(x - x_{q,j}^{(0,0)})\Big(\ell_{q,j}^{(0,0)}(x)\Big)^2, \tag{3.51}$$

$$B_{q,j}^{\theta}(x,\rho) = B_{q,j}^{\theta}(x) + \rho(1-x^2)(x - x_{q,j}^{(1,1)})\Big(\ell_{q,j}^{(1,1)}(x)\Big)^2, \tag{3.52}$$

$$C_{q,j}^{\theta}(x,\rho) = C_{q,j}^{\theta}(x) + \rho(1-x)(x - x_{q,j}^{(1,0)})\Big(\ell_{q,j}^{(1,0)}(x)\Big)^2, \tag{3.53}$$

y

$$D_{q,j}^{\theta}(x,\rho) = D_{q,j}^{\theta}(x) + \rho(1+x)(x - x_{q,j}^{(0,1)})\Big(\ell_{q,j}^{(0,1)}(x)\Big)^2. \tag{3.54}$$

Notemos que

$$A_{q,j}^{\theta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q-1}, \qquad B_{q,j}^{\theta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q+1}.$$

$$C_{q,j}^{\theta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q} \quad \text{y} \quad D_{q,j}^{\theta}(x,\rho) \in \mathbb{P}_{2q}.$$

Más aún, $A_{q,j}^{\theta}(x,\rho)$ satisface las condiciones de interpolación (3.39)–(3.41) y cada polinomio en $\mathbb{P}_{2q-1}$ que satisfaga estas condiciones puede ser escrito como en (3.51). Afirmaciones similares se satisfacen para los polinomios $B_{q,j}^{\theta}(x,\rho)$, $C_{q,j}^{\theta}(x,\rho)$ y $D_{q,j}^{\theta}(x,\rho)$.

Teorema 3.13. *Para cada $r \in \mathbb{N}$, sean $\{x_{r,i}^{(\alpha,\beta)}\}_{i=1}^{r}$ los ceros del polinomio de Jacobi $P_r^{(\alpha,\beta)}$, con $\alpha, \beta \in \{0,1\}$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$.*

i) *Si $n = 4k$ y $\theta \in GQ_{2k+1}$, entonces*

$$A_{2k+1,j}^{\theta}, \quad \text{con} \quad 1 \leq j \leq 2k+1$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$.
Si $n = 4k-2$ y $\theta \in GQ_{2k}$, entonces

$$A_{2k,j}^{\theta}, \quad \text{con} \quad 1 \leq j \leq 2k$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$.

ii) *Si $n = 4k$ y $\theta \in QL_{2k+2}$, entonces*

$$B_{2k,j}^{\theta}, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq 2k+2$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$, con $\theta = y_{2k,j}^{(1,1)}$.
Si $n = 4k-2$ y $\theta \in QL_{2k+1}$, entonces

$$B_{2k-1,j}^{\theta}, \quad \text{con} \quad 1 \leq j \leq 2k+1$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$ y $\theta = y_{2k-1,j}^{(1,1)}$.

iii) *Si $n = 4k+1$ y $\theta \in QRR_{2k+1}$, entonces*

$$C_{2k+1,j}^{\theta}, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq 2k+1$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$, con $\theta = y_{2k+1,j}^{(1,0)}$.
Si $n = 4k-1$ y $\theta \in QRR_{2k+1}$, entonces

$$C_{2k,j}^{\theta}, \quad \text{con} \quad 1 \leq j \leq 2k+1$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$, y $\theta = y_{2k,j}^{(1,0)}$.

iv) *Si $n = 4k+1$ y $\theta \in QLR_{2k+1}$, entonces*

$$D^{\theta}_{2k+1,j}, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq 2k+1$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$, con $\theta = y^{(0,1)}_{2k+1,j}$.
Si $n = 4k-1$ y $\theta \in QLR_{2k+1}$, entonces

$$D^{\theta}_{2k,j}, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq 2k+1$$

es el único polinomio en $P_n^-(G_\theta)$, con $\theta = y^{(0,1)}_{2k,j}$.

Demostración. (i) Supongamos que $n = 4k$ y sea

$$\theta = y^{(0,0)}_{2k+1,j}, \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq 2k+1.$$

Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.7 inciso (v),

$$\{y^{(0,0)}_{2k+1,i}\}_{i=1}^{2k+1} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, se sigue que P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.39)-(3.41). Así, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = A^{\theta}_{q,j}(x,\rho).$$

Como $\deg(P_n) \leq n = 4k$, se sigue que $\rho = 0$.

Ahora, supongamos que $n = 4k-2$ y sea $\theta \in QG_{2k}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.10 inciso (v),

$$\{y^{(0,0)}_{2k,i}\}_{i=1}^{2k} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Como $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, entonces P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.39)-(3.41). Así, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = A^{\theta}_{q,j}(x,\rho).$$

Dado que $\deg(P_n) \leq n = 4k-2$, se sigue que $\rho = 0$.

(ii) Supongamos que $n = 4k$ y sea $\theta \in QL_{2k+2}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.7 inciso (vi),

$$\{y^{(1,1)}_{2k,i}\}_{i=1}^{2k} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Como $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, se sigue que P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.42)-(3.44). Así, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = B^\theta_{2k,j}(x,\rho).$$

Dado que $\deg(P_n) \leq n = 4k$, se sigue que $\rho = 0$.

Ahora, supongamos que $n = 4k-2$ y sea $\theta \in QL_{2k+1}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.10 inciso (vi),

$$\{y^{(1,1)}_{2k-1,i}\}_{i=1}^{2k-1} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, se sigue que P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.42)-(3.44). Así, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = B^\theta_{2k-1,j}(x,\rho).$$

Como $\deg(P_n) \leq n = 4k-2$, entonces $\rho = 0$.

(iii) Supongamos que $n = 4k+1$ y sea $\theta \in QRR_{2k+1}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.8 inciso (v),

$$\{y^{(1,0)}_{2k+1,i}\}_{i=1}^{2k+1} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, entonces P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.45)-(3.47). Luego, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = C^\theta_{2k+1,j}(x,\rho).$$

Tomando en cuenta que $\deg(P_n) \leq n$, se sigue que $\rho = 0$.

Ahora, supongamos que $n = 4k-1$ y sea $\theta \in QRR_{2k+1}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.9 inciso (v),

$$\{y^{(1,0)}_{2k,i}\}_{i=1}^{2k} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1,1]$, entonces P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.45)-(3.47). Luego, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = C^\theta_{2k,j}(x,\rho).$$

Como $\deg(P_n) \leq n = 4k-1$, se sigue que $\rho = 0$.

(iv) Supongamos que $n = 4k + 1$ y sea $\theta \in QLR_{2k+1}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.8 inciso (vi),

$$\{y_{2k+1,i}^{(0,1)}\}_{i=1}^{2k+1} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Dado que $P_n \leq G_\theta$ en $[-1, 1]$, se sigue que P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.48)-(3.50), con $q = 2k + 1$. Así, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = D_{2k+1,j}^{\theta}(x, \rho).$$

Considerando que $\deg(P_n) \leq n$, concluimos que $\rho = 0$.

Ahora, supongamos que $n = 4k - 1$ y $\theta \in QLR_{2k+1}$. Fijemos $P_n \in \mathcal{P}_n^-(G_\theta)$. Por la Proposición 3.9 inciso (vi),

$$\{y_{2k,i}^{(0,1)}\}_{i=1}^{2k} \subseteq Z(P_n - G_\theta).$$

Como $P_n \leq G_\theta$ en $[-1, 1]$, se sigue que P_n debe satisfacer las condiciones interpolantes (3.48)-(3.50). Luego, existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n(x) = C_{2k,j}^{\theta}(x, \rho).$$

Dado que $\deg(P_n) \leq n = 4k - 1$, entonces $\rho = 0$. □

Capítulo 4

Operadores polinomiales para la aproximación unilateral en $W_p^r[0,1]$

Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por

$$W_p^r[0,1] = \left\{ f : f^{(r-1)} \in AC[0,1] \text{ y } f^{(r)} \in L_p[0,1] \right\}.$$

En este último capítulo construiremos operadores polinomiales para la aproximación unilateral en el espacio $W_p^r[0,1]$. En particular queremos resolver los problemas siguientes.

1: Construir dos sucesiones de operadores

$$\lambda_n, \Lambda_n : W_p^r[0,1] \to \mathbb{P}_n$$

tales que, para toda $f \in W_p^r[0,1]$, se tiene que

$$\lambda_n(f,x) \leq f(x) \leq \Lambda_n(f,x), \ x \in [0,1],$$

y

$$||\Lambda_n(f) - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]} \to 0.$$

2: Encontrar buenos estimados para el error

$$||\Lambda_n(f) - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]}.$$

Para resolver los problemas anteriores, necesitamos: a) conocer aproximantes unilaterales para la función de Heaviside,

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \in [-1, 0], \\ \\ 1, & \text{si} \quad t \in (0, 1]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Nótese que $G = G_0$, donde G_θ está dada como en la Definición 3.1. b) Tener funcionales adecuadas para estimar la velocidad de convergencia.

En la Sección 4.1 se presentan algunos resultados relacionados con módulos de continuidad locales. Dichos módulos serán utilizados para estimar la velocidad de convergencia. En la Sección 4.2 se construyen polinomios algebraicos para la mejor aproximación unilateral de la función de Heaviside. El resultado principal de la sección es el Teorema 4.5. En la Sección 4.3 construimos operadores λ_n y Λ_n que resuelven el primer problema y, además, se dan estimados superiores para el error $||\Lambda_n(f) - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]}$. En la Sección 4.4 presentamos algunas generalizaciones. En la Sección 4.5 comparamos nuestros resultados con los dados por Lenze y Hristov e Ivanov (ver [20], [14] y [15]).

4.1. Módulos de continuidad locales

Para $t > 0$, el módulo local de continuidad de una función 2π-periódica g, en un punto x, se define como

$$w(g, x, t) = \sup\{|g(r) - g(s)| : r, s \in [x - t, x + t]\}. \tag{4.2}$$

Este módulo está bién definido siempre que g sea una función acotada.

Los módulos locales de continuidad han sido utilizados por distintos autores para estimar la velocidad de convergencia de algunos procesos de aproximación (por ejemplo, ver [15] y [33]).

Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función 2π-periódica tal que

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ 0, & \text{si} \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus (-\pi/2, \pi/2). \end{cases} \tag{4.3}$$

En toda la sección asumimos que F está definida como en (4.3).

Para los resultados de esta sección necesitamos las notaciones siguientes:

$$J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad I = [-\pi, \pi] \setminus J.$$

Para $t \geq 0$, pondremos

$$J(t) = \left(-\frac{\pi}{2} - t, \frac{\pi}{2} + t\right),$$

$$I(t) = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} + t\right] \bigcup \left[-t + \frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

$$i(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in I(t), \\ 0, & \text{si} \quad x \notin I(t) \end{cases}$$

y

$$j(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in J(t), \\ 0, & \text{si} \quad x \notin J(t). \end{cases}$$

Como es usual, denotaremos

$$B_\delta(x) \, = \, \{y \in \mathbb{R} : \mid x - y \mid < \delta\}$$

y

$$\operatorname{dist}(A, B) \, = \, \inf\{\mid x - y \mid : x \in A, \, y \in B\}.$$

Observación 4.1. Para $t = 0$, $I(0) \subseteq I$ y $J = J(0)$.
Para $t > 0$, $I \subseteq I(t)$ y $J \subseteq J(t)$.

Proposición 4.1. *Si $x \in [-\pi, \pi]$ y $t > 0$, entonces*

$$w(F, x, t) = w(F, -x, t) \tag{4.4}$$

y

$$w(F, x, t) \;=\; j(x, t)\; i(x, 0) + i(x, t)\; j(x, 0). \tag{4.5}$$

Demostración. Como F es una función par, es claro que

$$w(F, -x, t) = w(F, x, t).$$

Para ver (4.5) consideraremos varios casos.

Caso I. Supongamos que $x \in I$. Si $x \in [-\pi, -\pi/2]$, entonces

$$t - \pi \leq x + t \leq t - \frac{\pi}{2} < t.$$

Así,

$$w(F, x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \leq \operatorname{dist}(x, J), \\ \\ 1, & \text{si} \quad t > \operatorname{dist}(x, J), \end{cases}$$

$$j(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \leq \operatorname{dist}(x, J), \\ \\ 1, & \text{si} \quad t > \operatorname{dist}(x, J), \end{cases}$$

$$i(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \leq \operatorname{dist}(x, J), \\ \\ 0, & \text{si} \quad t > \operatorname{dist}(x, J), \end{cases}$$

$$i(x, 0) \;=\; 1 \quad \text{y} \quad j(x, 0) \;=\; 0.$$

Esto prueba la igualdad.

Caso II. Supongamos que $x \in J$. Como $x \notin I(0)$, de acuerdo con la definición de la función i, $i(x, 0) = 0$. Así, sólo resta verificar que

$$w(F, x, t) = i(x, t)\; j(x, 0).$$

En caso que $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$-t \leq x - t \leq \frac{\pi}{2} - t < \frac{\pi}{2}$$

y

$$0 < t \leq x + t \leq \frac{\pi}{2} + t.$$

Así, $x \in J(t)$

$$w(F, x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \leq \operatorname{dist}(x, I), \\ \\ 1, & \text{si} \quad t > \operatorname{dist}(x, I), \end{cases}$$

$$i(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \leq \operatorname{dist}(x, I), \\ \\ 1, & \text{si} \quad t > \operatorname{dist}(x, I), \end{cases}$$

y $j(x, 0) = 1$.

Por lo tanto $w(F, x, t) = j(x, t)i(x, 0) + i(x, t)j(x, 0)$. □

Proposición 4.2. *Para cualesquiera* $x, y, u \in \mathbb{R}$,

$$|F(x) - F(y)| \leq w(F, y, |u|) + w(F, x + u, |x - y|). \quad (4.6)$$

Demostración. Como F es una función 2π-periódica, podemos suponer que $x, y \in [-\pi, \pi]$.

Como $F(z) = 1$ o $F(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{R}$, es claro que $| F(x) - F(y) | \leq 1$.

Por otro lado, según la definición de $w(F, \cdot, \cdot)$, cualquiera sea $z \in \mathbb{R}$ y $v > \pi/2$,

$$w(F, z, v) = 1.$$

Consideraremos dos casos: si $x \in J$ (respectivamente I), entonces $y \in I$ (respectivamente J).

Caso I. Asumamos que $x \in J$ y $y \in I$

Si $|u| \geq \operatorname{dist}(y, J)$, se sigue de la definición de w que $w(F, y, |u|) = 1$, luego se cumple (4.6). Si $|u| < \operatorname{dist}(y, J)$, entonces $w(F, x + u, |x - y|) = 1$. Verifiquemos esta afirmación. Nótese que $y + u \in I$ y

$$x + u - |x - y| \leq y + u \leq x + u + |x - y|.$$

Además, como $|u| < \text{dist}(y, J) \leq |x - y|$, tenemos que

$$x + u - |x - y| < x < x + u + |x - y|.$$

Según lo anterior,

$$x, y + u \in \{z \in \mathbb{R} : |z - (x + u)| \leq |x - y|\}$$

y, por definición, concluimos que $w(F, x + u, |x - y|) = 1$.

(b) Supongamos que $x \in I$ y $y \in J$.

Si $|u| > \text{dist}(y, I)$, como antes, sabemos que se cumple (4.6).

Veamos que $w(F, x + u, |x - y|) = 1$, si $|u| \leq \text{dist}(y, I)$. Nótese que $y + u \in J$ y

$$x + u - |x - y| \leq y + u \leq x + u + |x - y|.$$

Además, dado que $|u| < |x - y|$, también se tiene que

$$x + u - |x - y| \leq x \leq x + u + |x - y|.$$

Luego

$$x, y + u \in \{z \in \mathbb{R} : |z - (x + u)| \leq |x - y|\}$$

y, por definición, concluimos que $w(F, x+u, |x-y|) = 1$. □

4.2. Aproximantes unilaterales para la función de Heaviside

En esta sección construimos polinomios algebraicos de grado no mayor que n para la aproximación unilateral de la función de Heaviside G definida en (4.1). El resultado principal se da en el Teorema 4.5.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$K_n(t) = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}{n+2}\left(\frac{\cos(\frac{(n+2)t}{2})}{\cos(\frac{\pi}{n+2}) - \cos t}\right)^2,$$

si $t \neq \pm\pi/(n+2)$, y

$$K_n\left(\pm\frac{\pi}{n+2}\right) = \frac{n+2}{2}.$$

La función K_n se conoce como el núcleo de Fejér-Korovkin.

Se sabe que K_n es un polinomio trigonométrico positivo par de grado n que puede ser escrito en la forma

$$K_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \theta_n(k)\cos kt, \tag{4.7}$$

donde, para $1 \leq k \leq n$,

$$\theta_n(k) = \frac{(n-k+3)\sin(\frac{\pi(k+1)}{n+2}) - (n-k+1)\sin(\frac{\pi(k-1)}{n+2})}{2(n+2)\sin(\frac{\pi}{n+2})}.$$

En particular,

$$\theta_n(1) = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) \tag{4.8}$$

y

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(t)dt = 1. \tag{4.9}$$

El lector puede encontrar en (ver [9, p. 79-80]) las demostraciones de las propiedades de K_n indicadas más arriba.

Más adelante necesitaremos el resultado siguiente.

Proposición 4.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tK_n(t)dt \leq \frac{\pi^2}{2(n+2)}. \tag{4.10}$$

Demostración. Se conoce que, para $t \in [0, \pi]$,

$$\frac{t}{\pi} \leq \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Utilizando la desigualdad de Hölder y (4.9), obtenemos

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tK_n(t)dt \leq \int_{0}^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) K_n(t)dt$$

$$= \int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sqrt{K_n(t)}\sqrt{K_n(t)}dt$$

$$\leq \left(\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 K_n(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_0^\pi K_n(t)dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\pi \int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 K_n(t)dt\right)^{1/2}.$$

Por otra parte, considerando (4.7), (4.9), el hecho que los cosenos son ortogonales y (4.8), se tiene que

$$\sqrt{\pi \int_0^\pi \sin^2(\frac{t}{2})K_n(t)dt} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1-\cos t)K_n(t)dt}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}\left(\pi - \theta_n(1)\pi\right)}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n+2}\right)}$$

$$= \pi \sin\left(\frac{\pi}{2(n+2)}\right)$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2(n+2)}.$$

□

Teorema 4.4. *Para $x, u, t \in [-\pi, \pi]$ y $n \in \mathbb{N}$, definamos*

$$U(x,t,u) = w(F, x+t, |u|) + w(F, x+u, |t|),$$

$$T_n^-(F,x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [F(x+t) - U(x,t,u)]K_n(t)K_n(u)dtdu$$

y

$$T_n^+(F,x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [F(x+t) + U(x,t,u)]K_n(t)K_n(u)dtdu.$$

Se tiene que $T_n^-(F), T_n^+(F) \in \mathbb{T}_n$ *y son funciones pares tales que*

$$T_n^-(F,x) \leq F(x) \leq T_n^+(F,x), \qquad x \in [-\pi,\pi] \tag{4.11}$$

y

$$||T_n^+(F) - T_n^-(F)||_{1,[-\pi,\pi]} \leq \frac{8\pi^2}{n+2}. \tag{4.12}$$

Demostración. Como, para $k \in \mathbb{Z}$,

$$w(F,z,t) \;=\; w(F,z+2k\pi,t), \tag{4.13}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
4\pi^2 T_n^-(F,x) &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t)K_n(t)dt \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+t,|u|)K_n(t)dt \right) K_n(u)du \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+u,|t|)K_n(t)dt \right) K_n(u)du \\
&= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t)K_n(t)dt - \\
&\quad -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+t,|u|)K_n(u)du \right) K_n(t)dt.
\end{aligned}$$

No es difícil verificar que

$$2\pi \int_{-\pi}^{\pi} F(x+t)K_n(t)dt = 2\pi^2 + 8\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\theta_n(2k-1)}{(2k-1)}$$

y

$$\begin{aligned}
&-2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+t,|u|)K_n(u)du \right) K_n(t)dt = \\
&\quad = -4\pi \int_{-\pi}^{\pi} w(F,x,|u|)K_n(u)du - 8\pi \sum_{k=1}^{n} A_k \theta_n(k) \cos kx
\end{aligned}$$

$$-8\pi \sum_{k=1}^{n} B_k \theta_n(k) \sin kx,$$

donde

$$A_k = \int_{x-\pi}^{x+\pi} w(F, y, |u|) \cos kydy$$

y

$$B_k = \int_{x-\pi}^{x+\pi} w(F, y, |u|) \sin kydy.$$

Así, concluimos que $T_n^-(F) \in \mathbb{T}_n$.

De manera similar se verifica que $T_n^+(F) \in \mathbb{T}_n$.

Por (4.4), $w(F, x-t, |u|) = w(F, -x+t, |u|)$ y dado que

$$F(x-t) = F(-x+t),$$

se sigue que

$$T_n^-(F, x) = T_n^-(F, -x) \quad \text{y} \quad T_n^+(F, x) = T_n^+(F, -x).$$

Esto es, la funciones anteriores son pares.

De la Proposición 4.2 se sigue que

$$F(x) \leq F(x+t) + w(F, x+t, |u|) + w(F, x+u, |t|)$$

$$= F(x+t) + U(x, t, u).$$

De aquí que

$$F(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} F(x) K_n(t) dt \right) K_n(u) du$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(F(x+t) + U(x, t, u) \right) K_n(t) dt \right] K_n(u) du$$

$$= T_n^+(F, x)$$

y esto prueba la segunda desigualdad en (4.11).

La primera se demuestra de forma similar.

Procedamos a estimar $||T_n^+ - T_n^-||_{1,[-\pi,\pi]}$. Por la Proposición 4.1,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x,|t|)dx &= 2\int_0^{\pi} w(F,x,|t|)dx \\ &= 2\int_0^{\pi} \Big(j(x,\mid t \mid)\ i(x,0) + i(x,\mid t \mid)\ j(x,0)\Big)dx \\ &= 2\int_{\pi/2-|t|}^{\pi/2+|t|} dx \ = \ 4 \mid t \mid . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}&\left|T_n^+(F,x) - T_n^-(F,x)\right| = \\ &\quad = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} U(x,t,u)K_n(t)dt\right]K_n(u)du \\ &\quad = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+t,|u|)K_n(t)dt\right]K_n(u)du \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+u,|t|)K_n(t)dt\right]K_n(u)du \\ &\quad = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+u,|t|)K_n(t)dt\right)K_n(u)du.\end{aligned}$$

Considerando el Teorema de Fubini, (4.9),(4.13) y (4.14), obtenemos

$$\begin{aligned}&\pi^2||T_n^+ - T_n^-||_{1,[-\pi,\pi]} \\ &\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+u,|t|)K_n(t)dt\right)K_n(u)du\right)dx \\ &\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x+u,|t|)dx\right)K_n(t)dt\right]K_n(u)du \\ &\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x,|t|)dx\right)K_n(t)dt\right]K_n(u)du \\ &\quad = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(F,x,|t|)dx\right)K_n(t)dt\end{aligned}$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi} tK_n(t)dt.$$

Luego, por (4.10),

$$||T_n^+ - T_n^-||_{1,[-\pi,\pi]} = \frac{16}{\pi} \int_0^{\pi} tK_n(t)dt \leq \frac{8\pi^2}{n+2}.$$

□

Para $k = 0, 1, \ldots$, sea

$$C_k(x) \; = \; \cos(k \arccos(x)), \tag{4.15}$$

el k-ésimo polinomio de Chebyshev. Para las propiedades de los polinomios de Chebyshev (ver [22, p. 30-32]).

Teorema 4.5. *Sea G dada por* (4.1). *Si para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in [-1, 1]$, definimos*

$$P_n^-(G, x) = T_n^-(F, \arccos x)$$

y

$$P_n^+(G, x) = T_n^+(F, \arccos x),$$

entonces $P_n^-(G), P_n^+(G) \in \mathbb{P}_n$,

$$P_n^-(G, x) \leq G(x) \leq P_n^+(G, x), \;\; x \in [-1, 1] \tag{4.16}$$

y

$$||P_n^+(G) - P_n^-(G)||_{1,[-1,1]} \leq \frac{4\pi^2}{n+2}.$$

Demostración. Para cada $x \in [-1, 1]$, sea

$$t = \arccos x, \quad t \in [0, \pi].$$

Como

$$P_n^-(G, x) = T_n^-(F, t)$$

y, según el Teorema 4.4, $T_n^-(F)$ es un polinomio trigonométrico par de grado no mayor que n. Si ponemos

$$T_n^-(F, t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt),$$

y $t = \arccos x$, entonces

$$P_n^-(G,x) = T_n^-(F, \arccos x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k \arccos x)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k C_k(x),$$

donde C_k es el denominado polinomio k-ésimo de Chebyshev. Luego $P_n^-(G) \in \mathbb{P}_n$.

De forma similar se verifica que $P_n^+(G) \in \mathbb{P}_n$.

Por otro lado se sigue de (4.11) que

$$P_n^-(G,x) = T_n^-(F,t) \leq F(t) = G(x) \leq T_n^+(F,t) = P_n^+(G,x).$$

Esto demuestra (4.16).

Finalmente, como los polinomios $T_n^{\pm}$ son pares (ver Teorema 4.4), considerando el cambio de variables $x = \cos t$, de (4.12) obtenemos

$$\begin{aligned} ||P_n^+(G) - P_n^-(G)||_{1,[-1,1]} &= \int_0^{\pi} |T_n^+(F,t) - T_n^-(F,t)| \sin t dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n^+(F,t) - T_n^-(F,t)| dt \\ &\leq \frac{4\pi^2}{n+2}. \end{aligned}$$

□

4.3. Aproximación de funciones diferenciables

En este apartado, construiremos nuevos operadores polinomiales para la aproximación unilateral de funciones diferenciables y presentaremos un estimado superior para el error del proceso aproximativo.

En el Teorema 4.5 vimos que, dada la función de Heaviside G (ver (4.1)), podemos fijar dos sucesiones de polinomios $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$, con $P_n, Q_n \in \mathbb{P}_n$ tales que

$$P_n(t) \leq G(t) \leq Q_n(t), \qquad t \in [-1, 1] \tag{4.17}$$

y

$$\alpha_n = ||Q_n - P_n||_{1,[-1,1]} \to 0. \tag{4.18}$$

Para cada n, utilizando los polinomios P_n y Q_n, vamos a construir dos operadores de la manera siguiente.

Para $n \in \mathbb{N}$, $f \in W_1^1[0,1]$ y $x \in [0,1]$, sean

$$\lambda_n(f,x) = f(0) + \int_0^1 \Big(P_n(x-t) f'_+(t) - Q_n(x-t) f'_-(t) \Big) dt \tag{4.19}$$

y

$$\Lambda_n(f,x) = f(0) + \int_0^1 \Big(Q_n(x-t) f'_+(t) - P_n(x-t) f'_-(t) \Big) dt \tag{4.20}$$

donde, como es usual,

$$g_+(x) = \max\{0, g(x)\} \quad \text{y} \quad g_-(x) = \max\{0, -g(x)\}.$$

El teorema que sigue es el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.6. *Fijemos $p \in [1,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ y $P_n, Q_n \in \mathbb{P}_n$. Supongamos que P_n y Q_n satisfacen* (4.17)-(4.18).

Si $f \in W_p^1[0,1]$ y las funciones $\lambda_n(f)$ y $\Lambda_n(f)$ están definidas como en (4.19) *y* (4.20)*, entonces*

$$\lambda_n(f), \Lambda_n(f) \in \mathbb{P}_n,$$

$$\lambda_n(f,x) \leq f(x) \leq \Lambda_n(f,x), \ x \in [0,1]$$

y

$$\max\Big\{||f-\lambda_n(f)||_{p,[0,1]}, ||f-\Lambda_n(f)||_{p,[0,1]}\Big\} \leq \alpha_n ||f'||_{p,[0,1]},$$

donde $\alpha_n = ||Q_n - P_n||_{1,[-1,1]}$.

Demostración. Es fácil verificar que

$$\lambda_n(f), \Lambda_n(f) \in \mathbb{P}_n.$$

Verifiquemos la desigualdad $\lambda_n(f,x) \leq f(x)$. De (4.17) se sigue que

$$\begin{aligned}\lambda_n(f,x) &\leq f(0) + \int_0^1 G(x-t) f'_+(t)dt - \int_0^1 G(x-t) f'_-(t)dt \\ &= f(0) + \int_0^1 G(x-t)(f'_+(t) - f'_-(t))dt \\ &= f(0) + \int_0^1 G(x-t) f'(t)dt \\ &= f(0) + \int_0^x f'(t)dt = f(x).\end{aligned}$$

Con argumentos similares se verifica que $f(x) \leq \Lambda_n(f,x)$.

Para estimar la norma, empecemos con algunos cálculos. Utilizaremos la función G definida en (4.1). Se tiene que, para cada $x \in [0,1]$,

$|f(x) - \lambda_n(f,x)| = f(x) - \lambda_n(f,x)$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x f'(t)dt - \int_0^1 [P_n(x-t)f'_+(t) - Q_n(x-t)f'_-(t)]dt \\
&= \int_0^1 [G(x-t)f'(t) - P_n(x-t)f'_+(t) + Q_n(x-t)f'_-(t)]dt \\
&= \int_0^1 [(G(x-t) - P_n(x-t))f'_+(t) \\
&\qquad\qquad +(Q_n(x-t) - G(x-t))f'_-(t)]dt \\
&\leq \int_0^1 (Q_n(x-t) - P_n(x-t))|f'(t)|dt.
\end{aligned}
$$

Para simplificar, denotamos por

$$R_n(y) := Q_n(y) - P_n(y) \geq 0.$$

Si $p = 1$, utilizamos el Teorema de Fubini para obtener la desigualdad

$$
\begin{aligned}
||f - \lambda_n(f)||_{1,[0,1]} &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(t)|R_n(x-t)dt \right) dx \\
&= \int_0^1 |f'(t)| \left(\int_0^1 R_n(x-t)dx \right) dt \\
&= \int_0^1 |f'(t)| \left(\int_{-t}^{1-t} R_n(y)dy \right) dt \\
&\leq \int_0^1 |f'(t)| \left(\int_{-1}^{1} R_n(y)dy \right) dt \\
&= \left(\int_0^1 |f'(t)|dt \right) \left(\int_{-1}^{1} R_n(y)dy \right) \\
&= \|R_n\|_{1,[-1,1]} \, \|f'\|_{1,[0,1]} = \alpha_n \, \|f'\|_{1,[0,1]}.
\end{aligned}
$$

Lo cual prueba la desigualdad deseada.

Si $1 < p < \infty$, se sigue de la desigualdad de Hölder y el Teorema de Fubini que

$$\left(||f - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]} \right)^p \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(t)|R_n(x-t)dt \right)^p dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{x} |f'(x-y)| R_n(y) dy \right)^p dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{x} |f'(x-y)|^p R_n(y) dy \right) \left(\int_x^{x-1} R_n(y) dy \right)^{p-1} dx \\
&= \left(\int_{x-1}^{x} R_n(y) dy \right)^{p-1} \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(z)|^p R_n(x-z) dz \right) dx \\
&= \left(\int_{x-1}^{x} R_n(y) dy \right)^{p-1} \int_0^1 |f'(z)|^p \left(\int_0^1 R_n(x-z) dx \right) dz \\
&= \left(\int_{x-1}^{x} R_n(y) dy \right)^{p-1} \int_0^1 |f'(z)|^p \left(\int_{x-1}^{x} R_n(y) dy \right) dz \\
&\leq \left(\int_{-1}^{1} R_n(y) dy \right)^{p-1} \int_0^1 |f'(z)|^p \left(\int_{-1}^{1} R_n(y) dy \right) dz \\
&= \left(\int_{-1}^{1} R_n(y) dy \right)^{p} \int_0^1 |f'(z)|^p dz.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$||f - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]} \leq \alpha_n ||f'||_{p,[0,1]}.$$

Similarmente se calcula el estimado para la expresión

$$||f - \Lambda_n(f)||_{p,[0,1]}.$$

□

En el teorema anterior los polinomios P_n y Q_n eran arbitrarios. En particular, podemos utilizar a los aproximantes de la función de Heaviside que construimos anteriormente.

Corolario 4.7. *Fijemos $p \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ y consideremos los polinomios $P_n^-(G), P_n^+(G)$ definidos como en el Teorema 4.5.*

Si $f \in W_p^1[0,1]$ y los polinomios $\lambda_n(f)$, $\Lambda_n(f)$ están definidos por (4.19) − (4.20) con $P_n = P_n^-(G)$ y $Q_n = P_n^+(G)$, entonces

$$\lambda_n(f), \Lambda_n(f) \in \mathbb{P}_n,$$

$$\lambda_n(f,x) \leq f(x) \leq \Lambda_n(f,x), \qquad x \in [0,1]$$

y

$$\max\{||f - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]}, ||f - \Lambda_n(f)||_{p,[0,1}\} \leq \frac{4\pi^2}{n+2}||f'||_{p,[0,1]}.$$

Demostración. Se sigue del Teorema 4.5 que $P_n, Q_n \in \mathbb{P}_n$,

$$P_n(x) \leq G(x) \leq Q_n(x), \qquad x \in [-1,1]$$

y

$$||Q_n - P_n||_{1,[-1,1]} \leq \frac{4\pi^2}{n+2}.$$

Como $f \in W_p^1[0,1]$, se sigue del Teorema 4.6 que

$$\lambda_n(f), \Lambda_n(f) \in \mathbb{P}_n,$$

$$\lambda_n(f,x) \leq f(x) \leq \Lambda_n(f,x), \ x \in [0,1]$$

y

$$\max\{||f - \lambda_n(f)||_{p,[0,1]}, ||f - \Lambda_n(f)||_{p,[0,1]}\} \leq \frac{4\pi^2}{n+2}||f'||_{p,[0,1]}.$$

□

Observación 4.2. El método de construcción dado en el Corolario 4.7, proporciona un estimado de la velocidad de convergencia que es similar al que se puede lograr utilizando la mejor aproximación de la función de Heaviside (salvo una constante). Notemos que, esta última elección únicamente mejora la

constante en el estimado. Pero, encontramos algunos problemas. Los polinomios de la mejor aproximación unilateral en el espacio $L_1[-1,1]$ no son únicos. Además, como se demostró en el Capítulo 3, estos polinomios se obtienen mediante el proceso de interpolación de Hermite en los ceros de algunos polinomios de Jacobi. Luego, una construcción de este tipo es más complicada que la propuesta en el corolario.

4.4. Algunas extensiones

En esta sección, construiremos un teorema para aproximar funciones con derivadas de orden superior. Por ello consideraremos el espacio $W_p^r[0,1]$.

Definamos los operadores siguientes: para cada $f \in L_1[0,1]$, sea

$$I(f,x) = \int_0^x f(s)ds, \qquad x \in [0,1].$$

Si $f \in W_1^2[0,1]$ y el operador $\lambda_n : W_1^1[0,1] \to \mathbb{P}_n$ está dado como en (4.19), definimos

$$V_{n,2}(f,x) = I\Big(\lambda_n(f'),x\Big) + \lambda_n\Big(f - I(\lambda_n(f')),x\Big), \quad x \in [0,1].$$

Nótese que $f' \in W_1^1[0,1]$ y $f - I(\lambda_n(f')) \in W_1^1[0,1]$, luego la función $V_{n,2}(f)$ está bien definida.

Ahora, para $r > 2$, si $f \in W_1^r[0,1]$ y $x \in [0,1]$, definimos

$$V_{n,r}(f,x) = I\Big(V_{n,r-1}(f'),x\Big) + \lambda_n\Big(f - I(V_{n,r-1}(f')),x\Big).$$

Teorema 4.8. *Sean $p \in [1,\infty)$ y $r > 1$ fijos. Para cada $f \in W_p^r[0,1]$, se tiene que $V_{n,r}(f) \in \mathbb{P}_{n+r-1}$,*

$$V_{n,r}(f,x) \le f(x), \quad \textit{para} \quad \textit{cada} \quad x \in [0,1]$$

y

$$||f - V_{n,r}(f)||_{p,[0,1]} \le (\alpha_n)^r ||f^{(r)}||_{p,[0,1]},$$

donde α_n está definido por (4.18).

Demostración. Para demostrar este hecho, aplicaremos el principio de inducción matemática.

Caso $r = 2$**.** Fijemos $f \in W_p^2[0,1]$ y sea

$$h(x) = f(x) - I[\lambda_n(f', x)], \quad \text{para} \quad x \in [0,1].$$

Como $f \in W_p^2[0,1]$, $f' \in W_p^1[0,1]$. Luego $\lambda_n(f') \in \mathbb{P}_n$ y $h \in W_1^1[0,1]$. Se sigue que $\lambda_n(h) \in \mathbb{P}_n$.

Por otro lado, como $\lambda_n(f') \in \mathbb{P}_n$ y $I(\lambda_n(f')) \in \mathbb{P}_{n+1}$. Hemos verificado que $V_{n,2}(f) \in \mathbb{P}_{n+1}$.

Según el Teorema 4.6

$$\lambda_n\Big(f - I(\lambda_n(f')), x\Big) \leq f(x) - I\Big(\lambda_n(f'), x\Big), \quad x \in [0,1].$$

Luego, para $x \in [0,1]$,

$$V_{n,2}(f,x) = I\Big(\lambda_n(f'), x\Big) + \lambda_n\Big(f - I(\lambda_n(f')), x\Big) \leq f(x).$$

Del Teorema 4.6, se sigue

$$\begin{aligned} ||f - V_{n,2}(f)||_{p,[0,1]} &= ||h - \lambda_n(h)||_{p,[0,1]} \\ &\leq \alpha_n ||h'||_{p,[0,1]} \\ &\leq \alpha_n ||f' - \lambda_n(f')||_{p,[0,1]} \\ &\leq (\alpha_n)^2 ||f^{(2)}||_{p,[0,1]}. \end{aligned}$$

Hemos demostrado el Teorema en el caso $r = 2$.

Caso general. Supongamos que el resultado es cierto para algún r, con $r \geq 2$. Esto es, $V_{n,r}(f) \in \mathbb{P}_{n+r-1}$,

$$V_{n,r}(f,x) \leq f(x), \quad \text{para} \quad x \in [0,1]$$

y

$$||f - V_{n,r}(f)||_{p,[0,1]} \leq (\alpha_n)^r ||f^{(r)}||_{p,[0,1]}.$$

Según el Teorema 4.6, tenemos que

$$\lambda_n\Big(f - I(V_{n,r}(f')), x\Big) \leq f(x) - I\Big(V_{n,r}(f'), x\Big), \quad x \in [0,1].$$

Luego

$$V_{n,r+1}(f,x) = I\Big(V_{n,r}(f'),x\Big) + \lambda_n\Big(f - I(V_{n,r}(f')),x\Big)$$
$$\leq f(x), \qquad x \in [0,1].$$

Para cada $x \in [0,1]$, sea

$$H(x) = f(x) - I\Big(V_{n,r}(f'),x\Big).$$

Por el Teorema 4.6 y la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}||f - V_{n,r+1}(f)||_{p,[0,1]} &= ||H - \lambda_n(H)||_{p,[0,1]} \\ &\leq \alpha_n||H'||_{p,[0,1]} \\ &\leq \alpha_n||f' - V_{n,r}(f')||_{p,[0,1]} \\ &\leq (\alpha_n)^{r+1}||f^{(r+1)}||_{p,[0,1]}.\end{aligned}$$

□

Ahora, presentamos otra construcción de operadores. Pero, para simplificar, únicamente lo haremos para el caso de la segunda derivada.

Consideremos la función $G^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$G^*(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ \\ -t, & t \leq 0 \end{cases}$$

y fijemos dos sucesiones de polinomios $\{P_{n,1}\}$ y $\{Q_{n,1}\}$ con $P_{n,1}, Q_{n,1} \in \mathbb{P}_n$ tales que

$$P_{n,1}(t) \leq G^*(t) \leq Q_{n,1}(t), \quad t \in [-1,1] \tag{4.21}$$

y

$$\beta_n = ||Q_{n,1} - P_{n,1}||_{1,[-1,1]} \to 0.$$

Para cada $x \in [0,1]$ y $f \in W_p^2[0,1]$, definamos

$$\lambda_{n,1}(f,x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^1 P_{n,1}(t-x)f_+^{(2)}(t)dt$$

$$- \int_0^1 Q_{n,1}(t-x) f_-^{(2)}(t) dt$$

y

$$\Lambda_{n,1}(f,x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^1 Q_{n,1}(t-x) f_+^{(2)}(t) dt$$

$$- \int_0^1 P_{n,1}(t-x) f_-^{(2)}(t) dt.$$

Verifiquemos la desigualdad $\lambda_{n,1}(f,x) \leq f(x)$. Se sigue de (4.21), utilizando integración por partes, que

$$\lambda_{n,1}(f,x) \leq f(0) + f'(0)x + \int_0^1 G^*(t-x) f_+^{(2)}(t) dt$$

$$- \int_0^1 G^*(t-x) f_-^{(2)}(t) dt$$

$$= f(0) + f'(0)x + \int_0^1 G^*(t-x)(f_+^{(2)}(t) - f_-^{(2)}(t)) dt$$

$$= f(0) + f'(0)x + \int_0^1 G^*(t-x) f^{(2)}(t) dt$$

$$= f(0) + f'(0)x - \int_0^x (t-x) f^{(2)}(t) dt.$$

$$= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = f(x).$$

Con argumentos similares se verifica que $f(x) \leq \Lambda_{n,1}(f,x)$. Como en la Sección 4.4 se puede demostrar que

$$||f - \lambda_{n,1}(f)||_{p,[0,1]} = \left(\int_0^1 |f(x) - \lambda_{n,1}(f,x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \beta_n ||f^{(2)}||_{p,[0,1]}.$$

4.5. Comparación de resultados

En esta última sección vamos a exhibir otras sucesiones de polinomios que satisfacen las condiciones (4.17) y (4.18) y comparar nuestros resultados con los dados por Lenze y Hristov e Ivanov.

4.5.1. Operadores de Lenze

Sea $BV[a,b]$ la familia de las funciones $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Para $g \in BV[a,b]$, $V(g,[a,b])$ denota la variación total. Cuando $[a,b] = [0,1]$, consideramos la función

$$V(g,x) = V(g,[0,x]), \qquad x \in [0,1]. \tag{4.22}$$

En [20], Lenze construyó una sucesión de operadores para la aproximación unilateral como sigue: Para $t \in [-1,1]$, definamos

$$h_n(t) = a_n \int_{-1}^{t} (1-\xi^2)^{n-1} d\xi - \frac{1}{2}(1-t^2)^n \tag{4.23}$$

y

$$H_n(t) = a_n \int_{-1}^{t} (1-\xi^2)^{n-1} d\xi + \frac{1}{2}(1-t^2)^n, \tag{4.24}$$

donde $a_n = \left(\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{n-1}d\xi\right)^{-1}$.

Se verifica que, si G es la función en (4.1), entonces

$$h_n(t) \le G(t) \le H_n(t) \qquad \text{y} \qquad h_n, H_n \in \mathbb{P}_{2n},$$

Para $f \in BV[0,1]$, se definen

$$\varphi_n(f,x) = f(0) + \int_0^1 h_n(x-t)df_2(t) - \int_0^1 H_n(x-t)df_1(t)$$

y

$$\Phi_n(f,x) = f(0) + \int_0^1 H_n(x-t)df_2(t) - \int_0^1 h_n(x-t)df_1(t),$$

donde

$$f_2(x) = \frac{1}{2}[V(f,x) + f(x)],\ f_1(x) = \frac{1}{2}[V(f,x) - f(x)]$$

y las integrales se consideran en el sentido de Reimann-Stieltjes.

Para presentar el resultado fundamental de Lenze necesitamos definir el módulo promedio de continuidad. Dada una función acotada $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, para $x \in [0,1]$ y $t > 0$ se define

$$\tau(g,t)_p = \left(\int_0^1 \Big(w(g,x,t) \Big)^p dx \right)^{1/p},$$

donde $w(g,x,t)$ está definido en (4.2).

Teorema 4.9. *Sea $f \in BV[0,1]$. Si $\varphi_n(f,x)$ y $\Phi_n(f,x)$ están definidas como más arriba, entonces*

$$\varphi_n(f,x) \leq f(x) \leq \Phi_n(f,x), \qquad x \in [0,1],$$

y existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que si $1 \leq p < \infty$ y $n \geq 2$, entonces

$$C_1 \tau \left(V(f), \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_p \leq ||\Phi_n(f) - \varphi_n(f)||_p \leq C_2 \tau \left(V(f), \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_p,$$

donde $V(f)$ está definida como en (4.22) y la norma se considera en $L_p[0,1]$.

Dado que las funciones h_n, H_n satisfacen (4.17) y (4.18), estas se pueden utilizar en la definición de los operadores presentados en (4.19) y (4.20). Mostraremos que, en este caso, la velocidad de convergencia dada en el Teorema 4.6 es similar a la obtenida por Lenze.

Corolario 4.10. *Sean $p \in [1,\infty)$ fijo y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $f \in W_p^1[0,1]$, consideremos los polinomios $\lambda_{2n}(f)$ y $\Lambda_{2n}(f)$*

definidos por (4.19) *y* (4.20) *con* $P_{2n} = h_n$ *y* $Q_{2n} = H_n$ *respectivamente. Se tiene que* $\lambda_{2n}(f), \Lambda_{2n}(f) \in P_{2n}$,

$$\lambda_{2n}(f,x) \leq f(x) \leq \Lambda_{2n}(f,x), \qquad x \in [0,1],$$

y

$$\max\Big\{||f - \lambda_{2n}(f)||_p, ||f - \Lambda_{2n}(f)||_p\Big\} \leq \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}||f'||_p,$$

donde la norma se considera en $L_p[0,1]$.

Demostración. Por Teorema 4.6 únicamente necesitamos un estimado para α_{2n}. Por (4.23) y (4.24) tenemos

$$\alpha_{2n} = ||H_n - h_n||_{1,[-1,1]} = \int_{-1}^{1}(1-y^2)^n dy = 2\int_0^1 (1-y^2)^n dy$$

$$= \int_0^1 (1-z)^n \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Pongamos

$$I_n = \int_0^1 (1-z)^n \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Notemos que

$$\int_0^1 (1-z)^n \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^1 (1-z)^{n-1}(1-z)\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= I_{n-1} - \int_0^1 \sqrt{z}(1-z)^{n-1}dz$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2}I_n.$$

De aquí que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{2n}{(2n+1)}I_{n-1}.$$

De forma similar se verifica que, para cada $n > 2$,

$$I_{n-1} = \frac{(2n-2)}{(2n-1)} I_{n-2}.$$

Repitiendo este proceso, concluimos que

$$\alpha_{2n} = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} \leq \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}.$$

□

Observación 4.3. Se conoce que si $f \in C^1[0,1]$, entonces $f \in BV[0,1]$. Por otro lado, si $0 \leq s < r \leq s+t$,

$$| V(f,r) - V(f,s) | = | V(f,[s,r]) | \leq \|f'\|(r-s) \leq \|f'\|\, t.$$

Luego

$$w(V(f),x,t) \leq \|f'\|\, t$$

y

$$\tau(V(f),t)_p \leq \|f'\| t.$$

Del teorema de Lenze obtenemos

$$||\Phi_n(f) - \varphi_n(f)||_p \leq C_2 \tau \left(V(f), \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_p \leq C_2 \|f'\|_p \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Este estimado es comparable al dado en el Corolario 4.10.

Observación 4.4. Hay algunas diferencias entre el Teorema 4.6 y el resultado de Lenze.

1.- El Teorema 4.6 se aplica en el espacio $W_p^1[0,1]$ y el Teorema 4.9 se aplica a funciones en $BV[0,1]$. Esto es, los dominios de los operadores no coinciden.

2.- Lenze incluye un resultado inverso. Nosotros no hemos encontrado, hasta ahora, resultados inversos.

3.- Para nuestra construcción necesitamos conocer las partes positivas y negativas (f'_+ y f'_-) de las derivadas de las funciones. En la construcción de Lenze se necesita calcular la

función variación total $V(f,x)$. Para funciones con derivadas continuas y pocos cambios de signo, las funciones f'_+, f'_- y $V(f,x)$ se calculan de forma similar. Recuérdese que, si f' no cambia de signo en el intervalo $[a,b]$, entonces

$$V(f,[a,b]) = \int_a^b \mid f'(x) \mid dx.$$

4.- ¿Qué ventajas tienen nuestros resultados comparados con los de Lenze? Cuando se aproximan funciones con derivadas continuas, los operadores de Lenze dan un estimado del order $1/\sqrt{n}$, mientras que, como se aprecia en el Corolario 4.7, nuestros resultados dan el orden $1/n$.

4.5.2. Construcción de Hristov e Ivanov

Hristov e Ivanov en [14] construyeron operadores para la aproximación unilateral. En particular, se dió una construcción para el caso periódico y se incluyó una nota donde se dice que las ideas utilizadas por los autores se pueden modificar para construir operadores en el caso no periódico. Pero no se realiza la construcción específica (ver la observación 5.4 en [14]).

En [15] Hristov e Ivanov propusieron otra construcción. Para presentar estos resultados necesitamos algunas notaciones previas.

Fijemos un entero n. Para $j = 0, \ldots, n-1$, sea

$$u_{n,j} = \frac{\pi - (2j+1)\pi}{2n}$$

y

$$\varphi_{n,j}(u) = \sin^4\left(\frac{\pi}{4n}\right)\left(\frac{\sin^4 n(u-u_{n,j})}{\sin^4(u-u_{n,j})/2} + \frac{\sin^4 n(u+u_{n,j})}{\sin^4(u+u_{n,j})/2}\right).$$

Es claro que cada función $\varphi_{n,j}$ es un polinomio trigonométrico positivo par de grado $4n-2$. Se puede verificar que

$$\varphi_{n,j}(u) \geq 1, \quad \text{para} \quad u \in \left[\frac{\pi-(j+1)\pi}{n}, \frac{\pi-j\pi}{n}\right].$$

Para $x \in [-1, 1]$, definamos

$$F_{n,j}(x) = \varphi_{n,j}(\arccos x). \tag{4.25}$$

Sea C_n el n-ésimo polinomio de Chebyshev (ver (4.15)). Se conoce que los ceros de C_n son

$$x_{n,j} = \cos u_{n,j}, \qquad 0 \leq j \leq n-1.$$

En lo que sigue fijamos un entero positivo r. Se desean construir operadores que permitan obtener acotaciones en términos del módulo τ de orden r.

Para simplificar, pongamos $k = 2r + 1$. Sea

$$\gamma_j = \left(\int_{-1}^{1} \left(\frac{C_n(u)}{u - x_{n,j}} \right)^{2k} du \right)^{-1}, \qquad 0 \leq j \leq n-1.$$

Ahora, definamos

$$P_{n,0,r}(x) = 1 - \gamma_1 \int_{-1}^{x} \left(\frac{C_n(u)}{u - x_{n,1}} \right)^{2k} du.$$

Para $1 \leq j \leq n-2$, sea

$$P_{n,j,r}(x) = \gamma_j \int_{-1}^{x} \left(\frac{C_n(u)}{u - x_{n,j}} \right)^{2k} du$$

$$- \gamma_{j+1} \int_{-1}^{x} \left(\frac{C_n(u)}{u - x_{n,j+1}} \right)^{2k} du.$$

Finalmente, sea

$$P_{n,n-1,r}(x) = \gamma_{n-1} \int_{-1}^{x} \left(\frac{C_n(u)}{u - x_{n,n-1}} \right)^{2k} du.$$

Denotemos por $BM[0, 1]$ el espacio de todas las funciones $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

Dada una función $f \in BM[0,1]$ y $0 \leq j \leq n-1$, sea $R_j(f)$ el polinomio de grado $r-1$ de la mejor aproximación para f en $[x_{n,j}, x_{n,j+1}]$ (en norma uniforme). Esto es,

$$||f - R_j(f)||_{[x_{n,j},x_{n,j+1}]} = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - P\|_{[x_{n,j},x_{n,j+1}]}. \tag{4.26}$$

Pongamos

$$Q_{n,r}(f,x) = \sum_{j=0}^{n-1} P_{n,j,r}(x) R_j(f,x). \tag{4.27}$$

Definición 4.1. *Fijemos $r \in \mathbb{N}$. Para $n \in \mathbb{N}$ se define los operadores*

$$Q_{n,r}^{\pm} : BM[0,1] \to C[0,1]$$

mediante la expresión

$$Q_{n,r}^{\pm}(f,x) = Q_{n,r}(f,x) \pm \sum_{j=0}^{n-1} F_{n,j}(x) \|f - Q_{n,r}(f)\|_{[x_{n,j},x_{n,j+1}]},$$

para $f \in BM[0,1]$, donde las $F_{n,j}$ están definidas en (4.25).

En [15] se demuestra los resultados siguientes.

Teorema 4.11. *Si $r \in \mathbb{N}$ y $f \in BM[0,1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $Q_n^{\pm}(f) \in \mathbb{P}_{2(2r+1)(n-1)+r}$ y*

$$Q_{n,r}^{-}(f,x) \leq f(x) \leq Q_{n,r}^{+}(f,x), \quad x \in [0,1].$$

Teorema 4.12. *Para cada $r \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$, existe una constante $C(r,p)$ tal que, si $f \in BM[0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$||Q_{n,r}^{+}(f) - Q_{n,r}^{-}(f)||_{p,[0,1]} \leq C(r,p) \tau_r \left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,[0,1]}.$$

Observación 4.5. El resultado fundamental de [15] es para funciones de varias variables. Aquí hemos presentado una versión simplificada para funciones de una variable.

Observación 4.6. En la tesis no demostramos resultados nuevos con módulos de orden superior. Pero el Teorema 4.8, se puede utilizar para tales fines (mediante técnicas de interpolación). Por otro lado, para funciones $f \in W_p^r[0,1]$, se conoce que

$$\tau_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,[0,1]} \leq C\frac{1}{n^r}\|f^{(r)}\|_{p,[0,1]}.$$

Para estas funciones el estimado presentado en el Teorema 4.8 es similar al dado por Hristov a Ivanov.

Observación 4.7. Desde nuestro punto de vista, los operadores construidos aquí son más simples que los de Hristov e Ivanov. De hecho, según las ecuaciones (4.27) y (4.26), para conocer los polinomios $Q_{n,r}^{\pm}(f)$ es necesario determinar previamente ciertos polinomios de la mejor aproximación uniforme. Como se sabe, esto último es una tarea muy difícil.

Conclusiones

En el trabajo, damos condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de fórmulas de cuadratura positivas con un grado máximo de precisión. Éstas nos son de utilidad para identificar todos los puntos donde los elementos de la mejor aproximación unilateral interporpolan a la función de Heaviside G_θ. En particular, para $\theta = 0$ ($G = G_0$) construimos dos sucesiones de operadores polinomiales para la aproximación unilateral de funciones diferenciables via polinomios algebraicos en el espacio L_p. El estimado para el error de aproximación es dado con una constante explícita.

Los aportes fundamentales en esta tesis se pueden resumir como sigue:

(i) Se obtuvo un resultado que resume o da respuesta al Problema 3 véase el Teorema 2.12. Los Teoremas 2.14, 2.15, 2.16 y 2.17 junto con 2.18 nos ayudan identificar todos los puntos en $(-1, 1)$ donde los polinomios de la mejor aproximación unilateral interpolan la función de Heaviside.

(ii) En el Teorema 3.12, se muestran explícitamente los elementos de la mejor aproximación para la función G_θ de acuerdo con las proposiciones (3.7), (3.8), (3.9) y (3.10).

(iii) En el Teorema 4.6 exhibimos los operadores polinomiales para la aproximación unilateral de la función de Heaviside. Por otra parte, el método de construcción dado en el Corolario 4.7, proporciona un estimado de la velocidad de convergencia que es similar al que se puede lograr utilizando la mejor aproximación de la función de Heaviside (salvo una constante).

Parte de los resultados presentados aquí se publicaron en los trabajos [2], [7] y [8].

Por supuesto, quedan algunas preguntas por responder. Por ejemplo, si denotamos por $R[0,1]$ a la familia constituida por las funciones Riemann-integrable en $[0,1]$.

Problema: Encontrar, de forma explícita, aproximantes unilaterales para las funciones en el espacio $R[0,1]$. En otras palabras, construir dos sucesiones de operadores

$$\lambda_n, \Lambda_n : R[0,1] \to \mathbb{P}_n$$

tales que, para cada $f \in R[0,1]$,

(i)

$$\lambda_n(f,x) \leq f(x) \leq \Lambda_n(f,x), \quad \text{para todo } x \in [0,1],$$

y

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n(f) - \lambda_n(f)\|_{p,[0,1]} = 0.$$

Problema: Construir buenos aproximantes unilaterales para las funciones truncadas. Para $\theta \in (-1,1)$ y $r \in \mathbb{N}_0$, la función truncada de order r se define como

$$(x-\theta)_+^r = \begin{cases} (x-\theta)^r, & \text{si} \quad x \geq \theta, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x < \theta. \end{cases}$$

Nótese que $(x-\theta)_+^0$ es la función de Heaviside.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, S.A., 1976.

[2] B. Beckermann, J. Bustamante, R. Martínez-Cruz y J.M. Quesada, *Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa*, Calcolo, 51 (2014), 319-328.

[3] R. Bojanic y R. DeVore, *On polynomials of best one sided approximations*, Enseign. Math., (2) 12 (1966), 139-164.

[4] C. Brezinski, K.A. Driver y M. Redivo-Zagliac, *Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials*, Applied Numer. Math., 48 (2004), 157-168.

[5] A. Bultheel, R. Cruz-Barroso y M. Van Barel, *On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on the real line*, Calcolo, 47 (2010), 21-48.

[6] A. Bultheel, R. Cruz-Barroso y M. Van Barel, *Erratum to: On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on the real line*, Calcolo, 50 (2013), 163-164.

[7] J. Bustamante, J.M. Quesada y R. Martínez-Cruz, *Best one-side L_1 approximation to the Heaviside and sign functions*, J. Approx. Theory, 164 (2012), 791-812.

[8] J. Bustamante, J.M. Quesada y R. Martínez-Cruz, *Polynomial operators for one-sided approximation to functional in* $W_p^r[0,1]$, J. Math. Anal. Appl., 393 (2012), 517-525.

[9] P. L. Butzer y R.J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*. Vol. 1, Acad. Press, New York and London, 1971.

[10] J. Deng, Y. Feng y F. Chen, *Best one-sided approximations of polynomials under* L_1 *norm*, J. Comput. Appl. Math., 144 (2002), 161-174.

[11] K. Driver, K. Jordaan y N. Mbuyi, *Interlacing of the zeros of Jacobi polynomials with defferent parameters*, Numer. Algorithms, 49 (2008), 143-152.

[12] G. Freud, *Restglied eines Tauberschen Satzes*, I. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2 (1951), 299-308.

[13] T. Ganelius, *On one-sided approximation by trigonometric polynomials*, Math. Scand., 4 (1956), 247-258.

[14] V. H. Hristov y K. G. Ivanov, *Operators for one-sided approximation of functions*. Constructive Theory of Functions 87, Proc. Intern. Conference, Varna. Sofia 1988, 222-232.

[15] V. H. Hristov y K. G. Ivanov, *Operators for one-sided approximation by algebraic polynomials in* $L_p([-1,1])^d$, Math. Balkanica (N.S.), 4 (2) (1988), 374-390.

[16] W. Jianli y Z. Songping, *Some converse results on one-sided approximation: Justifications*, Anal. Theory Appl., 19 (3) (2003), 280-288.

[17] K. Kopotun, D. Leviatan y I. A. Shevchuk, *Coconvex approximation in the uniform norm: the final frontier*, Acta Math. Hungar., 110 (1-2) (2006), 117-151.

[18] N. P. Korneichuk, A. A. Ligun y V. G. Doronin, *Aproximación con Restricciones*, Naukova Dunka, 1982.

[19] V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Dover Publications, Inc., New York, 2005.

[20] B. Lenze, *Operators for one-sided approximation by algebraic polynomials*, J. Approx. Theory, 54 (1988), 169-179.

[21] D. Leviatan y I. A. Shevchuk, *Coconvex approximation*, J. Approx. Theory, 121 (2003), 100-118.

[22] G. G. Lorentz, *Approximation of functions*, Chelsea Publishing Company New York, N.Y, 1966.

[23] G. G. Lorentz, M. V. Golitschek y M. Kakovoz, *Constructive Approximation: Advanced Problems*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[24] A. A. Markov. *Selected works*, Moscow 1948.

[25] V. P. Motornyi, O.V. Motornaya y P.K. Nitiema, *One-sided approximation of a step by algebraic polynomials in the mean*, Ukrain. Math. J., 62 (3) (2010), 467-482.

[26] V. P. Motornyi y P. C. Nitiema, *On the best L_1 - approximation by polynomials of functions which are fractional integrals of summa functions*, East J. Approx., 2 (4) (1994), 409-425.

[27] V. P. Motornyi y A.N. Pasko, *On the best one-sided approximation of s ome classes of differentiable functions in L*1, East. J. Approx., 10 (1-2) (2004), 159-169.

[28] F. Peherstorfer, *Linear combinations of orthogonal polynomials generating positive quadrature fórmulas* , Math. Comp., 55 (1990), 231-241.

[29] A. Pinkus, *On L^1-approximation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[30] I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1970.

[31] J.A. Shohat, *On mechanical quadratures, in particular with positive coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), 461-496.

[32] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1939.

[33] L. V. Taikov, *One-sided approximation of functions*, Math. Notes, 67 (1) (2000), 108-111.

[34] H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 1, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968, 563-599.

Índice alfabético

Abscisas
- $x_{n,k}^{A}$, 29

Clases
- $AC[0,1]$, 2
- $BM[0,1]$, 140
- $BV[a,b]$, 135
- $W_p^r[0,1]$, 113

Funciones particulares
- G_θ, 66

Módulos de continuidad
- $\tau(g,t)_p$, 136
- módulo local, 114

Notaciones
- $B_\delta(x)$, 115
- $V(g,[a,b])$, 135
- $g_\pm$, 126
- $\mathrm{dist}(A,B)$, 115

Polinomios
- cuasi-ortogonales, 34
- de Chebyshev C_n, 124
- de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, 16
- ortogonales P_n, 12