



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

---

POSTGRADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**El uso de la balanza para el aprendizaje de  
las ecuaciones de primer grado en  
secundaria: el caso de los libros de texto  
autorizados**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA:

LIC. YOLANDA ZAMORA CORONA

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. Josip Slisko Ignjatov**

CO-DIRECTOR DE TESIS:

**MC. Adrian Corona Cruz**

Junio 2017



**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que la C:

**YOLANDA ZAMORA CORONA**

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 30 de mayo de 2017, con la tesis titulada:

***“El uso de la balanza para el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado en secundaria: el caso de los libros de texto autorizados”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 02 de junio de 2017

**DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ**  
**COORDINADOR DE LA MAESTRÍA**  
**EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**



Cop Archivo.  
DR. JAJL / f agm\*

Facultad  
de Ciencias  
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,  
Ciudad Universitaria, Col. San  
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

# Agradecimientos

Agradezco a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla el haberme brindado las facilidades y el apoyo necesario para realizar mis estudios de la Maestría en Educación Matemática. También doy gracias por la beca otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de agosto de 2015 a diciembre de 2016, y a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por haberme apoyado económicamente para asistir y participar en la XVIII y XIX Escuela de invierno en educación matemática realizadas en la Universidad Autónoma de Oaxaca (diciembre 2015) y en la Universidad Autónoma Nayarit (diciembre 2016).

Agradezco de manera especial a mi director de tesis, Dr. Josip Slisko Ignjatov, por su constante apoyo, por guiarme en mis avances durante la realización de este trabajo de investigación. Al MC. Adrian Corona Cruz por sus oportunos consejos en relación al trabajo de tesis. También les doy las gracias a mis sinodales, a la Dra. Lidia Aurora Henández Rebollar y a la Dra. María Araceli Juárez Ramírez por el tiempo empleado y sus valiosos comentarios que me permitieron enriquecer el contenido y la presentación de este escrito.

Yolanda Zamora Corona  
junio, 2017.

# Dedicatorias

## **A mis hijas Jessica y Tamara.**

Gracias por siempre apoyarme, su comprensión y amor son mi motor para seguir adelante, ustedes son mi vida entera, las amo.

## **A mi esposo Carlos.**

Por apoyarme en todo momento y darme su valioso tiempo, pero más que nada por el amor que siempre me demuestra, gracias amor.

## **A mis padres Esperanza y Abel.**

Que me dieron la vida, por su amor incondicional, por creer en mí, por su ejemplo de lucha, por haberme apoyado para estudiar una carrera universitaria, para ustedes con mucho cariño y amor.

## **A mis hermanos.**

Gersain, Fernando, Gustavo, Carlos, Abel y Marcos, a quienes valoro y respeto, para ustedes con amor.

A todas aquellas personas importantes en mi vida que siempre estuvieron dispuestas a ayudarme. Esta tesis se las dedico a todos ustedes con mucho cariño.

# Resumen

En el aprendizaje inicial del álgebra algunos autores recomiendan utilizar el modelo de la balanza. Este modelo también es utilizado en varios libros de texto oficiales de educación secundaria en México. Con el objetivo de reconocer qué tipo de uso de la balanza existe, y si hay casos en que su uso no es cognitivamente adecuado, se revisaron 96 libros de matemáticas I, II y III a nivel secundaria (CONALITEG) en los ciclos escolares 2015-2016 y 2016-2017. En esta revisión se encontraron 168 problemas que utilizan la balanza, distribuidos en los libros de los tres niveles de secundaria, la mayoría en primero y segundo grado. Adicionalmente se proponen dos clasificaciones de los problemas. En la primera se exploran las cuestiones relacionadas con la didáctica de las matemáticas y se forman 4 grupos: 1) los problemas que aplican y que no aplican las acciones en el modelo de la balanza, 2) los problemas que usan conocidos acertijos matemáticos, 3) problemas clasificados por el número de ecuaciones y 4) problemas de la balanza con expresiones algebraicas o números. En la segunda clasificación se exploran las cuestiones relacionadas con la teoría de Palm. Aquí se forman 2 grupos, 1) el de problemas que intentan dar la idea de que el modelo de la balanza se puede usar en eventos reales y 2) problemas que presentan datos irreales o datos contradictorios. Para verificar la autenticidad de los problemas nos apoyamos en la teoría de Palm (2008). Para medir el efecto de los problemas en el aprendizaje de los estudiantes, se diseñó y aplicó una hoja de trabajo con dos problemas elegidos de los 168 de manera que uno de ellos es auténtico y el otro no. La hoja de trabajo se implementó en 113 estudiantes de tercer año de secundaria y en 125 estudiantes de primer año de preparatoria.

# Índice general

<b>Oficio</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Dedicatorias</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Objetivos de la investigación y Metodología</b>	<b>4</b>
1.1. Objetivos . . . . .	4
1.2. Metodología . . . . .	5
<b>2. Marco teórico</b>	<b>6</b>
2.1. El modelo de la balanza en el aprendizaje inicial del álgebra . . . . .	6
2.2. Teoría de Palm: marco para las tareas auténticas . . . . .	8
2.2.1. El marco: Aspectos de importancia . . . . .	9
2.2.2. Clasificación de las contextualizaciones . . . . .	15
<b>3. Investigaciones anteriores</b>	<b>16</b>
<b>4. Investigación Documental</b>	<b>20</b>
4.1. Plan de estudios . . . . .	20
4.2. Libro del maestro de secundaria 2011 . . . . .	21
4.2.1. El modelo de la balanza . . . . .	25
4.3. Resultados de la revisión de los libros . . . . .	29
4.4. Clasificación de Problemas . . . . .	30
4.4.1. Problemas que aplican y que no aplican las acciones del modelo de la balanza . . . . .	31

4.4.2.	Problemas que usan conocidos acertijos matemáticos . . . . .	39
4.4.3.	Problemas clasificados por el número de ecuaciones . . . . .	42
4.4.4.	Problemas de la balanza con expresiones algebraicas o números .	49
4.4.5.	Problemas que intentan dar la idea de que el modelo de la balanza se puede usar en eventos reales . . . . .	53
4.4.6.	Problemas que presentan datos irreales o datos contradictorios .	58
<b>5.</b>	<b>Investigación con los alumnos</b>	<b>60</b>
5.1.	Hoja de trabajo . . . . .	60
5.2.	Resultados . . . . .	63
	<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Introducción

El modelo de la balanza para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado es un modelo frecuentemente estudiado por diversos autores como Figueira-Sampaio, dos Santos y Carrijo (2009), Turmudi y Haryanto(2011) entre otros. Esto se debe a que se ha reconocido que el uso de las diferentes formas representacionales pueden contribuir en el aprendizaje de los estudiantes y además estimular el pensamiento relacional (Suh y Moyer, 2007). Autores reconocidos, como Greenes y Findell (1999) y Gardner (1993) recomiendan el uso de la balanza para representar expresiones algebraicas con el objeto de promover el pensamiento relacional de los estudiantes. Dichos autores también establecen que los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático en álgebra cuando son capaces de interpretar las ecuaciones algebraicas usando dibujos, gráficos y representaciones simbólicas (elementos que aparecen en el modelo de la balanza). La importancia de estas representaciones es determinada por estándares internacionales como lo señalan Suh y Moyer (2007).

En la presente investigación se revisó el currículo de la SEP, para verificar si toma en cuenta el uso de la balanza en la enseñanza de ecuaciones de primer grado. También se consultó el manual o libro del maestro de secundaria SEP para saber cómo aborda el tema de ecuaciones de primer grado. Como resultado encontramos que en los programas de estudio de secundaria SEP, se propone estudiar las ecuaciones de primer grado en segundo año, en el bloque IV en las orientaciones didácticas y planes de clase 8.4.2. En su plan de clase se sugiere utilizar el modelo de la balanza como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad liga de información Secretaría de Educación Pública (2011). En el manual para el maestro (2011) se sugiere que el modelo para entender ecuaciones de primer grado se aprende mejor si se introduce con modelos como el de la balanza.

También se recopilaron y analizaron 168 problemas distribuidos en 96 libros de matemáticas a nivel secundaria (ciclo escolar 2015-2016 y 2016-2017)) que se pueden consultar en la página de la comisión nacional de libros de texto gratuitos CONALITEG (2015-2017). Se identifican los problemas que no son auténticos desde la perspectiva de la teoría de Palm (2006,2008), analizando los siguientes 3 aspectos para visualizar detalles más finos en la contextualización del problema: evento (que no sea absurdo),

datos (que sean reales) y preguntas (que sean pertinentes). Asimismo se diseñó una hoja de trabajo (con un problema auténtico y otro problema artificial) que se aplicó a 113 estudiantes de tercer año de la Secundaria Técnica N. 60 y a 125 estudiantes de primer año de la preparatoria Benito Juárez García de la BUAP. Los objetivos de estas actividades exploratorias son investigar qué hacen los alumnos cuando se les presenta un problema auténtico y averiguar si los alumnos, cuando se les presenta un problema artificial, son capaces de detectar el error o se encuentran totalmente desorientados. Finalmente se presentan los resultados de la hoja de trabajo aplicada a los estudiantes de secundaria y los estudiantes de nivel medio superior, con el fin de determinar el funcionamiento y el impacto del modelo de la balanza.

Nuestro trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo presentamos los objetivos de la investigación y metodología, en el segundo capítulo el marco teórico, en el tercero las investigaciones previas relacionadas, el cuarto capítulo contiene la investigación documental y finalmente en el quinto capítulo la investigación realizada con los estudiantes. En los anexos encontraremos las tablas con la información de los libros en los que se encontraron los problemas, las tablas de clasificación de los problemas relacionados con el modelo de la balanza y sus imágenes tomadas de los libros de texto oficiales para secundaria.

# Capítulo 1

## Objetivos de la investigación y Metodología

### 1.1. Objetivos

La presente investigación tiene dos objetivos:

1. Revisar cómo se utiliza el modelo de la balanza dentro del currículo, dentro del libro del maestro y dentro de los libros de texto de secundaria oficiales, y, además, categorizar los tipos de uso de la balanza en estos libros de texto.
2. Explorar experimentalmente qué impacto en el desempeño de los alumnos tienen los problemas con el modelo de balanza con datos aceptables y con datos contradictorios.

La realización del primer objetivo proporciona los datos sobre la posición y el tipo de usos del modelo de la balanza en dos niveles de curriculum:

curriculum intencional (planes y programas de estudio) y  
curriculum potencialmente implementado (libro del maestro y libros de texto).

Esos dos niveles, complementado con “curriculum implementado” (lo que hacen los maestros en las aulas) y “curriculum aprendido” (el verdadero aprendizaje logrado por los alumnos), forman parte de la teoría curricula propuesta por Valverde y coautores (2002).

La razón detrás del segundo objetivo demostrar los efectos negativos en el aprendizaje de los alumnos al resolver problemas mal planteado.

Existen diferentes líneas de investigación relacionadas con los libros de texto de matemáticas (Fan, Zhu y Miao, 2013). La gran mayoría se centra en un tema particular, evaluando su elaboración en uno o en varios libros nacionales o internacionales. La evaluación puede ser centrada en la veracidad matemática o adecuación didáctica.

Sin embargo, últimamente se ha sugerido (Fan, 2013) que sería necesario investigar los efectos que algunos elementos de los libros de texto causan en los estudiantes. En tal perspectiva, esta investigación pretende contribuir a los estudios de libros de texto de matemática en dos formas.

La primera es analizar y evaluar el tratamiento de un tema particular (el modelo de balanza). La segunda es demostrar los efectos negativos en el aprendizaje de los estudiantes causados por los defectos detectados en el tratamiento del modelo de balanza.

## 1.2. Metodología

Para revisar los libros de matemáticas I, II y III a nivel secundaria (CONALITEG) en los ciclos escolares 2015-2016 y 2016-2017, se usa una metodología de investigación documental, conocida, en el caso de libros de texto de matemáticas, como “análisis de contenido” (Fan, Zhu y Miao, 2013; Huntley y Terrell, 2014).

En el contenido de cada libro revisado primero se identificaron los problemas que contenían gráficos del modelo de la balanza y, después, se analizaron sus diferentes aspectos (adecuación didáctica y autenticidad). Para la evaluación de la autenticidad de los problemas se tomaron en cuenta dos aspectos de la teoría de Palm, EVENTO (¿puede ser real?) y DATOS (¿pueden ser aceptables?).

Esos dos aspectos permitieron categorizar el tipo de uso de la balanza de los problemas en dos grupos. En el primer grupo se encuentran los problemas que revelan las cuestiones relevantes relacionadas con la didáctica de las matemáticas y en el segundo grupo caben los problemas que violan elementos de la teoría de Palm.

Para la exploración con los alumnos se usa el método de “papel y lápiz” (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001; Reuhkala, 2001; Booth, Newton y Twiss-Garrity, 2014).

Se diseña y aplica con los alumnos una hoja de trabajo con dos problemas, uno con datos aceptables y otro con datos contradictorios. Se revisa y analiza cada hoja de trabajo llenada y se categorizan las respuestas dadas por el estudiante en cada reactivo.

## Capítulo 2

# Marco teórico

Para alcanzar nuestros objetivos de investigación tomamos en cuenta el modelo de la balanza propuesto por Filloy (1999), el cual es considerado por varios autores como uno de los principales para los aspectos didácticos. Para el análisis de la autenticidad de los problemas basados en el modelo de la balanza se consideran dos aspectos de la teoría de Palm: evento (real) y datos (no contradictorios). Para la no autenticidad de un problema basta con que se incumpla un sólo aspecto de la teoría de Palm. Para su autenticidad, en un sentido riguroso tendrían que cumplirse 16 aspectos (incluidos los sub-aspectos). En nuestra investigación convenimos en que un problema es auténtico si cumple con los dos aspectos considerados y es artificial en otro caso. Este capítulo consiste de 2 secciones; en la sección 1.1, presentamos el modelo de la balanza de Filloy y en la sección 1.2, se presentan los aspectos de la teoría de Palm.

### 2.1. El modelo de la balanza en el aprendizaje inicial del álgebra

En el aprendizaje inicial del álgebra Filloy (1999) recomienda utilizar el modelo de la balanza para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. El punto de partida para establecer su modelo se basa en una de las primeras operaciones sobre la incógnita para la resolución de ecuaciones lineales “no aritméticas” y la introducción semántica de dicha operación mediante la utilización de modelos concretos, básicamente utiliza el modelo de la balanza para enseñar a operar la incógnita en una ecuación de primer grado de la forma

$$Ax + B = Cx, \tag{2.1}$$

donde  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son enteros positivos dados y  $C > A$ .

La propuesta de Filloy puede ser explicada a través de 5 pasos fundamentales los cuales describimos a continuación.

**Paso 1. Reproducción del modelo** (la traducción de ecuación al modelo)

En la figura 2.1 se muestra la balanza que utiliza Filloy para resolver ecuaciones de primer grado de la forma (2.1). En el lado izquierdo observamos que los cuadros huecos representan a los objetos cuyo peso no se conoce, es decir el coeficiente que acompaña a la variable  $x$ , los cuadros rellenos representan a la constante  $B$ , del lado derecho también observamos cuadros huecos que representan a los objetos cuyo peso no se conoce del coeficiente  $C$ .

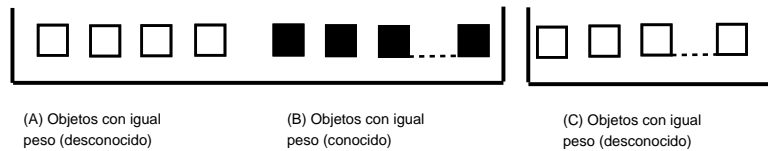


Figura 2.1: Modelo de la balanza de Filloy.

**Paso 2. Situación de equilibrio**

Se realiza la manipulación de los objetos en ambos lados de los platillos reduciendo de manera iterada los objetos de peso desconocido, manteniendo el equilibrio, hasta eliminar todos los objetos de este tipo de uno de los platillos (ver Figura 2.2).

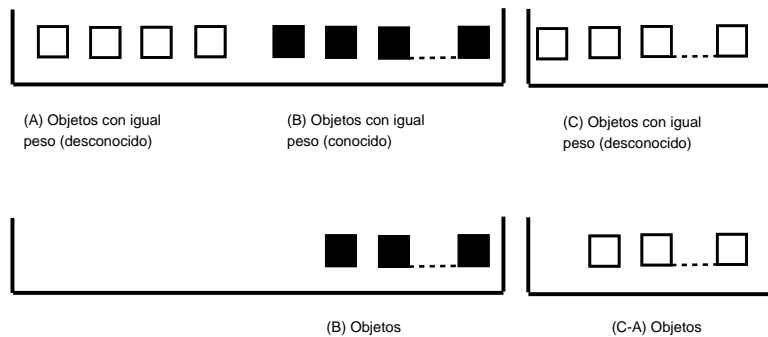


Figura 2.2: Esta imagen muestra el resultado de la eliminación de objetos desconocidos en la imagen de la Figura 2.1.

### **Paso 3. Elaboración de la ecuación simplificada**

Después de la eliminación de los objetos desconocidos la ecuación (2.1) queda reducida a una ecuación aritmética de la forma

$$(C - A)x = B. \tag{2.2}$$

Aquí debemos observar que si  $C - A = 1$  el problema se resuelve de manera exitosa con el modelo de la balanza. En el caso  $C - A > 1$ , el modelo pierde sentido ya que la balanza es un artefacto concreto, cuyo objetivo es la comparación de las masas con la manipulación de los objetos de tal manera que ésta nunca pierda el equilibrio. La salida de Filloy a este problema se reduce a la solución aritmética debido a que los objetos en la balanza no pueden ser divididos para manipularlos, de aquí la distinción entre una ecuación aritmética y una ecuación algebraica con las restricciones del modelo.

### **Paso 4. Resolución de la ecuación simplificada**

En este caso como se ha mencionado anteriormente se procede a dar una solución aritmética al problema inicialmente planteado en el caso de que  $C - A > 1$ .

### **Paso 5. Verificación de la respuesta**

Finalmente se le da el valor correspondiente al objeto con masa desconocida y se verifica si la suma de las masas de los objetos del platillo izquierdo coincide con la suma de las masas de los objetos del platillo derecho.

## **2.2. Teoría de Palm: marco para las tareas auténticas**

Muchas situaciones del mundo real son “interpretadas” como problemas verbales, es natural preguntarse sobre el significado de esta interpretación o concordancia. El marco hace alusión a dicho significado, el desarrollo de actividades que nos conducen a tal concordancia se puede considerar como la simulación de una situación real a través de esquemas en un problema verbal.

El marco parte de la suposición de que si una medida del funcionamiento en un problema verbal es interpretada como relevante al funcionamiento de una situación real, entonces hay condiciones representativas de los estímulos y las respuestas que se producen en la vida real (Fitzpatrick y Morrison, 1971, p. 239).

Forman parte fundamental para la simulación de una situación real los siguientes conceptos:

- i) Comprensión (gama de diversos aspectos de la situación que se simula).
- ii) Fidelidad (grado de aproximación a una representación).
- iii) Representatividad (combinación de comprensión y de fidelidad).

El marco abarca un conjunto de aspectos de las situaciones de la vida real que son importantes en la simulación de situaciones del mundo real. En muchas situaciones del mundo real es imposible simular todos los aspectos implicados, por lo que se hace necesario establecer restricciones sobre la comprensión.

Dentro de la teoría de Palm se proponen aspectos que puedan hacer que la fidelidad de éstos impacte en:

- a) La medida en que los estudiantes relacionan las actividades matemáticas con las situaciones verdaderas que se simulan.
- b) Las capacidades requeridas para crear un modelo matemático basado en una situación en el mundo real y, a la vez, en las competencias requeridas para interpretar los resultados matemáticos obtenidos en relación a la situación real.

A continuación se presentan todos los aspectos importantes de la teoría.

### **2.2.1. El marco: Aspectos de importancia**

Para la simulación de situaciones de la vida real los aspectos enlistados a continuación son considerados por la Teoría de Palm como los más importantes.

A EVENTO

B PREGUNTA

C INFORMACIÓN/DATOS

C1 Existencia

C2 Realismo

D PRESENTACIÓN

D1 Modo

D2 Lenguaje

E ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN

E1 Disponibilidad

E2 Experiencia plausible

## F CIRCUNSTANCIAS

F1 Disponibilidad de herramientas externas

F2 Dirección

F3 Consulta y colaboración

F4 Oportunidades de la discusión

F5 Tiempo

F6 Consecuencias

## G REQUISITOS DE LA SOLUCIÓN

## H PROPÓSITO EN EL CONTEXTO FIGURADO

**A. EVENTO.** El aspecto evento hace referencia al evento que describe la tarea. Un requisito fundamental para la simulación de una situación real es que el acontecimiento ha ocurrido o tiene una ocasión justa de ocurrir extraescolarmente. Para ejemplificar, problemas verbales comunes en probabilidad son:

- a) Seleccionar canicas en una urna y observar sus colores.
- b) Lazar dos dados y observar la suma de los valores de las caras.

Estos acontecimientos no suceden normalmente, por lo que se consideran eventos no verdaderos. Como ejemplos de eventos que ocurren justificadamente podemos citar:

1. Un hombre observa el número de personas en una fila en un cajero automático.
2. Una persona escucha por la radio el pronóstico del tiempo.
3. Una costurera observa la superficie de una tela.

**B. PREGUNTA.** El aspecto pregunta se enfoca en la concordancia entre la asignación dada en la tarea escolar y la situación del mundo real correspondiente. Una pregunta pertinente es aquella que se pudo presentar realmente en una situación del mundo real. Por ejemplo, en los eventos a y b cualquier posible pregunta probablemente no sería hecha en el acontecimiento descrito, mientras que las preguntas en los otros problemas verbales podrían ser:

1. El hombre del cajero quisiera saber, cuánto tiempo le llevará realizar su retiro de efectivo.
2. El radio-escucha quisiera saber cuál es la vestimenta adecuada para la ocasión.

3. La costurera desea saber cuántas camisas se pueden confeccionar con la superficie de tela.

**C. INFORMACIÓN/DATOS.** El aspecto datos contempla la información y los datos en la tarea: valores, modelos y las condiciones dadas en la situación correspondiente. Este aspecto se divide en los siguientes tres sub-aspectos:

**C1. Existencia.** El sub-aspecto existencia hace referencia a la adecuación entre dos tipos de información:

- Información disponible en la tarea escolar.
- Información disponible en la situación simulada.

Por ejemplo, si en determinado evento escolar se da como información la desviación estándar y la media, esta información no estaría disponible en la situación del mundo real correspondiente. Por lo que puede haber una gran discrepancia entre las matemáticas aplicables en la situación escolar y las matemáticas aplicables en la situación extraescolar correspondiente.

**C2. Realismo.** Un aspecto importante en simulaciones de la vida real es el realismo. Gran parte de las estrategias de solución de los estudiantes, se basan en juicios de carácter razonable de sus respuestas y con referencia a la realidad (Stillman, 1998). El realismo de los valores dados en las tareas escolares es entendido en el sentido idéntico o aproximado a los valores en la situación que se simula.

**C3. Especificidad.** El sub-aspecto especificidad alude a la adecuación entre:

- la especificidad de la información disponible en la situación escolar y
- la situación simulada.

Por lo regular, esta adecuación es importante en el razonamiento de los estudiantes, en las situaciones escolares y extraescolares la carencia de la especificidad puede producir un contexto diferente que impacte en la elección de la estrategia y el éxito de la solución ( Baranes, Perry, y Stiegler, 1989; Taylor, 1989).

Por ejemplo, el razonamiento de los estudiantes puede ser diferente ante los eventos:

- Compartir una rebanada de pan.
- Compartir un pastel. (Taylor, 1989).

También por ejemplo si el precio de una clase específica de caramelo es la cuestión en la situación de la vida real y en la situación escolar no se sabe que el precio se refiere a este objeto, entonces los estudiantes no tendrán las mismas oportunidades (que en la situación real tendrían) de juzgar el carácter razonable de sus respuestas.

**D. PRESENTACIÓN** La presentación es el aspecto que hace alusión a la forma o manera en la que la tarea se trasmite a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

**D1. Modo.** El sub-aspecto modo se refiere a la manera en que el problema y la información se transmiten a los estudiantes, esto es, si la tarea se comunica oralmente o por escrito y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas. En dependencia de la simulación de este aspecto están las matemáticas que se requieren.

**D2. Uso del Lenguaje.** De acuerdo a análisis lingüísticos existen diferencias de los aspectos semánticos, de referencia y estilísticos entre:

- Textos escolares donde tratan problemas verbales.
- Textos que describen situaciones de la vida real.

Las tareas escolares requieren diversas capacidades en la interpretación de las tareas extraescolares correspondientes, y el uso de la lengua puede impedir las posibilidades del mismo uso de las matemáticas en las situaciones escolares y extraescolares (Nesher, 1980).

Impactan en las capacidades de interpretación:

- Los términos difíciles.
- La estructura de la oración.
- La cantidad de texto.

Para las simulaciones, es importante que el lenguaje usado en la tarea escolar, no sea tan diferente de una situación de tarea extraescolar correspondiente, ya que una diferencia considerable afecta las posibilidades de que los estudiantes utilicen las mismas matemáticas que utilizarían en la situación que se simula. Como ejemplo, podemos mencionar que el término “disección” puede impedir la comprensión en un problema verbal escolar.

**E. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN.** Para la simulación de una situación es importante incluir el papel y el propósito de la persona que se dispone a solucionar la

tarea. El aspecto estrategias de solución se divide en dos sub-aspectos:

**E1. Disponibilidad.** La disponibilidad de las estrategias de solución se refiere a la adecuación entre las estrategias de soluciones:

- disponibles para los estudiantes que solucionan tareas y
- las disponibles para las personas descritas para la resolución de las tareas correspondientes en la vida real más allá de la escuela.

Si estas estrategias no coinciden, los estudiantes no tendrán las mismas posibilidades de usar las mismas matemáticas que usarían en la situación simulada. Hay ejemplos donde suponen a los estudiantes tomar el papel de sí mismos, mientras que en otros no se sabe en qué papel los estudiantes solucionan la tarea.

**E2. Experiencia plausible.** El sub-aspecto experiencia plausible hace alusión a la adecuación en las estrategias de experiencia como:

- plausible para la resolución de la tarea en la situación de la escuela y
- esta experiencia como plausible en la situación simulada.

Para ejemplificar, es común que en algunos libros de texto comiencen con una descripción de un modelo particular para solucionar tareas, seguido por un conjunto de tareas, esto se puede experimentar como un requerimiento para utilizar este modelo y que otros métodos aplicables en la situación extraescolar no aplicarán para estas tareas.

**F. CIRCUNSTANCIAS.** Este aspecto alude a las circunstancias bajo las cuales debe ser solucionada una tarea. Dichas circunstancias son factores del contexto social (Clarke y Helme, 1998). Este aspecto se subdivide en los 6 sub-aspectos siguientes:

**F1. Disponibilidad de herramientas externas.** Este sub-aspecto hace referencia a las herramientas concretas fuera de la mente, como por ejemplo una calculadora, un mapa o una regla.

Para visualizar la importancia de este aspecto, pensemos por ejemplo en la diferencia de las capacidades matemáticas requeridas para calcular el costo mensual de un préstamo hipotecario mediante software especializado y las capacidades matemáticas para hacer este cálculo mediante una calculadora.

**F2. Dirección.** El sub-aspecto dirección es dado en forma de sugerencias que pueden ser explícitas o implícitas. Por ejemplo, en una tarea escolar puede sugerirse que el estudiante empiece calculando el costo máximo, si esta sugerencia no es dada en la

situación simulada, puede causar una gran diferencia en lo que se espera que los estudiantes logren en ambas situaciones.

**F3. Consulta y colaboración.** En este sub-aspecto se señala que las situaciones de tarea extraescolares son solucionadas con la colaboración dentro de grupos, o con la posibilidad de ayuda. En tales circunstancias se debe considerar que en las simulaciones la entrada de otras personas puede afectar las habilidades y competencias necesarias para resolver una tarea (Resnick, 1987).

**F4. Oportunidades de la discusión.** Aquí se hace referencia a las posibilidades que tienen los estudiantes para preguntar o discutir sobre el significado y la comprensión de la tarea. La falta de concordancia entre las situaciones escolares y extraescolares puede causar diferencias en las matemáticas usadas, se ha demostrado que esta comunicación que tiene el poder de afectar al significado experimentado de la tarea y de las estrategias de solución aplicadas (Christiansen, 1997).

**F5. Tiempo.** En este aspecto la presión del tiempo puede resultar un impedimento para resolver una determinada tarea. Por lo que resulta importante para la simulación que las restricciones de tiempo no causen diferencias significativas en las posibilidades de resolver la tarea escolar en comparación con las situaciones que se simulan.

**F6. Consecuencias de la solución de éxito de la tarea (o fracaso).** Las consecuencias para los solucionarios dependen de la solución de éxito o fracaso de la tarea, por lo que un aspecto a considerar para la simulación es el de las consecuencias. Este sub-aspecto puede contemplar los esfuerzos para promover la motivación para la solución de problemas verbales (en muchos casos extraescolarmente se observa que en la vida real las personas son motivadas en la resolución de problemas). Esta situación puede aterrizar en proyectos escolares con consecuencias reales que impacten en beneficios sociales, un ejemplo de tales proyectos es el que se describe en Tate (1995). En este proyecto los estudiantes utilizan las matemáticas en sus esfuerzos para que las licorerías sean reubicadas lejos de la escuela de su vecindario.

**G. REQUISITOS DE LA SOLUCIÓN.** En este aspecto la solución a un problema es interpretada en un sentido amplio, esto es, debe ponerse atención tanto en el modelo de solución como en la respuesta final a una tarea. Así que pueden constituirse como requisitos para las soluciones a las tareas escolares los siguientes:

- Los juicios en la validez de respuestas.
- La discusión de los métodos de solución.
- Frases en el texto de la tarea.

Estos requisitos deben ser coherentes con lo que se considera una solución adecuada en una situación simulada correspondiente (los cálculos y respuestas deben estar vinculados con la realidad), y se espera que el estudiante deba tomar consciencia de esto para evitar se vea obligado a pensar de manera diferente de lo que se corresponde en situaciones extraescolares (Cooper, 1992).

**H. PROPÓSITO EN EL CONTEXTO FIGURADO.** En ocasiones en la simulación, es fundamental que el estudiante tenga la claridad que el solucionador tiene del propósito de la tarea en el contexto figurado. La conveniencia de la respuesta a una tarea y las consideraciones necesarias de ser hecho así, dependen a veces del propósito de encontrar la respuesta. En muchas tareas, el modelo entero de la solución depende del propósito (Palm, 2002).

### 2.2.2. Clasificación de las contextualizaciones

Los aspectos contemplados en la teoría de Palm han sido tomados como un referente para muchos investigadores en el área educativa. Una parte muy importante de la teoría es que podemos distinguir dos clases de contextualizaciones: las auténticas y las artificiales.

Las contextualizaciones auténticas son aquellas que cumplen con el marco teórico, elaborado por Palm (2002, 2006), en el que se define el término autenticidad y las contextualizaciones artificiales son aquellas en que se incumple uno o varios elementos de las contextualizaciones auténticas.

Debido a la cantidad de problemas analizados en este trabajo de investigación (capítulo 4) hemos convenido hacer nuestra clasificación de las contextualizaciones de la siguiente manera:

Un problema se clasifica como **auténtico** si cumple con los aspectos de EVENTO y DATOS (existencia, realismo).

Un problema se clasifica como no auténtico o artificial si incumple alguno de los aspectos anteriores. En un sentido estricto los problemas que se ubican en esta clase coinciden con la clasificación que se haría de estos mismos problemas tomando en cuenta todos los aspectos de la teoría de Palm.

En el caso de los problemas clasificados como auténticos de acuerdo a nuestra convención se tendrían que verificar los 14 aspectos restantes para estar completamente seguros de su autenticidad según Palm.

## Capítulo 3

# Investigaciones anteriores

Se tienen indicios de que las balanzas en forma de báscula de brazos iguales han sido utilizadas desde el año 4000 A. C. La idea básica de un palo con las cacerolas en cada extremo a través de un Pivote fue concebida durante el siglo XVI. Los egipcios alrededor del 3500 A. C. con el desarrollo del comercio tuvieron la necesidad de pesar y medir productos para su venta, de ahí el surgimiento de un instrumento para estos fines (Figura 3.1). Desde entonces el instrumento de la balanza ha ido evolucionando hasta llegar a las básculas electrónicas que conocemos hoy en día.

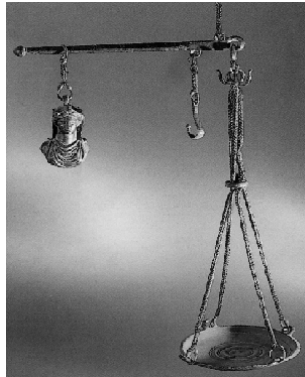


Figura 3.1: Imagen tomada de Museum of the Royal Pharmaceutical Society of Great Britain, Gary Castro et. al. Basic Weighing and Measuring Principles, Training for the Weights and Measures Official Division of Measurement Standards. MAX- PLANCK- INST I TUT FÜR WISSENSCHAFTS G E S C H ICHTE Max Planck Institute for the History of Science

A la par de ese desarrollo la balanza ha sido utilizada como un modelo de repre-

sentación para resolver problemas (cuya solución nos conduce a una ecuación). Por ejemplo, Arquímedes (250 A. C.) descubre el principio de la palanca, a partir de este momento se considera empieza el uso tecnológico y consciente de esta máquina. El principio físico de equilibrio, conocido como ley de la palanca de Arquímedes, consiste en considerar dos cuerpos cuyos pesos denominamos  $w_1$  y  $w_2$ , colocados a una distancia  $d_1$  y  $d_2$  respectivamente, del punto de apoyo, de tal forma que la balanza se equilibre, veamos para ello la figura 3.2 cuya condición de equilibrio es:

$$d_1 w_1 = d_2 w_2$$

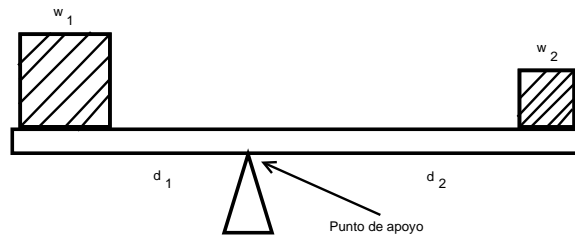


Figura 3.2: Ley de la palanca de Arquímedes.

Los problemas tipo balanza aparecen por primera vez como acertijos y años después se usarían para la educación matemática en particular para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones de primer grado. Como un ejemplo del uso consciente que se le empezó a

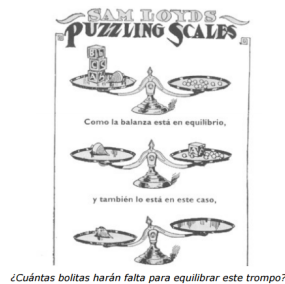


Figura 3.3: El acertijo de las balanzas de Samuel Loyd.

dar a la balanza podemos citar a Samuel Loyd, nacido en 1841 el más grande creador de acertijos de los Estados Unidos. Sus columnas de acertijos aparecieron en numerosos periódicos y revistas (1904-1911) plantea el acertijo de las balanzas (Figura 3.3) que utiliza ecuaciones para resolverse. Loyd introdujo los acertijos de balanza para dar a los

alumnos la oportunidad de resolver estos problemas de álgebra sólo con la manipulación de los objetos y usando razonamiento aritmético. En otras palabras, el modelo de solución no se basa en el uso de ecuaciones formuladas con diferentes símbolos para las incógnitas.

A continuación presentamos los trabajos más relevantes relacionados con el uso de la balanza para resolver ecuaciones.

Con el objetivo de mejorar el conocimiento de los maestros de matemáticas de la Escuela Secundaria Junior en Bandung, Turmudi ( 2011) presenta un estudio cualitativo, desde una perspectiva realista, donde parte, de las experiencias transmitidas para la introducción de las ecuaciones lineales, es el diseño de una balanza para pesar cosas. Sus resultados indican que los estudiantes y maestros ponen más atención a estos métodos de enseñanza y motivan el entendimiento del concepto de variable.

Por otra parte, existen diversos autores que plantean la importancia de las representaciones múltiples en matemáticas para contribuir en el aprendizaje de los estudiantes y estimular el pensamiento relacional. Por ejemplo, Jennifer Suh y Patricia S. Moyer (2007) muestran como el uso de diversas formas representacionales pueden estimular el pensamiento relacional. Greenes y Findell (1999), recomiendan experiencias como usar balanzas de escalas para representar expresiones algebraicas y así promover el pensamiento relacional de los estudiantes. Ellos establecen que los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático en álgebra cuando son capaces de interpretar ecuaciones algebraicas usando dibujos, gráficos y representaciones simbólicas.

Lesh, Landau & Hamilton (1983 ) destacan la manipulación de la balanza entre cinco tipos distintos de sistemas de representación: experiencia de la vida real, modelos de manipulación (balanza), dibujos y diagramas, lenguaje verbal, lenguaje escrito. En Arrieta (2006) se plantea el uso de material (objetos concretos) como punto de partida para la construcción del conocimiento, ya que, al referirse a un soporte físico, facilitan la comprensión y la comunicación, favoreciendo la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia las matemáticas.

Figueira-Sampaio, dos Santos y Carrijo (2009) expresan que el aprendizaje es un proceso en el cual los individuos construyen conocimientos y que la investigación en educación matemática busca formas de hacer la educación matemática menos seca y más atractiva. Argumentan que al resolver ecuaciones de primer grado, **es muy común para los profesores trabajar con la idea errónea de “cambiar el signo” al “mover el miembro”**. Para minimizar este problema plantean la idea de equilibrio (igualdad).

Se han hecho otras investigaciones donde se han propuesto diferentes modelos para el razonamiento algebraico inicial. Por ejemplo Cáceres y Suárez (2008), establecen que

los programas dan a los estudiantes retroalimentación inmediata sobre sus acciones en la computadora, y frecuentemente simulan situaciones que son difíciles de reproducir o experimentar en el salón de clases. Debido a esto ellos promueven un programa al que llaman el interactivo La balanza que reproduce una situación problemática en la que distintas balanzas necesitan ser equilibradas usando números fraccionarios. Con esto, se pretende que los alumnos trabajen con la equivalencia de fracciones, así como con la suma y resta de las mismas. El programa tiene la ventaja de que da retroalimentación al usuario al indicarle de manera visual y auditiva cuando los brazos de la balanza están en equilibrio. Otra ventaja es que pueden utilizarse también números enteros negativos y decimales (Figura 3.4).

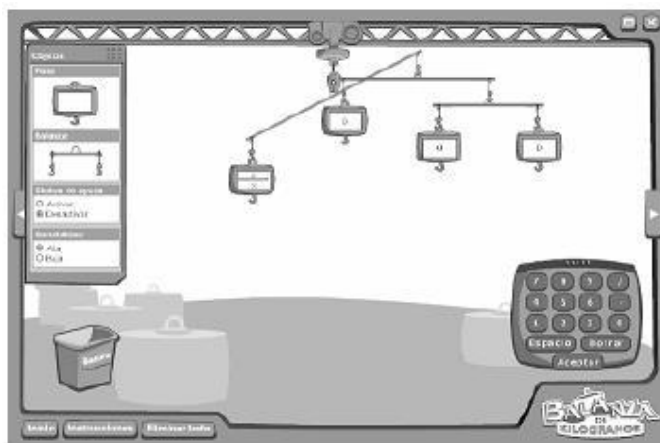


Figura 3.4: Programa interactivo La Balanza.

Los mismos autores también consideran que el aprendizaje ocurre a través de interacciones y por lo que recomiendan el trabajo colaborativo con actividades que incluyan discusiones grupales. Otro de los aspectos que promueven el uso de materiales concretos antes del contacto con ideas matemáticas abstractas. Debido a que contemplan a la enseñanza y el aprendizaje como actividades complejas ya que consideran a cada salón de clases como un contexto único, las sugerencias didácticas deben servir únicamente como guías y no como una manera única de utilizar los recursos. El uso de la balanza invita a los estudiantes a actuar matemáticamente de diferentes maneras.

## Capítulo 4

# Investigación Documental

En este capítulo se muestran resultados sobre la investigación documental; específicamente presentamos el plan de estudios de educación secundaria, los libros oficiales de matemáticas (CONALITEG) a nivel secundaria que se revisaron con el objetivo de identificar los problemas que tratan el modelo de la balanza, y en las últimas secciones del capítulo se presentan dos clasificaciones de los problemas encontrados de acuerdo a diferentes aspectos tratados en la teoría de Palm, la propuesta de Filloy y el libro del maestro de la SEP.

### 4.1. Plan de estudios

Dentro de los programas de estudio de educación secundaria de la SEP (2011) se propone introducir en primer año en el bloque III, las ecuaciones de primer grado de las formas

$$x + a = b, \quad ax = b \quad \text{y} \quad ax + b = c$$

En segundo año, en el bloque IV en las orientaciones didácticas y planes de clase 8.4.2., se contemplan las ecuaciones de primer grado de la forma

$$ax + b = cx + d$$

**En su plan de clase se sugiere utilizar el modelo de la balanza como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad.** En tercer año se propone la aplicación de las ecuaciones de primer grado en la resolución de problemas, esta propuesta se encuentra en el bloque V.

El motivo por el cual se toman los planes de estudio 2011 se debe a que continuamente se están haciendo modificaciones de estos programas. Por ejemplo, las fechas en

que entrarán en vigor los nuevos planes de estudio son: para el ciclo escolar 2016-2017, entra el plan primero de secundaria, para el ciclo escolar 2017-2018 el de segundo de secundaria y para el ciclo escolar 2018-2019 el plan tercero de secundaria. En la liga Secretaría de Educación Pública (2011) se pueden verificar de manera detallada las fechas de los nuevos planes, incluso para la educación preescolar.

## 4.2. Libro del maestro de secundaria 2011

También es importante para nuestra investigación la revisión del libro para el maestro de Matemáticas de Secundaria que propone la SEP. Este libro que se propone como una guía para el profesor de secundaria, es considerado en nuestra investigación debido a que se presentan sugerencias de cómo abordar el tema de la solución de ecuaciones lineales a través del modelo de la balanza.

El Libro para el maestro de matemáticas de educación secundaria desde su primera edición (1994) hasta la más reciente es una propuesta de la Secretaría de Educación Pública como material de apoyo dirigido a los profesores de la asignatura, de los tres grados de la educación secundaria, con la intención de fortalecer el trabajo docente de los profesores y con el propósito principal de enriquecer sus recursos para ayudar a sus alumnos a estudiar matemáticas.

A partir de la segunda edición (2001) se le han incorporado nuevos materiales como secuencias, organización de contenidos, ficheros y actividades didácticas. En su edición más reciente del Libro para el maestro (Educación básica. Secundaria 2004) se enriquece el capítulo referido al enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propuesto en el plan y programas de estudio correspondientes. En la última edición (2004) se proponen orientaciones concretas respecto al tratamiento de los contenidos matemáticos para cada una de las áreas:

- 1 Aritmética
- 2 Álgebra
- 3 Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría)
- 4 Presentación y tratamiento de la información
- 5 Nociones de probabilidad

Las orientaciones cubren sólo los temas donde consideran que el alumno presenta frecuentemente dificultades. También se proponen actividades y problemas especiales con la idea de que los alumnos puedan superar estas dificultades. El libro en su edición 2004, se encuentra estructurado en 6 capítulos, todos los capítulos excepto el primero corresponden a las áreas antes mencionadas.

El primer capítulo se reserva para explicar los propósitos del estudio de las matemáticas en la educación secundaria y algunos aspectos del enfoque didáctico. Para comprender el tipo de orientación que se propone en el libro, presentamos a continuación algunos de los aspectos contemplados en este capítulo.

El primer capítulo titulado Enfoque, se refiere al enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. El capítulo resalta la importancia de las matemáticas en la vida diaria. Aquí vale la pena señalar que los ejemplos presentados en esta motivación corresponden a actividades que surgen en los ámbitos científicos y tecnológicos.

Los propósitos del estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria están enfocados (en este libro) principalmente en la formación de los estudiantes, esencialmente en **desarrollar habilidades, promover actitudes positivas y adquirir conocimientos matemáticos**.

Las habilidades que se pretenden desarrollar son:

- **Calcular** (establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación o de una ecuación para producir o verificar resultados).
- **Inferir** (posibilidad de establecer relaciones entre los datos explícitos e implícitos que aparecen en un texto, una figura geométrica, una tabla, gráfica o diagrama, para resolver un problema).
- **Comunicar** (utilizar la simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información cualitativa y cuantitativa).
- **Medir** (establecer relaciones entre magnitudes para calcular longitudes, superficies, volúmenes, masas, etcétera).
- **Imaginar** (trabajo mental de idear trazos, formas y transformaciones geométricas planas y espaciales).
- **Estimar** (encontrar resultados aproximados de ciertas medidas, de operaciones, ecuaciones y problemas).
- **Generalizar** (descubrir regularidades, reconocer patrones y formular procedimientos y resultados).
- **Deducir** (establecer hipótesis y encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos).

Dentro de la promoción de actitudes positivas se persigue fomentar actitudes como:

- **Colaboración** (asumir la responsabilidad de un trabajo en equipo).
- **Respeto** (al expresar ideas y escuchar las de los demás).
- **Investigación** (buscar y verificar diferentes estrategias para resolver problemas).
- **Perseverancia** (llevar a buen término el trabajo aun cuando los resultados no sean los óptimos).
- **La autonomía** (al asumir la responsabilidad de la validez de los procedimientos y resultados).
- **Sana autoestima** (reconocer el valor del trabajo propio, para fortalecer la seguridad personal).

La adquisición de conocimientos matemáticos tiene como tarea específica el estudio de las disciplinas en las cinco áreas mencionadas. Ésta pretende consolidar el proceso de formación básica con el objeto de obtener una cultura matemática significativa y funcional. Aquí por “cultura matemática significativa y funcional” los autores se refieren a que **los estudiantes puedan usar los conocimientos adquiridos de matemáticas en las diversas actividades que realizan cotidianamente**. Otro aspecto que se busca con la adquisición de los conocimientos matemáticos es **consolidar el proceso de estudio de las matemáticas iniciado en la educación preescolar y primaria**.

Otro aspecto importante del enfoque didáctico es **el papel de los problemas en el estudio de las matemáticas**. Por **problema** los autores se refieren a

*“una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas”*.

Con base en esta concepción los autores sugieren que los problemas propuestos a los estudiantes cumplan con:

- Ser un reto interesante que fomente en el estudiante una actitud de búsqueda, orientada a proponer conjeturas y posibles estrategias de resolución.
- El problema debe permitirle al estudiante explorar las relaciones entre nociones conocidas y posibilitarle el avance hacia la comprensión y asimilación de nuevos conocimientos.
- El problema debe contener los elementos que permitan validar sus propias conjeturas, procedimientos y soluciones, o desecharlas cuando sean incorrectas.

Otros aspectos del enfoque que no detallaremos aquí son: El ambiente de estudio en el aula, el tipo de situaciones problemáticas propuesto, el juego como recurso didáctico, materiales manipulables y las nuevas tecnologías, las tareas en casa, la confrontación, los errores en la resolución de problemas y la validación de resultados, las secuencias didácticas y la formalización del conocimiento, organización del trabajo en el aula, el tiempo para resolver un problema, las tareas del profesor, selección de las actividades, organización de la clase, organización del curso, el trabajo colegiado, la evaluación, y los exámenes escritos individuales.

Para nuestra investigación, nos interesa conocer la orientación, propuesta por el libro del maestro (edición 2004), respecto al tratamiento del tema de ecuaciones de primer grado correspondiente al capítulo de álgebra del segundo grado de secundaria. En términos más específicos, nuestra atención se centra en la orientación que se le da al uso del modelo de la balanza en este libro.

En la parte introductoria del capítulo correspondiente al tema de Álgebra los autores advierten que para afrontar con éxito la resolución de ecuaciones lineales, se deben tomar en cuenta los temas de pre álgebra vistos en el primer año de secundaria (elementos introductorios del lenguaje simbólico). También aseguran que para **lograr un aprendizaje significativo del álgebra, es necesario que los símbolos y las operaciones algebraicas se introduzcan a partir de situaciones familiares**. Al mismo tiempo pronostican que al final del segundo año y durante el tercero, el alumno tendrá la oportunidad de adquirir destreza y seguridad en el manejo de los procedimientos algebraicos y utilizarlos para resolver problemas cada vez más complejos.

Para determinar el momento en que los autores consideran necesario introducir el modelo de la balanza mostramos a continuación una descripción de los temas tratados previamente.

**El álgebra en la educación secundaria.** Aquí se da una motivación de la importancia del estudio del álgebra y se hace la observación de la conveniencia de que los alumnos utilicen expresiones con literales y se acostumbren a las primeras reglas sencillas de escritura algebraica. También proponen que las actividades enfatizen el uso de situaciones concretas y su representación por medio de tablas y gráficas, con el objetivo de que el alumno explore regularidades y patrones, aprendiendo a expresarlos simbólicamente, **sin intentar llegar a la manipulación algebraica de los símbolos**.

**Primeras reglas de escritura algebraica.** Para introducir estas reglas se propone aprovechar las fórmulas geométricas para calcular el perímetro y el área de figuras sencillas. También se sugiere plantear problemas y actividades donde se solicite a los

alumnos expresar de manera breve el perímetro o el área de algunas figuras sencillas.

**Ecuaciones de un paso.** Aquí los autores proponen problemas de ecuaciones aritméticas como:

1)  $237.45 + [ ] = 513.25,$

2)  $809.60 - [ ] = 579.85,$

3)  $12.5 \times [ ] = 92.5$

4)  $[ ]/5.5 = 13.5$

A estas ecuaciones las hacen llamar ecuaciones de paso, ya que se resuelven en un sólo paso invirtiendo las operaciones. Recomiendan involucren números decimales relativamente grandes y el uso de la calculadora para agilizar la resolución de este tipo de ecuaciones.

**Ecuaciones de primer grado o lineales.** En este tema, para introducir los elementos de lenguaje simbólico, los autores proponen retomar los temas de pre-álgebra vistos en el primer grado. También plantean la necesidad de introducir los símbolos y las operaciones algebraicas a partir de situaciones familiares y la importancia de planear actividades y problemas que contemplen las nociones de ecuación, de incógnita y procedimiento para despejar la incógnita. Y que fomenten en los estudiantes la capacidad de darse cuenta de la forma como las condiciones de un problema se traducen en una ecuación.

#### 4.2.1. El modelo de la balanza

Para introducir el tema los autores consideran que **un paso importante hacia el pensamiento algebraico es que los alumnos sean capaces de resolver ecuaciones donde la técnica de invertir operaciones ya no sea suficiente**, como es el caso de las ecuaciones lineales donde la incógnita aparece en ambos miembros de la ecuación. Las ecuaciones a las que se refieren tienen formas como:

$$ax + b = cx + d, \quad ax + bx + c = dx + ex + f$$

Es en este punto donde ellos consideran que **los modelos de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales juegan un papel fundamental**. La importancia de estos modelos la basan en la observación de que los estudiantes aprenden mejor los métodos para la solución de ecuaciones lineales **si se usan modelos como el de la balanza** en lugar de acudir a las explicaciones basadas en las propiedades estructurales de los números.

La base del modelo de la balanza se presenta como la analogía entre la manipulación de quitar o poner objetos en ambos platillos de una balanza manteniendo su equilibrio y las operaciones que puedan realizarse en ambos miembros de una ecuación.

	Analogías	
Balanza	$\longleftrightarrow$	Ecuación
Manipular	$\longleftrightarrow$	Realizar operaciones
Ambos platillos de la balanza	$\longleftrightarrow$	Ambos miembros de la ecuación
Mantener equilibrio	$\longleftrightarrow$	La igualdad no se pierde

Para ilustrar el uso de la balanza los autores plantean el problema de resolver la ecuación

$$7x + 5 = 4x + 20$$

Mediante las siguientes acciones:

**Acción 1.** Quitar pesos desconocidos e iguales a  $x$  como se ilustra en los gráficos de la Figura 4.1.

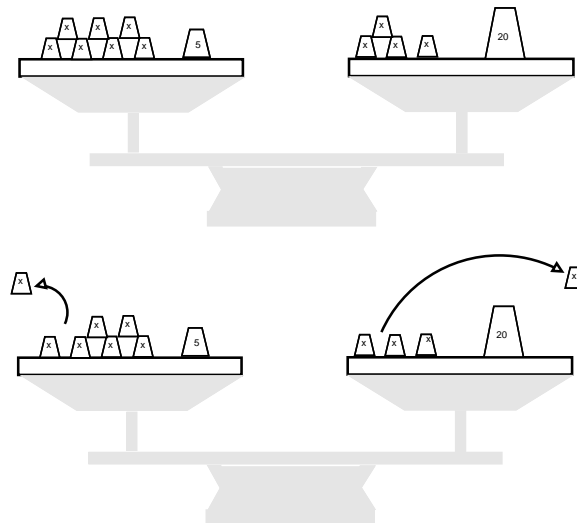


Figura 4.1: Balanzas en equilibrio.

La acción 1 se realiza hasta obtener una balanza con pesos desconocidos sólo en uno de los lados:

**Acción 2.** Interpretar la balanza del gráfico de la Figura 4.2 como la ecuación

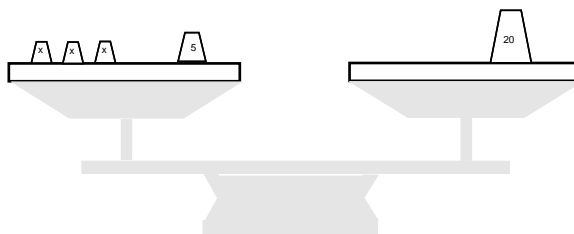


Figura 4.2: Balanza resultante.

$$3x + 5 = 20$$

**Acción 3.** Aplicar el procedimiento para ecuaciones de un paso para obtener que

$$x = \frac{20 - 5}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Después de la ilustración del uso de la balanza los autores recomiendan que **las acciones de la balanza sean referidas a los miembros de la ecuación con el fin de conducir a los alumnos a los procedimientos algebraicos que sirven para operar con ambos miembros de una ecuación para resolverla.**

Cuando el estudiante ha adquirido la experiencia suficiente sugieren comenzar a transmitir las ideas de **pasar sumando o restando o multiplicando o dividiendo de un lado a otro de la ecuación.**

Distinguen dos clases de procedimientos sobre una ecuación:

- i. Los que consisten en realizar las mismas operaciones en ambos miembros de la ecuación.
- ii. Los que consisten en aplicar las reglas para pasar de un miembro a otro.

Para establecer la siguiente correspondencia que representa una evolución del modelo de la balanza (Figura 4.3).

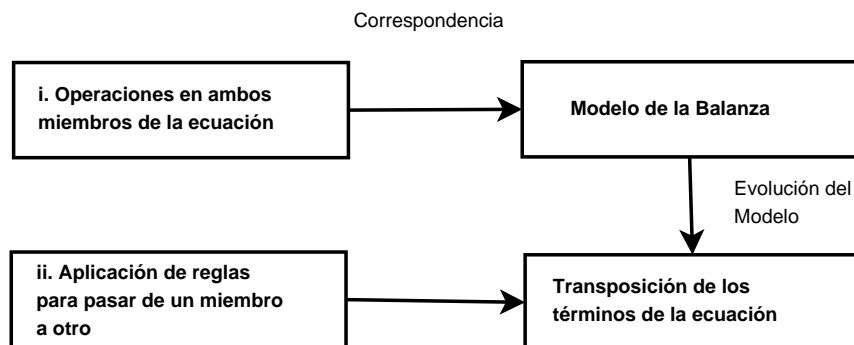


Figura 4.3: Evolución del modelo

Sobre los alcances y limitaciones del modelo de la balanza observan lo siguiente:

**Alcances.** Existe una gran variedad de ecuaciones diferentes que pueden resolverse a partir del modelo de la balanza.

**Limitaciones.** El modelo no resulta adecuado utilizarlo directamente, por ejemplo, en ecuaciones como:

$$ax - b = cx, ax + b = cx - d, ax - b = cx - d, a - bx = cx$$

entre otras.

Otras ecuaciones lineales que no pueden modelarse directamente sobre la balanza son aquellas que dan lugar a soluciones negativas.

Los autores le dejan al profesor la decisión del momento conveniente para introducir las ecuaciones con coeficientes decimales sencillos y las que tienen soluciones negativas (ya no tratados directamente con el modelo de la balanza).

### 4.3. Resultados de la revisión de los libros

En esta sección fue necesario hacer una revisión de los libros de texto de matemáticas en los tres niveles de secundaria (primero, segundo y tercer año) avalados por la SEP en los ciclos escolares 2015-2016 y 2016-2017, con el objetivo de identificar cuántos problemas utilizan el modelo de la balanza para la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de primer grado y si son cognitivamente adecuados para los estudiantes.

En el ciclo escolar 2015 - 2016 se revisaron 72 libros de matemáticas por los tres niveles; en la revisión de estos libros encontramos 99 problemas que utilizan el modelo de la balanza o la balanza como artefacto. En el ciclo escolar 2016-2017 se revisaron 96 libros por los tres niveles; en esta revisión encontramos 168 problemas que utilizan el modelo de la balanza o la balanza como artefacto; cabe aclarar que los problemas del ciclo escolar 2015-2016 están incluidos en los problemas del ciclo escolar 2016-2017.

En las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 del anexo A se muestran todas las referencias de los libros revisados de los tres niveles respectivos, para facilitar la clasificación, cada problema se etiqueta con la clave asignada por la SEP del libro correspondiente. Cuando aparecen varios problemas en un mismo libro se adiciona al final de la etiqueta una letra minúscula del alfabeto, por ejemplo, S12005, S12005a y S12005b son 3 problemas en el libro con clave SEP S12005. También en las 2 últimas columnas de cada tabla se muestra el número de problemas encontrados con el modelo de la balanza o el artefacto balanza y las páginas del libro donde se encontraron dichos problemas.

En el primer nivel de educación secundaria se revisaron un total de 30 libros de ambos ciclos escolares (Tabla 4.1 del anexo A), entre estos libros se encontraron un total de 86 problemas relacionados con la balanza. También, se identificaron 3 libros que sufrieron cambio de portada, sin embargo los problemas relacionados con la balanza permanecieron sin cambio alguno, las claves SEP que corresponden a estos libros son: S12005, S12016 y S12007.

En el segundo nivel de secundaria se revisaron un total de 31 libros correspondientes a los ciclos 2015-2016 y 2016-2017 (Tabla 4.2 del anexo A), en estos libros se encontraron 72 problemas relacionados con la balanza.

En el tercer nivel se revisaron 35 libros de los ciclos 2015-2016 y 2016-2017 (Tabla 4.3 del anexo A). En estos libros se identificaron 10 problemas relacionados con la balanza, esta reducción era de esperarse debido a los temas tratados en este nivel, ya que éstos sólo contemplan algunas aplicaciones de las ecuaciones de primer grado.

## 4.4. Clasificación de Problemas

Como ha sido mencionado con anterioridad, algunos autores promueven el uso de materiales concretos antes del contacto con ideas matemáticas abstractas. En sus trabajos plantean la importancia de las representaciones en matemáticas, como el modelo de la balanza, para contribuir en el aprendizaje de los estudiantes y estimular el pensamiento relacional. En esta sección proponemos dos clasificaciones de los problemas que cubren varias cuestiones relacionadas con la didáctica de las matemáticas y la teoría de Palm.

En la **primera clasificación** se pretende explorar las cuestiones relacionadas con la didáctica de las matemáticas, para esto se consideran 4 grupos:

- 1) Problemas que aplican y que no aplican las acciones en el modelo de la balanza.
  - 1.1. Los autores demuestran explícitamente cómo las acciones que no afectan el equilibrio llevan a la solución.
  - 1.2. Los autores preguntan explícitamente a los alumnos cuáles son las acciones que no afectan el equilibrio.
  - 1.3. Los autores no tratan explícitamente las acciones que no afectan el equilibrio.
- 2) Problemas que usan conocidos acertijos matemáticos.
- 3) Problemas clasificados por el número de ecuaciones.
- 4) Problemas de la balanza con expresiones algebraicas o números

En la **Segunda clasificación** se exploran las cuestiones relacionadas con la teoría de Palm. Para esto, se forman dos grupos de problemas:

- 1) Problemas que intentan dar la idea de que el modelo de la balanza se puede usar en eventos reales.
- 2) Problemas que presentan datos irreales o datos contradictorios.

Para nuestra clasificación hemos designado una sección para cada grupo; de la sección 4.4.1 a la 4.4.4 para los primeros 4 grupos de la primera clasificación y las secciones 4.4.5 y 4.4.6 para los dos grupos de la segunda clasificación. En cada sección se describen detalladamente las características de los problemas que pertenecen al grupo correspondiente. También se ilustran algunos ejemplos que resaltan en su grupo y se dejan los restantes para ser consultados en los anexos de este documento.

## Primera Clasificación

En la **primera clasificación** se pretende explorar las cuestiones relacionadas con la didáctica de las matemáticas. Este grupo se puede decir que es el más importante porque contiene los problemas que son la razón de ser del modelo de la balanza, es decir los problemas que usan de manera correcta este modelo. En estos problemas se va quitando el mismo objeto de cada platillo de la balanza de tal manera que se siga manteniendo el equilibrio en la balanza y así continua hasta llegar al valor de la incógnita. Sobre los datos se puso especial atención en los objetos que representan el coeficiente de la variable en la ecuación y en el resultado numérico, para asegurar que correspondan con números enteros positivos, como lo plantean Filloy (1999) y el libro para el maestro SEP (2011). Estos problemas en el aspecto DATOS de la teoría de Palm pueden resultar artificiales debido a que puede darse el caso de que los objetos utilizados en el problema no sean reales.

### 4.4.1. Problemas que aplican y que no aplican las acciones del modelo de la balanza

Este grupo se compone de 3 subgrupos determinados por las distintas acciones sobre la balanza. El primer subgrupo es donde los autores demuestran de manera explícita acciones sobre los objetos de la balanza que no afectan su equilibrio y llevan a la solución del problema, de este tipo de problemas se encontraron 17, lo que corresponde al 10.11 %. El segundo subgrupo corresponde a problemas donde el autor pregunta explícitamente a los alumnos cuáles son las acciones que no afectan el equilibrio de la balanza, de este tipo de problemas encontramos 32 que corresponden al 19.04 %. El último subgrupo corresponde a los problemas donde el autor no trata de manera explícita las acciones que no afectan el equilibrio de la balanza, a este grupo pertenecen el 70.83 %.

#### 4.4.1.1 Los autores demuestran explícitamente cómo las acciones que no afectan el equilibrio llevan a la solución

Como mencionamos previamente este subgrupo es uno de los más importantes, porque los problemas que pertenecen a esta clase son los que muestran paso a paso el modelo de la balanza. A continuación se presentan 5 ejemplos de problemas de este subgrupo. En el anexo B se pueden consultar la totalidad de los problemas.

#### Ejemplo I.1

- **Contexto:** Se observa una balanza y arriba de sus platillos se encuentran figu-

ras geométricas. Abajo para su solución se muestra la misma balanza pero con diferentes representaciones equivalentes.

- Texto original:** En el modelo de la balanza, cada platillo actúa como un miembro de la ecuación de primer grado con una incógnita; platillo izquierdo para el primer miembro y platillo derecho para el segundo miembro, y el pedestal como el signo  $=$ . Cada paso que se realiza en la balanza debe mantener el equilibrio de ésta. En este ejemplo la incógnita está representada por los rectángulos naranja y cada unidad numérica por un circulito relleno. En este modelo se puede manejar la incógnita en ambos platillos, y es recomendable sólo usar valores enteros.
- Tareas matemáticas:** Encontrar el valor de la incógnita observando las diferentes representaciones de la balanza mostradas en el dibujo. Ir eliminando las figuras de la balanza hasta llegar a una equivalencia de las figuras geométricas.

1. Resolver por el modelo de balanza la ecuación  $3x + 2 = 8$ , anotando debajo de cada paso su expresión simbólica.

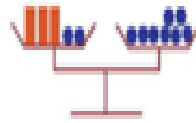


Figura 4.4: S12001a

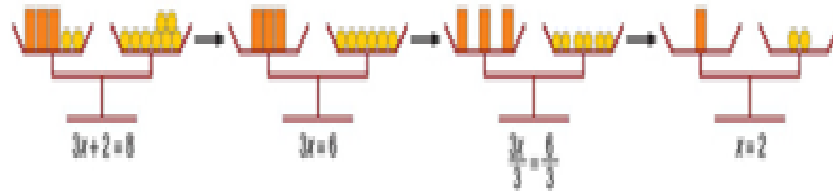



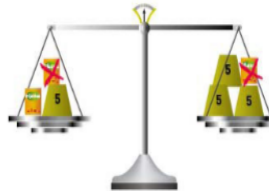
Figura 4.5: S12001b


### Ejemplo I.2

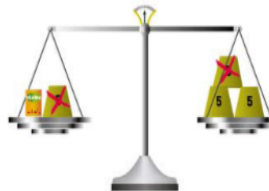
- Contexto:** En este problema se observa una balanza con 5 representaciones equivalentes. En dichas representaciones los objetos que equilibran esas balanzas son botes y pesas de 5 kg. Se observa que en cada representación se van quitando elementos de ambos lados de la balanza (para mantener el equilibrio) hasta llegar a la solución.
- Tareas matemáticas:** Relacione cada balanza con su respectiva ecuación y calcular el peso de cada bote.


4 Relaciona cada balanza con su respectiva ecuación escribiendo en el paréntesis la letra que corresponda. Después contesta las preguntas en tu cuaderno.

a) 

b) 

c) 

d) 


e) 

( )  $x + 5 - 5 = 15 - 5$   
 ( )  $2x + 5 - x = x + 15 - x$   
 ( )  $2x + 5 = x + 15$   
 ( )  $x = 10$   
 ( )  $x + 5 = 15$

Figura 4.6: S22006c

### Ejemplo I.3

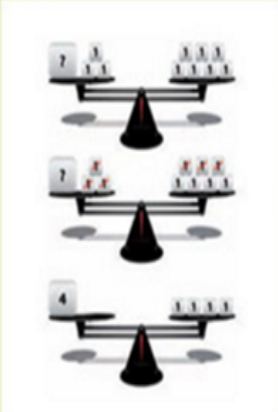
- **Contexto:** Se observa una balanza con tres representaciones diferentes (equivalentes), los objetos que se encuentran en los platillos de cada representación de la balanza son cubos grandes y chicos, los grandes de peso desconocido y los chicos que no tienen unidad de peso (sólo marca 1). También se muestran algunos ejemplos de resolución de ecuaciones meramente algebraicas.
- **Tareas matemáticas:** Ir quitando elementos de ambos lados de los platillos hasta encontrar el valor de la incógnita.

 Una **ecuación** es una igualdad algebraica entre dos expresiones, llamadas *membros*, en la que se desconoce algún valor, llamado *incógnita*, que es preciso conocer y para el cual se cumple la igualdad; por ejemplo, la igualdad

$$n + 5 = 8$$

es una ecuación cuyos miembros son  $n + 5$  y  $8$ , y cuya incógnita es  $n$ , donde si  $n = 3$ , se tiene que  $3 + 5 = 8$ . Frecuentemente, problemas de diversas disciplinas pueden ser planteados y resueltos como ecuaciones.

Un modelo que se utiliza para ilustrar el concepto de ecuación es el de una balanza en equilibrio en la que es preciso determinar un peso desconocido.



Representación simbólica

$$x + 3 = 7$$
$$x + 3 - 3 = 7 - 3$$
$$x = 4$$

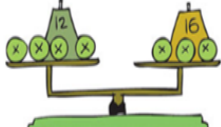
Los pasos que deben realizarse para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, corresponden a operaciones inversas a las operaciones que se presentan en la misma ecuación. Analiza los siguientes casos y responde las preguntas.

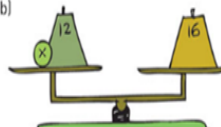
Figura 4.7: S12004e


### Ejemplo I.4


- Contexto:** Se presentan una balanza con 4 representaciones equivalentes (cambian al ir quitando objetos de ambos lados) equilibradas con bolas de peso  $x$  y con objetos de 4, 12 y 16 unidades desconocidas.
- Tareas matemáticas:** En cada transformación de las representaciones (después de aplicar propiedades de igualdad) escribir las acciones que se efectuaron y la ecuación resultante.

2) Escribe qué acciones se efectuaron en cada balanza y la ecuación que resulta.

a)  La balanza está en equilibrio y las bolas pesan lo mismo.  
Ecuación: \_\_\_\_\_

b)  Acción: \_\_\_\_\_  
Ecuación: \_\_\_\_\_

c)  Acción: \_\_\_\_\_  
Ecuación: \_\_\_\_\_

d)  Acción: \_\_\_\_\_  
Ecuación: \_\_\_\_\_

¿Las ecuaciones que anotaste son equivalentes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Figura 4.8: S12013i

### Ejemplo I.5


- Contexto:** Se presentan una balanza con diferentes representaciones equivalentes, las cuales están equilibradas con cubos verdes de peso desconocido y cubos naranja los cuales tampoco tienen un peso específico.
- Tareas matemáticas:** Ir quitando elementos de manera simultánea de ambos lados de la balanza sin que ésta pierda el equilibrio, hasta encontrar el valor de la incógnita.

Ahora se usará el método de la balanza para resolver la ecuación

$$5x + 4x + 4 = x + 6x + 16$$

¿Cuántas  $x$  se obtienen en el primer platillo?  
 ¿Cómo lo supiste? ¿Cuántas  $x$  se tienen en el segundo platillo?

¿Cuántas veces se pueden quitar simultáneamente pesos iguales a  $x$  de cada platillo, sin que se pierda el equilibrio?



¿Cómo se llegó a este estado de la balanza?  
 ¿Cómo se convirtió la ecuación inicial en la siguiente ecuación?


$$9x + 4 = 7x + 16$$

¿Cómo se obtuvo la siguiente ecuación?

$$2x + 4 = 16$$

¿Y la ecuación que sigue?  $2x = 12$

¿En cuántos grupos se deben dividir los objetos del lado derecho?



¿Cuál es la raíz de la ecuación?  
 ¿Cómo se puede comprobar que la raíz obtenida es correcta?




Figura 4.9: S22015

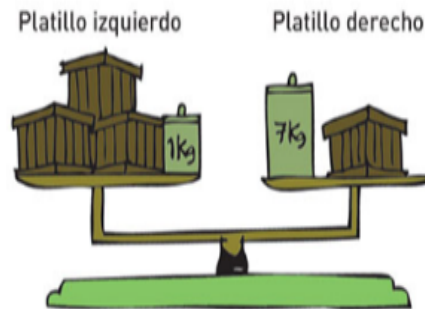
#### 4.4.1.2 Los autores preguntan explícitamente a los alumnos cuáles son acciones que no afectan el equilibrio

En este subgrupo mostramos dos ejemplos, la totalidad de los problemas de esta categoría pueden consultarse en la tabla del anexo B.

##### Ejemplo I.6

- **Contexto:** Se observa una balanza, los objetos que se encuentran en los platillos y que equilibran la balanza son cajas color café de peso desconocido, dos pesas una de de 1 kg, y la otra de de 7 kg.
- **Tareas matemáticas:** Subrayar las acciones que mantienen en equilibrio la balanza.

2 Subraya las acciones que mantienen la balanza en equilibrio.



- Quitar una caja del platillo izquierdo
- Quitar una caja de cada platillo
- Agregar una pesa de 7 kg del lado izquierdo y una caja del lado derecho
- Pasar la pesa de 1 kg del platillo izquierdo al derecho
- Cambiar la pesa de 7 kg por una de 6 kg y una de 1 kg
- Agregar una caja en cada platillo
- Quitar la pesa de 1 kg y cambiar la pesa de 7 kg por una de 6 kg
- Agregar tres cajas y una pesa de 1 kg en el platillo izquierdo, y una caja y una pesa de 1 kg en el derecho
- Intercambiar lo que está en los platillos
- Agregar una pesa de 3 kg en cada platillo

Figura 4.10: S12013e

### Ejemplo I.7

- **Contexto:** Se observa una balanza, los objetos que se encuentran en los platillos y que equilibran la balanza son botes de peso desconocido, pesas de 1 kg, y 3 kg.
- **Tareas matemáticas:** Subrayar las acciones que dejarían en equilibrio la balanza. Las medidas de las pesas están dadas en kilogramos y los botes pesan lo mismo.

## Solución de ecuaciones I

### PREGUNTA INICIAL

¿La ecuación  $x + 2 = 3$  y la ecuación  $2x + 6 = 9 - x$  tienen la misma solución?

- 1 Subraya las acciones que dejarían en equilibrio la balanza. Las medidas de las pesas están dadas en kilogramos y los botes pesan lo mismo.



- Pasar una pesa de 3 kg del platillo derecho al izquierdo
- Añadir 2 kg a cada platillo
- Quitar 1 kg a cada platillo
- Pasar un bote del platillo izquierdo al derecho
- Eliminar dos botes del platillo izquierdo y uno del derecho
- Quitar un bote de cada platillo
- Agregar un bote a cada platillo

Figura 4.11: S22006a

#### 4.4.1.3 Autores no tratan explícitamente las acciones que no afectan el equilibrio.

Este subgrupo complementa los dos subgrupos anteriores, es decir el autor no hace explícito el uso del modelo de la balanza.

#### Ejemplo I.8

- **Contexto:** Se observa una balanza, los objetos que se encuentran en los platillos y que equilibran la balanza son libros de peso desconocido y pesas de 1 kg.
- **Tareas matemáticas:** cuánto pesa cada libro.

En este ejercicio, el autor no indica al estudiante de manera explícita que debe resolver el problema utilizando el modelo de la balanza. Además, la distribución de libros y pesas en dos platos no corresponde a una situación de equilibrio.



Figura 4.12: S22006f

#### 4.4.2. Problemas que usan conocidos acertijos matemáticos

Aquí se clasifican los acertijos encontrados. Como bien se sabe, los acertijos están presentes desde hace muchos años y publicados en el libro de Samuel Loyd (1959). Los problemas tipo balanza aparecen por primera vez como acertijos y años después

se usarían para la educación matemática en particular para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones de primer grado. Samuel Loyd introdujo los acertijos de balanza para dar a los alumnos la oportunidad de resolver estos problemas de álgebra sólo con la manipulación de los objetos y usando razonamiento aritmético. En otras palabras, el método de solución no se basa en el uso de ecuaciones formuladas con diferentes símbolos para las incógnitas.

Los tres ejemplos que mostraremos a continuación (gatitos, balón a la mitad y ladrillo) fueron encontrados en los libros de secundaria, y a pesar de haber sido tomados; dos del libro de Samuel Loyd (1959) y el otro del libro de Gardner (1995) (donde éste hizo modificaciones al problema de Loyd), no fueron referenciados.

### **Ejemplo I.9**

- **Contexto:** Se observa una balanza con dos representaciones diferentes, puede notarse que los objetos que están en los platillos de la balanza son pesas de 3 kg, 5 kg, 10 kg, gatos grandes y gatos pequeños.
- **Texto original: Animalirretos,** los gatos grandes pesan más que los pequeños, pero todos los grandes pesan lo mismo, igual que todos los pequeños.
- **Tareas matemáticas:** Encontrar el peso de cada gato.

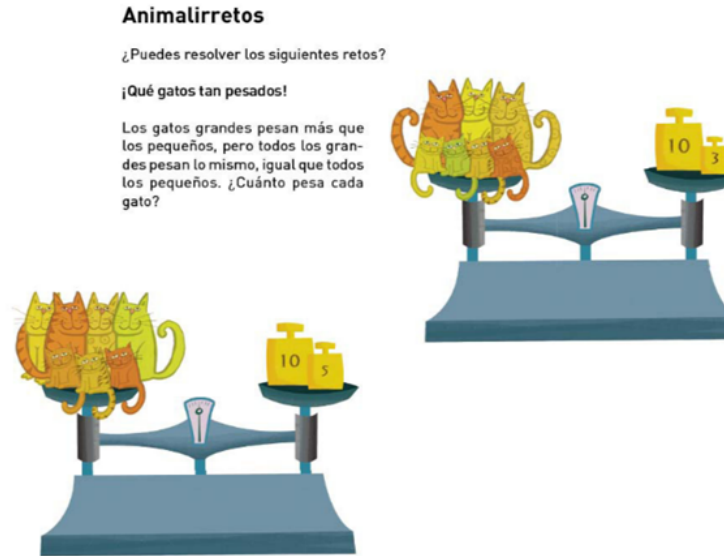


Figura 4.13: S22006g

### Ejemplo I.10

- **Contexto:** Se observa una balanza con medio balón y una pesa de  $1/2$  kg en el platillo izquierdo, y en el platillo derecho un balón.
- **Texto original:** El fiel de la balanza, un balón de fútbol pesa  $1/2$  kilogramo más la mitad de su propio peso.
- **Tareas matemáticas:** Encontrar el peso del balón y proporcionar argumentos que validen tu respuesta.

### Ejemplo I.11

- **Contexto:** Se observa una balanza con un ladrillo en uno de sus platillos, y tres cuartas partes de un ladrillo más una pesa de tres cuartos de libra en el otro platillo.
- **Texto original:** El peso de un ladrillo; observa la imagen, en el lado izquierdo de la báscula hay un ladrillo, en el lado derecho hay tres cuartos de ladrillo y una pesa de tres cuartos de libra. La báscula está equilibrada.
- **Tareas matemáticas:** Encontrar el peso del ladrillo.



Figura 4.14: S00163

#### 4.4.3. Problemas clasificados por el número de ecuaciones

En este grupo se clasifica respecto al número de representaciones diferentes de la balanza, en otras palabras la clasificación es respecto al número de ecuaciones lineales que se utilizan para resolver el problema, pueden ser 0, 1, 2, o hasta 3 ecuaciones. Las balanzas seleccionadas con 0 ecuaciones son las que nos ejemplifican el concepto de equilibrio y este concepto es fundamental para hacer la analogía con la igualdad en una ecuación lineal.

##### 4.4.3.1 Los problemas sin ecuaciones

El concepto de equilibrio cuando se habla de balanzas es de suma importancia ya que los platillos de la balanza de entrada están en equilibrio; para hacer la analogía de las ecuaciones lineales con la balanza es indispensable que los estudiantes entiendan este concepto. Los siguientes ejemplos ayudan al estudiante a entender esta definición.

##### Ejemplo I.12

- **Contexto:** Se presenta una balanza con 4 configuraciones diferentes y sobre los platillos de las balanzas se observan cubos de diferentes pesos, en la primera configuración se observa un cubo de 1.5 kg, en otra se observa otro cubo de 0.25 kg., en otra un cubo de 0.75 kg., y en la última se observa un cubo de 0.125 kg. También se observan varias pesas de diferentes tamaños debajo de cada configuración de la balanza.
- **Tareas matemáticas:** Subrayar la pesa que equilibre cada balanza. Sólo puedes usar una vez cada pesa.



Figura 4.15: S12004b

### Ejemplo I.13

- **Contexto:** Se observa una balanza con pesas de diferentes tamaños (de 0.5 kg y 0.25 kg) en su platillo izquierdo y el platillo derecho vacío, por otro lado se observan pesas de 1 kg,  $1/2$  kg,  $1/4$  kg y  $1/5$  kg.
- **Tareas matemáticas:** Colocar en el platillo derecho las pesas que equilibran la balanza.

1. Subraya la pesa que equilibre cada balanza.

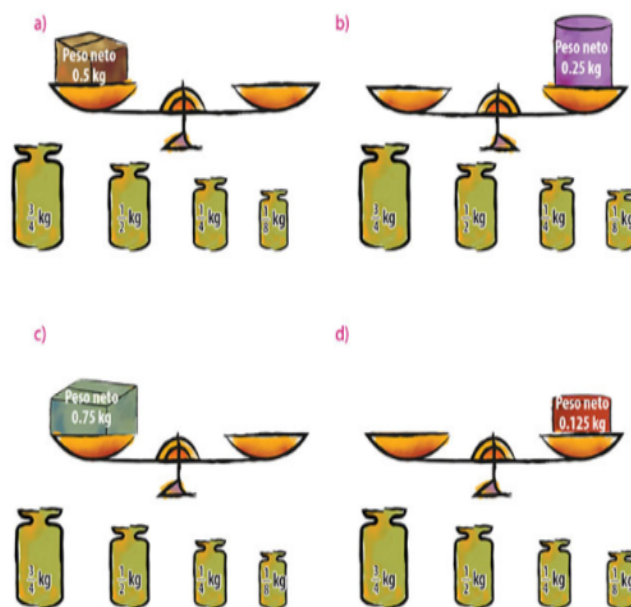


Figura 4.16: S12014

#### 4.4.3.2 Los problemas con 1 ecuación

Como sabemos una ecuación lineal es una igualdad que puede tener una o más variables o incógnitas cuyo exponente es igual a 1. Recordemos que las analogías entre el modelo de la balanza y las ecuaciones lineales son: manipular objetos en la balanza con hacer operaciones en la ecuación, ambos platillos de la balanza con ambos miembros de la ecuación y mantener el equilibrio en la balanza con mantener la igualdad en las ecuaciones. Aquí mostraremos algunos ejemplos de balanza que se resuelven con una ecuación de primer grado.

##### Ejemplo I.14

- **Contexto:** Se observa una balanza con un prisma color rojo y 6 cubos color naranja en su platillo izquierdo y 8 cubos color naranja en su platillo derecho.
- **Tareas matemáticas:** Encontrar cuántos cubos de color naranja pesarán igual que un prisma de color rojo. Responder preguntas que nos reafirman las propiedades de igualdad y equilibrio en las ecuaciones y las balanzas respectivamente.

4. Observa la siguiente balanza.
- a) ¿Cuáles de las siguientes pesas pondrías en el otro plato para mantener el equilibrio?



- b) Escribe tres juegos distintos de pesas de esta colección que sirvan para nivelar la balanza.

Figura 4.17: S00137b

### Ejemplo I.15

- **Contexto:** Se observa una balanza con dos gatos y seis ladrillos en el platillo izquierdo, y en el platillo derecho se colocaron 15 ladrillos
- **Tareas matemáticas:** ¿Qué pesa más un gato o tres ladrillos? ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representan la situación?.  $6+2x = 10$ ;  $2x*6 = 15$ ;  $2x-6 = 15$ . Resuelve la ecuación y determina el peso del gato.

## Ecuaciones de primer grado



1. Observa con atención la siguiente figura.



Figura 4.18: S12004c

### 4.4.3.2 Los problemas con 2 ecuaciones

Las ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones son un conjunto de igualdades algebraicas en las que aparecen una o varias incógnitas elevadas a la potencia 1. Los ejemplos de balanza que se muestran a continuación se pueden resolver con un sistema de ecuaciones lineales. El resto de los ejemplos los pueden encontrar en el anexo B.

#### Ejemplo I.16

- **Contexto:** Se observa una balanza con 3 representaciones diferentes, los objetos que equilibran la balanza y se encuentran en los platillos son: naranjas, sandías y piñas.
- **Tareas matemáticas:** Se pide equilibrar las balanzas con las naranjas.

#### Ejemplo I.17

- **Contexto:** Se observa una balanza con 2 representaciones diferentes, los objetos que equilibran la diferentes representaciones de la balanza y se encuentran en los platillos son: calabazas, melones y una pesa de 1 kg.
- **Tareas matemáticas:** Encontrar el peso de cada calabaza y cada melón.

En la siguiente balanza cada ladrillo pesa un kilogramo y se encuentra en equilibrio.

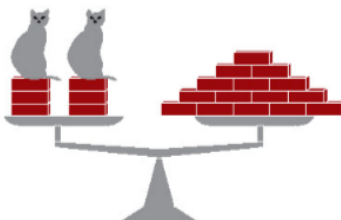


Figura 4.19: S00135f

1. ¿Cuántas naranjas hacen falta para equilibrar las balanzas?

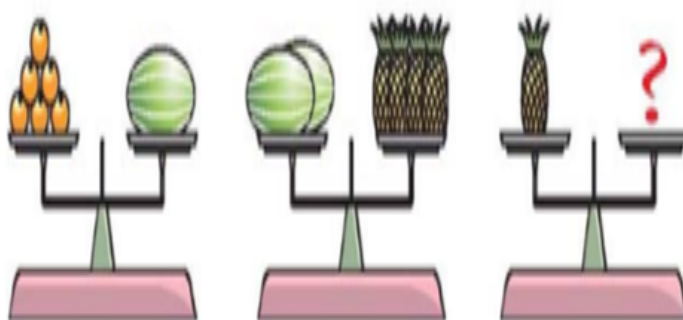


Figura 4.20: S00148d

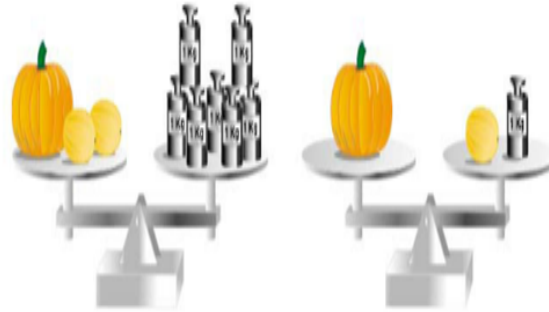
#### 4.4.3.4 Los problemas con 3 ecuaciones

Las ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones son un conjunto de igualdades algebraicas en las que aparecen una o varias incógnitas elevadas a la potencia 1. Los ejemplos de balanza que se muestran a continuación se pueden resolver con un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas. El resto de los problemas de este subgrupo pueden ser encontrados en el anexo B.

##### Ejemplo I.18

- **Contexto:** Se observa una balanza con 3 representaciones diferentes, los objetos que equilibran la balanza y se encuentran en los platillos son: figuras geométricas (rombos, círculos y tréboles).

b) Las balanzas están en equilibrio y las pesas son de un kilogramo.



i) Si las frutas del mismo tipo pesan lo mismo, ¿cuánto pesa cada calabaza y cada melón?

Cada calabaza pesa \_\_\_\_\_ y cada melón \_\_\_\_\_

Figura 4.21: S22006i

- **Tareas matemáticas:** En la tercera balanza se observan en el platillo izquierdo 5 tréboles y en el otro platillo 5 círculos y una interrogación, se pide saber cuántos rombos hay que colocar en el lugar de la interrogación.

¿Cuántos rombos necesitamos para equilibrar la balanza?

**a.** ¿Podrías a simple vista contestar la pregunta?

**b.** Representa algebraicamente lo que se encuentra en la primera balanza:  
 $x + 3y = 2z$  donde "x" son rombos, "y" son círculos y "z" son los tréboles.

**c.** Ahora, haz lo mismo con la segunda balanza, utiliza los mismos valores para cada figura.

**d.** Si sumas la primera balanza con la segunda, ¿cómo quedaría la suma de expresiones algebraicas? Representa la suma de forma vertical. Escribe el resultado en una hoja y compáralo con el de algún compañero.

**e.** ¿Cuántos rombos obtuviste de la suma de las dos balanzas? \_\_\_\_\_, ¿cuántos círculos? \_\_\_\_\_, ¿cuántos tréboles? \_\_\_\_\_

**f.** Tal vez ahora ya puedan deducir la respuesta al acertijo. ¿Cuántos rombos necesitamos para que la tercera balanza se equilibre? \_\_\_\_\_

Figura 4.22: S00145a

#### 4.4.4. Problemas de la balanza con expresiones algebraicas o números

Estos ejemplos violan la razón didáctica de usar el modelo de la balanza. También en esta sección presentamos los problemas que tienen errores principalmente de concepto, es decir se maneja incorrectamente el término equilibrio, o se llega a sistemas de ecuaciones sin solución como es el caso del problema artificial presentado en la hoja de trabajo.

##### Ejemplo I.19

- **Contexto:** Se presentan una balanza con expresiones algebraicas en los platillos.
- **Tareas matemáticas:** Encontrar el valor de  $x$  que hace que la balanza esté equilibrada. Para empezar una balanza nos sirve para comparar masas de objetos, en esta balanza se observan expresiones algebraicas en lugar de objetos concretos, lo cual confunde al estudiante. Es evidente que este evento no sucede en la vida real. Respecto a los datos éstos son abstractos, no tiene sentido escribir expresiones algebraicas (y mucho menos con coeficientes negativos) en los platillos de la balanza porque no existe relación alguna entre el modelo de la balanza y la solución de este problema.

**CONSTRUYE**

Analiza el ejemplo anterior y explica

1. ¿Para qué valor de  $x$  la balanza está equilibrada?
2. ¿Qué tipo de ecuaciones se utilizan en las situaciones anteriores?
3. ¿Qué procedimiento empleaste para resolverlas?
4. Observa la siguiente balanza:

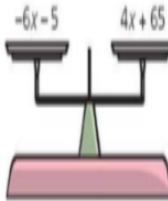


Figura 4.23: S00148

**Ejemplo I.20** Problemas con error de concepto (equilibrio)

- **Contexto:** Se observa una balanza con dos representaciones diferentes, puede notarse que los objetos que están en los platillos de la balanza son cubos y cilindros.
- **Tareas matemáticas:** Poner y quitar objetos de ambos platillos de la representación, ya que lo que se pone o quita de un lado se tiene que hacer del otro lado para conservar el equilibrio.



**Error:** No es posible mostrar una balanza que según el autor está en equilibrio y que al ir quitando objetos del mismo peso en ambos lados de los platillos se supone que debe seguir manteniendo el equilibrio (por las propiedades de igualdad). Pero en la segunda representación de la balanza si quitamos un cilindro de cada lado nos quedarían tres bloques de un lado y 0 del otro, lo cual inclinaría a la balanza contradiciéndose así la afirmación del autor donde argumenta que la primera representación de la balanza estaba en equilibrio.

**Datos:** Son contradictorios en la representación de las balanzas ya que el autor afirma que están en equilibrio, lo cual es falso.

**Pregunta:** Se practican las propiedades de igualdad para las ecuaciones de primer grado (reflexiva, simétrica, transitiva). El problema es que la representación de la balanza que se usa nos lleva a una contradicción.

## 4 Algo por aprender

Se denomina **ecuación** a una igualdad de expresiones algebraicas que contiene una o más cantidades desconocidas llamadas **incógnitas**, las cuales se representan con literales. Por otra parte, es una convención llamar **coeficiente** a cada número explícito. Las ecuaciones son como una balanza:

Tienen dos lados:	Tienen dos platillos:
$3 + x = 15 - x$	
Si algo se añade o quita de un lado se debe hacer lo mismo del otro lado:	Lo que se pone o quita de un lado se tiene que hacer del otro lado para conservar el equilibrio:
$(-3) + 3 + x = 15 - x + (-3)$ $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(12)$	

Lo anterior se refiere a propiedades de las igualdades:

Es claro que  $a = a$  (propiedad reflexiva de la igualdad)

Si  $a = b$ , también es cierto que  $b = a$  (propiedad simétrica de la igualdad)

Si  $a = b$  y  $a = c$ , también será cierto que  $a = c$  (propiedad transitiva de la igualdad)

Si  $a = b$ , también es cierto que  $b - c = a - c$

Si  $a = b$ , también es cierto que  $b + c = a + c$

Si  $a = b$ , también es cierto que  $b(c) = a(c)$

Si  $a = b$ , también es cierto que  $\frac{b}{c} = \frac{a}{c}$

Figura 4.24: S22020

### Ejemplo I.21

- **Contexto:** Se observa una balanza con tres representaciones diferentes, puede notarse que los objetos que están en los platillos de la balanza son pesas de 3 kg, 5 kg y cilindros.
- **Texto original:** Si en el platillo de la balanza se coloca una pesa de 5 kg y otra de 3 kg, y en el otro platillo dos de 5 kg y una de 3 kg, no hay equilibrio. **Pero si se coloca una lata de masa desconocida en cada uno de los platillos de la balanza, ésta casi se equilibra.** Finalmente se logra el equilibrio colocando sólo una lata en uno de los platillos.
- **Tareas matemáticas:** Juan tiene varias latas que no indican su masa y en cierta ocasión mostró a unos amigos las tres representaciones de la balanza tratando de impresionarlos.

## 1 Comienza a pensar

Juan tiene varias latas que no indican su masa y en cierta ocasión mostró a unos amigos lo siguiente tratando de impresionarlos:



Les explicó: "Si en el platillo de la balanza se colocan una pesa de 5 kg y otra de 3, y en el otro platillo dos de 5 kg y una de 3, no hay equilibrio. Pero si se coloca una lata de masa desconocida en cada uno de los platillos de la balanza, esta casi se equilibra. Finalmente se logra el equilibrio colocando solo una lata en uno de los platillos".

Figura 4.25: S22020a

**Error:** En la segunda representación de la balanza se encuentra un error de concepto que tiene que ver con las propiedades de equilibrio en la balanza e igualdad en las ecuaciones lineales, es decir si en la primera representación de la balanza se coloca un cilindro del mismo peso en ambos platillos de la balanza ésta no debe sufrir ningún movimiento, sin embargo el autor argumenta que la balanza casi se equilibra.

## Segunda Clasificación

Aquí se exploran las cuestiones relacionadas con la teoría de Palm. Específicamente en esta clasificación tratamos con los aspectos EVENTO y DATOS. Recordemos que en el aspecto EVENTO un requisito fundamental para la simulación de una situación real es que el acontecimiento ha ocurrido o tiene una ocasión justa de ocurrir extraescolarmente, y en el aspecto DATOS se contemplan varios subaspectos que se refieren a que los datos o la información del problema estén disponibles, sean reales y específicos. Para esto, se forman dos grupos de problemas:

### 4.4.5. Problemas que intentan dar la idea de que el modelo de la balanza se puede usar en eventos reales

Los problemas que aparecen en este grupo son aquellos donde los autores pretenden dar la idea al estudiante de que pueden utilizar el modelo de la balanza para resolver directamente un problema dado, en un evento de la vida extraescolar. De acuerdo a nuestro marco teórico esto es un error, ya que el uso del modelo de la balanza se le sugiere al profesor en el tema de ecuaciones, para facilitar en el estudiante el aprendizaje del concepto de variable, ecuación y de las propiedades de igualdad. Esto nos lleva a que todos los problemas ubicados en este grupo no cumplan con el aspecto EVENTO propuesto en la teoría de Palm (2008) y por lo tanto resultarán ser problemas no auténticos o artificiales.

#### Ejemplo II.1

- **Contexto:** Se presentan una balanza equilibradas con maderas de diferentes pesos, de 3 kg, de 2 kg y otras de peso desconocido.
- **Tareas matemáticas:** Encontrar el peso de las maderas color verde (peso desconocido).
- **Evento:** No es posible ya que si los niños están en campamento, se encuentran en el bosque o en algún lugar al aire libre y en esos lugares es imposible recolectar maderas de forma y tamaño perfecto como se muestran en la balanza.

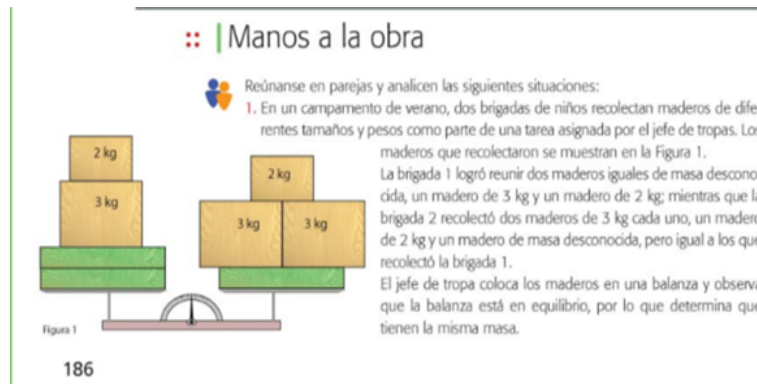


Figura 4.26: S22010

### Ejemplo II.2

- **Contexto:** Se observa una balanza con dos representaciones diferentes y equilibradas, las representaciones de esta balanza están equilibradas con gallinas, cerdos y una pesa de 13 (sin especificar unidades de peso).
- **Tareas matemáticas:** Encontrar la masa de cada cerdo y cada gallina.

4. En una granja hay cerdos y gallinas. Si las balanzas están en equilibrio, plantea las ecuaciones y encuentra mediante tablas la masa de cada cerdo y de cada gallina.




Figura 4.27: S00148e




- **Evento:** No es un evento que se presente en la vida extraescolar. No tiene una razón justa de ocurrir, no existe un artefacto con las características que se observan, además de que los animales no se prestarían al experimento.

### Ejemplo II.3

- Contexto:** Se observa una balanza equilibrada con sillas, en uno de los platillos hay un bloque de 32 sillas más 3 bloques de  $x$  sillas, en el otro platillo hay un gran bloque de 152 sillas (todo esto según el problema).
- Tareas matemáticas:** Encontrar el valor de la incógnita la cual representa a un número de sillas.

Baltasar te presenta un procedimiento para resolver ecuaciones usando balanzas en equilibrio.  
 En una fábrica se han producido 152 sillas, de las cuales 32 fueron hechas por Abelardo, y el resto las hicieron los otros 3 empleados. ¿Cuántas sillas hizo cada uno de los 3 empleados si hicieron la misma cantidad de sillas cada uno?  
 ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la incógnita? ¿Cómo se pueden representar las relaciones entre los datos y la incógnita?  
 Analiza la imagen de la derecha y contesta: ¿cómo puedes justificar que  $3x + 32 = 152$  es la ecuación que representa el problema? ¿Cuál es la solución a este problema?  
 Baltasar usa el método de la balanza, representado en las ilustraciones de abajo, para resolver la ecuación  $3x + 32 = 152$ .



<p>¿Qué cantidad se puede quitar a cada platillo para simplificar la ecuación representada?</p> 	<p>¿En cuántas partes se tiene que dividir el contenido de cada platillo para buscar la solución?</p> 	<p>¿Cómo se obtiene el valor de la incógnita?</p> 
---	---	---

¿Cuáles son las ecuaciones representadas en las ilustraciones de las balanzas?  
 Se obtiene la solución  $x = 40$ . Cada uno de los empleados hizo 40 sillas.

Figura 4.28: S12011

- Evento:** El evento no es posible, esto no ocurre en la vida real, un empresario no utilizaría una balanza para saber la productividad de sus trabajadores, además es imposible apilar 152 sillas en cada lado de la balanza. La balanza es un artefacto concreto que se utiliza para comparar masas de objetos, en este caso no se habla de unidad de peso, es decir no se utiliza la balanza de manera correcta. Se puede saber cuántas sillas hizo cada trabajador, pero no por el modelo de la balanza si no resolviendo directamente la ecuación de manera algebraica.

### Ejemplo II.4

- **Contexto:** Se observa una balanza equilibrada con esferitas y cubos de oro, en el platillo izquierdo hay tres cubos más ocho esferitas, en el platillo derecho hay cuatro cubos más tres esferitas.
- **Texto original:** En una revista que trata sobre movimientos y transacciones de oro, un comerciante de este metal vio que nuevas presentaciones de tres cubitos más ocho esferitas de oro es igual a cuatro cubitos y tres esferitas de oro. Como el comerciante necesita hacer intercambios de cualquier cantidad de cubos y esferas se pregunta, ¿Cuántas esferitas equivalen a un cubito de oro?. Ayúdale con la respuesta.

**Lección 26 Ecuaciones lineales**


**Problema de investigación**

En una revista que trata sobre movimientos y transacciones de oro, un comerciante de este metal vio que nuevas presentaciones de tres cubitos más ocho esferitas de oro es igual a cuatro cubitos y tres esferitas de oro (figura 4.1).



Figura 4.1  
Equivalencias entre piezas de oro

Como el comerciante necesita hacer intercambios de cualquier cantidad de cubos y esferas se pregunta: ¿Cuántas esferitas equivalen a un cubito de oro? Ayúdale con la respuesta.




1. Describe el razonamiento que seguiste para encontrar la solución.
2. Si  $x$  es el peso en gramos de un cubito y la esfera pesa 1 g, ¿qué ecuación expresa la relación de la primera balanza?
3. ¿Cuál es la solución?

Figura 4.29: S22007a

- **Evento:** El evento no es posible, esto no ocurre en la vida real, ningún comerciante de este metal (oro) va a utilizar una balanza para saber este tipo de equivalencias. La balanza es un artefacto concreto que se utiliza para comparar masas de objetos, en este caso no se habla de unidad de peso, es decir no se utiliza la balanza de manera correcta.

### Ejemplo II.5

- **Contexto:** Se observa una balanza equilibrada con tornillos y pesas de 1 kg, en el platillo izquierdo hay seis frascos de tornillos más dos pesas de 1kg, en el platillo derecho hay tres frascos de tornillos más seis pesas de 1kg.
- **Texto original:** Mi abuelito me contó que cuando era niño los tornillos se pesaban en básculas en donde de un lado ponían la mercancía y del otro una pesa de calibración para que, a la hora que se equilibrara la balanza, supieran el peso exacto de los tornillos. Las pesas tenían valores de 200 g, 500 g, 750 g, y 1 kg. Observa la balanza en equilibrio y responde la pregunta.
- **Tareas matemáticas:** ¿Qué pesa menos, una bolsa de tornillos o una de las pesas que aparecen en la imagen?.

 **Actividad individual**

Mi abuelito me contó que cuando era niño los tornillos se pesaban en básculas en donde de un lado ponían la mercancía y del otro una pesa de calibración para que, a la hora que se equilibrara la balanza, supieran el peso exacto de los tornillos. La pesas tenían valores de 200 g, 500 g, 750 g y 1 kg. Observa la balanza en equilibrio y responde las preguntas.

- ▶ ¿Qué pesa menos, una bolsa de tornillos o una de las pesas que aparecen en la imagen?
- ▶ ¿De cuánto es cada pesa?
- ▶ ¿Cuánto pesa una bolsa de clavos?
- ▶ ¿En este caso cuál es nuestra incógnita?
- ▶ ¿Qué ecuación representa la balanza?




Figura 4.30: S00145c

- **Evento:** El evento no es posible, esto no ocurre en la vida extraescolar, un comerciante simplemente pesaría la bolsa de clavos en una báscula. Cada bolsa de clavos pesa 1.33 kg esta respuesta no corresponde a un número entero.

#### 4.4.6. Problemas que presentan datos irreales o datos contradictorios

La clasificación de estos problemas se hace con base a los datos proporcionados en los problemas, es decir los que tienen datos irreales o datos contradictorios. En este aspecto cuando tenemos datos irreales se complica obtener la solución del problema, ya que no podemos comparar nuestros resultados con la vida real.

##### Ejemplo II.6

- **Contexto:** Se presenta una balanza con tres representaciones diferentes, los objetos que se encuentran en los platillos de cada representación de la balanza son peras, piñas y limones.
- **Tareas matemáticas:** Las dos primeras representaciones de la balanza están en equilibrio y pide encontrar cuántos limones se necesitan para equilibrar una piña, en la tercera representación de la balanza.

Los datos nos llevan a una solución con fracciones. Además una pera más 2 limones no es normal que pesen igual que una piña por más pequeña que ésta sea. Específicamente: una piña pesa en promedio de 1 kg a 2.5 kg, una pera pesa en promedio de 150 g a 220 g, un limón pesa en promedio de 50 g a 200 g. Si tomamos la piña más pequeña y la pera y los limones más grandes tendríamos que:  $\text{Piña} = \text{Pera} + \text{Limon} + \text{Limon}$ ,  $1 \text{ kg} = 220 \text{ g} + 200 \text{ g} + 200 \text{ g}$ ,  $1 \text{ kg} = 620 \text{ g}$  lo cual es falso, por lo tanto la segunda representación de la balanza no es correcta.

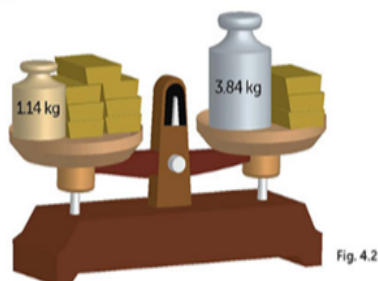


Figura 4.31: S22006

### Ejemplo II.7

- **Contexto:** Se observa una balanza equilibrada con 10 barras de metal, una pesa de 1.14 kg y otra de 3.84 kg.
- **Tareas matemáticas:** Escribir la expresión algebraica que represente a la balanza, escribir cuántas barras de metal se pueden quitar como máximo de cada lado de la balanza y finalmente determinar la masa de cada barra de metal.
- Los datos de este problema no son recomendados para aplicar el modelo de la balanza, Filloy (1999) y el libro del maestro de secundaria (2011) recomiendan que los coeficientes de la ecuación y el resultado sean enteros positivos. Por otro lado no se conoce que vendan pesas con esa masa en específico y por lo tanto serían objetos (datos) que no son reales lo cual contradice la teoría de Palm.

b) Los pesos de la balanza de la figura 4.2 son iguales, por lo que dicha balanza está en equilibrio.



los procedimientos que se usan en la página con tus compañeros y con tu profesor, ¿les sirvieron para aclarar dudas? Fecha y hora de consulta: 5 de octubre de 2012 a las 20:16 h.

- Escriban una expresión algebraica que represente que la balanza está en equilibrio. \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas barras de metal se pueden quitar como máximo de cada lado de la balanza para que siga en equilibrio? Escriban una expresión algebraica que represente la balanza después de quitar esas barras de metal. \_\_\_\_\_
- Comparen las dos expresiones algebraicas anteriores e indiquen cómo se obtiene una a partir de la otra. \_\_\_\_\_
- A partir de lo que hasta ahora se ha visto, determinen cuál es la masa de cada barra. \_\_\_\_\_

185

Figura 4.32: S220017b

## Capítulo 5

# Investigación con los alumnos

Uno de nuestros objetivos es estudiar el efecto que tiene el uso del modelo de la balanza en los estudiantes de secundaria, en especial explorar cuál es su reacción cuando se le presentan dos tipos de problemas; los auténticos y los artificiales. Para este fin, seleccionamos dos muestras de estudiantes, una de tercero de secundaria y la otra de primero de preparatoria. La razón de la elección de los estudiantes de preparatoria se debe a que el tema de ecuaciones lineales se aborda nuevamente en este nivel, además del hecho de ser egresados recientes del nivel secundaria. También nos interesa hacer comparaciones entre ambos niveles.

En la primera sección de este capítulo presentamos la hoja de trabajo diseñada para nuestro estudio experimental y en la segunda sección mostramos el análisis de los resultados de la aplicación de la hoja de trabajo.

### 5.1. Hoja de trabajo

La hoja de trabajo (Figuras 5.1 y 5.2), consiste de dos problemas distribuidos en dos cuartillas y seleccionados de los libros de texto Baltazar y coautores (2002) e Iturrave (2014). El primer problema, que corresponde a la primera referencia, fue elegido para utilizar de manera correcta el modelo de la balanza y el segundo problema, de la segunda referencia, tiene la característica de no autenticidad. Para simular lo que podría pasar normalmente en las aulas se respetó textualmente la propuesta de los autores, salvo la adición de la pregunta A ubicada al inicio del primer problema, donde se pregunta al estudiante cuándo considera que una balanza se encuentra en equilibrio. La idea de adicionar esta pregunta es motivada de nuestra revisión donde encontramos varios autores que dan por hecho que los estudiantes tienen claro el concepto de equilibrio. La hoja de trabajo se implementó en 113 estudiantes del tercer año de la Secundaria

Técnica No. 60 y en 125 estudiantes de primer año de la preparatoria Lic. Benito Juárez García de la BUAP.

**Balanzas en equilibrio: Método de la balanza para resolver ecuaciones**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_ Edad \_\_\_\_  
 años y \_\_\_\_ meses  
 Escuela \_\_\_\_\_ Población \_\_\_\_\_ Sexo  
 (F\_) (M\_)

1) La balanza de la figura 4.1 esta en equilibrio. La masa de los jarrones no se conoce pero se sabe que es la misma.



Figura4.1. Balanza en equilibrio.

A. En general, ¿Cuándo crees que una balanza se encuentra en equilibrio?

\_\_\_\_\_

B. Subrayen, de las siguientes acciones, las que mantendrán la balanza en equilibrio

- (a) Pasar uno de los jarrones del lado derecho al lado izquierdo.
- (b) Quitar un jarrón de cada lado.
- (c) Cambiar uno de los jarrones por una barra de 500g en el lado derecho.
- (d) Quitar el mismo número de barras de 500g en ambos lados.
- (e) Quitar una pesa de 700g de ambos lados.
- (f) Quitar dos pesas de 500g de ambos lados.

C. Completen la siguiente ecuación que representa la balanza en equilibrio. El miembro de la izquierda representa las pesas del lado izquierdo de la balanza y el miembro de la derecha representa el lado derecho. Se utilizará la letra *j* para representar la masa de un jarrón.

$$j + 1950 + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + 1100 + 700$$

¿Qué sucede con la igualdad si se restan 1800g en ambos miembros de la ecuación?

\_\_\_\_\_.

Figura 5.1: Hoja de trabajo, problema 1.

2) Al estudiar el tema de propiedades de la materia en la clase de ciencias, Rocío y sus compañeros trataron de calcular la masa de algunos cuadernos y libros. Para evitar errores consiguieron cuadernos nuevos y libros iguales. Lograron en la balanza los arreglos que se muestran en la Figura 2.



Figura 2.

Analicen la Figura 2 y a partir de ella respondan:

A. ¿Qué procedimiento pueden emplear para saber el peso de cada objeto de la balanza?

\_\_\_\_\_

B. ¿Cuánto pesa cada libro y cada cuaderno?

Peso de cada libro: \_\_\_\_\_

Peso de cada cuaderno: \_\_\_\_\_

C. Ahora, simbolicen algebraicamente lo que se tiene en cada balanza.

Balanza 1: \_\_\_\_\_

Balanza 2: \_\_\_\_\_

D. Resuelva algebraicamente el sistema de ecuaciones obtenido.

Conclusion: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Figura 5.2: Hoja de trabajo, problema 2.

## 5.2. Resultados

Después de analizar las distintas respuestas de la hoja de trabajo de los estudiantes, se pudieron identificar cuatro grupos en los que se ubican todas las respuestas a la pregunta **¿Cuándo crees que una balanza se encuentra en equilibrio?** Los grupos identificados son:

- (A) Igualdad de masas (pesos) + descripción correcta de la posición de los platos.
- (B) Igualdad de masas.
- (C) Descripción correcta de la posición de los platos.
- (D) Respuestas confusas o sin respuestas.

Un ejemplo de las respuestas que dieron los estudiantes a cada grupo es el siguiente.

- (A) Cuando ambos platones que sostiene los objetos se encuentran a la misma altura o nivel. El peso de los objetos es el mismo de cada lado.
- (B) Cuando se tiene el mismo peso en ambos lados de la balanza.
- (C) Cuando se encuentran las dos bases en la misma altura.
- (D) Cuando los objetos de cada lado de la balanza se encuentran iguales.

Del análisis de todas las respuestas podemos observar que los estudiantes que dieron respuestas ubicadas en el grupo A tienen muy claro lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio y se espera que tengan los mejores resultados en el resto de las preguntas.

Los alumnos que dieron respuestas en el grupo B tienen idea de lo que significa el equilibrio en la balanza, y se espera que estos alumnos puedan contestar bien el resto de las preguntas.

Los alumnos que escribieron respuestas tipo C no manejan los conceptos de la masa o del peso. Se espera que sus resultados posteriores no sean del todo correctos. Los estudiantes que dieron respuestas tipo D no tienen idea de lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio, por lo tanto se espera que el resto de las respuestas no sean correctas.

La tabla 5.1 nos muestra los resultados de los estudiantes con respecto a la primera pregunta que tiene que ver con el concepto de balanza en equilibrio.

Respuesta	Secundaria	Preparatoria
A: Igualdad de masas + descripción correcta de la posición de los platos	2	6
B: Igualdad de masas	66	88
C: Descripción correcta de la posición de los platos	12	18
D: Respuestas confusas o sin respuestas	33	13
<b>TOTAL</b>	<b>113</b>	<b>125</b>

Tabla 5.1. Comparativa secundaria-preparatoria (pregunta 1).

En los resultados de secundaria obtuvimos sólo 2 alumnos (1.76 %) que tienen claro lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio; 66 alumnos (58.40 %) tienen idea de lo que significa el equilibrio en la balanza; 12 alumnos (10.61 %) no manejan los conceptos de masa o peso; 33 alumnos (29.20 %) no tienen idea del significado del equilibrio de la balanza.

En el caso de preparatoria tenemos 6 alumnos (4.8 %) que tienen claro el significado del equilibrio en la balanza; 88 alumnos (70.4 %) tienen sólo una idea de lo que significa; 18 alumnos (14.4 %) no manejan los conceptos de masa o peso y 13 alumnos (10.4 %) no tienen idea de lo que significa el equilibrio de la balanza. De estos resultados concluimos que los estudiantes de preparatoria tienen mayor claridad del concepto de equilibrio en la balanza lo que se ve reflejado en los resultados finales.

<b>PRIMER PROBLEMA (AUTÉNTICO)</b>			
ALUMNOS QUE RESOLVIERON EL PROBLEMA		ALUMNOS QUE NO LO RESOLVIERON	
SECUNDARIA	PREPARATORIA	SECUNDARIA	PREPARATORIA
11	56	102	69
9.73%	44.8%	90.27%	55.2%

<b>SEGUNDO PROBLEMA (ARTIFICIAL)</b>			
ALUMNOS QUE IDENTIFICARON LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA		ALUMNOS QUE NO LA IDENTIFICARON	
SECUNDARIA	PREPARATORIA	SECUNDARIA	PREPARATORIA
1	15	112	110
0.88%	12%	99.12%	88%

Tabla 5.2. Comparativas secundaria-preparatoria

La tabla 5.2 nos muestra el resto de los resultados de los estudiantes sobre la hoja de trabajo. Como podemos observar en la tabla, el problema auténtico lo resolvieron de manera correcta 11 estudiantes de secundaria y 56 de preparatoria, y de manera incorrecta 102 de secundaria y 69 de preparatoria. En el caso del problema artificial 1 alumno de secundaria y 15 de preparatoria se dieron cuenta del sistema sin solución o se confundieron, por otro lado 102 de secundaria, y 110 de preparatoria no se dieron cuenta de la no autenticidad del problema. A continuación vamos a mostrar algunos de los resultados sobre el problema artificial.

Por ejemplo, el alumno de secundaria que identificó el error del problema artificial, al pasar del modelo de la balanza a las ecuaciones, primero escribe las expresiones algebraicas sin hacer reducciones de términos semejantes y posteriormente va eliminando una a una las variables o términos iguales de ambos lados de la ecuación de tal manera que se mantenga la igualdad. Esta forma de escribir las ecuaciones y de ir operando, es idéntica a la forma de representar los objetos en la balanza y de ir quitando objetos en ambos platillos. A continuación se describe la respuesta de este estudiante.

Expresa las dos ecuaciones de manera algebraica como sigue.

- $L + L + C + C = L + L + L + L + 125,$
- $L + L + C + C + C + 50 = C + C + C + C + C,$

Ecuaciones simplificadas:

- $C + C = L + L + 125,$
- $L + L + 50 = C + C$

**Texto original del estudiante:** *El resultado no se logra obtener porque se contradice, si  $L + L + 50 = C + C$ , dice que es equivalente  $C + C$  a  $L + L + 50$  pero en el primero es  $C + C = L + L + 125$  dice que  $L + L + 125$  equivale a  $C + C$  se contradicen los términos.*

Los resultados en preparatoria nos muestran que el 44.8% de los estudiantes pudieron resolver bien el problema auténtico, sin embargo el 88% de estos alumnos no pudieron resolver el problema artificial y en el 12% se encuentran los estudiantes que pudieron identificar la no autenticidad del problema y los que se mostraron confundidos. Los siguientes son algunos ejemplos de las reacciones de los estudiantes.

En preparatoria un estudiante responde al problema artificial expresando las dos ecuaciones lineales de manera algebraica como sigue.

- $2L + 2C = 4L + 125g$
- $2L + 3C + 50g = 5C$

Para simplificar las ecuaciones en este paso el estudiante resta a cada miembro de la primera ecuación el término  $2L$  y de esta manera mantiene la igualdad en la ecuación. Por otro lado, resta el término  $3C$  de cada miembro de la segunda ecuación.

- $2L + 2C - 2L = 4L + 125g - 2L$

- $2L + 3C + 50g - 3C = 5C - 3C$

Ecuaciones simplificadas:

- $2C = 2L + 125g$

- $2L + 50g = 2C$

**Texto original del alumno:** *Es imposible responder un problema que nos da datos contradictorios como éste, lo único que es seguro es que un cuaderno pesa más que un libro pero no se puede calcular ningún peso preciso.*

Los siguientes alumnos contestaron bien el primer problema y plantearon el sistema de ecuaciones del segundo problema de manera correcta. Sin embargo, sus conclusiones para el segundo problema fueron las siguientes:

- a) El problema me confundió un poco, sobre todo en la ecuación, creo que no la planteé de manera correcta y al resolverlo me confundió.*
- b) En este problema se me dificultó un poco la resolución del sistema de ecuaciones ya que en mis resultados me da por ejemplo:  $0 = 75$ .*
- c) No se puede resolver porque en la primera balanza 2 libretas equivalen a 2 libros y 125g y en la segunda 2 libretas equivalen a 2 libros y 50g. No se llega a una igualdad y por ello no tiene solución.*

Comparando los resultados de la primera y la segunda tabla, los estudiantes que dieron respuestas ubicadas en el grupo A tienen muy claro lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio y el 50% (1) de los alumnos de secundaria contestó bien los dos problemas y el 100% de los de preparatoria también respondieron de manera correcta toda la hoja de trabajo.

Los alumnos que dieron respuestas en el grupo B tienen idea de lo que significa que una balanza se encuentre en equilibrio, y respecto al primer problema solamente el 16.66% de los alumnos de secundaria lo contestaron adecuadamente y en preparatoria el 63.63% también respondió correctamente la pregunta.

# Conclusiones

En la parte de investigación documental se ha encontrado que la mayoría de los problemas de balanza no son auténticos de acuerdo a la teoría de Palm. De esta manera, se reafirman los resultados de las investigaciones previas (Santanero Alatoma, 2011; García García, 2011).

Los elementos de la teoría de Palm que se violan con mayor frecuencia son “evento” y “datos”. En otras palabras, se presentan eventos que no pueden ocurrir en el mundo real y se suponen datos poco viables, imposibles e, incluso, contradictorios.

Desde el punto de vista de varios expertos, el modelo de la balanza es un recurso didáctico concreto para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. El objetivo de su uso es facilitar el entendimiento de los conceptos de igualdad, incógnita y manipulaciones algorítmicas.

Aunque existe un caso particular en que se puede usar una configuración de la balanza de dos platos para encontrar la masa desconocida ( $\text{sandía} + 1 \text{ kg} = 10 \text{ kg}$ ), las masas de objetos en el mundo real se determinan mediante mediciones directas. En consecuencia, no se debe promover la falsa idea de que el modelo de la balanza es el procedimiento que se usa en el mundo real.

En la parte de la investigación realizada con los estudiantes, se ha explorado el desempeño en la resolución de dos problemas con las balanzas, uno con datos aceptables (no contradictorios) y uno con datos contradictorios. Cuando se les presentó un problema con datos aceptables, una cantidad considerable de los estudiantes pudo resolverlo adecuadamente. Sin embargo, cuando a los mismos estudiantes se les presentó un problema con datos contradictorios, pocos de ellos fueron capaces de detectar el error y otros se mostraron totalmente desorientados (ocasionándose así conflictos y mal efecto en la auto-estima).

Estos resultados demuestran dos cosas importantes:

- 1 Los errores en los libros de texto tienen efectos negativos en el aprendizaje matemático de los estudiantes.
- 2 Aunque el número de los estudiantes que fueron capaces de detectar el error no es muy grande, su mera existencia cuestiona fuertemente la capacidad del pensamiento crítico y la ética profesional de los autores, revisores técnicos en las editoriales y los revisores expertos de la SEP, quienes han escrito, revisado y autorizado los libros de texto analizados.

Los maestros de matemáticas completan la cadena profesional que debe procurar que los estudiantes no resuelven los problemas matemáticos con errores. Si fallan los autores, revisores técnicos en las editoriales y revisores expertos de la SEP, los maestros son responsable de detectar los errores que aparecen en los libros de texto que usan con sus estudiantes.

¿Tienen los maestros de matemáticas la capacidad y ética necesarias para ejercer tal responsabilidad importante?

Según las evidencias indirectas e directas, la respuesta inicial es probablemente negativa.

Una evidencia indirecta es el hecho de que los errores de la primera edición no se corrigen en la segunda edición. Eso implica que los maestros que han usado la primera edición no han detectado los errores o si los han detectado no han avisado a la editorial para que los corrija. En el primer caso, los maestros tienen fallas en su pensamiento crítico. En el segundo caso, detectar los errores y no avisar a la editorial, muestra una falta de ética profesional por no considerar importante proteger a los estudiantes y mantenerlos ajenos de los errores detectados.

La capacidad de detectar errores en los problemas matemáticos que aparecen en los libros de texto es la base posible para enriquecer la enseñanza de las matemáticas con nuevos tipos de tareas:

¿Es posible que el evento descrito en el problema ocurre en el mundo real?

En este problema los datos son contradictorios. ¿Puedes demostrarlo?

El primer beneficio de estas tareas es que las respuestas no se pueden dar usando algún algoritmo. El segundo es erradicar la creencia de muchos estudiantes de que los libros de texto de matemática no contienen errores. El tercer beneficio es promover el pensamiento crítico y creativo de los estudiantes.

Los resultados de investigación demuestran que la capacidad de detectar y corregir errores propios (Ahmad Maulana y Idrus, 2013) o errores insertados intencionalmente en las tareas (Van Haneghan, 1990; Zhao y Acosta-Tello, 2016) llevan a una mejora en el aprendizaje matemático.

En las futuras investigaciones se van a explorar experimentalmente los efectos de las tareas mencionadas, usando en sus diseños los problemas erróneos encontrados en esta tesis.

# Bibliografía

- Ahmad Maulana, M., & Idrus, M. (2013). Metacognitive strategies in quadratic equation word problem. *Journal Pendidikan Sains & Matematik Malaysia*, 3(2), 1-12.
- Arrieta, M. (2006). *Medios materiales en la enseñanza de las matemáticas*, Revista de psicodidáctica/Journal of Psychodidactics,1(5), 107-114.
- Baltazar, C., Ruiz, E., Ojeda, L. F. (2002). *Matemáticas 2. Secundaria Fundamental*, México: Editorial Castillo.
- Baranes, R., Perry, M., & Stiegler, J. W. (1989). *Activation of real-world knowledge in the solution of word problems*. *Cognition and Instruction* 6(4), 287-318.
- Booth, J. L., Newton, K. J., & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 118, 110-118.
- Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson Editores.
- Cáceres, I. T. S., & Suárez, M. D. L. (2008). *Enciclomedia: una herramienta tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria*, en Investigaciones y propuestas sobre el uso de Tecnología en Educación Matemática, volumen I (pp. 41 - 51), Michoacan: Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática (AMIUTEM).
- CONALITEC(2015-2017), Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, Libros de matemáticas consultados en <http://www.conaliteg.gob.mx/>.
- Da Silva Figueira-Sampaio, A., dos Santos, E. E. F., & Carrijo, G. A. (2009). *A constructivist computational tool to assist in learning primary school mathematical equations*. *Computers & Education*, 53(2), 484-492.

- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633-646.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), 765-777.
- Filloy Yague, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fitzpatrick & Morrison (1971). *Performance and product evaluation*. In R.L: Thorndike (Ed), Educational measurement (2nd ed., pp237-270). Washintong, DC: American Council on Education.
- García García, S. (2011). *Las contextualizaciones artificiales de las mediciones indirectas en los libros de texto de matemáticas de secundaria*, Tesis de licenciatura en matemáticas no publicada, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.
- Gardner, H. (1994). Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples. México: Fondo de Cultura Económica.
- Gardner, M. (1995). *Acertijos de Sam Loyd*. Madrid: Editorial Zugarto.
- Greenes, C., & Findell, C. (1999). *Developing students' algebraic reasoning abilities*. En L.V. Stiff & F.R. Curico (Eds.), Developing mathematical reasoning in grades K-12, 1999 year book. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Huntley, M. A., & Terrell, M. S. (2014). One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbook series. *ZDM*,46(5), 751-766.
- Iturrave, F. (2014). *Matemáticas 2*. México: Editorial Terracota-Cengage.
- Lesh, R. & Landau, M. (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. London: Academic Press.
- Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). *Conceptual models and Applied Mathematical Problem Solving Research*, London: Academic Press.
- Libro del maestro (2011). Libro consultado en <http://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/libromaestro.pdf>
- Loyd, S. & Gardner, M.(1959). *Mathematical puzzles of Sam Loyd*. New York: Dover Publications.

- Reuhkala, M. (2001). Mathematical skills in ninth-graders: Relationship with visuo-spatial abilities and working memory. *Educational Psychology, 21(4)*, 387-399.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology, 93(2)*, 346-362.
- Palm, T. (2006). *Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework*. For the learning of mathematics, 26(1), 42-47.
- Palm, T. (2008). *Impact of authenticity on sense making in word problem solving*. Educational Studies in Mathematics, 67(1), 37-58.
- Riojano Ceballos, M. T. (2010). *Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos*. *Números revista de didáctica de las matemáticas*, v75, pp5-20.
- Santanero Alatoma, J. (2011). *Contextualización de los problemas en los libros de texto de matemáticas para secundaria*, Tesis de licenciatura en matemáticas no publicada, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de estudio de secundaria*. México D.F.: Secretaría de Educación Básica de <http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/prog-secundaria>.
- Stillman, G. (1998). Engagement with task context of applications task: Student performance and teacher beliefs. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 6(3-4), 51-70.
- Suth, J., & Moyer-Packenham, P. S. (2007). *Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances*. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26(2), 155-173.
- Turmudi, T. (2011). *Creating And Solving Model Of Linear Equation Through The Balance At Junior Secondary Class*. In PROCEEDINGS International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education. Department of Mathematics Education, Yogyakarta State University.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Haneghan, J. P. (1990). Third and fifth graders' use of multiple standards of evaluation to detect errors in word problems. *Journal of Educational Psychology*, 82(2), 352 - 358.

Yague, E. F. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zhao, H., & Acosta-Tello, E. (2016). The impact of erroneous examples on students' learning of equation solving. *Journal of Mathematics Education*, 9(1), 57-68.

# ANEXOS

Las tablas del anexo A contienen la información de todos los libros que fueron revisados. En las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 del anexo A se muestran todas las referencias de los libros revisados de los tres niveles respectivos, para facilitar la clasificación, cada problema se etiqueta con la clave asignada por la SEP del libro correspondiente. Cuando aparecen varios problemas en un mismo libro se adiciona al final de la etiqueta una letra minúscula del alfabeto, por ejemplo, S12005a, S12005b y S12005c son 3 problemas en el libro con clave SEP S12005. También en las 2 últimas columnas de cada tabla se muestra el número de problemas encontrados con el modelo de la balanza o el artefacto balanza y las páginas del libro donde se encontraron dichos problemas.

En el anexo B se encuentran las tablas de clasificación de todos los problemas que tienen que ver con la balanza, los cuales fueron divididos en dos categorizaciones y éstos a su vez en grupos y subgrupos. La primera clasificación de los problemas corresponde a las columnas 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4. La columna 4.4.1 está dividida en tres subgrupos que corresponden a las columnas I11, I12 e I13. La columna I2 corresponde al grupo 4.4.2. La columna 4.4.3 se subdivide en cuatro subgrupos correspondientes a las columnas I30, I31, I32, I33. La columna I4 corresponde al grupo 4.4.4. La segunda clasificación consta de dos grupos el 4.4.5 y 4.4.6, asociados a las columnas II1 y II2. El número romano al inicio de la clave indica el número de clasificación, el número posterior indica el grupo al que pertenecen y para los que tienen un segundo número, éste indica el subgrupo. Por ejemplo, el problema con clave S12004c pertenece a la columna I12, esto quiere decir que pertenece al subgrupo 2 del grupo 1 de la clasificación I, esto significa que en este problema se exploran cuestiones didácticas (I), pueden aplicarse o no las acciones del modelo de la balanza (1) y el autor pregunta explícitamente a los alumnos cuáles son las acciones que no afectan el equilibrio de la balanza (2).

Y finalmente en el anexo C se encuentran las imágenes de todos los problemas relacionados con la balanza con su clave, tomadas de los textos originales de secundaria (SEP).

## ANEXO A: Libros Revisados

Clave	Referencia	#P.	Páginas
S00136	Explora. C. Baltazar, E. Ruiz, L. F. Ojeda. Edit. Catillo, (2013)	8	18,23,120, 124,132, 133,134
S12010	Construyo y aprendo matemáticas. M. Pérez, S. A. Pérez. Edit. EDE,(2012,2017)	4	139, 137, 138,
S12014	Conect@estrategias. David Block Sevilla. Edit. SM, (2013,2016)	8	18,19,20, 154,263,
S12013	Comunidad matemática. A. Castrejón, A. Vicuña, M. Reyes,O. Castrejón. Edit. SM, (2013)	11	150-155,
S00139	Matemáticas 1. M. Hernández, G. Magallanes., Edit. EDITORES (2014, 2015, 2016, 2017)	3	143, 210
S12009	Matemáticas 1. R. M. Farfán, R. Cantoral, M. G. Cabañas, M. Ferrari. Edit. Mc Graw Hill (2016)	3	131, 132
S00185	Desafíos Matemáticos. M. Ramírez, R. Castillo, D. Vergara, M. E. Flore, J. Azpeitia. Edit. Fernández editores. (2015, 2017)	1	123,74
S12011	Construcción del pensamiento. F. Sánchez. Edit. FERNANDEZ Educación (2016,2017)	2	134, 139
S12001	Matemáticas 1. S. Valiente, S. I. Valiente. Edit. NORIEGA. (2017)	2	148
S12004	Contexto Matemático. A. Olea, E. Basurto, M. A. Rivera. Edit. Norma. (2016)	5	15, 121, 135,139
12007	Matemáticas 1. Emilio Covián Rué. Edit. Nuevo México. (2016)		
S00135	Trabajo en proceso. R. Arteaga , A. Sánchez. Edit. Oxford. (2013, 2017)	7	30, 137, 138,139 143
S12021	Matemáticas 1. C. A. Cuevas et al., Edit. Ríosdetinta. (20115, 2017)	0	
S12003	Matemáticas 1. F. Escareño, O. L. López. Edit. Mc Graw Hill (2012, 2016)	2	137, 139

**Tabla 4.1. Nivel primero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.**

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S12017	Matemáticas por competencias. Arriaga, Benítez. Edit. PEARSON (2016)	1	132
S12016	Matemáticas 1. García M. V., R. Villaseñor , M. D. Montes H., Edit. Mc Graw Hill (2016)	4	14, 25, 30,34
S12002	Matemáticas 1. G. Almaguer et al., Edit. Limusa Noriega (2017)	2	26,140
S12006	Todos juntos. De Icaza Peña, A. Edit. Santillana (2016)	0	
S12012	Retos matemáticos 1. C. Apolo y R. I. González Edit. SM (2014, 2016)	0	
S12022	Jaque Mate 1. Xique Anaya J. C. Edit. Larousse (2012)	11	85,90, 142,143, 144, 145
S12018	Matemáticas 1. Iturrave Ramírez, F. Edit. Terracota-Cengage (2014)		
S12005	Serie Fundamental. S. P.Romero, J. C. Aguilar. Edit. Castillo (2016)	4	33,141, 142,143
S12000	Series Saberes. E. Mancera M. y E. Basurto H. Edit. Pearson Educación (2016)	0	
S12020	Matemáticas 1. Reyes García Lidia Edit. Terracota-Cengage (2012, 2016)	0	
S12019	Matemáticas 1. L. Jiménez M. et al., Edit. Grupo Editorial Patria (2012,2016)	2	20, 127
S00138	Secuencia Matemática 1. Hernández Moreno G. Edit. Oxford (2013, 2017)	0	
S00137	Matemáticas 1 Integral. G. Carrasco Licea P. Martínez T. Edit. Santillana (2014,2016)	4	18, 95, 152
S12015	Matemáticas 1. E. Sánchez, M. Sáiz, V. Hoyos, J. Guzmán. Edit. Oxford (2006-2008,2011,2012)	0	
S12008	Matemáticas 1 Horizontes. M. Trigueros et al., Edit. Santillana (2016)	0	
S00251	Matemáticas 1. López Calderón J. Carlos Edit. Cervante (2016)	2	118, 120

**Tabla 4.1. Nivel primero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.**

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00174	Habilidades y competencias. J. Ángeles et al., Edit. Ángeles editores (2015)	1	166
S22017	Secundaria Fundamental. C. Baltazar, E. Ruiz, L. F. Ojeda. Edit. Castillo.(2012)	4	184, 185, 186,263
S22003	Jaque Mate 2. J Carlos Xique Anaya. Edit. LAROUSSE (2012)	7	181-184, 187,188, 214
S22005	Matemáticas 2. David Block Sevilla. Edit. LAROUSSE (2012)	1	207
S22006	Comunidad matemática. A. Castrejón, A. Vicuña, M. Reyes, O. Castrejón. Edit. SM (2012)	11	180,181, 185,192, 222,226, 227, 230
S22015	Construcción del pensamiento. F. Sánchez S. Edit. Fernández editores. (2013)	4	109, 180, 181
S22002	Convive con las matemáticas. M. del C. Quijano, A. González, J. Castillo. Edit. MC editores. (2012)	1	182, 183
S22021	Contexto Matemático. A. Olea, E. Basurto, M. A. Rivera. Edit. Norma. (2012)	2	182, 185
S00141	Trabajo en proceso 2. R. Arteaga G., A. Sánchez M. A. Sánchez M. Edit. Oxford. (2013)	2	187,211
S00142	Matemáticas 2. Carlos A. cuevas, O. González, Carolina R., A. Rodríguez. Edit. Norma. (2012)	5	187, 188, 189,190, 191
S00196	Matemáticas 2 Integral. G. Carrasco, L. Contreras, p. Martínez. Edit. Santillana (2015)	1	148
S22013	Matemáticas 2 Por competencias. A. Arriaga, M. Benítez. Edit. Pearson Educación (2013)	1	181, 182
S22020	Matemáticas 2 Serie Saberes. E. Mancera, E. Basurto. Edit. Pearson Educación (2013)	4	175, 178, 179,181
S22007	Matemáticas 2. A. Sánchez, M. Sanz, V. Hoyos. Edit. Grupo Editorial Patria (2013)	4	186, 187, 188,192

**Tabla 4.2. Nivel segundo, ciclos 2015-2016, 2016-2017.**

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S22012	Matemáticas 2. E Filloy, O. Figueras, M. Ojeda, T. Rojano, G. Zubieta. Edit. Esfinge (2013)	0	
S00175	Matemáticas 2. G. Balderas, A. Palmas. Edit. Correo del Maestro (2015)	2	188, 222,224
S22018	Matemáticas 2. Alejandro del caza Edit. Santillana (2012)	0	
S22016	Matemáticas 2 Horizontes. M. Trigueros et al., Edit. Santillana (2012)	1	181
S22014	Matemáticas 2. M. Farfán et al. Edit. EPSA / McGraw-Hill (2013)	0	
S22000	Matemáticas 2. F. Escareño, L. López. Edit. Trillas (2016)	3	193, 196, 226
S00144	Matemáticas 2. Desafíos matemáticos. M. Ramírez, R. Castillo, D. Vergara, E. Flores, G. Azpeitia. Edit. EPSA / McGraw-Hill (2013)	0	
S22008	Matemáticas 2. Lidia Reyes Edit. Terracota-Cengage (2014)	4	174, 175
S22019	Matemáticas 2. Emilio Covián. Edit. Nuevo México (2012)	0	
S22011	Matemáticas 2 Serie Terra. V. García, R. Villaseñor, D. Montes. Edit. Esfinge (2013)	0	
S00143	Matemáticas 2 Construyo y aprendo. C. Manrique. Edit. Ediciones de Excelencia (2013)	0	
S22009	Matemáticas 2 Estrategias del pensamiento. M. Hernández, H. Solano, L. Jiménez Edit. Grupo Editorial Patria (2013)	0	
S00140	MatemáticaMente 2. Desarrollo y fortalecimiento de competencias. Serie Alternativas. A. Arriaga et al. Edit. Pearson Educación (2014)	2	156, 157
S22001	Secuencia Matemáticas 2. G. Hernández Moreno. J. Gutiérrez. Edit. Oxford University Press (2012)	1	210
S00145	Matemáticas 2. L. Raull, M. Fernández. Edit. Esfinge (2014)	5	78, 182, 183,186, 212
S22010	Matemáticas 2. Fernando Iturrave Edit. Terracota-Cengage (2014)	5	186, 187, 188,220, 221

**Tabla 4.2. Nivel segundo, ciclos 2015-2016, 2016-2017.**

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00195	Matemáticas 3. C. A. Cuevas et al., Edit. Ríos de Tinta, (2014, 2017).	1	256, 257
S00186	Matemáticas 3. F. Sánchez. Edit. Fernández editores (2017).	0	
S00186	Matemáticas 3. F. Sánchez. Edit. Fernández editores (2017).	0	
S00167	Matemáticas 3. S. Romero et al., Edit. Fernández editores (SA).	0	
S00193.	Matemáticas 3. Emilio Covián. Edit. Nuevo México. (SA).	0	
S00161	Retos Matemáticos 3. J. Moreno Barrera. Edit. SM (SA).	0	
S00166	Matemáticas 3. L. Reyes García. Edit. Terracota-Cengage. (SA).	0	
S00151	Matemáticas 3. M. Farfán et al., Edit. Fernández editores (2014).	0	
S00171	Jaque Mate 3. L. Barriendos, L. Sánchez. Edit. Larousse. (2014,2017).	0	
S00150.	Conect@ Estrategias. Matemáticas 3. S. García, T. Mendoza, J. Cruz, David Block. Edit. SM (2014,2016).	0	
S00164	Matemáticas 3. A. Palmas, G. Balderas Edit. Correo del Maestro (2014).	0	
S00169	Matemáticas 3. A. Sánchez, V. Hoyos. Edit. Grupo Editorial Patria (SA).	0	
S00158	Matemáticas 3. Estrategias del pensamiento. L. Jiménez, M. Hernández. Edit. Grupo Editorial Patria (2014).	0	
S00146	Matemáticas 3 Habilidades y Competencias J. Ángeles, R. Guerrero Edit. Ángeles Editores (20113).	0	

**Tabla 4.3. Nivel tercero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.**

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00165	Matemáticas 3. Desafíos matemáticos M. Ramírez, R. Castillo. Edit. Fernández Educación (2013).	0	
S00182	Matemáticas 3. L. Raull, A. González Edit. Esfinge (2015).	0	
S00149	Matemáticas 3 Explora. C. Baltazar, E. Ruiz. Edit. Ediciones Castillo (2013).	1	247
S00160	Fortalezco mis competencias matemáticas 3. D. Mata, F. Nebbia. Edit. SM (2013).	0	
S00155	Convive con las Matemáticas 3. H.Flores, Edit. A. Gómez, Méndez Cortés Editores (2014).	0	
S00170	Matemáticas 3 Horizontes. M. Trigueros, Edit. D. Lozano, Santillana (2013).	0	
S00194	MatemáticaMente 3 Consolidación de competencias. Serie Alternativas. A. Arriaga, S. Sesma Edit. Pearson Educación (2015).	0	
S00152	Matemáticas 3. Todos juntos. A. de Icaza Edit. Santillana (2013).	0	
S00162	Matemáticas 3. E. Núñez, D. García Edit. Terracota-Cengage (2014).	0	
S00189	Matemáticas 3. G. Almaguer, F. Cantú Edit. Limusa Noriega Editores (2015).	0	
S00154	Matemáticas 3. E. Filloy, O. Figueras Edit. Esfinge (2014).		
S00180	Comunidad matemática 3 A. Castrejón, A. Vicuña. Edit. SM (2015).	0	
S00153	Matemáticas 3. F. Escareño, O. Leticia Edit. Trillas (2015).	1	207
S00159	Matemáticas 3. Serie Saberes. E. Mancera, E. Basurto. Edit. Pearson Educación (2014).	0	
S00148	Trabajo en proceso 3. Matemáticas. R. Arteaga, A. Sánchez A. Sánchez. Edit. Oxford University Press (2013).	5	223, 226, 230
S00190	Matemáticas 3. O. Vigueras, R. Bañuelos Edit. Macmillan Publishers (2015).	0	
S00163	Contexto Matemático 3. A. Olea, E. Basurto Edit. Norma Ediciones (2014).	1	73

**Tabla 4.3. Nivel tercero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.**

Clave.	Referencia	#P.	Páginas
S00168	Matemáticas 3 Enlaces. Olga Saiz. Edit. Ediciones Castillo (2015).	0	
S00157	Matemáticas 3. E. García, S. Villegas Edit. Norma Ediciones (2014).	1	105
S00177	Matemáticas 3 Construyo y aprendo Matemáticas. M. Pérez, S. Pérez. Edit. Ediciones de Excelencia (2015).	0	
S00156	Matemáticas 3. V. García, R. Villaseñor Edit. Esfinge (2013).	0	
S00147	Matemáticas 3. Por competencias. A. Arriaga, M. Benítez. Edit. Pearson Educación (2014).	0	

**Tabla 4.3. Nivel tercero, ciclos 2015-2016, 2016-2017.**

## Anexo B: Clasificación

CLAVE	4.4.1			4.4.2	4.4.3			4.4.4	4.4.5	4.4.6	
	I11	I12	I13	I2	I30	I31	I32	I33	I4	II1	II2
S12001a	Green					Blue					
S00139a		Yellow				Blue					Red
S00139b			Yellow			Blue					Red
S00185						Blue					Red
S12003a		Yellow									Red
S12003b		Yellow									Red
S12004a				Purple							
S12004b				Purple							
S12004c		Yellow				Blue					
S12004d						Blue					
S12004e	Green					Blue					
S12010a						Blue					Red
S12010b						Blue					Red
S12010c						Blue					Red
S12010d						Blue					Red
S00251a									Black		
S00251b									Black		
S12019					Orange						Red
S12019a					Orange						Red
S12011						Blue			Black	Orange	
S12011a						Blue			Black	Orange	Red
S00136a					Orange						Red
S00136b					Orange						Red
S00136c					Orange						Red
S00136d					Orange						Red
S00136e	Green					Blue					Red
S00136f	Green					Blue					Red
S00136g	Green					Blue					Red
S00136h						Blue					Red
S12014a					Orange						Red
S12014b					Orange						Red
S12014c					Orange						Red
S12014d					Orange						Red
S12014e				Purple							Red
S12005a									Black		Red
S12005b		Yellow			Orange				Black		Red
S12005c						Blue					Red
S12005d		Yellow				Blue					Red
S00135a					Orange				Black		Red
S00135b						Blue			Black		Red
S00135c					Orange						Red
S00135d						Blue					Red
S00135e						Blue					Red
S00135f						Blue				Orange	

Tabla B1. Clasificación de los problemas

CLAVE	4.4.1			4.4.2	4.4.3			4.4.4	4.4.5	4.4.6	
	I11	I12	I13	I2	I30	I31	I32	I33	I4	II1	II2
S00135g											
S12017											
S12009a											
S12009b											
S12009c											
S12002a											
S12002b											
S12022a											
S12022b											
S12022c											
S12022d											
S12022e											
S12022f											
S12022g											
S12022h											
S12022i											
S12022j											
S12022k											
S12016a											
S12016b											
S12016c											
S12016d											
S12013a											
S12013b											
S12013c											
S12013d											
S12013e											
S12013f											
S12013g											
S12013h											
S12013i											
S12013j											
S12013k											
S00137a											
S00137b											
S00137c											
S00137d											
S22006a											
S22006b											
S22006c											
S22006d											

Tabla B2. Clasificación de los problemas

CLAVE	4.4.1			4.4.2	4.4.3				4.4.4	4.4.5	4.4.6
	I11	I12	I13	I2	I30	I31	I32	I33	I4	II1	II2
S22006e											
S22006f											
S22006g											
S22006h											
S22006i											
S22006j											
S22006k											
S22010a											
S22010b											
S22010c											
S22010d											
S22010e											
S00175a											
S00175b											
S00196											
S22005											
S22003a											
S22003b											
S22003c											
S22003d											
S22003e											
S22003f											
S22003g											
S22007a											
S22007b											
S22007c											
S22007d											
S22002											
S22020a											
S22020b											
S22020c											
S22020d											
S22004											
S22008a											
S22008b											
S22008c											
S22008d											
S22001											
S00145a											
S00145b											
S00145c											

Tabla B3. Clasificación de los problemas

CLAVE	4.4.1			4.4.2	4.4.3				4.4.4	4.4.5	4.4.6
	I11	I12	I13	I2	I30	I31	I32	I33	I4	II1	II2
S22006e											
S22006f											
S22006g											
S22006h											
S22006i											
S22006j											
S22006k											
S22010a											
S22010b											
S22010c											
S22010d											
S22010e											
S00175a											
S00175b											
S00196											
S22005											
S22003a											
S22003b											
S22003c											
S22003d											
S22003e											
S22003f											
S22003g											
S22007a											
S22007b											
S22007c											
S22007d											
S22002											
S22020a											
S22020b											
S22020c											
S22020d											
S22004											
S22008a											
S22008b											
S22008c											
S22008d											
S22001											
S00145a											
S00145b											
S00145c											

Tabla B4. Clasificación de los problemas

# Anexo C: Imágenes

S12001ab

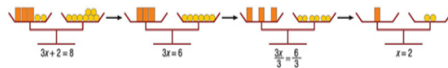


1. Resolver por el modelo de balanza la ecuación  $3x + 2 = 8$ , anotando debajo de cada paso su expresión simbólica.



En el modelo de la balanza, cada platillo actúa como un miembro de la ecuación de primer grado con una incógnita: platillo izquierdo para el primer miembro y platillo derecho para el segundo miembro, y el pedestal como el signo =. Cada paso que se realiza en la balanza debe mantener el equilibrio de ésta. Se acostumbra representar a la incógnita por una pequeña figura geométrica rellena (■, ▲, ■, etcétera), y a cada unidad numérica por un círculo relleno (●).

En este modelo se puede manejar la incógnita en ambos platillos, y es recomendable sólo usar valores enteros.

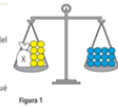


S00139a

**Explora por tí mismo**

1. Reunite con otro compañero y analicen lo siguiente:

En el costalito marcado con "X" hay cierto número de canicas (Figura 1). Todas las canicas, las del costalito, las amarillas y las azules pesan lo mismo, ¿cuántas canicas hay en el costalito?



2. Junto con tu compañero contesta lo siguiente:

- Si tienen una balanza en equilibrio y ponen 3 canicas medianas en uno de los platillos, ¿qué pueden hacer en el otro platillo para volver a equilibrarla?
- Si la balanza está en equilibrio y quitan 2 canicas medianas en uno de los platillos, ¿qué pueden hacer en el otro platillo para volver a equilibrarla?
- De manera general, si hacen algún movimiento en uno de los platillos, ¿qué deben hacer en el otro platillo para mantener equilibrada la balanza?

3. Sepón que en una balanza 2 canicas grandes y 2 pequeñas equilibran a 1 canica grande y 6 pequeñas (Figura 2). ¿Cuántas canicas pequeñas equivalen al peso de una canica grande?



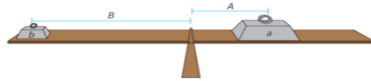
- a) A partir de la figura 2, dibuja paso a paso lo que harías para que quedara 1 canica grande de un lado de la balanza y las canicas pequeñas correspondientes del otro lado.



Bloque 3 143

S00139b

1. Un sube y baja está en equilibrio si la longitud del brazo de palanca  $A$  multiplicada por el peso  $a$  es igual a la longitud del brazo de palanca  $B$  multiplicada por el peso  $b$ .



- a) Si en el asiento  $a$  del sube y baja se pone un peso de 50 kg y el brazo de palanca mide 2 m, ¿cuáles deberían ser las medidas del brazo de palanca  $B$  para que al subirse los siguientes niños queden equilibrados?

Nombre	Peso	Medida del brazo B
Simón	25 kg	
Graciela	30 kg	
Sara	35 kg	
Roberto	40 kg	
Julieta	45 kg	
Pedro	50 kg	
Manuel	55 kg	
Juan	60 kg	

- b) Analiza los datos que obtuviste en la tabla y determina si el peso de los niños y el tamaño del brazo de palanca  $B$  se relacionan de manera proporcional o inversamente proporcional; explica cómo es que lo sabes.

210 Matemáticas 1

S00185

A continuación aplica tus conocimientos y desarrolla tus habilidades con los siguientes problemas:

1. Los antiguos joyeros utilizaban las balanzas con pesas para determinar el peso de las joyas o piedras preciosas con las que trabajaban. Dibuja en tu cuaderno tres balanzas como la de la derecha y establece las ecuaciones que las representan.



- Tres zafiros (piedra azul) de un lado, y en el otro una pesa de 24 g.  
Ecuación: \_\_\_\_\_
- Una pesa de 3 g y 4 granates (piedras rojas) en un lado y una pesa de 18 g en el otro.  
Ecuación: \_\_\_\_\_
- Una pesa de 20 g y 2 esmeraldas del mismo tamaño (piedras verdes) en un lado y 8 esmeraldas más una pesa de 2 g en el otro lado.  
Ecuación: \_\_\_\_\_

Compara tus resultados con los de un compañero y expliquen los procedimientos que utilizaron para resolver el problema.

2. Con la intención de encontrar una forma más sencilla de resolver las ecuaciones, organizados en grupos regresen a la ecuación que se planteó al inicio de la lección: "Pensé un número, a ese número le sumé 15 y obtuve como resultado 27". De acuerdo con lo anterior, se tiene que:  $x + 15 = 27$ .

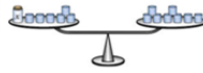
Patrones y ecuaciones 123

### S12003a

#### 19.2. Uso de las propiedades de la igualdad. Adición y sustracción

##### Problema inicial

La ilustración representa una balanza en equilibrio, en la que hay un objeto de peso incógnito  $x$  además de pesitas cilíndricas de 1 kg cada una. ¿Cuánto pesa el objeto marcado con la letra  $x$ ?



##### Exploración y discusión

- ¿Qué valor se desconoce en este problema? ¿Cómo puedes encontrarlo?  
¿Qué procedimiento utilizó tu compañero o compañera para hallarlo?
- ¿Obtuvieron el mismo resultado?
- Si a cada platillo de la balanza se le quitan 2 pesitas, ¿la balanza seguirá en equilibrio?
- ¿Seguirá en equilibrio la balanza si se agrega la misma cantidad a cada platillo?
- Un compañero representó la balanza en equilibrio mediante la ecuación:  
 $x + 6 = 8$   
donde el signo de igualdad representa la balanza en equilibrio. Si se resta 6 en ambos miembros, ¿se altera la igualdad?
- ¿Cómo quedaría la ecuación después de restar 6?
- ¿Cuál es el valor de  $x$ ? ¿Podrá tener  $x$  algún otro valor diferente?

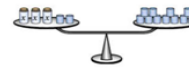
137

### S12003b

#### 19.3. Uso de las propiedades de la igualdad. Multiplicación y división

##### Problema inicial

El dibujo siguiente muestra una balanza en equilibrio, en la que hay un objeto de peso incógnito  $x$ , además de pesitas cilíndricas de 1 kg cada una. ¿Cuánto pesa cada objeto marcado con la letra  $x$ ?



##### Exploración y discusión

- ¿Qué valor se desconoce en este problema? ¿Cómo puedes hallarlo?  
Comenta con un compañero o compañera el procedimiento que utilizaste para encontrarlo.
- Si se quitan dos pesitas de 1 kg de cada platillo, ¿seguirá en equilibrio la balanza? Dibujen en el siguiente recuadro la forma en que quedaría la balanza.
- Después de retirar las dos pesitas de cada platillo, en el platillo izquierdo quedan sólo pesas marcadas con la letra  $x$ . Si ahora dejan la tercera parte de lo que hay en cada platillo, ¿se mantendrá en equilibrio la balanza?
- La siguiente ecuación representa la situación:  $3x + 2 = 11$ . Si restan 2 de ambos miembros, ¿se altera la igualdad?

139

### S12004a



Imagen 1

Imagen 2

Imagen 3

Imagen 4

¿Cuántos vasos serán necesarios para equilibrar la balanza en la imagen 4?

### S12004b



### S12004c

## Ecuaciones de primer grado



1. Observa con atención la siguiente figura.



### S12004d

2. Ahora trabaja con las siguientes balanzas; obsérvalas con atención.

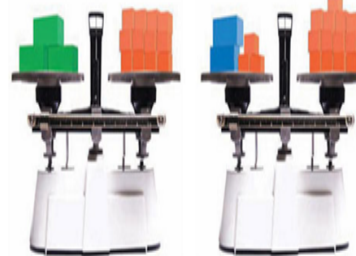


Figura 3.3  
Abu Abobalah Muhammed  
Muza al-Juarim vivió entre  
los años 760 y 850 d.n.e.

BLOQUE 3

135

### S12004e



Una ecuación es una igualdad algebraica entre dos expresiones, llamadas miembros, en la que se desconoce algún valor, llamado *incógnita*, que es preciso conocer y para el cual se cumple la igualdad; por ejemplo, la igualdad

$$n + 5 = 8$$

es una ecuación cuyos miembros son  $n + 5$  y  $8$ , y cuya incógnita es  $n$ , donde si  $n = 3$ , se tiene que  $3 + 5 = 8$ . Frecuentemente, problemas de diversas disciplinas pueden ser planteados y resueltos como ecuaciones.

Un modelo que se utiliza para ilustrar el concepto de ecuación es el de una balanza en equilibrio en la que es preciso determinar un peso desconocido.



Representación simbólica

$$x + 3 = 7$$

$$x + 3 - 3 = 7 - 3$$

$$x = 4$$

Los pasos que deben realizarse para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, corresponden a operaciones inversas a las operaciones que se presentan en la misma ecuación. Analiza los siguientes casos y responde las preguntas.

### S12010a

#### Problema 1

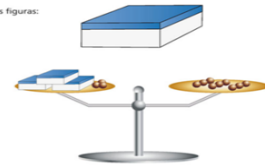
En una caja hay una cantidad desconocida de canicas, ustedes deben averiguar cuántas hay, tomando en cuenta la siguiente condición:

Si a las canicas que hay en tres cajas iguales a la primera les agregan otras 3 canicas, obtienen nueve.

Y lo explicó usando las siguientes figuras:



ALABARLA MUY  
Una ecuación de primer grado con una incógnita, se resuelve usando operaciones inversas a las que se presentan en la misma ecuación.



PAG. 137

Imagina que la balanza se encuentra en equilibrio. Lo que está en un plato pesa lo mismo que lo que está en el otro.

Analiza y reflexiona sobre las siguientes preguntas.

- ¿Cómo se resolvería el problema usando la balanza?
- Si se retira una canica de un lado de la balanza, ¿qué es necesario hacer para mantener el equilibrio?
- Si se agrega una canica a un extremo de la balanza, ¿qué es necesario hacer para que se mantenga equilibrada?

### S12010b



Reúnete con algunos compañeros y averigüen cuántas canicas hay en cada una de las tres cajas, luego redacten en sus cuadernos cómo lo lograron. Enseguida resuelvan los siguientes problemas que Juan propuso después de haber encontrado el número de canicas de cada caja.



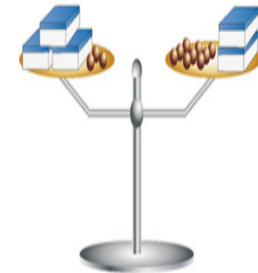
#### Problema 2

Si a las canicas que hay en 2 cajas les agregan 2 canicas, obtienen las canicas que hay en 1 caja y 6 canicas más.

### S12010c

#### Problema 3

Si a las canicas que hay en 3 cajas les agregan 3 canicas, obtienen las canicas que hay en 2 cajas y 9 canicas más.



138

### S12010d

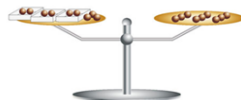
En el problema de la caja propuesta por el profesor de Juan Carlos, se sabe que la cantidad que hay en las cajas es un número; como ese número es desconocido se puede usar un símbolo para representarlo. Usualmente se utiliza la letra  $x$  para representar la cantidad desconocida. Entonces, el problema que propuso el profesor puede escribirse así:

$$3x + 3 = 9$$

Una expresión como ésta se llama ecuación (que viene de la palabra griega "equate" que significa "igualar"), porque hay dos cantidades que deben valer lo mismo, una de ellas tiene un valor desconocido que, usualmente es llamado *incógnita* o *variable*.

La solución al problema consiste en encontrar el valor de la *incógnita*, es decir, el valor de  $x$  que hace que la igualdad se cumpla. Al valor con el que la ecuación se cumple, se le llama *solución*. La solución del problema es  $x = 2$ , porque en un lado de la ecuación habría "tres veces dos y tres más", es decir, 9, que es lo que hay del otro lado.

Usando el modelo de la balanza, la solución puede verse así:



Es posible resolver el problema usando el lenguaje simbólico, para ello deben aprender algunas operaciones básicas, que cambian una ecuación por otra más fácil, sin que cambie su solución.

139

### S00251a

#### Resuelve y explica



- Para dar solución a la ecuación  $x + 8 = 20$  podemos utilizar el modelo de la balanza, donde ambos platillos deben estar en equilibrio. En el platillo del lado izquierdo, conocido como primer miembro de la ecuación, se indica la expresión  $x + 8$ , y en el platillo del lado derecho, que es el segundo miembro de la ecuación, se ubica el número 20.

#### Comparte e intercambia ideas

Comparen las respuestas obtenidas con las de sus compañeros.



$$x + 8 = 20$$

- Para que la balanza esté en equilibrio, ¿qué valor le corresponde a la literal  $x$ ?

118

MATEMÁTICAS 1 • Bloque III

## S00251b

### Prueba en otras situaciones

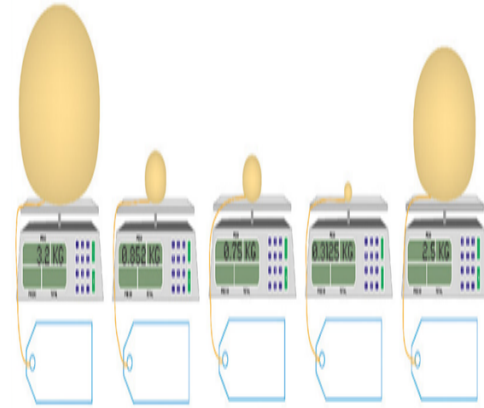
- Para mantener la balanza en equilibrio, al quitar o agregar algo en uno de los platillos, se debe hacer lo mismo en el otro. Si se multiplica o divide lo que hay en un platillo, también se multiplica o divide lo que hay en el otro. Por ejemplo:



- La balanza se desequilibra si agregamos 5 del lado izquierdo. ¿Qué se debe hacer en el platillo derecho para equilibrar la balanza? ¿Cuál es la ecuación resultante?
  - La balanza vuelve a desequilibrarse al dividir lo que hay en el lado izquierdo por 3. ¿Qué se debe hacer en el platillo derecho para equilibrarla? ¿Cuál es la ecuación resultante? ¿Cuál es el valor de  $x$ ?
- Resuelvan los siguientes problemas.
    - Pienso en un número. Cuando le sumo 3.2 obtengo 8.6. ¿Cuál es el número?
    - Pienso en un número. Cuando le resto  $\frac{1}{4}$  obtengo  $\frac{3}{4}$ .
    - Pienso un número. Cuando lo multiplico por 5 y le quito 7 obtengo 3. ¿Cuál es el número?

120 MATEMÁTICAS 1 • Bloque III

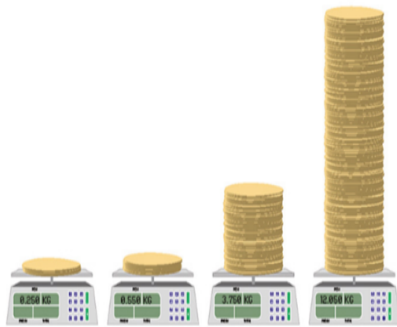
## S12019



## S12019a

- Resuelvan los siguientes problemas y escriban las operaciones en su cuaderno.

- El precio de tortillas en una tienda de autoservicio es de \$11.20. Determinen lo que se debe pagar por la cantidad de tortillas que están sobre cada báscula.



## S12011

Baltasar te presenta un procedimiento para resolver ecuaciones usando balanzas en equilibrio.

En una fábrica se han producido 152 sillas, de las cuales 32 fueron hechas por Abelardo, y el resto las hicieron los otros 3 empleados. ¿Cuántas sillas hizo cada uno de los 3 empleados si hicieron la misma cantidad de sillas cada uno?

¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la incógnita? ¿Cómo se pueden representar las relaciones entre los datos y la incógnita? Analiza la imagen de la derecha y contesta: ¿cómo puedes justificar que  $3x + 32 = 152$  es la ecuación que representa el problema? ¿Cuál es la solución a este problema?

Baltasar usa el método de la balanza, representado en las ilustraciones de abajo, para resolver la ecuación  $3x + 32 = 152$ .



¿Qué cantidad se puede quitar a cada platillo para simplificar la ecuación representada?

¿En cuántas partes se tiene que dividir el contenido de cada platillo para buscar la solución?

¿Cómo se obtiene el valor de la incógnita?

¿Cuáles son las ecuaciones representadas en las ilustraciones de las balanzas? Se obtiene la solución  $x = 40$ . Cada uno de los empleados hizo 40 sillas.

## S12011a

¿Cómo se pueden resolver las ecuaciones de la forma  $ax + b = c$ ?

Se aborda un problema que se puede resolver con el método de la balanza y que se representa en la ilustración de la derecha.

Para obtener el equilibrio entre los platillos de una balanza, se colocaron dos paquetes iguales y una pesa de 5 kg en el primer platillo y en el otro se colocó una pesa de 25 kg.

¿Cuál es la cantidad de masa de cada uno de los paquetes?

Se obtuvo la ecuación  $2x + 5 = 25$  y se resolvió. La masa de cada paquete es de 10 kg.



Para que aprendan a resolver ecuaciones de la forma  $ax + b = c$ , realicen las siguientes actividades.

- Explican y justifican cada uno de los pasos que se siguieron para resolver el problema de la balanza.

$$2x + 5 = 25$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{20}{2}$$

$$2x + 5 - 5 = 25 - 5$$

$$1x = 10$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

- Apliquen el procedimiento anterior para resolver las siguientes ecuaciones:

- $3x + 8 = 38$
- $2x - 15 = 28$

- $6x + 7 = 42$
- $1.7x - 2.3 = 4.5$

## S00136a

### Inicio a partir de lo que sé

Organícense en parejas para subrayar la fracción que corresponde al peso que se muestra en cada báscula de la figura 11.



$$\bullet \frac{85}{10} \text{ kg} \quad \bullet \frac{85}{100} \text{ kg} \quad \bullet \frac{85}{1000} \text{ kg}$$



$$\bullet \frac{6}{10} \text{ kg} \quad \bullet \frac{6}{100} \text{ kg} \quad \bullet \frac{6}{1000} \text{ kg}$$

Fig. 11

- ¿Qué cantidad aparecería en la pantalla si se pesara  $\frac{1}{2}$  kg de tortillas? \_\_\_\_\_

Compartan sus resultados con otras parejas.

S00136b

**Consolido mis aprendizajes**

De manera individual haz lo que se te pide en la siguiente actividad.

1. Escribe en la pantalla de cada báscula de la figura 1.6 los respectivos pesos en notación decimal.

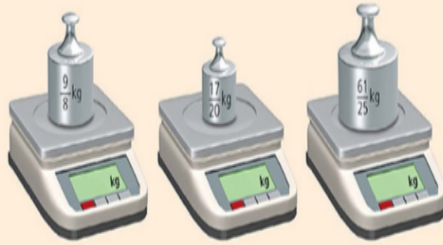


Fig. 1.6

S00136c

**Inicio a partir de lo que sé**

Organícense en parejas para contestar lo siguiente de acuerdo con la figura 17.1.

- a) Si el precio por kilogramo de naranja es \$9.90, ¿cuánto debe pagarse por la cantidad que hay en la báscula? \_\_\_\_\_
- b) Si el precio por kilogramo de huevo es \$28.35, ¿cuál es el costo de lo que hay en la báscula? \_\_\_\_\_
- c) Si se compran 10 kg de huevo, ¿cuál sería su precio? \_\_\_\_\_



Fig. 17.1

Discutan sus resultados con otra pareja y comenten cuánto costarían 1.5 kg de huevo.

S00136d

**Consolido mis aprendizajes**

1. De manera individual resuelve el siguiente problema.

Observa las básculas de la figura 17.4 y contesta las preguntas.



Fig. 17.4

- Si el kilogramo de jamón cuesta \$103.6, ¿cuánto hay que pagar por este producto? \_\_\_\_\_
- Un kilogramo de fresa cuesta \$79.07, ¿cuánto cuesta lo que hay en la báscula? \_\_\_\_\_
- Si el precio del kilogramo de papa es de \$3.75, ¿cuál es el importe total si se compra lo que hay en las 3 básculas? \_\_\_\_\_

Compara tus resultados con los de otros compañeros.

S00136e

**El valor de la incógnita**

En equipos resuelvan las siguientes actividades.

5. Escriban la ecuación que represente la distribución de pesos que mantiene en equilibrio la balanza.



Fig. 19.4

a) ¿Cuál de las siguientes balanzas se obtiene de la anterior y permanece en equilibrio?



Fig. 19.5

b) Expliquen el procedimiento que se hace para obtener la balanza que seleccionaron.

c) ¿Cuál es el valor del peso desconocido? \_\_\_\_\_

S00136f

6. Escriban la ecuación que corresponde a la siguiente balanza.



Fig. 19.6

a) ¿Cuál de las siguientes balanzas se obtiene de la anterior y permanece en equilibrio?



Fig. 19.7

S00136g

b) Expliquen el procedimiento que se hace para obtener la balanza que seleccionaron.

c) ¿Cuál es el valor de x? \_\_\_\_\_

7. Escriban la expresión matemática que corresponde a cada paso para encontrar el valor del peso desconocido.

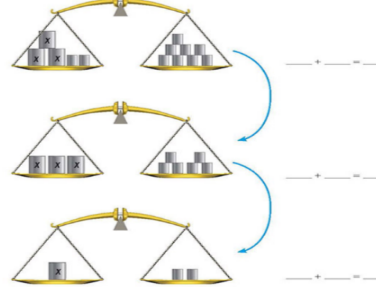


Fig. 19.8

S00136h

2. Escriban y resuelvan la ecuación que representa cada problema.

a) Si la tuerca pesa 13.5 g (Fig. 19.10), ¿cuánto pesa cada tornillo?

Ecuación: \_\_\_\_\_

Solución: \_\_\_\_\_

S12014a

1. Subraya la pesa que equilibre cada balanza.

a)

b)

c)

d)

S12014b

5. Subraya las pesas que equilibren cada balanza. Sólo puedes usar una vez cada pesa.

Conocemos formas de resolver problemas distintas a la que usaste enriquece tu comprensión del problema y tus nociones matemáticas. Por ello, es recomendable comparar con frecuencia tus resultados con los de tus compañeros.

- Explica tu procedimiento a algunos de tus compañeros y escucha el que ellos efectuaron. Comenten qué diferencias hay entre ellos.

S12014c

Escritura decimal de una fracción

1. Trabaja en equipo. Anoten el peso neto de la caja usando una expresión con punto decimal para que la balanza esté equilibrada.



- Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Comenten si saben convertir una fracción en su expresión con punto decimal.

S12014d

Secuencia 4 / lección 63

### 3 Balanzas en equilibrio

1. Observa las balanzas y responde.

a) ¿Qué balanza contiene pesos iguales en ambas bolsas? \_\_\_\_\_

b) ¿Cómo lo sabes? \_\_\_\_\_

S12014e

Un balón pesa medio kilogramo más la mitad de su propio peso. ¿Cuánto pesa?

6

6

=

### S12005a

- d) En una balanza de dos platos se coloca un objeto de peso desconocido en el derecho y una carga formada por varias pesas con un total de 5 kg en el plato izquierdo (figura 3.31). Como la balanza no queda equilibrada, para lograrlo, se le quitan al plato izquierdo dos pesas de  $\frac{1}{4}$  kg y una de  $\frac{1}{2}$  kg, y se le agregan dos pesas de  $\frac{1}{4}$  kg y una de  $\frac{1}{2}$  kg. ¿Cuántos kilogramos pesa la carga del plato derecho?



Figura 3.31

- 2 En grupo, hagan lo siguiente.
- Redacten dos problemas cuya resolución implique operaciones de suma y resta de fracciones. Antes de hacer los cálculos respectivos estimen mentalmente los resultados y después resuelvan los problemas.
  - Discutan cuál es la unidad de estimar resultados mentalmente.
  - Analicen qué otro problema o problemas del ejercicio anterior podían resolverse mediante estimación y expliquen su respuesta.

33

### S12005b

#### Equilibrios e igualdades

- 1 En parejas, analicen la balanza de la figura 3.31 y respondan lo que se pide. Sobre ella se muestran varias pesas con el valor de su peso en gramos. Ambos platos están en el mismo nivel, lo cual significa que están en equilibrio.



Figura 3.31

- Si se agregan 5 gramos al plato A, la balanza se inclinará. En ese caso, ¿se debe añadir o quitar peso al plato B para que siga en equilibrio? ¿Cuánto?
- Si se parte de nuevo de las condiciones de la figura 3.31 y se quitan 10 gramos del plato B, ¿qué se necesita hacer para que la balanza se mantenga en equilibrio?
- Considera nuevamente las condiciones iniciales de la figura 3.31: si se duplica el peso del plato B, ¿qué se debe hacer con el peso del plato A para que la balanza recupere el equilibrio?
- Si en la balanza de la figura 3.31 el peso del plato A se divide entre cuatro, se obtienen 5 gramos. ¿Qué operación debe hacerse con el peso del plato B para que la balanza esté de nuevo en equilibrio?

Una balanza en equilibrio puede verse como una igualdad, por lo que es útil para entender las ecuaciones.

- 2 Escribe enseguida una definición de **incógnita**.

141

### S12005c

- 3 La balanza de la siguiente figura está en equilibrio: el plato A tiene un peso de 50 gramos y el plato B un peso desconocido representado con la letra  $x$ .

- a) Representen con una igualdad los pesos del plato A y del B.



Figura 3.32

- Si al plato B de la balanza de la figura 3.32 se le agregan 10 gramos, ¿qué peso se debe añadir al plato A para que la balanza siga en equilibrio? Expresen esa relación con una igualdad.
- A partir del inciso anterior, ¿qué necesitan hacer para obtener la igualdad que escribieron en el inciso a)?
- Si volvemos a la condición inicial de la balanza de la figura 3.32 y se triplica el peso del plato B, ¿qué peso debe tener el plato A para que la balanza siga en equilibrio? Expresen esa relación con una igualdad.
- A partir del inciso anterior, ¿qué se necesita hacer para regresar a la igualdad obtenida en el inciso a)?
- Si al peso del plato A de la balanza de la figura 3.31 se divide entre 2, ¿qué debe hacerse con el peso del plato B? Expresen la relación como una igualdad.
- A partir del inciso anterior obtengan la igualdad que escribieron en el inciso a).

### S12005d

- 1 La balanza de la figura 3.33 está en equilibrio; sobre ella se muestran varias pesas con el valor de su peso en gramos. ¿Cuál es el valor de una pesa marcada con la letra  $x$ ?



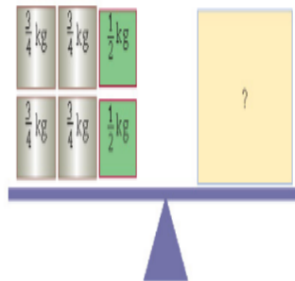
Figura 3.33

142

- En el plato A, ¿cuál es el valor total de los pesos conocidos?
- Expresen como una suma el peso de las pesas marcadas con  $x$ .
- Expresen algebraicamente el peso que hay en cada uno de los platos.
- Expliquen por qué las expresiones obtenidas en el inciso anterior son equivalentes; y escriban la igualdad que las relaciona.
- Quiten a ambos platos el valor del peso conocido del plato A y dibujen el resultado en su cuaderno.
- Escriban la ecuación que representa la balanza del inciso anterior.
- Realicen la operación necesaria para obtener el valor de  $x$  de la ecuación. Representen en su cuaderno con un dibujo cómo quedaría la balanza.
- ¿Cuánto vale  $x$ ?

### S00135a

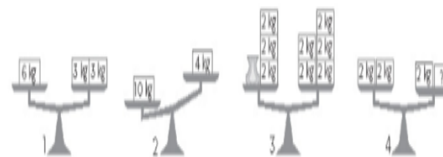
9. La siguiente figura representa una balanza. Para que esté en equilibrio determinen el valor del objeto del lado derecho.



### S00135b

#### Identifica

Observa las siguientes balanzas y reflexiona en equipos de cuatro integrantes cómo se debe representar cada situación.



S00135c

▼ **Decide** .....

Observa las siguientes figuras y contesta en tu cuaderno.

1. La balanza A está equilibrada.

a) ¿Cuántos recuadros faltan para equilibrar la balanza B?

b) Dibuja las balanzas en equilibrio.



c) ¿Qué se necesita para lograr el equilibrio en la balanza C?



S00135d

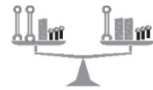
2. Pon atención en la balanza, ¿está equilibrada? Expresa la igualdad numérica.



S00135e

► **Identifica** .....

En la balanza siguiente se observan piezas del taller mecánico de Juan.



139 Patrones y ecuaciones

▼ **Construye**

Subraya cuál de las siguientes acciones efectuaría Juan manteniendo el equilibrio en la balanza.

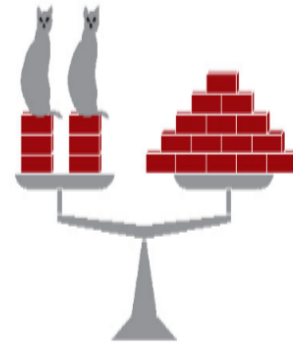
1. Pasar los tres tornillos del platillo izquierdo al derecho.
2. Añadir dos tornillos en cada platillo.
3. Quitar tres tuercas en cada platillo.
4. Pasar la llave del platillo derecho al izquierdo.
5. Quitar las dos llaves del platillo izquierdo y la del derecho.

▼ **Comunica**

Comenta con tus compañeros qué sucedería en cada caso. Escucha sus opiniones con respeto e intercambia puntos de vista que ayuden al trabajo colaborativo.

S00135f

En la siguiente balanza cada ladrillo pesa un kilogramo y se encuentra en equilibrio.



S00135g



**Reto** .....

¿Cómo se puede equilibrar la balanza de dos platillos, si en el platillo  $x$  hay cinco gramos más que en el platillo  $w$ , y si además están disponibles tres pesas de 10, 15 y 20 gramos?



143 Patrones y ecuaciones

S12017

c) En un taller de laminado se compraron 250 láminas cuya masa es de aproximadamente 1700 kg. ¿Cuál es la masa de cada una de esas láminas?



### S12009a

#### Actividad 2 Trabajando con balanzas

La balanza es un instrumento que se utiliza para comparar los pesos de objetos, es decir para pesarlos. Una balanza tiene las siguientes partes:

- Las pesas, que son barras de metal con diferentes masas, por ejemplo 2 kg, 1 kg,  $\frac{1}{2}$  kg.
- Dos platillos recipientes, de metal o madera.
- Un balancín, barra de metal o madera apoyada en equilibrio en su punto medio.



Si se desea pesar un kilogramo de arroz, se coloca la pesa de un kilogramo en uno de los platillos y en el otro se va agregando arroz hasta que los dos platillos de la balanza estén equilibrados a la misma altura. Supón que tienes una pesa de 4 kg en el platillo izquierdo de una balanza. Para que los platillos estén a la misma altura podemos colocar dos pesas de 2 kg en el platillo derecho, o una de 1 kg con una de 3 kg. El signo + se utiliza para indicar que se ha agregado la pesa a la derecha del signo.

es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Su solución se verifica para unos valores concretos de la incógnita. **Ecuación lineal o de primer grado:** Es una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una incógnita a la primera potencia. En el sistema cartesiano representan rectas.



Lectón 13 131

### S12009b

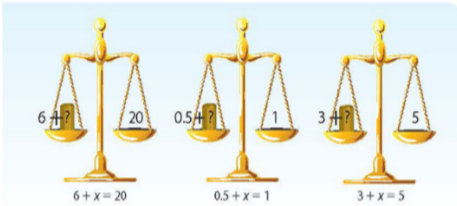
Observa los dibujos de las siguientes balanzas; en ellas hay una pesa cuya masa se desconoce pero hace que los platillos estén equilibrados a la misma altura; obtén su valor en cada caso.



### S12009c

#### Actividad 3 Balanzas y ecuaciones

A partir de ahora se hará referencia al valor de la masa desconocida con la letra x. Con esta consideración, cada situación de las balanzas de la Actividad 2 pueden escribirse como igualdades, llamadas ecuaciones, de la siguiente manera:



a) Plantea las ecuaciones siguientes como situaciones de balanzas y encuentra el valor de x.

$$5 + x = 34 \quad 2.5 + x = 4 \quad 0.25 + x = 0.5$$

b) Con base en los ejercicios anteriores, encuentra un método o regla para resolver la ecuación. Discute tus estrategias con tus compañeros y tu profesor.

### S12002a

Continúen trabajando en equipo y resuelvan lo siguiente:



2. Antiguamente se utilizaba una balanza de platillos, como la que se ilustra a la izquierda, para pesar objetos. Si la balanza se mantenía en equilibrio, significaba que había el mismo peso en cada uno de los platillos.

Consideren las tarjetas que se muestran a continuación como objetos cuyo peso en kilogramos es el que tienen anotados. Si se colocan dos tarjetas en cada platillo, ¿qué pares de ellas podrían mantener la balanza en equilibrio?

26



De acuerdo a su respuesta anterior, ¿cuánto pesaría el par de tarjetas en cada platillo de la balanza? \_\_\_\_\_

Comparen las tarjetas que colocaron en un mismo platillo, ¿qué tienen en común? \_\_\_\_\_

¿Qué pasos siguieron para determinar la suma del par de tarjetas en cada platillo? \_\_\_\_\_

En reunión plenaria, bajo la guía de su maestro, comparen las respuestas de los equipos.

### S12002b

#### Segunda sesión Como una balanza

**Mente en acción**  
¿Te puedes acordar...? ¡Intenta!

La expresión  $3 + 5 + 2 = 10$  podemos compararla con una balanza en equilibrio. En un platillo se ubicaría el primer miembro de la igualdad, que es  $3 + 5 + 2$ , y en el otro platillo se ubicaría el segundo miembro de la igualdad, que es 10. Piensen en estos números, como si se tratase de kilogramos. ¿Qué sucedería en la balanza si quitáramos del primer platillo 2 kg? ¿Qué platillo se iría hacia abajo? Habiendo quitado 2 kg del platillo izquierdo, ¿qué se debe hacer en el platillo derecho para restaurar el equilibrio? Coméntenlo en el grupo.

Tomando este mismo ejemplo, comenten qué debe hacerse en el platillo derecho para conservar el equilibrio, si:

- En el platillo izquierdo se agregan 4 kg.
- El total del platillo izquierdo se multiplica por 3.
- El total del platillo izquierdo se divide entre 2.

Si esta balanza estaba en equilibrio, ¿a qué platillo se le quitó peso?

### S12017

c) En un taller de laminado se comparan 250 láminas cuya masa es de aproximadamente 1700 kg. ¿Cuál es la masa de cada una de esas láminas?



### S12022a

#### ► Mínimo común múltiplo (MCM)



I. Isabel y Aldo juegan con una balanza y pesas de plástico que simulan diversos pesos. Cada color representa un mismo peso, por ejemplo, las pesas amarillas simulan 12 kg, en tanto que las azules simulan 15 kg. El juego consiste en lograr equilibrar la balanza usando sólo pesas del mismo color en cada platillo.

Gana quien identifique primero cuál es el mínimo número de pesas del color seleccionado que debe colocar para equilibrar con las que tenga que poner su oponente.

Isabel decidió usar las pesas de 12 kg y Aldo usará las de 15 kg en la balanza.

a) ¿Cuál es el mínimo número de pesas que debe poner cada uno de ellos en su platillo para que la balanza esté en equilibrio? \_\_\_\_\_

b) Escribe los primeros diez múltiplos de cada uno de estos números.

i) Múltiplos de 12: \_\_\_\_\_

ii) Múltiplos de 15: \_\_\_\_\_

c) Encierra en un círculo los múltiplos que aparezcan en ambas listas. A estos números se les llaman **múltiplos comunes** de 12 y de 15. ¿Cuál es el menor de ellos? \_\_\_\_\_ El menor se denomina **mínimo común múltiplo (MCM)** de 12 y de 15.



### S12022b

II. Observa cuánto pesa cada uno de los paquetes de carne.



a) Si Emma quiere comprar  $2\frac{1}{2}$  kg de carne, ¿qué paquetes debe elegir? Realiza la suma. \_\_\_\_\_

b) Si compra los cuatro paquetes, ¿cuántos kilogramos de carne llevará? \_\_\_\_\_ Reínete con otros compañeros y revisen el procedimiento que siguieron para efectuar la suma.

c) Si sólo hubiera paquetes de carne del mismo peso que los que aquí se muestran y se necesitara comprar  $5\frac{1}{2}$  kg, ¿cuántos paquetes y de qué peso se deberían comprar? Comparen su resultado con el de otros equipos y comenten cómo hicieron para encontrar el resultado que proponen.



Reínete con otros compañeros y diseñen una forma de verificar los resultados de este problema usando tiras de papel y la regla como en la actividad I.

### S12022c

#### ► Resolución de ecuaciones de primer grado



I. Reínete con dos compañeros para resolver estos problemas.

a) En una bodega de abarrotes venden productos iguales en distintas presentaciones, es decir, contienen distinta cantidad del mismo producto.

i) Ramiro sabe que la bolsa de azúcar grande pesa 2 kg, pero no sabe cuánto pesa cada una de las bolsas pequeñas de azúcar. Para ello, usó una balanza y las equilibró de la siguiente manera:



¿Cuánto pesa cada una de las bolsas pequeñas? \_\_\_\_\_

### S12022d

ii) Ramiro observó que en la bolsa de frijoles que vende no se especificó el peso de su contenido. Encontró que en la balanza se equilibran los pesos de esta forma:



Si cada una de las latas pesa 140 g, ¿cuánto pesa la bolsa de frijoles? \_\_\_\_\_

### S12022e

iii) Observa con atención la siguiente balanza.



Si se desconoce el peso de las latas del platillo izquierdo, ¿cuántos kilogramos pesará la lata? \_\_\_\_\_

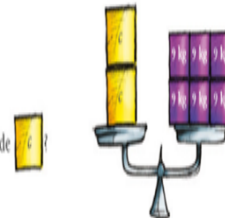


### S12022f

III. Con ayuda de una balanza, Ramiro está deduciendo el peso de algunos productos en los que no estaba indicada la cantidad. De algunos productos sí conoce el peso. Ayúdalo a deducir el peso de los siguientes productos.

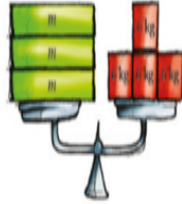
de primer grado, ingresa a:  
[http://www.compartes.es/mates\\_interactiva/Definitivo%20Ecuaciones%20de%20primer%20grado.html](http://www.compartes.es/mates_interactiva/Definitivo%20Ecuaciones%20de%20primer%20grado.html)  
 (consulta: 22/09/15)

a) ¿Cuál es el peso de \_\_\_\_\_?



S12022g

b) ¿Cuánto pesa una lata de ?



Escribe en la ilustración el peso que encuentre para cada uno de los productos marcados con una  $c$  y una  $m$ . Realiza las sumas correspondientes y verifica que el peso de los productos en un platillo de la balanza sea igual al peso de los productos en el otro platillo.

S12022h



Para practicar el planteamiento de problemas de manera algebraica, ingresa a: <http://www.comunicacion.com/imagenes/curso/fech/tema09/tema09/tema09021.htm> (Consulta: 22/09/15).



Para resolver una ecuación se debe despejar la incógnita. Esto quiere decir que se debe aislar, de un lado del signo de igualdad, la literal que representa la incógnita.

Una ecuación puede visualizarse como una balanza en equilibrio, esto es, que el valor de un miembro equivale exactamente al valor del otro miembro.

Cuando se resuelve una ecuación se tiene que asegurar que la igualdad entre ambos miembros no se altere. Supongamos que se suma una cantidad en uno de los lados, entonces es preciso sumar esa misma cantidad en el otro lado.

Por ejemplo, en la ecuación  $x + 5 = 17$ , la  $x$  debe quedar sola en un lado de la ecuación y eso se logra restando 5 en cada miembro:

$$x + 5 - 5 = 17 - 5$$

La razón por la que se resta precisamente 5 es que de ese modo se elimina el 5 del lado izquierdo de la igualdad, porque  $5 - 5 = 0$ .

Queda entonces  $x = 17 - 5 = 12$ . Solo falta realizar la operación:  $x = 17 - 5 = 12$ .

Si se resta, se multiplica o se divide una cantidad en uno de los miembros, se debe efectuar lo mismo en el otro, por ejemplo:  $3x = 21$ .

Hay que dividir entre 3 ambos lados de la igualdad para hacer que la incógnita —que en esta ecuación es  $x$ — quede aislada. Así pues:

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

Observa que al dividir  $\frac{21}{3}$  el resultado es 7, y este 7 puede omitirse, ya que  $7x = x$ .

S12022i

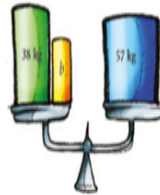


Blancas mueven



1. Escribe la ecuación que muestra la situación de la balanza.

¿Cuánto pesa ?



S12022j

a) Escribe la ecuación que muestra la situación de la balanza.

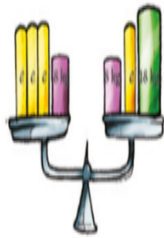
¿Cuánto pesa ?



b) Escribe la ecuación que muestra la situación de la balanza.

S12022k

¿Cuánto pesa ?



Escribe arriba de las balanzas el peso que encuentre para cada uno de los productos marcados con alguna letra. En cada balanza, suma el peso de los productos que están en un platillo y verifica que sea igual a la suma del peso de los productos en el otro platillo.

S12016a



## En una fracción de segundo

Tema: Números y sistemas de numeración

Contenido: Conversión de fracciones decimales y de decimales a su escritura decimal y viceversa.

### Para recordar

La siguiente balanza funciona de esta manera: en el platillo del lado izquierdo está un número fraccionario, y para que la balanza pueda estar en equilibrio tienes que escribir el número decimal o fraccionario equivalente en el platillo del lado derecho.

• ¿Cuáles son los números que deben ir en cada uno de los platillos para que la barra de la balanza de la figura 1.1 se equilibre horizontalmente?

OBJETIVO

**Número fraccionario.** Número que puede ser representado de la forma  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son números enteros y  $b$  es diferente de 0. Al número  $a$  se le llama numerador y al número  $b$  denominador.

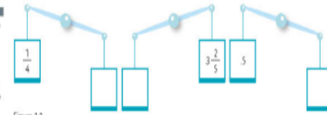


Figura 1.1

- ¿Hay alguna relación entre los números usados para equilibrar la balanza?
- ¿Qué dificultades tuviste para encontrar los números?
- ¿Cómo puedes comprobar que los números que pusiste son correctos para equilibrar la balanza?
- Comenten en clase lo realizado y las respuestas a estas preguntas.

S12016b

Las barras de las balanzas de la figura 3.1 se equilibran horizontalmente con sumas o restas de fracciones. Completa las operaciones para que estén en equilibrio:

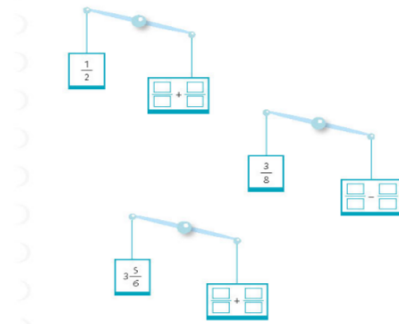


Figura 3.1 Balanzas de fracciones.

S12016c

**¡A practicar! (Resuelve en tu cuaderno) (Continuación)**

1. En la figura 3.3 las pesas azules son iguales. Si se desea que las balanzas queden equilibradas:

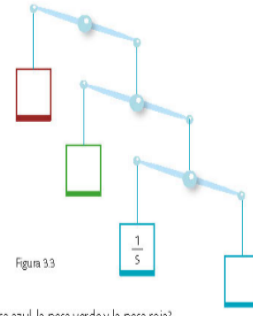


Figura 3.3

¿Cuánto deben pesar la pesa azul, la pesa verde y la pesa roja?

S12016d

**Curiosidades**

**¿Kilos de 378 gramos?**

El peso de los cuerpos, es decir, la fuerza de atracción de la gravedad con la que son atraídos por el cuerpo celeste donde se encuentren, depende de la masa y del tamaño de dicho cuerpo celeste. Debido a que cada planeta del sistema solar tiene diferente tamaño y, por lo tanto, diferente fuerza de gravedad respecto de los demás, el peso de los objetos varía en cada uno de ellos. Por ejemplo, un kilo de tortillas pesaría sólo 0.378 kg en Mercurio, pero en Júpiter pesaría más de  $2\frac{1}{2}$  kg. Observa la figura 17.5. ¿Te gustaría saber cuál es tu peso en otros planetas? Puedes saberlo completando la tabla 17.3. En el renglón que corresponde a la Tierra, en la columna donde dice Peso, escribe cuántos kilogramos pesas. Si es necesario, puedes ayudarte de tu calculadora.

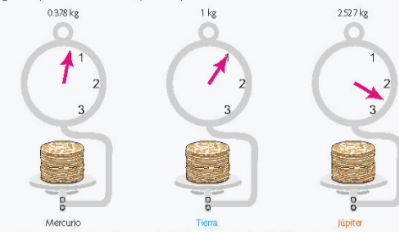
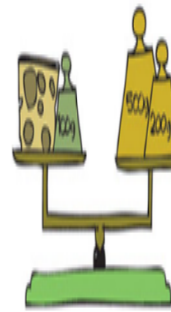


Figura 17.5 Peso de un kilogramo de tortillas en tres planetas del sistema solar.

S12013a

a) La balanza está en equilibrio.



Ecuación:

\_\_\_\_\_

S12013b

b) El sube y baja está en equilibrio.

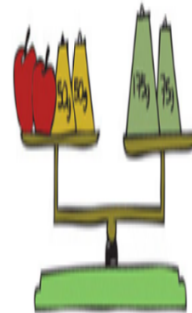


Ecuación:

\_\_\_\_\_

S12013c

c) La balanza está en equilibrio y las manzanas pesan lo mismo.



Ecuación:

\_\_\_\_\_

S12013d

e) La balanza está en equilibrio y los botes pesan lo mismo.

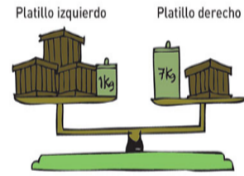


Ecuación: \_\_\_\_\_

150

S12013e

2 Subraya las acciones que mantienen la balanza en equilibrio.

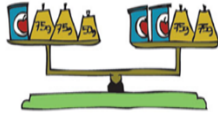


- a) Quitar una caja del platillo izquierdo
- b) Quitar una caja de cada platillo
- c) Agregar una pesa de 7 kg del lado izquierdo y una caja del lado derecho
- d) Pasar la pesa de 1 kg del platillo izquierdo al derecho
- e) Cambiar la pesa de 7 kg por una de 6 kg y una de 1 kg
- f) Agregar una caja en cada platillo
- g) Quitar la pesa de 1 kg y cambiar la pesa de 7 kg por una de 6 kg
- h) Agregar tres cajas y una pesa de 1 kg en el platillo izquierdo, y una caja y una pesa de 1 kg en el derecho
- i) Intercambiar lo que está en los platillos
- j) Agregar una pesa de 3 kg en cada platillo

S12013f

3 Escribe la ecuación que corresponde a la balanza y anota tres acciones que puedas llevar a cabo sin que se altere su equilibrio.

- Los botes pesan lo mismo.



Ecuación: \_\_\_\_\_

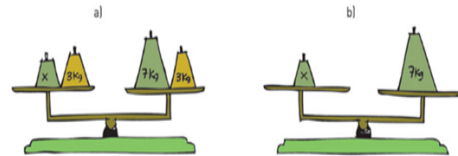
- a) \_\_\_\_\_
- b) \_\_\_\_\_
- c) \_\_\_\_\_

4 Discute con un compañero tu respuesta de la pregunta inicial.

Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma  $ax + b = c$ ,  $ax = b$ ;  $ax + b = c$ , utilizando las propiedades de la igualdad, con  $a, b$  y  $c$  números naturales, decimales o fraccionarios.

S12013g

1 Escribe ecuaciones que representen la situación de estas balanzas en equilibrio.



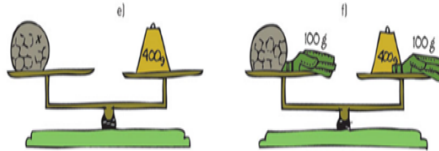
- Contesta.

c) ¿Qué cambio se efectuó en la balanza del inciso a) para obtener la del inciso b)?

d) ¿Cuáles son las soluciones de las ecuaciones que anotaste?

Ecuación a): \_\_\_\_\_ Ecuación b): \_\_\_\_\_

S12013h



- Contesta.

g) ¿Qué cambio se efectuó en la balanza del inciso e) para obtener la del inciso f)?

h) ¿Cuáles son las soluciones de las ecuaciones que anotaste?

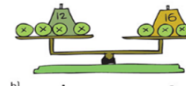
Ecuación e): \_\_\_\_\_ Ecuación f): \_\_\_\_\_

152

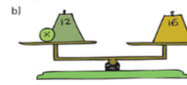
S12013i

2 Escribe qué acciones se efectuaron en cada balanza y la ecuación que resulta.

a) La balanza está en equilibrio y las bolas pesan lo mismo.

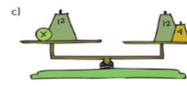


Ecuación: \_\_\_\_\_



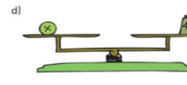
Acción: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_



Acción: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_



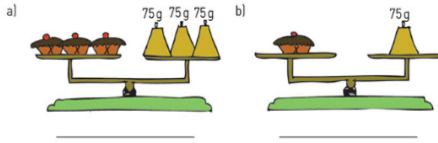
Acción: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_

¿Las ecuaciones que anotaste son equivalentes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

S12013j

1 Escribe una ecuación que represente la situación de estas balanzas.



• Contesta.

c) ¿Qué cambio se efectuó en la balanza del inciso a) para obtener la del inciso b)?

d) ¿Qué harías para pasar de la balanza del inciso b) a la del inciso a)?

e) ¿Cuáles son las soluciones de cada ecuación que anotaste?

Ecuación a): \_\_\_\_\_ Ecuación b): \_\_\_\_\_

Si se multiplican ambos miembros por la misma cantidad, o se dividen entre ella, se obtiene una ecuación equivalente.

S12013k

2 Escribe qué acciones se efectuaron en cada balanza y la ecuación que resulta. La balanza está en equilibrio y los libros pesan lo mismo.

a) Acción: \_\_\_\_\_ Ecuación: \_\_\_\_\_

b) Acción: \_\_\_\_\_ Ecuación: \_\_\_\_\_

c) Acción: \_\_\_\_\_ Ecuación: \_\_\_\_\_

d) Acción: \_\_\_\_\_ Ecuación: \_\_\_\_\_

e) Acción: \_\_\_\_\_ Ecuación: \_\_\_\_\_

f) Acción: \_\_\_\_\_ Ecuación: \_\_\_\_\_

¿Las ecuaciones que anotaste son equivalentes? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

S00137a

Individual

En el departamento de salchichonería de una tienda departamental, Jaime pidió  $\frac{1}{2}$  kg de jamón y en la pantalla de la báscula electrónica apareció la expresión 0.500 kg, como se muestra a la izquierda. ¿Qué número mostrará la pantalla si pide un kilo y  $\frac{1}{4}$  de salchichón? ¿Qué fracción de kilogramo pidió de tocino si la expresión en la pantalla fue 0.750 kg? Después de responder las preguntas anteriores en tu cuaderno, compara con un compañero los resultados que obtuviste.

S00137b

4. Observa la siguiente balanza.

a) ¿Cuáles de las siguientes pesas pondrías en el otro plato para mantener el equilibrio?

b) Escribe tres juegos distintos de pesas de esta colección que sirvan para nivelar la balanza.

S00137c

5. Observa la siguiente balanza.

a) ¿Cuáles de las siguientes pesas pondrías en el otro plato para equilibrarla?

b) Escribe tres juegos distintos de pesas de esta colección que sirvan para nivelar la balanza.

S00137d

4. Escribe una ecuación que describa la situación del siguiente dibujo y encuentra el valor de x.

### S00140a

1. La siguiente balanza se encuentra en equilibrio; los botes del mismo color tienen el mismo peso.



- Subrayen las acciones que desequilibrarían la balanza.
  - Agregar un bote del mismo color en cada platillo.
  - Quitar la pesa de 4 kg en ambos platillos.
  - Pasar los dos botes azules del platillo derecho al platillo izquierdo.
  - Retirar todos los botes de ambos platillos.
- ¿Qué rompe el equilibrio de esta balanza? \_\_\_\_\_
- Señalen dos acciones que podrían conservar el equilibrio de la balanza. \_\_\_\_\_
- ¿Qué operación (suma, resta multiplicación o división) debe realizarse para obtener el peso total en cualquiera de los platillos? \_\_\_\_\_
- ¿Qué significa que la balanza esté equilibrada? \_\_\_\_\_
- Si llamamos  $x$  al peso desconocido que contiene uno de los botes azules, ¿cuál sería el peso total del platillo derecho? \_\_\_\_\_, ¿y el del platillo izquierdo? \_\_\_\_\_
- Utilizando el resultado de la respuesta anterior e igualando el peso total de los platillos, es posible escribir una ecuación. ¿Cuál es dicha ecuación? \_\_\_\_\_
- Con base en la respuesta anterior, deduzcan el peso del bote azul. \_\_\_\_\_
- Comparen sus respuestas en grupo y comenten los procedimientos que aplicaron. Con asesoría de su profesor, construyan sus conclusiones y anótenlas en su cuaderno.

### S00140b

Organícense en equipos para resolver lo siguiente.

**Actividad 1.** Cada una de las siguientes balanzas corresponde a una ecuación. Determinen el proceso para encontrar el valor de la incógnita. Para ello, agreguen o quiten elementos para obtener ecuaciones más sencillas. Propongan los valores de las pesas en cada balanza.

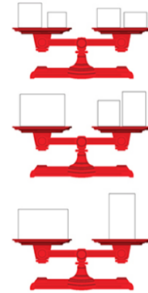
#### Investiga

Indaga en la biblioteca en qué momento el ser humano comenzó a utilizar números negativos, y la interpretación que se le dio al signo menos (-) que los acompaña.

a) Ecuación:  $6x + 2 = 5x + 6$   
 $x =$  \_\_\_\_\_

b) Ecuación:  $5x = 3x + 18$   
 $x =$  \_\_\_\_\_

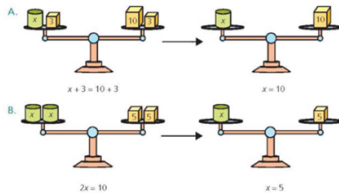
c) Ecuación:  $4x = 32$   
 $x =$  \_\_\_\_\_



### S00141a

#### IDENTIFICA

Observa las balanzas y las ecuaciones que las representan:



El uso de las balanzas en equilibrio nos sirve para entender qué sucede en una ecuación al sumar, restar, multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación para que se mantenga la igualdad y con ello encontrar el valor de la incógnita.

#### CONSTRUYE

- Para entender lo anterior, contesta con sentido lógico las siguientes preguntas.
- Si una balanza está en equilibrio, ¿qué significa?
  - Al pasar de las balanzas de la izquierda a la derecha, ¿se conserva el equilibrio?
  - ¿Qué sucede con las ecuaciones que las representan?
  - Si en los dos platillos de la balanza A se retira la pesa 3, ¿se mantiene el equilibrio?
  - ¿Qué ocurre si se añaden las pesas de 3 a ambos platillos de la segunda balanza?
  - En B al pasar de la balanza de la izquierda a la derecha, ¿equivale a dividir entre 2 a los miembros de la ecuación?

**Ten en cuenta**

La ecuación  $2x + 8 = 10$  tiene una cantidad infinita de ecuaciones equivalentes. Dos de ellas son:  $6x + 24 = 30$  y  $x + 4 = 5$  (¿Cómo comprobarías que son equivalentes?)

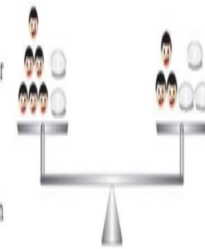
### S00141b

#### Balanza algebraica

4.2 La balanza que se encuentra a la derecha está en equilibrio.

Sabemos que es un dato conocido y es un dato por conocer.

- Plantea la ecuación que corresponda a la balanza.
- Si el valor de es equivalente a 3 kg, ¿cuál es la ecuación que representa?
- Determina el valor de para que la balanza mantenga el equilibrio.

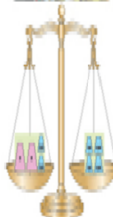


### S00142a

En nuestra vida se presentan situaciones que se pueden resolver de varias maneras. Por ejemplo, imagina que en una taquería don Pedro y su hijo comieron 10 tacos y tomaron 2 refresco de \$10.00, mientras que otras personas comieron 8 tacos, pero tomaron 4 refresco de \$10.00. Al final, don Pedro pagó lo mismo que las otras personas. ¿Cuál es el precio de cada taco?

Este problema puede resolverse por tanteo o por cálculo mental; sin embargo, para éste y otros problemas semejantes, otra manera de hallar la solución es planteando una ecuación.

- ¿Qué es una ecuación?
- ¿Cómo puede resolverse una ecuación?
- ¿Cuál sería un ejemplo de algún problema que se pueda modelar como una ecuación de la forma  $ax + b = cx + d$ ?



Aplicación de las ecuaciones. Balanza en equilibrio.

$3x + 20 = 100$

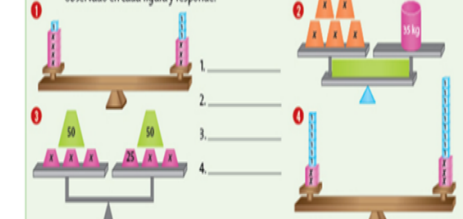


### S00142b

#### PARA COMENZAR

Reúnete con un compañero y con el apoyo del profesor, desarrollen la actividad propuesta.

1. Las balanzas mostradas en las figuras siguientes están en equilibrio. Escribe sobre la línea la ecuación de primer grado de la forma  $ax + b = cx + d$  que corresponda según lo observado en cada figura y responde.

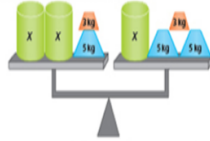


S00142c

### El empleo de la balanza para modelar una ecuación de primer grado

Reúnete con un compañero y, con el apoyo del profesor, desarrollen la actividad propuesta. Analicen en detalle la balanza mostrada en la imagen. Con los objetos distribuidos de esa manera, la balanza se encuentra en equilibrio. Cuando hayan identificado todos los elementos mostrados, procedan a resolver lo que se solicita.

**PARA SABER MÁS**  
Una ecuación es una igualdad matemática que puede compararse a una balanza de dos platillos. Para mantener el equilibrio, lo que se agregue o sustraiga a un lado de la balanza, se tiene que agregar o sustraer exactamente igual en el otro lado.



1. En cada uno de los incisos, escriban una "E" en las acciones que mantienen el equilibrio en la balanza y una "D" en las que causen desequilibrio.

188

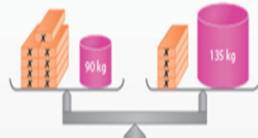
S00142d

Etapa	Situación en la balanza	Ecuación
Inicio		Ecuación 1
1		Ecuación 2
2		Ecuación 3
3	Resultado	Ecuación 4

S00142e



**Reto** Todos los ladrillos de esta balanza en equilibrio pesan lo mismo. Escribe la ecuación que modela esta situación, luego averigua cuánto pesa un ladrillo y comprueba que el resultado obtenido sea correcto.



Resuelve el mismo problema, pero ahora en lugar de utilizar la variable  $x$  utiliza la variable  $y$ .

S00145b

La fiesta

Elda y Elisa, dos amigas de la secundaria, fueron juntas al supermercado a comprar algunas golosinas porque en la noche tendrían una fiesta. Elda dijo que pesaban lo mismo una bolsa grande de dulces y una botella de refresco que tres botellas de refresco y una bolsa chica de dulces; por el contrario, Elisa pensaba que pesaban más las tres botellas de refresco más la bolsa chica de dulces. ¿Quién tiene razón?



182 Matemáticas • Bloque IV

S00145d



### Ejercicios y aplicaciones



1. Representa el siguiente problema, para ello utiliza la balanza que aparece a la izquierda.
  - En el platillo de la derecha dibuja cinco círculos y dos cuadrados de 1 kg cada uno.
  - En el platillo de la izquierda dibuja tres círculos y ocho cuadrados de 1 kg cada uno.

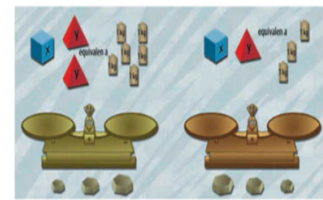
La situación muestra que cinco círculos más dos cuadrados pesan lo mismo que tres círculos más ocho cuadrados.

2. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

S00145e

Ecuaciones e igualdades

Organicen parejas de trabajo y lleven a cabo la siguiente actividad. En el salón de Tamara, en la clase de matemáticas, armaron algunos cuerpos geométricos y los llenaron de arena para comparar volúmenes. La profesora les pidió que con el material del salón y con esas mismas figuras representaran una situación que diera lugar a dos ecuaciones diferentes. Observa la imagen, ¿cómo hacerlo?

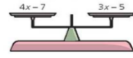


212 Matemáticas • Bloque V

### S00148abc

**IDENTIFICA**

Observa la balanza:



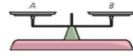
Encuentra el valor de la incógnita  $x$ , tal que la balanza:

- se incline a la derecha.
- se incline a la izquierda.
- consiga el equilibrio.

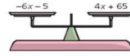
**CONSTRUYE**

Analiza el ejemplo anterior y explica

- Para qué valor de  $x$  la balanza está equilibrada?
- ¿Qué tipo de ecuaciones se utilizan en las situaciones anteriores?
- ¿Qué procedimiento empleaste para resolverlas?
- Observa la siguiente balanza:

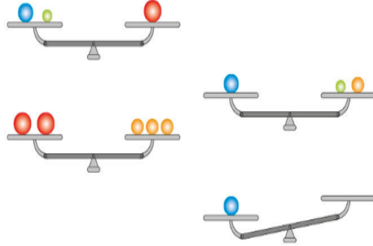


- Escribe una expresión algebraica con una variable en  $A$  y otra en  $B$  para que la balanza esté equilibrada.
- ¿Qué harías para que esta balanza se incline hacia la izquierda?



### S00153

f) ¿Con cuántas canicas verdes se equilibra una azul?



45. Plantear un sistema de ecuaciones".  
 • GIS, segundo grado. Tema 46. Resolución de sistemas de ecuaciones".  
 • GIS, segundo grado. Tema 47. Representación gráfica de un sistema de ecuaciones.

Contesta los reactivos y verifica tus respuestas. Utiliza los recursos que se proponen para representar con literales los valores desconocidos de un problema y usarlos para plantear y resolver algebraica y gráficamente un sistema de ecuaciones.

Coordinados por su profesor, expongan en el grupo sus propuestas de solución a los problemas anteriores. Escriban en sus cuadernos las conclusiones grupales.

### S00149

**Juego de la balanza**

a) La maestra de Matemáticas de Dori y Nori propuso el siguiente juego: en una balanza de brazos iguales, Dori debe colocar, en un brazo, un cubo elegido al azar de entre un conjunto de seis cubos iguales en apariencia, pero con distinta masa: tres cubos son de 95 gramos y los otros tres, de 105 gramos.



Fig. 5.1

Luego Nori debe escoger otro cubo al azar y colocarlo en el otro brazo de la balanza. Dori suma un punto si la balanza se equilibra perfectamente; en caso contrario, el punto será para Nori. Ganará quien acumule primero cinco puntos.

- Según Nori, como la balanza tiene brazos iguales y hay la misma cantidad de cubos de un peso que del otro, el juego es justo y legal. ¿Están de acuerdo? Expliquen y compartan su opinión.
- ¿Cómo podrían comprobar si Nori tiene o no razón?
- Si Dori coloca un cubo en la balanza, ¿cuál es la probabilidad de que gane cuando Nori coloque el suyo?
- ¿Cuál es la probabilidad de que Nori gane el punto?
- Entonces hay un jugador que lleve ventaja en este juego? Si su respuesta es afirmativa, indiquen quién es y por qué; si es negativa, propongan cambios en las reglas para que el juego sea justo.

### S00157

1. Encuentren dos números que cumplan la condición  $x^2 + 2x = 1$



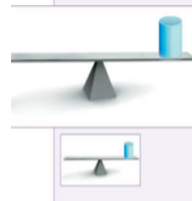
Figura 14.2

- Iguala la ecuación a cero para resolverla.
- ¿Puede resolverse la ecuación por el método de factorización? Justifica la respuesta.
- Identifica los coeficientes para resolver el problema por fórmula general:  $a =$   $b =$   $c =$
- Sustituye los coeficientes en la fórmula y después realiza los cálculos indicados.
- Escribe las soluciones de la ecuación.  $x_1 =$   $x_2 =$

### S00174

Dibuja en el lado izquierdo de la balanza un cubo que tenga capacidad para un litro de agua. Anota la medida de su arista. En el lado derecho escribe cuál debe ser el peso del cilindro para que la balanza esté nivelada.

- Si se tuviera una mini balanza y del lado izquierdo se pusiera un cilindro de diez gramos, ¿cuánta agua cabría en el pequeño cubo que nivelara la balanza?
- Analiza cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Escribe  (verdadero) o  (falso) en el recuadro, según sea el caso.



- En 1 000  $\text{cm}^3$  caben 10 litros
- Diez metros cúbicos de agua pesan diez toneladas
- Como en la Luna un objeto pesa la sexta parte de lo que pesa en la Tierra, una botella de 600 ml de agua, en la luna pesa 100 g.
- En un terreno de 100  $\text{m}^2$  la lluvia alcanza 1 dm de altura. La nube arrojó 10 000 litros de agua.

### S00175a

4. Observa la siguiente balanza:



• Si cada canica roja pesa 30 gramos, ¿cuánto pesa cada canica verde?

### S00175b



la posición de cada uno tomando como punto inicial la posición de julio y el tiempo transcurrido.

- Resuelve el sistema de ecuaciones anterior con el método que más convenga.
  - ¿Cuál es la solución del sistema?
  - ¿Cuánto tiempo pasará para que Julio alcance a Ricardo?
  - ¿A los cuántos metros Julio alcanzará a Ricardo?

#### Practica

- Completa este sistema de ecuaciones para que su solución sea  $x = 5, y = 2$ .  
 $4x + 5y = \dots$        $4x - 3y = \dots$
- Observa estas dos balanzas. Si todos los conejos pesan lo mismo y el tigre cachorro pesa lo mismo, ¿cuánto pesan el tigre cachorro y cada conejo?
- Pepeño llega a la papelería para comprar una pluma y cinco lápices, por los que paga \$7 a doña Josefina. Luego llega Pepe y compra dos plumas y seis lápices iguales a los de Pepeño, por los que paga \$10 a doña Josefina. Por último, llega don José que quiere comprar cuatro plumas y diez lápices iguales a los de los dos niños, pero sólo tiene 15 pesos.
  - ¿Tiene el dinero suficiente o le quedará a deber a doña Josefina?

222

### S00195

#### PARA COMENZAR

Analiza el planteamiento y desarrolla lo que se propone.

Ana y su papá están de vacaciones y han decidido construir un pequeño "sube y baja" para jugar. Para esto han dispuesto un punto de apoyo sobre el cual se colocará una tabla de madera, tal y como se muestra en la imagen de al lado.



El punto de apoyo del "sube y baja" recibe el nombre de fulcro.

El papá de Ana pesa 90 kg y ella 45 kg, por lo que al colocarse a la mitad de la tabla, Ana no podrá levantar a su papá. ¿Cuál será la distancia adecuada a la que deberá colocarse el punto de apoyo de la tabla, para que Ana pueda levantar a su papá?

El juego "sube y baja" funciona como una balanza simple, de tal manera que el juego estará en equilibrio cuando las fuerzas que producen el giro, llamadas "momentos", sean iguales.

En física, los momentos  $M$  de una palanca se definen como el producto del peso por la distancia del mismo al punto de apoyo. Por tanto, se tienen dos momentos que deben ser iguales:  $M_1 = M_2$ .

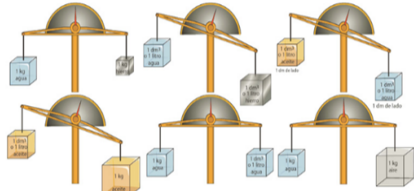
Continúa...

256 PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES

### S00196

#### Equipo

En las siguientes figuras se compara el peso de distintas sustancias y materiales.



Discutan las preguntas y lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

- ¿Qué pesa más: 1 l de agua o 1 l de hierro?
- ¿Qué pesa más: 1 l de aceite o uno de agua?
- ¿Qué pesa más: 1 l de aceite o 1 l de aire?
- ¿Qué ocupa mayor volumen: 1 kg de agua o 1 kg de aire?
- ¿Qué ocupa mayor volumen: 1 kg de agua o 1 kg de aceite?
- ¿Cuántos mililitros hay en un litro? ¿Cuántos centímetros cúbicos hay en un decímetro cúbico? ¿A qué medida cúbica corresponde un mililitro?
- ¿Cuánto pesa 1 mm de agua? ¿1 l  $1 \text{ cm}^3$  de agua?

© SANTILLANA

148

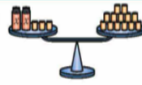
Comparten sus respuestas con las de otros compañeros del grupo.

### S22000a

#### 26.1. Ecuaciones sencillas. Uso de las propiedades de la igualdad

##### Problema inicial

La figura muestra una balanza en equilibrio. Si las pesas cilíndricas pequeñas pesan 1 unidad, ¿cuál es el valor de  $x$ ?



##### Exploración y discusión

- ¿Qué valor se desconoce en este problema? ¿Cómo puedes encontrarlo?
- Si quitas tres unidades de cada platillo, ¿seguirá en equilibrio la balanza? Dibuja cómo quedaría la balanza.
- Has retirado 3 unidades de cada platillo. Si ahora dejas la mitad de lo que hay en cada platillo, ¿se mantendrá en equilibrio la balanza? Dibuja cómo queda.
- Si la ecuación  $2x + 3 = 13$  representa la situación de la balanza, ¿qué ecuación representa la situación en que quedó después de retirar 3 unidades de cada platillo?
- ¿Qué ecuación representa la situación en que quedó después de retirar la mitad del contenido de cada platillo?
- Finalmente, ¿cuál es el peso de cada objeto marcado con la literal  $x$ ? ¿Cómo puedes comprobarlo?



### S22000b

#### 26.2. Resolución de ecuaciones con la incógnita en ambos miembros

##### Problema inicial

La figura muestra una balanza en equilibrio. ¿Cuál es el valor de  $x$ , si los objetos en forma de cilindros pequeños pesan 1 unidad?



##### Exploración y discusión

- ¿Con qué ecuación se representa la situación en que se halla la balanza?
- ¿Cómo queda la ecuación si quitas una unidad de cada platillo?
- ¿Cómo queda la ecuación si después quitas dos objetos marcados con  $x$  de cada platillo?
- Originalmente, la incógnita aparecía en los dos miembros de la ecuación. Con la transformación anterior, ¿en qué miembro queda únicamente?
- Finalmente, ¿cómo queda la ecuación si en cada platillo dejas la mitad de su contenido?
- ¿Qué queda en cada platillo después de la última transformación? ¿Con cuántas unidades se equilibra un objeto marcado con la literal  $x$ ? Compara tus respuestas con las de un compañero. Si no coinciden, expliquen las razones en que las sustentan para llegar a un acuerdo.
- ¿Cuál es la solución de la ecuación? ¿Cómo pueden comprobarlo?
- Si la ecuación hubiera sido  $4x + 3 = 2x + 9$ , ¿qué transformaciones le hubieran hecho primero para resolverla?
- ¿Cuál es el valor de  $x$  en la ecuación  $4x + 3 = 2x + 9$ ?

### S22000c

#### 31.3. El método de igualación

##### Problema inicial

Julia encuentra la siguiente relación entre los pesos de latas de sardinas y angulas:



- Una lata de sardinas se equilibra con tres de angulas y 45 g.
- Una lata de sardinas también se equilibra con dos latas de angulas y 110 g.

¿Cuánto pesa cada lata?





### S22003e

4. En parejas, escriban la ecuación que corresponde a la balanza del esquema 26.5.

**Esquema 26.5.** Balanza en equilibrio

a) ¿Cuánto debe pesar el objeto marcado con  $y$ ?

b) Si a cada uno de los platillos le quitamos la misma cantidad de pesas  $y$ , ¿se mantiene en equilibrio? Expliquen por qué.

c) Analicen con otras parejas si la balanza del esquema 26.6 debe estar en equilibrio. Representen por medio de una ecuación lo que hicieron con las pesas de la balanza en el esquema 26.5. Completen lo siguiente:

$7y + 4 = \dots = 3y + 16 = \dots$

Simplificando esta ecuación, tenemos:

$4y + 4 = \dots$

¿Esta ecuación corresponde a la balanza del esquema 26.6? Expliquen por qué.

Quiten la misma cantidad de pesas de  $y$  en cada uno de los platillos de la balanza en el esquema 26.6. Comenten con sus compañeros si debe o no estar en equilibrio la balanza 26.7.

Regresemos a la ecuación que se simplificó en el inciso c. Completen la ecuación:

$4y + 4 - 4 = \dots$

Simplificando esta ecuación, se tiene:

$4y = \dots$

**Esquema 26.6.** Balanza en equilibrio

**Esquema 26.7.** Balanza

### S22003f

Si no lograste resolver el problema de "Jaque al rey", indaga cuántas latas grandes pesan lo mismo que una caja.

A partir de la balanza 2 del esquema 26.8.

**Esquema 26.8.** Balanza en equilibrio

Cambiamos las latas chicas por las bolsas, ya que sabemos que (esquema 26.9).

**Esquema 26.9.** Balanza en equilibrio

Por lo que tenemos (esquem a 26.10).

### S22003g

**SITUACION 3**  
**La balanza**

En la tienda de Manolo hay dos pesas, una roja y la otra verde, cuyas masas se desconocen. Sin embargo, se sabe que las balanzas se equilibran mediante la configuración de pesas mostradas en el esquema EP4.2.

**Esquema EP4.2. Balanzas equilibradas**

**Pregunta 1:** ¿Cuál es la masa, en kilogramos, de la pesa roja?

**Crédito total:** Plantea la ecuación y la resuelve correctamente.  
**Crédito parcial:** Plantea la ecuación, pero no la resuelve correctamente.  
**Sin crédito:** No puede plantear la ecuación.

### S22004

a) Manuel y Miriam juegan con una balanza usando piezas de madera. El valor de cada pieza se muestra a la derecha. Manuel colocó las piezas como se muestra en la figura 1. Escribe una ecuación que refleje la igualdad de la balanza.

**Figura 2:** Balanza desequilibrada. El platillo izquierdo tiene 2 piezas rojas y 1 pieza azul. El platillo derecho tiene 1 pieza amarilla.

b) Miriam agregó  $2x$  a un lado de la balanza (figura 2). ¿Cuánto debe agregar Manuel para que la balanza esté en equilibrio?

c) Escribe la ecuación que refleje la igualdad de la balanza.

d) Analiza en grupo el concepto de equilibrio en una ecuación.

Legenda de piezas:  
Amarillo:  $5x$   
Verde:  $3x$   
Rojo:  $2x$   
Azul:  $x$

### S22005

8. Pedro colocó en una balanza pesas de distintos tamaños hasta equilibrarla. Si las pesas marcadas con  $x$  son idénticas, ¿cuánto pesa cada una?

a) 8 kg      b) 5 kg  
c) 4 kg      d) 2 kg

### S22006bb

1. Escribe qué se hizo en cada platillo de la balanza. Anota si se conserva el equilibrio y explica por qué.

	Acción	¿Se conserva el equilibrio?

a) ¿Cuánto pesa cada bote?

2. Representa con una literal el peso de cada bote y escribe la ecuación que representa la balanza de la actividad 1, así como cada balanza de la actividad 2.

Actividad 1	Actividad 2
a)	b)
	c)

• Comprueba que las ecuaciones tengan la misma solución.

S22006dd

6 Calcula el peso de los botes en cada balanza.



Cada bote pesa \_\_\_\_\_ g.

Cada bote pesa \_\_\_\_\_ kg.

7 Escribe una ecuación para cada balanza de la actividad anterior y comenta procedimientos para resolverla.

	Ecuaciones	Procedimientos
a)		
b)		

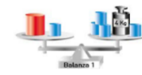
S22006gg

Sistemas de ecuaciones II

PREGUNTA INICIAL

¿Qué solución tiene el sistema formado por las ecuaciones  $x + 3y = 35$  y  $y - 2 = 8$ ?

1 Observa las balanzas y efectúa lo que se indica.



a) Completa la tabla y busca más soluciones para la balanza 1.

Peso del bote azul	Peso del bote rojo
1 kg	7 kg
2 kg	
3 kg	
4 kg	

c) Completa la tabla y busca más soluciones para la balanza 2.

Peso del bote azul	Peso del bote rojo
1 kg	7 kg
5 kg	7 kg

La balanza 1 está en equilibrio cuando

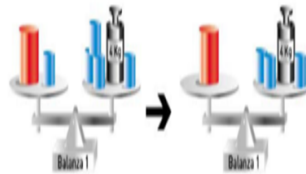
La balanza 2 está en equilibrio cuando

b) Escribe una ecuación (lámale ecuación 1) que represente a la balanza 1.

d) Escribe una ecuación (lámale ecuación 2) que represente a la balanza 2; usa las mismas literales que en b).

S22006hh

2 Escribe qué acciones se efectúan en las balanzas y cómo se transforman las ecuaciones.

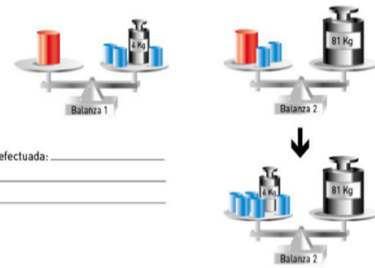


Acción efectuada: \_\_\_\_\_ Ecuación 1 anterior: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Ecuación 1 nueva: \_\_\_\_\_

226

S22006jj



Acción efectuada: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ecuación 2 anterior: \_\_\_\_\_ Ecuación 2 nueva: \_\_\_\_\_

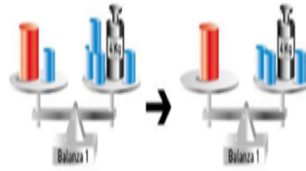
3 Haz lo que se indica. Observa que la ecuación 2 de la actividad anterior solo tiene una incógnita.

a) Resuelve la ecuación. ¿Cuánto pesa el bote azul? \_\_\_\_\_

b) Encuentra el peso del bote rojo. \_\_\_\_\_

S22006kk

2 Escribe qué acciones se efectúan en las balanzas y cómo se transforman las ecuaciones.

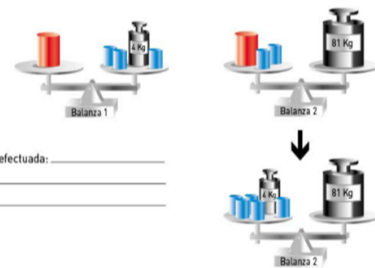


Acción efectuada: \_\_\_\_\_ Ecuación 1 anterior: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Ecuación 1 nueva: \_\_\_\_\_

226

S22006ll



Acción efectuada: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ecuación 2 anterior: \_\_\_\_\_ Ecuación 2 nueva: \_\_\_\_\_

3 Haz lo que se indica. Observa que la ecuación 2 de la actividad anterior solo tiene una incógnita.

a) Resuelve la ecuación. ¿Cuánto pesa el bote azul? \_\_\_\_\_

b) Encuentra el peso del bote rojo. \_\_\_\_\_

### S22007b

Actividad 1. Formen equipos y realicen lo que se pide.

1. En la columna de la izquierda se hacen transformaciones en la balanza de modo que se mantenga el equilibrio. Escriban en la columna de la derecha la ecuación correspondiente. Observen el ejemplo.

<p>Situación inicial:</p>	$4x + 2 = 2x + 8$
<p>Primer paso:</p>	
<p>Segundo paso:</p>	

2. Tracen en su cuaderno una balanza y representen con cubos y esferas la ecuación  $7x + 2 = 4x + 11$ . Encuentren la solución.  
 3. Propongan una ecuación, representen en una balanza y resuélvanla. Háganlo en su cuaderno.

### S22007c

4. En la columna izquierda se muestran  $a$  cubos y  $b$  esferas en un lado de una balanza y  $c$  cubos y  $d$  esferas en el otro. En la columna de la derecha escriban la ecuación correspondiente después de realizar las transformaciones indicadas en las balanzas.

<p>Situación inicial:</p>	$ax + b = cx + d$
<p>Primer paso:</p>	

### S22007d

#### Repasa lo aprendido

De manera individual realiza lo que se pide.

1. En el dibujo de la balanza representa con cubos y esferas la ecuación de la derecha, luego resuélvela.



$7x + 3 = 4x + 10$

$x =$

2. Formula la ecuación del problema.

Diez veces y medio lo que se invirtió en una obra más 3.5 millones de pesos es igual a 7.5 veces lo que se invirtió en la misma obra más 5.5 millones. ¿Cuántos millones se invirtieron en la obra?

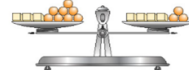
- ii) Representa la ecuación con el modelo de áreas.
- o) Resuelve la ecuación.

3. Considera la balanza del problema de investigación al inicio de la lección.

ii) De las siguientes ecuaciones, ¿cuál representa la situación de la balanza?

- i)  $8x + 3 = 3x + 4$
- ii)  $3x - 8 = 4x - 3$
- iii)  $3x + 8 = 4x + 3$

iv) ¿Cuál es la solución? Verifica cambiando cada cubo por el número de esferas que encontraste.



### S22008a

#### En construcción

1. En la Figura 1 se muestra una balanza que se encuentra en equilibrio. En ella se acomodaron cuatro cubos y diez pesas. Las pesas son de un kilogramo cada una. No se sabe cuánto pesa cada cubo, pero todos pesan lo mismo.

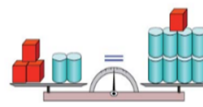


Figura 1

- a) ¿Cuáles de las siguientes acciones mantendrán en equilibrio la balanza?
- Pasar tres pesas del platillo derecho al platillo izquierdo.
  - Añadir dos pesas de un kilogramo a cada platillo.
  - Quitar dos pesas cada platillo.
  - Quitar un cubo en cada platillo.
  - Quitar dos pesas del platillo izquierdo y dos pesas del lado derecho.

b) ¿Como podrías saber el peso de cada cubo en los dos casos? ¿Se te ocurre alguna idea?

c) ¿Cuánto pesa un cubo?

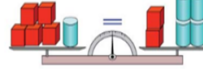


Figura 2

2. En la balanza de la Figura 2, se acomodaron 7 cubos y 5 pesas de un kilogramo. No se sabe cuánto pesa cada cubo, pero todos pesan lo mismo. ¿Cuánto pesa un cubo?

### S22008b

3. Asocian lo que se va haciendo en la balanza con una ecuación y escriban del lado derecho. Determinen el valor de  $x$ .

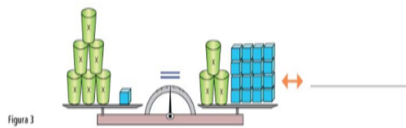


Figura 3

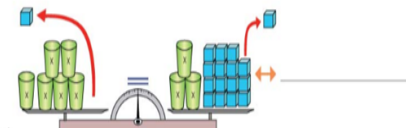


Figura 4

### S22008c

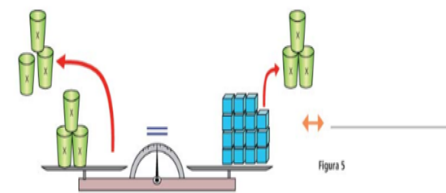


Figura 5

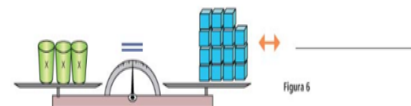


Figura 6

$x =$

### S22008d

4. Las balanzas de las Figuras 7 y 8 se encuentran en equilibrio. Encuentra el valor de la incógnita y escriban el procedimiento que utilizaron.

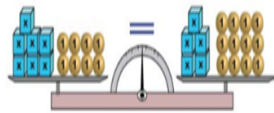


Figura 7

$x =$  \_\_\_\_\_

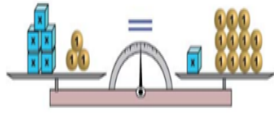


Figura 8

$x =$  \_\_\_\_\_

### S22010b

2. Un constructor acude a la tienda de materiales para adquirir algunos ladrillos y unos bloques para construir una barda. En la tienda le ofrecen dos lotes de material con la misma masa y precio, tal y como se muestra en la Figura 2.

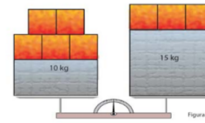


Figura 2

**Glosario**  
 Bal: Apaga de una balanza que indica cuando hay perfecta igualdad entre las masas comparadas.

El constructor analiza esta situación y se pregunta, ¿cómo pueden saber la cantidad de masa de cada ladrillo? Utilizando las estrategias que consideren pertinentes, calculen el valor de la masa de cada ladrillo. Tomen en cuenta que todos los ladrillos son iguales y tienen la misma masa. Comparen con otras parejas sus respuestas y procedimientos, argumentando la validez de estos.

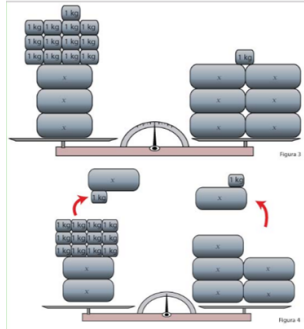
#### Herramientas

El modelo de la balanza se basa en una analogía con las ecuaciones donde el signo de igual corresponde al bal de la balanza y relaciona lo que podemos poner o quitar en ambos platillos sin que se pierda el equilibrio y las operaciones que pueden realizarse en ambos miembros de una ecuación conservando la igualdad.

Analicen la siguiente situación, relacionando el modelo de la balanza con su representación algebraica.

3. Un gimnasio cuentan con discos de distintas masas. Dos amigos que van al gimnasio se encuentran con el desafío de saber la masa de algunos discos que no tienen la información grabada. Colocan seis discos de masa desconocida y un disco de 1 kg en una balanza y analizan que la balanza marca la misma cantidad cuando se colocan tres discos de masa desconocida y trece discos de 1 kg. El arreglo se observa en la Figura 3.

### S22010c



a) ¿Cuál es la ecuación que describe esta situación?  
 b) ¿Qué procedimiento siguieron para construir la ecuación?

c) Asocian una ecuación con la Figura 4, que muestra un primer paso para conocer el valor de los discos.

d) ¿Cuál es el valor de la masa desconocida de uno de los discos?  
 Solución:  $x =$  \_\_\_\_\_

e) Comprueben si las tres ecuaciones que construyeron son o no a ecuaciones equivalentes al sustituir el valor de  $x$  en cada ecuación.  
 • ¿Qué pueden deducir acerca del resultado de sustituir el valor de  $x$  en cada caso?  
 • ¿Consideran que estas ecuaciones son equivalentes? Justifiquen su respuesta.

**Glosario**  
 Ecuaciones equivalentes. Son dos ecuaciones que...

### S22010d

#### Lección 1 | Resolución de sistemas de ecuaciones

Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$  con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución).

#### Conexiones

En el Bloque 4 resuelve problemas que implican el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos. Es importante que retomes esos conocimientos, ya que te serán de utilidad en esta lección.

#### Ventana

Reúnete con otro compañero para resolver los siguientes desafíos.  
 1. En el laboratorio de Ciencias de la escuela de Rocío hay algunas pesas, exactamente iguales, en las que ha dejado de ser visible la marca donde se indica su masa. Después de varios intentos con otras pesas de masa conocida, se consiguió colocar las pesas en la balanza, de modo que estuviere en equilibrio como se muestra en la Figura 1.

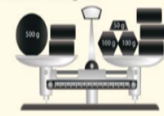


Figura 1

a) ¿Cuál es la masa de cada una de las pesas?  
 b) ¿Qué expresión matemática describe la situación de la Figura 1?  
 c) ¿Cuántas incógnitas hay en esa expresión?

### S22010e

#### Método de sustitución

En parejas, analicen y resuelvan los siguientes desafíos.  
 1. Al estudiar el tema de propiedades de la materia en la clase de ciencia, Rocio y sus compañeros trataron de calcular la masa de algunos cuadernos y libros. Para evitar errores consiguieron cuadernos nuevos y libros iguales. Lograron en la balanza los arreglos que se muestran en la Figura 2.



Figura 2

Analicen la Figura 2 y a partir de ella respondan:  
 a) ¿Qué procedimiento pueden emplear para saber el peso de cada objeto de la balanza?  
 • ¿Cuánto pesa cada libro y cada cuaderno?  
 • Compara tus respuestas y procedimientos con tus compañeros.  
 b) Ahora, simbolicen algebraicamente lo que se tiene en cada balanza.

Balanza 1:  
 Balanza 2:

Verifiquen con otras parejas las expresiones algebraicas que escribieron para confirmar que son correctas.  
 c) Resolvieron algebraicamente el sistema de ecuaciones obtenido.  
 • Comparen sus resultados con los que habían encontrado anteriormente. ¿Cómo son entre sí?  
 • ¿Qué semejanzas y diferencias observan en los dos procedimientos empleados? Discutan de manera grupal la manera como resolvieron la actividad anterior y con ayuda de su profesor establezcan sus conclusiones; al terminar escribanlas en su cuaderno.

**Glosario**  
 Sistema de ecuaciones. Conjunto de dos o más ecuaciones a las que se intenta encontrar los valores de las variables que cumplen con la condición de satisfacer a todas las ecuaciones que componen dicho sistema.

### S22013

**PRÁCTICADO**

Enunciado	Descripción y Justificación

### S22015a

Cuando los brazos de la palanca son diferentes, el equilibrio se logra considerando dos cantidades inversamente proporcionales.

Analiza las dos figuras en equilibrio y descubre cuál es la igualdad que se tiene que cumplir para lograr el equilibrio.

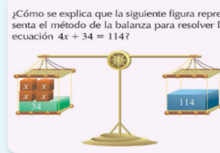


Soliciten al profesor que organice una actividad grupal para presentar los resultados.

### S22015b

En una fábrica de muebles se han producido 114 mesas, de las cuales 34 fueron hechas por Jacinto y el resto de las mesas por cuatro empleados. ¿Cuántas mesas hizo cada uno de los cuatro empleados si se sabe que elaboraron la misma cantidad?

¿Cómo se puede justificar que la ecuación que representa el problema es  $4x + 34 = 114$ ?



¿Por qué se puede afirmar que si se quitan 34 mesas de cada platillo la balanza permanecerá en equilibrio?



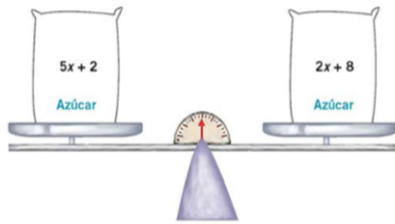
¿Cuántas sillas hizo cada uno de los cuatro empleados?

### S22016

#### El juego de la balanza

Reúnanse en equipo para resolver las siguientes actividades. Anoten las respuestas en el cuaderno.

Antes de retomar el problema de Alfonso, y para que entiendan mejor las ecuaciones y la forma de resolverlas, consideren la ecuación  $5x + 2 = 2x + 8$ , que para resolverse, puede representarse como se muestra en la balanza de la figura.



### S22017a

#### Explora y construye

#### Plantear y resolver un problema con una ecuación $ax + b = cx + d$

Organizados en equipos, resuelvan lo siguiente:  
a) La balanza de la figura 4.1 está en equilibrio. La masa de los jarrones no se conoce pero se sabe que es la misma.

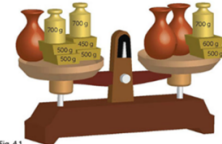


Fig. 4.1

- Subrayen, de las siguientes acciones, las que mantendrán la balanza en equilibrio.
  - Pasar uno de los jarrones del lado derecho al lado izquierdo.
  - Quitar un jarrón de cada lado.
  - Cambiar uno de los jarrones por una barra de 500 g en el lado derecho.
  - Quitar el mismo número de barras de 500 g en ambos lados.
  - Quitar una pesa de 700 g de ambos lados.
  - Quitar dos pesas de 500 g de ambos lados.

184

### S22017c

c) Los pesos de la balanza de la figura 4.3 son iguales, por lo que dicha balanza está en equilibrio.

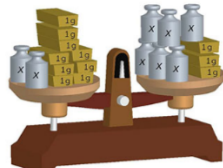


Fig. 4.3

- Escriban una expresión algebraica que represente que la balanza está en equilibrio. \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la masa de cada cilindro de metal? \_\_\_\_\_ Escriban con detalle su procedimiento. \_\_\_\_\_

Comparen y comenten con otros equipos sus respuestas y procedimientos.

### S22017d

Resuelve los siguientes problemas.

1 Las dos balanzas están en equilibrio. ¿Cuántos platos se necesitan para equilibrar una jarra? ¿Cuántos vasos se necesitan para equilibrar un plato? Selecciona la respuesta correcta.

- a) 2 y 1    b) 1 y 2    c) 2 y 3    d) 2 y 2



S22020b



S22020d



1. Reúnete con un compañero y realicen las siguientes actividades:

- a) Plantea la ecuación correspondiente y resuélvela; considera que cada cuadrado es una unidad.



S22021a

Las incógnitas representadas generalmente por las literales  $x$ ,  $y$  y  $z$ , constituyen los valores que se pretende hallar. Por ejemplo,

primer miembro      segundo miembro  
 $3x + 2 = 12 + 2$

$x$  representa la incógnita, mientras que el coeficiente 3 y los números 1 y 9 son constantes conocidas.

3. Piensa en la ecuación como si fuera una balanza en equilibrio, donde los miembros de la ecuación representan los platillos de la balanza y el signo =, el equilibrio de la balanza.

- a) ¿Qué puedes quitar de un plato u otro, de manera que la balanza no pierda el equilibrio y puedas conocer cuántos lápices contiene cada caja? Justifica tu respuesta.
- b) Completa la tabla en la que se describe de manera gráfica y algebraica la solución de una ecuación:

Descripción verbal	Descripción gráfica	Descripción algebraica
Se representa la ecuación en una balanza en equilibrio		
Se quitan dos lápices en cada platillo		$3x + 2 - 2 = 12 + 2 - 2$ $3x = 2x + 6$
Se suprimen dos cajas en cada platillo.		

- c) ¿Qué cantidad de lápices contiene cada caja? \_\_\_\_\_
- d) ¿Cuántos lápices tiene Ixchel y cuántos Claudia? \_\_\_\_\_
4. Presenta al grupo tus procedimientos y respuestas. Comprueben que los resultados obtenidos son correctos.

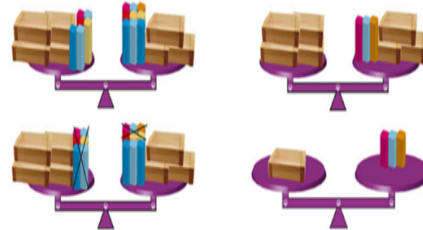
| E3-2

Ecuaciones de la forma  $ax + b = cx + d$

S22021b



1. Representa algebraicamente lo que se indica en cada balanza.



BLOQUE 4

| 85