BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE LOS OBJETOS DE LAS CATEGORÍAS DE ACCIONES SOBRE MONOIDES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

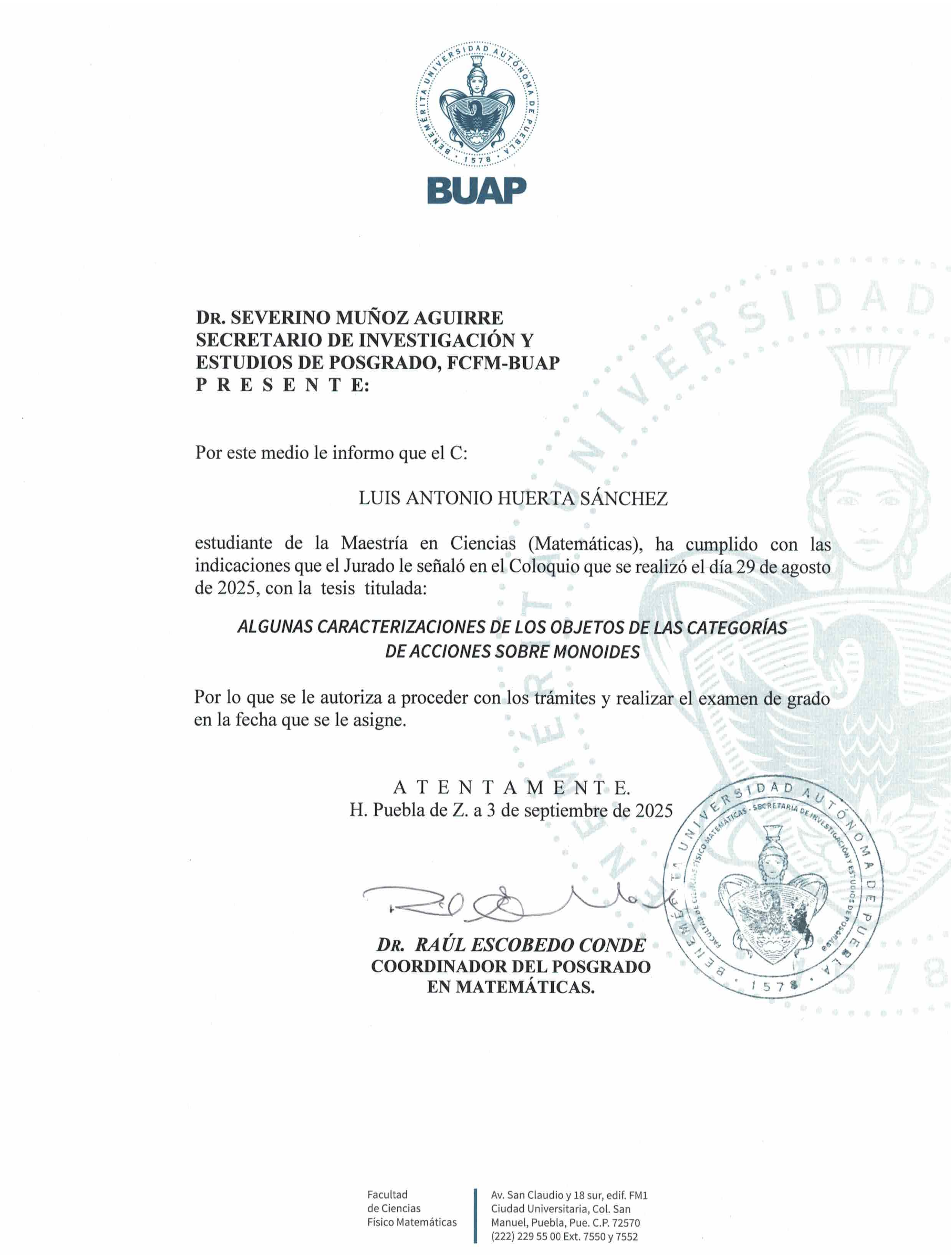
PRESENTA:

LUIS ANTONIO HUERTA SÁNCHEZ

ASESORADO POR:

DR. CARLOS ALBERTO LÓPEZ ANDRADE

PUEBLA SEPTIEMBRE 2025



BUAP

Dr. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
PRESENTE:

Por este medio le informo que el C:

LUIS ANTONIO HUERTA SÁNCHEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de agosto de 2025, con la tesis titulada:

ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE LOS OBJETOS DE LAS CATEGORÍAS DE ACCIONES SOBRE MONOIDES

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

ATENTAMENTE.
H. Puebla de Z. a 3 de septiembre de 2025

Dr. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

A mi pequeña familia: José Luis, María Dolores , Guillermina, Karina, Eduardo y Enrique...

“El hombre que tiene conciencia sufre mientras reconoce su pecado. Ese es su castigo“
-Fiódor Dostoievski.

AGRADECIMIENTOS

Durante estos dos últimos años he experimentado una de las etapas más complicadas de mi existencia. Sin embargo, también tuve la fortuna de coincidir con personas que permitieron que no transitara por todo esto yo solo. Todos aquellos a quienes a continuación menciono me regalaron experiencias únicas e increíbles, y gracias a ellos es que estoy aquí. Así que este trabajo, y el esfuerzo que implicó llevarlo a cabo, está dedicado con afecto a ustedes:

- Antes de todo, agradezco a mis padres José Luis y María Dolores, y a mis hermanos Karina y Eduardo, por el soporte que me han brindado durante toda mi vida.

- A Cristina Medel y Daniela Torres, gracias por su amistad desde el primero hasta el último día de esta travesía. Sin duda, su presencia suavizó este difícil recorrido. Son las personas más amables y empáticas que he podido conocer. Gracias por habernos apoyado mutuamente y gracias por enseñarme, con su ejemplo, a comportarme mejor con las demás personas. Aprecio profundamente la confianza que han depositado en mí y gracias por refrendarme que yo también puedo confiar en ustedes. En especial, agradezco enormemente a Cristina Medel por su amistad y apoyo durante el último semestre, y sobre todo por haber escuchado, con empatía y respeto, mis problemas una y otra vez casi hasta el hartazgo sin juzgarme aún cuando ella lidiaba con sus propios asuntos. Quiero que sepan que les deseo lo mejor de la vida y ojalá mantengamos una larga amistad. Gracias por todo, siempre pueden contar conmigo.

- A Adriana González Quiroz, quien fue alguien más que especial en algún momento de este periodo de mi vida, y aunque su presencia ya no forma parte de mis días, sería un acto injusto omitir aquí su nombre. A ella, le agradezco profundamente por cada una de nuestras experiencias compartidas, por haberme hecho compañía, por mostrarme su mundo y compartirlo conmigo, por dedicarme bastante de su tiempo, por las tardes de videojuegos, aventuras, comida y helados, por los paseos en su vehículo motorizado, por enseñarme que mi cumpleaños sí importa, por los actos genuinos y lindos hacia mi persona, por pintar de color verde mis días más grises y por ser el rayo de sol que apareció después de la tormenta. Con toda certeza, este fue uno de los vínculos más significativos que pude construir durante esta etapa, y a pesar de su inexorable final guardaré con mucho cariño, y como tesoros invaluables, a todos nuestros recuerdos juntos. ¡Mil millones de gracias Adri, eres una maravillosa persona!

- A Juan Ortíz y Wenceslao León. Amigos, gracias por todas las aventuras nocturnas, por tomarme en cuenta y por las pláticas sobre la vida. Son los mejores.
- A los profesores Juan Alberto Escamilla y Carlos Guillén, les agradezco por su noble labor como docentes y por habernos tratado a todos sus alumnos con amabilidad y respeto. Infinitas gracias por sus palabras de aliento y por su apoyo cada vez que lo he requerido. Son una gran fuente de inspiración para mí y para muchos estudiantes.
- A aquellos amigos con los que por una u otra razón no fue posible convivir como yo hubiera deseado, pero que sin embargo, cada vez que los encontraba manteníamos conversaciones interesantes. En particular agradezco a Javier Meneses, José de Jesús Sáez Macegoza y Netzalín Sarabia Ramos.
- A mi asesor Carlos Alberto López Andrade, le agradezco por todos estos años de trabajo académico, pero más que eso, gracias por las pláticas en su cubículo sobre varios aspectos de la vida cotidiana y por animarme a creer más en mí mismo y en mis habilidades. Gracias por las galletas, por la confianza depositada, por los consejos, por compartirme su experiencia, por la amistad, por la guía y por darme en todo momento la libertad de estudiar y explorar sobre aquellas cosas que a mí me parecen dignas e interesantes en lugar de adoctrinarme en cosas que no me atraen. Gracias por atreverse a indagar sobre mis ideas aunque a veces los temas que involucran no formen parte de su experticia. Ha sido muy divertido aprender juntos sobre la marcha. Muchas gracias por todo profesor.
- A cada uno de los miembros del jurado revisor de esta tesis: Fernando Vilchis, Juan Angoa, César Cejudo y Agustín Contreras, muchas gracias por sus acertadas observaciones hacia mi trabajo y por el interés hacia este. También, les ofrezco una disculpa por el tedio que les pudo generar leer tanta cantidad de texto. Particularmente, agradezco al Dr. Fernando Vilchis por todas las preguntas que hizo con respecto a mi trabajo, y de las cuáles han surgido interesantes problemas.
- Al CONAHCYT, hoy SECIHTI, gracias por la beca otorgada durante mis estudios de maestría. Ojalá que las instancias gubernamentales de este país se hagan realmente conscientes de que las ciencias son un pilar fundamental de cualquier sociedad.

A todos ustedes ¡muchas gracias!....

INTRODUCCIÓN

Dado un anillo R con unidad 1_R, un $R-$módulo izquierdo es un grupo abeliano M para el que hay una función $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ tal que para cada $r, s \in R$ y $m, n \in M$ se verifica que:

1. $r(m+n) = rm + rn$
2. $(r+s)m = rm + sm$
3. $(rs)m = r(sm)$
4. $1_R m = m$

Es bien sabido que el anillo R induce un par de categorías, a saber las categorías $R-$mod y mod$-R$ compuestas de todos los $R-$módulos izquierdos (derechos) junto con todos los $R-$morfismos de módulos izquierdos (derechos) respectivamente. Las propiedades de los objetos de estas categorías están estrechamente relacionadas con las propiedades del anillo R, de hecho, pueden plantearse preguntas del tipo: ¿cómo tiene que ser un anillo R para que todos los objetos de $R-$mod cumplan con tal propiedad? y viceversa, ¿qué propiedades deben tener todos los objetos de $R-$mod para que el anillo R cumpla con tal propiedad? Las respuestas a tales cuestionamientos se concretan a menudo obteniendo resultados como los siguientes:

Teorema. 0.0.1. *(Proposición 5.2.16. de [11]) Los siguientes enunciados son equivalentes para un dominio entero R:*

1. *R es de ideales principales.*
2. *Todo submódulo de un $R-$módulo libre es libre.*

Teorema. 0.0.2. *(Proposición 5.2.15. de [11]) Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es hereditario izquierdo.*
2. *Todo submódulo de un $R-$módulo proyectivo es proyectivo.*

Teorema. 0.0.3. *(Proposición 6.4.7. de [11]) Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es semisimple.*
2. *Todo $R-$módulo es semisimple.*

etcétera. Lo anterior deja en claro que el uso de los módulos es una herramienta importante para deducir propiedades de un anillo, a la vez que ayudan a definir nuevas clases de anillos. Por otra parte, dentro del marco de la Teoría de Grupos se encuentra el concepto de $G-$conjunto. Más precisamente, dado un grupo G, un $G-$conjunto es un par $(X, *)$ compuesto de un conjunto no vacío X y una función $* : G \times X \longrightarrow X$ tal que para cada $g, h \in G$ y cada $x \in X$, $e * x = x$ y $g * (h * x) = (gh) * x$. Los $G-$conjuntos son objetos útiles desde luego en el álgebra, como por ejemplo, son útiles para exhibir resultados fundamentales sobre grupos finitos, como los Teoremas de Sylow. Estos objetos no solo son útiles en el álgebra, también resultan interesantes dentro de otras áreas de las matemáticas como la topología, donde se explora el concepto de grupo topológico de transformaciones. Ahora bien, después de todo este preámbulo podemos formularnos la siguiente pregunta: ¿qué obtenemos si en lugar de hacer *accionar* a un anillo sobre un grupo abeliano o a un grupo sobre un conjunto hacemos *accionar* a otra estructura algebraica más débil, como un monoide, sobre un conjunto no vacío? Lo que se obtiene, desde luego, es un objeto al que se le llamará $S-$acción, y que de hecho, serán los objetos de estudio del presente trabajo. Así, una $S-$acción es una especie de generalización de los conceptos de módulo sobre un anillo y el de acción de un grupo sobre un conjunto, donde reemplazamos a un anillo o grupo por un monoide y a un grupo abeliano por un conjunto no vacío. Al igual que con los anillos, resulta que un monoide S inducirá un par de categorías cuyos objetos serán todas las $S-$acciones izquierdas y todas las $S-$acciones derechas, respectivamente, y en analogía con el caso de los anillos y sus módulos las propiedades de las $S-$acciones estarán estrechamente relacionadas con las propiedades del monoide S.

Con respecto a los objetivos por los que este trabajo nació se puede decir lo siguiente: pretendemos continuar con el estudio algebraico de los semigrupos y monoides iniciado en la licenciatura, donde se tuvo la oportunidad de estudiar a este tipo de objetos a través de su estructura interna (véase [8]). Así que este trabajo de tesis tiene como primer objetivo llevar a cabo un estudio de los monoides pero ahora por medio de la estructura de sus acciones, en realidad, según [3], el problema de clasificar monoides a partir de la estructura de sus acciones se conoce como *clasificación homológica de monoides*. Por lo tanto, el enfoque del presente trabajo queda enmarcado dentro de este contexto. Como objetivo secundario se pretende ofrecer un texto donde las personas interesadas en estos temas puedan consultar información que les pueda ser de utilidad. De hecho, parece ser que hay poca literatura de fácil acceso sobre la materia, a excepción de la referencia [3]. Creemos que hemos alcanzado tales objetivos.

En cuanto a los resultados obtenidos podemos mencionar lo siguiente: una parte de este trabajo está basado en la referencia [3], de manera que algunos resultados que aquí se encuentran fueron tomados de ahí. Por otra parte, una rápida mirada a la bibliografía hará notar que la mayoría de libros consultados son sobre anillos y sus módulos. Como se mencionó antes, parece ser que existen pocos libros de texto que traten con monoides y sus acciones, así que hemos superado esta carencia encontrando inspiración en resultados existentes sobre anillos y módulos para después, tratar de establecer si algunos de estos siguen siendo válidos también para el caso de los monoides y sus acciones, por lo que muchos de los teoremas obtenidos en esta tesis han encontrado su origen de los existentes para anillos y módulos. Los resultados restantes han sido producto de la investigación y necesidades que escribir este trabajo requirió. Por otro lado, el trabajo está compuesto por 10 capítulos de los cuáles el primero ofrece todos los conceptos y resultados sobre categorías y monoides que son utilizados con más frecuencia a lo largo de la tesis, y que si bien tal capítulo podría haberse omitido, se incluye para hacer del escrito lo más autocontenido posible. El segundo capítulo sirve como una introducción en sí a la materia principal del trabajo. Destacamos a los capítulos 3, 4, 6, 7 y 8, y los describimos brevemente a continuación: en el tercero, exploramos el concepto de sucesión exacta de morfismos de acciones y tratamos de establecer si algunos resultados sobre sucesiones exactas de morfismos de módulos son también válidos cuándo se trata sobre morfismos de acciones, encontrando que mientras algunos se replican sin dificultad, otros son mucho más complicados de establecer o resultan no ser válidos. En el cuarto, estudiamos a las acciones completamente reducibles, que son el análogo, en acciones, a los módulos semisimples. Aquí replicamos con éxito, al caso de las acciones, algunos de los teoremas existentes para módulos semisimples. En el sexto, basándonos en los conceptos de módulo Noetheriano y Artiniano, definimos el concepto de acción Noetheriana y Artiniana, e igual, tratamos de reproducir para las acciones, algunos teoremas existentes para esta clase de módulos. El séptimo capítulo lo dedicamos a las acciones libres, destacando a los Teoremas 7.2.2 y 7.4.13. Por último, en el octavo capítulo, se establece el concepto de acción simétrica, las cuales son acciones donde de cierta forma, se verifican teoremas como el órbita-estabilizador y el Teorema de Frobenius. Cabe mencionar que la gran parte de resultados que se encuentran en los capítulos mencionados son propios del autor, y se desconoce si ya se encuentran publicados o establecidos en otras fuentes bibliográficas.

Los capítulos 9 y 10 están basados en [3], y lo que hacemos nosotros es ofrecer pruebas propias y detalladas sobre los resultados que ahí se encuentran, además de agregar una buena cantidad de resultados propios, entre los que destacamos a los teoremas de las secciones sobre otros criterios de proyectividad y monoides hereditarios. También, se ofrece una prueba completa y detallada sobre un resultado de Isbell con respecto a monoides perfectos, y además se añaden resultados propios sobre cómo construir monoides perfectos. Vale la pena destacar que todos los ejemplos (o contraejemplos) que se ofrecen en todo el texto son propios del autor. Mencionamos también que en varios de los resultados obtenidos hacemos uso del Lema de Zorn, por lo que se supone válido el Axioma de Elección. Para concluir, es preciso destacar que a pesar de que este trabajo ha sido revisado exhaustivamente por un comité de sinodales, debe ser claro que todos los errores que aún pudieran permanecer en el presente escrito son responsabilidad entera del autor.

NOTACIÓN

A continuación se ofrece una lista con la notación que será usada con más frecuencia a lo largo del trabajo. Para obtener la definición precisa de alguno de estos símbolos puede recurrirse al índice alfabético.

$\mathbb{N}$ — números naturales.
$\mathbb{N}_0$ — números naturales incluyendo al cero.
$\mathbb{Z}$ — números enteros.
$\mathbb{Q}$ — números racionales.
$\mathbb{R}$ — números reales.
$\mathbb{Z}_n$ — enteros módulo n.
$|X|$ — cardinalidad del conjunto X.
S — monoide.
$S(0)$ — el monoide S al que se le ha añadido un cero.
e — en general, denotará al neutro de un monoide S.
a^{-1} — inverso de a.
$E(S)$ — conjunto de idempotentes de un monoide.
Sa — ideal izquierdo generado por a.
aS — ideal derecho generado por a.
SaS — ideal bilátero generado por a.
$\tau(X)$ — conjunto de funciones de X en sí mismo.
${}_SA$ — $S-$acción izquierda.
A_S — $S-$acción derecha.
${}_SS$ — $S-$acción regular izquierda.
S_S — $S-$acción regular derecha.
${}_SA_T$ — $(S,T)-$biacción.
$A \cong B$ — A es isomorfa a B.
$(S - act)_X$ — colección de todas las posibles $S-$acciones sobre X.
$Rep(S, X)$ — representaciones de S por transformaciones de X.
$Rep_u(S, X)$ — representaciones unitarias de S por transformaciones de X.
$B \leq A$ — B es subacción de A.

$\langle X\rangle$ – subacción generada por X.
$\langle a\rangle$ – subacción cíclica generada por a.
$A \xrightarrow{f} B$ – morfismo, $S-$morfismo o función.
$A \hookrightarrow B$ – inclusión de A en B.
$im(f)$ – imagen de la función f.
$Ker(f)$ – $S-$congruencia Kernel.
$\mathcal{K}_{im(f)}$ – $S-$congruencia imagen.
Δ_X – diagonal en X.
ρ_X – $S-$congruencia inducida por la subacción X.
$Cong(A)$ – colección de todas las $S-$congruencias en A.
$\frac{A}{B}$ – $S-$acción cociente.
$\rho(X)$ – $S-$congruencia generada por X.
Θ – $S-$acción cero.
θ_A – elemento cero de A.
$Nu(f)$ – núcleo de f.
$A = X \uplus Y$ – X (o Y) es sumando directo de A.
$Simp(A)$ – colección de todas las subacciones simples de A.
$Simp_0(A)$ – colección de todas las subacciones $0-$simples de A.
$Zoc(A)$ – zoclo de A.
$Zoc_0(A)$ – zoclo subcero de A.
$S^{(X)}$ – $S-$acción libre.
X^S – $S-$acción colibre.
$Rank(A)$ – rango de la acción libre A.
$\prod\limits_{i\in I} A_i$ – $S-$acción producto.
$\coprod\limits_{i\in I} A_i$ – $S-$acción coproducto (o suma directa).
$\prod\limits_{i\in I} f_i$ – producto de morfismos.
$\coprod\limits_{i\in I} f_i$ – coproducto de morfismos.
$Sop(f)$ – soporte de f.
$\biguplus\limits_{i\in I} A_i$ – elementos de $\prod\limits_{i\in I} A_i$ cuyo soporte tiene a lo más un elemento .
$\mathcal{O}(x)$ – órbita de x.
$Stab(x)$ – estabilizador de x.
A^s – puntos fijos de s.
$Hom(A, B)$ – colección de todos los morfismos de A en B.
$Tr_B(A)$ – traza de A en B.
$Cotr_B(A)$ – cotraza de A en B.
$Hom(A, \_)$ – funtor Hom inducido por A.
$\mathfrak{Set}$ – la categoría de conjuntos.
$\mathfrak{Set}^{\star}$ – la categoría de conjuntos no vacíos.
$S - Act$ – la categoría (o la clase) de todas las $S-$acciones izquierdas.
$Act - S$ – la categoría (o la clase) de todas las $S-$acciones derechas.

$(S - Act)_0$	—	la categoría (o la clase) de todas las $S-$acciones izquierdas con un único elemento cero.
$S - Act_0$	—	la categoría (o la clase) de todas las $S-$acciones izquierdas con un único elemento cero y un elemento anulador.
$Rep(S, \mathcal{A})$	—	la categoría de representaciones de S por objetos de $\mathcal{A}$.

Tesis de Maestría

Luis Antonio Huerta Sánchez

Septiembre 2025

Índice general

Agradecimientos **v**

Introducción **vii**

Notación **xi**

1 Preliminares **5**
- 1.1 Categorías . . . 5
  - 1.1.1 Igualadores y coigualadores . . . 5
  - 1.1.2 Pullbacks y Pushouts . . . 10
  - 1.1.3 Generadores y cogeneradores . . . 14
  - 1.1.4 Categorías concretas . . . 16
  - 1.1.5 Objetos proyectivos . . . 16
- 1.2 Monoides y sus ideales . . . 19
  - 1.2.1 Semigrupos, monoides y elementos especiales . . . 19
  - 1.2.2 Ideales . . . 22

2 S-acciones **25**
- 2.1 Acciones sobre monoides . . . 25
  - 2.1.1 Ejemplos . . . 27
- 2.2 Subacciones . . . 27
- 2.3 S-morfismos . . . 29
- 2.4 S-congruencias y acciones cociente . . . 29
- 2.5 Acciones con cero . . . 31

3 Más sobre S-morfismos **37**
- 3.1 Teorema de isomorfismo para acciones . . . 37
- 3.2 Sucesiones exactas . . . 39
- 3.3 Sucesiones exactas sobre acciones con cero . . . 41

4 Acciones completamente reducibles **59**
- 4.1 Acciones simples y 0-simples . . . 59
- 4.2 Zoclo y acciones completamente reducibles . . . 61
- 4.3 Zoclo subcero y acciones completamente 0-reducibles . . . 64

5 Acciones inescindibles 73
5.1 Un Teorema de descomposición 74

6 Acciones f.g, Noetherianas y Artinianas 77
6.1 Acciones finitamente generadas 77
6.2 Acciones Noetherianas y Artinianas 81
6.3 Ejemplos 89
6.4 Algunos resultados sobre monoides Artinianos 92
6.5 Acciones Noetherianas y Artinianas con respecto a congruencias 95

7 Acciones libres 99
7.1 Bases y propiedad universal 99
7.2 Acciones libres sobre monoides de ideales principales 106
7.3 Suma directa de acciones libres 108
7.4 Acciones fieles y fuertemente fieles 109

8 Acciones simétricas 115
8.1 Acciones simétricas 115
8.2 El Teorema órbita-estabilizador 118
8.3 Un Teorema de Frobenius 120

9 La categoría S-Act 123
9.1 Las S-acciones y los S-morfismos forman una categoría 123
9.2 Productos y coproductos en S-Act 124
9.3 Producto y coproducto de S-morfismos 131
9.4 Pullbacks y pushouts en S-Act 133
9.5 Monomorfismos y epimorfismos en S-Act 136
9.6 Objetos libres en S-Act 137
9.7 Generadores y cogeneradores en S-Act 138
9.8 La categoría de representaciones 143
9.9 Biacciones 150
9.10 Los funtores Hom(A,_) 154
9.11 S-Act no es una categoría abeliana 160

10 Acciones proyectivas 165
10.1 Acciones proyectivas 166
10.2 Otros criterios de proyectividad 176
10.3 Monoides hereditarios 180
10.4 Cubiertas proyectivas y monoides perfectos 182

Conclusiones 197

Bibliografía 199

Índice alfabético **201**

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Categorías

Se presupone que el lector conoce el concepto de categoría, categoría opuesta, diagrama conmutativo, funtor, monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción, productos, coproductos etc. A partir de eso, y con el fin de hacer de este escrito lo más autocontenido posible, en el presente capítulo se introducen las definiciones y resultados categóricos que serán esenciales en la parte principal del trabajo. Sobre la notación, en todo el texto $Ob(\mathcal{A})$ y $Mor(\mathcal{A})$ denotarán, respectivamente, las clases de objetos y morfismos de una categoría dada $\mathcal{A}$ y $Hom(A, B)$ denotará la colección de todos los morfismos de A en B. Además, la composición de dos morfismos f y g (siempre que tenga sentido) se denotará por gf. Se supondrá a lo largo de todo este capítulo que los objetos y morfismos de los que se haga mención pertenecen a una misma categoría dada $\mathcal{A}$. Para más información sobre Teoría de Categorías, el lector interesado puede consultar la referencia [7] sobre cosas no definidas aquí.

1.1.1. Igualadores y coigualadores

Definición 1.1.1. *Un igualador para los morfismos* $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$ *es un morfismo* $E \xrightarrow{m} X$ *con las siguientes propiedades:*

1. $\alpha m = \beta m$
2. *Para cada morfismo* $E' \xrightarrow{x} X$ *tal que* $\alpha x = \beta x$ *existe un único morfismo* $E' \xrightarrow{r} E$ *que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, dashed, "r"'] & & X \\
& E \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

El concepto dual al anterior es el siguiente:

Definición 1.1.2. *Un coigualador para los morfismos* $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$ *es un morfismo* $Y \xrightarrow{e} D$ *con las siguientes propiedades:*

1. $e\alpha = e\beta$
2. *Para cada morfismo* $Y \xrightarrow{y} D'$ *tal que* $y\alpha = y\beta$ *existe un único morfismo* $D \xrightarrow{s} D'$ *que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "e"'] & & D' \\
& D \arrow[ur, dashed, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Todo igualador es cancelable por la izquierda y todo coigualador es cancelable por la derecha.

Proposición 1.1.3. *Si un morfismo* $E \xrightarrow{m} X$ *es igualador (coigualador) de algún par de morfismos, entonces este debe ser un monomorfismo (epimorfismo).*

Demostración. Suponga que el morfismo m es igualador de los morfismos $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$ y sean $A \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} E$ un par de morfismos tales que $mu = mv$. Puesto que m es igualador de α y β se tiene que $\alpha(mu) = \alpha(mv) = (\alpha m)v = (\beta m)v = \beta(mv)$ i,e, $\alpha(mu) = \beta(mv)$. De esta última igualdad se desprende que existe un único morfismo $A \xrightarrow{r} E$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "mu=mv"] \arrow[dr, dashed, "r"'] & & X \\
& E \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Observar que ambos morfismos u y v hacen conmutativo al diagrama anterior y en consecuencia, de la unicidad de r se sigue que $u = r = v$. Puede concluirse así que m es un monomorfismo. Para exhibir que un coigualador debe ser un epimorfismo se procede de manera análoga. ☐

Proposición 1.1.4. *Suponga que los morfismos*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] & D \\
D' &
\end{tikzcd}$$

son coigualadores de los morfismos $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$ *. Entonces existe un único isomorfismo* $D \xrightarrow{\psi} D'$ *tal que* $e' = \psi e$*. En particular* $D \cong D'$*.*

Demostración. Puesto que e y e' son coigualadores de α y β, entonces existen únicos morfismos ψ y ϕ que hacen conmutativos a los siguientes triángulos:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & & D \\ & D' \arrow[ur, dashed, "\phi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "e'"] \arrow[dr, "e"'] & & D' \\ & D \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Esto es, $e = \phi e'$ y $e' = \psi e$. De ahí que $id_D e = e = (\phi\psi)e$ y $id_{D'} e' = e' = (\psi\phi)e'$ i,e, $id_D e = (\phi\psi)e$ y $id_{D'} e' = (\psi\phi)e'$. De esto último y de que e y e' son epimorfismos (pues son coigualadores) se concluye que $id_D = \phi\psi$ y $id_{D'} = \psi\phi$. Por consiguiente ψ es un isomorfismo y el resultado se sigue. ☐

Un resultado similar también se verifica para igualadores:

Proposición 1.1.5. *Suponga que los morfismos* $$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "m"] \\ E' \arrow[r, "m'"'] & X \end{tikzcd}$$ *son igualadores del par de morfismos* $X \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} Y$ *. Entonces existe un único isomorfismo* $E \xrightarrow{\psi} E'$ *tal que* $m = m'\psi$*. En particular* $E \cong E'$*.*

Demostración. Análoga a la demostración de la proposición anterior. ☐

Ejemplos 1.1.6. 1. *Sea* $\mathfrak{Set}$ *la categoría de conjuntos y sea* $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ *un par de funciones. Si* $E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$*, entonces la función inclusión* $E \xhookrightarrow{\iota} X$ *es igualador de* f *y* g*. En efecto, está claro que* $f\iota = g\iota$*. Por otra parte, si* $E' \xrightarrow{h} X$ *es una función tal que* $fh = gh$*, entonces para cada* $a \in E'$ *sucede que* $f(h(a)) = g(h(a))$ *y por lo tanto* $h(a) \in E$*. De ahí que tiene sentido considerar a la función* $E' \xrightarrow{r} E$ *definida por* $r(a) := h(a)$*. No es difícil ver que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, dashed, "r"'] & & X \\ & E \arrow[ur, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ahora bien, si $E' \xrightarrow{t} E$ *es una función tal que* $h = \iota t$*, entonces para cada* $a \in E'$*,* $r(a) = h(a) = \iota(t(a)) = t(a)$ *i,e,* $r(a) = t(a)$*. Por consiguiente* $r = t$ *y así* $E \xhookrightarrow{\iota} X$ *es igualador de* f *y* g*. Para construir un coigualador, sea* $R := \{(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ *y sea* ρ_R *la relación de equivalencia sobre* Y *generada por* R *i,e,*

ρ_R es la intersección de todas las relaciones de equivalencia sobre Y que contienen a R. Denotemos por $[a]$ a la clase de equivalencia de $a \in Y$ con respecto de la equivalencia ρ_R y considere a la función $Y \xrightarrow{\pi} \frac{Y}{\rho_R}$ definida por $\pi(a) := [a]$. Entonces π es coigualador de f y g. En efecto, si $x \in X$, entonces $(f(x), g(x)) \in R \subseteq \rho_R$ y por consiguiente $[f(x)] = [g(x)]$, o lo que es lo mismo $\pi(f(x)) = \pi(g(x))$. Por lo tanto $\pi f = \pi g$. Sea $Y \xrightarrow{s} Z$ una función tal que $sf = sg$. Entonces para cada $x \in X$, $s(f(x)) = s(g(x))$ y en consecuencia $R \subseteq Ker(s)$ [1]. De ahí que $\rho_R \subseteq Ker(s)$ y así del Teorema de homomorfismo para funciones (véase Teorema 1.4.35. de [8]) se sigue que existe una única función $\bar{s}$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \\
& \frac{Y}{\rho_R} \arrow[ur, dashed, "\bar{s}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto π es coigualador de f y g.

2. *Sea $\mathfrak{Grp}$ la categoría de grupos y $G \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} H$ un par de morfismos de grupos. Sea $E := \{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$ y $E \overset{\iota}{\hookrightarrow} G$ la función inclusión. No es difícil ver que E es un subgrupo de G (y por lo tanto un grupo) y que ι es un morfismo de grupos. Se tiene que $f\iota = g\iota$ y además, si $E' \xrightarrow{h} G$ es un morfismo de grupos tal que $fh = gh$, entonces puesto que f, g, h e ι son en particular funciones, del ejemplo anterior se deduce que existe una única función $E' \xrightarrow{r} E$ que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, dashed, "r"'] & & G \\
& E \arrow[ur, hook, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Tal función r está dada por $r(a) := h(a)$. Observar que como h es un morfismo de grupos, entonces r es también un morfismo de grupos. En consecuencia ι es igualador de f y g.

3. *Sea $\mathfrak{Ab}$ la categoría de grupos abelianos y $G \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} H$ un par de morfismos de grupos abelianos. Se definen las funciónes $G \xrightarrow{f+g} H$ y $G \xrightarrow{-g} H$ por medio de las reglas $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ y $(-g)(x) := -g(x)$ respectivamente. Se tiene que $f+g$ y $-g$ son morfismos de grupos, pues si $x, y \in G$, entonces*

---

[1] Si $f : A \longrightarrow B$ es una función, el Kernel de f se define como $Ker(f) := \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$.

$$\begin{aligned}(f+g)(x+y) &:= f(x+y)+g(x+y)\\ &= (f(x)+f(y))+(g(x)+g(y))\\ &= f(x)+(f(y)+g(x))+g(y)\\ &= f(x)+(g(x)+f(y))+g(y)\\ &= (f(x)+g(x))+(f(y)+g(y))\\ &= (f+g)(x)+(f+g)(y)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(-g)(x+y) &:= -g(x+y)\\ &= -(g(x)+g(y))\\ &= -g(x)+(-g(y))\\ &= (-g)(x)+(-g)(y)\end{aligned}$$

De lo anterior, tiene sentido considerar al morfismo de grupos $f-g$. Se tiene que $Im(f-g)$ es un subgrupo de H, más aún, puesto que H es abeliano, entonces $Im(f-g) \lhd H$ y por lo tanto puede considerarse al grupo cociente $\frac{H}{Im(f-g)}$ y al morfismo de grupos $\pi : H \longrightarrow \frac{H}{Im(f-g)}$ dado por $\pi(h) := Im(f-g)+h$. Veamos que π es coigualador de f y g: observe que para cada $x \in G$, $f(x)-g(x) = (f-g)(x) \in Im(f-g)$. Por lo tanto $Im(f-g)+f(x) = Im(f-g)+g(x)$ i,e, $\pi(f(x)) = \pi(g(x))$. De ahí que $\pi f = \pi g$. Sea $H \xrightarrow{s} K$ un morfismo de grupos abelianos tal que $sf = sg$. Entonces para cada $x \in G$ ocurre que $s(f(x)-g(x)) = 0$, o lo que es lo mismo $s((f-g)(x)) = 0$. Por lo tanto $Im(f-g) \leq Nu(s)$ [2], y como $Im(f-g) \lhd H$, del primer teorema de isomorfismo de grupos se sigue que existe un único morfismo de grupos $\bar{s}$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\pi"'] & & K \\ & \frac{H}{Im(f-g)} \arrow[ur, dashed, "\bar{s}"'] & \end{tikzcd}$$

Por consiguiente $\pi : H \longrightarrow \frac{H}{Im(f-g)}$ es coigualador de f y g.

---

[2] Si $f : G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupos, al conjunto $Nu(f) := \{x \in G \,|\, f(x) = 0\}$ se le llama *núcleo* de f.

1.1.2. Pullbacks y Pushouts

Definición 1.1.7. *Un pullback (o jalador) para los morfismos* $\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$ *es un par de morfismos* $\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$ *con las siguientes propiedades:*

1. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

2. *Para cada par de morfismos* $\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$ *tales que* $fp = gq$ *existe un único morfismo* $E' \xrightarrow{t} E$ *que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

El concepto dual de pullback es el pushout y es definido como sigue:

Definición 1.1.8. *Un pushout (o empujador) para los morfismos* $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$ *es un par de morfismos* $\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "u"] \\ B \arrow[r, "v"'] & D \end{tikzcd}$ *con las siguientes propiedades:*

1. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B \arrow[r, "v"'] & D \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

2. *Para cada par de morfismos* $\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "q"'] & D' \end{tikzcd}$ *tales que* $pf = qg$ *existe un único morfismo* $D \xrightarrow{s} D'$ *que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "p"] & \\ B \arrow[r, "v"'] \arrow[drr, bend right, "q"'] & D \arrow[dr, dashed, "s"] & \\ & & D' \end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.9. *Suponga que* $\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$ *y* $\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$ *son pullbacks para los morfismos* $\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$*. Entonces existe un único isomorfismo* $E' \xrightarrow{r} E$ *tal que* $\alpha = ur$ *y* $\beta = vr$*. En particular* $E \cong E'$*.*

Demostración. Puesto que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \\ B & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$$

son pullbacks para f y g, se siguen entonces un par de hechos: el primero, que existen únicos morfismos r y s que hacen conmutativos a los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\ & E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

El segundo, que los morfismos id_E e $id_{E'}$ son los únicos morfismos que hacen conmutativos a los diagramas:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "id_E"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\ & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed, "id_{E'}"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Ahora bien, de la conmutatividad del primer par de diagramas se sigue que $u(rs) = (ur)s = \alpha s = u$ mientras que $v(rs) = (vr)s = \beta s = v$, además, $\alpha(sr) = (\alpha s)r = ur = \alpha$ y $\beta(sr) = (\beta s)r = vr = \beta$ i,e, los diagramas

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "rs"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\ & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed, "sr"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Por consiguiente $rs = id_E$ y $sr = id_{E'}$. Así r es un isomorfismo y la proposición se sigue. □

Teorema. 1.1.10. *Suponga que cualesquiera dos objetos de $\mathcal{A}$ tienen un coproducto y que cualesquiera dos morfismos con el mismo dominio y codominio tienen un coigualador. Entonces cualquier par de morfismos con el mismo dominio tiene un pushout.*

Demostración. Sea
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$$
un par arbitrario de morfismos en $\mathcal{A}$. De la hipótesis se tiene que los objetos A y B tienen un coproducto, así, sea $\{ A \xrightarrow{i_1} P, B \xrightarrow{i_2} P \}$ un coproducto para A y B. Ahora bien, el par de morfismos $X \underset{i_2 g}{\overset{i_1 f}{\rightrightarrows}} P$ tiene un coigualador, digamos $P \xrightarrow{w} Q$. De que w es coigualador de $i_1 f$ e $i_2 g$ se sigue que $w(i_1 f) = w(i_2 g)$, o bien que $(wi_1)f = (wi_2)g$. De ahí que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "wi_1"] \\ B \arrow[r, "wi_2"'] & Q \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

es conmutativo. Veamos que el diagrama (1.1) es un diagrama pushout: en efecto, suponga que los morfismos $u : A \longrightarrow R$ y $v : B \longrightarrow R$ son tales que $uf = vg$. Puesto que $\{ A \xrightarrow{i_1} P, B \xrightarrow{i_2} P \}$ es coproducto para A y B, existe un único morfismo φ que hace conmutativos a los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "i_1"'] & & R \\ & P \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "i_2"'] & & R \\ & P \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

i,e, $u = \varphi i_1$ y $v = \varphi i_2$. De esto se desprende que $uf = (\varphi i_1)f$ y $vg = (\varphi i_2)g$, pero $uf = vg$, luego $\varphi(i_1 f) = \varphi(i_2 g)$. Ahora bien, de esta última igualdad junto al hecho de que w es coigualador de $i_1 f$ e $i_2 g$ se desprende que existe un único morfismo ψ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "w"'] & & R \\ & Q \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

i,e, $\varphi = \psi w$. Entonces $\psi(wi_1) = (\psi w)i_1 = \varphi i_1 = u$ y $\psi(wi_2) = (\psi w)i_2 = \varphi i_2 = v$ y por consiguiente el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "wi_1"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\
B \arrow[r, "wi_2"'] \arrow[drr, bend right, "v"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
& & R
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Finalmente, sea $\Omega : Q \longrightarrow R$ un morfismo tal que $u = \Omega(wi_1)$ y $v = \Omega(wi_2)$. Entonces $u = (\Omega w)i_1$ y $v = (\Omega w)i_2$ y por consiguiente Ωw hace conmutativos a los diagramas (1.2). Así, la unicidad de φ implica que $\varphi = \Omega w$, pero de esto último se sigue que Ω hace conmutativo al diagrama (1.3) y en consecuencia, la unicidad de ψ garantiza que $\Omega = \psi$. Por lo tanto el diagrama (1.1) es un diagrama pushout. □

1.1.3. Generadores y cogeneradores

Definición 1.1.11. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría, se dice que $G \in Ob(\mathcal{A})$ es un generador si para cada par de morfismos $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ con $f \neq g$, existe un morfismo $G \xrightarrow{h} A$ tal que $fh \neq gh$. Dualmente, se dice que $C \in Ob(\mathcal{A})$ es un cogenerador si para cada par de morfismos $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ con $f \neq g$, existe un morfismo $B \xrightarrow{h} C$ tal que $hf \neq hg$.*

Teorema. 1.1.12. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría.*

1. *Si $\mathcal{A}$ tiene coproductos, entonces $G \in Ob(\mathcal{A})$ es generador si y solo si para cada objeto A existe un conjunto I y un epimorfismo $\coprod_{i \in I} G \longrightarrow A$.*

2. *Si $\mathcal{A}$ tiene productos, entonces $C \in Ob(\mathcal{A})$ es cogenerador si y solo si para cada objeto A existe un conjunto I y un monomorfismo $A \longrightarrow \prod_{i \in I} C$.*

Demostración. Solo se probará el primer inciso, debido a que el segundo se sigue por dualidad. Suponga que G es un generador y sea $A \in Ob(\mathcal{A})$ arbitrario. Considere al conjunto $I := Hom(G, A)$ y para cada $i \in I$ hágase $G_i := G$. Como $\mathcal{A}$ tiene coproductos, sea $\left\{ G \xrightarrow{\sigma_f} \coprod_{i \in I} G \right\}_{f \in I}$ un coproducto para la familia $(G_i)_{i \in I}$. De esto se sigue que para la familia de morfismos $\left\{ G \xrightarrow{f} A \right\}_{f \in I}$ existe un único morfismo φ tal que para cada $f \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\sigma_f"'] & & A \\
& \coprod_{i\in I} G \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

es conmutativo i,e, para cada $f \in I$, $f = \varphi\sigma_f$. Veamos que φ es un epimorfismo: en efecto, sean $A \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} B$ un par de morfismos tales que $u\varphi = v\varphi$. Si ocurriera que $u \neq v$, entonces como G es generador, existe un morfismo $h : G \longrightarrow A$ tal que $uh \neq vh$. Ahora bien, observe que $h \in I := Hom(G, A)$, y además el diagrama (1.4) es conmutativo para cada elemento de I, en particular, para h ocurre que $h = \varphi\sigma_h$. Así, de la igualdad $u\varphi = v\varphi$ se sigue que $u(\varphi\sigma_h) = v(\varphi\sigma_h)$ y por consiguiente $uh = vh$, lo que contradice que $uh \neq vh$. Por lo tanto $u = v$ y en consecuencia φ es un epimorfismo. Y viceversa, suponga que para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$ existe un conjunto I y un epimorfismo $\coprod_{i\in I} G \longrightarrow A$. Veamos que G es un generador: sean $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ un par de morfismos con $f \neq g$. Suponga, a manera de llegar a un absurdo, que para cada $h \in Hom(G, A)$, $fh = gh$. Ahora, por hipótesis, para el objeto A existe un conjunto I y un epimorfismo $\coprod_{i\in I} G \xrightarrow{\varphi} A$. Para cada $i \in I$ hágase $G_i := G$ y sea $\left\{ G \xrightarrow{\sigma_j} \coprod_{i\in I} G \right\}_{j\in I}$ un coproducto para la familia $(G_i)_{i\in I}$. Observe que para cada $j \in I$ el morfismo composición $G \xrightarrow{\sigma_j} \coprod_{i\in I} G \xrightarrow{\varphi} A$ pertenece a $Hom(G, A)$ y por consiguiente para cada $j \in I$ ocurre que $f(\varphi\sigma_j) = g(\varphi\sigma_j)$ o bien, que $(f\varphi)\sigma_j = (g\varphi)\sigma_j$. A partir de esto, considere a la familia de morfismos $\left\{ G \xrightarrow{(f\varphi)\sigma_j=(g\varphi)\sigma_j} B \right\}_{j\in I}$. De que $\left\{ G \xrightarrow{\sigma_j} \coprod_{i\in I} G \right\}_{j\in I}$ es un coproducto para $(G_i)_{i\in I}$ se sigue que existe un único morfismo ψ tal que para cada $j \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "(f\varphi)\sigma_j=(g\varphi)\sigma_j"] \arrow[dr, "\sigma_j"'] & & B \\
& \coprod_{i\in I} G \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

es conmutativo. Por otra parte, es claro que los morfismos $f\varphi$ y $g\varphi$ hacen conmutativos a cada uno de los diagramas (1.5), de forma que la unicidad de ψ implica que $f\varphi = \psi = g\varphi$

i,e, $f\varphi = g\varphi$, y al ser φ un epimorfismo, entonces $f = g$, pero esto contradice a que $f \neq g$. Este absurdo surgió del hecho de suponer que para cada $h \in Hom(G, A)$, $fh = gh$. Por lo tanto existe $h \in Hom(G, A)$ tal que $fh \neq gh$ y en consecuencia G es un generador. □

1.1.4. Categorías concretas

Definición 1.1.13. *Si $\mathcal{X}$ es una categoría, una categoría concreta sobre $\mathcal{X}$ es un par $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$, donde $\mathcal{A}$ es una categoría y $\mathcal{U} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ es un funtor fiel. Una categoría concreta sobre $\mathfrak{Set}$ es llamada constructo.*

Definición 1.1.14. *Sean $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ una categoría concreta sobre la categoría $\mathcal{X}$ y $X \in Ob(\mathcal{X})$.*

1. *Un morfismo estructurado con dominio X es un $\mathcal{X}-$morfismo $X \xrightarrow{f} \mathcal{U}(A)$ con A un objeto de $\mathcal{A}$.*
2. *Un morfismo universal sobre X es un morfismo estructurado con dominio X, digamos $U : X \longrightarrow \mathcal{U}(A)$, con la siguiente propiedad:*

   Para cada morfismo $f : X \longrightarrow \mathcal{U}(B)$, existe un único $\mathcal{A}-$morfismo $\eta : A \longrightarrow B$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathcal{U}(B) \\
& \mathcal{U}(A) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{U}(\eta)"'] &
\end{tikzcd}$$

3. *Un objeto libre sobre X es un objeto $A \in Ob(\mathcal{A})$ para el cuál existe un morfismo universal $U : X \longrightarrow \mathcal{U}(A)$.*

1.1.5. Objetos proyectivos

Definición 1.1.15. *Se dice que un objeto P de una categoría $\mathcal{A}$ es proyectivo si para cada epimorfismo $B \xrightarrow{g} C$ y cada morfismo $P \xrightarrow{\alpha} C$ existe un morfismo β que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Teorema. 1.1.16. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El axioma de elección.*
2. *Todo conjunto es un objeto proyectivo en* $\mathfrak{Set}$.

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Suponga el axioma de elección y sea P un conjunto arbitrario. Si $P = \emptyset$, entonces es claro que para cada función sobreyectiva $B \xrightarrow{g} C$ la función vacía ϕ hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \emptyset \arrow[dl, dashed, "\phi"'] \arrow[d, "\phi"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

De ahí que $P = \emptyset$ es proyectivo. Si $P \neq \emptyset$, sean $B \xrightarrow{g} C$ y $P \xrightarrow{\alpha} C$ funciones con g sobreyectiva. Para cada $p \in P$ sea $X_p := \{b \in B \mid g(b) = \alpha(p)\}$. Observar que como $\alpha(p) \in C$ y g es sobreyectiva, entonces existe $b \in B$ tal que $g(b) = \alpha(p)$, y en consecuencia cada X_p es no vacío. Así que por el axioma de elección, existe una función $\beta : P \longrightarrow \bigcup\limits_{p \in P} X_p$ tal que para cada $p \in P$, $\beta(p) \in X_p$. Ahora bien, como $\bigcup\limits_{p \in P} X_p \subseteq B$, entonces puede considerarse a β como función de P en B. Más aún, como para cada $p \in P$ ocurre que $\beta(p) \in X_p$, entonces $g(\beta(p)) = \alpha(p)$ y por lo tanto $\alpha = g\beta$. De ahí que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y por consiguiente P es proyectivo.
$2) \Longrightarrow 1)$ Suponga que todo conjunto es un objeto proyectivo en $\mathfrak{Set}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos por pares. De que los elementos de $\mathcal{F}$ sean disjuntos por pares se sigue que para cada $x \in \bigcup \mathcal{F}$ existe un único $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \in A$. Denotemos a este conjunto por A_x y considere a la función $g : \bigcup \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ dada por $g(x) := A_x$. Observe que si $A \in \mathcal{F}$ es arbitrario, entonces $A = g(x)$, siendo x cualquier elemento de A. De ahí que g es sobreyectiva. Ahora bien, como todo conjunto es un objeto proyectivo en $\mathfrak{Set}$, entonces en particular $\mathcal{F}$ es proyectivo y así existe una función β que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F} \arrow[ld, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "id_{\mathcal{F}}"] \\
\bigcup \mathcal{F} \arrow[r, "g"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

i,e, $g\beta = id_{\mathcal{F}}$. De esto último se sigue que para cada $Z \in \mathcal{F}$, $g(\beta(Z)) = id_{\mathcal{F}}(Z) = Z$, pero también se tiene que $g(\beta(Z)) := A_{\beta(Z)}$, donde $A_{\beta(Z)}$ es el único elemento de $\mathcal{F}$ tal que $\beta(Z) \in A_{\beta(Z)}$. Así que entonces $A_{\beta(Z)} = Z$ y por consiguiente $\beta(Z) \in Z$. Se concluye que β es una función de elección para la familia $\mathcal{F}$ y por lo tanto se verifica el axioma de elección. ☐

Teorema. 1.1.17. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ una categoría concreta sobre $\mathfrak{Set}$ y suponga que el funtor $\mathcal{U}$ manda epimorfismos en epimorfismos. Si $P \in Ob(\mathcal{A})$ es un objeto libre sobre el conjunto X, entonces P es un objeto proyectivo en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Si $P \in Ob(\mathcal{A})$ es un objeto libre sobre el conjunto X, entonces existe un morfismo en $\mathfrak{Set}$ (una función) $U : X \longrightarrow \mathcal{U}(P)$ que es universal (véase Definición 1.1.14). Ahora, sean $B \xrightarrow{g} C$ y $P \xrightarrow{\alpha} C$ $\mathcal{A}-$morfismos con g un epimorfismo. Como $\mathcal{U}$ manda epimorfismos en epimorfismos, entonces $\mathcal{U}(B) \xrightarrow{\mathcal{U}(g)} \mathcal{U}(C)$ es un epimorfismo en $\mathfrak{Set}$. Por otra parte, si asumimos el axioma de elección, entonces del Teorema 1.1.16 se sigue que X es proyectivo en $\mathfrak{Set}$ y por consiguiente existe una función β que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "U"] \arrow[ldd, dashed, "\beta"'] \\
& \mathcal{U}(P) \arrow[d, "\mathcal{U}(\alpha)"] \\
\mathcal{U}(B) \arrow[r, "\mathcal{U}(g)"'] & \mathcal{U}(C)
\end{tikzcd}$$

i,e, $\mathcal{U}(g)\beta = \mathcal{U}(\alpha)U$. Ahora bien como U es universal, para la función β existe un único $\mathcal{A}-$morfismo $\eta : P \longrightarrow B$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathcal{U}(B) \\
& \mathcal{U}(P) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{U}(\eta)"'] &
\end{tikzcd}$$

i,e, $\beta = \mathcal{U}(\eta)U$. Esta última igualdad junto con que $\mathcal{U}(g)\beta = \mathcal{U}(\alpha)U$ implican que $\mathcal{U}(g)\mathcal{U}(\eta)U = \mathcal{U}(\alpha)U$ y por lo tanto $\mathcal{U}(g\eta)U = \mathcal{U}(\alpha)U$. Por otro lado, al ser U universal, para la función $\mathcal{U}(g\eta)U = \mathcal{U}(\alpha)U$ existe un único $\mathcal{A}-$morfismo f que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mathcal{U}(g\eta)U=\mathcal{U}(\alpha)U"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathcal{U}(C) \\
& \mathcal{U}(P) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{U}(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

Pero claramente α y $g\eta$ son dos $\mathcal{A}-$morfismos que hacen conmutativo al diagrama anterior, de manera que la unicidad de f implica que $\alpha = g\eta$ y por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "\eta"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por consiguiente P es proyectivo. □

1.2. Monoides y sus ideales

A continuación se ofrecen algunas definiciones y resultados básicos sobre monoides, sobre elementos especiales y sobre el concepto de ideal. Todo esto será utilizado con bastante frecuencia a lo largo de la parte central de esta tesis. Mencionamos que para obtener más información sobre Teoría de Semigrupos (monoides) y para una discusión mucho más ordenada y detallada, el lector interesado puede consultar la referencia [8].

1.2.1. Semigrupos, monoides y elementos especiales

Definición 1.2.1. *Si X es un conjunto, una operación binaria sobre X es simplemente una función de $X \times X$ en X. Además, si $\cdot$ es una operación binaria sobre X, se dirá que $\cdot$ es:*

1. *asociativa, si para cada $a, b, c \in X$ se verifica que $a(bc) = (ab)c$.*

2. *conmutativa, si para cada* $a, b \in X$ *se verifica que* $ab = ba$

Definición 1.2.2. *Un semigrupo es un par ordenado* $(S, \cdot)$ *donde* S *es un conjunto no vacío y* $\cdot$ *es una operación binaria asociativa sobre* S*. Además, se dice que el semigrupo* $(S, \cdot)$ *es conmutativo (o abeliano) si* $\cdot$ *es una operación binaria conmutativa.*

En la práctica, un semigrupo es denotado a través de su conjunto subyacente, así, la frase *sea* S *un semigrupo* significa que hay una operación binaria sobre S, digamos $\cdot$, de tal manera que $(S, \cdot)$ es un semigrupo.

Definición 1.2.3. *Si* S *es un semigrupo, se dice que* $e \in S$ *es:*

1. *neutro izquierdo (o identidad izquierda) si para cada* $x \in S$ *ocurre que* $ex = x$.
2. *neutro derecho (o identidad derecha) si para cada* $x \in S$ *ocurre que* $xe = x$.
3. *neutro (o identidad) si para cada* $x \in S$ *ocurre que* $ex = x = xe$.

Proposición 1.2.4. *Sea* S *un semigrupo y suponga que* $e \in S$ *es neutro izquierdo y que* $e' \in S$ *es neutro derecho. Entonces* $e = e'$.

Demostración. Como e es neutro izquierdo, entonces $ee' = e'$. Por otra parte, como e' es neutro derecho, entonces $ee' = e$. De ahí que $e = e'$. ☐

Corolario 1.2.5. *Todo semigrupo tiene a lo más un elemento neutro.*

Demostración. Directa de la Proposición anterior. ☐

Definición 1.2.6. *Un monoide es un semigrupo que tiene un elemento neutro.*

Definición 1.2.7. *Sea* S *un semigrupo. Decimos que* $z \in S$ *es:*

1. *cero izquierdo si para cada* $x \in S$ *ocurre que* $zx = z$.
2. *cero derecho si para cada* $x \in S$ *ocurre que* $xz = z$.
3. *elemento cero si para cada* $x \in S$ *ocurre que* $zx = z = xz$

Proposición 1.2.8. *Sea* S *un semigrupo y suponga que* $z \in S$ *es cero izquierdo y que* $z' \in S$ *es cero derecho. Entonces* $z = z'$.

Demostración. Como z es cero izquierdo, entonces $zz' = z$. Por otra parte, como z' es cero derecho, entonces $zz' = z'$. De ahí que $z = z'$. ☐

Corolario 1.2.9. *Todo semigrupo tiene a lo más un elemento cero.*

Demostración. Directa de la Proposición anterior. ☐

Definición 1.2.10. *Sea S un monoide con elemento neutro $e \in S$ y sean $x, y \in S$. Se dice que y es :*

1. *inverso izquierdo de x, si $yx = e$.*
2. *inverso derecho de x, si $xy = e$.*
3. *inverso de x, si $yx = e = xy$.*

Además, se dice que x es:

1. *invertible izquierdo, si x tiene al menos un inverso izquierdo.*
2. *invertible derecho, si x tiene al menos un inverso derecho.*
3. *invertible, si x tiene un inverso.*

Proposición 1.2.11. *Sea S un monoide con elemento neutro $e \in S$. Entonces todo elemento de S tiene a lo más un inverso.*

Demostración. Suponga que $u, v \in S$ son ambos inversos de $x \in S$. Entonces $u = ue = u(xv) = (ux)v = ev = v$. ☐

Si S es un monoide y $a \in S$ es invertible, escribiremos a^{-1} para denotar a su inverso.

Definición 1.2.12. *Un grupo es un monoide en el que cada elemento es invertible.*

Teorema. 1.2.13. *Sean G un semigrupo y $e \in G$ un neutro izquierdo. Suponga que para cada $g \in G$ existe $x_g \in G$ tal que $x_g g = e$. Entonces G es un grupo.*

Demostración. Veamos que para cada $g, x, y \in G$ la igauldad $gx = gy$ implica que $x = y$: en efecto

$$\begin{aligned} gx = gy &\Longrightarrow x_g(gx) = x_g(gy) \\ &\Longrightarrow (x_g g)x = (x_g g)y \\ &\Longrightarrow ex = ey \\ &\Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Ahora, si $g \in G$ es arbitrario, entonces ocurre que $x_g(ge) = (x_g g)e = ee = e = x_g g$. Por lo tanto $x_g(ge) = x_g g$ y en consecuencia $ge = g$. De ahí que e es también neutro derecho y por consiguiente elemento neutro. De lo anterior se sigue que G es un monoide con elemento neutro e. De nuevo, si $g \in G$ es arbitrario, entonces se tiene que $x_g(gx_g) = (x_g g)x_g = ex_g = x_g = x_g e$. Por lo tanto $x_g(gx_g) = x_g e$ y por consiguiente $gx_g = e$. Esto último aunado a que $x_g g = e$ permite concluir que x_g es un inverso para g. En consecuencia todo elemento de G es invertible y por consiguiente G es un grupo. ☐

Del Teorema anterior se sigue en particular, que si un monoide es tal que cualquiera de sus elementos tiene inverso izquierdo, entonces tal monoide es un grupo.

Definición 1.2.14. *Si S es un semigrupo, se dice que $\alpha \in S$ es idempotente si $\alpha^2 = \alpha$. Se denota por $E(S)$ a la colección de todos los elementos idempotentes de S.*

Definición 1.2.15. *Se dice que un semigrupo S es:*

1. *cancelativo izquierdo si para cada $a, x, y \in S$ la igualdad $ax = ay$ implica que $x = y$.*
2. *cancelativo derecho si para cada $a, x, y \in S$ la igualdad $xa = ya$ implica que $x = y$.*
3. *cancelativo si S es a la vez cancelativo izquierdo y derecho.*

Definición 1.2.16. *Si S es un semigrupo, un subsemigrupo de S es un subconjunto no vacío de S, digamos T, tal que para cada $s, t \in T$ ocurre que $st \in T$. Además, si S es un monoide con neutro e, un submonoide de S es un subsemigrupo de S, digamos T, tal que $e \in T$.*

Definición 1.2.17. *Si S y T son semigrupos, un morfismo de semigrupos es una función $f : S \longrightarrow T$ tal que para cada $a, b \in S$ se verifica que $f(ab) = f(a)f(b)$. Si además S y T son monoides con neutros e_S y e_T, respectivamente, un morfismo de monoides es un morfismo de semigrupos $f : S \longrightarrow T$ tal que $f(e_S) = e_T$.*

1.2.2. Ideales

Definición 1.2.18. *Sea S un semigrupo e I un subconjunto no vacío de S. Se dice que I es un*

1. *ideal izquierdo, si para cada $x \in S$ y cada $a \in I$ ocurre que $xa \in I$.*
2. *ideal derecho, si para cada $x \in S$ y cada $a \in I$ ocurre que $ax \in I$.*
3. *ideal bilátero (o simplemente ideal), si I es un ideal izquierdo y un ideal derecho.*

Definición 1.2.19. *Un ideal izquierdo maximal de un semigrupo S es un ideal izquierdo I de S tal que $I \neq S$ y para cada J ideal izquierdo, $I \subseteq J$ implica que $I = J$. De manera similar se define ideal derecho maximal e ideal maximal.*

Definición 1.2.20. *Un ideal izquierdo minimal de un semigrupo S es un ideal izquierdo I de S tal que para cada J ideal izquierdo de S, la contención $J \subseteq I$ implica que $J = I$. De manera similar se define ideal derecho minimal.*

Proposición 1.2.21. *Si S es un semigrupo y $a \in S$, entonces los conjuntos*

$$Sa := \{xa \,|\, x \in S\}, aS := \{ax \,|\, x \in S\} \text{ y } SaS := \{xay \,|\, x, y \in S\}$$

son un ideal izquierdo, ideal derecho e ideal bilátero respectivamente.

Demostración. Veamos que Sa es un ideal izquierdo: para cada $x, y \in S$ se tiene que $x(ya) = (xy)a \in Sa$. Por consiguiente Sa es un ideal izquierdo. Ahora bien, para ver que SaS es un ideal bilátero solo basta con observar que para cada $x, y, z \in S$, $z(xay) = (zx)ay \in SaS$ y $(xay)z = xa(yz) \in SaS$. El argumento para verificar que aS es un ideal derecho es similar a los anteriores y se omite. $\square$

Si S es un semigrupo y $a \in S$, será usual también denotar al ideal izquierdo Sa por $\langle a \rangle$.

Definición 1.2.22. *Se dice que un semigrupo S es de ideales principales izquierdos si todo ideal izquierdo de S es de la forma $\langle a \rangle$ para algún $a \in S$. De manera similar se define un semigrupo de ideales principales derechos y de ideales principales biláteros.*

CAPÍTULO 2

S-ACCIONES

De forma imprecisa, un $R-$módulo es un grupo abeliano en el que se hace *accionar* de manera conveniente, a los elementos de un anillo dado R. Observe que los módulos, por definición, deben involucrar a dos estructuras algebraicas (un anillo y un grupo abeliano). Existe una cantidad considerable de resultados acerca de módulos. En particular, es bien sabido que un anillo dado R induce una categoría denotada por $R-$mod cuyos objetos son todos los $R-$módulos. Hay teoremas del tipo: un anillo R cumple con tal propiedad si y solo si todos los objetos de $R-$mod cumplen con tal propiedad. Inspirándonos en lo anteriormente dicho, este trabajo de tesis tiene por objetivo estudiar a cierto tipo de estructuras más generales a las que llamaremos *acciones* y que, a diferencia de los módulos, solo consideran a un tipo de estructura algebraica, a saber, un semigrupo o un monoide. A grosso modo, una acción sobre un monoide S será un conjunto en el que se hace *accionar* de manera conveniente, a los elementos del monoide dado S. De igual forma que con los módulos, trataremos de caracterizar a los monoides a través de las propiedades de su categoría de acciones. Así las cosas, en este capítulo se establecen las primeras definiciones y resultados básicos sobre acciones que permitirán profundizar en la teoría referente a esta clase de objetos. Mencionamos que a partir de ahora, sería conveniente que el lector tenga nociones sobre Teoría de anillos y módulos, sin embargo, y a pesar de que estos temas no serán abordados en el trabajo, el lector interesado puede consultar, por ejemplo, las referencias [1], [10] y [11].

2.1. Acciones sobre monoides

Si X es un conjunto no vacío, se define

$$\tau(X) := \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ es función}\}$$

A los elementos de $\tau(X)$ se les conoce como transformaciones de X. Observe que $\tau(X)$ es un monoide con la composición usual entre funciones y cuyo elemento neutro es la función identidad.

Definición 2.1.1. *Si S es un semigrupo y X es un conjunto no vacío, una representación de S por transformaciones de X es un morfismo de semigrupos $f : S \longrightarrow \tau(X)$. Si además S es un monoide y f es un morfismo de monoides, entonces a f se le llama representación unitaria. Se denota a la colección de todas las representaciones de S por transformaciones de X por $Rep(S, X)$, y si S es un monoide, $Rep_u(S, X)$ denota a la colección de todas las transformaciones unitarias de S.*

Definición 2.1.2. *Si S es un monoide con elemento neutro e, una S-acción (izquierda) es un par $(X, *)$ donde X es un conjunto no vacío y $* : S \times X \longrightarrow X$ es una función que satisface lo siguiente para cada $x \in X$ y $s, t \in S$:*

1. $e * x = x$
2. $s * (t * x) = (st) * x$

Observación 2.1.3. *En el caso en que S solo sea un semigrupo (sin elemento neutro), una S-acción (izquierda) es un par $(X, *)$ donde X es un conjunto no vacío y $* : S \times X \longrightarrow X$ es una función que satisface solo el inciso 2 de la Definición 2.1.2.*

Advertencia: en lo sucesivo, S denotará un monoide con neutro e y todas las $S-$acciones serán aquellas que satisfacen la Definición 2.1.2 a menos que se especifique otra cosa.

Para cada conjunto no vacío X se define

$$(S - act)_X := \{* : S \times X \longrightarrow X \mid (X, *) \text{ es } S\text{−acción}\}$$

Proposición 2.1.4. *Para cada conjunto no vacío X existe una correspondencia biyectiva entre $(S - act)_X$ y $Rep_u(S, X)$.*

Demostración. Si $f \in Rep_u(S, X)$ se define $*_f : S \times X \longrightarrow X$ como $s *_f x := f(s)(x)$. Observe que $e *_f x = f(e)(x) = id_X(x) = x$, además de que $s *_f (t *_f x) = s *_f f(t)(x) = f(s)(f(t)(x)) = (f(s)f(t))(x) = f(st)(x) = (st) *_f x$. De esto se sigue que $(X, *_f)$ es una S-acción. A partir de esto tiene sentido considerar a la función $\Gamma : Rep_u(S, X) \longrightarrow (S - act)_X$ definida por $\Gamma(f) := *_f$. Veamos que Γ es una biyección: si $f, g \in Rep_u(S, X)$ son tales que $*_f = *_g$, entonces para cada $s \in S$ y $x \in X$ se tiene que $f(s)(x) = s *_f x = s *_g x = g(s)(x)$ i,e, $f(s)(x) = g(s)(x)$. De ahí que para cada $s \in S$, $f(s) = g(s)$ y por consiguiente $f = g$. Luego Γ debe ser inyectiva. Ahora, si $* \in (S - \text{act})_X$, para cada $s \in S$ se define a la función $f_s : X \longrightarrow X$ como $f_s(x) := s * x$. Tomando en cuenta lo anterior se define a $F : S \longrightarrow \tau(X)$ como $F(s) := f_s$. Nótese que si $s, t \in S$, entonces para cada $x \in X$ ocurre que $f_{st}(x) := (st) * x = s * (t * x) = f_s(f_t(x)) = (f_s f_t)(x)$, de donde $f_{st} = f_s f_t$. Más aún, para cada $x \in X$, $f_e(x) := e * x = x = id_X(x)$, luego $f_e = id_X$ y por consiguiente F debe ser un morfismo de monoides i,e, $F \in Rep_u(S, X)$. Finalmente, se tiene que $s *_F x := F(s)(x) = f_s(x) = s * x$. Por lo tanto $* = *_F = \Gamma(F)$, lo cual exhibe que Γ es sobreyectiva. ☐

En la práctica, una $S-$acción es denotada a través de su conjunto subyacente, así, la frase "Sea X una $S-$acción" significará, en lo sucesivo, que hay una función $* : S \times X \longrightarrow X$ de tal manera que $(X, *)$ es una $S-$acción izquierda. Además, de ahora en adelante no se hará énfasis en la función $*$ (a menos que sea necesario) y escribiremos sx en lugar de $s * x$. Será también común escribir ${}_SX$ para indicar que X es una $S-$acción izquierda.

2.1.1. Ejemplos

1. Si S es un monoide con operación binaria $* : S \times S \longrightarrow S$, entonces el par $(S, *)$ es una $S-$acción izquierda. Se le llama a esta acción la $S-$acción regular y se le denota por ${}_SS$. Observar que aquí, la *acción* de los elementos del monoide S en los elementos del conjunto S es simplemente la operación en el monoide S.

2. Si X es una $S-$acción, para cada $A \subseteq X$ y cada $s \in S$ se define

$$sA := \{sa \,|\, a \in A\}$$

   Con esto, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ es una $S-$acción izquierda.

3. Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo con unidad y A es un $R-$módulo izquierdo con acción de R en A dada por $*$, entonces $(A, *)$ es una $(R, \cdot)-$acción, además si A no es el $R-$módulo cero, entonces $(A, *)$ no puede ser una $(R, +)-$acción.

4. Si S es cualquier monoide y X cualquier conjunto no vacío, entonces X es una $S-$acción haciendo $sx := x$ para cada $s \in S$ y $x \in X$.

5. Si X es cualquier conjunto no vacío, entonces X es una $(\tau(X), \circ)-$acción haciendo para cada $f \in \tau(X)$ y $x \in X$, $f * x := f(x)$.

6. Si A y B son $S-$acciones, el conjunto $A \times B$ es una $S-$acción haciendo $s(a, b) := (sa, sb)$.

7. Si A es una $S-$acción y $\varphi : T \longrightarrow S$ es un morfismo de monoides, entonces A es una $T-$acción haciendo $ta := \varphi(t)a$ para cada $t \in T$ y cada $a \in A$.

2.2. Subacciones

Definición 2.2.1. *Si A es una $S-$acción, una subacción es un subconjunto B no vacío de A tal que para cada $s \in S$ y cada $b \in B$, $sb \in B$. Se escribirá $B \leq A$ para indicar que B es una subacción de A.*

Ejemplo 2.2.2. *Toda subacción de la acción regular ${}_SS$ debe ser un ideal izquierdo del monoide S, y viceversa, todo ideal izquierdo del monoide S es una subacción de ${}_SS$.*

Lema 2.2.3. *Sea A una $S-$acción y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subacciones de A. Entonces $\bigcup \mathcal{F}$ y $\bigcap \mathcal{F}$ son subacciones de A (siempre que $\bigcap \mathcal{F}$ sea no vacío).*

Demostración. Si $s \in S$ y $a \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces hay una subacción $B \in \mathcal{F}$ con $a \in B$, luego $sb \in B$ con $B \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Por lo tanto $sb \in \bigcup \mathcal{F}$ y así $\bigcup \mathcal{F}$ es subacción. Que $\bigcap \mathcal{F}$ es subacción se exhibe de manera similar. ☐

Si ${}_S A$ es una $S-$acción y X es un subconjunto no vacío de A, entonces puede considerarse a la familia

$$\mathcal{F}_X := \{B \leq A \,|\, X \subseteq B\}$$

Observe que $\mathcal{F}_X$ es una familia no vacía pues $A \in \mathcal{F}_X$. Además según el Lema 2.2.3 $\bigcap \mathcal{F}_X$ es una subacción.

Definición 2.2.4. *Si A es una $S-$acción y X es un subconjunto no vacío de A, entonces a la subacción $\bigcap \mathcal{F}_X$ se le llama subacción generada por X y se le denota por $\langle X \rangle$*

Teorema. 2.2.5. *Si A es una $S-$acción y X es un subconjunto no vacío de A, entonces*

$$\langle X \rangle = \{sx \,|\, s \in S, x \in X\}$$

Demostración. Considere al conjunto $B := \{sx \,|\, s \in S, x \in X\}$. No es difícil ver que B es una subacción de A. Ahora bien, si $x \in X$, entonces $x = ex \in B$ y por consiguiente $X \subseteq B$. De ahí que $B \in \mathcal{F}_X$ y en consecuencia $\langle X \rangle \subseteq B$. Por otra parte, para $s \in S$ y $x \in X$, sea $D \in \mathcal{F}_X$ arbitraria. Puesto que $D \in \mathcal{F}_X$, entonces $X \subseteq D$ y así $x \in D$. Luego $sx \in D$. De ahí que $sx \in D$ para cada $D \in \mathcal{F}_X$ y por consiguiente $sx \in \langle X \rangle$. De esto se deduce que $B \subseteq \langle X \rangle$ y por consiguiente $\langle X \rangle = B$. ☐

Proposición 2.2.6. *Sea A una $S-$acción y $X, Y \subseteq A$ no vacíos. Entonces:*

1. *$X \leq A$ si y solo si $X = \langle X \rangle$.*
2. *$X \subseteq Y$ implica que $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.*
3. *$\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle$.*

Demostración. 1) Recordar que $\langle X \rangle$ es la intersección de todas las subacciones que contienen a X. En particular $\langle X \rangle$ está contenida en cualquier subacción que contenga a X. Así que cuando $X \leq A$, de que $X \subseteq X$ se desprende que $\langle X \rangle \subseteq X \subseteq \langle X \rangle$ y por consiguiente $X = \langle X \rangle$. El recíproco es inmediato.
2) Como $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq \langle Y \rangle$, entonces $X \subseteq \langle Y \rangle$ i,e, $\langle Y \rangle$ es una subacción que contiene a X. Por lo tanto $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.
3) De que $X \subseteq X \cup Y$ y $Y \subseteq X \cup Y$ se sigue que $\langle X \rangle \subseteq \langle X \cup Y \rangle$ y $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \cup Y \rangle$. Por consiguiente $\langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \subseteq \langle X \cup Y \rangle$. Ahora bien, de que $X \subseteq \langle X \rangle$ y $Y \subseteq \langle Y \rangle$ se sigue que $X \cup Y \subseteq \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle$ y en consecuencia $\langle X \cup Y \rangle \subseteq \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle$. Por lo tanto $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle$. ☐

2.3. S-morfismos

Definición 2.3.1. *Si A y B son $S-$acciones, un $S-$morfismo es una función $f : A \longrightarrow B$ tal que para cada $s \in S$ y $a \in A$, $f(sa) = sf(a)$.*

Observación 2.3.2. *No es difícil ver que la composición de dos $S-$morfismos es de nuevo un $S-$morfismo, y que si A es una $S-$acción, entonces id_A es un $S-$morfismo.*

Proposición 2.3.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un $S-$morfismo $A \xrightarrow{f} B$:*

1. *f es una función biyectiva*
2. *Existe un $S-$morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $gf = id_A$ y $fg = id_B$.*

Demostración. Suponga que f es biyectiva y sea $g : B \longrightarrow A$ la función inversa de f. Entonces $gf = id_A$ y $fg = id_B$. Elíjanse $s \in S$ y $b \in B$ arbitrarios. Para b existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Además, de la igualdad $gf = id_A$ se sigue que $a = g(b)$. Ahora bien, $g(sb) = g(sf(a)) = g(f(sa)) = sa = sg(b)$ y por consiguiente g es un $S-$morfismo. La implicación restante es inmediata. ☐

Definición 2.3.4. *Un isomorfismo de $S-$acciones es un $S-$morfismo que satisface alguna de las condiciones de la Proposición 2.3.3. Además, diremos que dos $S-$acciones A y B son isomorfas si existe un isomorfismo entre ellas, en cuyo caso se escribirá $A \cong B$.*

Lema 2.3.5. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un $S-$morfismo.*

1. *Si $X \leq A$, entonces $f(X) \leq B$.*
2. *Si $Y \leq B$, entonces $f^{-1}(Y) \leq A$.*

Demostración. Sean $s \in S$, $x \in X$ y $a \in f^{-1}(Y)$ arbitrarios. Se tiene que $sf(x) = f(sx)$ con $sx \in X$. Luego $sf(x) = f(sx) \in f(X)$ y en consecuencia $f(X) \leq B$. Por otra parte, como $f(a) \in Y$, entonces $sf(a) = f(sa) \in Y$ y con ello $sa \in f^{-1}(Y)$. Por consiguiente $f^{-1}(Y) \leq A$. ☐

2.4. S-congruencias y acciones cociente

Definición 2.4.1. *Si A es una $S-$acción, una $S-$congruencia es una relación de equivalencia en A, digamos ρ, tal que que para cada $s \in S$ y $x, y \in A$, $(x, y) \in \rho$ implica que $(sx, sy) \in \rho$. A la colección de todas las congruencias sobre A se le denota por $Cong(A)$.*

Ejemplos 2.4.2. *1. Todo $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ induce dos $S-$congruencias, una sobre su dominio y otra sobre su codominio:*

$$Ker(f) := \{(x, y) \in A \times A \,|\, f(x) = f(y)\} \text{ y } \mathcal{K}_{im(f)} := (im(f) \times im(f)) \cup \Delta_B$$ [1]

No es difiicil mostrar que $Ker(f)$ y $\mathcal{K}_{im(f)}$ son equivalencias en A. Solo se exhibirá que $\mathcal{K}_{im(f)}$ es una $S-$congruencia:

Sea $s \in S$ arbitrario. Si $(x, y) \in \mathcal{K}_{im(f)}$, entonces $(x, y) \in (im(f) \times im(f))$ o bien $(x, y) \in \Delta_B$. En el primer caso existen $u, v \in A$ tales que $(x, y) = (f(u), f(v))$. Luego $(sx, sy) = (sf(u), sf(v)) = (f(su), f(sv)) \in (im(f) \times im(f))$ y por lo tanto $(sx, sy) \in \mathcal{K}_{im(f)}$. En el segundo caso se tiene que $x = y$, y así $(sx, sy) = (sx, sx) \in \Delta_B$. Por consiguiente $(sx, sy) \in \mathcal{K}_{im(f)}$ y en consecuencia $\mathcal{K}_{im(f)}$ es una $S-$congruencia. A $Ker(f)$ se le llama Kernel de f y a $\mathcal{K}_{im(f)}$ se le llama congruencia imagen de f.

2. *Si A es una $S-$acción y $X \leq A$, entonces*

$$\rho_X := \{(x, y) \in A \times A \,|\, x, y \in X\} \cup \Delta_A = (X \times X) \cup \Delta_A$$

es una $S-$congruencia. A ρ_X se le llama $S-$congruencia inducida por X.

3. *Si A es una $S-$acción y $a \in A$, entonces la función $f_a : S \longrightarrow A$ dada por $f_a(s) := sa$ es un $S-$morfismo. A $Ann(x) := Ker(f_a)$ se le llama anulador de a.*

Observación 2.4.3. *Si A es una $S-$acción, sobre el conjunto $A \times A$ se define para cada $s \in S$ y $(x, y) \in A \times A$, $s(x, y) := (sx, sy)$. Con esto $A \times A$ es una $S-$acción. Más aún, si ρ es una congruencia sobre A, entonces de acuerdo con las propiedades de ρ se tiene que $\rho \leq A \times A$ i,e, toda congruencia en A es subacción de $A \times A$.*

Lema 2.4.4. *Sea A una $S-$acción y $(\rho_i)_{i \in I}$ una familia no vacía de congruencias sobre A. Si $\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i$ es una congruencia sobre A.*

Demostración. Considerar a cada ρ_i como subación de $A \times A$, entonces del Lema 2.2.3 se sigue que $\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i \leq A \times A$. De ahí que si $s \in S$ y $(x, y) \in \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i$, entonces $(sx, sy) = s(x, y) \in \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i$. Finalmente, de que la intersección de equivalencias sea de nuevo una equivalencia el resultado se sigue. □

Definición 2.4.5. *Sea A una $S-$acción. Para $X \subseteq A \times A$ se define*

$$\mathcal{G}_X := \{\rho \in Cong(A) \,|\, X \subseteq \rho\}$$

---

[1] Para cada conjunto X, $\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X \,|\, x = y\}$. A Δ_X se le llama diagonal en X.

Observe que $\mathcal{G}_X$ es no vacía, pues $A \times A \in \mathcal{G}_X$. A la congruencia $\rho(X) := \bigcap \mathcal{G}_X$ se le llama congruencia generada por X.

Sea A una $S-$acción y ρ una $S-$congruencia en A. Se define la siguiente operación entre elementos de S y elementos del conjunto cociente $\dfrac{A}{\rho}$:

$$s[a] := [sa]$$

Tal operación está bien definida, pues si $[x] = [y]$, entonces $(x, y) \in \rho$ y al ser ρ una $S-$congruencia se tiene que $(sx, sy) \in \rho$, i,e, $s[x] = s[y]$. Ahora bien, con esto, es claro que $\dfrac{A}{\rho}$ es una $S-$acción a la que se le llamará $S-$acción cociente. Más aún, la función $\pi_\rho : A \longrightarrow \frac{A}{\rho}$ dada por $\pi_\rho(a) := [a]$ es un $S-$morfismo sobreyectivo al que se le denomina $S-$morfismo canónico.

Con respecto a las congruencias definidas en el primero de los Ejemplos 2.4.2 se tiene el siguiente par de resultados:

Proposición 2.4.6. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces f es inyectiva si y solo si $Ker(f) = \Delta_A$.*

Demostración. Suponga que f es inyectiva. Como $Ker(f)$ es una equivalencia, entonces $\Delta_A \subseteq Ker(f)$. Sea $(a, b) \in Ker(f)$, luego $f(a) = f(b)$, así que de la inyectividad de f se sigue que $a = b$ y por consiguiente $(a, b) \in \Delta_A$. De ahí que $Ker(f) \subseteq \Delta_A$ y por lo tanto $Ker(f) = \Delta_A$. Suponga ahora que $Ker(f) = \Delta_A$ y sean $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b)$. Entonces $(a, b) \in Ker(f) = \Delta_A$, de donde $a = b$ y por consiguiente f es inyectiva. □

Proposición 2.4.7. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces f es sobreyectiva si y solo si $\mathcal{K}_{im(f)} = B \times B$.*

Demostración. Si f es sobreyectiva, entonces $im(f) = B$ y por lo tanto $\mathcal{K}_{im(f)} = (B \times B) \cup \Delta_B = B \times B$. Ahora, suponga que $\mathcal{K}_{im(f)} = B \times B$ y sea $b \in B$ arbitrario. Tome $a \in A$ y observe que $(b, f(a)) \in B \times B = \mathcal{K}_{im(f)}$. Luego $(b, f(a)) \in im(f) \times im(f)$ ó $b = f(a)$. Note que en ambos casos se desprende que b pertenece a la imagen de f. Por consiguiente f es sobreyectiva. □

2.5. Acciones con cero

Definición 2.5.1. *Se dice que $\theta \in A$ es un elemento cero de la $S-$acción A si para cada $s \in S$ ocurre que $s\theta = \theta$.*

Observación 2.5.2. *Si A es una $S-$acción, $\theta \in A$ es un elemento cero si y solo si $\{\theta\}$ es subacción de A.*

Una $S-$acción puede tener más de un elemento cero. En efecto, sea X una $S-$acción construida como en el cuarto de los Ejemplos 2.1.1. Entonces cualquier elemento de X es un elemento cero.

Lema 2.5.3. *Si $0 \in S$ es un cero derecho del monoide S, entonces toda $S-$acción tiene al menos un elemento cero.*

Demostración. Sea A una $S-$acción y $a \in A$ arbitrario. Entonces $\Theta_a := 0a$ es elemento cero de A. En efecto, para cada $s \in S$, $s\theta_a = s(0a) = (s0)a = 0a = \theta_a$. □

Corolario 2.5.4. *Sea $0 \in S$ un cero derecho del monoide S. Si A es una $S-$acción con un único elemento cero digamos θ, entonces para cada $a \in A$, $0a = \theta$ i,e, $0A = \{\theta\}$. En particular, si $B \leq A$, entonces $\theta \in B$.*

Demostración. De acuerdo a la demostración del Lema anterior, para cada $a \in A$, $0a$ es elemento cero de A. Así, de la unicidad de θ debe ser entonces que $0a = \theta$. Ahora bien, si $B \leq A$ y $b \in B$, entonces $\theta = 0b \in B$. □

Ejemplo 2.5.5. *Sea A una $S-$acción y $X \leq A$. Considere a la congruencia ρ_X del segundo de los Ejemplos 2.4.2. Entonces X es elemento cero de la $S-$acción $\frac{A}{\rho_X}$. En efecto, para cada $x \in X$ se tiene que*

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in A \,|\, y \in X \text{ ó } y = x\} \\ &= X\end{aligned}$$

Luego para $x \in X$ y $s \in S$ ocurre que $sX = s[x] = [sx] = X$. Por lo tanto X es elemento cero de $\frac{A}{\rho_X}$.

Definición 2.5.6. *Se define a la clase $(S - Act)_0$ como aquella cuyos elementos son todas las $S-$acciones que tienen un único elemento cero.*

Definición 2.5.7. *Se define a la clase $S - Act_0$ como aquella cuyos elementos son todas las $S-$acciones A que satisfacen lo siguiente:*

1. *A tiene un único elemento cero, digamos θ.*
2. *Existe $s \in S$ tal que para cada $a \in A$, $sa = \theta$.*

Proposición 2.5.8. *Para un monoide S con al menos un cero derecho se tiene que $S - Act_0 = (S - Act)_0$. Más aún, si S es un monoide con cero i,e, que tenga un elemento que sea tanto cero izquierdo como cero derecho, entonces ${}_SS \in S - Act_0$.*

Demostración. Es claro que $S - Act_0$ es subclase de la clase de todas las $S-$acciones con un único elemento cero. Ahora, si A es una $S-$acción con un único elemento cero, el Corolario 2.5.4 implica que si θ es el elemento cero de A, entonces $0 \in S$ (con 0 un cero derecho de S) es tal que para cada $a \in A$, $0a = \theta$. Por consiguiente $A \in S - Act_0$. Ahora bien, suponga que $0 \in S$ es cero del monoide S i,e, suponga que 0 es tanto cero izquierdo como cero derecho de S. No es difícil ver que entonces 0 es elemento cero de la $S-$acción regular ${}_SS$. Si es $0'$ otro elemento cero de la $S-$acción ${}_SS$, entonces para cada $s \in S$, $s0' = 0'$, de donde se sigue que $0'$ es cero derecho del monoide S. Así que por un lado, como 0 es cero izquierdo de S, entonces $00' = 0$, y por otro, como $0'$ es cero derecho, $00' = 0'$. Por consiguiente $0 = 0'$ i,e, la $S-$acción ${}_SS$ tiene un único elemento cero. En consecuencia ${}_SS \in (S - Act)_0 = S - Act_0$. ☐

Lema 2.5.9. *Si A es una $S-$acción con un único elemento cero, entonces para cada $B \leq A$ tal que $\theta_A \in B$, la $S-$acción cociente $\dfrac{A}{\rho_B}$ también tiene un único elemento cero.*

Demostración. Suponga que $B \leq A$ es tal que $\theta_A \in B$. Del Ejemplo 2.5.5 se sigue que B es elemento cero de la acción cociente $\dfrac{A}{\rho_B}$, y más aún, para cada $b \in B$, $[b] = B$. Ahora, si $[a] \in \dfrac{A}{\rho_B}$ es otro elemento cero de $\dfrac{A}{\rho_B}$, entonces para cada $s \in S$ ocurre que $s[a] = [a]$. De esto último se deduce que o bien $a \in B$ o bien $a = \theta_A$. En efecto, suponga, por el contrario, que $a \notin B$ y que $a \neq \theta_A$. Entonces debe existir $t \in S$ para el cuál $ta \neq a$ y por lo tanto $(ta, a) \notin \Delta_A$. Por otro lado, la igualdad $t[a] = [a]$, implica que $(ta, a) \in \rho_B := (B \times B) \cup \Delta_A$, pero que $(ta, a) \notin \Delta_A$ obliga a que $(ta, a) \in B \times B$ y en consecuencia $a \in B$, contradicción. En definitiva $a \in B$ ó $a = \theta_A$. Finalmente, como $\theta_A \in B$, cualquiera de estos casos implica que $a \in B$. Por consiguiente $[a] = B$ i,e, B es el único elemento cero de $\dfrac{A}{\rho_B}$. ☐

Teorema. 2.5.10.

1. *Si $A \in S - Act_0$ y $B \leq A$, entonces $B \in S - Act_0$ i,e, la clase $S - Act_0$ es cerrada bajo subacciones.*
2. *Si $A \in S - Act_0$ y $B \leq A$, entonces $\frac{A}{\rho_B} \in S - Act_0$ i,e, la clase $S - Act_0$ es cerrada bajo cocientes inducidos por subacciones.*
3. *Si $A \in S - Act_0$ y B es una $S-$acción tal que $A \cong B$, entonces $B \in S - Act_0$ i,e, $S - Act_0$ es cerrada bajo isomorfismos.*

Demostración. Sea $A \in S - Act_0$ y $B \leq A$. Como $A \in S - Act_0$, existe $s \in S$ tal que para cada $a \in A$, $sa = \theta_A$ (donde θ_A es el único elemento cero de A). Sea $b \in B$ arbitrario, entonces $sb \in B$, pero $sb = \theta_A$. Por consiguiente $\theta_A \in B$. Además, es claro que θ_A es elemento cero de B. Suponga que $\theta \in B$ es otro elemento cero de B, entonces $t\theta = \theta$ para cada $t \in S$, y en particular para $t = s$ se tiene que $s\theta = \theta$, pero $s\theta = \theta_A$, luego $\theta = \theta_A$. De lo anterior se sigue que θ_A es el único elemento cero de B. Ahora bien, que la igauldad $sa = \theta_A$ se verifique para cualquier elemento de A, implica entonces que para cada $b \in B$, $sb = \theta_A$. Por lo tanto $B \in S - Act_0$. Ahora bien, como $\theta_A \in B$, el Lema 2.5.9 implica que B es el único elemento cero de la acción cociente $\dfrac{A}{\rho_B}$. Por otro lado, observar que para cada $a \in A$, $s[a] = [sa] = [\theta_A] = B$. Por consiguiente $\frac{A}{\rho_B} \in S - Act_0$. Suponga ahora que B es una $S-$acción tal que $A \cong B$ y sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de acciones con inverso $g : B \longrightarrow A$. Observe que para cada $t \in S$ se tiene que $tf(\theta_A) = f(t\theta_A) = f(\theta_A)$. Por consiguiente $f(\theta_A)$ es elemento cero de B. Ahora bien, si $\theta \in B$ es otro elemento cero de B, entonces para cada $t \in S$ se tiene que $tg(\theta) = g(t\theta) = g(\theta)$ i,e, $g(\theta)$ es elemento cero de A, luego de la unicidad de θ_A se sigue que $g(\theta) = \theta_A$ y por lo tanto $\theta = f(g(\theta)) = f(\theta_A)$. De ahí que $f(\theta_A)$ es el único elemento cero de B. Para concluir, recordar que $s \in S$ tiene la propiedad de que para cada $a \in A$, $sa = \theta_A$, así que para cada $b \in B$, $sb = sf(g(b)) = f(sg(b)) = f(\theta_A) = \theta$. Por consiguiente $B \in S - Act_0$. ☐

Teorema. 2.5.11. *Para cada $S-$acción A existe una $S-$acción A^0 con al menos un elemento cero tal que $A \leq A^0$ i,e, toda $S-$acción es subacción de una $S-$acción con cero.*

Demostración. Sea A una $S-$acción y sea θ tal que $\theta \notin A$. Se define $A^0 := A \cup \{\theta\}$ y para cada $s \in S$ hágase

$$s * x := \begin{cases} \theta & si \quad x = \theta. \\ sx & si \quad x \in A. \end{cases}$$

Es claro que con esto A^0 es una $S-$acción para la cuál θ es elemento cero. Más aún, es también claro que $A \leq A^0$. ☐

Proposición 2.5.12. *Si A es una $S-$acción que carece de elementos cero, entonces A^0 tiene un único elemento cero i,e, $A^0 \in (S - Act)_0$.*

Demostración. Siguiendo la línea de la demostración del Teorema 2.5.11, sea 0 otro elemento cero de A^0 y suponga que $0 \neq \theta$. Como $0 \in A^0 := A \cup \{\theta\}$, entonces $0 \in A$, y por lo tanto para cada $s \in S$, $0 = s * 0 = s0$ i,e, 0 es elemento cero de A, contradicción. Por consiguiente $0 = \theta$. ☐

El recíproco de la Proposición 2.5.8 también se verifica:

Proposición 2.5.13. *Si S es un monoide tal que $S - Act_0 = (S - Act)_0$, entonces S tiene al menos un cero derecho.*

Demostración. Se hará una prueba por contraposición i,e, probaremos que si S no tiene elementos cero derechos, entonces ocurre que $S - Act_0 \subsetneq (S - Act)_0$: primero, no es difícil ver que $0 \in S$ es un elemento cero de la $S-$acción regular ${}_SS$ si y solo si 0 es un cero derecho del monoide S. Así, si S no tiene ningún elemento cero derecho, entonces la $S-$acción ${}_SS$ no tiene elementos cero y por lo tanto la Proposición 2.5.12 garantiza que la $S-$acción S^0 construida en la demostración del Teorema 2.5.11 tiene un único elemento cero. Recordar que $S^0 := S \cup \{\theta\}$ donde $\theta \notin S$ y para cada $s \in S$:

$$s * x := \begin{cases} \theta & si \quad x = \theta. \\ sx & si \quad x \in S. \end{cases}$$

Es claro que el único elemento cero de S^0 es θ. Veamos que $S^0 \notin S - Act_0$: en efecto, si $S^0 \in S - Act_0$, entonces S^0 satisface la propiedad 2 de la Definición 2.5.7. Luego, existe $0 \in S$ tal que para cada $x \in S^0$, $0 * x = \theta$. En particular, para $x = e$ (el neutro del monoide) ocurre que $\theta = 0*e = 0e = 0 \in S$ i,e, $\theta \in S$, contradicción. Por consiguiente $S^0 \notin S - Act_0$. Lo anterior exhibe que $S - Act_0 \subsetneq (S - Act)_0$. ☐

Corolario 2.5.14. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S :*

1. *S tiene al menos un cero derecho.*
2. *$S - Act_0 = (S - Act)_0$.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 2.5.8 y 2.5.13. ☐

CAPÍTULO 3

MÁS SOBRE S-MORFISMOS

En este capítulo se desarrollan resultados adicionales sobre $S-$morfismos. En particular, se definirá aquí lo que se entiende por sucesión exacta y sucesión exacta corta de Rees. Cabe mencionar que la definición de sucesión exacta para morfismos de acciones fue tomada de la referencia [13].

3.1. Teorema de isomorfismo para acciones

Teorema. 3.1.1. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un $S-$morfismo y ρ una $S-$congruencia en A tal que $\rho \subseteq Ker(f)$ (véanse Ejemplos 2.4.2). Entonces existe un único $S-$morfismo $\overline{f}$ que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & B \\
& \frac{A}{\rho} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Más aún si $\rho = Ker(f)$, entonces $\bar{f}$ es inyectiva, y si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ es sobreyectiva.

Demostración. Por el Teorema 1.4.35. de [8], para la función $f : A \longrightarrow B$ existe una única función $\overline{f}$ que hace conmutivo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & B \\
& \frac{A}{\rho} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Tal función viene dada por $\overline{f}([a]) := f(a)$. Además, si $\rho = Ker(f)$, entonces $\overline{f}$ es inyectiva, y si f es sobreyectiva, entonces $\overline{f}$ es sobreyectiva, por lo que solo resta exhibir que $\overline{f}$ es un $S-$morfismo:

$$\begin{aligned}\overline{f}(s[a]) &= \overline{f}([sa])\\ &= f(sa)\\ &= sf(a)\\ &= s\overline{f}([a])\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.1.2. *Para cada $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ se tiene que* $\dfrac{A}{Ker(f)} \cong f(A)$.

Demostración. La función $F : A \longrightarrow f(A)$ dada por $F(a) := f(a)$ es un $S-$morfismo sobreyectivo con

$$\begin{aligned}Ker(F) &:= \{(x,y) \in A \times A \,|\, F(x) = F(y)\}\\ &= \{(x,y) \in A \times A \,|\, f(x) = f(y)\}\\ &= Ker(f)\end{aligned}$$

Así, el Teorema 3.1.1 asegura la existencia de un $S-$morfismo biyectivo $\overline{F} : \frac{A}{Ker(f)} \longrightarrow f(A)$ y por consiguiente $\dfrac{A}{Ker(f)} \cong f(A)$. $\square$

Corolario 3.1.3. *Para cada $S-$acción A se tiene que* $\dfrac{A}{\Delta_A} \cong A$.

Demostración. Para el $S-$morfismo id_A se tiene que $Ker(id_A) = \Delta_A$ y $id_A(A) = A$. Por consiguiente $\dfrac{A}{\Delta_A} = \dfrac{A}{Ker(id_A)} \cong A$. $\square$

Un resultado más general que el Teorema 3.1.1 es el siguiente:

Teorema. 3.1.4. *Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} C$ un par de $S-$morfismos. Si g es sobreyectivo y si $Ker(g) \subseteq Ker(f)$, entonces existe un único $S-$morfismo $C \xrightarrow{h} B$ que hace conmutativo al siguiente triángulo:*

$$\begin{tikzcd}A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B\\ & C \arrow[ur, dashed, "h"'] &\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\rho := Ker(g)$ y considérese al $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$. Puesto que $\rho \subseteq Ker(f)$, del Teorema 3.1.1 se sigue que existe un $S-$morfismo $\overline{f} : \frac{A}{\rho} \longrightarrow B$ que hace conmutativo al triángulo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & B \\
& \frac{A}{\rho} \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando ahora el Teorema 3.1.1 al $S-$morfismo $g : A \longrightarrow C$ se tiene que existe un $S-$morfismo $\overline{g} : \frac{A}{\rho} \longrightarrow C$ que hace conmutar al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & C \\
& \frac{A}{\rho} \arrow[ur, "\overline{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

En este caso, como g es sobreyectiva entonces $\overline{g}$ también lo es, y como se tomó $\rho = Ker(g)$, entonces $\overline{g}$ debe ser inyectiva y en consecuencia un $S-$morfismo biyectivo. Así, la función inversa de $\overline{g}$, que se denotará por e, es un $S-$morfismo.
Veamos que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\
C \arrow[r, "e"'] & \frac{A}{\rho} \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

De la conmutatividad del segundo triángulo se tiene que $g = \overline{g}\pi_\rho$, y por lo tanto $eg = e(\overline{g}\pi_\rho) = (e\overline{g})\pi_\rho = id_{\frac{S}{\rho}}\pi_\rho = \pi_\rho$. Así que $(\overline{f}e)g = \overline{f}(eg) = \overline{f}\pi_\rho$, pero de que el primer triángulo conmute se obtiene que $f = \overline{f}\pi_\rho$ y por consiguiente $f = (\overline{f}e)g$ como se requería.
Defínase $h := \overline{f}e$. De lo anterior se sigue que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\
& C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Finalmente, observe que debido a que las funciones sobreyectivas son cancelables por la derecha, cualquier otro morfismo que haga conmutativo al triángulo anterior debe ser el $S-$morfismo h. $\square$

3.2. Sucesiones exactas

Definición 3.2.1. *Una sucesión de $S-$morfismos*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

se dice que es Rees-exacta en B si $\mathcal{K}_{im(f)} = Ker(g)$ (véase el primero de los Ejemplos 2.4.2). Más generalmente, una sucesión de $S-$morfismos

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

se dice que es Rees-exacta si lo es en cada A_n.

Proposición 3.2.2. *Si la sucesión de $S-$morfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es Rees-exacta en B, entonces para cada $x, y \in A$ ocurre que $g(f(x)) = g(f(y))$ i,e, gf debe ser una función constante.*

Demostración. Para cada $x, y \in A$ se tiene que $(f(x), f(y)) \in \mathcal{K}_{im(f)} = Ker(g)$ y en consecuencia $g(f(x)) = g(f(y))$. ☐

Un recíproco parcial de esta Proposición es el siguiente.

Proposición 3.2.3. *Sea $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ una sucesión de $S-$morfismos. Si gf es una función constante, entonces $\mathcal{K}_{im(f)} \subseteq Ker(g)$.*

Demostración. Si gf es una función constante, entonces para cada $x, y \in A$ ocurre que $g(f(x)) = g(f(y))$. De ahí que $im(f) \times im(f) \subseteq Ker(g)$. Además, es claro que $\Delta_B \subseteq Ker(g)$, luego $\mathcal{K}_{im(f)} := im(f) \times im(f) \cup \Delta_B \subseteq Ker(g)$. ☐

A continuación se enuncia una serie de resultados sobre sucesiones Rees-exactas y diagramas de $S-$morfismos. Cabe mencionar que las demostraciones de estos resultados emplean todos una misma técnica común denominada *cacería de elementos.*

Teorema. 3.2.4. *(Lema 4) Suponga que el siguiente es un diagrama conmutativo de $S-$morfismos con filas Rees-exactas:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\
A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r, "g_3"'] & D'
\end{tikzcd}$$

1. *Si α es sobreyectivo y β, δ son inyectivos, entonces γ es inyectivo.*

2. *Si α, γ son sobreyectivos y δ es inyectivo, entonces β es sobreyectivo.*

Demostración. Para el primer inciso, sean $x, y \in C$ tales que $\gamma(x) = \gamma(y)$. Es necesario exhibir que $x = y$. Para ello, la última igualdad implica que $g_3(\gamma(x)) = g_3(\gamma(y))$. De esto y de la igualdad $\delta f_3 = g_3\gamma$, se obtiene que $\delta(f_3(x)) = g_3(\gamma(x)) = g_3(\gamma(y)) = \delta(f_3(y))$ i,e, $\delta(f_3(x)) = \delta(f_3(y))$. Así, la inyectividad de δ implica que $f_3(x) = f_3(y)$ o lo que es lo mismo $(x, y) \in Ker(f_3)$. Ahora, puesto que las filas del diagrama son Rees-exactas, entonces $\mathcal{K}_{im(f_2)} = Ker(f_3)$ y por consiguiente $(x, y) \in \mathcal{K}_{im(f_2)}$. En consecuencia $(x, y) \in$

$im(f_2) \times im(f_2)$ ó $x = y$. Si $x = y$ habremos terminado. Si $(x, y) \in im(f_2) \times im(f_2)$, entonces existen $u, v \in B$ para los cuales $x = f_2(u)$ y $y = f_2(v)$. Ahora, la igualdad $\gamma f_2 = g_2\beta$ implica que $g_2(\beta(u)) = \gamma(f_2(u)) = \gamma(x) = \gamma(y) = \gamma(f_2(v)) = g_2(\beta(v))$ i,e, $g_2(\beta(u)) = g_2(\beta(v))$. Así $(\beta(u), \beta(v)) \in Ker(g_2) = \mathcal{K}_{im(g_1)}$ y por lo tanto $\beta(u) = \beta(v)$ o bien $(\beta(u), \beta(v)) \in im(g_1) \times im(g_1)$. En el primer caso, la inyectividad de β implica que $u = v$, luego $x = f_2(u) = f_2(v) = y$ y habremos concluido. En el segundo caso, existen $p, q \in A'$ tales que $\beta(u) = g_1(p)$ y $\beta(v) = g_1(q)$. Ahora bien, puesto que α es sobreyectiva puede escribirse $p = \alpha(m)$ y $q = \alpha(n)$ para algunos $m, n \in A$. La igualdad $\beta f_1 = g_1\alpha$ implica entonces que $\beta(f_1(m)) = g_1(\alpha(m)) = g_1(p) = \beta(u)$ y $\beta(f_1(n)) = g_1(\alpha(n)) = g_1(q) = \beta(v)$. Por consiguiente $\beta(f_1(m)) = \beta(u)$ y $\beta(f_1(n)) = \beta(v)$, de manera que al ser β inyectiva se deduce que $u = f_1(m)$ y $v = f_1(n)$ y por lo tanto $(u, v) = (f_1(m), f_1(n)) \in \mathcal{K}_{im(f_1)} = Ker(f_2)$. De ahí que $x = f_2(u) = f_2(v) = y$, concluyéndose así que γ debe ser inyectiva. Para el inciso 2 se razona de manera similar. ☐

Teorema. 3.2.5. *(Lema 5) Suponga que el siguiente es un diagrama conmutativo de $S-$morfismos con filas Rees-exactas:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r, "g_3"'] & D' \arrow[r, "g_4"'] & E'
\end{tikzcd}$$

Si β, δ son isomorfismos, α es sobreyectivo y ε es inyectivo, entonces γ es isomorfismo.

Demostración. Considerar a los diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\
A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r, "g_3"'] & D'
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r, "g_3"'] & D' \arrow[r, "g_4"'] & E'
\end{tikzcd}$$

El primero de ellos satisface el primer inciso del Lema 4 (3.2.4) y el restante el segundo. Por lo tanto γ debe ser tanto inyectivo como sobreyectivo y en consecuencia γ debe ser un isomorfismo. ☐

3.3. Sucesiones exactas sobre acciones con cero

Supondremos que todas las $S-$acciones que aparecen a lo largo de esta sección tienen un único elemento cero. Si A es una de tales $S-$acciones, denotaremos por θ_A a su elemento cero.

Lema 3.3.1. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo, entonces $f(\theta_A) = \theta_B$.*

Demostración. Para cada $s \in S$ se tiene que $sf(\theta_A) = f(s\theta_A) = f(\theta_A)$ i,e, $f(\theta_A)$ es elemento cero de B. Por consiguiente $f(\theta_A) = \theta_B$. ☐

Sea $\Theta = \{\theta\}$ un conjunto con un solo elemento y para cada $s \in S$ hágase $s\theta := \theta$. Con esto Θ es una $S-$acción llamada $S-$acción cero. No es difícil ver que $\Theta \in S - Act_0$ y que cualquier otra $S-$acción con un único elemento debe ser isomorfa a Θ.

Proposición 3.3.2. *Para cada $S-$acción A existe un único $S-$morfismo de Θ en A y un único $S-$morfismo de A en Θ.*

Demostración. Debido a que Θ solo tiene un elemento, la única función de A en Θ es la que asocia a cada elemento de A con el único elemento de Θ. Tal función es claramente un $S-$morfismo. Ahora bien, puesto que Θ solo tiene un elemento, cualquier función de Θ en A queda completamente determinada por su valor en el único elemento de Θ. Así, el Lema 3.3.1 implica que el único $S-$morfismo de Θ en A es el que manda al único elemento de Θ en el elemento cero de A. ☐

Definición 3.3.3. *Sea A una $S-$acción. Llamamos $S-$morfismo cero al único $S-$morfismo de Θ en A y también al único $S-$morfismo de A en Θ. Se usa la notación 0, $\Theta \longrightarrow A$ y $A \longrightarrow \Theta$ para denotar a estos morfismos. Además, para cualquier otra $S-$acción B también llamamos morfismo cero al morfismo $A \longrightarrow \Theta \longrightarrow B$.*

Observación 3.3.4. *Para cada $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ se tiene que $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \Theta$ son el $S-$mofismo cero.*

Proposición 3.3.5. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$:*

1. *La sucesión $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es Rees-exacta.*
2. *f es inyectiva.*

Demostración. Debido a que el $S-$morfismo $\Theta \longrightarrow A$ solo toma el valor θ_A, se tiene que $im(0) = \{\theta_A\}$ y por lo tanto $\mathcal{K}_{im(0)} = \{(\theta_A, \theta_A)\} \cup \Delta_A = \Delta_A$. Así, suponga que la sucesión $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es Rees-exacta. Entonces $Ker(f) = \mathcal{K}_{im(0)} = \Delta_A$ y en consecuencia f es inyectiva (ver Proposición 2.4.6). Y viceversa, si f es inyectiva, entonces $Ker(f) = \Delta_A = \mathcal{K}_{im(0)}$ y por consiguiente la sucesión $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es Rees-exacta. ☐

Proposición 3.3.6. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$:*

1. *La sucesión $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta.*
2. *f es sobreyectiva.*

Demostración. Como el $S-$morfismo $B \longrightarrow \Theta$ toma siempre el mismo valor θ para cada elemento de B se sigue que $Ker(0) = B \times B$. Así, suponga que la sucesión $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta. Entonces $\mathcal{K}_{im(f)} = Ker(0) = B \times B$ y en consecuencia f es sobreyectiva (ver Proposición 2.4.7). Y viceversa, si f es sobreyectiva, entonces $\mathcal{K}_{im(f)} = B \times B = Ker(0)$ y en consecuencia la sucesión $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta. ☐

Proposición 3.3.7. *Si la sucesión* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *es Rees-exacta, entonces* $gf = 0$.

Demostración. De la Proposición 3.2.2 se sigue que gf debe ser una función constante. Así, para exhibir que $gf = 0$ solo es necesario hallar un $x \in A$ tal que $g(f(x)) = \theta_C$. Tomando $x = \theta_A$ se tiene que $g(f(\theta_A)) = g(\theta_B) = \theta_C$. ☐

Corolario 3.3.8. *Si* $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ *es una sucesión Rees-exacta, entonces* $gf = 0$, f *es inyectivo y* g *es sobreyectivo.*

Demostración. Se sigue de las tres proposiciones anteriores. ☐

Definición 3.3.9. *Una sucesión exacta corta de Rees es una sucesión Rees-exacta de la forma*

$$\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$$

Ejemplo 3.3.10. *Si* A *es una* $S-$*acción y* $B \leq A$, *entonces la sucesión*

$$\Theta \longrightarrow B \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{\rho_B} \longrightarrow \Theta$$

es una sucesión Rees-exacta corta. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} Ker(\pi) :&= \{(a,b) \in A \times A \,|\, \pi(a) = \pi(b)\} \\ &= \{(a,b) \in A \times A \,|\, [a] = [b]\} \\ &= \{(a,b) \in A \times A \,|\, (a,b) \in \rho_B\} \\ &= \rho_B \end{aligned}$$

mientras que $\mathcal{K}_{im(\iota)} := (im(\iota) \times im(\iota)) \cup \Delta_A = (B \times B) \cup \Delta_A = \rho_B$. *Por consiguiente* $\mathcal{K}_{im(\iota)} = Ker(\pi)$. *Finalmente, de que la inclusión sea inyectiva y* π *sobreyectiva se concluye lo deseado.*

Teorema. 3.3.11. *(Lema 5 corto) Suponga que el siguiente es un diagrama conmutativo de $S-$morfismos con filas Rees-exactas:*

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \Theta \\
\Theta \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

1. *Si α y γ son inyectivos, entonces β es inyectivo.*
2. *Si α y γ son sobreyectivos, entonces β es sobreyectivo.*

Demostración. 1) Es claro que el morfismo $\Theta \longrightarrow \Theta$ es sobreyectivo, de hecho debe ser la identidad. Considerar ahora al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\
\Theta \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C'
\end{tikzcd}$$

Este es un diagrama conmutativo que satisface el primer inciso del Lema 4 (3.2.4). Por consiguiente β es inyectivo.
2) El morfismo $\Theta \longrightarrow \Theta$ es inyectivo y además

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \Theta \arrow[d] \\
A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo que satisface el segundo inciso del Lema 4 (3.2.4). Por consiguiente β es sobreyectivo.

□

Observación 3.3.12. *Si A es una $S-$acción y $X \leq A$, se escribirá $\dfrac{A}{X}$ para denotar a la $S-$acción cociente $\dfrac{A}{\rho_X}$ (véase el segundo de los Ejemplos 2.4.2).*

Definición 3.3.13. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo se define*

$$Nu(f) := \{a \in A \,|\, f(a) = \theta_B\}$$

No es difícil ver que $Nu(f) \leq A$ y que la inclusión $Nu(f) \hookrightarrow A$ es un $S-$morfismo al que se le llama núcleo de f. Por otro lado, al $S-$morfismo canónico $\pi : B \longrightarrow \dfrac{B}{f(A)}$ se le llama conúcleo de f. Denotamos al núcleo de f por K_f y al conúcleo de f por C_f.

Teorema. 3.3.14. *(Propiedad universal del núcleo) Si* $f : A \longrightarrow B$ *es un* $S-$*morfismo, entonces la inclusión* $\iota : Nu(f) \longrightarrow A$ *satisface lo siguiente:*

- $f\iota = 0$
- *Para cada* $S-$*morfismo* $k : E \longrightarrow A$ *tal que* $fk = 0$ *existe un único* $S-$*morfismo* $h : E \longrightarrow Nu(f)$ *que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & A \\
& Nu(f) \arrow[ur, hook, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. De la definición de $Nu(f)$ es claro que $f\iota = 0$. Ahora, sea $k : E \longrightarrow A$ un $S-$morfismo tal que $fk = 0$. Entonces para cada $x \in E$ se tiene que $f(k(x)) = \theta_B$ i,e, $k(x) \in Nu(f)$. A partir de esto se define $h : E \longrightarrow Nu(f)$ por $h(x) := k(x)$. Es claro que h es un $S-$morfismo, además para cada $x \in E$ ocurre que $\iota(h(x)) = h(x) = k(x)$, de donde $k = \iota h$. Finalmente, suponga que $h' : E \longrightarrow Nu(f)$ es un $S-$morfismo tal que $k = \iota h'$. Entonces para cada $x \in E$, $h'(x) = \iota(h'(x)) = k(x) = h(x)$ y por consiguiente $h' = h$. □

Teorema. 3.3.15. *(Propiedad universal del conúcleo) Si* $f : A \longrightarrow B$ *es un* $S-$*morfismo, entonces el* $S-$*morfismo canónico* $\pi : B \longrightarrow \frac{B}{f(A)}$ *satisface lo siguiente:*

- $\pi f = 0$
- *Para cada* $S-$*morfismo* $c : B \longrightarrow C$ *tal que* $cf = 0$ *existe un único* $S-$*morfismo* $h : \frac{B}{f(A)} \longrightarrow C$ *que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "\pi"'] & & C \\
& \frac{B}{f(A)} \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada $a \in A$ se tiene que $\pi(f(a)) := [f(a)] = f(A)$, que es el elemento cero de $\dfrac{B}{f(A)}$ (ver Ejemplo 2.5.5). Por lo tanto $\pi f = 0$. Ahora, sea $c : B \longrightarrow C$ un $S-$morfismo tal que $cf = 0$. Si $(x, y) \in \rho_{f(A)}$, entonces $x, y \in f(A)$ ó $x = y$. Si $x = y$ es claro que $c(x) = c(y)$ y así $(x, y) \in Ker(c)$. Si $x, y \in f(A)$ puede escribirse $x = f(u)$ y $y = f(v)$ para algunos $u, v \in A$, de manera que $c(x) = c(f(u)) = \theta_C = c(f(v)) = c(y)$ y en consecuencia $(x, y) \in Ker(c)$. Por consiguiente $\rho_{f(A)} \subseteq Ker(c)$. Así, del Teorema 3.1.1 se sigue que existe un único $S-$morfismo $h : \frac{B}{f(A)} \longrightarrow C$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "\pi"'] & & C \\
& \frac{B}{f(A)} \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 3.3.16. *Para cada $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ la sucesión*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] & \dfrac{B}{f(A)} \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

es Rees-exacta.

Demostración. Como π es sobreyectivo, solo hace falta verificar que la sucesión es Rees-exacta en B : se tiene que

$$\begin{aligned}
Ker(\pi) :&= \{(a,b) \in B \times B \,|\, \pi(a) = \pi(b)\} \\
&= \{(a,b) \in B \times B \,|\, [a] = [b]\} \\
&= \{(a,b) \in B \times B \,|\, (a,b) \in \rho_{f(A)}\} \\
&= \rho_{f(A)} \\
&= (im(f) \times im(f)) \cup \Delta_B \\
&= \mathcal{K}_{im(f)}
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.3.17. *Para cada $S-$morfismo inyectivo f existe un $S-$morfismo sobreyectivo g tal que la sucesión* $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ *es Rees-exacta.*

Demostración. De que f es inyectivo y de la Proposición anterior se tiene que la sucesión

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] & \dfrac{B}{f(A)} \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

es Rees-exacta. Así haciendo $g = \pi$ se obtiene lo buscado. $\square$

Así, todo $S-$morfismo inyectivo es parte de una suceción exacta corta de Rees.

Observación 3.3.18. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo, entonces en general la sucesión*

$$\begin{tikzcd}
Nu(f) \arrow[r, hook] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

no es Rees-exacta. En efecto, sean $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $S := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$. *Con la multiplicación usual de enteros* S *es un monoide con neutro* 1 *y con elemento cero* 0. *Sea* p *un número primo con* $p > 2$ *y considerar al conjunto* $\mathbb{Z}_p$ *de enteros módulo* p. *Para cada* $s \in S$ *y* $[a] \in \mathbb{Z}_p$ *se define* $s[a] := [sa]$. *Esta operación está bien definida, pues si* $[a] = [b]$, *entonces* $p \mid a - b$ *y en consecuencia* $p \mid s(a-b) = sa - sb$, *de donde* $s[a] = s[b]$. *Con esto es claro que* $\mathbb{Z}_p$ *es una* $S-$*acción finita con exactamente* p *elementos. Ahora bien, es claro que* $[0]$ *es elemento cero de* $\mathbb{Z}_p$, *más aún si* $[a]$ *es elemento cero de* $\mathbb{Z}_p$, *entonces para cada* $s \in S$ *debe ser que* $s[a] = [a]$ *y por lo tanto para cada* $s \in S, p \mid sa - a = (s-1)a$. *En particular, para* $s = 2$ *se tiene que* $p \mid a$ *y por consiguiente* $[a] = [0]$, *concluyendo así que* $[0]$ *es el único elemento cero de* $\mathbb{Z}_p$. *Por otra parte, debido a que* p *es un número primo mayor que* 2 *y a que los elementos de* S *son o el cero o potencias de* 2 *se deduce que el único elemento de* S *que es divisible por* p *es* $s = 0$. *Esto último junto al hecho de que* $p \nmid p - 1$ *permite concluir lo siguiente para* $s \in S$:

$$\begin{aligned} s[p-1] = [0] &\Longleftrightarrow p \mid s(p-1) \\ &\Longleftrightarrow p \mid s \\ &\Longleftrightarrow s = 0 \end{aligned}$$

Considerar a la $S-$*acción regular* ${}_SS$ *y sea* $f : S \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ *el* $S-$*morfismo dado por* $f(s) := s[p-1]$ *(véase el tercero de los Ejemplos 2.4.2). De que* S *sea un conjunto infinito y* $\mathbb{Z}_p$ *uno finito se sigue que* f *no puede ser una función inyectiva, así existen* $s, t \in S$ *con* $s \neq t$ *tales que* $f(s) = f(t)$ *i,e,* $s[p-1] = t[p-1]$. *Como* $s \neq t$, *entonces* $s[p-1] = t[p-1] \neq [0]$ *(pues de lo contrario se implicaría que* $s = 0 = t$*), de donde se sigue que* $s, t \notin Nu(f)$. *Ahora, para el* $S-$*morfismo inclusión* $\iota : Nu(f) \longrightarrow A$ *se tiene que* $\mathcal{K}_{im(\iota)} := (im(\iota) \times im(\iota)) \cup \Delta_A = (Nu(f) \times Nu(f)) \cup \Delta_A$ *y por lo tanto* $(s,t) \notin \mathcal{K}_{im(\iota)}$. *Finalmente, como* $f(s) = f(t)$, *entonces* $(s,t) \in Ker(f)$ *y así* $\mathcal{K}_{im(\iota)} \neq Ker(f)$. *Por consiguiente la sucesión* $Nu(f) \hookrightarrow S \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_p$ *no es Rees-exacta.*

Proposición 3.3.19. *Si la sucesión de* $S-$*morfismos* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *es Rees-exacta, entonces* $im(f) = Nu(g)$.

Demostración. Como la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es Rees-exacta, entonces $gf = 0$, así para cada $x \in A$ debe ser que $g(f(x)) = 0$ y por lo tanto $f(x) \in Nu(g)$. De ahí que $im(f) \subseteq Nu(g)$. Ahora, si $z \in Nu(g)$, entonces $g(z) = \theta_C = g(\theta_B)$ y por consiguiente $(z, \theta_B) \in Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$. De esto se sigue que $(z, \theta_B) \in im(f) \times im(f)$ ó $z = \theta_B$. Como $\theta_B = f(\theta_A) \in im(f)$, en cualquiera de los casos anteriores se sigue que $z \in im(f)$. Por lo tanto $Nu(g) \subseteq im(f)$ y en definitiva $im(f) = Nu(g)$. $\square$

Observación 3.3.20. *El recíproco no se verifica. En efecto, para la sucesión de la Observación 3.3.18 se tiene que* $im(\iota) = Nu(f)$ *pero la sucesión* $Nu(f) \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B$ *no es Rees-exacta.*

Observación 3.3.21. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo tal que $Nu(f) = \{\theta_A\}$, entonces f no necesariamente es inyectivo. En efecto, para el $S-$morfismo f de la Observación 3.3.18 se tiene que $Nu(f) = \{0\}$ pero f no es inyectivo.*

Observación 3.3.22. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo, entonces no necesariamente $\dfrac{A}{Nu(f)} \cong f(A)$. En efecto, considerar al $S-$morfismo de la Observación 3.3.18. En este caso $\rho_{Nu(f)} := (Nu(f) \times Nu(f)) \cup \Delta_S = (\{0\} \times \{0\}) \cup \Delta_S = \Delta_S$ y por consiguiente $\dfrac{S}{Nu(f)} := \dfrac{S}{\Delta_S} \cong S$. Por otra parte, $f(S)$ es una subacción de $\mathbb{Z}_p$ y por lo tanto $f(S)$ tiene que ser un conjunto finito. Debido a esto último y a que S es un conjunto infinito se tiene que $\dfrac{S}{Nu(f)} \ncong f(S)$. Finalmente, es importante notar que lo anterior no contradice al Corolario 3.1.2, pues este considera a la congruencia $Ker(f)$ y no a $\rho_{Nu(f)}$.*

Proposición 3.3.23. *Sea $g : B \longrightarrow C$ un $S-$morfismo sobreyectivo. Entonces existe un $S-$morfismo f tal que la sucesión $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta si y solo si $\rho_{Nu(g)} = Ker(g)$.*

Demostración. Suponga que f es un $S-$morfismo tal que la sucesión

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

es Rees-exacta. Entonces $Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$, y además, la Proposición 3.3.19 implica que $im(f) = Nu(g)$. Por consiguiente $\rho_{Nu(g)} = \rho_{im(f)} = \mathcal{K}_{im(f)} = Ker(g)$. Y viceversa, observar que para el $S-$morfismo inclusión $\iota : Nu(g) \longrightarrow B$ siempre se tiene que $\mathcal{K}_{im(\iota)} := (im(\iota) \times im(\iota)) \cup \Delta_B = (Nu(g) \times Nu(g)) \cup \Delta_B = \rho_{Nu(g)}$. Así, si $\rho_{Nu(g)} = Ker(g)$, entonces $\mathcal{K}_{im(\iota)} = Ker(g)$ y en consecuencia la sucesión

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & Nu(g) \arrow[r, hook] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

es Rees-exacta. Luego, haciendo $f = \iota$ se obtiene lo pedido. □

Observación 3.3.24. *A diferencia de los inyectivos, no todo $S-$morfismo sobreyectivo es parte de una sucesión exacta corta de Rees. En efecto, para $p = 3$ sea f el $S-$morfismo de la Observación 3.3.18. En este caso, $f : S \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ está definido por $f(s) := s[2]$. Se tiene que $[0] = f(0)$, $[1] = f(2)$ y $[2] = f(1)$, en consecuencia f es sobreyectivo. Además, de que la sucesión*

$$\begin{tikzcd} Nu(f) \arrow[r, hook] & S \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_3 \end{tikzcd}$$

no es Rees-exacta se tiene que $\mathcal{K}_{im(\iota)} \neq Ker(f)$, pero $\mathcal{K}_{im(\iota)} = \rho_{Nu(f)}$, en consecuencia $\rho_{Nu(f)} \neq Ker(f)$. Por lo tanto de la Proposición 3.3.23 se deduce que no existe un $S-$morfismo α tal que la sucesión

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & S \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_3 \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

es Rees-exacta.

Aquellos $S-$morfismos que cumplen alguna de las condiciones de la Proposición 3.3.23 satisfacen el siguiente Teorema de correspondencia:

Teorema. 3.3.25. *(De correspondencia.) Si $g : B \longrightarrow C$ es un $S-$morfismo sobreyectivo tal que $Ker(g) = \rho_{Nu(g)}$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos*

$$\mathbb{X} := \{U \leq B \,|\, Nu(g) \subseteq U\} \quad \textit{y} \quad \mathbb{Y} := \{V \leq C \,|\, \theta_C \in V\}$$

Demostración. Si $U \in \mathbb{X}$, entonces por definición, $U \leq B$ y $Nu(g) \subseteq U$. Luego, del Lema 2.3.5 se sigue que $g(U) \leq C$, y además, como $\theta_B \in Nu(g)$, entonces $\theta_B \in U$ y en consecuencia $\theta_C = g(\theta_B) \in g(U)$. Por lo tanto $g(U) \in \mathbb{Y}$ y tiene sentido así considerar a la función $\Omega : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ dada por $\Omega(U) := g(U)$. Ahora, sean $U, U' \in \mathbb{X}$ tales que $g(U) = g(U')$. Para $u \in U$ arbitrario, como $g(u) \in g(U) = g(U')$, entonces existe $u' \in U'$ tal que $g(u) = g(u')$ y por lo tanto $(u, u') \in Ker(g) = \rho_{Nu(g)}$. De ahí que $u, u' \in Nu(g)$ ó $u = u'$. Ahora bien, como $Nu(g) \subseteq U'$ y $u' \in U'$, cualquiera de los dos casos anteriores implica que $u \in U'$ y en consecuencia $U \subseteq U'$. De manera análoga se exhibe que $U' \subseteq U$ y por lo tanto $U = U'$. Se deduce de todo esto que Ω es inyectiva. Por otra parte, para $V \in \mathbb{Y}$ se tiene que $g^{-1}(V) \in \mathbb{X}$. En efecto, el Lema 2.3.5 implica que $g^{-1}(V) \leq B$ y además, como $V \in \mathbb{Y}$, entonces $\theta_C \in V$ y así para cada $b \in Nu(g)$, $g(b) = \theta_C \in V$, lo cuál conlleva a que $g(Nu(g)) \subseteq V$ y en consecuencia $Nu(g) \subseteq g^{-1}(V)$. Por consiguiente $g^{-1}(V) \in \mathbb{X}$. Esto último aunado a que g es sobreyectiva permiten concluir que $V = g(g^{-1}(V)) = \Omega(g^{-1}(V))$ i,e, Ω es sobreyectiva. Por consiguiente Ω es una biyección. ☐

Corolario 3.3.26. *Sea A una $S-$acción y B una subacción de A tal que $\theta_A \in B$. Si $Sub(\frac{A}{B}) := \{\hat{V} \leq \frac{A}{B} \,|\, B \in \hat{V}\}$, entonces*

$$Sub(\tfrac{A}{B}) = \{\tfrac{X}{B} \,|\, X \leq A \text{ y } B \subseteq X\}$$

donde $\frac{X}{B} := \{[x] \,|\, x \in X\}$.

Demostración. Considerar al $S-$morfismo canónico $\pi : A \longrightarrow \frac{A}{B}$ dado por $\pi(x) := [x]$. Como $\theta_A \in B$, de acuerdo con la demostración del Lema 2.5.9, B es el único elemento cero de $\frac{A}{B}$ y además para cada $x \in B$, $[x] = B$. Así que

$$\begin{aligned} Nu(\pi) :&= \{x \in A \,|\, \pi(x) = B\} \\ &= \{x \in A \,|\, [x] = B\} \\ &= \{x \in A \,|\, x \in B\} \\ &= B \end{aligned}$$

Ahora, como $Ker(\pi) = \rho_B$ (véase 3.3.10), entonces $Ker(\pi) = \rho_{Nu(\pi)}$, y así como π es sobreyectiva, del Teorema 3.3.25 se deduce que existe una biyección entre los conjuntos

$$\mathbb{X} := \{X \leq A \,|\, B \subseteq X\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Y} := \{\hat{V} \leq \tfrac{A}{B} \,|\, B \in \hat{V}\}$$

Más aún, la función $\Omega : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ dada por $\Omega(X) := \pi(X)$ es una biyección. De esto último se sigue que $\mathbb{Y} = im(\Omega) = \{\pi(X) \,|\, X \in \mathbb{X}\}$. Ahora bien, observar que $\mathbb{Y} = Sub(\frac{A}{B})$ y además $\pi(X) = \{[x] \,|\, x \in X\} = \frac{X}{B}$. Por consiguiente se tiene la igualdad $Sub(\frac{A}{B}) = \{\frac{X}{B} \,|\, X \leq A \text{ y } B \subseteq X\}$. ☐

Teorema. 3.3.27. *Suponga que el siguiente es un diagrama conmutativo de $S-$morfismos con primera fila Rees-exacta y g_1 inyectivo:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & A_3 \arrow[d, "\gamma"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3
\end{tikzcd}$$

Entonces existen $S-$morfismos únicos m_1, m_2, e_1 y e_2 tales que el siguiente diagrama es conmutativo, tiene la primera fila Rees-exacta y $e_2e_1 = 0$. (véase la Definición 3.3.13):

$$\begin{tikzcd}
Nu(\alpha) \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, hook, "K_\alpha"'] & Nu(\beta) \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, hook, "K_\beta"'] & Nu(\gamma) \arrow[d, hook, "K_\gamma"'] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & A_3 \arrow[d, "\gamma"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "C_\alpha"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "C_\beta"'] & B_3 \arrow[d, "C_\gamma"'] \\
\frac{B_1}{im(\alpha)} \arrow[r, "e_1"'] & \frac{B_2}{im(\beta)} \arrow[r, "e_2"'] & \frac{B_3}{im(\gamma)}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Observar que $\beta(f_1K_\alpha) = (\beta f_1)K_\alpha = (g_1\alpha)K_\alpha = g_1(\alpha K_\alpha) = g_10 = 0$ i,e, $\beta(f_1K_\alpha) = 0$, y también $\gamma(f_2K_\beta) = (\gamma f_2)K_\beta = (g_2\beta)K_\beta = g_2(\beta K_\beta) = g_20 = 0$ i,e, $\gamma(f_2K_\beta) = 0$. Por lo tanto del Teorema 3.3.14 (Propiedad universal del núcleo) se sigue que existen únicos $S-$morfismos m_1 y m_2 tales que $f_1K_\alpha = K_\beta m_1$ y $f_2K_\beta = K_\gamma m_2$. Por otra parte se tiene que $(C_\beta g_1)\alpha = C_\beta(g_1\alpha) = C_\beta(\beta f_1) = (C_\beta\beta)f_1 = 0f_1 = 0$ y además $(C_\gamma g_2)\beta = C_\gamma(g_2\beta) = C_\gamma(\gamma f_2) = (C_\gamma\gamma)f_2 = 0f_2 = 0$, luego por el Teorema 3.3.15 (Propiedad universal del conúcleo) existen únicos $S-$morfismos e_1 y e_2 tales que $C_\beta g_1 = e_1C_\alpha$ y $C_\gamma g_2 = e_2C_\beta$. De todo lo anterior se sigue que los $S-$morfismos m_1, m_2, e_1 y e_2 hacen conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
Nu(\alpha) \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, hook, "K_\alpha"'] & Nu(\beta) \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, hook, "K_\beta"'] & Nu(\gamma) \arrow[d, hook, "K_\gamma"'] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & A_3 \arrow[d, "\gamma"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "C_\alpha"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "C_\beta"'] & B_3 \arrow[d, "C_\gamma"'] \\
\frac{B_1}{im(\alpha)} \arrow[r, "e_1"'] & \frac{B_2}{im(\beta)} \arrow[r, "e_2"'] & \frac{B_3}{im(\gamma)}
\end{tikzcd}$$

Veamos que la sucesión $Nu(\alpha) \xrightarrow{m_1} Nu(\beta) \xrightarrow{m_2} Nu(\gamma)$ es Rees-exacta: recordar que si f es un $S-$morfismo, entonces K_f denota a la inclusión de $Nu(f)$ en el dominio de f, de esta manera el par de igualdades $f_1K_\alpha = K_\beta m_1$ y $f_2K_\beta = K_\gamma m_2$ asegura que para cada $u \in Nu(\alpha)$ y cada $v \in Nu(\beta)$

$$f_1(u) = m_1(u) \quad \text{y} \quad f_2(v) = m_2(v) \tag{3.1}$$

Así que para $u \in Nu(\alpha)$ arbitrario la primera de las identidades (3.1) implica que $f_1(u) = m_1(u)$ y por consiguiente $m_2(m_1(u)) = m_2(f_1(u))$. Además observe que $f_1(u) = m_1(u) \in Nu(\beta)$, luego para $v = f_1(u)$ la segunda de las identidades (3.1) así como la Proposición 3.3.7 garantiza que $m_2(f_1(u)) = f_2(f_1(u)) = \theta_{A_3}$ y por lo tanto $m_2(m_1(u)) = \theta_{A_3}$. De ahí que $m_2m_1 = 0$ y en consecuencia $\mathcal{K}_{im(m_1)} \subseteq Ker(m_2)$ (ver Proposición 3.2.3). Tómese $(x, y) \in Ker(m_2) \subseteq Nu(\beta) \times Nu(\beta)$, entonces $x, y \in Nu(\beta)$ y $m_2(x) = m_2(y)$. Luego, la segunda de las igualdades (3.1) implica que $f_2(x) = m_2(x) = m_2(y) = f_2(y)$ i,e, $(x, y) \in Ker(f_2) = \mathcal{K}_{im(f_1)}$, por consiguiente $(x, y) \in im(f_1) \times im(f_1)$ ó $x = y$. Si $x = y$, entonces es claro que $(x, y) \in \mathcal{K}_{im(m_1)}$. Si $(x, y) \in im(f_1) \times im(f_1)$, existen $p, q \in A_1$ tales que $x = f_1(p)$ y $y = f_1(q)$. Ahora, la identidad $\beta f_1 = g_1\alpha$ implica que $\beta(x) = \beta(f_1(p)) = g_1(\alpha(p))$ y $\beta(y) = \beta(f_1(q)) = g_1(\alpha(q))$, pero $x, y \in Nu(\beta)$, luego $g_1(\alpha(p)) = \beta(x) = \theta_{B_2}$ y $g_1(\alpha(q)) = \beta(y) = \theta_{B_2}$, de manera que al ser g_1 inyectiva se sigue que $\alpha(p) = \theta_{B_1} = \alpha(q)$ i,e, $p, q \in Nu(\alpha)$. Así de la primera de las identidades (3.1) se sigue que $x = f_1(p) = m_1(p)$ y $y = f_1(q) = m_1(q)$ y en consecuencia $(x, y) \in \mathcal{K}_{im(m_1)}$. Por lo tanto $Ker(m_2) \subseteq \mathcal{K}_{im(m_1)}$ y en definitiva $\mathcal{K}_{im(m_1)} = Ker(m_2)$ i,e, la sucesión $Nu(\alpha) \xrightarrow{m_1} Nu(\beta) \xrightarrow{m_2} Nu(\gamma)$ es Rees-exacta. De nuevo, recordar que si f es un $S-$morfismo, entonces C_f denota al $S-$morfismo que asocia a cada elemento del codominio de f su clase de equivalencia con respecto de la relación $\rho_{im(f)}$. Así, el par de identidades $C_\beta g_1 = e_1C_\alpha$ y $C_\gamma g_2 = e_2C_\beta$ afirma que para cada $w \in B_1$ y cada $z \in B_2$

$$[g_1(w)] = e_1([w]) \quad \text{y} \quad [g_2(z)] = e_2([z]) \tag{3.2}$$

Si $[w] \in \dfrac{B_1}{im(\alpha)}$ es arbitrario, la primera de las igualdades (3.2) implica que $e_1([w]) = [g_1(w)]$ y en consecuencia $e_2(e_1([w])) = e_2([g_1(w)])$. Ahora bien, como $g_1(w) \in B_2$, entonces de la segunda de las identidades (3.2) se sigue que $e_2([g_1(w)]) = [g_2(g_1(z))] = [\theta_{B_3}] = im(\gamma)$ (ver Ejemplo 2.5.5), por lo tanto $e_2(e_1([w])) = im(\gamma)$ y en consecuencia $e_2 e_1 = 0$.

□

Definición 3.3.28. *Si A es una $S-$acción, se dice que $X \leq A$ es sumando directo de A si existe $Y \leq A$ tal que $A = X \cup Y$ y $X \cap Y = \{\theta_A\}$. En este caso se escribe $A = X \uplus Y$.*

Lema 3.3.29. *Suponga que* $\begin{tikzcd}\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta\end{tikzcd}$ *es una sucesión Rees-exacta. Si $B = f(A) \uplus X$, entonces existe $\varepsilon : X \longrightarrow C$ un isomorfismo tal que $\varepsilon = g\iota_X$ (con ι_X la inclusión de X en B). En particular $X \cong C$.*

Demostración. Se define a la función $\varepsilon : X \longrightarrow C$ como $\varepsilon(x) := g(x)$. Observar que si ι_X denota a la inclusión de X en B, entonces $\varepsilon = g\iota_X$. Es claro que ε es un $S-$morfismo. Además, si $x, y \in X$ son tales que $\varepsilon(x) = \varepsilon(y)$, entonces $g(x) = g(y)$ y por consiguiente $(x, y) \in Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$. Luego $x, y \in im(f)$ ó $x = y$. En el segundo caso es evidente que $x = y$. En el primero se tendría entonces que $x, y \in X \cap f(A) = \{\theta_B\}$ y por lo tanto $x = y$. Se deduce así que ε es inyectiva. Por otra parte, si $c \in C$, debido a que g es sobreyectiva existe $x \in B$ tal que $c = g(b)$, pero $B = f(A) \cup X$. Así, si $b \in X$ se tiene que $c = g(b) = \varepsilon(b)$. Si $b \in f(A)$, entonces $b = f(a)$ para algún $a \in A$ y en consecuencia $c = g(b) = g(f(a)) = \theta_C = g(\theta_B)$, y como $\theta_B \in X$, entonces $c = \varepsilon(\theta_B)$. De todo lo anterior se sigue que ε es sobreyectiva y por lo tanto un isomorfismo. □

Corolario 3.3.30. *Si $A = X \uplus Y$, entonces $Y \cong \dfrac{A}{X}$.*

Demostración. De acuerdo con el Ejemplo 3.3.10 la sucesión

$$\begin{tikzcd}\Theta \arrow[r] & X \arrow[r, hook, "\iota"] & A \arrow[r, "\pi"] & \dfrac{A}{X} \arrow[r] & \Theta\end{tikzcd}$$

es Rees-exacta. Además, como $\iota(X) = X$, la identidad $A = X \uplus Y$ toma la forma $A = \iota(X) \uplus Y$. Luego, del Lema 3.3.29 se sigue que $Y \cong \dfrac{A}{X}$.

□

Teorema. 3.3.31. *Los siguientes enunciados son equivalentes para la sucesión Rees-exacta* $\begin{tikzcd}\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta\end{tikzcd}$ *:*

1. *Existe un $S-$morfismo $\beta : C \longrightarrow B$ tal que $g\beta = id_C$.*
2. *$f(A)$ es sumando directo de B.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2). Sea $\beta : C \longrightarrow B$ un $S-$morfismo tal que $g\beta = id_C$ y defínase $X := \beta(g(B))$. Es claro que $X \leq B$. Ahora, para $b \in B$ arbitrario se tiene que $g(b) \in C$, y como $g\beta = id_C$, entonces $g(\beta(g(b))) = g(b)$. De ahí que $(b, \beta(g(b))) \in Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$ y por lo tanto $(b, \beta(g(b))) \in im(f) \times im(f)$ ó $b = \beta(g(b))$. En el primer caso se sigue que $b \in f(A)$ y en el segundo se implica que $b \in X$. Por consiguiente $b \in f(A) \cup X$ y en consecuencia $B = f(A) \cup X$. Si $b \in f(A) \cap X$, entonces $b = f(a)$ y $b = \beta(g(u))$ para algunos $a \in A$ y $u \in B$. Luego $f(a) = \beta(g(u))$ y así $\theta_C = g(f(a)) = g(\beta(g(u))) = g(u)$, de donde se ve que $u \in Nu(g) = im(f)$ (véase Proposición 3.3.19) y por lo tanto $u = f(x)$ para algún $x \in A$. Así que $b = \beta(g(u)) = \beta(g(f(x))) = \beta(\theta_C) = \theta_B$. Por consiguiente $f(A) \cap X = \{\theta_B\}$ y con ello $B = f(A) \uplus X$.
2) $\Longrightarrow$ 1). Si $f(A)$ es sumando directo de B, existe $X \leq B$ tal que $B = f(A) \uplus X$. Por el Lema 3.3.29 existe $\varepsilon : X \longrightarrow C$ un isomorfismo tal que $\varepsilon = g\iota_X$ (donde ι_X es la inclusión de X en B). Para el $S-$morfismo $\beta := \iota_X\varepsilon^{-1}$ se tiene que como $\varepsilon = g\iota_X$, entonces $id_C = g\iota_X\varepsilon^{-1} = g\beta$. ☐

Teorema. 3.3.32. *Suponga que* $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ *es una sucesión exacta corta de Rees. Si* $f(A)$ *es sumando directo de* B*, entonces existe un* $S-$*morfismo* $\alpha : B \longrightarrow A$ *tal que* $\alpha f = id_A$.

Demostración. Suponga que existe $X \leq B$ tal que $B = f(A) \uplus X$. Puesto que f es inyectiva, entonces para cada $b \in f(A)$ existe un único $a_b \in A$ tal que $b = f(a_b)$. A partir de esto se define a la función $\alpha : B \longrightarrow A$ como

$$\alpha(b) := \begin{cases} a_b & si \quad b \in f(A). \\ \theta_A & si \quad b \in X. \end{cases}$$

Sean $s \in S$ y $b \in B$ arbitrarios. Si $b \in f(A)$, entonces $b = f(a_b)$ y así $sb = sf(a_b) = f(sa_b)$, de manera que $a_{sb} = sa_b$. Luego $\alpha(sb) = a_{sb} = sa_b = s\alpha(b)$. Si $b \in X$, entonces $sb \in X$ y $\alpha(b) = \theta_A$. Por lo tanto $\alpha(sb) = \theta_A = s\alpha(b)$. Se deduce así que α es un $S-$morfismo. Ahora, para cada $a \in A$ es claro que $f(a) \in f(A)$ y que $a_{f(a)} = a$. Luego, $\alpha(f(a)) := a_{f(a)} = a$ y en consecuencia $\alpha f = id_A$. ☐

Teorema. 3.3.33. *Los siguientes enunciados son equivalentes para la sucesión Rees-exacta* $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ *:*

1. *Existe un* $S-$*morfismo* $\alpha : B \longrightarrow A$ *tal que* $\alpha f = id_A$.

2. *Existe un* $S-$*morfismo inyectivo* w *que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "w"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"'] & \Theta \\
 & A \arrow[r, "i"'] & A \times C \arrow[r, "p"'] & C &
\end{tikzcd}$$

Donde $i(a) := (a, \theta_C)$ *y* $p(a,c) := c$.

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2). Sea $\alpha : B \longrightarrow A$ un $S-$morfismo tal que $\alpha f = id_A$. Con ayuda de α se define a la función $w : B \longrightarrow A \times C$ como $w(b) := (\alpha(b), g(b))$. Puesto que w está definida en términos de α y g los cuáles son $S-$morfismos, se sigue que w es un $S-$morfismo. Suponga que $x, y \in B$ son tales que $w(x) = w(y)$. Entonces $(\alpha(x), g(x)) = (\alpha(y), g(y))$ y por lo tanto $\alpha(x) = \alpha(y)$ y $g(x) = g(y)$. De la segunda identidad se sigue que $(x, y) \in Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$ y luego $x, y \in im(f)$ ó $x = y$. Si $x, y \in im(f)$, puede escribirse $x = f(a_x)$ y $y = f(a_y)$ para algunos $a_x, a_y \in A$. Así, la identidad $\alpha f = id_A$ implica que $\alpha(x) = \alpha(f(a_x)) = a_x$ y $\alpha(y) = \alpha(f(a_y)) = a_y$, pero $\alpha(x) = \alpha(y)$, luego $a_x = a_y$ y por lo tanto $x = f(a_x) = f(a_y) = y$, concluyéndose así que w es inyectiva. Finalmente, para cada $a \in A$ y cada $b \in B$ se tiene que $w(f(a)) := (\alpha(f(a)), g(f(a))) = (a, \theta_C) = i(a)$ y $p(w(b)) = p(\alpha(b), g(b)) := g(b)$ i,e, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "w"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"'] & \Theta \\
& A \arrow[r, "i"'] & A \times C \arrow[r, "p"'] & C &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

2) $\Longrightarrow$ 1). Suponga que w es un $S-$morfismo inyectivo que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "w"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"'] & \Theta \\
& A \arrow[r, "i"'] & A \times C \arrow[r, "p"'] & C &
\end{tikzcd}$$

Considere al $S-$morfismo $q : A \times C \longrightarrow A$ dado por $q(a,c) := a$. Se tiene que para cada $a \in A$, $q(i(a)) = q(a, \theta_C) = a$ i,e, $qi = id_A$. Ahora bien, como $wf = i$, entonces para $\alpha := qw$ se tiene que $\alpha f = qwf = qi = id_A$. $\square$

Definición 3.3.34. *Se dice que la sucesión Rees-exacta* $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ *se escinde (divide, factoriza ó parte) a la derecha si satisface alguna de las condiciones del Teorema 3.3.31.*

Definición 3.3.35. *Se dice que la sucesión Rees-exacta* $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ *se escinde (divide, factoriza ó parte) a la izquierda si satisface alguna de las condiciones del Teorema 3.3.33.*

Observación 3.3.36. *De acuerdo al Teorema 3.3.32, toda sucesión Rees-exacta corta que se escinde a la derecha también se escinde a la izquierda. Sin embargo, y a diferencia de lo que sucede con sucesiones exactas cortas de morfismos de módulos, no es cierto que toda sucesión Rees-exacta corta que se escinde a la izquierda también se escinde a la derecha. En efecto,* *exhibiremos que existe una sucesión exacta corta de Rees que se escinde a la izquierda pero no a la derecha. Para tal fin suponga que S es un monoide con cero 0 para el que existen tres elementos $w, a, b \in S$ ninguno de ellos igual a 0 tales que $wa \neq 0$ y $wb = 0$. Bajo estas condiciones ${}_SS$ es una $S-$acción cuyo único elemento cero es 0 (véase la Proposición 2.5.8) y además podemos darle al conjunto $S \times S$ estructura de $S-$acción haciendo $s(x,y) := (sx, sy)$. No es difícil verificar que en este caso, $(0,0)$ es el único elemento cero de la $S-$acción $S \times S$. Considerar ahora a $X := \{(x,0) \,|\, x \in S\}$. Observar que para cada $s, x \in S$ se tiene que $s(x,0) := (sx, s0) = (sx,0) \in X$, y en consecuencia $X \leq S \times S$. Afirmamos que X no es un sumando directo de $S \times S$: en efecto, suponga por el contrario, que existe $Y \leq S \times S$ tal que $S \times S = X \uplus Y$, entonces de que $b \neq 0$ se sigue que $(a,b) \notin X$, pero $S \times S = X \cup Y$, luego debe ser que $(a,b) \in Y$. Así que como Y es una subacción, entonces $w(a,b) \in Y$, pero $w(a,b) = (wa, wb) = (wa, 0) \in X$, por lo tanto $(wa, 0) \in X \cap Y = \{(0,0)\}$ y en consecuencia $(wa,0) = (0,0)$. De ahí que $wa = 0$, lo cuál es una contradicción, pues $wa \neq 0$. Por consiguiente X no es un sumando directo de $S \times S$. Considerar a la función $f : S \longrightarrow S \times S$ dada por $f(x) := (x,0)$. Es fácil ver que f es un $S-$morfismo inyectivo, y además $f(S) := \{f(x) \,|\, x \in S\} = \{(x,0) \,|\, x \in S\} = X$. Ahora bien, como f es inyectiva, el Corolario 3.3.17 implica que existe un $S-$morfismo sobreyectivo g tal que la sucesión $\Theta \longrightarrow S \xrightarrow{f} S \times S \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta. Por otra parte, la función $\alpha : S \times S \longrightarrow S$ dada por $\alpha(x,y) := x$ es un $S-$morfismo, y más aún, para cada $x \in S$, $\alpha(f(x)) = \alpha(x,0) = x$. De ahí que $\alpha f = id_S$ y por consiguiente la sucesión $\Theta \longrightarrow S \xrightarrow{f} S \times S \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ se escinde a la izquierda. Finalmente, como $f(S) = X$ y X no es sumando directo de $S \times S$, entonces la sucesión $\Theta \longrightarrow S \xrightarrow{f} S \times S \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Theta$ no se escinde a la derecha.*

Observación 3.3.37. *Para construir a la sucesión de la Observación anterior nos basamos en el supuesto de que S es un monoide con cero 0 para el que existen tres elementos $w, a, b \in S$ ninguno de ellos igual a 0 tales que $wa \neq 0$ y $wb = 0$. Un ejemplo de monoide con tales características es el monoide $M_2(\mathbb{Z})$ de todas las matrices de tamaño 2×2 con coeficientes enteros bajo el producto usual entre matrices. En este caso la matriz $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es cero del monoide $M_2(\mathbb{Z})$, además para $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i,e, estas matrices satisfacen que $wa \neq \mathcal{O}$ y $wb = \mathcal{O}$.*

Proposición 3.3.38. *Suponga que el siguiente es un diagrama conmutativo de $S-$morfismos cuya primera fila es Rees-exacta:*

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "w"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"'] & \Theta \\
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

Si w es un isomorfismo, entonces la segunda fila del diagrama anterior es Rees-exacta.

Demostración. De la conmutatividad del diagrama se tiene que $wf_1 = g_1$ y $g_2w = f_2$. En particular, como w es isomorfismo se tiene que $g_2 = f_2w^{-1}$. Así, la identidad $wf_1 = g_1$ implica que g_1 es composición de dos funciones inyectivas y por consiguiente g_1 debe ser inyectiva. Además, de la igualdad $g_2 = f_2w^{-1}$ se desprende que g_2 es composición de dos funciones sobreyectivas y en consecuencia g_2 es sobreyectiva. Ahora bien, se tiene que $g_2g_1 = f_2w^{-1}wf_1 = f_2f_1 = 0$, luego la Proposición 3.2.3 implica que $\mathcal{K}_{im(g_1)} \subseteq Ker(g_2)$. Por otra parte, si $(x, y) \in Ker(g_2)$, entonces $g_2(x) = g_2(y)$, pero $g_2 = f_2w^{-1}$, luego $f_2(w^{-1}(x)) = f_2(w^{-1}(y))$ y así $(w^{-1}(x), w^{-1}(y)) \in Ker(f_2) = \mathcal{K}_{im(f_1)}$. De ahí que $w^{-1}(x), w^{-1}(y) \in im(f_1)$ ó $w^{-1}(x) = w^{-1}(y)$. En el caso en que $w^{-1}(x) = w^{-1}(y)$ la inyectividad de w implica que $x = y$ y en consecuencia $(x, y) \in \mathcal{K}_{im(g_1)}$. En el caso restante cuando $w^{-1}(x), w^{-1}(y) \in im(f_1)$, puede escribirse $w^{-1}(x) = f_1(a_x)$ y $w^{-1}(y) = f_1(a_y)$ para algunos $a_x, a_y \in A$, de manera que $x = w(f_1(a_x))$ y $y = w(f_1(a_y))$, pero $wf_1 = g_1$, luego $x = g_1(a_x)$ y $y = g_1(a_y)$. Por consiguiente $(x, y) \in im(g_1) \times im(g_1) \subseteq \mathcal{K}_{im(g_1)}$. Se concluye así que $Ker(g_2) \subseteq \mathcal{K}_{im(g_1)}$ y en definitiva $\mathcal{K}_{im(g_1)} = Ker(g_2)$. De todo lo anterior se sigue que la sucesión $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{g_1} B' \xrightarrow{g_2} C \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta. ☐

Corolario 3.3.39. *Asumir que el siguiente es un diagrama conmutativo de $S-$morfismos con primera fila Rees-exacta:*

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \Theta \\
\Theta \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

Si α, β y γ son isomorfismos, entonces la sucesión $\Theta \longrightarrow A' \xrightarrow{g_1} B' \xrightarrow{g_2} C' \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta.

Demostración. Que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \Theta \\
\Theta \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

sea conmutativo aunado a que γ sea un isomorfismo implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"'] & \Theta \\
\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "g_1\alpha"'] & B' \arrow[r, "\gamma^{-1}g_2"'] & C \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ahora bien, este último tiene primera fila Rees-exacta y además β es un isomorfismo. Por consiguiente la sucesión $\Theta \longrightarrow A \xrightarrow{g_1\alpha} B' \xrightarrow{\gamma^{-1}g_2} C \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta. De ahí que $g_1\alpha$ es inyectiva, $\gamma^{-1}g_2$ es sobreyectiva y $\mathcal{K}_{im(g_1\alpha)} = Ker(\gamma^{-1}g_2)$. Así, de las igualdades $g_1 = (g_1\alpha)\alpha^{-1}$ y $g_2 = \gamma(\gamma^{-1}g_2)$ se ve que g_1 es composición de dos inyectivas y que g_2 es composición de dos sobreyectivas, de forma que g_1 es inyectiva y g_2 sobreyectiva. Ahora bien, de que α es sobreyectiva se sigue que $im(g_1\alpha) = im(g_1)$ y en consecuencia $\mathcal{K}_{im(g_1\alpha)} = \mathcal{K}_{im(g_1)}$. También, de la inyectividad de γ^{-1} se desprende que $Ker(\gamma^{-1}g_2) = Ker(g_2)$, luego $Ker(g_2) = Ker(\gamma^{-1}g_2) = \mathcal{K}_{im(g_1\alpha)} = \mathcal{K}_{im(g_1)}$. Por consiguiente la sucesión $\Theta \longrightarrow A' \xrightarrow{g_1} B' \xrightarrow{g_2} C' \longrightarrow \Theta$ es Rees-exacta. $\square$

CAPÍTULO 4

ACCIONES COMPLETAMENTE REDUCIBLES

Recordemos que un $R-$módulo es semisimple si este puede ser escrito como suma de submódulos simples. Existe una serie de propiedades que caracterizan a este tipo de módulos. Además, se dice que un anillo R es semisimple si el $R-$módulo $_RR$ es semisimple. También, hay una serie de propiedades que caracteriza a este tipo de anillos. Basándonos en lo anterior, en este capítulo se define lo que entenderemos por $S-$acción *semisimple* (que en realidad serán llamadas acciones completamente reducibles) y damos algunas propiedades que caracterizan a este tipo de acciones. También, si definieramos a un monoide semisimple como aquel para el que la $S-$acción $_SS$ es semisimple, entonces exhibiremos en el Teorema 4.3.18 que los monoides semisimples son en realidad los grupos.

4.1. Acciones simples y 0-simples

Definición 4.1.1. *Se dice que una $S-$acción A es simple si la única subacción de A es A. Además, se dirá que A es $0-$simple si A tiene un único elemento cero y si sus únicas subacciones son A y $\{\theta_A\}$.*

Será conveniente recordar ahora el siguiente resultado:

Proposición 4.1.2. *Si $A \in S - Act_0$, entonces cualquier subacción X de A pertenece a $S - Act_0$. Más aún, el elemento cero de X coincide con el de A. En particular, la intersección de cualesquiera dos subacciones de A es no vacía.*

Demostración. Ver la demostración del Teorema 2.5.10. □

Definición 4.1.3. *Se dice que una $S-$acción A es cíclica si existe $a \in A$ para el que $A = \{sa \mid s \in S\}$. En este caso se escribe $A = \langle a \rangle$.*

Proposición 4.1.4. *Toda acción simple ($0-$simple) es cíclica.*

Demostración. Sea A una $S-$acción simple y $a \in A$ arbitrario. Como $\langle a \rangle := \{sa \,|\, s \in S\}$ es subacción de A, entonces $A = \langle a \rangle$ i,e, A es cíclica. Suponga ahora que A es $0-$simple. Si A tiene un solo elemento, digamos a, es claro entonces que $A = \langle a \rangle$. Si A tiene más de un elemento, sea $a \in A$ con $a \neq \theta_A$. En este caso $\langle a \rangle := \{sa \,|\, s \in S\}$ es una subacción de A distinta de $\{\theta_A\}$, luego $A = \langle a \rangle$. ☐

Proposición 4.1.5. *Sea A una $S-$acción simple. Entonces A tiene elemento cero si y solo si A tiene un sólo elemento.*

Demostración. Si θ es elemento cero de A, entonces $\{\theta\} \leq A$, luego como A es simple debe ser que $A = \{\theta\}$. Y viceversa, si A solo tiene un elemento, es claro que éste es elemento cero. ☐

Observación 4.1.6. *De la Proposición anterior se sigue que toda $S-$acción simple con más de un elemento no puede tener elementos cero. En particular, ninguna acción $0-$simple con más de un elemento puede ser simple.*

Proposición 4.1.7. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $S-$acciones y $X \leq A$.*

1. *Si X es simple, entonces $f(X)$ es simple.*
2. *Si $A, B \in S - Act_0$ y X es $0-$simple, entonces $f(X)$ es $0-$simple.*

Demostración. $2)$ Como $A \in S - Act_0$ y $X \leq A$, entonces del Teorema 2.5.10 se sigue que $X \in S - Act_0$, y en particular X tiene un único elemento cero, el cuál es el elemento cero de A. Ahora, para $Y \leq f(X)$ se verifica sin dificultad que $A_Y := \{x \in X \,|\, f(x) \in Y\}$ es una subacción de X, y como X es $0-$simple, entonces $A_Y = \{\theta_A\}$ ó $A_Y = X$. En el primer caso, cuando $A_Y = \{\theta_A\}$ se tiene que $Y = \{\theta_B\}$. En efecto, si $y \in Y \leq f(X)$, entonces puede escribirse $y = f(x)$ para algún $x \in X$, y así $x \in A_Y = \{\theta_A\}$, de donde $x = \theta_A$ y por lo tanto $y = f(\theta_A) = \theta_B$. En consecuencia $Y = \{\theta_B\}$. En el caso restante, cuando $A_Y = X$ se tiene que $Y = f(X)$, pues la igualdad $A_Y = X$ implica que para cada $x \in X$ ocurre que $f(x) \in Y$ y por consiguiente $f(X) = Y$. En consecuencia $f(X)$ es $0-$simple. La prueba del inciso $1)$ es análoga. ☐

Siempre pueden construirse acciones $0-$simples sobre monoides con cero. Para verificar este hecho se necesita primero establecer el siguiente resultado.

Teorema. 4.1.8. *Todo monoide (no trivial) con cero tiene al menos un ideal izquierdo (derecho ó bilátero) maximal.*

Demostración. Solo se hará la prueba para ideales izquierdos, pues para ideales derechos y biláteros se procede de manera análoga. Sea S un monoide no trivial con elemento cero 0 y considere a la familia

$$\mathcal{F} := \{I \subsetneq S \,|\, I \text{ es ideal izquierdo de } S\}$$

Es claro que $\{0\}$ es un ideal izquierdo de S, y además como el monoide es no trivial, $\{0\} \neq S$. De ahí que $\{0\} \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $\mathcal{F}$ es no vacía. Ahora bien, sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ arbitraria (no vacía) y tómense $s \in S$ y $a \in \bigcup \mathcal{C}$ arbitrarios. Para a existe $I \in \mathcal{C}$ tal que $a \in I$, luego, como los elementos de $\mathcal{C}$ deben ser ideales izquierdos de S, se sigue que I es ideal izquierdo de S y por lo tanto $sa \in I \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. De ahí que $sa \in \bigcup \mathcal{C}$ y por lo tanto $\bigcup \mathcal{C}$ es ideal izquierdo de S. Observe que si $S = \bigcup \mathcal{C}$, entonces para e (el neutro) existe $J \in \mathcal{C}$ tal que $e \in J$, lo que implica entonces que $J = S$, contradicción, pues los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos propios de S. Por consiguiente $S \neq \bigcup \mathcal{C}$ y así $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Si ordenamos a $\mathcal{F}$ mediante la contención, del argumento anterior se deduce que toda $\subseteq -$cadena de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior. Por lo tanto, del Lema de Zorn se sigue que existe $I_0 \in \mathcal{F}$ que es $\subseteq -$maximal. Veamos que I_0 es ideal izquierdo maximal de S: sea J un ideal izquierdo de S tal que $I_0 \subseteq J$. Si $J \neq S$, entonces $J \in \mathcal{F}$ y así la maximalidad de I_0 implica que $I_0 = J$. Por consiguiente I_0 es ideal izquierdo maximal de S. □

Teorema. 4.1.9. *Sea S un monoide (no trivial) con cero e I un ideal izquierdo maximal de S. Entonces $\dfrac{S}{I}$ es una $S-$acción $0-$simple.*

Demostración. El Teorema 4.1.8 asegura que existe I un ideal izquierdo de S el cuál es maximal, además no es difícil ver que I es subacción de la $S-$acción ${}_SS$. Por otra parte, la Proposición 2.5.8 implica que la acción ${}_SS$ pertenece a la clase $S - Act_0$. Por lo tanto, del inciso 2 del Teorema 2.5.10 se sigue que la $S-$acción cociente $\frac{S}{I}$ también pertenece a la clase $S - Act_0$. En particular cualquier subacción de $\frac{S}{I}$ debe tener a I (que es el cero de $\frac{S}{I}$) como elemento. Ahora bien, de acuerdo al Corolario 3.3.26 se tiene que $Sub(\frac{S}{I})$, la clase de todas las subacciones de $\frac{S}{I}$ que tienen a I como elemento (que como vimos son todas sus subacciones) viene dada por $Sub(\frac{S}{I}) = \{\frac{J}{I} \,|\, J \leq S \text{ e } I \subseteq J\}$. Así, para $K \leq \frac{S}{I}$ subacción arbitraria se tiene que $K \in Sub(\frac{S}{I})$ y por lo tanto existe $J \leq S$ con $I \subseteq J$ tal que $K = \frac{J}{I}$. Ahora, puesto que las subacciones de ${}_SS$ son en realidad ideales izquierdos del monoide S, entonces J debe ser un ideal izquierdo de S tal que $I \subseteq J$. Así, de que I es un ideal izquierdo maximal se sigue que $I = J$ ó $J = S$. Si $I = J$, entonces $K = \frac{J}{I} = \frac{I}{I} = \{I\}$, y si $J = S$, entonces $K = \frac{J}{I} = \frac{S}{I}$. Por consiguiente las únicas subacciones de $\frac{S}{I}$ son $\{I\}$ y $\frac{S}{I}$. Por lo tanto $\frac{S}{I}$ es $0-$simple. □

4.2. Zoclo y acciones completamente reducibles

Definición 4.2.1. *El zoclo de una $S-$acción A, denotado por $Zoc(A)$, se define como*

$$Zoc(A) := \bigcup Simp(A),$$

donde $Simp(A) := \{X \leq A \,|\, X \text{ es simple}\}$ i,e, el zoclo de A se define como la unión de todas las subacciones simples de A.

Lema 4.2.2. *Sea A una $S-$acción. Entonces, para cada $X, Y \in Simp(A)$ se tiene que $X = Y$ ó $X \cap Y = \emptyset$.*

Demostración. Sean $X, Y \in Simp(A)$. Si $X \cap Y = \emptyset$ la demostración termina. Si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $X \cap Y \leq X$ y $X \cap Y \leq Y$. Así, como X y Y son simples se sigue que $X = X \cap Y = Y$. □

Definición 4.2.3. *Una $S-$acción A es completamente reducible si $A = Zoc(A)$.*

Observación 4.2.4. *El Lema anterior implica que la unión que aparece en la definición de zoclo es una unión disjunta. Así, toda acción completamente reducible se puede expresar como unión disjunta de subacciones simples.*

Ejemplo 4.2.5. *Para cada monoide S siempre puede construirse una $S-$acción completamente reducible. En efecto, Sea X una $S-$acción construida como en el inciso 4 de los Ejemplos 2.1.1. Si $Y \subseteq X$ es no vacío, entonces para cada $s \in S$ y $y \in Y$ se tiene que $sy := y \in Y$. Por lo tanto Y es subacción de X. De lo anterior se sigue que en este caso, cualquier subconjunto no vacío de X es una subacción. En particular, cada subconjunto de la forma $\{x\}$ con $x \in X$ es una subacción, más aún, es claro que $\{x\}$ es una subacción simple. De esto se sigue que $\{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq Simp(X)$ y por consiguiente $X = \bigcup\{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \bigcup Simp(X) = Zoc(X)$. De ahí que X es completamente reducible.*

Proposición 4.2.6. *Si A y B son dos $S-$acciones tales que $A \cong B$ y A es completamente reducible, entonces B es completamente reducible.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de acciones. Si A es completamente reducible, entonces $A = \bigcup\{X \mid X \in Simp(A)\}$ y por consiguiente $B = f(A) = \bigcup\{f(X) \mid X \in Simp(A)\}$. Ahora bien, del primer inciso de la Proposición 4.1.7 se sigue que para cada $X \in Simp(A)$, $f(X) \in Simp(B)$ Y en consecuencia se tiene que $\{f(X) \mid X \in Simp(A)\} \subseteq Simp(B)$. Por lo tanto $B = \bigcup\{f(X) \mid X \in Simp(A)\} \subseteq \bigcup Simp(B) = Zoc(B)$ y así B es completamente reducible. □

Lema 4.2.7. *Sea A una $S-$acción y $B \leq A$. Entonces*

1. *$Simp(B) = \{B \cap X \mid X \in Simp(A)$ y $B \cap X \neq \emptyset\}$*
2. *$Zoc(B) = B \cap Zoc(A)$*

Demostración. Sea $\mathcal{F} := \{B \cap X \mid X \in Simp(A)$ y $B \cap X \neq \emptyset\}$. Suponga que $X \in Simp(A)$ es tal que $B \cap X \neq \emptyset$. Entonces $B \cap X \leq B$. Ahora, si $C \leq B \cap X$, se tiene que $C \leq B$ y $C \leq X$. Así, debido a que X es simple se tiene que $C = X$. Luego $B \cap X = B \cap C \leq C$ y por consiguiente $B \cap X = C$. Así $B \cap X$ es una subacción simple de B i,e, $B \cap X \in Simp(B)$.

Por consiguiente $\mathcal{F} \subseteq Simp(B)$. Ahora, si C es una subacción simple de B, es claro que C es también una subacción simple de A i,e, $C \in Simp(A)$. La igualdad $C = B \cap C$ implica entonces que $C \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $Simp(B) \subseteq \mathcal{F}$ y en definitiva $Simp(B) = \mathcal{F}$. De esto último se desprende que $Zoc(B) := \bigcup Simp(B) = \bigcup\{B \cap X \mid X \in Simp(A)\} = B \cap \bigcup\{X \mid X \in Simp(A)\} = B \cap Zoc(A)$. □

Teorema. 4.2.8. *1. Toda $S-$acción simple es completamente reducible.*

2. Una $S-$acción cíclica es completamente reducible si y solo si es simple.

3. Cualquier subacción de una $S-$acción completamente reducible es completamente reducible.

Demostración. 1) Si A es una $S-$acción simple, entonces es claro que $Simp(A) = \{A\}$. Luego $Zoc(A) := \bigcup Simp(A) = \bigcup\{A\} = A$.
2) Sea $A = \langle a \rangle$. Si A es completamente reducible, entonces $A = Zoc(A) := \bigcup Simp(A)$. Luego, existe $X \in Simp(A)$ tal que $a \in X$. Como X debe ser una subacción de A, entonces $sa \in X$ para cada $s \in S$ y por consiguiente $A = X$. Además X es simple, por lo tanto A es simple. Inversamente, si A es simple, el inciso anterior implica que A es completamente reducible.
3) Sea A una $S-$acción completamente reducible y $B \leq A$. Entonces $A = Zoc(A)$. Luego $B = B \cap A = B \cap Zoc(A) = Zoc(B)$ (véase Lema 4.2.7 inciso 2). Por consiguiente B es completamente reducible. □

Corolario 4.2.9. *Sea A una $S-$acción completamente reducible. Entonces $B \leq A$ es simple si y solo si B es cíclica.*

Demostración. De la Proposición 4.1.4 se sigue que toda subacción simple de A es cíclica. Ahora bien, sea $B \leq A$ con $B = \langle x \rangle$. Como A es completamente reducible, de que toda subacción de un acción completamente reducible es completamente reducible, se deduce que $B = \langle x \rangle$ es completamente reducible. Por consiguiente, del segundo inciso del Teorema 4.2.8 se sigue que $\langle x \rangle$ es una subacción simple. □

Teorema. 4.2.10. *La $S-$acción regular ${}_SS$ es completamente reducible si y solo si S es un grupo.*

Demostración. Observar que la acción ${}_SS$ es una $S-$acción cíclica, de hecho ${}_SS = \langle e \rangle$. Así, si ${}_SS$ es completamente reducible, del segundo inciso del Teorema 4.2.8 se sigue que ${}_SS$ es simple. Además, para cada $g \in S$ el conjunto $\langle g \rangle := \{sg \mid s \in S\}$ es una subacción de ${}_SS$. Por consiguiente para cada $g \in S$ debe suceder que $S = \langle g \rangle$. De ahí que para cada $g \in S$, $e \in \langle g \rangle$ i,e, para cada $g \in S$ existe $s \in S$ tal que $sg = e$. De esto se deduce que S es un monoide en el que todo elemento tiene inverso izquierdo. En consecuencia S debe ser un grupo (véase Teorema 1.2.13). Y recíprocamente, si S es un grupo, entonces ${}_SS$ es una acción simple. En efecto, si $I \leq_S S$, entonces para $g \in I$ se tiene que $e = g^{-1}g \in I$ y en consecuencia para cada $s \in S$ se tiene que $s = se \in I$. De ahí que $I = S$ y así ${}_SS$ es simple. Por lo tanto, el primer inciso del Teorema 4.2.8 implica que ${}_SS$ es completamente reducible. □

Teorema. 4.2.11. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *Toda $S-$acción es completamente reducible.*
2. *S es un grupo.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Si toda $S-$acción es completamente reducible, entonces en particular lo es la acción ${}_SS$. Así, del Teorema 4.2.10 se sigue que S es un grupo.
$2) \Longrightarrow 1)$ Suponga que S es un grupo y sea A una $S-$acción. Si $a \in A$ es arbitrario, entonces la subacción $\langle a \rangle := \{sa \,|\, s \in S\}$ es simple. En efecto, sea $X \leq \langle a \rangle$. Si $x \in X$, entonces $x = sa$ para algún $s \in S$. Así que $a = s^{-1}x \in X$ y por lo tanto $\langle a \rangle \leq X$. Luego $\langle a \rangle = X$ y con ello $\langle a \rangle$ es simple. De lo anterior se ve que para cada $a \in A$ existe $X \in Simp(A)$ tal que $a \in X$. En consecuencia $A = \bigcup Simp(A) = Zoc(A)$ i,e, A es completamente reducible. □

4.3. Zoclo subcero y acciones completamente 0-reducibles

Definición 4.3.1. *Si A es una $S-$acción con un único elemento cero se define*

$$Zoc_0(A) := \bigcup Simp_0(A),$$

donde $Simp_0(A) := \{X \leq A \,|\, X \text{ es } 0-simple\}$ i,e, el zoclo (subcero) de A se define como la unión de todas las subacciones $0-$simples de A.

Lema 4.3.2. *Si $A \in S - Act_0$ (véase Definición 2.5.7), entonces para cada $X, Y \in Simp_0(A)$ se tiene que $X = Y$ ó $X \cap Y = \{\theta_A\}$. En particular, $Simp(A) = \{\{\theta_A\}\}$ y por lo tanto $Zoc(A) = \{\theta_A\}$.*

Demostración. Suponga que $A \in S - Act_0$ y sean $X, Y \in Simp_0(A)$. Si $X \cap Y = \{\theta_A\}$ la demostración termina. Si $X \cap Y \neq \{\theta_A\}$, como $X \cap Y \leq X$ y $X \cap Y \leq Y$, de que X y Y son $0-$simples se sigue que $X = X \cap Y = Y$. Finalmente, es claro que $\{\theta_A\} \in Simp(A)$, además si $Z \in Simp(A)$, entonces como $\theta_A \in Z$ (véase la Proposición 4.1.2), la Proposición 4.1.5 implica que Z tiene solo un elemento y por lo tanto $Z = \{\theta_A\}$. Así $Simp(A) = \{\{\theta_A\}\}$. □

Definición 4.3.3. *Si A es una $S-$acción con un único elemento cero, se dirá que A es completamente $0-$reducible si $A = Zoc_0(A)$.*

Para los elementos de $S - Act_0$ se tienen resultados análogos a la Proposición 4.2.6, al Lema 4.2.7 y al Teorema 4.2.8. A saber:

Proposición 4.3.4. *Sean A y B dos $S-$acciones tales que $A \cong B$. Si $A \in S - Act_0$ y A es completamente $0-$reducible, entonces $B \in S - Act_0$ y B es completamente $0-$reducible.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de acciones. Del tercer inciso del Teorema 2.5.10 se desprende que $B \in S - Act_0$. Ahora bien, si A es completamente $0-$reducible, entonces $A = \bigcup\{X \,|\, X \in Simp_0(A)\}$ y por consiguiente $B = f(A) = \bigcup\{f(X) \,|\, X \in Simp_0(A)\}$. Ahora bien, del segundo inciso de la Proposición 4.1.7 se sigue que para cada $X \in Simp_0(A)$, $f(X) \in Simp_0(B)$, en consecuencia se tiene que $\{f(X) \,|\, X \in Simp_0(A)\} \subseteq Simp_0(B)$ y por lo tanto $B = \bigcup\{f(X) \,|\, X \in Simp_0(A)\} \subseteq \bigcup Simp_0(B) = Zoc_0(B)$. Luego B es completamente $0-$reducible. ☐

Lema 4.3.5. *Sea $A \in S - Act_0$. Si $B \leq A$, entonces*

1. *$Simp_0(B) = \{B \cap X \,|\, X \in Simp_0(A)\}$*
2. *$Zoc_0(B) = B \cap Zoc_0(A)$*

Demostración. Sea $\mathcal{F} := \{B \cap X \,|\, X \in Simp_0(A)\ \}$ y $X \in Simp_0(A)$. Es claro que $B \cap X \leq B$. Ahora, si $C \leq B \cap X$, se tiene que $C \leq B$ y $C \leq X$. Así, debido a que X es $0-$simple se tiene que $C = \{\theta_A\}$ ó $C = X$. Si $C = X$, entonces $B \cap X = B \cap C \leq C$ y por consiguiente $B \cap X = C$. Así $B \cap X$ es una subacción $0-$simple de B i,e, $B \cap X \in Simp_0(B)$. Por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq Simp_0(B)$. Ahora, si C es una subacción $0-$simple de B, es claro que C es también una subacción $0-$simple de A i,e, $C \in Simp_0(A)$. La igualdad $C = B \cap C$ implica entonces que $C \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $Simp_0(B) \subseteq \mathcal{F}$ y en definitiva $Simp_0(B) = \mathcal{F}$. De esto último se desprende que $Zoc_0(B) := \bigcup Simp_0(B) = \bigcup\{B \cap X \,|\, X \in Simp_0(A)\} = B \cap \bigcup\{X \,|\, X \in Simp_0(A)\} = B \cap Zoc_0(A)$ ☐

Teorema. 4.3.6. *Suponga que $A \in S - Act_0$.*

1. *Si A es $0-$simple, entonces A es completamente $0-$reducible.*
2. *Si A es cíclica, entonces A es completamente $0-$reducible si y solo si A es $0-$simple.*
3. *Si A es completamente $0-$reducible, entonces cualquier subacción de A es completamente $0-$reducible.*

Demostración. 1) Si A es una $S-$acción $0-$simple, entonces es claro que $Simp_0(A) = \{A, \{\theta_A\}\}$. Luego $Zoc_0(A) := \bigcup Simp_0(A) = \{A\} \cup \{\theta_A\} = A$.
2) Sea $A = \langle a \rangle$. Si A es completamente $0-$reducible, entonces $A = Soc_0(A) := \bigcup Simp_0(A)$. Luego, existe $X \in Simp_0(A)$ tal que $a \in X$. Como X debe ser una subacción de A, entonces $sa \in X$ para cada $s \in S$ y por consiguiente $A = X$. Además X es $0-$simple, por lo tanto A es $0-$simple. Inversamente, si A es $0-$simple, el inciso anterior implica que A es completamente $0-$reducible.
3) Sea A una $S-$acción completamente $0-$reducible y $B \leq A$. Entonces $A = Zoc_0(A)$. Luego $B = B \cap A = B \cap Zoc_0(A) = Zoc_0(B)$ (véase Lema 4.3.5 inciso 2). Por consiguiente B es completamente $0-$reducible. ☐

Corolario 4.3.7. *Sea* $A \in S - Act_0$ *completamente* $0-$*reducible. Entonces* $B \leq A$ *es simple si y solo si* B *es cíclica.*

Demostración. De la Proposición 4.1.4 se sigue que toda subacción $0-$simple de A es cíclica. Ahora bien, sea $B \leq A$ con $B = \langle x \rangle$. Como A es completamente $0-$reducible, de que toda subacción de un acción completamente $0-$reducible es completamente $0-$reducible, se deduce que $B = \langle x \rangle$ es completamente $0-$reducible. Por consiguiente, del segundo inciso del Teorema 4.2.8 se sigue que $\langle x \rangle$ es una subacción $0-$simple. □

Es importante observar ahora que no toda $S-$acción tiene elementos cero. En efecto, si S es un monoide sin ningún elemento cero derecho, entonces la $S-$acción regular ${}_SS$ no tiene elementos cero. Sin embargo, el Teorema 2.5.11 afirma que toda acción es subacción de una que sí tiene al menos un elemento cero. De hecho, el proceso para construir tal acción con cero consta de añadir un nuevo elemento θ (que será el elemento cero) a una acción dada A y después extender la acción de los elementos de S en A al conjunto $A \cup \{\theta\}$. Un procedimiento similar puede realizarse para monoides que carezcan de elemento cero i,e, dado un monoide puede construirse otro monoide que tenga elemento cero y que contenga como submonoide al monoide dado. En efecto, sea S un monoide con neutro e y sea 0 tal que $0 \notin S$. Sobre el conjunto $S(0) := S \cup \{0\}$ se define la siguiente operación binaria:

$$s \cdot t := \begin{cases} st & si \quad s, t \in S. \\ 0 \quad si & s = 0 \quad \text{ó} \quad t = 0. \end{cases}$$

Notar que lo que se está haciendo es dejar fija la operación de S para sus elementos y definir $s \cdot 0 = 0 = 0 \cdot s$ para cada $s \in S(0)$. No es difícil ver que con esta operación $S(0)$ es un monoide con neutro e y con elemento cero 0, además de que S es submonoide de $S(0)$. Con respecto a este monoide se tienen los siguientes resultados.

Teorema. 4.3.8. $S(0) - Act_0 = (S(0) - Act)_0$. *Además,* $S(0) \in S(0) - Act_0$.

Demostración. Se sigue de que $S(0)$ es un monoide con cero y de la Proposición 2.5.8. □

Teorema. 4.3.9. *La* $S(0)-$*acción regular* $S(0)$ *es completamente* $0-$*reducible si y solo si* S *es un grupo.*

Demostración. Observar que la $S(0)-$acción regular $S(0) := S \cup \{0\}$ con $0 \notin S$ es una acción cíclica, de hecho $S(0) = \langle e \rangle$. Luego, si $S(0)$ es completamente $0-$reducible, del segundo inciso del Teorema 4.3.6 se sigue que $S(0)$ es $0-$simple. Además, para cada $g \in S$ el conjunto $\langle g \rangle := \{s \cdot g \,|\, s \in S(0)\}$ es una subacción de $S(0)$. Así que como $S(0)$ es $0-$simple, para $g \in S$ arbitrario debe suceder que $\langle g \rangle = S(0)$ ó $\langle g \rangle = \{0\}$, pero como $0 \notin S$, entonces debe ocurrir que $\langle g \rangle = S(0)$ y por lo tanto $e \in \langle g \rangle$. De ahí que $e = s \cdot g$ para algún $s \in S(0)$. Ahora bien, observar que s debe estar en S, pues de lo contrario $s = 0$, y entonces $e = s \cdot g = 0 \cdot g = 0$ i,e, $0 = e \in S$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $s \in S$ y en consecuencia $e = s \cdot g = sg$. De lo anterior se deduce que S es un monoide tal que cualquiera de sus elementos tiene un inverso izquierdo. Por consiguiente S debe ser un grupo. Y recíprocamente, si S es un grupo, entonces $S(0)$ es una acción $0-$simple. En efecto, si $I \leq S(0)$ es tal que $I \neq \{0\}$, entonces para $g \in I$ con $g \neq 0$ debe ocurrir que $g \in S$ y con ello que $e = g^{-1}g = g^{-1} \cdot g \in I$, en consecuencia para cada $s \in S(0)$ se tiene que $s = s \cdot e \in I$. De ahí que $I = S(0)$ y así $S(0)$ es $0-$simple. Por lo tanto, el primer inciso del Teorema 4.3.6 implica que $S(0)$ es completamente $0-$reducible. □

Teorema. 4.3.10. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *Todo elemento de $S(0) - Act_0$ es completamente $0-$reducible.*
2. *S es un grupo.*

Demostración. $1) \implies 2)$ Si todo elemento de $S(0) - Act_0$ es completamente $0-$reducible, entonces en particular lo es la $S(0)-$acción regular $S(0)$. De esta forma el Teorema anterior implica que S debe ser un grupo.
$2) \implies 1)$ Suponga que S es un grupo y sea A una $S(0)-$acción. Si $a \in A$ es distinto de θ_A, entonces la subacción $\langle a \rangle := \{sa \,|\, s \in S(0)\}$ es $0-$simple. En efecto, sea $X \leq \langle a \rangle$ con $X \neq \{\theta_A\}$. Para $x \in X$ con $x \neq \theta_A$, puede escribirse $x = sa$ para algún $s \in S(0) := S \cup \{0\}$. Observe que si $s = 0$, entonces $x = sa = 0a = \theta_A$, lo cuál no es cierto. Por lo tanto $s \in S$ y así la igualdad $x = sa$ implica que $a = s^{-1}x \in X$ y por lo tanto $\langle a \rangle \leq X$. Luego $\langle a \rangle = X$ y con ello $\langle a \rangle$ es $0-$simple. De lo anterior se sigue que para cada $a \in A$ existe $X \in Simp_0(A)$ tal que $a \in X$. En consecuencia $A = \bigcup Simp_0(A) = Zoc_0(A)$ i,e, A es completamente $0-$reducible. □

El axioma de elección (en su versión Lema de Zorn) implica que toda subacción de una acción completamente $0-$reducible debe ser un sumando directo:

Teorema. 4.3.11. *Si $A \in S - Act_0$ es completamente $0-$reducible, entonces para cada $B \leq A$ existe $\mathcal{F}_0 \subseteq Simp_0(A)$ tal que $A = B \uplus \bigcup \mathcal{F}_0$. En particular, toda subacción de A es un sumando directo (véase Definición 3.3.28).*

Demostración. Si A es completamente $0-$reducible, entonces $A = \bigcup Simp_0(A)$. Sea $B \leq A$ y defínase

$$\Sigma := \{\mathcal{F} \subseteq Simp_0(A) \,|\, B \cap \bigcup \mathcal{F} = \{\theta_A\}\}$$

Observar que Σ es no vacía, pues $\mathcal{F} := \{\{\theta_A\}\} \subseteq Simp_0(A)$ es tal que $B \cap \bigcup \mathcal{F} = B \cap \bigcup\{\{\theta_A\}\} = B \cap \{\theta_A\} = \{\theta_A\}$. Ordenemos ahora a Σ mediante la contención y sea $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ arbitraria y no vacía. Afirmamos que $\bigcup \mathcal{C} \in \Sigma$: en efecto, primero, observar que por definición, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(Simp_0(A))$, luego $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Simp_0(A))$ y en consecuencia $\bigcup \mathcal{C} \subseteq Simp_0(A)$. Ahora, si $b \in B \cap \bigcup(\bigcup \mathcal{C})$, entonces $b \in B$ y $b \in \bigcup(\bigcup \mathcal{C})$, así que existe $X \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $b \in X$. Por otra parte, como $X \in \bigcup \mathcal{C}$, existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ para el cuál $X \in \mathcal{F}$, pero $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$, así que $\mathcal{F} \in \Sigma$ y por lo tanto $B \cap \bigcup \mathcal{F} = \{\theta_A\}$. Además, como $X \in \mathcal{F}$, entonces $X \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ y en consecuencia $B \cap X \subseteq B \cap \bigcup \mathcal{F} = \{\theta_A\}$. De ahí que $B \cap X = \{\theta_A\}$, de donde $b \in B \cap X = \{\theta_A\}$ y así $b = \theta_A$. Se concluye de esta forma que $B \cap \bigcup(\bigcup \mathcal{C}) = \{\theta_A\}$ y por lo tanto $\bigcup \mathcal{C} \in \Sigma$. De lo anterior se deduce que en particular, toda $\subseteq -$cadena de Σ tiene una cota superior en Σ, así el Lema de Zorn garantiza la existencia de $\mathcal{F}_0 \in \Sigma$ que es $\subseteq -$maximal. Afirmamos ahora que $B \cup \bigcup \mathcal{F}_0 = A$: en efecto, si por el contrario $B \cup \bigcup \mathcal{F}_0 \neq A$, sea $a \in A$ tal que $a \notin B \cup \bigcup \mathcal{F}_0$. Considerar a la subacción $\langle a \rangle := \{sa \,|\, s \in S\}$. Como A es completamente $0-$reducible, entonces del inciso $3)$ del Teorema 4.3.6 se sigue que $\langle a \rangle$ es completamente $0-$reducible, y así el inciso $2)$ del Teorema 4.3.6 implica que $\langle a \rangle$ es $0-$simple i,e, $\langle a \rangle \in Simp_0(A)$. Ahora bien, se tiene que $\langle a \rangle \notin \mathcal{F}_0$, pues si $\langle a \rangle \in \mathcal{F}_0$, entonces $\langle a \rangle \subseteq \bigcup \mathcal{F}_0$ y así $a \in B \cup \bigcup \mathcal{F}_0$, lo cuál es una contradicción. En consecuencia $\langle a \rangle \notin \mathcal{F}_0$. Por otra parte, como $\langle a \rangle$ es $0-$simple y $B \cap \langle a \rangle \leq \langle a \rangle$, se tiene que $B \cap \langle a \rangle = \{\theta_A\}$ ó $B \cap \langle a \rangle = \langle a \rangle$. Si $B \cap \langle a \rangle = \langle a \rangle$, entonces $\langle a \rangle \subseteq B$ y por consiguiente $a \in B \cup \bigcup \mathcal{F}_0$, lo cuál no sucede. Por lo tanto $B \cap \langle a \rangle = \{\theta_A\}$. Considere a la familia $\mathcal{G} := \mathcal{F}_0 \cup \{\langle a \rangle\}$. Note que $\mathcal{G} \subseteq Simp_0(A)$ y además $B \cap \bigcup \mathcal{G} = B \cap (\bigcup \mathcal{F}_0 \cup \langle a \rangle) = (B \cap \bigcup \mathcal{F}_0) \cup (B \cap \langle a \rangle) = \{\theta_A\} \cup \{\theta_A\} = \{\theta_A\}$. De ahí que $\mathcal{G} \in \Sigma$. Más aún, como $\langle a \rangle \notin \mathcal{F}_0$, entonces $\mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{G}$, lo cuál contradice la maximalidad de $\mathcal{F}_0$. Se concluye así que $B \cup \bigcup \mathcal{F}_0 = A$. De esto último y de que $B \cap \bigcup \mathcal{F}_0 = \{\theta_A\}$ se sigue que $A = B \uplus \bigcup \mathcal{F}_0$ i,e, B es sumando directo de A. ☐

Corolario 4.3.12. *Sea $A \in S - Act_0$ una acción completamente $0-$reducible. Entonces para cada $B \leq A$ existe $\mathcal{F} \subseteq Simp_0(A)$ tal que $B \cong \bigcup \mathcal{F}$.*

Demostración. Si $B \leq A$, entonces del Teorema anterior se sigue que B es sumando directo de A i,e, existe $C \leq A$ tal que $A = B \uplus C$. A la vez, de acuerdo al Teorema 4.3.11, para $C \leq A$ existe $\mathcal{F} \subseteq Simp_0(A)$ tal que $A = C \uplus \bigcup \mathcal{F}$. Ahora, haciendo uso del Corolario 3.3.30, la igualdad $A = B \uplus C$ implica que $B \cong \dfrac{A}{C}$, y la igualdad $A = C \uplus \bigcup \mathcal{F}$ que $\dfrac{A}{C} \cong \bigcup \mathcal{F}$. Por consiguiente $B \cong \bigcup \mathcal{F}$. ☐

Corolario 4.3.13. *Sea $A \in S - Act_0$ una acción completamente $0-$reducible. Entonces para cada $B \leq A$ se tiene que $\frac{A}{B}$ es completamente $0-$reducible.*

Demostración. Si $B \leq A$, entonces del Teorema 4.3.11 se sigue que B es sumando directo de A, luego existe $C \leq A$ tal que $A = B \uplus C$. Así, del Corolario 3.3.30 se sigue que $\frac{A}{B} \cong C$. Ahora bien, como C es subacción de A la cuál es completamente $0-$reducible, del tercer inciso del Teorema 4.3.6 se sigue que C es completamente $0-$reducible. Por lo tanto la Proposición 4.3.4 implica que $\frac{A}{B}$ es completamente. $0-$reducible ☐

Lema 4.3.14. *Sea $A \in S - Act_0$ tal que cualquiera de sus subacciones es un sumando directo. Entonces:*

1. *Toda subacción B de A tiene esta misma propiedad i,e, para cada $X \leq B$ existe $Y \leq B$ tal que $B = X \uplus Y$.*
2. *Si A tiene más de un elemento, entonces toda subacción cíclica de A con más de un elemento es $0-$simple.*

3. *Si A tiene más de un elemento, entonces toda subacción de A con más de un elemento contiene una subacción $0-$simple con más de un elemento.*

Demostración. 1) Sea $B \leq A$. Si $X \leq B$, es claro entonces que $X \leq A$, luego existe $Z \leq A$ tal que $A = X \uplus Z$. Por lo tanto $B = B \cap A = B \cap (X \cup Z) = (B \cap X) \cup (B \cap Z) = X \cup (B \cap Z)$. De esto último se tiene que para $Y := B \cap Z \leq B$, $B = X \cup Y$. Ahora bien como $X \cap Z = \{\theta_A\}$, entonces $X \cap Y = X \cap (Z \cap B) = (X \cap Z) \cap B = \{\theta_A\} \cap B = \{\theta_A\}$. Por consiguiente $B = X \uplus Y$.
2) Para este inciso haremos uso del axioma de elección (en su versión Lema de Zorn). Suponga que A tiene más de un elemento y sea $B := \langle b \rangle$ una subacción cíclica de A con más de un elemento. Entonces $b \neq \theta_A$. Considerar a la familia

$$\mathcal{F} := \{X \leq B \,|\, b \notin X\}$$

Observar que $\mathcal{F}$ es no vacía, pues $\{\theta_A\} \leq B$ y $b \notin \{\theta_A\}$. Ordenemos a $\mathcal{F}$ mediante la contención y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ arbitraria y no vacía. Como cada elemento de $\mathcal{C}$ es una subacción de B, entonces se sigue que $\bigcup \mathcal{C} \leq B$. Ahora, observar que $b \notin \bigcup \mathcal{C}$, pues de no ser así debe existir $X \in \mathcal{C}$ tal que $b \in X$, pero, por definición de $\mathcal{F}$, ningún elemento de $\mathcal{C}$ puede contener a b, contradicción. Por consiguiente $b \notin \bigcup \mathcal{C}$. De esto último se deduce que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. El argumento anterior implica que toda $\subseteq -$cadena de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior en $\mathcal{F}$, así por el Lema de Zorn existe $X_0 \in \mathcal{F}$ el cuál es $\subseteq -$maximal. Se afirma que $X_0 = \{\theta_A\}$: en efecto, si $X_0 \neq \{\theta_A\}$, entonces existe $a \in X_0$ tal que $a \neq \theta_A$. Es claro que $\langle a \rangle \leq X_0$, además como $X_0 \leq B$, entonces $\langle a \rangle \leq B$. Por lo tanto del inciso 1) se sigue que existe $Y \leq B$ tal que $B = \langle a \rangle \uplus Y$. Afirmamos que $Y \nsubseteq X_0$: en efecto, si $Y \subseteq X_0$, como $X_0 \leq B$, entonces $B = \langle a \rangle \cup Y \subseteq X_0$ y así $b \in X_0$, lo cuál es una contradicción. Por consiguiente $Y \nsubseteq X_0$. Ahora bien, observe que $b \notin Y$, pues si así fuera, entonces $B := \langle b \rangle = Y$ y en consecuencia $\{\theta_A\} = \langle a \rangle \cap Y = \langle a \rangle \cap B = \langle a \rangle$ i,e, $\langle a \rangle = \{\theta_A\}$, de ahí que $a = \theta_A$, pero $a \neq \theta_A$, contradicción. Por lo tanto $b \notin Y$. De esto último se sigue que $b \notin X_0 \cup Y$, además es claro que $X_0 \cup Y \leq B$. Por consiguiente $X_0 \cup Y \in \mathcal{F}$. Más aún, como $Y \nsubseteq X_0$, entonces $X_0 \subsetneq X_0 \cup Y$, pero esto contradice la maximalidad de X_0. Por consiguiente $X_0 = \{\theta_A\}$. Ahora bien, para $X \in \mathcal{F}$ se tiene que $\{\theta_A\} \subseteq X$, luego la maximalidad de $X_0 = \{\theta_A\}$ debe implicar que $X = \{\theta_A\}$ y por lo tanto $\mathcal{F} = \{\{\theta_A\}\}$. Finalmente, sea $Z \leq B$ arbitraria. Si $b \in Z$, entonces es claro que $Z = \langle b \rangle = B$. Si $b \notin Z$, entonces $Z \in \mathcal{F} = \{\{\theta_A\}\}$ y en consecuencia $Z = \{\theta_A\}$. De ahí que B es $0-$simple.
3) Sea B una subacción de A con más de un elemento y sea $b \in B$ con $b \neq \theta_A$. Es claro que $\langle b \rangle \leq B \leq A$. Además $\langle b \rangle$ es una subacción cíclica de A con más de un elemento, por consiguiente del inciso 2) se sigue que $\langle b \rangle$ es $0-$simple. ☐

El recíproco del Teorema 4.3.11 también se verifica:

Teorema. 4.3.15. *Sea $A \in S - Act_0$. Si toda subacción de A es un sumando directo, entonces A es completamente $0-$reducible.*

Demostración. Si $A = \{\theta_A\}$, no es difícil ver que A es completamente $0-$reducible. Suponga ahora que $A \neq \{\theta_A\}$. Si $a \in A$ es tal que $a \neq \theta_A$, del inciso 2) del Teorema 4.3.14 se sigue que $\langle a\rangle$ es $0-$simple. Lo anterior muestra que para cada $a \in A$ existe $X \in Simp_0(A)$ tal que $a \in X$. Por consiguiente $A = \bigcup Simp_0(A) = Zoc_0(A)$ i,e, A es completamente $0-$reducible. ☐

Corolario 4.3.16. *Los siguientes enunciados son equivalentes para $A \in S - Act_0$:*

1. *A es completamente $0-$reducible.*
2. *Cualquier subacción de A es un sumando directo.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 4.3.11 y 4.3.15. ☐

Teorema. 4.3.17. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es un grupo.*
2. *Toda sucesión Rees-exacta*

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

de $S(0)-$morfismos con $A, B, C \in S(0) - Act_0$ se escinde a la derecha (véase Definición 3.3.34).

Demostración. $1) \implies 2)$ Suponga que S es un grupo y sea

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

una sucesión Rees-exacta de $S(0)-$morfismos con $A, B, C \in S(0) - Act_0$. Del Teorema 4.3.10 se deduce que B es completamente $0-$reducible, así el Teorema 4.3.11 implica que $f(A)$ es un sumando directo de B y por lo tanto del Teorema 3.3.31 se sigue que la sucesión $\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$ se escinde a la derecha.
$2) \implies 1)$ Suponga que toda sucesión Rees-exacta

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

de $S(0)-$morfismos con $A, B, C \in S(0) - Act_0$ se escinde a la derecha. Sea $A \in S(0) - Act_0$ arbitraria y $X \leq A$. Del Teorema 2.5.10 se sigue que $X, \frac{A}{X} \in S(0) - Act_0$. Además, de acuerdo con el Ejemplo 3.3.10 la sucesión de $S(0)-$morfismos

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & X \arrow[r, hook, "\iota"] & A \arrow[r, "\pi"] & \frac{A}{X} \arrow[r] & \Theta \end{tikzcd}$$

es Rees-exacta. Así, de la hipótesis se sigue que esta sucesión se escinde a la derecha, o lo que es lo mismo (véase Teorema 3.3.31), que $\iota(X) = X$ es sumando directo de A. De ahí que toda subacción de A es un sumando directo, y en consecuencia del Teorema 4.3.15 se sigue que A es completamente $0-$reducible. Lo anterior exhibe que todo elemento de $S(0) - Act_0$ es completamente $0-$reducible y por lo tanto, el Teorema 4.3.10 implica que S debe ser un grupo. ☐

Teorema. 4.3.18. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es un grupo.*
2. *La $S-$acción regular ${}_SS$ es completamente reducible.*
3. *Toda $S-$acción es completamente reducible.*
4. *La $S(0)-$acción regular $S(0)$ es completamente $0-$reducible.*
5. *Todo elemento de $S(0)-Act_0$ es completamente $0-$reducible.*
6. *Toda sucesión Rees-exacta*

$$\begin{tikzcd}\Theta \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & \Theta\end{tikzcd}$$

de $S(0)-$morfismos con $A, B, C \in S(0)-Act_0$ se escinde a la derecha.

Demostración. Directa de los Teoremas 4.2.10, 4.2.11, 4.3.9, 4.3.10 y 4.3.17. ☐

Observación 4.3.19. *Si definieramos a un monoide completamente reducible como aquel monoide S para el que la $S-$acción ${}_SS$ es completamente reducible, entonces el Teorema anterior nos conduciría a que los monoides completamente reducibles son en realidad los grupos.*

CAPÍTULO 5

ACCIONES INESCINDIBLES

Definición 5.0.1. *Sea A una $S-$acción.*

1. *Una descomposición de A es un par de subacciones X y Y tales que $A = X \cup Y$ y $X \cap Y = \emptyset$.*
2. *Se dice que A se descompone si admite una descomposición.*
3. *Se dice que A es inescindible si no admite una descomposición.*

Observación 5.0.2. *Todo elemento de $S - Act_0$ es una $S-$acción inescindible. En efecto, si $A \in S - Act_0$, entonces cualquier subacción de A contiene a θ_A (el elemento cero), y en particular la intersección de cualesquiera dos subacciones es no vacía. Debido a esto, A no puede admitir una descomposición.*

Proposición 5.0.3. *Toda $S-$acción completamente reducible que no sea simple se descompone.*

Demostración. Sea A una $S-$acción completamente reducible y no simple. Entonces $A = \bigcup Simp(A)$ y además $Simp(A)$ (la colección de todas las subacciones simples de A) debe tener más de un elemento, pues si $Simp(A)$ tuviera un solo elemento, digamos B, entonces $A = \bigcup Simp(A) = \bigcup\{B\} = B$, de donde se sigue que A es simple, lo cuál no es cierto. Por consiguiente $Simp(A)$ tiene más de un elemento. De esto último se sigue que para $X \in Simp(A)$, el conjunto $\mathcal{G} := \{Y \in Simp(A) \,|\, Y \neq X\}$ es no vacío y además, $Z := \bigcup \mathcal{G}$ es una subacción de A. Ahora bien, no es difícil ver que $Simp(A) = \{X\} \cup \mathcal{G}$, luego $A = \bigcup Simp(A) = \bigcup(\{X\} \cup \mathcal{G}) = X \cup \bigcup \mathcal{G} = X \cup Z$. Finalmente, del Lema 4.2.2 se sigue que para cada $Y \in \mathcal{G}$, $X \cap Y = \emptyset$, y por lo tanto $X \cap Z = X \cap \bigcup \mathcal{G} = \emptyset$. De ahí que X y Z forman una descomposición de A. □

Proposición 5.0.4. *Toda $S-$acción cíclica es inescindible.*

Demostración. Sea $A = \langle a \rangle$ una $S-$acción cíclica y suponga que A se descompone. Entonces existen subacciones X y Y tales que $A = X \cup Y$ y $X \cap Y = \emptyset$. Luego, para $a \in A$ se tiene que $a \in X$ ó $a \in Y$. Suponga sin pérdida de generalidad, que $a \in X$. En este caso como X es subacción, entonces $sa \in X$ para cada $s \in S$ y por lo tanto $A = X$. Así que $\emptyset = X \cap Y = A \cap Y = Y$, lo cuál es una contradicción, pues por definición, toda subacción es no vacía. De lo anterior se deduce que $A = \langle a \rangle$ no admite una descomposición. ☐

Teorema. 5.0.5. *Sean A y B dos $S-$acciones con $A \cong B$. Si A es inescindible, entonces B es inescindible.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de acciones y suponga que B no es inescindible i,e, suponga que B admite una descomposición. Entonces $B = X \cup Y$ para algunas $X, Y \leq B$ con $X \cap Y = \emptyset$. Entonces $A = f^{-1}(B) = f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ con $f^{-1}(X)$ y $f^{-1}(Y)$ dos subacciones de A tales que $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = \emptyset$, pero esto no es posible, pues A es inescindible. Por consiguiente B es inescindible. ☐

Lema 5.0.6. *Sea A una $S-$acción y $(B_i)_{i \in I}$ una colección de subacciones inescindibles de A. Si $\bigcap\limits_{i \in I} B_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} B_i$ es una subacción inescindible de A.*

Demostración. Para llegar a una contradicción, suponga que $\bigcup\limits_{i \in I} B_i$ admite una descomposición. Bajo este supuesto, existen subacciones X y Y tales que $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = X \cup Y$ y $X \cap Y = \emptyset$. Tómese $a \in \bigcap\limits_{i \in I} B_i$. Como $\bigcap\limits_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i = X \cup Y$, entonces $a \in X$ ó $a \in Y$. Puede suponerse, sin perder generalidad, que $a \in X$. Así, de que $a \in \bigcap\limits_{i \in I} B_i$ se sigue que para cada $i \in I$, $a \in X \cap B_i$ y en particular $X \cap B_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Afirmamos que para cada $i \in I$, $Y \cap B_i = \emptyset$: en efecto, si para algún $j \in I$ ocurre que $Y \cap B_j \neq \emptyset$, entonces $Y \cap B_j$ es subacción de B_j, además como $X \cap B_j \neq \emptyset$, entonces $X \cap B_j$ también es subacción de B_j. Más aún $(X \cap B_j) \cap (Y \cap B_j) = (X \cap Y) \cap B_j = \emptyset \cap B_j = \emptyset$ y $B_j = B_j \cap \bigcup\limits_{i \in I} B_i = B_j \cap (X \cup Y) = (X \cap B_j) \cap (Y \cap B_j)$, de donde se sigue que $X \cap B_j$ y $Y \cap B_j$ forman una descomposición de B_j, lo cuál no es posible pues B_j es inescindible. Por consiguiente para cada $i \in I$, $Y \cap B_i = \emptyset$. De ahí que $Y = Y \cap \bigcup\limits_{i \in I} B_i = \bigcup\limits_{i \in I} (Y \cap B_i) = \bigcup\limits_{i \in I} \emptyset = \emptyset$, contradicción, pues Y es una subacción y las subacciones son, por definición, no vacías. En definitiva $\bigcup\limits_{i \in I} B_i$ es inescindible. ☐

5.1. Un Teorema de descomposición

No toda $S-$acción es inescindible, sin embargo toda $S-$acción puede ser escrita (de manera única) como unión de subacciones inescindibles.

Teorema. 5.1.1. *Para cada $S-$acción A existe una única partición de A cuyos elementos son subacciones inescindibles.*

Demostración. Existencia: Sobre la $S-$acción A se define la siguiente relación:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{existe } B \leq A \text{ inescindible tal que } x, y \in B$$

De su propia definición, es evidente que $\sim$ es simétrica i,e, $x \sim y$ implica que $y \sim x$. Ahora bien, si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen subacciones inescindibles X y Y tales que $x, y \in X$ y $y, z \in Y$. De ahí que $y \in X \cap Y$ y $x, z \in X \cup Y$. En particular $X \cap Y \neq \emptyset$ y por lo tanto del Lema 5.0.6 se sigue que $X \cup Y$ es inescindible. Por consiguiente $x \sim z$ y así $\sim$ es transitiva. Más aún, de acuerdo a la Proposición 5.0.4, para cada $x \in A$ la subacción $\langle x \rangle$, que tiene a x como elemento, es inescindible, de manera que para cada $x \in A$, $x \sim x$. Por consiguiente $\sim$ es reflexiva y en consecuencia es una relación de equivalencia. Para cada $x \in A$ denotemos por $[x]$ a la clase de equivalencia de x con respecto de $\sim$ y defínase $B_x := \bigcup\{B \leq A \,|\, B \text{ es inescindible y } x \in B\}$. Observe que B_x es unión de una familia de subacciones inescindibles cuya intersección no es vacía (pues cada una tiene a x), así el Lema 5.0.6 implica que cada B_x es una subacción inescindible de A. Afirmamos que para cada $x \in A$, $[x] = B_x$: en efecto, si $y \in [x]$, entonces $y \sim x$ y por lo tanto existe $B' \leq A$ inescindible tal que $x, y \in B'$, de ahí que $B' \in \{B \leq A \,|\, B \text{ es inescindible y } x \in B\}$ y así $y \in B_x$. Por consiguiente $[x] \subseteq B_x$. Si ahora $z \in B_x$, entonces existe $X \in \{B \leq A \,|\, B \text{ es inescindible y } x \in B\}$ tal que $z \in X$, pero X es una subacción inescindible para la que $x \in X$, luego $z, x \in X$ y en consecuencia $z \sim x$. De ahí que $z \in [x]$ y por lo tanto $B_x \subseteq [x]$. En definitiva $[x] = B_x$. De esto último y de que $\sim$ sea una relación de equivalencia, se sigue que la colección $\mathcal{F} := \{[x] \,|\, x \in R\}$ (con R un sistema completo de representantes de $\sim$) es una colección de subacciones inecindibles que forma una partición de A. *Unicidad*: Suponga que $\mathcal{G}$ es otra partición de A cuyos elementos son subacciones inescindibles de A. Afirmación: si $X \in \mathcal{G}$, entonces para cada $x \in X$, $X = [x]$. En efecto, sean $X \in \mathcal{G}$ y $x \in X$. Como X es inescindible, entonces $X \in \{B \leq A \,|\, B \text{ es inescindible y } x \in B\}$ y por lo tanto $X \subseteq B_x = [x]$. Ahora bien, para exhibir la otra contención se tiene que $[x] = [x] \cap A = [x] \cap \bigcup\limits_{Y \in \mathcal{G}} Y = \bigcup\limits_{Y \in \mathcal{G}} ([x] \cap Y) = ([x] \cap X) \cup \bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} ([x] \cap Y)$ y además $[x] \cap X \neq \emptyset$, pues $x \in [x] \cap X$. Más aún, observar que $([x] \cap X) \cap \bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} ([x] \cap Y) = \bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} ([x] \cap X \cap Y) = \bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} ([x] \cap \emptyset) = \bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} \emptyset = \emptyset$. Así que como $[x]$ es inescindible y $[x] \cap X \neq \emptyset$, debe suceder que $\bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} ([x] \cap Y) = \emptyset$ (pues de lo contrario $([x] \cap X)$ y $\bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} ([x] \cap Y)$ formarían una descomposición de $[x]$). De esto último la igualdad $[x] = ([x] \cup X) \cup \bigcup\limits_{\substack{Y \in \mathcal{G} \\ Y \neq X}} ([x] \cap Y)$ toma la forma $[x] = [x] \cap X$ y por consiguiente $[x] \subseteq X$. De ahí que $X = [x]$. Lo anterior exhibe que todo elemento de $\mathcal{G}$ es de la forma $[x]$ y por lo tanto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Para concluir, si $x \in R$ es arbitrario, de la igualdad $A = \bigcup \mathcal{G}$ se sigue que existe $X \in \mathcal{G}$ para el cuál $x \in X$, pero como vimos, sucede en este caso que $[x] = X$ y en consecuencia $[x] \in \mathcal{G}$. Por consiguiente $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y así $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. $\square$

Observación 5.1.2. *El Teorema anterior asegura que dada una acción, siempre puede construirse una (única) familia de subacciones inescindibles que son disjuntas por pares y cuya unión es toda la acción original. Precisamente, que los elementos de esta familia sean subacciones disjuntas por pares cuya unión es el total, puede conducir a pensar que toda acción admite una descomposición, pero como vimos, no toda acción se descompone. Lo que sucede es que para acciones inescindibles la familia que garantiza el Teorema 5.1.1 debe consistir de un solo elemento, a saber, la acción dada.*

CAPÍTULO 6

ACCIONES F.G, NOETHERIANAS Y ARTINIANAS

El presente capítulo es dedicado a aquellas acciones que satisfacen ciertas propiedades de finitud con respecto a subacciones. Lo anterior está en analogía con los conceptos de módulo Noetheriano y Artiniano. Es importante mencionar que para acciones, existe también la noción de acción Noetheriana y Artiniana con respecto de congruencias (por ejemplo, véase la referencia [2]), pero aquí no nos ocuparemos de esto, salvo de unos pocos resultados.

6.1. Acciones finitamente generadas

Definición 6.1.1. *Sea A una $S-$acción y $X \subseteq A$ no vacío. Se dice que*

1. *X genera a A si $A = \langle X \rangle$ (véase Teorema 2.2.5).*
2. *A es finitamente generada (o f.g) si A es generada por un subconjunto finito.*
3. *A es cíclica si A es generada por un subconjunto de un solo elemento.*

Lema 6.1.2. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un $S-$morfismo.*

1. *Si A es f.g (cíclica), entonces $f(A)$ es f.g (cíclica).*
2. *Si f es un isomorfismo y A es f.g, entonces B es f.g.*
3. *Si $A = \langle X \rangle$ y $g : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo tal que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in X$, entonces $f = g$.*
4. *Si f es sobreyectivo y $A = \langle X \rangle$, entonces $B = \langle f(X) \rangle$*

Demostración. 1) Si $A = \langle X \rangle$, entonces todo elemento de A es de la forma sx para algún $x \in X$ y $s \in S$. De ahí que todo elemento de $f(A)$ es de la forma $sf(x)$ (con $x \in X$ y $s \in S$) y en consecuencia $f(A) = \langle f(X) \rangle$. Ahora, si X es finito debe suceder que $f(X)$ es finito. En consecuencia, la imagen homomorfa de una acción f.g es f.g.
2) Se sigue directamente del inciso anterior.
3) Suponga que $A = \langle X \rangle$ y sea $g : A \longrightarrow B$ un $S-$morfismo tal que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in X$. Todo elemento de A es de la forma $a = sx$ para algún $x \in X$ y $s \in S$, luego $f(a) = f(sx) = sf(x) = sg(x) = g(sx) = g(a)$, de donde $f = g$.
4) Si $A = \langle X \rangle$, del primer inciso se sigue que $f(A) = \langle f(X) \rangle$, de manera que si f es sobreyectiva, entonces $B = f(A) = \langle f(X) \rangle$. □

Observación 6.1.3. *Si A es una $S-$acción y X es un subconjunto no vacío de A, entonces del Teorema 2.2.5 se tiene que $\langle X \rangle = \{sx \mid s \in S, x \in X\}$. Por otra parte, no es difícil ver que $\{sx \mid s \in S, x \in X\} = \bigcup_{x \in X} \langle x \rangle$, luego $\langle X \rangle = \bigcup_{x \in X} \langle x \rangle$ i,e, la subacción generada por X coincide con la unión de todas las subacciones cíclicas generadas por elementos de X.*

Definición 6.1.4. *Si A es una $S-$acción, se dice que $X \leq A$ es maximal si $X \neq A$ y no existe $Y \leq A$ tal que $X < Y < A$, o equivalentemente, si $X \neq A$ y para cada $Y \leq A$, $X \leq Y$ implica que $X = Y$ ó $Y = A$.*

Lema 6.1.5. *Sea $\mathcal{C}$ una $\subseteq -$cadena de subconjuntos de un conjunto A y suponga que X es un subconjunto finito (no vacío) de A con la propiedad de que para cada $x \in X$ hay un $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Entonces existe $Z \in \mathcal{C}$ para el que $X \subseteq Z$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $|X|$: para $|X| = 1$ el resultado es inmediato. Suponga ahora que el resultado es válido para $|X| = n$ con $n \geq 2$ y sea X' un subconjunto de A con $n+1$ elementos tal que para cada $x \in X'$ hay un $C \in \mathcal{C}$ con $x \in C$. Tómese $x \in X'$ arbitrario y sea $X := X' - \{x\}$. Debido a que para cada elemento de X' hay un elemento de $\mathcal{C}$ que lo contiene, en particular lo anterior ocurre para cada elemento de X, luego como $|X| = n$, de la hipótesis inductiva se sigue que existe $Z \in \mathcal{C}$ tal que $X \subseteq Z$. Por otra parte, para $x \in X'$ hay un $C \in \mathcal{C}$ con $x \in C$, y como $\mathcal{C}$ es una $\subseteq -$cadena, entonces $Z \subseteq C$ ó $C \subseteq Z$. Cuando $Z \subseteq C$, ocurre que $X \subseteq C$ y por consiguiente $X' = X \cup \{x\} \subseteq C$. En el caso restante, cuando $C \subseteq Z$ se deduce de manera similar que $X' \subseteq Z$. Por lo tanto el resultado es válido para $n+1$ y con ello es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema. 6.1.6. *Si A es una $S-$acción f.g, entonces toda subacción propia está contenida en una subacción maximal.*

Demostración. Suponga que $A = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ y sea $B \leq A$ con $B \neq A$. Considere a la familia

$$\mathcal{F} := \{X \leq A \mid X \neq A \text{ y } B \subseteq X\}$$

Es claro que $B \in \mathcal{F}$, luego $\mathcal{F}$ es no vacía. Ahora bien, sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una $\subseteq -$cadena. Se tiene que $\bigcup \mathcal{C} \leq A$ y además, como todo elemento de $\mathcal{C}$ contiene a B, entonces $B \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Más aún, se tiene que $\bigcup \mathcal{C} \neq A$. En efecto, si por el contrario $\bigcup \mathcal{C} = A$, entonces para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x_i \in C$, así del Lema 6.1.5 se deduce que existe $Z \in \mathcal{C}$ tal que $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq Z$, lo que implica que $A = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle = Z$, lo cuál es una contradicción, pues los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos propios de A. Por consiguiente $\bigcup \mathcal{C} \neq A$ y así $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Si ordenamos a $\mathcal{F}$ mediante la contención, del argumento anterior se deduce que toda $\subseteq -$cadena de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior. Por lo tanto, del Lema de Zorn se sigue que existe $X_0 \in \mathcal{F}$ que es $\subseteq -$maximal. Veamos que X_0 es subacción maximal de A: sea Y una subacción de A tal que $X_0 \subseteq Y$. Si $Y \neq A$, entonces $Y \in \mathcal{F}$ y así la maximalidad de X_0 implica que $X_0 = Y$. Por consiguiente X_0 es una subacción maximal de A que contiene a B. □

Corolario 6.1.7. *Todo elemento f.g de $(S-Act)_0$ (véase Definición 2.5.6) diferente de la acción cero, contiene (al menos) una subacción maximal.*

Demostración. Si $A \in (S - Act)_0$ no es la acción cero, entonces el resultado se sigue de aplicar el Teorema anterior a $\{\theta_A\}$, que es una subacción propia de A. □

Ejemplos 6.1.8.

1. *Toda $S-$acción finita es f.g, pues si A es una $S-$acción finita, entonces la igualdad $A = \langle A \rangle$ implica que A es f.g.*

2. *Para cada monoide S existe una $S-$acción que no es f.g. En efecto, sea I un conjunto infinito y sea $A := \bigcup\limits_{i\in I}(S\times\{i\})$. Para cada $s \in S$ y $(x, i) \in A$ se define $s(x, i) := (sx, i)$. Con esto A es una $S-$acción. Ahora bien, sea $X \subseteq A$ un conjunto generador para A i,e, tal que $A = \langle X \rangle$. Tómese $i \in I$ arbitrario y considere al conjunto $X_i := \{x \in S \,|\, (x, i) \in X\}$. Como X genera a A, entonces existen $s \in S$ y $(x, j) \in X$ tales que $(e, i) = s(x, j) = (sx, j)$, lo que obliga a que $i = j$, y por lo tanto $x \in X_i$. De lo anterior se deduce que para cada $i \in I$ el conjunto X_i es no vacío. Luego, por el axioma de elección, existe una función $f : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ tal que para cada $i \in I$, $f(i) \in X_i$ o lo que es lo mismo, para cada $i \in I$, $(f(i), i) \in X$. Ahora bien, la función $\alpha : I \longrightarrow X$ dada por $\alpha(i) := (f(i), i)$ es claramente una función inyectiva, de manera que entonces X tiene al menos tantos elementos como el conjunto I, el cuál es infinito. Esto exhibe que todo conjunto generador de A debe tener una infinidad de elementos y por consiguiente A no puede ser f.g.*

3. *Considere al monoide $(\mathbb{Z}, \cdot)$ donde $\cdot$ denota el producto usual entre enteros. El conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales es una $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción mediante la multiplicación usual. Afirmación: si X genera a $\mathbb{Q}$, entonces para cada $x_0 \in X$ el conjunto $X - \{x_0\}$ también genera a $\mathbb{Q}$. En efecto, observe primero que X debe tener más de un elemento, pues si $X = \{w\}$, puede suponerse que $w = \frac{a}{b}$ con $mcd(a, b) = 1$, así para un entero que no es divisible por a, digamos z, debe existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $z = n\frac{a}{b}$, luego $na = bz$ y por lo*

tanto a divide a bz, pero que $mcd(a,b)=1$ implica que a divide a z, contradicción. Por consiguiente X debe tener más de un elemento. Así, sea $x_0\in X$ arbitrario. Si $x_0=0$, entonces para $x\in X$ con $x\neq 0$, es claro que $0=0x$ y por lo tanto $x_0=0\in\langle X-\{x_0\}\rangle$. Si $x_0\neq 0$, para un entero n con $n\geq 2$ existen $m\in\mathbb{Z}$ y $x\in X$ tales que $\frac{x_0}{n}=mx$, y como $x_0\neq 0$, entonces $m\neq 0$ y así $\frac{x_0}{nm}=x\in X$. Además, como $n\geq 2$, entonces $nm\neq 1$ y por lo tanto $\frac{x_0}{nm}\neq x_0$. De ahí que $\frac{x_0}{nm}\in X-\{x_0\}$ y así, la igualdad $x_0=(nm)\frac{x_0}{nm}$ implica que $x_0\in\langle X-\{x_0\}\rangle$. De lo anterior se deduce que para cada $x_0\in X$, $x_0\in\langle X-\{x_0\}\rangle$ y en consecuencia $\langle x_0\rangle\leq\langle X-\{x_0\}\rangle$. De ahí que $\mathbb{Q}=\langle X\rangle=\langle(X-\{x_0\})\cup\{x_0\}\rangle=\langle X-\{x_0\}\rangle\cup\langle x_0\rangle=\langle X-\{x_0\}\rangle$, como se afirmaba. Veamos ahora que $\mathbb{Q}$ no tiene subacciones maximales: en efecto, si $H\neq\mathbb{Q}$ es subacción maximal de $\mathbb{Q}$, sea $x_0\in\mathbb{Q}$ tal que $x_0\notin H$ y considere a la subacción $K:=H\cup\langle x_0\rangle$. Es claro que $H\neq K$ y además $H\leq K$, luego de que H es maximal se sigue que $K=\mathbb{Q}$ y por consiguiente $\mathbb{Q}=K=\langle K\rangle=\langle K-\{x_0\}\rangle=\langle H\rangle=H$, lo cuál contradice a que $H\neq\mathbb{Q}$. Por consiguiente $\mathbb{Q}$ no posee subacciones maximales. En particular, como $\{0\}$ es subacción propia de $\mathbb{Q}$, el Teorema 6.1.6 implica que $\mathbb{Q}$ no es f.g.

Proposición 6.1.9. *Sea A una $S-$acción y $B\leq A$.*

1. *Si A es f.g, entonces $\dfrac{A}{B}$ es f.g.*
2. *Si B y $\dfrac{A}{B}$ son f.g, entonces A es f.g.*

Demostración. 1) Si A es f.g, el resultado se sigue de aplicar el primer inciso del Lema 6.1.2 al $S-$morfismo sobreyectivo $\pi:A\longrightarrow\dfrac{A}{B}$.

2) Suponga que $B=\langle b_1,b_2,...,b_n\rangle$ y $\dfrac{A}{B}=\langle[x_1],[x_2],...,[x_m]\rangle$. Considere al conjunto $X:=\{b_1,b_2,...,b_n\}\cup\{x_1,x_2,...,x_m\}$. Afirmamos que X genera a A: en efecto, para $a\in A$ arbitrario se tiene que $[a]\in\dfrac{A}{B}$ y por lo tanto $[a]=[x_i]$ para algún $1\leq i\leq m$. De ahí que $(a,x_i)\in\rho_B$ y por lo tanto $a,x_i\in B$ ó $a=x_i$. En el segundo caso se sigue que $a=x_i\in\{x_1,x_2,...,x_m\}\subseteq\langle X\rangle$, y en el primero se sigue que $a\in B=\langle b_1,b_2,...,b_n\rangle\subseteq\langle X\rangle$. Por consiguiente $A=\langle X\rangle$ y así A es f.g. □

Teorema. 6.1.10. *Sea $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ una sucesión Rees-exacta con f inyectivo y g sobreyectivo. Si A y C son f.g, entonces B es f.g.*

Demostración. De que f sea inyectivo se sigue que $A\cong im(f)$ y de que g sea sobreyectivo se sigue que $C\cong\dfrac{B}{Ker(g)}$ (véase Corolario 3.1.2). Ahora bien, como la sucesión $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ es Rees-exacta, entonces $\mathcal{K}_{im(f)}=Ker(g)$ y en consecuencia $\dfrac{B}{im(f)}=$

$\frac{B}{Ker(g)}$. Así, de que A y C son f.g, el segundo inciso del Lema 6.1.2 asegura que $im(f)$ y $\frac{B}{im(f)}$ son también f.g, de manera que del segundo inciso de la Proposición 6.1.9 se obtiene que B es f.g. $\square$

6.2. Acciones Noetherianas y Artinianas

Definición 6.2.1. *Se dice que la $S-$acción A es:*

1. *Noetheriana si toda colección no vacía de subacciones de A tiene elementos $\subseteq -$maximales.*

2. *Artiniana si toda colección no vacía de subacciones de A tiene elementos $\subseteq -$minimales.*

3. *Además, se dice que el monoide S es Noetheriano (Artiniano) izquierdo si la $S-$acción ${}_SS$ es Noetheriana (Artiniana).*

Definición 6.2.2. *Se dice que la $S-$acción A satisface*

1. *la condición de cadena ascendente (CCA) si para toda cadena de subacciones de A de la forma*

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots \subseteq \ldots$$

   existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$, $B_n = B_{n+j}$ i,e, si toda sucesión creciente de subacciones de A se estaciona.

2. *la condición de cadena descendente (CCD) si para toda cadena de subacciones de A de la forma*

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots \supseteq \ldots$$

   existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$, $B_n = B_{n+j}$ i,e, si toda sucesión decreciente de subacciones de A se estaciona.

Teorema. 6.2.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción A:*

1. *A es Noetheriana.*

2. *A satisface CCA.*

3. *Toda subacción de A es f.g.*

Demostración. $1) \implies 2)$ Suponga que A es Noetheriana y sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subacciones de A. Se tiene que $\mathcal{F} := \{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una colección no vacía de subacciones de A, y así de que A es Noetheriana se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ para el que $X_N \in \mathcal{F}$ es $\subseteq -$maximal. Veamos que la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento: para $j \in \mathbb{N}$ arbitrario se tiene que $X_N \subseteq X_{N+j}$, pues la sucesión es creciente. Por otra parte, de que X_N es $\subseteq -$maximal, la relación $X_N \subseteq X_{N+j}$ implica que $X_N = X_{N+j}$ y por consiguiente $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento. De ahí que A satisface la CCA.
$2) \implies 3)$ Suponga que A satisface la CCA y sea $B \leq A$ arbitraria. Es preciso exhibir que B es f.g. Para tal fin, supongamos a manera de obtener una contradicción, que B no es f.g. Tómese $x_1 \in B$ arbitrario. Como B no es f.g, entonces $\langle x_1 \rangle < B$ y así existe $x_2 \in B$ tal que $x_2 \notin \langle x_1 \rangle$. De nuevo, como B no es f.g, se tiene que $\langle x_1, x_2 \rangle < B$ y así, existe $x_3 \in B$ tal que $x_3 \notin \langle x_1, x_2 \rangle$. Y otra vez, como B no es f.g, entonces $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle < B$ y así, existe $x_4 \in B$ tal que $x_4 \notin \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$. Continuando de esta forma podemos construir una sucesión de elementos de B, digamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con la propiedad de que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \notin \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. Ahora bien, no es difícil ver que

$$\langle x_1 \rangle \subseteq \langle x_1, x_2 \rangle \subseteq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subseteq ... \subseteq ...$$

Así, como A satisface la CCA, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\langle x_1, x_2, ..., x_N \rangle = \langle x_1, x_2, ..., x_{N+j} \rangle$. Luego, para $j = 1$ se tiene que $\langle x_1, x_2, ..., x_N \rangle = \langle x_1, x_2, ..., x_{N+1} \rangle$ y por consiguiente $x_{N+1} \in \langle x_1, x_2, ..., x_N \rangle$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto B es f.g.
$3) \implies 1)$ Suponga que toda subacción de A es f.g y sea $\mathcal{F}$ una colección no vacía de subacciones de A. Tómese a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una $\subseteq -$cadena arbitraria de $\mathcal{F}$. Puesto que los elementos de $\mathcal{C}$ son subacciones de A, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es subacción de A y así $\bigcup \mathcal{C}$ debe ser f.g. Luego, existe $X \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ finito tal que $\bigcup \mathcal{C} = \langle X \rangle$. De ahí que para cada $x \in X$ existe $C \in \mathcal{C}$ con $x \in C$, pero como $\mathcal{C}$ es una $\subseteq -$cadena, el Lema 6.1.5 implica que existe $Z \in \mathcal{C}$ para el cuál $X \subseteq Z$, de donde se sigue que $\bigcup \mathcal{C} = \langle X \rangle = Z$. Ahora bien, de que $Z \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, se deduce que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. El argumento anterior muestra que si se ordena a $\mathcal{F}$ con la contención, entonces toda $\subseteq -$cadena de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior en $\mathcal{F}$, luego, el Lema de Zorn garantiza que $\mathcal{F}$ tiene elementos $\subseteq -$maximales. Por consiguiente A es Noetheriana. ☐

Con respecto a las acciones Artinianas tenemos el siguiente resultado.

Teorema. 6.2.4. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción A:*

1. *A es Artiniana.*
2. *A satisface CCD.*

Demostración. $1) \implies 2)$ Suponga que A es Artiniana y sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subacciones de A. Se tiene que $\mathcal{F} := \{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es una colección no vacía de subacciones de A, y así de que A es Artiniana se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ para el que $X_N \in \mathcal{F}$ es $\subseteq -$minimal. Veamos que la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento: para $j \in \mathbb{N}$ arbitrario se tiene que $X_{N+j} \subseteq X_N$, pues la sucesión es decreciente. Por otra parte, de que X_N es $\subseteq -$minimal, la relación $X_{N+j} \subseteq X_N$ implica que $X_N = X_{N+j}$

y por consiguiente la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento. De ahí que A satisface la CCD.
2) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que A satisface la CCD y sea $\mathcal{G}$ una colección no vacía de subacciones de A. Suponga que $\mathcal{G}$ no posee elementos $\subseteq -$minimales y sea $X_1 \in \mathcal{G}$ arbitrario. Entonces para $X_1 \in \mathcal{G}$ existe $X_2 \in \mathcal{G}$ tal que $X_2 \subsetneq X_1$. Ahora bien, para $X_2 \in \mathcal{G}$ existe $X_3 \in \mathcal{G}$ tal que $X_3 \subsetneq X_2$, y a la vez para $X_3 \in \mathcal{G}$ existe $X_4 \in \mathcal{G}$ tal que $X_4 \subsetneq X_3$. Continuando de esta manera podemos construir una sucesión decreciente de subacciones de A que no se estaciona, pero esto contradice al supuesto de que A satisface la CCD. Por consiguiente $\mathcal{G}$ tiene elementos $\subseteq -$minimales y así A es Artiniana. ☐

Lema 6.2.5. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un $S-$morfismo sobreyectivo.*

1. *Si A es Noetheriana, entonces B es Noetheriana.*
2. *Si A es Artiniana, entonces B es Artiniana.*

En particular, ser Noetheriana (Artiniana) es invariante bajo isomorfismo.

Demostración. Suponga que A es Noetheriana (Artiniana) y sea $\mathcal{G}$ una colección no vacía de subacciones de B. De acuerdo al Lema 2.3.5, para cada $Y \in \mathcal{G}$ se tiene que $f^{-1}(Y) \leq A$, luego $\mathcal{H} := \{f^{-1}(Y) \,|\, Y \in \mathcal{G}\}$ es una colección no vacía de subacciones de A, y así como A es Noetheriana (Artiniana) existe $Y_0 \in \mathcal{G}$ para el que $f^{-1}(Y_0) \in \mathcal{H}$ es $\subseteq -$maximal ($\subseteq -$minimal). Ahora, si $Y \in \mathcal{G}$ es tal que $Y_0 \leq Y$ ($Y \leq Y_0$), entonces $f^{-1}(Y_0) \leq f^{-1}(Y)$ ($f^{-1}(Y) \leq f^{-1}(Y_0)$), y así de que $f^{-1}(Y_0)$ es $\subseteq -$maximal ($\subseteq -$minimal) se sigue que $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y_0)$, pero al ser f sobreyectiva esta última igualdad implica que $Y = Y_0$. Por consiguiente $Y_0 \in \mathcal{G}$ es $\subseteq -$maximal ($\subseteq -$minimal). En consecuencia B es Noetheriana (Artiniana). ☐

Usando ahora el hecho de que las acciones Noetherianas (Artinianas) son aquellas que satisfacen la CCA (CCD), a continuación se da otra caracterización más para este tipo de acciones. La demostración del siguiente Teorema se hace simúltaneamente tanto para las acciones Noetherianas como las Artinianas, escrbiendo entre paréntesis la parte correspondiente a las Artinianas.

Teorema. 6.2.6. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción A y $B \leq A$:*

1. *A es Noetheriana (Artiniana).*
2. *B y $\dfrac{A}{B}$ son Noetherianas (Artinianas).*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Suponga que A es Noetheriana (Artiniana) y sea $\mathcal{F}$ una colección no vacía de subacciones de B. Puesto que toda subacción de B es también subacción de A, entonces $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de subacciones de A, y así como A es Noetheriana (Artiniana) se sigue que $\mathcal{F}$ tiene elementos $\subseteq -$maximales ($\subseteq -$minimales). Por consiguiente B es Noetheriana (Artiniana). Ahora, aplicando el Lema 6.2.5 al $S-$morfismo sobreyectivo

$\pi : A \longrightarrow \dfrac{A}{B}$ se deduce que $\dfrac{A}{B}$ es Noetheriana (Artiniana).

2) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que B y $\dfrac{A}{B}$ son Noetherianas (Artinianas) y sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente (decreciente) de subacciones de A. Es preciso exhibir que esta sucesión se estaciona. Para ello, considere al $S-$morfismo canónico $\pi : A \longrightarrow \dfrac{A}{B}$. Puesto que los $S-$morfismos mandan subacciones en subacciones, se tiene que la sucesión $(\pi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente (decreciente) de subacciones de $\dfrac{A}{B}$, la cuál es Noetheriana (Artiniana), por lo tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\pi(X_M) = \pi(X_{M+j})$. Considerar ahora al conjunto $\mathbb{T} := \{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n \cap B \neq \emptyset\}$. Si ningún elemento de la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intersecta a B i,e, si ocurre que $\mathbb{T} = \emptyset$, entonces la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $M-$ésimo elemento. En efecto, sea $j \in \mathbb{N}$ arbitrario. Como la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (decreciente), entonces $X_M \subseteq X_{M+j}$ ($X_{M+j} \subseteq X_M$). Ahora bien, para $y \in X_{M+j}$ ($y \in X_M$) arbitrario se tiene que $[y] = \pi(y) \in \pi(X_{M+j}) = \pi(X_M)$ ($[y] = \pi(y) \in \pi(X_M) = \pi(X_{M+j})$) y así existe $x \in X_M$ ($x \in X_{M+j}$) tal que $[y] = \pi(x) = [x]$, luego $(x, y) \in B \times B$ ó $x = y$, pero $X_M \cap B = \emptyset = X_{M+j} \cap B$, así el caso $(x, y) \in B \times B$ no puede ocurrir, de tal forma que entonces $x = y$ y por consiguiente $y = x \in X_M$ ($y = x \in X_{M+j}$). De ahí que $X_{M+j} \subseteq X_M$ ($X_M \subseteq X_{M+j}$) y en consecuencia $X_M = X_{M+j}$. Esto exhibe que la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $M-$ésimo elemento. En el caso en que $\mathbb{T} \neq \emptyset$ i,e, cuando si hay elementos de la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que intersectan a B se procede como sigue: puesto que $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado y $\mathbb{T}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, puede suponerse que $\mathbb{T} = \{k_1, k_2, ..., k_n, ...\}$ con $k_1 \leq k_2 \leq k_3 ... \leq k_n \leq ...$. Ahora bien, debido a que los elementos de $\mathbb{T}$ son aquellos índices en los que la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si intersecta a B, es claro entonces que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{k_n} \cap B$ es una subacción de B, luego $(X_{k_n} \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subacciones de B. Más aún, como $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (decreciente), entonces $(X_{k_n} \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (decreciente), y por lo tanto de que B es Noetheriana (Artiniana), se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_{k_N} \cap B = X_{k_{N+i}} \cap B$. Sea $L := max\{M, 1 + k_N\}$. Afirmamos que la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $L-$ésimo elemento: en efecto, sea $j \in \mathbb{N}$ arbitrario. Como $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (decreciente), entonces $X_L \subseteq X_{L+j}$ ($X_{L+j} \subseteq X_L$). Para $z \in X_{L+j}$ ($z \in X_L$) arbitrario se tiene que como $M \leq L < L + j$, entonces $\pi(X_L) = \pi(X_M) = \pi(X_{L+j})$ y así $[z] = \pi(z) \in \pi(X_{L+j}) = \pi(X_L)$ ($[z] = \pi(z) \in \pi(X_L) = \pi(X_{L+j})$), de manera que existe $x \in X_L$ ($x \in X_{L+j}$) para el que $[z] = \pi(x) = [x]$. De esto último se sigue que $(x, z) \in B \times B$ o bien $x = z$. Si ocurre que $x = z$, entonces $z = x \in X_L$ ($z = x \in X_{L+j}$) y por lo tanto $z \in X_L$ ($z \in X_{L+j}$). Para el caso en que $(x, z) \in B \times B$, se tiene que ambas intersecciones $X_{L+j} \cap B$ y $X_L \cap B$ son no vacías y por lo tanto $L, L + j \in \mathbb{T}$. De ahí que existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $L = k_r$ y $L + j = k_s$. Más aún, como $\mathbb{T} = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y $L < L + j$, entonces $r \leq s$. Además tiene que suceder que $N \leq r$, pues de lo contrario, que $r < N$ debe implicar que $k_r \leq k_N$ i,e, $L := max\{M, 1 + k_N\} \leq k_N$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $N \leq r \leq s$ y en consecuencia $X_{k_r} \cap B = X_{k_N} \cap B = X_{k_s} \cap B$, de donde $X_L \cap B = X_{L+j} \cap B$. De esta última igualdad y de que $z \in X_{L+j} \cap B$ ($z \in X_L \cap B$) se sigue que $z \in X_L \cap B$ ($z \in X_{L+j} \cap B$) y así $z \in X_L$ ($z \in X_{L+j}$). De todo lo anterior se ve

que ya sea que $(x, z) \in B \times B$ o bien que $x = z$, ambas situaciones conducen a que $z \in X_L$ ($z \in X_{L+j}$). Por consiguiente $X_{L+j} \subseteq X_L$ ($X_L \subseteq X_{L+j}$) y así $X_L = X_{L+j}$ i,e, la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $L-$ésimo elemento. De ahí que A satisface la CCA (CCD) y en consecuencia A es Noetheriana (Artiniana). $\square$

Teorema. 6.2.7. *Toda $S-$acción Artiniana tiene al menos una subacción simple.*

Demostración. Sea A una $S-$acción que no posee subacciones simples. Entonces, en particular A no es simple y por lo tanto existe $B_1 \leq A$ tal que $B_1 \neq A$. Ahora bien, como B_1 no puede ser simple, existe $B_2 \leq B_1$ tal que $B_2 \neq B_1$. De nuevo, como B_2 no puede ser simple, existe $B_3 \leq B_2$ tal que $B_3 \neq B_2$. Continuando de esta manera puede construirse una sucesión decreciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subacciones de A que no se estaciona, de forma tal que A no es Artiniana. $\square$

Lema 6.2.8. *Sea A una $S-$acción y X, Y subacciones de A. Si X y Y son Noetherianas, entonces $X \cup Y$ es Noetheriana. En particular, unión finita de subacciones Noetherianas es una subacción Noetheriana.*

Demostración. Sea $Z \leq X \cup Y$. Observar que $Z = Z \cap (X \cup Y) = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$, luego, como $Z \neq \emptyset$ se tienen los siguientes casos posibles:

1. $Z \cap X \neq \emptyset$ y $Z \cap Y \neq \emptyset$.
2. $Z \cap X = \emptyset$ y $Z \cap Y \neq \emptyset$.
3. $Z \cap X \neq \emptyset$ y $Z \cap Y = \emptyset$.

En el primer caso se tiene que $Z \cap X \leq X$ y $Z \cap Y \leq Y$, así que como X y Y son Noetherianas, entonces $Z \cap X$ y $Z \cap Y$ son f.g y por lo tanto $Z \cap X = \langle U \rangle$ y $Z \cap Y = \langle V \rangle$ para algunos conjuntos finitos U y V. De ahí que $Z = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y) = \langle U \rangle \cup \langle V \rangle = \langle U \cup V \rangle$ (véase la Proposición 2.2.6) con $U \cup V$ finito i,e, Z es f.g. En el segundo caso se tiene que $Z = Z \cap Y$ y en consecuencia $Z \leq Y$, pero como Y es Noetheriana, entonces Z debe ser f.g. En el último caso se verifica de manera similar que Z es f.g. Lo anterior exhibe que toda subacción de $X \cup Y$ es f.g, y por consiguiente $X \cup Y$ debe ser Noetheriana. Finalmente, un argumento inductivo muestra que unión finita de subacciones Noetherianas es una subacción Noetheriana. $\square$

Con ayuda de los resultados anteriores podemos exhibir que sobre monoides Noetherianos, cualquier acción f.g es Noetheriana.

Teorema. 6.2.9. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es un monoide Noetheriano izquierdo.*
2. *Toda $S-$acción f.g es Noetheriana.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Suponga que S es un monoide Noetheriano izquierdo y sea $A = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ una $S-$acción f.g. Para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$ considerar al $S-$morfismo $f_k : S \longrightarrow \langle x_k\rangle$ dado por $f_k(s) := sx_k$. Es claro que f_k es sobreyectivo, luego, como el monoide S es Noetheriano del Lema 6.2.5 se deduce que cada $\langle x_k\rangle$ es Noetheriana. De esto último y de que $A = \langle x_1\rangle \cup \langle x_2\rangle \cup ... \cup \langle x_n\rangle$ se sigue que A es Noetheriana.
$2) \Longrightarrow 1)$ Si toda $S-$acción f.g es Noetheriana, entonces de que ${}_SS = \langle e\rangle$ se sigue que ${}_SS$ es Noetheriana y por consiguiente el monoide S es Noetheriano izquierdo. □

Proposición 6.2.10. *Sea* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *una sucesión Rees-exacta con* f *inyectivo y* g *sobreyectivo.*

1. *Si* B *es Noetheriana (Artiniana), entonces* A *y* C *son Noetherianas (Artinianas).*
2. *Si* A *y* C *son Noetherianas (Artinianas), entonces* B *es Noetheriana (Artiniana).*

Demostración. $1)$ Suponga que B es Noetheriana (Artiniana). Como g es sobreyectivo, del Lema 6.2.5 se sigue que C es Noetheriana (Artiniana). Ahora bien, de que f es inyectivo se deduce que $A \cong f(A)$, pero $f(A)$ es una subacción de B, la cuál es Noetheriana (Artiniana). Luego $f(A)$ debe ser Noetheriana (Artiniana) y por consiguiente A es Noetheriana (Artiniana).
$2)$ De que f sea inyectivo se sigue que $A \cong im(f)$ y de que g sea sobreyectivo se sigue que $C \cong \dfrac{B}{Ker(g)}$ (véase Corolario 3.1.2). Ahora bien, como la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es Rees-exacta, entonces $\mathcal{K}_{im(f)} = Ker(g)$ y en consecuencia $\dfrac{B}{im(f)} = \dfrac{B}{Ker(g)}$. Así, de que A y C son Noetherianas (Artinianas), del Lema 6.2.5 se sigue que $im(f)$ y $\dfrac{B}{im(f)}$ son también Noetherianas (Artinianas), de manera que del Teorema 6.2.6 se obtiene que B es Noetheriana (Artiniana). □

Observación 6.2.11. *Toda* $S-$*acción simple* ($0-$*simple*) *es Noetheriana y Artiniana. En efecto, si* A *es una* $S-$*acción simple* ($0-$*simple*), *entonces la colección de todas las subacciones de* A *viene dada por* $\{A\}$ ($\{\{\theta_A\}, A\}$) *que es claramente una colección finita. Por lo tanto cualquier colección no vacía de subacciones de* A *tiene elementos maximales y minimales. De ahí que* A *es Noetheriana y Artiniana.*

Teorema. 6.2.12. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una* $S-$*acción completamente reducible* A *(véase la Definición 4.2.3):*

1. A *es f.g.*
2. A *es Noetheriana.*
3. A *es Artiniana.*

Demostración. $1) \implies 2)$ Si A es f.g, entonces $A = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle = \langle x_1\rangle \cup \langle x_2\rangle \cup ... \cup \langle x_n\rangle$ i,e, A es unión finita de subacciones cíclicas, y al ser A completamente reducible, del Corolario 4.2.9 se sigue que A es unión finita de subacciones simples, pero como toda simple es Noetheriana, entonces A es unión finita de subacciones Noetherianas. De ahí que A es Noetheriana.
$2) \implies 3)$ Si A es Noetheriana, entonces es f.g. Así $A = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{I}_n} \langle x_i\rangle$ con $\mathbb{I}_n := \{1, 2, ...n\}$. Para $B \leq A$ arbitraria, se define $\mathbb{T}_B := \{i \in \mathbb{I}_n \,|\, B \cap \langle x_i\rangle \neq \emptyset\}$. Se tiene que $B = B \cap A = B \cap \bigcup\limits_{i\in\mathbb{I}_n} \langle x_i\rangle = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{I}_n} (B \cap \langle x_i\rangle)$, además de esta unión pueden suprimirse aquellos índices i para los cuáles $B \cap \langle x_i\rangle = \emptyset$, de manera que $B = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{T}_B} (B \cap \langle x_i\rangle)$. Por otra parte, para cada $i \in \mathbb{T}_B$ se tiene que $B \cap \langle x_i\rangle \leq \langle x_i\rangle$, y como toda cíclica es simple (véase Corolario 4.2.9), entonces cada $\langle x_i\rangle$ es simple y por lo tanto $B \cap \langle x_i\rangle = \langle x_i\rangle$. De ahí que la igualdad $B = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{T}_B} (B \cap \langle x_i\rangle)$ toma la forma $B = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{T}_B} \langle x_i\rangle = \langle\{x_i \,|\, i \in \mathbb{T}_B\}\rangle$ i,e, $B = \langle\{x_i \,|\, i \in \mathbb{T}_B\}\rangle$. De esto último se deduce que cada subacción de A es de la forma $\langle X\rangle$ para algún $X \subseteq \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Más aún, como solo hay una cantidad finita de subconjuntos de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, entonces solo hay una cantidad finita de subacciones de A. De ahí que toda sucesión decreciente de subacciones de A es finita y por lo tanto se estaciona i,e, A satisface la CCD. En consecuencia A es Artiniana.
$3) \implies 1)$ Suponga que A es Artiniana y considere a la familia $Simp(A)$ de todas las subacciones simples de A. Del Lema 4.2.2 se sigue que $Simp(A)$ es una colección de conjuntos disjuntos por pares, luego, por el axioma de elección, existe $R \subseteq A$ tal que para cada $B \in Simp(A)$, $|R \cap B| = 1$. Veamos que $Simp(A) = \{\langle x\rangle \,|\, x \in R\}$: en efecto, como A es completamente reducible, del Corolario 4.2.9 se sigue que toda subacción cíclica de A es simple y por lo tanto $\{\langle x\rangle \,|\, x \in R\} \subseteq Simp(A)$. Ahora, si B es una subacción simple de A, como $|R \cap B| = 1$, existe $x_B \in R \cap B$ tal que $R \cap B = \{x_B\}$, en particular $x_B \in B$ y por lo tanto $\langle x_B\rangle \leq B$. De ahí que como B es simple, entonces $B = \langle x_B\rangle$ y por consiguiente $B \in \{\langle x\rangle \,|\, x \in R\}$. Así que $Simp(A) \subseteq \{\langle x\rangle \,|\, x \in R\}$ y en consecuencia $Simp(A) = \{\langle x\rangle \,|\, x \in R\}$. Ahora bien, de que A es completamente reducible, la última igualdad implica que $A = \bigcup Simp(A) = \bigcup\limits_{x\in R} \langle x\rangle = \langle R\rangle$. Afirmamos que R es finito: en efecto, supongamos, a manera de obtener una contradicción, que R es infinito y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de R tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \notin \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Se tiene que

$$R \supsetneq R - \{x_1\} \supsetneq R - \{x_1, x_2\} \supsetneq R - \{x_1, x_2, x_3\} \supsetneq ... \supsetneq ...$$

De esta sucesión decreciente de subconjuntos se obtiene la siguiente sucesión decreciente de subacciones:

$$A = \langle R\rangle \supseteq \langle R - \{x_1\}\rangle \supseteq \langle R - \{x_1, x_2\}\rangle \supseteq \langle R - \{x_1, x_2, x_3\}\rangle \supseteq ... \supseteq ...$$

Pero como A es Artiniana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle R - \{x_1, x_2, ..., x_N\}\rangle = \langle R - \{x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}\}\rangle$$

De ahí que

$$\langle R - \{x_1, x_2, ..., x_N\}\rangle \cup \langle x_1, x_2, ..., x_N\rangle = \langle R - \{x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}\}\rangle \cup \langle x_1, x_2, ..., x_N\rangle$$

y por consiguiente (véase Proposición 2.2.6)

$$\langle R - \{x_1, x_2, ..., x_N\} \cup \{x_1, x_2, ..., x_N\}\rangle = \langle R - \{x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}\} \cup \{x_1, x_2, ..., x_N\}\rangle$$

o lo que es lo mismo $A = \langle R\rangle = \langle R - \{x_{N+1}\}\rangle = \bigcup_{y \in R - \{x_{N+1}\}} \langle y\rangle$. De esto último se sigue que $x_{N+1} \in \langle y\rangle$ para algún $y \in R$ con $y \neq x_{N+1}$. Ahora bien, como $\langle y\rangle$ es simple (pues es cíclica) y R intersecta a cada subacción simple en exactamente un elemento, entonces $R \cap \langle y\rangle = \{y\}$, pero $x_{N+1} \in R \cap \langle y\rangle$, luego $x_{N+1} = y$, lo cuál es una contradicción. Por consiguiente R es finito y así, de que $A = \langle R\rangle$ se deduce que A es f.g. ☐

Proposición 6.2.13. *Sea $f : A \longrightarrow A$ un $S-$morfismo con A Artiniana. Entonces f es inyectivo si y solo si f es un isomorfismo.*

Demostración. Suponga que f es inyectivo y observe que

$$im(f) \supseteq im(f^2) \supseteq im(f^3) \supseteq ... \supseteq ...$$

Así, como A es Artiniana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $im(f^N) = im(f^{N+1})$. De ahí que para $a \in A$ arbitrario, como $f^N(a) \in im(f^N) = im(f^{N+1})$, entonces $f^N(a) = f^{N+1}(x)$ para algún $x \in A$, o lo que es lo mismo $f^N(a) = f^N(f(x))$. Ahora bien, de que f es inyectivo se sigue que f^N también es inyectivo, y por consiguiente, la igualdad $f^N(a) = f^N(f(x))$ implica que $a = f(x)$. De ahí que f es sobreyectiva y por lo tanto un isomorfismo. El recíproco es evidente. ☐

Corolario 6.2.14. *Sean $\alpha : A \longrightarrow B$ y $\beta : B \longrightarrow A$ dos $S-$morfismos inyectivos. Si alguna de las $S-$acciones A ó B es Artiniana, entonces $A \cong B$.*

Demostración. Suponga, por ejemplo, que A es Artiniana. Como α y β son inyectivos, se tiene que el $S-$morfismo $\beta\alpha : A \longrightarrow A$ es también inyectivo. Así, de la Proposición anterior se sigue que $\beta\alpha$ es un isomorfismo. Luego, debe existir $\gamma : A \longrightarrow A$ un $S-$morfismo tal que $(\beta\alpha)\gamma = id_A$ o bien $\beta(\alpha\gamma) = id_A$. De ahí que β tiene una inversa derecha y por lo tanto β es sobreyectiva, pero como también β es inyectiva, entonces β es un isomorfismo. En consecuencia $A \cong B$. ☐

Proposición 6.2.15. *Sea $f : A \longrightarrow A$ un $S-$morfismo con A una $S-$acción con un único elemento cero θ_A. Si A es Noetheriana y f es sobreyectivo, entonces $Nu(f) = \{\theta_A\}$.*

Demostración. Observar que

$$Nu(f) \subseteq Nu(f^2) \subseteq Nu(f^3) \subseteq ... \subseteq ...$$

Así, de que A es Noetheriana se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Nu(f^N) = Nu(f^{N+1})$. Ahora, como f es sobreyectiva, entonces f^N es sobreyectiva, de manera que para $a \in Nu(f)$ arbitrario puede escribirse $a = f^N(x)$ para algún $x \in A$. De ahí que $\theta_A = f(a) = f(f^N(x)) = f^{N+1}(x)$ y por consiguiente $x \in Nu(f^{N+1}) = Nu(f^N)$. De ahí que $f^N(x) = \theta_A$ y en consecuencia $a = \theta_A$. Por lo tanto $Nu(f) = \{\theta_A\}$. □

6.3. Ejemplos

1. Toda $S-$acción simple ($0-$simple) es Noetheriana y Artiniana. Esto se sigue de la Observación 6.2.11. También, toda $S-$acción finita es Noetheriana y Artiniana, pues toda $S-$acción finita solo tiene una cantidad finita de subacciones.

2. Todo grupo es un monoide Noetheriano y Artiniano izquierdo. En efecto, si S es un grupo, del Teorema 4.2.10 se sigue que ${}_SS$ es una $S-$acción completamente reducible. Ahora bien, como ${}_SS = \langle e \rangle$, entonces ${}_SS$ es f.g y así del Teorema 6.2.12 se sigue que S es Noetheriano y Artiniano.

3. El monoide $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es Noetheriano ni Artiniano izquierdo. En efecto, para cada $m \in \mathbb{N}$ considerar a $\langle m \rangle := \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$. No es difícil verificar que $\langle m \rangle \subseteq \langle n \rangle$ si y solo si $n \mid m$. Luego

$$\langle 2 \rangle \supsetneq \langle 2^2 \rangle \supsetneq \langle 2^3 \rangle \supsetneq \dots \supsetneq \dots$$

   es una sucesión decreciente de subacciones de $\mathbb{Z}$ que no se estaciona. Por lo tanto $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es Artiniano izquierdo. Ahora bien, sea $\mathbb{P}$ la colección de todos los números primos y sea $B := \langle \mathbb{P} \rangle = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \langle p \rangle$. Observar que $\pm 1 \notin B$, pues ningún primo es divisor de -1 y 1. Ahora bien, sea $X \subseteq B$ un conjunto de generadores para B y sea $p \in \mathbb{P}$ arbitrario. Puede escribirse $p = nx$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in X$, de manera que $x \mid p$. De ahí que $x = \pm 1$ ó $x = \pm p$, pero como $\pm 1 \notin B$, entonces $x = \pm p$ y por lo tanto $\pm p \in X$. De ahí que X tiene al menos tantos elementos como números primos. Lo anterior exhibe que todo conjunto de generadores para B es infinito y en consecuencia B es una subacción de $\mathbb{Z}$ que no es f.g. Por consiguiente $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es Noetheriano izquierdo.

4. Como $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es Artiniano ni Noetheriano izquierdo, entonces del Teorema 6.4.1 se sigue que el monoide de matrices $M_n(\mathbb{Z})$ no es Artiniano ni Noetheriano izquierdo.

5. Sea $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\mathbb{B} := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Para cada $(m, n), (p, q) \in \mathbb{B}$ se define:

$$(m, n)(p, q) := (m - n + \text{máx}(n, p), q - p + \text{máx}(n, p))$$

   Con esta operación binaria el conjunto $\mathbb{B}$ es un monoide con neutro $(0, 0)$ que recibe el nombre de monoide bicíclico (para ver que $\mathbb{B}$ es un monoide pude consultarse el capítulo 10 de [8]). De acuerdo a la Proposición 10.0.7. de [8], todo ideal izquierdo de $\mathbb{B}$ (que es lo mismo que subacción de ${}_{\mathbb{B}}\mathbb{B}$) es de la forma $I_n := \langle (n,n) \rangle$ con $n \in \mathbb{N}_0$. De ahí que toda subacción de ${}_{\mathbb{B}}\mathbb{B}$ es finitamente generada (de hecho cíclica) y en consecuencia ${}_{\mathbb{B}}\mathbb{B}$ es una acción Noetheriana. Por lo tanto $\mathbb{B}$ es un monoide Noetheriano izquierdo. Ahora bien, la familia $\mathcal{F} := \{I_n \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$ consta de todos los ideales izquierdos de $\mathbb{B}$ (todas las subacciones de ${}_{\mathbb{B}}\mathbb{B}$). Más aún, la Proposición 10.0.9. de [8] asegura que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ ocurre que $I_{n+1} \subsetneq I_n$. Por consiguiente hay una sucesión decreciente de subacciones de ${}_{\mathbb{B}}\mathbb{B}$ que no se estaciona, de manera que ${}_{\mathbb{B}}\mathbb{B}$ no es una acción Artiniana. Por lo tanto $\mathbb{B}$ no es un monoide Artiniano izquierdo.

6. Considerar al monoide $(\tau(\mathbb{N}), \circ)$ de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en sí mismo bajo la composición usual entre funciones. La función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n) := 2n$ es una función inyectiva pero no sobreyectiva. De la inyectividad de f se sigue que existe una función $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ para la cuál $gf = id_{\mathbb{N}}$. Ahora bien, como f no es sobreyectiva, entonces $fg \neq id_{\mathbb{N}}$. Así f y g son funciones tales que $gf = id_{\mathbb{N}}$ y $fg \neq id_{\mathbb{N}}$. Por consiguiente, del Teorema 6.4.4 se sigue que $(\tau(\mathbb{N}), \circ)$ no puede ser un monoide Artiniano izquierdo.

7. Sea $S := \{2^n \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$. Está claro que bajo el producto usual de enteros, S es un monoide conmutativo cuyo elemento neutro es $1 = 2^0$. Más aún, S es un monoide cancelativo. Sea I un ideal de S y considere al conjunto $A_I := \{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, 2^n \in I\}$. Si α es el menor elemento de A_I, entonces es claro que $\langle 2^\alpha \rangle \subseteq I$. Ahora bien, si $2^n \in I$, entonces $n \in A_I$ y así $\alpha \leq n$, de donde $n = k + \alpha$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$. Luego $2^n = 2^{k+\alpha} = 2^k 2^\alpha \in \langle 2^\alpha \rangle$ y en consecuencia $I = \langle 2^\alpha \rangle$. Por consiguiente todo ideal de S es de la forma $I_n := \langle 2^n \rangle$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$. De ahí que S es un monoide de ideales principales, y en particular, S es un monoide Noetheriano. Además, los ideales de S forman la siguiente cadena estrictamente decreciente:

$$\langle 2^0 \rangle \supsetneq \langle 2^1 \rangle \supsetneq \langle 2^2 \rangle \supsetneq \ldots \supseteq \langle 2^n \rangle \supsetneq \ldots \supsetneq \ldots$$

Por lo tanto S no es un monoide Artiniano.

8. Para cada $a, b \in \mathbb{N}_0$ sea $min(a,b)$ el mínimo entre a y b. La igualdad

$$min(a, min(b,c)) = min(min(a,b), c)$$

implica que $\mathbb{N}_0$ es un semigrupo conmutativo bajo la operación $a*b := min(a,b)$. Más aún, como $0 \in \mathbb{N}_0$ es el menor elemento de $\mathbb{N}_0$, entonces $a * 0 = 0$ para cada $a \in \mathbb{N}_0$ y así 0 es cero del semigrupo $(\mathbb{N}_0, *)$. Observe que como $\mathbb{N}_0$ no es acotado superiormente, entonces ningún elemento de $\mathbb{N}_0$ puede ser neutro del semigrupo $(\mathbb{N}_0, *)$. Así $(\mathbb{N}_0, *)$ es un semigrupo que no es monoide. Además, es fácil ver que para cada $a \in \mathbb{N}_0$ ocurre que $a * a = a$ y por lo tanto todo elemento de $\mathbb{N}_0$ es idempotente i,e, $E(\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}_0$. Calculemos a continuación cómo es el ideal generado por cualquier elemento de $\mathbb{N}_0$: Sea $a \in \mathbb{N}_0$ arbitrario pero fijo. Observar que

$$n * a := \begin{cases} n & si \quad n \leq a. \\ a & si \quad n > a. \end{cases}$$

Luego, $\langle a \rangle := \{n{*}a \,|\, n \in \mathbb{N}_0\} = \{n{*}a \,|\, n \leq a\} \cup \{n{*}a \,|\, n > a\} = \{0, 1, 2, ..., a{-}1, a\}$ i,e, para cada $a \in \mathbb{N}_0$

$$\langle a \rangle = \{0, 1, 2, ..., a - 1, a\}$$

Se sigue fácilmente que si $a < b$, entonces $\langle a \rangle \subsetneq \langle b \rangle$. Ahora, sea I un ideal finito de $\mathbb{N}_0$ y sea α el mayor elemento de I. Es claro que $\langle \alpha \rangle \subseteq I$. Más aún, como para cada $b \in I$ ocurre que $b \leq \alpha$, entonces para cada $b \in I$, $b = b * \alpha \in \langle \alpha \rangle$ y por consiguiente $I = \langle \alpha \rangle$. Podemos deducir entonces que todos los ideales finitos de $\mathbb{N}_0$ son los de la forma $\langle a \rangle$. Afirmamos ahora que el único ideal infinito de $\mathbb{N}_0$ es $\mathbb{N}_0$. En efecto, sea J un ideal infinito de $\mathbb{N}_0$ y suponga, a manera de obtener un absurdo, que $J \neq \mathbb{N}_0$. Bajo este supuesto sea $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $k \notin J$. Como J es infinito, entonces existe $a \in J$ tal que $k < a$, y así $k = k * a \in J$ i,e, $k \in J$, contradicción. Por consiguiente $J = \mathbb{N}_0$. De todo lo anterior se sigue que la colección de todos los ideales de $(\mathbb{N}_0, *)$ viene dada por $\mathcal{I} = \{\langle a \rangle \,|\, a \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbb{N}_0\}$, y además estos forman la siguiente cadena:

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \langle 1 \rangle \subsetneq \langle 2 \rangle \subsetneq ... \subseteq \langle a \rangle \subsetneq ... \subsetneq \mathbb{N}_0$$

Ahora, sea e tal que $e \notin \mathbb{N}_0$ y sobre el conjunto $\mathbb{N}_0^1 := \mathbb{N}_0 \cup \{e\}$ defínase la siguiente operación:

$$a \cdot b := \begin{cases} a * b & si \quad a, b \in \mathbb{N}_0. \\ \quad a & \quad si \quad b = e. \\ \quad b & \quad si \quad a = e. \end{cases}$$

No es difícil ver que con esta operación $\mathbb{N}_0^1$ es un monoide conmutativo con neutro e. Además, está claro que aquellos ideales propios de $\mathbb{N}_0^1$ i,e, aquellos ideales de $\mathbb{N}_0^1$ que no contienen a e son ideales de $(\mathbb{N}_0, *)$ y viceversa, todo ideal de $(\mathbb{N}_0, *)$ es un ideal de $\mathbb{N}_0^1$. De ahí que $\mathcal{J} = \{\langle a \rangle \,|\, a \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0^1\}$ es la colección de todos los ideales de $\mathbb{N}_0^1$, y además ellos forman la siguiente cadena:

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \langle 1 \rangle \subsetneq \langle 2 \rangle \subsetneq ... \subseteq \langle a \rangle \subsetneq ... \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{N}_0^1$$

Observe que entonces todos los ideales de $\mathbb{N}_0^1$ que son de la forma $\langle a \rangle$ con $a \in \mathbb{N}_0$ forman la siguiente sucesión estrictamente creciente:

$$\langle 0 \rangle \subsetneq \langle 1 \rangle \subsetneq \langle 2 \rangle \subsetneq ... \subseteq \langle a \rangle \subsetneq ... \subsetneq ...$$

Por consiguiente $\mathbb{N}_0^1$ no es un monoide Noetheriano. Por otra parte, sea $\mathcal{F}$ una colección no vacía de ideales de $\mathbb{N}_0^1$. Si $\mathcal{F}$ no contiene ideales finitos, entonces $\mathcal{F} \subseteq \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0^1\}$ y así es claro que $\mathcal{F}$ tiene elementos $\subseteq -$minimales. Si $\mathcal{F}$ contiene ideales finitos, entonces $\mathcal{F}$ contiene un ideal finito de cardinal mínimo, y además está claro que tal ideal debe ser un elemento $\subseteq -$minimal de $\mathcal{F}$. Por lo tanto toda colección no vacía de ideales de $\mathbb{N}_0^1$ contiene elementos $\subseteq -$minimales, de manera que $\mathbb{N}_0^1$ es un monoide Artiniano.

Observación 6.3.1. *Un resultado clásico en Teoría de anillos y módulos, conocido como Teorema de Hopkins-Levitzki, afirma que sobre anillos Artinianos, todo módulo f.g es Noetheriano, y en particular, todo anillo Artiniano debe ser Noetheriano (véase Teorema 2.27 de [12]). Así, todo anillo que satisfaga la condición de cadena descendente automáticamente satisface también la condición de cadena ascendente. Sin embargo, cuando de monoides se trata, y a la luz del último de los ejemplos anteriores, existen monoides Artinianos pero no Noetherianos, por lo que el Teorema de Hopkins-Levitzki no puede ser replicado para el caso de los monoides y sus acciones.*

6.4. Algunos resultados sobre monoides Artinianos

Teorema. 6.4.1. *Sean $(R, +, \cdot)$ un anillo unitario y $M_n(R)$ el monoide de todas las matrices de tamaño $n \times n$ ($n \geq 2$) con coeficientes en R bajo la multiplicación usual entre matrices. Si $M_n(R)$ es un monoide Artiniano (Noetheriano) izquierdo, entonces $(R, \cdot)$ también es un monoide Artiniano (Noetheriano) izquierdo.*

Demostración. Sea $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq \ldots$ una sucesión decreciente de ideales izquierdos del monoide $(R, \cdot)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase

$$J_n := \bigcup_{x \in I_n} \{(a_{ij}) \in M_n(R) \,|\, a_{i1} \in \langle x \rangle \text{ y } a_{ij} = 0 \text{ para } j > 1\}$$

es decir, J_n consiste de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} s_{11}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ s_{21}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ s_{31}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ s_{n1}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

con $s_{i1} \in R$ y $x \in I_n$. Veamos que cada J_n es un ideal izquierdo del monoide $M_n(R)$. En efecto, para $x \in I_n$ y $s_{i1} \in R$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ s_{21}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ s_{31}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . \\ . \\ . \\ s_{n1}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_{21}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_{31}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n1}x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

donde para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $b_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}s_{k1}$. Observar que la matriz que aparece en el segundo miembro de la igualdad anterior es una matriz que pertenece a J_n. Por consiguiente J_n es un ideal izquierdo del monoide $M_n(R)$. Más aún, recordar que por definición, J_n es la colección de todas las matrices cuyos coeficientes son todos iguales a cero a excepción de aquellos que se encuentren en la primera columna, los cuáles deben pertenecer al ideal izquierdo generado por algún elemento del ideal I_n. De ahí que como para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$, entonces $J_{n+1} \subseteq J_n$ y así $J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq ... \supseteq ...$ es una sucesión decreciente de ideales izquierdos del monoide $M_n(R)$ el cuál es Artiniano. Por consiguiente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq 1$, $J_N = J_{N+k}$. Veamos que la sucesión $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq ...$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento: en efecto, para $k \geq 1$, como la sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $I_{N+k} \subseteq I_N$. Ahora bien, para $x \in I_N$ arbitrario, la matriz

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . \\ . \\ . \\ x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

pertenece a J_N, pero $J_N = J_{N+k}$, luego existen $y \in I_{N+k}$ y $s_{i1} \in R$ tales que

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . \\ . \\ . \\ x & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}y & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ s_{21}y & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ s_{31}y & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . \\ . \\ . \\ s_{n1}y & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

De ahí que $x = s_{11}y$, pero como $y \in I_{N+k}$ e I_{N+k} es ideal izquierdo de $(R, \cdot)$, entonces $s_{11}y \in I_{N+k}$ i,e, $x \in I_{N+k}$. Por consiguiente $I_N \subseteq I_{N+k}$ y en consecuencia $I_N = I_{N+k}$. Por lo tanto la sucesión $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq ...$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento y así $(R, \cdot)$ satisface la CCD. De ahí que $(R, \cdot)$ es Artiniano izquierdo. La prueba para el caso Noetheriano es análoga y por eso se omite. □

Teorema. 6.4.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide cancelativo derecho S (véase Definición 1.2.15):*

1. *S es un grupo.*
2. *S es Artiniano izquierdo.*
3. *Todo $S-$morfismo inyectivo de ${}_SS$ en ${}_SS$ es un isomorfismo.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Si S es un grupo, que S sea Artiniano izquierdo se sigue del segundo de los Ejemplos anteriores.
$2) \Longrightarrow 3)$ Se sigue de la Proposición 6.2.13.
$3) \Longrightarrow 1)$ Para $g \in S$ arbitrario sea $f : S \longrightarrow S$ el $S-$morfismo dado por $f(s) := sg$. De que S es cancelativo derecho se deduce que f es inyectivo. Por consiguiente f es un isomorfismo, y en particular, f es sobreyectivo. Así, para $e \in S$ existe $s \in S$ tal que $e = f(s) := sg$. De ahí que todo elemento de S tiene un inverso izquierdo y por lo tanto S es un grupo (véase Teorema 1.2.13). ☐

Lema 6.4.3. *Sea S un monoide y $x, y \in S$ con x un elemento que no es invertible izquierdo pero $xy = e$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^n \notin \langle x^{n+1} \rangle$.*

Demostración. Por inducción sobre n: para $n = 1$ se tiene que $x \notin \langle x^2 \rangle$, pues de lo contrario, existe $s \in S$ tal que $x = sx^2$, y así $e = xy = sx^2y = sx(xy) = sxe = sx$ i,e, x es invertible izquierdo, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $x \notin \langle x^2 \rangle$. Suponga que el resultado es válido para $n \geq 2$ i,e, suponga que $x^n \notin \langle x^{n+1} \rangle$. Si $x^{n+1} \in \langle x^{n+2} \rangle$, entonces existe $t \in S$ tal que $x^{n+1} = tx^{n+2} = (tx^{n+1})x$ y por consiguiente $x^n = x^ne = x^nxy = x^{n+1}y = (tx^{n+1})xy = (tx^{n+1})e = tx^{n+1}$ i,e, $x^n = tx^{n+1}$. De ahí que $x^n \in \langle x^{n+1} \rangle$, contradicción. Por lo tanto $x^{n+1} \notin \langle x^{n+2} \rangle$ y así el resultado es válido para $n + 1$. En consecuencia el resultado se verifica para cada $n \in \mathbb{N}$. ☐

Teorema. 6.4.4. *Sea S un monoide Artiniano izquierdo y $x, y \in S$ tales que $xy = e$. Entonces $yx = e$.*

Demostración. Si $xy = e$, entonces x es invertible izquierdo, pues de lo contrario, del Lema anterior se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^n \notin \langle x^{n+1} \rangle$. De ahí que

$$\langle x \rangle \supsetneq \langle x^2 \rangle \supsetneq \langle x^3 \rangle \supsetneq \ldots \supsetneq$$

y por lo tanto S tiene una sucesión decreciente de ideales izquierdos que no se estaciona, pero esto no es posible, pues S es Artiniano izquierdo. Por consiguiente x es invertible izquierdo y así existe $z \in S$ tal que $zx = e$. De esto último se sigue que $y = ey = (zx)y = z(xy) = ze = z$ i,e, $y = z$. En consecuencia $yx = e$. ☐

6.5. Acciones Noetherianas y Artinianas con respecto a congruencias

El concepto de acción Noetheriana y Artiniana tal como se establece en la Definición 6.2.1 es equivalente a que un acción satisfaga ciertas propiedades de finitud con respecto a subacciones, a saber, una acción es Noetheriana (Artiniana) si y solo si satisface la condición de cadena ascendente (descendente) en subacciones. Ahora bien, si en lugar de exigir que una acción satisfaga la condición de cadena ascendente (descendente) en subacciones pedimos que la satisfaga en congruencias (véase Definición 2.4.1), entonces llegamos a la siguiente noción:

Definición 6.5.1. *Se dice que la $S-$acción A es:*

1. *Noetheriana en congruencias, si toda colección no vacía de congruencias de A tiene elementos $\subseteq -$maximales.*
2. *Artiniana en congruencias, si toda colección no vacía de congruencias de A tiene elementos $\subseteq -$minimales.*

Teorema. 6.5.2. *Una $S-$acción A es Noetheriana (Artiniana) en congruencias si y solo si toda sucesión creciente (decreciente) de congruencias de A se estaciona.*

Demostración. Suponga que A es Noetheriana (Artiniana) en congruencias y sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente (decreciente) de congruencias de A. Puesto que A es Noetheriana (Artiniana) en congruencias, la familia $\mathcal{F} := \{\rho_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ debe tener un elemento $\subseteq -$maximal ($\subseteq -$minimal), digamos ρ_N. Veamos que la sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento: sea $j \in \mathbb{N}$ arbitrario. Como la sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (decreciente), entonces $\rho_N \subseteq \rho_{N+j}$ ($\rho_{N+j} \subseteq \rho_N$), además, no puede ocurrir que $\rho_N \subsetneq \rho_{N+j}$ ($\rho_{N+j} \subsetneq \rho_N$), pues esto va en contra de que ρ_N es $\subseteq -$maximal ($\subseteq -$minimal). Por consiguiente $\rho_N = \rho_{N+j}$ y así la sucesión se estaciona en el $N-$ésimo elemento. Y viceversa, suponga que toda sucesión creciente (decreciente) de congruencias de A se estaciona y sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de congruencias de A. Suponga que $\mathcal{F}$ no tiene elementos $\subseteq -$maximales ($\subseteq -$minimales), y sea $\rho_1 \in \mathcal{F}$ arbitrario. Como ρ_1 no es maximal (minimal), existe $\rho_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\rho_1 \subsetneq \rho_2$ ($\rho_2 \subsetneq \rho_1$). A su vez, para ρ_2, existe $\rho_3 \in \mathcal{F}$ tal que $\rho_2 \subsetneq \rho_3$ ($\rho_3 \subsetneq \rho_2$). Para ρ_3 existe $\rho_4 \in \mathcal{F}$ tal que $\rho_3 \subsetneq \rho_4$ ($\rho_4 \subsetneq \rho_3$). Continuando de esta forma, se construye una sucesión creciente (decreciente) de congruencias de A que no se estaciona, pero esto es una contradicción. Por consiguiente $\mathcal{F}$ tiene elementos $\subseteq -$maximales ($\subseteq -$minimales) y en consecuencia A es Noetheriana (Artiniana) en congruencias. □

Si llamamos a una acción Noetheriana (Artiniana) en subacciones a aquella que satisfaga la Definición 6.2.1, entonces ¿habrá alguna relación entre ser Noetheriana (Artiniana) en congruencias y ser Noetheriana (Artiniana) en subacciones?

Teorema. 6.5.3. *Toda $S-$acción Noetheriana (Artiniana) en congruencias es Noetheriana (Artiniana) en subacciones.*

Demostración. Sea A una $S-$acción Noetheriana en congruencias y sea

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots \subseteq \ldots$$

una sucesión creciente de subacciones de A. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar a la congruencia $\rho_{B_n} := (B_n \times B_n) \cup \Delta_A$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $B_n \subseteq B_{n+1}$, está claro entonces que

$$\rho_{B_1} \subseteq \rho_{B_2} \subseteq \rho_{B_3} \subseteq \ldots \subseteq \ldots$$

Así, $(\rho_{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de congruencias de A, y por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_{B_N} = \rho_{B_{N+j}}$ para cada $j \geq 1$. Veamos que la sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento: para $j \geq 1$ se tiene que $B_N \subseteq B_{N+j}$, pues la sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Ahora bien, suponga que $B_N \neq B_{N+j}$ y sea $y \in B_{N+j}$ tal que $y \notin B_N$. Para $x \in B_N$ arbitrario se tiene que $(x, y) \in B_{N+j} \times B_{N+j} \subseteq \rho_{B_{N+j}} = \rho_{B_N} := (B_N \times B_N) \cup \Delta_A$ y por consiguiente $(x, y) \in B_N \times B_N$ ó $x = y$. Como $y \notin B_N$ y $x \in B_N$, entonces el caso $x = y$ no sucede, así debe ocurrir que $(x, y) \in B_N \times B_N$, pero esto implica que $y \in B_N$, contradicción. Por lo tanto $B_N = B_{N+j}$ y así la sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento. De ahí que A es Noetheriana en subacciones. La prueba para el caso Artiniano es similar y por eso se omite. ☐

Teorema. 6.5.4. *Sea A una $S-$acción Noetheriana en congruencias y $f : A \longrightarrow A$ un $S-$morfismo. Entonces f es sobreyectivo si y solo si f es un isomorfismo.*

Demostración. Suponga que f es sobreyectivo y para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a la congruencia $Ker(f^n)$. Como la igualdad $f^n(x) = f^n(y)$ implica que $f^{n+1}(x) = f^{n+1}(y)$, entonces está claro que $Ker(f^n) \subseteq Ker(f^{n+1})$. Así $(Ker(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de congruencias de A, luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Ker(f^N) = Ker(f^{N+1})$. Sea ahora $(x, y) \in Ker(f)$. De que f es sobreyectivo se sigue que f^N también es sobreyectivo y entonces puede escribirse $x = f^N(a)$ y $y = f^N(b)$ para algunos $a, b \in A$. De ahí que $f(x) = f(f^N(a)) = f^{N+1}(a)$ y $f(y) = f(f^N(b)) = f^{N+1}(b)$, pero como $(x, y) \in Ker(f)$, entonces $f(x) = f(y)$ y por consiguiente $f^{N+1}(a) = f^{N+1}(b)$ i,e, $(a, b) \in Ker(f^{N+1}) = Ker(f^N)$. De esto último se sigue que $f^N(a) = f^N(b)$ y por lo tanto $x = y$. En consecuencia f es inyectiva y por consiguiente es un isomorfismo. El recíproco es evidente. ☐

Teorema. 6.5.5. *Sea A una $S-$acción Artiniana en congruencias y sea $f : A \longrightarrow A$ un $S-$morfismo. Entonces f es inyectivo si y solo si f es un isomorfismo.*

Demostración. Si A es una $S-$acción Artiniana en congruencias, el Teorema 6.5.3 garantiza que A también es Artiniana en subacciones, luego, la Proposición 6.2.13 implica que si f es inyectivo, entonces f es un isomorfismo. El recíproco es inmediato. ☐

Definición 6.5.6. *Decimos que una $S-$acción A es:*

1. *Hopfiana si todo $S-$morfismo sobreyectivo de A en A es un isomorfismo.*
2. *Cohopfiana si todo $S-$morfismo inyectivo de A en A es un isomorfismo.*

Proposición 6.5.7.

1. *Toda $S-$acción Noetheriana en congruencias es Hopfiana.*
2. *Toda $S-$acción Artiniana (en cualquier sentido) es Cohopfiana.*

Demostración. El primer inciso se sigue del Teorema 6.5.4, y el segundo de la Proposición 6.2.13 y del Teorema 6.5.5. □

CAPÍTULO 7

ACCIONES LIBRES

Esta parte del trabajo está destinada a estudiar a aquellas acciones que poseen conjuntos de generadores con una propiedad especial, que son las llamadas bases. Veremos, entre otras cosas, cómo construir acciones con bases, que cualesquiera dos bases deben tener el mismo cardinal y la propiedad universal que define a estas.

7.1. Bases y propiedad universal

Definición 7.1.1. *Si A es una $S-$acción, se dice que $X \subsetneq A$ es una base para A si:*

1. *X es no vacío y genera a A i,e, si $A = \langle X \rangle$ (véase Teorema 2.2.5).*
2. *Para cada $s, t \in S$ y $x, y \in X$, la igualdad $tx = sy$ implica que $t = s$ y $x = y$.*

Definición 7.1.2. *Se dice que una $S-$acción es libre si admite una base.*

A continuación exhibiremos que el concepto de acción libre tiene sentido i,e, exhibiremos que si existen acciones libres. Más aún, para cada monoide S y cada conjunto no vacío X construiremos una $S-$acción que tenga una base de tamaño $|X|$.

Teorema. 7.1.3. *Sea X un conjunto no vacío. Sobre el conjunto $S \times X$ se define para cada $s \in S$ y cada $(t, x) \in S \times X$, $s(t, x) := (st, x)$. Entonces con esta operación $S \times X$ es una $S-$acción y $\hat{X} := \{(e, x) \,|\, x \in X\}$ es una base para $S \times X$.*

Demostración. Observar que la acción de los elementos del monoide S sobre cualquier pareja ordenada (t, x) solo se produce en la primera entrada (que corresponde a un elemento del monoide) dejando fija a la segunda (que corresponde a un elemento del conjunto). Así, de la asociatividad en el monoide S se deduce de inmediato que $S \times X$ es una $S-$acción bajo la operación $s(t, x) := (st, x)$. Ahora bien, para cada $(t, x) \in S \times X$ se tiene que $(t, x) =$

$t(e,x)$ y por consiguiente $\hat{X} := \{(e,x) \mid x \in X\}$ genera a $S \times X$. Finalmente, se tiene que $t(e,x) = s(e,y)$ si y solo si $(t,x) = (s,y)$ si y solo si $t = s$ y $x = y$. Por lo tanto $\hat{X}$ es una base para $S \times X$. Además, está claro que $x \longmapsto (e,x)$ es una correspondencia biyectiva entre X y $\hat{X}$, luego $|\hat{X}| = |X|$. ☐

Definición 7.1.4. *Para cada conjunto no vacío X denotamos por $S^{(X)}$ a la $S-$acción construida en el Teorema anterior.*

Observación 7.1.5. *Si para cada $x \in X$ se define $S^{(x)} := S \times \{x\}$, entonces no es difícil ver que $S^{(x)} \leq S^{(X)}$ y además la función $s \longmapsto (s,x)$ es un isomorfismo de acciones entre ${}_SS$ y $S^{(x)}$. Más aún, se tiene que $S^{(X)} = \bigcup\limits_{x \in X} S^{(x)}$, donde $S^{(x)} \cap S^{(y)} = \emptyset$ si $x \neq y$. Así $S^{(X)}$ es una unión disjunta de acciones cada una de ellas isomorfa a ${}_SS$.*

Teorema. 7.1.6. *(Propiedad universal de las bases) Sea X un conjunto no vacío. Entonces la función $\eta_X : X \longrightarrow S^{(X)}$ dada por $\eta_X(x) := (e,x)$ tiene la siguiente propiedad universal: para cada $S-$acción A y cada función $f : X \longrightarrow A$ existe un único $S-$morfismo $F : S^{(X)} \longrightarrow A$ que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & A \\
& S^{(X)} \arrow[ur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow A$ una función con A una $S-$acción. A partir de f se define a la función $F : S^{(X)} \longrightarrow A$ dada por $F(t,x) := tf(x)$. Observar que $F(s(t,x)) = F(st,x) := (st)f(x) = s(tf(x)) = sF(t,x)$ y por consiguiente F es un $S-$morfismo. Ahora, para cada $x \in X$ se tiene que $F(\eta_X(x)) = F(e,x) := ef(x) = f(x)$ y en consecuencia $f = F\eta_X$. Para terminar, si $G : S^{(X)} \longrightarrow A$ es un $S-$morfismo tal que $f = G\eta_X$, entonces $G(t,x) = G(t(e,x)) = tG(e,x) = tG(\eta_X(x)) = tf(x) = F(t,x)$ y por lo tanto $G = F$. ☐

Lema 7.1.7. *Suponga que A y B son $S-$acciones con $A \cong B$. Si A es libre, entonces B es libre.*

Demostración. Sea X una base para A y $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de $S-$acciones. Como $A = \langle X \rangle$, entonces del Lema 6.1.2 se sigue que $B = \langle f(X) \rangle$. Ahora bien, sean $s,t \in S$ y $u,v \in f(X)$ tales que $tu = sv$. Puede escribirse $u = f(x)$ y $v = f(y)$ para algunos $x,y \in X$. Así la igualdad $tu = sv$ toma la forma $tf(x) = sf(y)$ y por lo tanto $f(tx) = f(sy)$, de manera que al ser f inyectivo se sigue que $tx = sy$, pero como X es base de A, entonces $t = s$ y $x = y$, de donde $u = v$. Se deduce así que $f(X)$ es una base para B y por lo tanto B es libre. ☐

Existe otro concepto de base distinto al de la Definición 7.1.1 y es el siguiente.

Definición 7.1.8. *Si A es una $S-$acción, una base categórica para A es un par (X, η) donde X es un conjunto no vacío y $\eta : X \longrightarrow A$ es una función con la siguiente propiedad universal: para cada $S-$acción B y cada función $f : X \longrightarrow B$ existe un único $S-$morfismo $F : A \longrightarrow B$ que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & B \\ & A \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Observación 7.1.9. *De acuerdo con el Teorema 7.1.6 (Propiedad universal de las bases), para cada conjunto no vacío X, el par (X, η_X) es una base categórica para la $S-$acción $S^{(X)}$.*

Teorema. 7.1.10. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción A:*

1. *A es libre.*
2. *Existe un conjunto X tal que $A \cong S^{(X)}$.*
3. *A tiene una base categórica.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Suponga que A es libre y sea $X \subseteq A$ una base para A. Considere a la función $\varphi : S^{(X)} \longrightarrow A$ dada por $\varphi(s, x) := sx$. Observar que φ es un $S-$morfismo, pues $\varphi(t(s, x)) = \varphi(ts, x) := (ts)x = t(sx) = t\varphi(s, x)$. Más aún, de que $A = \langle X \rangle$ se sigue que φ es sobreyectiva, además de que como X es base, entonces la igualdad $tx = sy$ implica que $t = s$ y $x = y$, de manera que φ es inyectiva y por consiguiente un isomorfismo de acciones. De ahí que $A \cong S^{(X)}$.
2) $\Longrightarrow$ 3) Suponga que existe un conjunto X tal que $A \cong S^{(X)}$ y sea $\psi : S^{(X)} \longrightarrow A$ un isomorfismo de acciones. Veamos que el par $(X, \psi\eta_X)$ es una base categórica para A: sea $f : X \longrightarrow B$ una función con B una $S-$acción. Como (X, η_X) es base categórica de $S^{(X)}$, para la función f existe un único $S-$morfismo $F : S^{(X)} \longrightarrow B$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & B \\ & S^{(X)} \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

i.e, $f = F\eta_X$. Ahora bien, considere al $S-$morfismo $\hat{f} := F\psi^{-1}$ y observe que $\hat{f}\psi\eta_X = F\psi^{-1}\psi\eta_X = Fid_{S^{(X)}}\eta_X = F\eta_X = f$ i,e, $\hat{f}\psi\eta_X = f$. De ahí que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi\eta_X"'] & B \\
& A \arrow[u, dashed, "\hat{f}"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Finalmente, si $g : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo tal que $f = g\psi\eta_X$, entonces el $S-$morfismo $g\psi$ hace conmutativo al diagrama (7.1), pero F es el único $S-$morfismo con tal propiedad, de manera que $F = g\psi$ y así $g = F\psi^{-1} = \hat{f}$. Por consiguiente $(X, \psi\eta_X)$ es una base categórica para A.
3) $\Longrightarrow$ 1) Sea (X, ψ) una base categórica para A. Bajo este supuesto, exhibiremos que $A \cong S^{(X)}$: como (X, ψ) es base categórica para A, para las funciones $\eta_X : X \longrightarrow S^{(X)}$ y $\psi : X \longrightarrow A$ existen únicos $S-$morfismos f y g que hacen conmutativos a los diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\psi"'] & S^{(X)} \\
& A \arrow[u, dashed, "f"']
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

y

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \\
& A \arrow[u, dashed, "g"']
\end{tikzcd} \tag{7.3}$$

Observar que id_A es un $S-$morfismo que claramente hace conmutativo al diagrama (7.3), de manera que de la unicidad de g se sigue que $g = id_A$. Por otra parte, como (X, η_X) es base categórica de $S^{(X)}$, para las funciones $\psi : X \longrightarrow A$ y $\eta_X : X \longrightarrow S^{(X)}$ existen únicos $S-$morfismos h y k que hacen conmutativos a los diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & A \\
& S^{(X)} \arrow[u, dashed, "h"']
\end{tikzcd} \tag{7.4}$$

y

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & S^{(X)} \\
& S^{(X)} \arrow[ur, dashed, "k"'] &
\end{tikzcd} \tag{7.5}$$

Note que $id_{S^{(X)}}$ hace conmutativo al diagrama (7.5), y por lo tanto la unicidad de k implica que $k = id_{S^{(X)}}$. Ahora bien, a partir de que los diagramas (7.2) y (7.4) son conmutativos se sigue que $(hf)\psi = h(f\psi) = h\eta_X = \psi$ i,e, $\psi = (hf)\psi$. Por lo tanto hf hace conmutativo al diagrama (7.3), pero $g = id_A$ es el único $S-$morfismo con tal propiedad, luego $id_A = hf$. De manera análoga se muestra que $fh = id_{S^{(X)}}$, de forma que así $f : A \longrightarrow S^{(X)}$ es un isomorfismo de acciones y por consiguiente $A \cong S^{(X)}$. Luego como $S^{(X)}$ es libre, el Lema 7.1.7 garantiza que A es libre. $\square$

Recordemos que un anillo IBN es un anillo R con la propiedad de que cualesquiera dos bases de un $R-$módulo libre tienen el mismo cardinal. Es posible encontrar anillos que no son anillos IBN (véase Ejemplo 5 de la segunda sección del capítulo 2 de [11]). En el caso de las acciones sobre monoides, si intentaramos definir a un monoide IBN como aquel para el que cualesquiera dos bases de una acción libre tienen el mismo cardinal, entonces resultaría, como veremos a continuación, que todo monoide es un monoide IBN, de manera que de cuando monoides se trata, no tiene mucho sentido definir este concepto.

Teorema. 7.1.11. *Si X y Y son bases de una $S-$acción libre A, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración. Sea $x \in X$ arbitrario. Como Y es base de A, existen únicos $s_x \in S$ y $y_x \in Y$ tales que $x = s_x y_x$. Afirmamos que s_x es invertible (véase Definición 1.2.10): en efecto, como X es base de A, para y_x existen únicos $t \in S$ y $z \in X$ para los cuáles $y_x = tz$. Así la igualdad $x = s_x y_x$ toma la forma $x = s_x(tz) = (s_x t)z$. Por otra parte, de que $x = ex$ se sigue que $ex = (s_x t)z$, y como X es base de A, entonces $e = s_x t$ y $x = z$. Ahora bien, de lo anterior se desprende que $ey_x = y_x = tz = tx = t(s_x y_x) = (ts_x)y_x$ i,e, $ey_x = (ts_x)y_x$, y como Y es base de A, entonces $ts_x = e$. Por consiguiente s_x es invertible. Consideremos ahora a la función $f : X \longrightarrow Y$ dada por $f(x) := y_x$. Si $x, x' \in X$ son tales que $y_x = y_{x'}$, entonces $x = s_x y_x = s_x y_{x'}$ i,e, $x = s_x y_{x'}$. Por otro lado como $x' = s_{x'} y_{x'}$, entonces $y_{x'} = s_{x'}^{-1} x'$ y así la igualdad $x = s_x y_{x'}$ se reescribe como $x = (s_x s_{x'}^{-1})x'$, pero $x = ex$, así que $ex = (s_x s_{x'}^{-1})x'$ y por consiguiente (ya que X es base de A) $x = x'$. Por lo tanto f es inyectiva y así $|X| \leq |Y|$. De manera similar puede construirse una función inyectiva de Y en X, de manera que $|Y| \leq |X|$. Finalmente, del Teorema de Cantor-Bernstein se concluye que $|X| = |Y|$. $\square$

Corolario 7.1.12. *Sean X y Y conjuntos no vacíos. Entonces $S^{(X)} \cong S^{(Y)}$ si y solo si $|X| = |Y|$.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Sea $f : S^{(X)} \longrightarrow S^{(Y)}$ un isomorfismo de acciones. Como $\hat{X} := \{(e, x) \,|\, x \in X\}$ es base para $S^{(X)}$, de la demostración del Lema 7.1.7 se sigue que $f(\hat{X})$ es una base para $S^{(Y)}$. Ahora bien, $S^{(Y)}$ tiene una base de tamaño $|Y|$, a saber, $\hat{Y} := \{(e, x) \,|\, y \in Y\}$. Así, del Teorema anterior se desprende que $|f(\hat{X})| = |\hat{Y}|$, pero $|X| = |\hat{X}| = |f(\hat{X})|$ y $|\hat{Y}| = |Y|$. Por consiguiente $|X| = |Y|$.
2) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que $|X| = |Y|$ y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. A partir de f se define a la función $\phi : S^{(X)} \longrightarrow S^{(Y)}$ dada por $\phi(s, x) := (s, f(x))$. No es difícil ver que ϕ es un isomorfismo de acciones. Por lo tanto $S^{(X)} \cong S^{(Y)}$. ☐

Ahora que sabemos que cualesquiera dos bases de una acción libre deben tener el mismo cardinal es que tiene sentido definir el concepto de rango (o dimensión).

Definición 7.1.13. *Si A es una $S-$acción libre, se define el rango de A, denotado $Rank(A)$, como $Rank(A) := |X|$ donde X es cualquier base de A.*

Observación 7.1.14. *Para cada conjunto no vacío X se tiene que $Rank(S^{(X)}) = |X|$.*

Teorema. 7.1.15. *Sean A y B dos $S-$acciones libres. Entonces $A \cong B$ si y solo si $Rank(A) = Rank(B)$.*

Demostración. Suponga que $A \cong B$ y sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de acciones. Si X es una base de A, de la demostración del Lema 7.1.7 se sigue que $f(X)$ es base de B. Ahora bien, se tiene que $Rank(A) := |X|$ y como $f(X)$ es base de B, entonces $Rank(B) := |f(X)|$. Por otra parte, al ser f una biyección se tiene que $|X| = |f(X)|$ y por lo tanto $Rank(A) = Rank(B)$. Y viceversa, suponga que $Rank(A) = Rank(B)$ y sea X una base de A. Como $Rank(A) := |X|$, entonces también $Rank(B) := |X|$ y además de la primera parte de la demostración del Teorema 7.1.10 se sigue que $A \cong S^{(X)}$. Como $Rank(B) := |X|$, entonces B tiene una base de cardinal $|X|$ digamos Y. Para esta base se tiene que $B \cong S^{(Y)}$ y como $|Y| = |X|$, entonces $S^{(X)} \cong S^{(Y)}$. En consecuencia $A \cong B$. ☐

Proposición 7.1.16. *Si A es una $S-$acción libre, entonces $|S| \leq |A|$.*

Demostración. Si X es una base de A, de la primera parte de la demostración del Teorema 7.1.10 se sigue que $A \cong S^{(X)}$. Así, sea $f : S^{(X)} \longrightarrow A$ un isomorfismo de acciones. Tómese $x_0 \in X$ arbitrario y considere a la función $\alpha : S \longrightarrow S^{(X)}$ dada por $\alpha(s) := (s, x_0)$. Está claro que α es una función inyectiva, luego como f también es inyectiva se sigue que $f\alpha : S \longrightarrow A$ es inyectiva. De ahí que $|S| \leq |A|$. ☐

Ejemplos 7.1.17.

1. *Se tiene que $\{e\}$ es una base para la $S-$acción regular ${}_SS$. Por lo tanto ${}_SS$ es libre con $Rank({}_SS) = 1$.*

2. *Si $p \geq 2$ es un entero, entonces el conjunto $\mathbb{Z}_p$ de clases residuales módulo p es una $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción haciendo para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada $[a] \in \mathbb{Z}_p$, $n[a] := [na]$. Como $\mathbb{Z}_p$ es finito y $\mathbb{Z}$ es infinito, de la Proposición 7.1.16 se sigue que $\mathbb{Z}_p$ no es una $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción libre.*

3. *Sobre cualquier monoide no trivial S siempre pueden construirse $S-$acciones libres y $S-$acciones que no son libres. En efecto, sea $X := \{x\}$ un conjunto con exactamente un elemento. La $S-$acción $S^{(X)}$ es libre. Ahora bien, podemos dotar a X de estructura de $S-$acción haciendo para cada $s \in S$, $sx := x$. Como X tiene solo un elemento y S tiene más de uno, la Proposición 7.1.16 implica que X no puede ser una $S-$acción libre. De hecho, cualquier $S-$acción cuyo cardinal sea menor que $|S|$ no puede ser libre.*

4. *$\mathbb{Q}$ no es una $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción libre. En efecto, si suponemos que $X \subseteq \mathbb{Q}$ es una base para $\mathbb{Q}$, enonces X debe tener exactamente un elemento, pues si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in X$ son tales que $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, entonces al ser X una base, la igualdad $(bc)\frac{a}{b} = (ad)\frac{c}{d}$ debe implicar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo cuál no es cierto. Por consiguiente X debe tener exactamente un elemento, pero esto conlleva a que $\mathbb{Q}$ es una $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción f.g, lo cuál es una contradicción (véase el tercero de los Ejemplos 6.1.8). Por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es una $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción libre.*

Los ejemplos anteriores dan muestra de que no toda acción es libre, sin embargo, como en el caso de los módulos, resulta cierto que cualquier acción es isomorfa a un cociente de una acción libre.

Teorema. 7.1.18. *Para cada $S-$acción A existe un conjunto X y un $S-$morfismo sobreyectivo $\varphi : S^{(X)} \longrightarrow A$. En particular $\dfrac{S^{(X)}}{Ker\varphi} \cong A$.*

Demostración. Sea A una $S-$acción. Viendo a A simplemente como un conjunto, considerar a la $S-$acción libre $S^{(A)}$. Por la propiedad universal de las bases (Teorema 7.1.6), para la función $id_A : A \longrightarrow_S A$ existe un único $S-$morfismo $\varphi : S^{(A)} \longrightarrow A$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id_A"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & & A \\
& S^{(A)} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

De ahí que $\varphi\eta_A = id_A$ y por lo tanto φ tiene una inversa derecha, lo que implica que φ es sobreyectiva. Finalmente, del Corolario 3.1.2 se concluye que $\dfrac{S^{(A)}}{Ker\varphi} \cong A$. □

Teorema. 7.1.19. *Sea A una $S-$acción libre. Si A es Noetheriana, entonces $Rank(A)$ es finito.*

Demostración. Suponga que A es una acción libre Noetheriana que no es de rango finito. Luego, existe X una base de A con una infinidad de elementos. Como X es infinito, es posible construir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que si $n \neq m$, entonces $x_n \neq x_m$. Para tal sucesión afirmamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \notin \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$: en efecto, suponga que para algún $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $x_{n+1} \in \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$. Entonces $x_{n+1} = sx_i$ para algunos $s \in S$ e $i \leq n$. Ahora bien, como los elementos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenecen a X, la cuál es una base, la igualdad $x_{n+1} = sx_i$ implica que $x_{n+1} = x_i$, pero como $n + 1 \neq i$, entonces $x_{n+1} \neq x_i$, contradicción. Por consiguiente para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \notin \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$. Ahora bien, de esto último se sigue que

$$\langle x_1\rangle \subsetneq \langle x_1, x_2\rangle \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3\rangle \subsetneq ... \subsetneq ...$$

y así, A tiene una sucesión creciente de subacciones que no se estaciona, pero esto no puede ocurrir, pues A es Noetheriana. Esta contradicción permite concluir que $Rank(A)$ es finito. ☐

Sobre un grupo, una acción libre es Noetheriana si y solo si es de rango finito.

Teorema. 7.1.20. *Si S es un grupo y A es una $S-$acción libre, entonces A es Noetheriana si y solo si $Rank(A)$ es finito.*

Demostración. Sea A una $S-$acción libre. Si A es Noetheriana, que $Rank(A)$ es finito se sigue del Teorema anterior. Y viceversa, suponga que $Rank(A)$ es finito. Como sobre un grupo, toda acción es completamente reducible (ver Teorema 4.2.11), entonces A es completamente reducible. Más aún, como A es de rango finito, A debe ser generada por un conjunto finito i,e, A es f.g. Por lo tanto del Teorema 6.2.12 se sigue que A es Noetheriana. ☐

7.2. Acciones libres sobre monoides de ideales principales

Observación 7.2.1. *No toda subacción de una acción libre es libre. En efecto, considerar al monoide $\mathbb{Z}_4 := \{[0], [1], [2], [3]\}$ de clases residuales módulo 4 bajo el producto usual de clases. Se tiene que la $\mathbb{Z}_4-$acción regular $\mathbb{Z}_4$ es una acción libre de rango 1. Además, cualquier ideal izquierdo del monoide $\mathbb{Z}_4$ es una subacción de ${}_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_4$. En particular, el ideal izquierdo $\langle[2]\rangle = \{[0], [2]\}$ es subacción de ${}_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_4$, pero $\langle[2]\rangle$ no es una $\mathbb{Z}_4-$acción libre, pues si lo fuera, la Proposición 7.1.16 garantiza que $\langle[2]\rangle$ tendría al menos tantos elementos como $\mathbb{Z}_4$, pero esto no sucede. Por consiguiente $\langle[2]\rangle$ no es una $\mathbb{Z}_4-$acción libre.*

Recordar que cuando se trabaja con anillos y sus módulos, para un dominio entero R, que R sea de ideales principales es equivalente a que todo submódulo de un $R-$módulo libre es libre. Para el caso de los monoides y sus acciones se tienen resultados análogos.

Teorema. 7.2.2. *Sea S un monoide cancelativo derecho (véase Definición 1.2.15). Si S es de ideales principales izquierdos, entonces toda subacción de una $S-$acción libre es libre.*

Demostración. Suponga que S es de ideales principales izquierdos. Como toda $S-$acción libre es isomorfa a una de la forma $S^{(X)}$, bastará con realizar la demostración para acciones de este tipo. Dicho lo anterior, sea A una subacción de $S^{(X)}$. De acuerdo con la Observación 7.1.5, se tiene que si para cada $x \in X$ se define $S^{(x)} := S \times \{x\}$, entonces $S^{(X)} = \bigcup\limits_{x\in X} S^{(x)}$ con $S^{(x)} \cap S^{(y)} = \emptyset$ si $x \neq y$. De ahí que $A = A \cap S^{(X)} = A \cap \bigcup\limits_{x\in X} S^{(x)} = \bigcup\limits_{x\in X} (A \cap S^{(x)})$. Si para cada $x \in X$ definimos $Ax := A \cap S^{(x)}$, entonces la igualdad anterior toma la forma $A = \bigcup\limits_{x\in X} Ax$. Ahora, para $Z := \{x \in X \,|\, Ax \neq \emptyset\}$, es claro que $A = \bigcup\limits_{x\in Z} Ax$. Observe que si $x \in Z$ y $(s, y) \in Ax := A \cap S^{(x)}$, entonces $(s, y) \in S^{(x)} := S \times \{x\}$ y por lo tanto $y = x$. De lo anterior se sigue que $Ax = \{(s, x) \,|\, (s, x) \in A\}$. Veamos ahora que para cada $x \in Z$ el conjunto $I_x := \{s \in S \,|\, (s, x) \in A\}$ es un ideal izquierdo de S: en efecto, como $x \in Z$, entonces $Ax = \{(s, x) \,|\, (s, x) \in A\}$ es no vacío y por consiguiente I_x es no vacío. Así, para $a \in I_x$ y $s \in S$ arbitrarios se tiene que $(a, x) \in A$ y en consecuencia $s(a, x) = (sa, x) \in A$. De ahí que $sa \in I_x$ y por lo tanto I_x es un ideal izquierdo de S. Una vez establecido lo anterior, debido a que S es de ideales principales izquierdos, para cada $x \in Z$ existe $a_x \in I_x$ tal que $I_x = \langle a_x\rangle := \{sa_x \,|\, s \in S\}$. Ahora bien, como cada $a_x \in I_x$, entonces $(a_x, x) \in A$ y por consiguiente la colección $\beta := \{(a_x, x) \,|\, x \in Z\}$ es un subconjunto de A. Afirmamos que β es una base de A: en efecto, si $(s, x) \in A$ es arbitrario, entonces $s \in I_x = \langle a_x\rangle$ y así $s = ta_x$ para algún $t \in S$. Luego $(s, x) = (ta_x, x) = t(a_x, x) \in \langle\beta\rangle$ y por consiguiente $A = \langle\beta\rangle$. Ahora bien, si $x, y \in Z$ y $s, t \in S$ son tales que $t(a_x, x) = s(a_y, y)$, entonces $(ta_x, x) = (sa_y, y)$ y en consecuencia $ta_x = sa_y$ y $x = y$. De esto último la igualdad $ta_x = sa_y$ toma la forma $ta_x = sa_x$, pero como S es cancelativo derecho, entonces $t = s$ y por lo tanto β es base de A. De ahí que A es libre. Más aún, está claro que la función $(a_x, x) \longmapsto x$ es una biyección entre β y Z. De ahí que $|\beta| = |Z| \leq |X|$ y por consiguiente $Rank(A) \leq Rank(S^{(X)})$. □

Teorema. 7.2.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide abeliano y cancelativo S:*

1. *S es de ideales principales.*
2. *Toda subacción de una $S-$acción libre es libre.*

Demostración. $1) \implies 2)$ Se sigue observando primero que para monoides conmutativos, ideal izquierdo = ideal derecho = ideal, y cancelativo izquierdo = cancelativo derecho = cancelativo. Después, aplique el Teorema anterior.

$2) \implies 1)$ Suponga que toda subacción de una $S-$acción libre es libre y sea I un ideal arbitrario de S. Como ${}_SS$ es libre de rango 1 y sus subacciones son precisamente los ideales de S, entonces I es una $S-$acción libre. Así, sea X una base de I. Para $x, y \in X$, de que S es abeliano, la igualdad $xy = yx$ junto con que x y y pertenezcan a una base, implica que

$x = y$ y por lo tanto X debe consistir de exactamente un elemento. De ahí que I es una subacción cíclica de ${}_SS$ i,e, I es un ideal principal de S. Por consiguiente S es de ideales principales. □

Corolario 7.2.4. *Sea S un monoide cancelativo derecho. Si S es de ideales principales izquierdos, entonces o ${}_SS$ es simple o S tiene una infinidad de elementos.*

Demostración. Suponga que S es un monoide finito y que ${}_SS$ no es una acción simple. Entonces existe I un ideal izquierdo de S con $I \neq S$. Ahora bien, como S es cancelativo derecho y de ideales principales izquierdos, entonces toda subacción de una $S-$acción libre es libre. En particular como ${}_SS$ es libre, I debe ser una $S-$acción libre, de manera que el Lema 7.1.16 garantiza que $|S| \leq |I|$, pero como S es finito e $I \neq S$, entonces $|I| < |S|$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto ${}_SS$ es simple o S tiene una infinidad de elementos. □

7.3. Suma directa de acciones libres

Definición 7.3.1. *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una colección arbitraria de $S-$acciones. Sobre el conjunto*

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$$

se define para cada $(a,i) \in \coprod\limits_{i\in I} A_i$ y cada $s \in S$, $s(a,i) := (sa,i)$. No es difícil ver que con lo anterior $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ es una $S-$acción llamada suma directa de la familia $(A_i)_{i\in I}$.

Lema 7.3.2. *Sean $(A_i)_{i\in I}$ y $(B_i)_{i\in I}$ dos familias de $S-$acciones y suponga que para cada $i \in I$, $A_i \cong B_i$. Entonces $\coprod\limits_{i\in I} A_i \cong \coprod\limits_{i\in I} B_i$.*

Demostración. Para cada $i \in I$ sea $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ un isomorfismo y considere a la función $F : \coprod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} B_i$ dada por $F(a,i) := (f_i(a),i)$. Como cada f_i es una biyección, entonces está claro que F es también una biyección. Ahora bien, si $s \in S$, se tiene que $F(s(a,i)) = F(sa,i) := (f_i(sa),i) = (sf_i(a),i) = s(f_i(a),i) = sF(a,i)$. De ahí que F es un $S-$morfismo biyectivo i,e, F es un isomorfismo. Por consiguiente $\coprod\limits_{i\in I} A_i \cong \coprod\limits_{i\in I} B_i$. □

A continuación exhibiremos que la suma directa de una familia de acciones libres es de nuevo una acción libre.

Teorema. 7.3.3. *Sea I un conjunto no vacío de índices y para cada $i \in I$ sea X_i un conjunto no vacío. Entonces $\coprod\limits_{i\in I} S^{(X_i)} \cong S^{\left(\coprod\limits_{i\in I} X_i\right)}$ donde $\coprod\limits_{i\in I} X_i := \bigcup\limits_{i\in I}(X_i \times \{i\})$. En particular $\coprod\limits_{i\in I} S^{(X_i)}$ es libre y $Rank\left(\coprod\limits_{i\in I} S^{(X_i)}\right) = \sum\limits_{i\in I} Rank\left(S^{(X_i)}\right)$.*

Demostración. Observe que los elementos de $\coprod_{i\in I} S^{(X_i)}$ son parejas de la forma $((s,x),i)$ donde $s \in S$ y $x \in X_i$. Mientras que para $S^{\left(\coprod_{i\in I} X_i\right)}$, sus elementos son parejas de la forma $(s,(x,i))$ con $s \in S$ y $x \in X_i$. Así, sea $\vartheta : \coprod_{i\in I} S^{(X_i)} \longrightarrow S^{\left(\coprod_{i\in I} X_i\right)}$ dada por $\vartheta[((s,x),i)] := (s,(x,i))$. No es difícil ver que ϑ es una biyección. Más aún, para cada $t \in S$ y cada $((s,x),i) \in \coprod_{i\in I} S^{(X_i)}$ se tiene que $\vartheta[t((s,x),i)] = \vartheta[(t(s,x),i)] = \vartheta[((ts,x),i)] := (ts,(x,i)) = t(s,(x,i)) = t\vartheta[((s,x),i)]$ y por lo tanto ϑ es un $S-$morfismo. En consecuencia ϑ es un isomorfismo de acciones y por consiguiente $\coprod_{i\in I} S^{(X_i)} \cong S^{\left(\coprod_{i\in I} X_i\right)}$. De ahí que $\coprod_{i\in I} S^{(X_i)}$ es libre. Finalmente, del Teorema 7.1.15 se desprende que $Rank\left(\coprod_{i\in I} S^{(X_i)}\right) = Rank\left(S^{\left(\coprod_{i\in I} X_i\right)}\right) := \left|\coprod_{i\in I} X_i\right| = \left|\bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\})\right| = \sum_{i\in I} |X_i| = \sum_{i\in I} Rank\left(S^{(X_i)}\right)$. □

Corolario 7.3.4. *Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de $S-$acciones libres, entonces $\coprod_{i\in I} A_i$ es libre y $Rank\left(\coprod_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} Rank\,(A_i)$.*

Demostración. Si cada A_i es libre, entonces para cada $i \in I$ existe un conjunto no vacío X_i tal que $A_i \cong S^{(X_i)}$. Así, del Lema 7.3.2 se sigue que $\coprod_{i\in I} A_i \cong \coprod_{i\in I} S^{(X_i)}$, pero por el Teorema anterior, $\coprod_{i\in I} S^{(X_i)}$ es libre con $Rank\left(\coprod_{i\in I} S^{(X_i)}\right) = \sum_{i\in I} Rank\left(S^{(X_i)}\right)$. De ahí que $\coprod_{i\in I} A_i$ es libre y $Rank\left(\coprod_{i\in I} A_i\right) = Rank\left(\coprod_{i\in I} S^{(X_i)}\right) = \sum_{i\in I} Rank\left(S^{(X_i)}\right) = \sum_{i\in I} Rank\,(A_i)$. □

7.4. Acciones fieles y fuertemente fieles

Recordar que sobre un anillo con división, todo módulo posee una base i,e, sobre este tipo de anillos cualquier módulo resulta ser libre. Para el caso de los monoides y sus acciones, ¿cómo tiene que ser un monoide para que cualquier acción sobre este tenga una base?

Teorema. 7.4.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es el monoide trivial.*
2. *Toda $S-$acción posee una base.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Suponga que $S = \{e\}$ i,e, suponga que S es el monoide trivial. Si A es una $S-$acción arbitraria, entonces está claro que la función $\varphi : A \longrightarrow S^{(A)}$ dada por $\varphi(a) := (e, a)$ es un isomorfismo de acciones, así $A \cong S^{(A)}$ y por lo tanto A es libre. De ahí que A posee una base.
2) $\Longrightarrow$ 1) Si toda $S-$acción posee una base, entonces el tercero de los Ejemplos 7.1.17 implica que S tiene que ser el monoide trivial. ☐

De esto se sigue que cuando trabajamos con monoides con más de un elemento (que es lo más habitual), siempre pueden construirse acciones libres y acciones que no son libres, sin embargo, cuando de grupos se trata, puede probarse que, para cierto tipo de acciones, siempre es posible construir una base. Para tal fin se introducen las siguientes nociones.

Definición 7.4.2. *Sea A una $S-$acción y $s, t \in S$. Se dice que el par (s, t) es:*

1. *$A-$fiel, si para cada $a \in A$, $sa = ta$.*
2. *fuertemente $A-$fiel si existe $a \in A$ tal que $sa = ta$.*

Observación 7.4.3. *Si A es una $S-$acción, es claro que si el par (s, t) es $A-$fiel (fuertemente $A-$fiel), entonces el par (t, s) también es $A-$fiel (fuertemente $A-$fiel). Además, no es difícil ver que para cada $s \in S$ el par (s, s) siempre es $A-$fiel (fuertemente $A-$fiel). Por otra parte, si los pares (s, t) y (t, r) son $A-$fieles, entonces para cada $a \in A$ ocurre que $sa = ta$ y $ta = ra$, por lo que $sa = ra$ para cada $a \in A$ y así (s, r) es $A-$fiel. De lo anterior se sigue que la relación $s \sim t$ si y solo si (s, t) es $A-$fiel, es una relación de equivalencia sobre S.*

Definición 7.4.4. *Se dice que la $S-$acción A es:*

1. *fiel si para cada $s, t \in S$, que el par (s, t) sea $A-$fiel implica que $s = t$.*
2. *fuertemente fiel si para cada $s, t \in S$, que el par (s, t) sea fuertemente $A-$fiel implica que $s = t$.*

Proposición 7.4.5.

1. *Sea A una $S-$acción y $B \leq A$. Si B es fiel, entonces A es fiel.*
2. *Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de $S-$acciones fuertemente fieles, entonces $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ es fuertemente fiel.*

Demostración. 1) Sea (s, t) un par $A-$fiel. Entonces para cada $a \in A$, $sa = ta$, y en particular $sb = tb$ para cada $b \in B$. De ahí que (s, t) es $B-$fiel, pero como B es una subacción fiel, entonces $s = t$ y por consiguiente A es fiel.
2) Sea (s, t) un par fuertemente $\coprod\limits_{i\in I} A_i-$fiel. Entonces existe $(a, j) \in \coprod\limits_{i\in I} A_i$ tal que $s(a, j) = t(a, j)$, de ahí que $sa = ta$ con $a \in A_j$. Así, el par (s, t) es fuertemente A_j-fiel, pero A_j es una acción fuertemente fiel, por lo que $s = t$ y en conscuencia $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ es fuertemente fiel. ☐

Ejemplos 7.4.6. 1. *Es claro de la Definición 7.4.2 que todo par $A-$fiel es fuertemente $A-$fiel. De ahí que toda $S-$acción fuertemente fiel es fiel.*

2. *Para cada monoide S, toda $S-$acción libre es fiel. En efecto, sean A una $S-$acción libre y X una base de A. Suponga que el par (s,t) es $A-$fiel. Entonces ocurre que $sa = ta$ para cada $a \in A$. En particular, para $x \in X$ se tiene que $sx = tx$, pero como x es elemento de una base, entonces $s = t$ y por consiguiente A es fiel.*

Teorema. 7.4.7. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es cancelativo derecho.*
2. *Toda $S-$acción libre es fuertemente fiel.*

Demostración. Suponga que S es cancelativo derecho y sean A una $S-$acción libre y X una base de A. Si el par (s,t) es fuertemente $A-$fiel, entonces ocurre que $sa = ta$ para algún $a \in A$. Por otra parte, como $A = \langle X \rangle$, puede escribirse $a = rx$ para algunos $r \in S$ y $x \in X$. Así la igauldad $sa = ta$ se reescribe como $s(rx) = t(rx)$, o bien $(sr)x = (tr)x$. Ahora bien, de esta última igualdad y de que x pertenezca a una base se desprende que $sr = tr$, pero como S es cancelativo derecho, entonces $s = t$ y por consiguiente A es fuertemente fiel. Y viceversa, si toda $S-$acción libre es fuertemente fiel, entonces como ${}_SS$ es libre, ${}_SS$ es fuertemente fiel. Veamos que S es cancelativo derecho: sean $s, t, a \in S$ tales que $sa = ta$. Entonces el par (s,t) es fuertemente ${}_SS-$fiel, pero como ${}_SS$ es una acción fuertemente fiel, entonces $s = t$ y en consecuencia S es cancelativo derecho. □

De acuerdo con el Teorema anterior, sobre un monoide cancelativo derecho, toda acción libre es fuertemente fiel, pero ¿bajo qué condiciones se puede asegurar que toda acción fuertemente fiel es libre?

Teorema. 7.4.8. *Sea A una $S-$acción fuertemente fiel. Si además A es completamente reducible (véase Definición 4.2.3), entonces A es libre.*

Demostración. Sea A una $S-$acción fuertemente fiel y completamente reducible. Considere a la familia $Simp(A)$ de todas las subacciones simples de A. Del Lema 4.2.2 se sigue que $Simp(A)$ es una colección de conjuntos disjuntos por pares, luego, por el axioma de elección, existe $R \subseteq A$ tal que para cada $B \in Simp(A)$, $|R \cap B| = 1$. Veamos que $Simp(A) = \{\langle x \rangle \mid x \in R\}$: en efecto, como A es completamente reducible, del Corolario 4.2.9 se sigue que toda subacción cíclica de A es simple y por lo tanto $\{\langle x \rangle \mid x \in R\} \subseteq Simp(A)$. Ahora, si B es una subacción simple de A, como $|R \cap B| = 1$, existe $x_B \in R \cap B$ tal que $R \cap B = \{x_B\}$, en particular $x_B \in B$ y por lo tanto $\langle x_B \rangle \leq B$. De ahí que como B es simple, entonces $B = \langle x_B \rangle$ y por consiguiente $B \in \{\langle x \rangle \mid x \in R\}$. Así que $Simp(A) \subseteq \{\langle x \rangle \mid x \in R\}$ y en consecuencia $Simp(A) = \{\langle x \rangle \mid x \in R\}$. Ahora bien, de que A es completamente reducible, la última igualdad implica que $A = \bigcup Simp(A) = \bigcup\limits_{x \in R} \langle x \rangle = \langle R \rangle$ i,e, R genera a A. Veamos ahora que R es una base de A: tómense $s, t \in S$ y $x, y \in R$ tales que $tx = sy$. Entonces

$tx = sy \in \langle y \rangle$ y $sy = tx \in \langle x \rangle$, luego $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \emptyset$, pero como, en este caso, toda subacción cíclica es simple y las simples son disjuntas por pares, entonces $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ y por lo tanto $R \cap \langle x \rangle = R \cap \langle y \rangle$. Ahora bien, observe que $x \in R \cap \langle x \rangle$ y $y \in R \cap \langle y \rangle$, pero además recordar que R intersecta a cada subacción simple en exactamente un elemento, luego $R \cap \langle x \rangle = \{x\}$ y $R \cap \langle y \rangle = \{y\}$, de manera que entonces $\{x\} = \{y\}$ y así $x = y$. De esto último, la igualdad $tx = sy$ toma la forma $tx = sx$, pero esto implica que el par (s, t) es fuertemente $A-$fiel, de tal manera que como A es una acción fuertemente fiel, entonces $s = t$. Por consiguiente R es una base de A y en consecuencia A es libre. ☐

Corolario 7.4.9. *Si S es un grupo, entonces la clase de todas las $S-$acciones libres coincide con la clase de todas las $S-$acciones fuertemente fieles.*

Demostración. Considere a las clases

$$\mathfrak{F} := \{A \mid A \text{ es una } S-\text{acción libre}\} \text{ y } \mathfrak{G} := \{B \mid B \text{ es una } S-\text{acción fuertemente fiel}\}$$

Como todo grupo es un monoide cancelativo derecho, del Teorema 7.4.7 se sigue que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Ahora bien, como sobre un grupo toda acción es completamente reducible (véase Teorema 4.2.11), entonces en particular todos los elementos de $\mathfrak{G}$ son acciones completamente reducibles y fuertemente fieles, de manera que el Teorema 7.4.8 conlleva a que todo elemento de $\mathfrak{G}$ es una acción libre y por lo tanto $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$. De ahí que $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. ☐

En resumen, sobre un monoide cancelativo derecho, acción libre $\Longrightarrow$ acción fuertemente fiel, pero cuando el monoide es además un grupo, entonces acción libre = acción fuertemente fiel.

Observación 7.4.10. *Una parte de la prueba del Corolario 7.4.9 depende de la prueba del Teorema 7.4.8, la cual a su vez depende del axioma de elección. Si introducimos el concepto de conjunto linealmente independiente, entonces podemos dar otra demostración del Corolario 7.4.9 que también hace uso del axioma de elección y que recuerda a la técnica usada en módulos para exhibir que sobre anillos con división, todo módulo posee una base. A continuación se establece el concepto de conjunto linealmente independiente:*

Definición 7.4.11. *Si A es una $S-$acción, se dice que $X \subseteq A$ no vacío es linealmente independiente si para cada $s, t \in S$ y cada $x, y \in X$, la igualdad $tx = sy$ implica que $t = s$ y $x = y$.*

Lema 7.4.12. *Si A es una $S-$acción fuertemente fiel, entonces todo subconjunto de la forma $\{a\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Sea $a \in A$ arbitrario y $s, t \in S$ tales que $sa = ta$. Entonces el par (s, t) es fuertemente $A-$fiel, pero como A es una acción fuertemente fiel, entoces $s = t$ y en consecuencia el conjunto $\{a\}$ es linealmente independiente. ☐

Con lo anterior en mente, en seguida se ofrece una nueva demostración del Corolario 7.4.9:

Demostración. Considere a las clases

$$\mathfrak{F} := \{A \mid A \text{ es una } S\text{−acción libre}\} \text{ y } \mathfrak{G} := \{B \mid B \text{ es una } S\text{−acción fuertemente fiel}\}$$

Como todo grupo es un monoide cancelativo derecho, del Teorema 7.4.7 se sigue que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Sea ahora $A \in \mathfrak{G}$ i,e, sea A una $S-$acción fuertemente fiel. Mostraremos primero que si un conjunto de generadores de A contiene un subconjunto linealmente independiente, entonces tal conjunto de generadores contiene una base de A. Para ello, suponga que $X \subseteq A$ es un conjunto de generadores para A tal que existe $E \subseteq A$ linealmente independiente con $E \subseteq X$. Considere a la familia

$$\mathcal{F} := \{Z \subseteq A \mid E \subseteq Z \subseteq X \text{ y } Z \text{ es linealmente independiente}\}$$

Observe que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pues $E \in \mathcal{F}$. Sea ahora $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una $\subseteq -$cadena. Como todo elemento de $\mathcal{C}$ está contenido entre E y X, entonces $E \subseteq \bigcup \mathcal{C} \subseteq X$. Ahora bien, sean $s, t \in S$ y $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ tales que $tx = sy$. Para x y y existen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{C}$ tales que $x \in Z_1$ y $y \in Z_2$. Como $\mathcal{C}$ es una $\subseteq -$cadena, puede suponerse que $Z_1 \subseteq Z_2$, de manera que $x, y \in Z_2$. Ahora bien, como Z_2 es linealmente independiente, la igualdad $tx = sy$ implica que $t = s$ y $x = y$. Por consiguiente $\bigcup \mathcal{C}$ es linealmente independiente y así $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. De lo anterior se sigue que si ordenamos a $\mathcal{F}$ mediante la contención, entonces toda $\subseteq -$cadena de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior, de modo que el Lema de Zorn garantiza la existencia de un $Z_0 \in \mathcal{F}$ el cuál es $\subseteq -$maximal. Observe que por definición de $\mathcal{F}$, Z_0 es un conjunto linealmente independiente tal que $E \subseteq Z_0 \subseteq X$. Veamos que $A = \langle Z_0 \rangle$: en efecto, si por el contrario $A \neq \langle Z_0 \rangle$, entonces existe $a \in A = \langle X \rangle$ tal que $a \notin \langle Z_0 \rangle$. Puede escribirse $a = s_0 x_0$ para algunos $S_0 \in S$ y $x_0 \in X$. Como $a \notin \langle Z_0 \rangle$, entonces es claro que también $x_0 \notin \langle Z_0 \rangle$ y por lo tanto $x_0 \notin Z_0$. De ahí se desprende que $Z_0 \subsetneq Z_0 \cup \{x_0\}$. Por otro lado, observe que $E \subseteq Z_0 \cup \{x_0\} \subseteq X$. Más aún, sean $s, t \in S$ y $x, y \in Z_0 \cup \{x_0\}$ tales que $tx = sy$. Se tienen los siguientes casos posibles:

1. $x, y \in Z_0$.
2. $x \in Z_0$ y $y = x_0$.
3. $x = x_0$ y $y \in Z_0$.
4. $x = x_0 = y$.

En el primer caso, como Z_0 es linealmente independiente, la igualdad $tx = sy$ implica que $t = s$ y $x = y$. El segundo caso no puede ocurrir, pues si $x \in Z_0$ y $y = x_0$, entonces la igualdad $tx = sy$ toma la forma $tx = sx_0$, y como S es un grupo, entonces $x_0 = s^{-1}tx \in \langle Z_0 \rangle$, contradicción. Análogamente se deduce que el tercer caso no puede ocurrir. Finalmente en el cuarto caso la igualdad $tx = sy$ se reescribe como $tx_0 = sx_0$, de donde el par (s, t) es fuertemente $A-$fiel, pero como A es una $S-$acción fuertemente fiel, entonces $s = t$. En cualquiera de los casos posibles, la igualdad $tx = sy$ implica que $s = t$ y $x = y$. Por consiguiente $Z_0 \cup \{x_0\}$ es linealmente independiente y por lo tanto $Z_0 \cup \{x_0\} \in \mathcal{F}$ con

$Z_0 \subsetneq Z_0 \cup \{x_0\}$, pero esto contradice la maximalidad de Z_0. Por lo tanto $A = \langle Z_0 \rangle$ y en consecuencia Z_0 es una base de A. Esto exhibe que todo conjunto de generadores de A que contiene un subconjunto linealmente independiente contiene también una base de A. Así que para hacer ver que A tiene una base, solo será necesario exhibir que existe un conjunto de generadores de A que contenga un subconjunto linealmente independiente, pero A es un conjunto de generadores de A tal que cualquier subconjunto de la forma $\{a\}$ es linealmente independiente (ver Lema 7.4.12). De ahí que A posee una base y por lo tanto A es libre. En consecuencia $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ y así $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. ☐

Teorema. 7.4.13. *Si S es un grupo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción A:*

1. *A es libre.*
2. *Existe un conjunto X tal que $A \cong S^{(X)}$.*
3. *A tiene una base categórica.*
4. *A es fuertemente fiel.*

Demostración. Se sigue del Teorema 7.1.10 y del Corolario 7.4.9. ☐

CAPÍTULO 8

ACCIONES SIMÉTRICAS

Recordar que dado un grupo G, un $G-$conjunto es un par $(X, *)$ donde X es un conjunto no vacío y $* : G \times X \longrightarrow X$ es una función tal que para cada $g, h \in G$ y cada $x \in X$, $e * x = x$ y $g * (h * x) = (gh) * x$. Esta noción es estudiada dentro del marco de la Teoría de Grupos y sirve, entre otras cosas, para exhibir resultados fundamentales referentes a grupos finitos, como por ejemplo, los Teoremas de Sylow. Observe que, de acuerdo a la Definición 2.1.2, un $G-$conjunto no es otra cosa más que una acción sobre un grupo, de manera que todos los resultados obtenidos hasta el momento sobre $S-$acciones son válidos también claramente para $G-$conjuntos. Sin embargo, las propiedades que un grupo posee permiten, para el caso de los $G-$conjuntos, abordar conceptos tales como el de órbita, estabilizador, el Teorema de Frobenius, etc. Dicho lo anterior, en este capítulo pretendemos generalizar, para el caso de las $S-$acciones, algunas de las ideas clásicas existentes sobre $G-$conjuntos.

8.1. Acciones simétricas

Lema 8.1.1. *Si A es una $S-$acción, entonces la relación sobre A definida por*

$$x \sim y \Longleftrightarrow y = sx \textit{ para algún } s \in S$$

es una relación reflexiva y transitiva.

Demostración. Está claro que para cada $x \in A$, $x = ex$, de manera que así $x \sim x$ y por lo tanto $\sim$ es reflexiva. Ahora bien, si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $s, t \in S$ tales que $y = sx$ y $z = ty$. De ahí que $z = ty = t(sx) = (ts)x$ y por consiguiente $x \sim z$. En consecuencia $\sim$ es transitiva. ☐

Observación 8.1.2.

1. *Queda claro de la definición de $\sim$, que $x \sim y \iff y \in \langle x \rangle$ (la subacción cíclica generada por x).*

2. *La relación $\sim$ no necesariamente es una relación simétrica. En efecto, considerar al monoide $\mathbb{Z}_4 := \{[0], [1], [2], [3]\}$ de clases residuales módulo 4 bajo el producto usual de clases y también considerar a la $\mathbb{Z}_4-$acción regular $\mathbb{Z}_4$. En este caso, $\langle [2] \rangle = \{[0], [2]\}$. Ahora bien, $[1] \sim [2]$, pues $[2] \in \langle [1] \rangle = \mathbb{Z}_4$, sin embargo, $[2] \nsim [1]$, pues $[1] \notin \langle [2] \rangle$.*

A aquellas $S-$acciones para las cuáles la relación definida en el Lema 8.1.1 resulta ser una relación simétrica se les da un nombre especial.

Definición 8.1.3. *Se dice que una $S-$acción A es simétrica si la relación definida en el Lema 8.1.1 es una relación simétrica.*

Ejemplo 8.1.4. *Sea X un conjunto no vacío y para cada $s \in S$ y $x \in X$ hágase $sx := x$. Con esto X es una $S-$acción. Más aún, X es una $S-$acción simétrica, pues en este caso, para cada $x \in X$ se tiene que $\langle x \rangle = \{x\}$, y así que $y \in \langle x \rangle$ debe implicar que $x = y$, de donde claramente se sigue que $x \in \langle y \rangle$. De esto se desprende que para cada monoide, siempre pueden construirse acciones simétricas.*

En lo sucesivo, $\sim$ siempre denotará a la relación definida en el Lema 8.1.1.

Teorema. 8.1.5. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es un grupo.*

2. *Toda $S-$acción es simétrica.*

Demostración. $1) \implies 2)$ Suponga que S es un grupo y sea A una $S-$acción arbitraria. Si $x, y \in A$ son tales que $x \sim y$, entonces $y = sx$ para algún $s \in S$, de donde $x = s^{-1}y$, y en consecuencia $y \sim x$. Por lo tanto A es simétrica.
$2) \implies 1)$ Si toda $S-$acción es simétrica, en particular lo debe ser la $S-$acción regular ${}_SS$. Está claro que para cada $g \in S$ ocurre que $g \in \langle e \rangle = S$ i,e, $e \sim g$. Así que como ${}_SS$ es simétrica, entonces para cada $g \in S$ se tiene que $g \sim e$, y por lo tanto para cada $g \in S$ existe $s \in S$ tal que $e = sg$. De ahí que todo elemento del monoide S tiene un inverso izquierdo, y por lo tanto el Teorema 1.2.13 garantiza que S es un grupo. ☐

Definición 8.1.6. *Sea A una $S-$acción y $x \in A$.*

1. *Al conjunto $\mathcal{O}(x) := \{y \in A \,|\, x \sim y\}$ se le llama órbita de x en S.*

2. *Al conjunto $Stab(x) := \{s \in S \,|\, sx = x\}$ se le llama estabilizador de x en S.*

Proposición 8.1.7. *Si A es una $S-$acción, entonces para cada $x \in A$ se tiene que:*

1. $\mathcal{O}(x) = \langle x \rangle$ *(y por lo tanto toda órbita es una subacción).*
2. $Stab(x)$ *es submonoide de S. Más aún, si S es un grupo, entonces $Stab(x)$ es subgrupo de S.*
3. *Si A es simétrica, entonces $\mathcal{O}(x)$ es una subacción simple.*

Demostración. 1) Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x) := & \{y \in A \,|\, x \sim y\} \\ = & \{y \in A \,|\, y = sx \text{ para algún } s \in S\} \\ = & \{sx \,|\, s \in S\} \\ = & \langle x \rangle \end{aligned}$$

2) Observe que $Stab(x)$ es no vacío, pues claramente $e \in Stab(x)$. Ahora bien, para $s, t \in Stab(x)$ se tiene que $(st)x = s(tx) = sx = x$ y por consiguiente $st \in Stab(x)$. De ahí que $Stab(x)$ es submonoide de S. Más aún, suponga que S es un grupo. Entonces para $s \in Stab(x)$ la igualdad $sx = x$ implica que $s^{-1}x = x$ y por lo tanto $s^{-1} \in Stab(x)$. En consecuencia $Stab(x)$ es un subgrupo de S.
3) Suponga que A es una $S-$acción simétrica. Del primer inciso se sigue que $\mathcal{O}(x) = \langle x \rangle$. Ahora bien, sea $B \leq \langle x \rangle$ y sea $y \in B$ arbitrario. Entonces $y \in \langle x \rangle$, pero como A es simétrica, esto último implica que $x \in \langle y \rangle$, además, es claro que $\langle y \rangle \leq B$, luego $x \in B$ y en consecuencia $\langle x \rangle \leq B$. De ahí que $B = \langle x \rangle$ y por lo tanto $\langle x \rangle$ es simple. □

Del Lema 8.1.1 y de la Definición 8.1.3, está claro que para acciones simétricas, la relación

$$x \sim y \iff y = sx \text{ para algún } s \in S$$

es una relación de equivalencia. Más aún, observar que la órbita de un elemento es simplemente su clase de equivalencia con respecto de la relación $\sim$. Así, si A es una $S-$acción simétrica, se tiene entonces que $A = \bigcup\limits_{x \in R} \mathcal{O}(x)$ (unión disjunta de órbitas) donde R es un sistema completo de representantes de la relación $\sim$.

Teorema. 8.1.8. *Toda $S-$acción simétrica es completamente reducible.*

Demostración. Sea A una $S-$acción simétrica. Como en este tipo de acciones la relación $\sim$ es una relación de equivalencia, entonces puede escribirse $A = \bigcup\limits_{x \in R} \mathcal{O}(x)$ donde R es un sistema completo de representantes de la relación $\sim$. Además, del tercer inciso de la Proposición 8.1.7 se deduce que cada órbita es una subacción simple, por lo que $\{\langle x \rangle \,|\, x \in R\} \subseteq Simp(A)$ (véase Definición 4.2.1). De ahí que $A = \bigcup\limits_{x \in R} \mathcal{O}(x) \subseteq \bigcup Simp(A)$ y por consiguiente A es completamente reducible. □

8.2. El Teorema órbita-estabilizador

Lema 8.2.1. *Si A es una $S-$acción y $x \in A$, entonces la relación en S definida por:*

$$(s,t) \in \varrho_x \Longleftrightarrow sx = tx$$

es una relación de equivalencia en S.

Demostración. Se sigue de observar los siguientes hechos:

- Para cada $s \in S$, $sx = sx$.
- La igualdad $sx = tx$ implica claramente que $tx = sx$.
- Las igualdades $sx = tx$ y $tx = rx$, implican claramente que $sx = rx$.

□

Teorema. 8.2.2. *Si S es un grupo, A es una $S-$acción y $x \in A$, entonces*

$$(s,t) \in \varrho_x \Longleftrightarrow s^{-1}t \in Stab(x).$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}(s,t) \in \varrho_x &\Longleftrightarrow sx = tx\\ &\Longleftrightarrow (s^{-1}t)x = x\\ &\Longleftrightarrow s^{-1}t \in Stab(x)\end{aligned}$$

□

Veamos cómo son las clases de equivalencia con respecto de la relación ϱ_x:

Proposición 8.2.3. *Sea A una $S-$acción y $x \in A$ fijo. Para cada $s \in S$ denotemos por $\overline{s}$ a la clase de equivalencia de s con respecto de la relación ϱ_x. Entonces $\overline{s} = \{t \in S \mid sx = tx\}$. Más aún, cuando S es un grupo se tiene que $\overline{s} = sStab(x) := \{sr \mid r \in Stab(x)\}$.*

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}\overline{s} &= \{t \in S \mid (s,t) \in \varrho_x\}\\ &= \{t \in S \mid sx = tx\}\end{aligned}$$

Ahora bien, si S es un grupo, entonces

$$\begin{aligned}\overline{s} &= \{t \in S \mid sx = tx\}\\ &= \{t \in S \mid (s^{-1}t)x = x\}\\ &= \{t \in S \mid s^{-1}t \in Stab(x)\}\\ &= \{t \in S \mid s^{-1}t = r, r \in Stab(x)\}\\ &= \{t \in S \mid t = sr, r \in Stab(x)\}\\ &= \{sr \mid r \in Stab(x)\}\\ &= sStab(x)\end{aligned}$$

□

Teorema. 8.2.4. *Sea A una $S-$acción y $x \in A$ fijo. Entonces el conjunto $\dfrac{S}{\varrho_x} := \{\overline{s} \,|\, s \in S\}$ es una $S-$acción haciendo para cada $s, t \in S$, $t\overline{s} := \overline{ts}$. Más aún, $\mathcal{O}(x) \cong \dfrac{S}{\varrho_x}$.*

Demostración. Para cada $s, t \in S$ defínase $t\overline{s} := \overline{ts}$. Veamos que esta operación está bien definida: si $\overline{s} = \overline{r}$ y $t \in S$, entonces $sx = rx$, de donde $t(sx) = t(rx)$ y por lo tanto $(ts)x = (tr)x$. De ahí que $(ts, tr) \in \varrho_x$ y así $t\overline{s} = t\overline{r}$. En consecuencia, la operación $t\overline{s} := \overline{ts}$ está bien definida. Más aún, es claro que con ella, el conjunto $\dfrac{S}{\varrho_x} := \{\overline{s} \,|\, s \in S\}$ es una $S-$acción. Considerar ahora a la función $\varphi : \mathcal{O}(x) \longrightarrow \dfrac{S}{\varrho_x}$ dada por $\varphi(sx) := \overline{s}$. Observar que $sx = tx \iff (s,t) \in \varrho_x \iff \overline{s} = \overline{t}$. Esto implica que φ está bien definida y es una función inyectiva. Además, está claro que φ es sobreyectiva y por consiguiente φ es un isomorfismo de acciones. De ahí que $\mathcal{O}(x) \cong \dfrac{S}{\varrho_x}$. En particular, la subacción cíclica generada por x (que coincide con $\mathcal{O}(x)$) tiene tantos elementos como el conjunto cociente $\dfrac{S}{\varrho_x}$. ☐

Recordar que todo subgrupo de un grupo S induce una relación de equivalencia en S. Más precisamente, si H es un subgrupo del grupo S, la relación

$$(s,t) \in \rho_H \iff s^{-1}t \in H$$

es una relación de equivalencia en S tal que para cada $s \in S$, $sH := \{sh \,|\, h \in H\}$ es la clase de equivalencia de s con respecto de la relación ρ_H. Al cardinal del conjunto cociente $\dfrac{S}{H} := \dfrac{S}{\rho_H} = \{sH \,|\, s \in S\}$ se le conoce como el índice de H en S y se le denota como $[S : H]$.

El siguiente resultado, clásico dentro de la Teoría de Grupos, muestra que hay una estrecha relación entre la órbita de un elemento y su estabilizador.

Teorema. 8.2.5. *(Órbita-Estabilizador) Sean S un grupo, A una $S-$acción y $x \in A$ fijo. Entonces $|\mathcal{O}(x)| = [S : Stab(x)]$.*

Demostración. Del Teorema 8.2.2 se deduce que la relación ϱ_x y la relación $\rho_{Stab(x)}$ inducida por el subgrupo $Stab(x)$ son iguales, de manera que entonces $\dfrac{S}{Stab(x)} = \dfrac{S}{\varrho_x}$. Ahora bien, según el Teorema 8.2.4, se tiene que $\mathcal{O}(x) \cong \dfrac{S}{\varrho_x}$, y por consiguiente $|\mathcal{O}(x)| = \left|\dfrac{S}{\varrho_x}\right| = \left|\dfrac{S}{Stab(x)}\right| = [S : Stab(x)]$. ☐

Corolario 8.2.6. *Sea A una $S-$acción simétrica y finita. Si R es un sistema completo de representantes de la relación $\sim$, entonces:*

1. $|A| = \sum_{x \in R} \left| \frac{S}{\varrho_x} \right|$.

2. $|A| = \sum_{x \in R} [S : Stab(x)]$, *si S es un grupo.*

Demostración. Como A es una $S-$acción simétrica, entonces la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en A, de manera que si R es un sistema completo de representantes de $\sim$, entonces puede escribirse $A = \bigcup_{x \in R} \mathcal{O}(x)$ (unión disjunta). Así, de que A es finita se sigue que $|A| = \left| \bigcup_{x \in R} \mathcal{O}(x) \right| = \sum_{x \in R} |\mathcal{O}(x)| = \sum_{x \in R} \left| \frac{S}{\varrho_x} \right|$. Ahora bien, cuando S es un grupo la igualdad anterior toma la forma $|A| = \left| \bigcup_{x \in R} \mathcal{O}(x) \right| = \sum_{x \in R} |\mathcal{O}(x)| = \sum_{x \in R} [S : Stab(x)]$. □

8.3. Un Teorema de Frobenius

Lema 8.3.1. *Sea A una $S-$acción simétrica y finita. Si R es un sistema completo de representantes de $\sim$, entonces:*

1. *Para cada $x \in A$,* $\sum_{y \in \mathcal{O}(x)} \frac{1}{|\mathcal{O}(y)|} = 1$.

2. $\sum_{x \in A} \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} = |R|$.

Demostración. Sea $x \in A$ arbitrario. Si $y \in \mathcal{O}(x) = \langle x \rangle$, de que A es simétrica se sigue que $x \in \langle y \rangle = \mathcal{O}(y)$ y por lo tanto $\langle y \rangle \leq \langle x \rangle \leq \langle y \rangle$. De ahí que $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ i,e, $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$. Así que $\sum_{y \in \mathcal{O}(x)} \frac{1}{|\mathcal{O}(y)|} = \sum_{y \in \mathcal{O}(x)} \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} = \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} \sum_{y \in \mathcal{O}(x)} 1 = \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} |\mathcal{O}(x)| = 1$. Ahora bien, suponga que $R = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Entonces $A = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}(x_k)$ (unión disjunta). Así, como la suma $\sum_{x \in A} \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|}$ es sobre todos los elementos de A, podemos primero calcular la suma sobre cada órbita y después sumar todos los resultados i,e, se tiene que $\sum_{x \in A} \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{y \in \mathcal{O}(x_k)} \frac{1}{|\mathcal{O}(y)|} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n = |R|$. □

Definición 8.3.2. *Si A es una $S-$acción y $s \in S$, al conjunto*

$$A^s := \{x \in A \,|\, sx = x\}$$

se le llama conjunto de puntos fijos de s.

Teorema. 8.3.3. *Sea S un monoide finito. Si A es una $S-$acción finita, entonces*

$$\sum_{s\in S} |A^s| = \sum_{x\in A} |Stab(x)|.$$

Demostración. La técnica principal a usar en esta demostración consiste en calcular de dos formas distintas al cardinal del conjunto $\mathbb{T} := \{(s,x) \in S \times A \,|\, sx = x\}$. Hacer esto nos conducirá al resultado deseado. Dicho lo anterior, la primera forma de calcular $|\mathbb{T}|$ es exhibiendo que $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{s\in S} (\{s\} \times A^s)$. En efecto, si $(t,x) \in \mathbb{T}$, entonces $tx = x$ y por consiguiente $x \in A^t$. De ahí que $(t,x) \in \{t\} \times A^t \subseteq \bigcup\limits_{s\in S} (\{s\} \times A^s)$ y por lo tanto $\mathbb{T} \subseteq \bigcup\limits_{s\in S} (\{s\} \times A^s)$. Por otra parte, para cada $s \in S$ ocurre que $\{s\} \times A^s = \{(s,x) \,|\, x \in A^s\} = \{(s,x) \,|\, sx = x\} \subseteq \mathbb{T}$. De ahí que $\bigcup\limits_{s\in S} (\{s\} \times A^s) \subseteq \mathbb{T}$ y en consecuencia $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{s\in S} (\{s\} \times A^s)$. No es difícil ver que la unión que aparece en esta igualdad es una unión disjunta, así $|\mathbb{T}| = \left|\bigcup\limits_{s\in S} (\{s\} \times A^s)\right| = \sum\limits_{s\in S} |\{s\} \times A^s| = \sum\limits_{s\in S} |A^s|$ i,e, $|\mathbb{T}| = \sum\limits_{s\in S} |A^s|$. La segunda manera de calcular a $|\mathbb{T}|$ es mostrando que $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{x\in A} (Stab(x) \times \{x\})$. Verificar esta igualdad es totalmente similar a exhibir que $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{s\in S} (\{s\} \times A^s)$ y por eso se omite. Ahora bien, es claro que la unión que aparece en la igualdad $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{x\in A} (Stab(x) \times \{x\})$ es una unión disjunta, luego $|\mathbb{T}| = \left|\bigcup\limits_{s\in S} (Stab(x) \times \{x\})\right| = \sum\limits_{s\in S} |Stab(x) \times \{x\}| = \sum\limits_{s\in S} |Stab(x)|$ i,e, $|\mathbb{T}| = \sum\limits_{s\in S} |Stab(x)|$. Por consiguiente $\sum\limits_{s\in S} |A^s| = \sum\limits_{x\in A} |Stab(x)|$. □

El siguiente resultado es atribuido a F.G. Frobenius y establece una relación entre el cardinal de un grupo finito, el número de órbitas de una acción finita y los cardinales de cada conjunto de puntos fijos.

Teorema. 8.3.4. *(Frobenius) Sean S un grupo finito y A una $S-$acción finita. Si R es un sistema completo de representantes de la relación $\sim$, entonces*

$$\frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} |A^s| = |R|.$$

Demostración. Del Teorema 8.3.3 se sigue que $\sum\limits_{s\in S}|A^s| = \sum\limits_{x\in A}|Stab(x)|$. Ahora bien, el Teorema 8.2.5 (Órbita-Estabilizador) asegura que para cada $x \in A$, $|\mathcal{O}(x)| = [S : Stab(x)]$, pero como S es un grupo finito, esta última igualdad toma la forma $|\mathcal{O}(x)| = \dfrac{|S|}{|Stab(x)|}$, de donde se desprende que $|Stab(x)| = \dfrac{|S|}{|\mathcal{O}(x)|}$. De este modo se tiene que $\sum\limits_{s\in S}|A^s| = \sum\limits_{x\in A}|Stab(x)| = \sum\limits_{x\in A}\dfrac{|S|}{|\mathcal{O}(x)|} = |S|\sum\limits_{x\in A}\dfrac{1}{|\mathcal{O}(x)|}$, pero como sobre un grupo toda acción es simétrica (véase Teorema 8.1.5), entonces del segundo inciso del Lema 8.3.1 se sigue que $\sum\limits_{s\in S}|A^s| = |S||R|$. Finalmente, al hacer un simple despeje obtenemos la igualdad deseada. □

CAPÍTULO 9

LA CATEGORÍA S-ACT

En el presente capítulo consideramos a la clase de todas las $S-$acciones, que, junto con los $S-$morfismos, darán lugar a una categoría que será denotada por $S - Act$. Después, estableceremos algunas de las propiedades que tal categoría posee.

9.1. Las S-acciones y los S-morfismos forman una categoría

Considere lo siguiente:

- Denótese por $\mathcal{S}$ a la clase de todas las $S-$acciones.
- Para cada $A, B \in \mathcal{S}$ sea

$$Hom(A, B) := \{f : A \longrightarrow B \,|\, f \text{ es un } S\text{−morfismo}\}$$

- Para cada $A \in \mathcal{S}$ sea id_A la función identidad.
- Sea $\circ$ la composición usual entre funciones.

De que la composición de dos $S-$morfismos es de nuevo un $S-$morfismo, de que la función identidad es siempre un $S-$morfismo y de que la composición usual entre funciones es asociativa, se desprende que todo lo anterior da lugar a una categoría que será denotada por $S - Act$ y que será llamada la categoría de $S-$acciones.

Definición 9.1.1. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Una subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ consiste de*

- *Una subclase $Ob(\mathcal{B})$ de la clase $Ob(\mathcal{A})$.*

- *Para cada* $X, Y \in Ob(\mathcal{B})$ *un conjunto* $Hom_{\mathcal{B}}(X, Y)$.

Además, para cada $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{B})$ *se ha de verificar que*

1. $Hom_{\mathcal{B}}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$.
2. $id_X \in Hom_{\mathcal{B}}(X, X)$.
3. *Si* $f \in Hom_{\mathcal{B}}(X, Y)$ *y* $g \in Hom_{\mathcal{B}}(Y, Z)$ *entonces* $gf \in Hom_{\mathcal{B}}(X, Z)$

Se prueba sin dificultad que las siguientes son subcategorías de $S - Act$:

1. $(S - Act)_0$. En este caso, se considera a la clase de todas las $S-$acciones con un único elemento cero, y para cualesquiera A y B dos de tales acciones, se considera a $Hom(A, B)$ tal como se definió en $S - Act$. Adicionalmente, el Lema 3.3.1 afirma que cualquier $S-$morfismo de A en B manda el elemento cero de A en el elemento cero de B.

2. $S - Act_0$. Aquí, se considera a la clase de aquellas $S-$acciones con un único elemento cero para las cuales existe un $s \in S$ que anula a todos sus elementos i,e, se considera a la clase de todas las $S-$acciones A con único elemento cero, digamos θ_A, para las que existe $s \in S$ tal que $sa = \theta_A$ para cada $a \in A$. Si A y B son dos de tales $S-$acciones, $Hom(A, B)$ se define como en $S - Act$. No es difícil ver que de hecho, $S - Act_0$ es una subcategoría de $(S - Act)_0$.

9.2. Productos y coproductos en S-Act

El siguiente Teorema exhibe que toda familia no vacía de $S-$acciones tiene un producto en $S - Act$.

Teorema. 9.2.1. *Sea* $(A_i)_{i\in I}$ *una familia no vacía de* $S-$*acciones y considere al conjunto*

$$\prod_{i\in I} A_i := \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ para cada } i \in I\}$$

Entonces:

1. $\prod_{i\in I} A_i$ *es una* $S-$*acción, definiendo para cada* $s \in S$ *y cada* $f \in \prod_{i\in I} A_i$ *a la función* $sf : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ *dada por* $(sf)(i) := sf(i)$.

2. *Para cada* $j \in I$, *la función* $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ *dada por* $\pi_j(f) := f(j)$ *es un* $S-$*morfismo.*

3. *La familia* $\left\{ \prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j \right\}_{j\in I}$ *es un producto en* $S - Act$ *para la familia* $(A_i)_{i\in I}$.

Demostración. $1)$ Sean $s, t \in S$ y $f \in \prod\limits_{i\in I} A_i$. Se tiene que $sf \in \prod\limits_{i\in I} A_i$, pues para cada $i \in I$, $f(i) \in A_i$, luego $sf(i) \in A_i$ y así $(sf)(i) \in A_i$. Ahora bien, no es difícil ver que $ef = f$. Más aún, para cada $i \in I$ ocurre que $[s(tf)](i) = s((tf)(i)) = s(tf(i)) = (st)f(i) = [(st)f](i)$ i,e, $[s(tf)](i) = [(st)f](i)$. De ahí que $s(tf) = (st)f$ y por consiguiente $\prod\limits_{i\in I} A_i$ es una $S-$acción.
2) Sea $j \in I$ arbitrario y considere a la función $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ dada por $\pi_j(f) := f(j)$. Se tiene que $\pi_j(sf) := (sf)(j) := sf(j) = s\pi_j(f)$. En consecuencia π_j es un $S-$morfismo.
3) Sea $\left\{ P \xrightarrow{f_j} A_j \right\}_{j\in I}$ una familia arbitraria de $S-$morfismos y para cada $p \in P$ defínase a la función $\varphi_p : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ como $\varphi_p(j) := f_j(p)$. Está claro que cada $\varphi_p \in \prod\limits_{i\in I} A_i$. Ahora bien, considere a la función $\Phi : P \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} A_i$ definida por $\Phi(p) := \varphi_p$. Observe que si $s \in S$ y $p \in P$, entonces para cada $j \in I$ se tiene que $\varphi_{sp}(j) := f_j(sp) = sf_j(p) = s\varphi_p(j) = (s\varphi_p)(j)$ i,e, $\varphi_{sp}(j) = (s\varphi_p)(j)$. De ahí que $\varphi_{sp} = s\varphi_p$. De esto se sigue que $\Phi(sp) = s\Phi(p)$ y por consiguiente Φ es un $S-$morfismo. Más aún, para cada $j \in I$ y cada $p \in P$ se tiene que $\pi_j(\Phi(p)) = \pi_j(\varphi_p) := \varphi_p(j) = f_j(p)$ i,e, $(\pi_j\Phi)(p) = f_j(p)$. En consecuencia $f_j = \pi_j\Phi$. De esto se desprende que para cada $j \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "f_j"] \arrow[dr, dashed, "\Phi"'] & & A_j \\
& \prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[ur, "\pi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Para concluir, suponga que $\Psi : P \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} A_i$ es otro $S-$morfismo tal que para cada $j \in I$, $f_j = \pi_j\Psi$. Para $p \in P$ arbitrario se tiene que $\Psi(p)(j) = \pi_j(\Psi(p)) = f_j(p) = \pi_j(\Phi(p)) = \Phi(p)(j)$ i,e, $\Psi(p)(j) = \Phi(p)(j)$ para cada $j \in I$. De ahí que $\Psi(p) = \Phi(p)$ para cada $p \in P$ y por consiguiente $\Psi = \Phi$. En consecuencia $\left\{ \prod\limits_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j \right\}_{j\in I}$ es un producto en $S - Act$ para la familia $(A_i)_{i\in I}$. ☐

Definición 9.2.2. *Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de $S-$acciones, a la $S-$acción $\prod\limits_{i\in I} A_i$ definida en el Teorema anterior se le llama $S-$acción producto, y a cada $S-$morfismo $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ se le llama $S-$morfismo proyección.*

Con respecto al coproducto de una familia de $S-$acciones tenemos el siguiente resultado.

Teorema. 9.2.3. *Sea* $(A_i)_{i\in I}$ *una familia no vacía de* $S-$*acciones y sea* $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ *la* $S-$*acción de la Definición 7.3.1. Entonces:*

1. *Para cada* $j \in I$*, la función* $\sigma_j : A_j \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} A_i$ *definida como* $\sigma_j(a) := (a, j)$ *es un* $S-$*morfismo.*
2. *La familia* $\left\{ A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod\limits_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ *es un coproducto en* $S - Act$ *para la familia* $(A_i)_{i\in I}$*.*

Demostración. Sea $j \in I$ arbitrario y considere a la función $\sigma_j : A_j \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} A_i$ definida como $\sigma_j(a) := (a, j)$. Se tiene que $\sigma_j(sa) := (sa, j) = s(a, j) = s\sigma_j(a)$ y por lo tanto σ_j es un $S-$morfismo. Ahora, sea $\left\{ A_j \xrightarrow{f_j} Q \right\}_{j\in I}$ una familia arbitraria de $S-$morfismos. Defínase a la función $\Sigma : \coprod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow Q$ como $\Sigma(a, j) := f_j(a)$. Observar que $\Sigma(s(a, j)) = \Sigma(sa, j) := f_j(sa) = sf_j(a) = s\Sigma(a, j)$. Por lo tanto Σ es un $S-$morfismo. Ahora bien, si $j \in I$ y $a \in A_j$ son cualesquiera, entonces $\Sigma(\sigma_j(a)) = \Sigma(a, j) := f_j(a)$, de donde $f_j = \Sigma\sigma_j$. Así, para cada $j \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "f_j"] \arrow[dr, "\sigma_j"'] & & Q \\
& \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[ur, dashed, "\Sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Finalmente, sea $\Omega : \coprod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow Q$ un $S-$morfismo con la propiedad de que para cada $j \in I$, $f_j = \Omega\sigma_j$. Entonces se tiene que $\Omega(a, j) = \Omega(\sigma_j(a)) = f_j(a) = \Sigma(\sigma_j(a)) = \Sigma(a, j)$. De ahí que $\Omega = \Sigma$ y por consiguiente la familia $\left\{ A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod\limits_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ es un coproducto en $S - Act$ para $(A_i)_{i\in I}$. ☐

Teorema. 9.2.4. *Sean* $(A_i)_{i\in I}$ *una familia de* $S-$*acciones y* B *una* $S-$*acción. Entonces hay una biyección entre los conjuntos* $Hom(\coprod\limits_{i\in I} A_i, B)$ *y* $\prod\limits_{i\in I} Hom(A_i, B)$*.*

Demostración. Sea $f : \coprod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow B$ un $S-$morfismo arbitrario. Note que para cada $j \in I$, el $S-$morfismo composición $A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod\limits_{i\in I} A_i \xrightarrow{f} B$ pertenece al conjunto $Hom(A_j, B)$. Con esto en mente, sea $\overline{f} : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} Hom(A_i, B)$ la función definida por $\overline{f}(j) := f\sigma_j$. Entonces para cada $j \in I$ ocurre que $\overline{f}(j) \in Hom(A_j, B)$ y por consiguiente $\overline{f} \in \prod\limits_{i\in I} Hom(A_i, B)$.

Considere ahora a la función $\Gamma : Hom(\coprod_{i\in I} A_i, B) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom(A_i, B)$ dada por $\Gamma(f) := \overline{f}$. Veamos que Γ es una biyección: suponga que $f, g \in Hom(\coprod_{i\in I} A_i, B)$ son tales que $\Gamma(f) = \Gamma(g)$. Entonces $\overline{f} = \overline{g}$ y por lo tanto para cada $j \in I$, $\overline{f}(j) = \overline{g}(j)$ i,e, $f\sigma_j = g\sigma_j$. Ahora bien, como $\left\{ A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ es un coproducto para $(A_i)_{i\in I}$, entonces para la familia $\left\{ A_j \xrightarrow{f\sigma_j = g\sigma_j} B \right\}_{j\in I}$ existe un único $S-$morfismo α tal que para cada $j \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "f\sigma_j = g\sigma_j"] \arrow[dr, "\sigma_j"'] & & B \\
& \coprod_{i\in I} A_i \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Está claro que f y g hacen conmutativo al diagrama anterior, de manera que la unicidad de α implica que $f = g$. En consecuencia Γ es inyectiva. Ahora, para $F \in \prod_{i\in I} Hom(A_i, B)$ arbitraria se tiene que para cada $j \in I$, $F(j) \in Hom(A_j, B)$. Así, puede tomarse en cuenta a la familia $\left\{ A_j \xrightarrow{F((j)} B \right\}_{j\in I}$, y de nuevo, al ser $\left\{ A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ un coproducto para $(A_i)_{i\in I}$, existe un único $S-$morfismo f tal que para cada $j \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "F(j)"] \arrow[dr, "\sigma_j"'] & & B \\
& \coprod_{i\in I} A_i \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta i,e, $F(j) = f\sigma_j$. De ahí que para cada $j \in I$, $\Gamma(f)(j) := \overline{f}(j) := f\sigma_j = F(j)$ y por lo tanto $\Gamma(f) = F$. Por consiguiente Γ es sobreyectiva y con ello una biyección. $\square$

Es de notar que la demostración del Teorema 9.2.4 solo depende de la propiedad universal que poseen los coproductos, así, este resultado puede ser generalizado a cualquier categoría que tenga coproductos. Un teorema similar puede establecerse para el caso de los productos, como a continuación se muestra.

Teorema. 9.2.5. *Sean* $(B_i)_{i\in I}$ *una familia de* $S-$*acciones y* A *una* $S-$*acción. Entonces hay una biyección entre los conjuntos* $Hom(A, \prod\limits_{i\in I} B_i)$ *y* $\prod\limits_{i\in I} Hom(A, B_i)$.

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} B_i$ un $S-$morfismo arbitrario. Note que para cada $j \in I$, el $S-$morfismo composición $A \xrightarrow{f} \prod\limits_{i\in I} B_i \xrightarrow{\pi_j} B_j$ pertenece al conjunto $Hom(A, B_j)$. Con esto en mente, sea $\overline{f} : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} Hom(A, B_i)$ la función definida por $\overline{f}(j) := \pi_j f$. Entonces para cada $j \in I$ ocurre que $\overline{f}(j) \in Hom(A, B_j)$ y por consiguiente $\overline{f} \in \prod\limits_{i\in I} Hom(A, B_i)$. Considere ahora a la función $\Upsilon : Hom(A, \prod\limits_{i\in I} B_i) \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} Hom(A, B_i)$ dada por $\Upsilon(f) := \overline{f}$. Exhibir que Υ es una biyección es totalmente análogo a lo hecho en la demostración del Teorema 9.2.4 pero ahora usando la propiedad universal del producto. ☐

Probaremos a continuación, que cualquier familia no vacía de acciones en $(S - Act)_0$ tiene un coproducto en $(S - Act)_0$. De hecho, la manera de construir al coproducto para este tipo de acciones, es, de cierta forma, similar al caso de los módulos.

Teorema. 9.2.6. *Sea* $(A_i)_{i\in I}$ *una familia no vacía de* $S-$*acciones en* $(S - Act)_0$*y para cada* $f \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ *defínase* $Sop(f) := \{i \in I \mid f(i) \neq \theta_{A_i}\}$. *Entonces:*

1. $\prod\limits_{i\in I} A_i \in (S - Act)_0$.

2. *El conjunto* $\biguplus\limits_{i\in I} A_i := \left\{ f \in \prod\limits_{i\in I} A_i \,|\, |Sop(f)| \leq 1 \right\}$ *es subacción de* $\prod\limits_{i\in I} A_i$.

3. *Para cada* $j \in I$ *la función* $\varsigma_j : A_j \longrightarrow \biguplus\limits_{i\in I} A_i$ *que asigna a cada* $a \in A_j$ *a la función*

$$\varsigma_j(a)(i) := \begin{cases} \theta_{A_i} & si \quad i \neq j. \\ a & si \quad i = j. \end{cases}$$

   es un $S-$*morfismo.*

4. *La familia* $\left\{ A_j \xrightarrow{\varsigma_j} \biguplus\limits_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ *es un coproducto en* $(S-Act)_0$ *para la familia* $(A_i)_{i\in I}$.

Demostración. 1) Para cada $i \in I$ denótese por θ_{A_i} al único cero de A_i y considere a la función $\Theta : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ dada por $\Theta(i) := \theta_{A_i}$. Está claro que $\Theta \in \prod\limits_{i\in I} A_i$. Más aún, no es difícil ver que $Sop(\Theta) = \emptyset$. Ahora bien, para cada $s \in S$ y cada $i \in I$ se tiene que $(s\Theta)(i) := s\Theta(i) = s\theta_{A_i} = \theta_{A_i} = \Theta(i)$ y por consiguiente $s\Theta = \Theta$. De ahí que Θ es elemento cero de $\prod\limits_{i\in I} A_i$. Por otro lado, suponga que Θ' es otro elemento cero de $\prod\limits_{i\in I} A_i$. Veamos que para cada $i \in I$, $\varTheta'(i) = \theta_{A_i}$: en efecto, fíjese a $i \in I$ y sea $s \in S$ arbitrario. Como $\varTheta'$ es elemento cero de $\prod\limits_{i\in I} A_i$, entonces $s\varTheta' = \varTheta'$ y en consecuencia $\varTheta'(i) = (s\varTheta')(i) := s\varTheta'(i)$ i,e, $\varTheta'(i) = s\varTheta'(i)$. De ahí que $\varTheta'(i)$ es elemento cero de A_i y por lo tanto $\varTheta'(i) = \theta_{A_i}$. Se desprende de lo anterior que $\varTheta = \varTheta'$ y así $\prod\limits_{i\in I} A_i$ tiene un único elemento cero. Por consiguiente $\prod\limits_{i\in I} A_i \in (S - Act)_0$.

2) Sean $f \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ y $s \in S$ arbitrarios. Si $i \in Sop(sf)$, entonces $sf(i) \neq \theta_{A_i}$ y por lo tanto $f(i) \neq \theta_{A_i}$. De ahí que $i \in Sop(f)$ y así $Sop(sf) \subseteq Sop(f)$. Ahora, observe que $\biguplus\limits_{i\in I} A_i$ es no vacío, pues para $\varTheta : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ definida como $\varTheta(i) := \theta_{A_i}$ se tiene que $Sop(\varTheta) = \emptyset$, y así $|Sop(\varTheta)| = |\emptyset| = 0 \leq 1$. En consecuencia $\varTheta \in \biguplus\limits_{i\in I} A_i$. Por otro lado, si suponemos que $f \in \biguplus\limits_{i\in I} A_i$, entonces $Sop(sf) \subseteq Sop(f)$ con $|Sop(f)| \leq 1$, luego $|Sop(sf)| \leq 1$ y por consiguiente $sf \in \biguplus\limits_{i\in I} A_i$. De ahí que $\biguplus\limits_{i\in I} A_i \leq \prod\limits_{i\in I} A_i$. Más aún, como $\varTheta$ es el único elemento cero de $\prod\limits_{i\in I} A_i$ y $\varTheta \in \biguplus\limits_{i\in I} A_i$, está claro entonces que $\varTheta$ es también el único elemento cero de $\biguplus\limits_{i\in I} A_i$. Por lo tanto $\biguplus\limits_{i\in I} A_i \in (S - Act)_0$.

3) Sea $j \in I$ arbitrario y considere a la función $\varsigma_j : A_j \longrightarrow \biguplus\limits_{i\in I} A_i$ que asigna a cada $a \in A_j$ a la función

$$\varsigma_j(a)(i) := \left\{ \begin{array}{ccc} \theta_{A_i} & si & i \neq j. \\ a & si & i = j. \end{array} \right.$$

Observe primero que para cada $a \in A_j$ la función $\varsigma_j(a)$ es nula quizá excepto en el valor j, así $Sop(\varsigma_j(a)) \subseteq \{j\}$ y por lo tanto $\varsigma_j(a) \in \biguplus\limits_{i\in I} A_i$. De ahí que ς_j está bien definida, en el sentido de que manda elementos de A_j en elementos de $\biguplus\limits_{i\in I} A_i$. Ahora bien, sean $a \in A_j$, $s \in S$ e $i \in I$ arbitrarios. Si $i \neq j$, entonces $\varsigma_j(sa)(i) := \theta_{A_i}$ mientras que $(s\varsigma_j(a))(i) := s\varsigma_j(a)(i) = s\theta_{A_i} = \theta_{A_i}$. Por lo tanto $\varsigma_j(sa)(i) = (s\varsigma_j(a))(i)$. En el caso en que $i = j$ se tiene que $\varsigma_j(sa)(j) := sa$ y $(s\varsigma_j(a))(j) := s\varsigma_j(a)(j) = sa$ i,e, $\varsigma_j(sa)(i) = (s\varsigma_j(a))(i)$. Por consiguiente para cada $i \in I$ se verifica que $\varsigma_j(sa)(i) = (s\varsigma_j(a))(i)$ y así $\varsigma_j(sa) = s\varsigma_j(a)$. Por lo tanto ς_j es un $S-$morfismo.

4) Sea $Q \in (S - Act)_0$ y $\left\{ A_j \xrightarrow{f_j} Q \right\}$ una familia de $S-$morfismos. Denotemos por θ_Q al elemento cero de Q y defínase a la función $\varphi : \biguplus\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow Q$ como sigue:

$$\varphi(f) := \begin{cases} \theta_Q & si \quad Sop(f) = \emptyset. \\ f_j(f(j)) & si \quad Sop(f) = \{j\}. \end{cases}$$

Veamos que φ es un $S-$morfismo: en efecto, sean $s \in S$ y $f \in \biguplus_{i\in I} A_i$. Si $Sop(f) = \emptyset$, de que $Sop(sf) \subseteq Sop(f)$ se sigue que $Sop(sf) = \emptyset$ y por lo tanto $\varphi(sf) = \theta_Q = s\theta_Q = s\varphi(f)$. Si $Sop(f) = \{j\}$ para algún $j \in I$, de que $Sop(sf) \subseteq Sop(f)$ se desprende que $Sop(sf) = \emptyset$ ó $Sop(sf) = \{j\}$. Si ocurre que $Sop(sf) = \emptyset$, entonces $sf(j) = \theta_{A_j}$ (pues de lo contrario $j \in Sop(sf) = \emptyset$). Así que $\varphi(sf) := \theta_Q = f_j(\theta_{A_j}) = f_j(sf(j)) = sf_j(f(j)) = s\varphi(f)$. Para el caso en que $Sop(sf) = \{j\}$ se tiene que $\varphi(sf) := f_j((sf)(j)) = f_j(sf(j)) = sf_j(f(j)) = s\varphi(f)$. En cualquiera de los casos se verifica la igualdad $\varphi(sf) = s\varphi(f)$ y por consiguiente φ es un $S-$morfismo. Por otro lado, sean $j \in I$ y $a \in A_j$ arbitrarios. Si $a = \theta_{A_j}$, entonces $Sop(\varsigma_j(a)) = \emptyset$ y así $\varphi(\varsigma_j(\theta_{A_j})) := \theta_Q = f_j(\theta_{A_j})$. Si $a \neq \theta_{A_j}$, entonces $Sop(\varsigma_j(a)) = \{j\}$ y por lo tanto $\varphi(\varsigma_j(a)) := f_j(\varsigma_j(a)(j)) = f_j(a)$. De todo lo anterior se deduce que para cada $a \in A_j$, $\varphi(\varsigma_j(a)) = f_j(a)$ y en consecuencia $f_j = \varphi\varsigma_j$. Tenemos entonces que para cada $j \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "f_j"] \arrow[dr, "\varsigma_j"'] & & Q \\
& \biguplus_{i\in I} A_i \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Para terminar, suponga que $\psi : \biguplus_{i\in I} A_i \longrightarrow Q$ es otro $S-$morfismo tal que $f_j = \psi\varsigma_j$ para cada $j \in I$. Sea $f \in \biguplus_{i\in I} A_i$. Si $f = \Theta$ (el elemento cero de $\biguplus_{i\in I} A_i$), entonces $\psi(f) = \theta_Q = \varphi(f)$ i,e, $\psi(f) = \varphi(f)$. Cuando $f \neq \Theta$ se tiene que $Sop(f) \neq \emptyset$ y por lo tanto $Sop(f) = \{j\}$ para algún $j \in I$. Afirmamos que $f = \varsigma_j(f(j))$: en efecto, tómese $i \in I$. Si $i \neq j$, entonces $i \notin Sop(f)$ y así $f(i) = \theta_{A_i}$. Por otro lado $\varsigma_j(f(j))(i) := \theta_{A_i}$. Luego, en este caso $f(i) = \varsigma_j(f(j))(i)$. Si $i = j$, entonces $\varsigma_j(f(j))(j) := f(j)$. En definitiva, ocurre que para cada $i \in I$, $f(i) = \varsigma_j(f(j))(i)$ y por consiguiente $f = \varsigma_j(f(j))$. Luego de exhibir esto, se tiene que $\psi(f) = \psi(\varsigma_j(f(j))) = f_j(f(j)) = \varphi(f)$. Por lo tanto la igualdad $\psi(f) = \varphi(f)$ se verifica para cada $f \in \biguplus_{i\in I} A_i$ y así $\psi = \varphi$. Se concluye de esta manera que $\left\{ A_j \xrightarrow{\varsigma_j} \biguplus_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ es un coproducto en $(S - Act)_0$ para la familia $(A_i)_{i\in I}$. $\square$

Definición 9.2.7. *Si $f \in \prod_{i\in I} A_i$, al conjunto $Sop(f) := \{i \in I \mid f(i) \neq \theta_{A_i}\}$ se le llama soporte de f.*

Así $\biguplus\limits_{i\in I} A_i$ es la colección de aquellos miembros de $\prod\limits_{i\in I} A_i$ que tienen soporte con a lo más un elemento.

9.3. Producto y coproducto de S-morfismos

Puede aprovecharse la propiedad universal que poseen los productos y coproductos en una categoría para establecer lo que se entiende por producto y coproducto de una familia de morfismos.

Teorema. 9.3.1. *Sea* $\left\{ A_i \xrightarrow{f_i} B_i \right\}_{i\in I}$ *una familia de* $S-$*morfismos indexada por el conjunto no vacío* I*.*

1. *Si* $\left\{ \prod\limits_{i\in I} A_i \xrightarrow{\pi_j} A_j \right\}_{j\in I}$ *y* $\left\{ \prod\limits_{i\in I} B_i \xrightarrow{\pi'_j} B_j \right\}_{j\in I}$ *son las familias de* $S-$*morfismos que se construyen en el Teorema 9.2.1, entonces existe un único* $S-$*morfismo* φ *tal que para cada* $j \in I$ *el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[d, "\pi'_j"] \\
A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j
\end{tikzcd}$$

2. *Si* $\left\{ A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod\limits_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ *y* $\left\{ B_j \xrightarrow{\sigma'_j} \coprod\limits_{i\in I} B_i \right\}_{j\in I}$ *son las familias de* $S-$*morfismos que se construyen en el Teorema 9.2.3, entonces existe un único* $S-$*morfismo* ψ *tal que para cada* $j \in I$ *el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\sigma_j"'] & B_j \arrow[d, "\sigma'_j"] \\
\coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, dashed, "\psi"'] & \coprod\limits_{i\in I} B_i
\end{tikzcd}$$

Demostración. Solo se exhibirá el primer inciso, pues la prueba del segundo requiere un argumento análogo: considere a la familia de $S-$morfismos $\left\{ \prod\limits_{i\in I} A_i \xrightarrow{f_j \pi_j} B_j \right\}_{j\in I}$. Puesto que

$\left\{ \prod\limits_{i\in I} B_i \xrightarrow{\pi_j} B_j \right\}_{j\in I}$ es un producto para la familia $(B_j)_{j\in I}$, existe un único $S-$morfismo φ tal que para cada $j \in I$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[rr, "f_j\pi_j"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & & B_j \\
& \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[ur, "\pi'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, pero esto es lo mismo a que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[d, "\pi'_j"] \\
A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j
\end{tikzcd}$$

conmute. Más aún, de esto se sigue que para cada $f \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ y cada $j \in I$, $\varphi(f)(j) = \pi'_j(\varphi(f)) = f_j(\pi_j(f)) = f_j(f(j))$ i,e, $\varphi(f)(j) = f_j(f(j))$. $\square$

Definición 9.3.2. *Denotamos por* $\prod\limits_{i\in I} f_i$ *y* $\coprod\limits_{i\in I} f_i$*, respectivamente, a los* $S-$*morfismos* φ *y* ψ *que aparecen en el Teorema anterior y los llamanos* $S-$*morfismo producto y* $S-$*morfismo coproducto, correspondientemente.*

Observación 9.3.3. *Suponga que* $\left\{ A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \right\}_{i\in I}$ *es una familia de* $S-$*morfismos indexada por el conjunto no vacío* I*. Si para cada* $i \in I$ *la sucesión* $A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i$ *es Rees-exacta, entonces no necesariamente la sucesión*

$$\prod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\prod\limits_{i\in I} f_i} \prod_{i\in I} B_i \xrightarrow{\prod\limits_{i\in I} g_i} \prod_{i\in I} C_i$$

es Rees-exacta. Para ver esto, considere al monoide $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *y a las sucesiones* $\mathbb{Z} \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$ *de* $(\mathbb{Z}, \cdot)-$*morfismos. Estas sucesiones son Rees-exactas, pues se tiene que* $\mathcal{K}_{im(id_{\mathbb{Z}})} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = Ker(0)$ *y* $\mathcal{K}_{im(0)} = \Delta_{\mathbb{Z}} = Ker(id_{\mathbb{Z}})$*. Ahora bien, considere a la sucesión* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *con* $f := id_{\mathbb{Z}} \times 0$ *y* $g := 0 \times id_{\mathbb{Z}}$*. En este caso, se tiene que para* *cada* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(a, b) = (id_{\mathbb{Z}}(a), 0(b)) = (a, 0)$ *y* $g(a, b) = (0(a), id_{\mathbb{Z}}(b)) = (0, b)$ *i,e,* $f(a, b) = (a, 0)$ *y* $g(a, b) = (0, b)$. *Así, observe que* $((5, 3), (6, 3)) \in Ker(g)$, *pues* $g(5, 3) = (0, 3) = g(6, 3)$, *pero como* $(5, 3) \neq (6, 3)$ *y además ninguno de los pares* $(5, 3)$ *y* $(6, 3)$ *pertenece a la imagen de* f, *entonces* $((5, 3), (6, 3)) \notin \mathcal{K}_{im(f)}$ *y por lo tanto* $\mathcal{K}_{im(f)} \neq Ker(g)$. *De ahí que la sucesión* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *no es Rees-exacta.*

9.4. Pullbacks y pushouts en S-Act

A continuación determinaremos condiciones necesarias y suficientes para que un par de $S-$morfismos con el mismo codominio tenga un pullback en $S - Act$.

Teorema. 9.4.1. *El par de* $S-$*morfismos*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

tiene un pullback en $S - Act$ *si y solo si el conjunto* $\mathbb{E} := \{(a, b) \in A \times B \,|\, f(a) = g(b)\}$ *es no vacío.*

Demostración. Suponga que el siguiente es un diagrama pullback en $S - Act$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Entonces, en particular ocurre que $f\alpha = g\beta$ y así para cada $x \in E$, $f(\alpha(x)) = g(\beta(x))$. Por lo tanto $\{(\alpha(x), \beta(x)) \,|\, x \in E\} \subseteq \mathbb{E}$ y en consecuencia $\mathbb{E} \neq \emptyset$. Y viceversa, suponga que $\mathbb{E} \neq \emptyset$. En este caso $\mathbb{E}$ es subacción de la $S-$acción producto $A \times B$. En efecto, para cada $s \in S$ y $(a, b) \in \mathbb{E}$ se tiene que $f(sa) = sf(a) = sg(b) = g(sb)$ y en consecuencia $s(a, b) := (sa, sb) \in \mathbb{E}$. Por consiguiente $\mathbb{E} \leq A \times B$. Ahora bien, no es difícil ver que las funciones $u : \mathbb{E} \longrightarrow A$ y $v : \mathbb{E} \longrightarrow B$ definidas por $u(a, b) := a$ y $v(a, b) := b$ son $S-$morfismos. Más aún, para cada $(a, b) \in \mathbb{E}$ se tiene que $f(u(a, b)) = f(a) = g(b) = g(v(a, b))$ y así $fu = gv$. Suponga que $p : D \longrightarrow A$ y $q : D \longrightarrow B$ son dos $S-$morfismos tales que $fp = gq$. Entonces para cada $d \in D$ ocurre que $f(p(d)) = g(q(d))$ y por consiguiente $(p(d), q(d)) \in \mathbb{E}$. De esto se sigue que tiene sentido considerar a la función $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{E}$ definida por $\varphi(d) := (p(d), q(d))$. Observe que $\varphi(sd) := (p(sd), q(sd)) = (sp(d), sq(d)) = s(p(d), q(d)) = s\varphi(d)$ y por lo tanto φ es un $S-$morfismo. Más aún, para cada $d \in D$ se tiene que $u(\varphi(d)) = u(p(d), q(d)) := p(d)$ y $v(\varphi(d)) = v(p(d), q(d)) := q(d)$, de ahí que $p = u\varphi$ y $q = v\varphi$. Por consiguiente el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& \mathbb{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ahora, si $\psi : D \longrightarrow \mathbb{E}$ es otro $S-$morfismo para el que $p = u\psi$ y $q = v\psi$, entonces para $d \in D$ se tiene que $\psi(d)$ es un par ordenado cuya coordenada en A viene dada por $u(\psi(d))$ y cuya coordenada en B es $v(\psi(d))$. De ahí que $\psi(d) = (u(\psi(d)), v(\psi(d)))$, pero como $p = u\psi$ y $q = v\psi$, entonces $\psi(d) = (p(d), q(d)) = \varphi(d)$ y por lo tanto $\psi = \varphi$. Se concluye así que

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

es un diagrama pullback. □

Ejemplo 9.4.2. *Sea S cualquier monoide y X un conjunto con al menos dos elementos. Tómense $x, y \in X$ con $x \neq y$ y considere a los $S-$morfismos $f, g : S \longrightarrow S^{(X)}$ dados por $f(s) := s(e, x)$ y $g(t) := t(e, y)$. En este caso no existen $s, t \in S$ para los cuales $f(s) = g(t)$, pues de ser así, la igualdad $f(s) = g(t)$ implicaría que $(s, x) = (t, y)$ y por lo tanto $x = y$, lo cuál no es cierto. Así, en este caso el conjunto $\mathbb{E} := \{(s, t) \in S \times S \mid f(s) = g(t)\}$ es vacío y en consecuencia el Teorema 9.4.1 garantiza que el par de $S-$morfismos f y g no tienen un pullback en $S - Act$.*

Corolario 9.4.3. *En $(S - Act)_0$, cualesquiera dos $S-$morfismos con el mismo codominio tienen un pullback.*

Demostración. Sea
$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$
un par de $S-$morfismos en $(S - Act)_0$. Si θ_A, θ_B y θ_C son los elementos cero de A, B y C respectivamente, del Lema 3.3.1 se tiene que el par (θ_A, θ_B) pertenece al conjunto $\mathbb{E} := \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$, pues $f(\theta_A) = \theta_C = g(\theta_B)$. Así $\mathbb{E}$ es no vacío y por consiguiente f y g tienen un pullback. □

Con respecto a pushouts, la situación es diferente al caso de los pullbacks, en el sentido de que cualesquiera dos $S-$morfismos con el mismo dominio siempre tienen un pushout. Pero para exhibir esto, mostraremos primero que cualesquiera dos $S-$morfismos con el mismo dominio y codominio tienen siempre un coigualador.

Teorema. 9.4.4. *Cualesquiera dos $S-$morfismos* $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ *tienen un coigualador en $S-Act$.*

Demostración. Considere al conjunto $X := \{(f(a), g(a)) \,|\, a \in A\}$ y observe que $X \subseteq B \times B$. Ahora, sea $\rho(X)$ la $S-$congruencia en B generada por X (véase Definición 2.4.5). Para cada $b \in B$ denotemos por $[b]$ a la clase de equivalencia de b con respecto de $\rho(X)$ y sea $u : B \longrightarrow \dfrac{B}{\rho(X)}$ el $S-$morfismo canónico dado por $u(b) := [b]$. Afirmamos que u es coigualador de f y g: en efecto, como $X \subseteq \rho(X)$, entonces para cada $a \in A$ ocurre que $(f(a), g(a)) \in \rho(X)$ y en consecuencia $[f(a)] = [g(a)]$. De ahí que $u(f(a)) = u(g(a))$ para cada $a \in A$ y por lo tanto $uf = ug$. Suponga ahora que $v : B \longrightarrow C$ es un $S-$morfismo tal que $vf = vg$. Entonces para cada $a \in A$ ocurre que $v(f(a)) = v(g(a))$ y por lo tanto $X \subseteq Ker(v)$. Así, como $Ker(v)$ es una congruencia en B y $\rho(X)$ es, por definición, la intersección de todas las congruencias en B que contienen a X, se sigue que $\rho(X) \subseteq Ker(v)$. Luego, del Teorema 3.1.1 se deduce que existe un único $S-$morfismo $\overline{v}$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "u"'] & & C \\
& \dfrac{B}{\rho(X)} \arrow[ur, dashed, "\overline{v}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente u es coigualador de f y g. □

Corolario 9.4.5. *Cualesquiera dos $S-$morfismos con el mismo dominio tienen un pushout en $S-Act$.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 9.2.3 y al Teorema 9.4.4, la categoría $S-Act$ tiene la propiedad de que cualesquiera dos de sus objetos tienen un coproducto y cualesquiera dos de sus morfismos con el mismo dominio y codominio tienen un coigualador. Por consiguiente del Teorema 1.1.10 se obtiene lo pedido. □

Un resultado parecido al Teorema 9.4.1 puede establecerse para el caso de los igualadores.

Teorema. 9.4.6. *Dos $S-$morfismos* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$ *tienen un igualador en $S-Act$ si y solo si el conjunto $E := \{a \in A \,|\, f(a) = g(a)\}$ es no vacío.*

Demostración. Si $u : C \longrightarrow A$ es igualador de f y g, entonces en particular ocurre que $fu = gu$. De ahí que para cada $c \in C$, $u(c) \in E$ y por lo tanto E es no vacío. Y viceversa, suponga que el conjunto $E := \{a \in A \,|\, f(a) = g(a)\}$ es no vacío. Observe que si $a \in E$ y $s \in S$, entonces $f(sa) = sf(a) = sg(a) = g(sa)$ y así $sa \in E$. Por lo tanto $E \leq A$. Afirmamos que el $S-$morfismo inclusión $E \hookrightarrow A$ es igualador de f y g: en efecto, considerando a f,g e ι como funciones, el primero de los Ejemplos 1.1.6 asegura que la inclusión $E \hookrightarrow A$ es igualador en $\mathfrak{Set}$ para las funciones f y g, de manera que si $k : C \longrightarrow A$ es un $S-$morfismo tal que $fk = gk$, de que en particular k es una función se sigue que existe una única función h que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & A \\ & E \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \tag{9.1}$$

Tal función h viene dada por $h(c) := k(c)$. Más aún, como k es un $S-$morfismo, está claro que también h lo es. Finalmente, la unicidad de h asegura que h es el único $S-$morfismo que hace conmutativo al diagrama (9.1). Por consiguiente $E \hookrightarrow A$ es un igualador en $S-Act$ para f y g. ☐

9.5. Monomorfismos y epimorfismos en S-Act

Teorema. 9.5.1. *El $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo en $S-Act$ si y solo si f es una función inyectiva.*

Demostración. Suponga que el $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo en $S-Act$. De la Observación 2.4.3 se tiene que $Ker(f)$ es una subacción de la $S-$acción producto $A \times A$. En particular, $Ker(f)$ es una $S-$acción. Considerar a las funciones $\alpha : Ker(f) \longrightarrow A$ y $\beta : Ker(f) \longrightarrow B$ dadas por $\alpha(x, y) := x$ y $\beta(x, y) := y$. Es fácil ver que α y β son $S-$morfismos. Más aún, para cada $(x, y) \in Ker(f)$ se tiene que $f(\alpha(x, y)) = f(x) = f(y) = f(\beta(x, y))$ y por lo tanto $f\alpha = f\beta$. Así que como f es un monomorfismo en $S-Act$, esta última igualdad implica que $\alpha = \beta$. De ahí que para cada $(x, y) \in Ker(f)$ se tiene que $x = \alpha(x, y) = \beta(x, y) = y$ y por consiguiente $Ker(f) \subseteq \Delta_A$. En consecuencia $Ker(f) = \Delta_A$ y así, la Proposición 2.4.6 implica que f es una función inyectiva. E inversamente, como toda función inyectiva es cancelable a la izquierda, es claro entonces que cualquier función inyectiva es un monomorfismo en $S-Act$. ☐

Teorema. 9.5.2. *El $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo en $S - Act$ si y solo si f es una función sobreyectiva.*

Demostración. Suponga que el $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo en $S - Act$. Sea $\rho_{im(f)}$ la $S-$congruencia en B inducida por $im(f)$ (véase el segundo de los Ejemplos 2.4.2). Se tiene del Ejemplo 2.5.5 que $im(f)$ es elemento cero de la acción cociente $\frac{B}{im(f)}$, así, la función $0 : B \longrightarrow \frac{B}{im(f)}$ dada por $0(b) := im(f)$ es un $S-$morfismo. Ahora, considere al $S-$morfismo canónico $0 : B \longrightarrow \frac{B}{im(f)}$ definido por $\pi(b) := [b]$, donde $[b]$ denota a la clase de equivalencia de b con respecto de $\rho_{im(f)}$. Se tiene que para cada $a \in A$, $\pi(f(a)) := [f(a)] = im(f) = 0(f(a))$. De ahí que $\pi f = 0f$, y como f es un epimorfismo en $S - Act$, entonces $\pi = 0$ y por lo tanto para cada $b \in B$, $[b] = \pi(b) = 0(b) = im(f)$. De ahí que para cada $b \in B$, $b \in [b] = im(f)$ y así $B = im(f)$. En consecuencia f es sobreyectiva. Y recíprocamente, como toda función sobreyectiva es cancelable a la derecha, es claro entonces que cualquier función sobreyectiva es un epimorfismo en $S - Act$. □

Teorema. 9.5.3. *El $S-$morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo en $S - Act$ si y solo si f es una función biyectiva.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.3.3. □

De acuerdo con los resultados anteriores, a partir de ahora será válido referirnos a un $S-$morfismo inyectivo como monomorfismo y a un $S-$morfismo sobreyectivo como epimorfismo.

9.6. Objetos libres en S-Act

La categoría $S-Act$ puede ser considerada como una categoría concreta sobre $\mathfrak{Set}$ tomando en cuenta que el funtor $\mathcal{U} : S - Act \longrightarrow \mathfrak{Set}$ que asocia a cada $S-$acción su conjunto subyacente y a cada $S-$morfismo su función subyacente es un funtor fiel. $\mathcal{U}$ es llamado funtor olvidadizo. Resulta que toda $S-$acción libre es un objeto libre sobre cualquiera de sus bases.

Teorema. 9.6.1. *Considerar a la categoría concreta $(S - Act, \mathcal{U})$ donde $\mathcal{U}$ es el funtor olvidadizo. Entonces toda $S-$acción libre $S^{(X)}$ es un objeto libre sobre el conjunto X.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío. De la Propiedad universal de las bases (véase Teorema 7.1.6) se sigue que la función $\eta_X : X \longrightarrow S^{(X)}$ es un morfismo en $\mathfrak{Set}$ que es universal sobre X (véase Definición 1.1.14). Por consiguiente $S^{(X)}$ es un objeto libre sobre el conjunto X. □

9.7. Generadores y cogeneradores en S-Act

En esta sección daremos condiciones necesarias y suficientes para que una $S-$acción G sea un generador y una $S-$acción C sea un cogenerador en $S-Act$ (véase Definición 1.1.11).

Definición 9.7.1. *Sean A y B dos $S-$acciones.*

1. *Al conjunto*

$$Tr_B(A) := \bigcup_{f\in Hom(A,B)} f(A)$$

se le llama traza de A en B.

2. *Al conjunto*

$$Cotr_B(A) := \bigcap_{g\in Hom(B,A)} Ker(g)$$

se le llama cotraza de A en B.

Algunas propiedades de la traza y la cotraza son las siguientes.

Proposición 9.7.2. *Sean A y B dos $S-$acciones.*

1. *Si $Hom(A,B) \neq \emptyset$, entonces $Tr_B(A)$ es subacción de B.*
2. *$Tr_A(S) = A$.*
3. *$Cotr_B(A)$ es subacción de $B \times B$, siempre que $cotr_B(A) \neq \emptyset$.*

Demostración. 1) Se sigue de observar que para cada $f \in Hom(A,B)$, $f(A)$ es subacción de B y de que unión de subacciones es subacción.
2) Está claro de la definición, que $Tr_A(S) \subseteq A$. Ahora, para $a \in A$ arbitrario considerar al $S-$morfismo $f_a : S \longrightarrow A$ dado por $f_a(s) := sa$. En este caso, se tiene que $a = f_a(e) \in f_a(S) \subseteq Tr_A(S)$ y por lo tanto $a \in Tr_A(S)$. De ahí que $Tr_A(S) = A$.
3) De la Observación 2.4.3 se sigue que para cada $g \in Hom(B,A)$ $Ker(g)$ es subacción de $B \times B$. De ahí que $Cotr_B(A) := \bigcap_{g\in Hom(B,A)} Ker(g)$ es subacción de $B \times B$. □

Teorema. 9.7.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción G:*

1. *G es un generador en $S-Act$.*
2. *Para cada $S-$acción A existe un conjunto I y un epimorfismo $\coprod_{i\in I} G \longrightarrow A$.*
3. *$Tr_S(G) = S$.*

4. *Existe un epimorfismo* $G \longrightarrow S$.

5. *Existe* $\varepsilon \in Hom(G,G)$ *con* $\varepsilon^2 = \varepsilon$ *y* $x \in G$ *tales que* $\varepsilon(G) = \langle x \rangle \cong S$.

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Se sigue del Teorema 1.1.12.
$2) \Longrightarrow 3)$ Es claro que $Tr_S(G) \subseteq S$. Ahora bien, suponga que para cada $S-$acción A existe un conjunto I y un epimorfismo $\coprod\limits_{i\in I} G \longrightarrow A$. En particular, para la $S-$acción ${}_SS$ existe un conjunto J y un epimorfismo $\varphi : \coprod\limits_{j\in J} G \longrightarrow S$. Sea $s \in S$ arbitrario. Como φ es un epimorfismo, entonces puede escribirse $s = \varphi(a,i)$ para algún $i \in J$ y $a \in G$. Considere ahora al $S-$morfismo composición $G \xrightarrow{\sigma_i} \coprod\limits_{j\in J} G \xrightarrow{\varphi} S$ donde $\sigma_i(g) := (g,i)$. Se tiene que $\varphi\sigma_i \in Hom(G,S)$ y además $\varphi(\sigma_i(a)) = \varphi(a,i) = s$ i,e, $s \in im(\varphi\sigma_i) \subseteq Tr_S(G)$. Por consiguiente $s \in Tr_S(G)$ y en consecuencia $S \subseteq Tr_S(G)$. De ahí que $Tr_S(G) = S$.
$3) \Longrightarrow 4)$ Suponga que $Tr_S(G) = S$. Entonces, para $e \in S$ existe $f \in Hom(G,S)$ tal que $e \in im(f)$. Así, puede escribirse $e = f(g)$ para algún $g \in G$. Observe que si $s \in S$ es arbitrario, entonces $s = se = sf(g) = f(sg)$ y por consiguiente f es sobreyectivo i,e, f es un epimorfismo.
$4) \Longrightarrow 5)$ Suponga que existe $f : G \longrightarrow S$ un epimorfismo. Entonces $e = f(x)$ para algún $x \in G$. Considere al $S-$morfismo $f_x : S \longrightarrow G$ dado por $f_x(s) := sx$ y sea $\varepsilon := f_x f$. Está claro que $\varepsilon \in Hom(G,G)$. Ahora, para cada $g \in G$ se tiene que $\varepsilon(g) := f_x(f(g)) := f(g)x$ y en consecuencia $\varepsilon^2(g) = \varepsilon(\varepsilon(g)) = \varepsilon(f(g)x) = f(g)\varepsilon(x) = f(g)(f(x)x) = (f(g)f(x))x = (f(g)e)x = f(g)x = \varepsilon(g)$. De ahí que $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Por otra parte, recordar que para cada $g \in G$, $\varepsilon(g) = f(g)x$. Más aún, de la sobreyectividad de f se sigue que todo elemento de S es de la forma $f(g)$ con $g \in G$ y por consiguiente $\langle x \rangle := \{sx \,|\, s \in S\} = \{f(g)x \,|\, g \in G\} = \varepsilon(G)$. Finalmente, tómese en cuenta al $S-$morfismo $F : S \longrightarrow \langle x \rangle$ dado por $F(s) := sx$. No es difícil ver que F es sobreyectivo. Más aún, la igualdad $sx = tx$ con $s,t \in S$ implica que $f(sx) = f(tx)$ y así $sf(x) = tf(x)$, pero como $f(x) = e$, entonces $s = t$ y por lo tanto F es inyectivo. En consecuencia F es un isomorfismo y por consiguiente $\varepsilon(G) = \langle x \rangle \cong S$.
$5) \Longrightarrow 1)$ Suponga que existen $\varepsilon \in Hom(G,G)$ con $\varepsilon^2 = \varepsilon$ y $x \in G$ tales que $\varepsilon(G) = \langle x \rangle \cong S$. A partir de esto, sea $\Omega : \langle x \rangle \longrightarrow S$ un isomorfismo y restrínjase ε a su imagen i,e, considere al $S-$morfismo sobreyectivo $G \longrightarrow \langle x \rangle$ dado por $g \mapsto \varepsilon(g)$. Está claro que la composición de estos dos $S-$morfismos es sobreyectivo. Así, obtenemos un $S-$morfismo sobreyectivo $\psi : G \longrightarrow S$. Veamos que G es un generador: sean $\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$ un par de $S-$morfismos con $f \neq g$. Entonces existe $a \in A$ para el que $f(a) \neq g(a)$. Ahora bien, sea $f_a : S \longrightarrow A$ el $S-$morfismo dado por $f_a(s) := sa$ y sea h la composición de los $S-$morfismos $G \xrightarrow{\psi} S \xrightarrow{f_a} A$ i,e, sea $h := f_a\psi$. Como ψ es sobreyectivo, se tiene que $e = \psi(x)$ para algún $x \in G$. Luego $f(h(x)) = f(f_a(\psi(x))) = f(f_a(e)) = f(ea) = f(a)$, mientras que $g(h(x)) = g(f_a(\psi(x))) = g(f_a(e)) = g(ea) = g(a)$. Así $f(h(x)) \neq g(h(x))$ y por lo tanto $fh \neq gh$. Por consiguiente G es un generador en $S - Act$. ☐

Corolario 9.7.4. *Toda $S-$acción libre es un generador en $S-Act$.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y considere a la $S-$acción libre $S^{(X)}$. Está claro que la función $S^{(X)} \longrightarrow S$ dada por $(s,x) \mapsto s$ es un $S-$morfismo sobreyectivo. Así $S^{(X)}$ satisface el inciso 4 del Teorema 9.7.3 y por consiguiente $S^{(X)}$ es un generador en $S-Act$. ☐

Observación 9.7.5. *Si A es una $S-$acción, no es difícil ver que el conjunto $Hom(A,A)$ de todos los $S-$morfismos de A en sí mismo es un monoide bajo la composición usual. Denotamos a este monoide por $End(A)$ y lo llamamos monoide de endomorfismos de A. Más aún, A es una $End(A)-$acción haciendo para cada $f \in End(A)$ y cada $a \in A$, $f * a := f(a)$. Ahora bien, con esta terminología, el inciso 5 del Teorema 9.7.3 afirma que una $S-$acción G es un generador en $S-Act$ si y solo si existe un idempotente del monoide $End(G)$ cuya imagen es isomorfa a ${}_SS$.*

Con respecto a cogeneradores se tienen los siguientes resultados.

Proposición 9.7.6. *Si C es un cogenerador en $S-Act$, entonces C tiene al menos dos elementos cero.*

Demostración. Sean $\Theta := \{\theta\}$ la $S-$acción con un único elemento y $X := \{a,b\}$ un conjunto tal que $a \neq b$. Para cada $s \in S$ hágase $sa := a$ y $sb := b$. Con esto X es una $S-$acción. Ahora, considerar a los $S-$morfismos $\Theta \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X$ dados por $f(\theta) := a$ y $g(\theta) := b$. Como $a \neq b$, está claro así que $f \neq g$. Luego, de que C es cogenerador, se sigue que existe un $S-$morfismo $h : X \longrightarrow C$ tal que $hf \neq hg$. De ahí que $h(f(\theta)) \neq h(g(\theta))$ i,e, $h(a) \neq h(b)$. Finalmente, observe que para cada $s \in S$, $sh(a) = h(sa) = h(a)$ y $sh(b) = h(sb) = h(b)$. Por consiguiente $h(a)$ y $h(b)$ son dos elementos cero distintos de C. ☐

Teorema. 9.7.7. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción C:*

1. *C es un cogenerador en $S-Act$.*
2. *Para cada $S-$acción A existe un conjunto I y un monomorfismo $A \longrightarrow \prod_{i\in I} C$.*
3. *Para cada $S-$acción A se tiene que $Cotr_A(C) = \Delta_A$ (la diagonal en A).*

Demostración. $1) \Longrightarrow 3)$ Suponga que G es un cogenerador y sea A una $S-$acción arbitraria. Está claro que para cada $g \in Hom(A,C)$ ocurre que $\Delta_A \subseteq Ker(g)$ y por lo tanto $\Delta_A \subseteq \bigcap_{g\in Hom(A,C)} Ker(g) = Cotr_A(C)$. Ahora bien, sea $(x,y) \in Cotr_A(C) := \bigcap_{g\in Hom(A,C)} Ker(g)$ y suponga que $x \neq y$. Considere a los $S-$morfismos $S \underset{f_y}{\overset{f_x}{\rightrightarrows}} A$ dados por $f_x(s) := sx$

y $f_y(s) := sy$. Como $x \neq y$, entonces $f_x \neq f_y$, y así, de que C es cogenerador, se sigue que existe un $S-$morfismo $h : A \longrightarrow C$ tal que $hf_x \neq hf_y$. Luego, existe $s \in S$ para el que $h(f_x(s)) \neq h(f_y(s))$ o bien $h(sx) \neq h(sy)$. Por lo tanto $(sx, sy) \notin Ker(g)$. Por otra parte, debido a que $h \in Hom(A, C)$ y $(x, y) \in Cotr_A(C) := \bigcap\limits_{g \in Hom(A,C)} Ker(g)$, entonces $(x, y) \in Ker(h)$ y en consecuencia $(sx, sy) \in Ker(g)$, contradicción. Por lo tanto $x = y$ y así $(x, y) \in \Delta_A$. De desprende de esto que $Cotr_A(C) \subseteq \Delta_A$ y en consecuencia $Cotr_A(C) = \Delta_A$.

3) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que para cada $S-$acción A se tiene que $Cotr_A(C) = \Delta_A$. Veamos que C es cogenerador: sean $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ un par de $S-$morfismos con $f \neq g$. Entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Ahora, suponga a manera de obtener un absurdo, que para cada $h \in Hom(A, C)$ ocurre que $hf = hg$. Entonces para cada $h \in Hom(A, C)$ el par $(f(a), g(a))$ pertenece a $Ker(h)$ y en consecuencia $(f(a), g(a)) \in \bigcap\limits_{h \in Hom(A,C)} Ker(h) = Cotr_A(C)$. Ahora bien, de la hipótesis se tiene que $Cotr_A(C) = \Delta_A$ y por consiguiente $(f(a), g(a)) \in \Delta_A$, pero esto implica que $f(a) = g(a)$, lo cuál no es cierto. Por lo tanto existe $h \in Hom(A, C)$ tal que $hf \neq hg$ y así C es cogenerador. Finalmente, la equivalencia 1) $\Longleftrightarrow$ 2) se sigue del Teorema 1.1.12. ☐

Para ofrecer un ejemplo concreto de cogeneradores en $S - Act$, enseguida se introduce a un tipo particular de acciones que serán llamadas acciones colibres y que son, en realidad, el dual categórico de objeto libre.

Lema 9.7.8. *Si X es un conjunto no vacío, entonces $X^S := \{f : S \longrightarrow X \mid f \text{ es función}\}$ es una $S-$acción definiendo para cada $s \in S$ y cada $f \in X^S$ a la función $sf : S \longrightarrow X$ dada por $(sf)(t) := f(ts)$.*

Demostración. Sea $f \in X^S$ arbitraria. Entonces para cada $t \in S$ se tiene que $(ef)(t) := f(te) = f(t)$ y por lo tanto $ef = f$. Ahora, si $r, s \in S$, entonces para cada $t \in S$, $(r(sf))(t) := (sf)(tr) := f((tr)s) = f(t(rs)) = ((rs)f)(t)$ y por consiguiente $r(sf) = (rs)f$. De ahí que X^S es una $S-$acción. ☐

Definición 9.7.9. *Si X es un conjunto no vacío, a la $S-$acción X^S definida como en el Lema anterior se le llama $S-$acción colibre.*

Las acciones colibres gozan de cierta propiedad universal, como veremos a continuación.

Teorema. 9.7.10. *Si X es un conjunto no vacío, entonces la función $\lambda_X : X^S \longrightarrow X$ dada por $\lambda_X(f) := f(e)$ tiene la siguiente propiedad universal: para cada $S-$acción A y cada función $f : A \longrightarrow X$ existe un único $S-$morfismo F que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "F"'] & X \\
& X^S \arrow[u, "\lambda_X"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean A una $S-$acción y $f : A \longrightarrow X$ una función. Para cada $a \in A$ defínase a $\varphi_a : S \longrightarrow X$ por $\varphi_a(s) := f(sa)$. Ahora, considere a la función $F : A \longrightarrow X^S$ dada por $F(a) := \varphi_a$. Veamos que F es un $S-$morfismo: si $s \in S$ y $a \in A$, entonces para cada $t \in S$ se tiene que $\varphi_{sa}(t) := f(t(sa)) = f((ts)a) = \varphi_a(ts) = (s\varphi_a)(t)$ y por consiguiente $\varphi_{sa} = s\varphi_a$. De ahí que $F(sa) = sF(a)$ y así F es un $S-$morfismo. Más aún, para cada $a \in A$ se tiene que $\lambda_X(F(a)) = \lambda_X(\varphi_a) := \varphi_a(e) := f(ea) = f(a)$ y por lo tanto $f = \lambda_X F$. Para concluir, suponga que $G : A \longrightarrow X^S$ es otro $S-$morfismo tal que $f = \lambda_X G$. Entonces para cada $a \in A$ y $s \in S$ se tiene por un lado que $G(sa)(e) = (sG(a))(e) := G(a)(es) = G(a)(s)$ i,e, $G(sa)(e) = G(a)(s)$, y por otra parte, $G(sa)(e) = \lambda_X(G(sa)) = f(sa) = \varphi_a(s) = F(a)(s)$ i,e, $G(sa)(e) = F(a)(s)$. Por consiguiente $G(a)(s) = F(a)(s)$ para cada $s \in S$ y así $G(a) = F(a)$ para cada $a \in A$. De ahí que $G = F$. □

Corolario 9.7.11. *Toda $S-$acción colibre X^S con $|X| \geq 2$ es un cogenerador en $S - Act$.*

Demostración. Sea X un conjunto con al menos dos elementos y considere a la $S-$acción colibre X^S. Suponga que $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$ son un par de $S-$morfismos con $\alpha \neq \beta$. Entonces existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) \neq \beta(a)$. Ahora, como $|X| \geq 2$, hay un par de elementos $p, q \in X$ con $p \neq q$. Defínase a la función $f : B \longrightarrow X$ como sigue:

$$f(b) := \begin{cases} p & si \quad b = \alpha(a). \\ q & si \quad b \neq \alpha(a). \end{cases}$$

De acuerdo al Teorema 9.7.10, para f existe un único $S-$morfismo F que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "F"'] & X \\
& X^S \arrow[u, "\lambda_X"']
\end{tikzcd}$$

i,e, $f = \lambda_X F$. Veamos que $F\alpha \neq F\beta$: observe que $p = f(\alpha(a)) = \lambda_X(F(\alpha(a))) := F(\alpha(a))(e)$, mientras que $q = f(\beta(a)) = \lambda_X(F(\beta(a))) := F(\beta(a))(e)$. Así, como $p \neq q$, entonces $F(\alpha(a))(e) \neq F(\beta(a))(e)$ y por lo tanto $F(\alpha(a)) \neq F(\beta(a))$. En consecuencia $F\alpha \neq F\beta$ y así X^S es cogenerador. □

9.8. La categoría de representaciones

Recordemos que si X es un conjunto no vacío, una representación (unitaria) de S por transformaciones de X es un morfismo de monoides $S \longrightarrow \tau(X)$, donde $\tau(X)$ es el monoide de todas las funciones de X en sí mismo. En realidad, la Proposición 2.1.4 afirma que hay una correspondencia biyectiva entre la colección de todas las representaciones de S por transformaciones de X y todas las posibles formas de darle estructura de $S-$acción a X. Esto se encuentra en analogía con el hecho de que todo $R-$módulo M se corresponde de manera biunívoca con un morfismo de anillos $R \longrightarrow End(M)$, siendo $End(M)$ el anillo de endomorfismos del grupo abeliano M. A continuación, dada una categoría $\mathcal{A}$ construiremos a la categoría de todas las representaciones de S por objetos de $\mathcal{A}$.

Definición 9.8.1. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría.*

1. *Una representación de S por un objeto de $\mathcal{A}$ es un par (X, φ), donde $X \in Ob(\mathcal{A})$ y $\varphi : S \longrightarrow Hom(X, X)$ es un morfismo de monoides.*

2. *Si (X, φ) y (Y, ψ) son representaciones de S, un morfismo de representaciones de (X, φ) en (Y, ψ) es un $\mathcal{A}-$morfismo $f : X \longrightarrow Y$ tal que para cada $s \in S$ el cuadrado*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi(s)"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\psi(s)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

La definición anterior amerita hacer un par de observaciones. La primera de ellas, es que para cada objeto X de $\mathcal{A}$, $Hom(X, X)$ es un monoide con respecto de la composición en la categoría y cuyo neutro es el morfismo identidad. Así, tiene sentido hablar de morfismos de monoides de S en $Hom(X, X)$. La segunda, que los morfismos de representaciones son, por definición, $\mathcal{A}-$morfismos que satisfacen cierta propiedad, así, tiene sentido definir a la composición de morfismos entre representaciones simplemente como la composición en $\mathcal{A}$. Con esto en mente, podemos establecer el siguiente resultado.

Lema 9.8.2. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría.*

1. *Para cada representación (X, φ), el morfismo identidad id_X es un morfismo de representaciones.*

2. *Si $(X, \varphi) \xrightarrow{f} (Y, \psi) \xrightarrow{g} (Z, \omega)$ son morfismos de representaciones, entonces*

$$(X,\varphi) \xrightarrow{gf} (Z,\omega)$$

es un morfismo de representaciones.

Demostración. 1) Si (X,φ) es una representación, está claro que para cada $s \in S$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi(s)"] \arrow[d, "id_X"'] & X \arrow[d, "id_X"] \\
X \arrow[r, "\varphi(s)"'] & X
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo tanto id_X es un morfismo de representaciones.

2) Suponga que $(X,\varphi) \xrightarrow{f} (Y,\psi) \xrightarrow{g} (Z,\omega)$ son morfismos de representaciones. Para $s \in S$ arbitrario considere al diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi(s)"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\psi(s)"'] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, "\omega(s)"'] & Z
\end{tikzcd}$$

De que el cuadrado superior sea conmutativo se sigue que $f\varphi(s) = \psi(s)f$, y de que la parte inferior conmuta se desprende que $g\psi(s) = \omega(s)g$. Por consiguiente $(gf)\varphi(s) = g(f\varphi(s)) = g(\psi(s)f) = (g\psi(s))f = (\omega(s)g)f = \omega(s)(gf)$ i,e, $(gf)\varphi(s) = \omega(s)(gf)$. De ahí que para cada $s \in S$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi(s)"] \arrow[d, "gf"'] & X \arrow[d, "gf"] \\
Z \arrow[r, "\omega(s)"'] & Z
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y en consecuencia $(X,\varphi) \xrightarrow{gf} (Z,\omega)$ es un morfismo de representaciones.

□

Considere lo siguiente:

- Denótese por $\mathcal{REP}$ a la clase de todas las representaciones de S por objetos de $\mathcal{A}$.
- Si $(X, \varphi), (Y\psi) \in \mathcal{REP}$ defínase

$$Hom((X, \varphi), (Y\psi)) := \{\ X \xrightarrow{f} Y \ \mid f \text{ es un morfismo de representaciones}\}$$

- Para cada $(X, \varphi) \in \mathcal{REP}$ sea id_X el morfismo identidad.
- Sea $\circ$ la composición en $\mathcal{A}$.

De que la composición entre morfismos de representaciones es de nuevo un morfismo de representaciones, de que los morfismos identidad son morfismos de representaciones y de que la composición en $\mathcal{A}$ es asociativa, se desprende que todo lo anterior da lugar a una categoría que será llamada categoría de representaciones de S por objetos de $\mathcal{A}$ y a la que denotaremos por $Rep(S, \mathcal{A})$.

Proposición 9.8.3. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $(X, \varphi) \xrightarrow{f} (Y, \psi)$ un morfismo de representaciones. Entonces f es un isomorfismo de representaciones si y solo si $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Suponga que $(X, \varphi) \xrightarrow{f} (Y, \psi)$ es un isomorfismo de representaciones. Luego, existe $(Y, \psi) \xrightarrow{g} (X, \varphi)$ un morfismo de representaciones (que en realidad es un $\mathcal{A}-$morfismo) para el que $gf = id_X$ y $fg = id_Y$. Por lo tanto f es un isomorfismo en $\mathcal{A}$. Y viceversa, suponga que $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}$ y sea $g : Y \longrightarrow X$ su morfismo inverso. Está claro que si verificamos que g es un morfismo de representaciones, entonces este será un inverso de f como morfismos de representaciones. Así, veamos que $(Y, \psi) \xrightarrow{g} (X, \varphi)$ es un morfismo de representaciones: sea $s \in S$ arbitrario. Como el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi(s)"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\psi(s)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces $f\varphi(s) = \psi(s)f$, pero como g es inverso de f, entonces $\varphi(s) = g\psi(s)f$ y por lo tanto $\varphi(s)g = g\psi(s)$. De ahí que para cada $s \in S$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\psi(s)"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "\varphi(s)"'] & X
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y en consecuencia $(Y,\psi) \xrightarrow{g} (X,\varphi)$ es un morfismo de representaciones. □

Recordemos que la Proposición 2.1.4 asegura que a cada representación de S por transformaciones de un conjunto X le podemos hacer corresponder, de manera única, una $S-$acción, luego, dada una categoría $\mathcal{A}$ podemos pensar en asociar a cada representación de S por un objeto de $\mathcal{A}$ una $S-$acción, pero ¿cómo logramos esto?. En lo sucesivo, $\mathfrak{Set}^\star$ denotará a la categoría de conjuntos no vacíos.

Teorema. 9.8.4. *Sea* $\mathcal{U} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{Set}^\star$ *un funtor.*

1. *Si* $(X,\varphi) \in Rep(S,\mathcal{A})$, *entonces el par* $(\mathcal{U}(X), *_\varphi)$ *con* $*_\varphi : S \times \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ *definida por* $s *_\varphi x := \mathcal{U}(\varphi(s))(x)$ *es una* $S-$*acción.*

2. *Si* $(X,\varphi) \xrightarrow{f} (Y,\psi)$ *es un morfismo de representaciones, entonces la fición* $\mathcal{U}(f) : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(Y)$ *es un* $S-$*morfismo entre las acciones* $(\mathcal{U}(X), *_\varphi)$ *y* $(\mathcal{U}(Y), *_\psi)$.

Demostración. 1) Sean $\mathcal{U} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{Set}^\star$ un funtor y $(X,\varphi) \in Rep(S,\mathcal{A})$. Se tiene que $\mathcal{U}(X)$ es un conjunto, y además, como $\varphi : S \longrightarrow Hom(X,X)$ es un morfismo de monoides, para $s \in S$ se tiene que $\varphi(s) : X \longrightarrow X$ es un $\mathcal{A}-$morfismo, luego $\mathcal{U}(\varphi(s)) : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ es una función. Así, para cada $x \in \mathcal{U}(X)$ ocurre que $\mathcal{U}(\varphi(s))(x) \in \mathcal{U}(X)$. Esto permite considerar a la función $*_\varphi : S \times \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ definida por $s *_\varphi x := \mathcal{U}(\varphi(s))(x)$. Veamos que $(\mathcal{U}(X), *_\varphi)$ es una $S-$acción: para cada $x \in \mathcal{U}(X)$ se tiene que $e *_\varphi x := \mathcal{U}(\varphi(e))(x)$. Ahora, como $\varphi : S \longrightarrow Hom(X,X)$ es un morfismo de monoides, entonces $\varphi(e) = id_X$, de manera que $\mathcal{U}(\varphi(e)) = \mathcal{U}(id_X) = id_{\mathcal{U}(X)}$. Así $e *_\varphi x := \mathcal{U}(\varphi(e))(x) = id_{\mathcal{U}(X)}(x) = x$ i,e, $e *_\varphi x = x$. Para $s,t \in S$ se tiene que $s *_\varphi (t *_\varphi x) := s *_\varphi (\mathcal{U}(\varphi(t))(x)) := \mathcal{U}(\varphi(s))(\mathcal{U}(\varphi(t))(x)) = (\mathcal{U}(\varphi(s))\mathcal{U}(\varphi(t)))(x) = \mathcal{U}(\varphi(s)\varphi(t))(x) = \mathcal{U}(\varphi(st))(x) = (st) *_\varphi x$ i,e $s *_\varphi (t *_\varphi x) = (st) *_\varphi x$. Por consiguiente $(\mathcal{U}(X), *_\varphi)$ es una $S-$acción.

2) Suponga que $(X,\varphi) \xrightarrow{f} (Y,\psi)$ es un morfismo de representaciones. Veamos que la función $\mathcal{U}(f) : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(Y)$ es un $S-$morfismo entre las acciones $(\mathcal{U}(X), *_\varphi)$ y $(\mathcal{U}(Y), *_\psi)$: sean $s \in S$ y $x \in \mathcal{U}(X)$ arbitrarios. Entonces $\mathcal{U}(f)(s *_\varphi x) = \mathcal{U}(f)(\mathcal{U}(\varphi(s)(x))) = (\mathcal{U}(f)\mathcal{U}(\varphi(s)))(x) = \mathcal{U}(f\varphi(s))(x)$ i,e, $\mathcal{U}(f)(s *_\varphi x) = \mathcal{U}(f\varphi(s))(x)$. Además, como f es un morfismo de representaciones, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi(s)"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\psi(s)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, de donde $f\varphi(s) = \psi(s)f$. Luego, la igualdad $\mathcal{U}(f)(s *_\varphi x) = \mathcal{U}(f\varphi(s))(x)$ toma la forma $\mathcal{U}(f)(s *_\varphi x) = \mathcal{U}(\psi(s)f)(x)$, pero $\mathcal{U}(\psi(s)f)(x) = (\mathcal{U}(\psi(s)\mathcal{U}(f)))(x) = \mathcal{U}(\psi(s))(\mathcal{U}(f)(x)) = s *_\psi \mathcal{U}(f)(x)$. En consecuencia $\mathcal{U}(f)(s *_\varphi x) = s *_\psi \mathcal{U}(f)(x)$ y por lo tanto $\mathcal{U}(f) : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(Y)$ es un $S-$morfismo. □

Así, cuando hay un funtor de una categoría dada $\mathcal{A}$ en la categoría de conjuntos no vacíos, el Teorema anterior nos dice cómo asociar a cada objeto de $Rep(S, \mathcal{A})$ una $S-$acción. Más aún, para el funtor $\mathcal{U} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{Set}^\star$ tome en cuenta a lo siguiente:

- Sea $\mathcal{O}$ la clase de todas las $S-$acciones A para las que existe $X \in Ob(\mathcal{A})$ tal que $A = \mathcal{U}(X)$.
- Para cada $A, B \in \mathcal{O}$ sea

$$Hom(A, B) := \{f : A \longrightarrow B \mid f \text{ es un } S-\text{morfismo}\}$$

Es fácil ver que lo anterior forma una subcategoría de $S - Act$ a la que indicaremos por $(S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$.

Teorema. 9.8.5. *Bajo las hipótesis y notación empleadas en el Teorema 9.8.4, se tiene que*

$$\begin{tikzcd}
Rep(S, \mathcal{A}) \arrow[rr, "\Gamma_{\mathcal{U}}"] & & (S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A})) \\
(X, \varphi) \arrow[d, "f"] & \longmapsto & (\mathcal{U}(X), *_\varphi) \arrow[d, "\mathcal{U}(f)"] \\
 & \longmapsto & \\
(Y, \psi) & \longmapsto & (\mathcal{U}(Y), *_\psi)
\end{tikzcd}$$

es un funtor.

Demostración. Del Teorema 9.8.4 se sigue que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ está bien definido, en el sentido de que manda objetos y morfismos de $Rep(S, \mathcal{A})$ en objetos y morfismos de $(S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$. Ahora bien, observe que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ está puesto en términos de $\mathcal{U}$, el cuál es un funtor. De ahí que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ también es un funtor. ☐

Cuando el funtor $\mathcal{U} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{Set}^\star$ tiene un funtor inverso, digamos $\mathcal{V} : \mathfrak{Set}^\star \longrightarrow \mathcal{A}$, es posible construir un funtor de $(S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$ en $Rep(S, \mathcal{A})$, pero para ello se necesita el siguiente resultado.

Teorema. 9.8.6. *Suponga que* $\mathcal{A} \underset{\mathcal{V}}{\overset{\mathcal{U}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Set}^\star$ *son funtores cada uno inverso del otro.*

1. *Sea* $(\mathcal{U}(X), *)$ *una* $S-$*acción con* $X \in Ob(\mathcal{A})$ *y para cada* $s \in S$ *considere a la función* $s * \_ : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ *dada por* $x \mapsto s * x$. *Entonces* $\upsilon(*) : S \longrightarrow Hom(X, X)$ *definida por* $\upsilon(*)(s) := \mathcal{V}(s*\_)$ *es un morfismo de monoides y en consecuencia* $(X, \upsilon(*))$ *es una representación.*

2. *Si $(\mathcal{U}(X), *)$ y $(\mathcal{U}(Y), \circledast)$ son $S-$acciones con $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ y $f : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(Y)$ es un $S-$morfismo, entonces $\mathcal{V}(f) : X \longrightarrow Y$ es un morfismo entre las representaciones $(X, v(*))$ y $(Y, v(\circledast))$.*

Demostración. 1) Sea $(\mathcal{U}(X), *)$ una $S-$acción con $X \in Ob(\mathcal{A})$ y para cada $s \in S$ considere a la función $s * \_ : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ dada por $x \mapsto s * x$. Como $\mathcal{V}$ es un funtor de $\mathfrak{Set}^\star$ en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{V}(s * \_)$ es un $\mathcal{A}-$morfismo de X en X. Por lo tanto tiene sentido considerar a la función $v(*) : S \longrightarrow Hom(X, X)$ definida por $v(*)(s) := \mathcal{V}(s * \_)$. Veamos que $v(*)$ es un morfismo de monoides: primero, para la función $e * \_ : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(X)$ se tiene que para cada $x \in \mathcal{U}(X)$, $(e * \_)(x) := e * x = x$ y por lo tanto $e * \_ = id_{\mathcal{U}(X)}$. De ahí que $\mathcal{V}(e * \_) = \mathcal{V}(id_{\mathcal{U}(X)}) = id_{\mathcal{V}(\mathcal{U}(X))} = id_X$ y en consecuencia $v(*)(e) = id_X$. Ahora, para $s, t \in S$ ocurre que para cada $x \in \mathcal{U}(X)$, $((st)*\_)(x) := (st)*x = s*(t*x) = (s*\_)(t*x) = (s*\_)((t*\_)(x)) = ((s*\_)(t*\_))(x)$ i,e, $((st)*\_)(x) = ((s*\_)(t*\_))(x)$. Por consiguiente $(st) * \_ = (s * \_)(t * \_)$ y por lo tanto $\mathcal{V}((st) * \_) = \mathcal{V}((s * \_)(t * \_)) = \mathcal{V}(s * \_)\mathcal{V}(t * \_)$ i,e, $v(*)(st) = v(*)(s)v(*)(t)$. En consecuencia $v(*) : S \longrightarrow Hom(X, X)$ es un morfismo de monoides y así $(X, v(*))$ es una representación.
2) Sean $(\mathcal{U}(X), *)$ y $(\mathcal{U}(Y), \circledast)$ dos $S-$acciones con $X, Y \in Ob(\mathcal{A})$ y suponga que $f : \mathcal{U}(X) \longrightarrow \mathcal{U}(Y)$ es un $S-$morfismo. Considere al $\mathcal{A}-$morfismo $\mathcal{V}(f) : X \longrightarrow Y$ y sea $s \in S$ arbitrario. Veamos que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}(X) \arrow[r, "s*\_"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{U}(X) \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{U}(Y) \arrow[r, "s\circledast\_"'] & \mathcal{U}(Y)
\end{tikzcd} \tag{9.2}$$

Para cada $x \in \mathcal{U}(X)$ se tiene que $(f(s * \_))(x) = f((s * \_)(x)) = f(s * x) = s \circledast f(x) = (s \circledast \_)(f(x)) = ((s \circledast \_)f)(x)$ y en consecuencia $f(s * \_) = (s \circledast \_)f$. De ahí que el diagrama (9.2) es conmutativo. Ahora, como los funtores envían diagramas conmutativos en diagramas conmutativos, al aplicar el funtor $\mathcal{V}$ al cuadrado (9.2) se obtiene al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v(*)(s)"] \arrow[d, "\mathcal{V}(f)"'] & X \arrow[d, "\mathcal{V}(f)"] \\
Y \arrow[r, "v(\circledast)(s)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Finalmente, debido a que $s \in S$ fue elegido arbitrariamente, se deduce que $\mathcal{V}(f) : X \longrightarrow Y$ es un morfismo entre las representaciones $(X, v(*))$ y $(Y, v(\circledast))$. □

Teorema. 9.8.7. *Bajo las hipótesis y notación del Teorema 9.8.6 se tiene que*

$$\begin{tikzcd}
(S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A})) \arrow[rr, "\Sigma_{\mathcal{V}}"] & & Rep(S,\mathcal{A}) \\
(\mathcal{U}(X), *) \arrow[d, "f"] & \longmapsto & (X, v(*)) \arrow[d, "\mathcal{V}(f)"] \\
 & \longmapsto & \\
(\mathcal{U}(Y), \circledast) & \longmapsto & (Y, v(\circledast))
\end{tikzcd}$$

es un funtor.

Demostración. Del Teorema 9.8.6 se sigue que $\Sigma_{\mathcal{V}}$ está bien definido, en el sentido de que manda objetos y morfismos de $(S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$ en objetos y morfismos de $Rep(S,\mathcal{A})$. Ahora bien, observe que $\Sigma_{\mathcal{V}}$ está puesto en términos de $\mathcal{V}$, el cuál es un funtor. De ahí que $\Sigma_{\mathcal{V}}$ también es un funtor. ☐

A continuación mostraremos que los funtores de los Teoremas 9.8.5 y 9.8.7 son inversos uno del otro y por lo tanto definen un isomorfismo entre categorías.

Teorema. 9.8.8. *Suponga que* $\mathcal{A} \underset{\mathcal{V}}{\overset{\mathcal{U}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Set}^{\star}$ *son funtores cada uno inverso del otro. Entonces los funtores* $\Gamma_{\mathcal{U}}$ *y* $\Sigma_{\mathcal{V}}$ *de los Teoremas 9.8.5 y 9.8.7 son inversos uno del otro. En particular,* $Rep(S,\mathcal{A}) \cong (S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$*.*

Demostración. Veamos que el siguiente diagrama de funtores es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Rep(S,\mathcal{A}) \arrow[rr, "id_{Rep(S,\mathcal{A})}"] \arrow[dr, "\Gamma_{\mathcal{U}}"'] & & Rep(S,\mathcal{A}) \\
 & (S - Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A})) \arrow[ur, "\Sigma_{\mathcal{V}}"'] &
\end{tikzcd} \tag{9.3}$$

Sea (X,φ) una representación arbitraria. Se tiene que $\Gamma_{\mathcal{U}}(X,\varphi) := (\mathcal{U}(X), *_{\varphi})$, donde para cada $s \in S$ y $x \in \mathcal{U}(X)$, $s *_{\varphi} x := \mathcal{U}(\varphi(s))(x)$. Ahora bien, se tiene que $\Sigma_{\mathcal{V}}(\Gamma_{\mathcal{U}}(X,\varphi)) = \Sigma_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}(X), *_{\varphi}) := (X, v(*_{\varphi}))$, donde $v(*_{\varphi}) : S \longrightarrow Hom(X,X)$ es el morfismo de monoides dado por $v(*_{\varphi})(s) := \mathcal{V}(s *_{\varphi} \_)$ siendo $s *_{\varphi} \_$ la función dada por $(s *_{\varphi} \_)(x) := s *_{\varphi} x$ para cada $x \in \mathcal{U}(X)$. Afirmamos que $\varphi = v(*_{\varphi})$: en efecto, para $s \in S$ arbitrario considerar a las funciones $\mathcal{U}(X) \underset{\mathcal{U}(\varphi(s))}{\overset{s*_{\varphi}\_}{\rightrightarrows}} \mathcal{U}(X)$. Para cada $x \in \mathcal{U}(X)$ ocurre que $(s *_{\varphi} \_)(x) :=$

$s *_\varphi x := \mathcal{U}(\varphi(s))(x)$ y por lo tanto $s *_\varphi \_ = \mathcal{U}(\varphi(s))$. De ahí que $\upsilon(*_\varphi)(s) := \mathcal{V}(s *_\varphi \_) = \mathcal{V}(\mathcal{U}(\varphi(s))) = \varphi(s)$ i,e, $\upsilon(*_\varphi)(s) = \varphi(s)$. De que $s \in S$ fue elegido arbitrariamente, se sigue que esta última igualdad se verifica para cada $s \in S$ y en consecuencia $\varphi = \upsilon(*_\varphi)$. Por consiguiente $(X, \varphi) = (X, \upsilon(*_\varphi)) = \Sigma_\mathcal{V}(\Gamma_\mathcal{U}(X, \varphi))$ y así el funtor $\Sigma_\mathcal{V}\Gamma_\mathcal{U}$ deja fija a cualquier representación. Ahora bien, si $(X, \varphi) \xrightarrow{f} (Y, \psi)$ es un morfismo de representaciones, entonces $\Sigma_\mathcal{V}(\Gamma_\mathcal{U}(f)) = \Sigma_\mathcal{V}(\mathcal{U}(f)) := \mathcal{V}(\mathcal{U}(f)) = f$ y por lo tanto el funtor $\Sigma_\mathcal{V}\Gamma_\mathcal{U}$ deja fijo a cualquier morfismo de representaciones. Se concluye así que el diagrama (9.3) es conmutativo. De manera similar se exhibe que el siguiente diagrama entre funtores es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(S-Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A})) \arrow[rr, "id_{(S-Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A}))}"] \arrow[dr, "\Sigma_\mathcal{V}"'] & & (S-Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A})) \\
& Rep(S, \mathcal{A}) \arrow[ur, "\Gamma_\mathcal{U}"'] &
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, los funtores $\Gamma_\mathcal{U}$ y $\Sigma_\mathcal{V}$ son inversos uno del otro y en particular se tiene que $Rep(S, \mathcal{A}) \cong (S-Act)(\mathcal{U}(\mathcal{A}))$. ☐

El siguiente Corolario es una generalización de la Proposición 2.1.4.

Corolario 9.8.9. *$Rep(S, \mathfrak{Set}^\star) \cong S-Act$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ el funtor identidad en $\mathfrak{Set}^\star$. Recordar que $(S-Act)(\mathcal{U}(\mathfrak{Set}^\star))$ es la subcategoría de $S-Act$ compuesta de todas las $S-$acciones A para las que existe $X \in Ob(\mathfrak{Set}^\star)$ tal que $A = \mathcal{U}(X)$ junto con los $S-$morfismos entre ellas. Ahora bien, está claro que para cada $S-$acción A ocurre que $A = \mathcal{U}(A)$ y por consiguiente $(S-Act)(\mathcal{U}(\mathfrak{Set}^\star)) = S-Act$. Finalmente, el isomorfismo $Rep(S, \mathfrak{Set}^\star) \cong S-Act$ se deduce del Teorema anterior. ☐

9.9. Biacciones

A lo largo de todo el trabajo hemos considerado conjuntos para los cuales podemos hacer *accionar* por la izquierda a los elementos de un monoide dado S, de tal manera que obtenemos a lo que hemos llamado una $S-$acción izquierda. Sin embargo, también puede pensarse en hacer *accionar* a los elementos de un monoide por la derecha y entonces obtener lo que se conoce como $S-$acción derecha. Más precisamente se tiene la siguiente definición.

Definición 9.9.1. *Una $S-$acción derecha es un par $(X, *)$ donde X es un conjunto no vacío y $* : X \times S \longrightarrow X$ es una función que satisface lo siguiente para cada $x \in X$ y $s, t \in S$:*

1. $x * e = x$.
2. $(x * s) * t = x * (st)$

De igual forma que con las acciones izquierdas, prescindimos, a menos que sea necesario, de usar la notación $x * s$ y en su lugar escribimos xs. También, usaremos la notación X_S para indicar que X es una $S-$acción derecha. Está claro cómo tendría que ser un $S-$morfismo de acciones derechas, pero aún así se enuncia su definición.

Definición 9.9.2. *Si A y B son $S-$acciones derechas, una función $f : A \longrightarrow B$ es un $S-$morfismo de acciones derechas si para cada $s \in S$ y cada $a \in A$, $f(as) = f(a)s$.*

Recordar que si S es un monoide, se define su monoide opuesto, denotado por S^{op}, de la siguiente manera: para cada $s, t \in S$, $s \cdot t := ts$. No es difícil mostrar que S^{op} es también un monoide. Es claro que cuándo el monoide S es abeliano, entonces $S = S^{op}$. En adición, pueden darse ejemplos de monoides que no son isomorfos a su opuesto (véase el Ejemplo 3.7.9 del capítulo 3 de [8]). Ahora bien, toda $S-$acción izquierda A puede ser considerada como una $S^{op}-$acción derecha haciendo para cada $s \in S$ y cada $a \in A$, $a \cdot s := sa$. Y viceversa, toda $S-$acción derecha puede ser considerada una $S^{op}-$acción izquierda realizando un procedimiento similar. Luego, está claro que cuando se trata con monoides abelianos no hará falta especificar el *lado* de sus acciones. Para acciones derechas, los conceptos de congruencia derecha, acción cociente derecha, subacción etc, se definen sin dificultad en analogía con los dados para acciones izquierdas. También, podemos formar la categoría $Act - S$ de todas las $S-$acciones derechas junto con sus $S-$morfismos derechos y a sus respectivas subcategorías $(Act - S)_0$ y $Act_0 - S$. Cabe mencionar que, salvo modificaciones pertinentes, todos los resultados obtenidos en esta tesis son válidos para acciones derechas, excepto algunos que tienen que ver con propiedades izquierdas o derechas que se definen para monoides, como por ejemplo, si definimos a un monoide Artiniano (Noetheriano) derecho como aquel monoide S para el que la acción derecha S_S sea Artiniana (Noetheriana), entonces pueden constuirse ejemplos de monoides que son Noetherianos izquierdos pero no Noetherianos derechos.

Teorema. 9.9.3. *Existen monoides que son Noetherianos izquierdos pero no Noetherianos derechos.*

Demostración. Antes que nada, queda claro que para un monoide S, una subacción de ${}_SS$ es un ideal izquierdo de S, mientras que una subacción de S_S debe ser un ideal derecho de S. Ahora, sea X un conjunto infinito y para cada $x, y \in X$ defínase $xy := x$. Para cada $x, y, z \in X$ se tiene que $(xy)z = xy = x$ y por otro lado $x(yz) = x$. Así $(xy)z = x(yz)$ y por consiguiente X es un semigrupo bajo esta operación. Note que de hecho, todo elemento de este semigrupo es un cero izquierdo. Sea α tal que $\alpha \notin X$ y sobre el conjunto $M := X \cup \{\alpha\}$ defínase a la siguiente operación binaria:

$$x \cdot y := \begin{cases} x & si \quad x \neq \alpha. \\ y & si \quad x = \alpha. \end{cases}$$

Es fácil ver que con tal operación M es un monoide con neutro α. De hecho, lo único que se hizo fue agregarle un elemento neutro al semigrupo X. No es complicado exhibir que $M - \{\alpha\}$ es un ideal izquierdo de M. Ahora bien, suponga que I es un ideal izquierdo de

My sea $x \neq \alpha$ arbitrario. Como I es ideal izquierdo, para $a \in I$ se tiene que $x \cdot a \in I$, pero $x \cdot a := x$, luego $x \in I$ y por consiguiente $M - \{\alpha\} \subseteq I$. De esto se desprende que los únicos ideales izquierdos de M son M y $M - \{\alpha\}$, y así, las únicas subacciones de ${}_M M$ son M y $M - \{\alpha\}$. Por lo tanto cualquier sucesión creciente de subacciones de ${}_M M$ se estaciona y en consecuencia ${}_M M$ es Noetheriana i,e, el monoide M es Noetheriano izquierdo. Por otro lado, sea J cualquier subconjunto no vacío de M para el que $\alpha \notin J$. Para $a \in J$ y $x \in M$ arbitrarios se tiene que como $a \neq \alpha$, entonces $a \cdot x := a \in J$ y por lo tanto J es un ideal derecho de M. Así, todo subconjunto no vacío de M que no contenga a α es un ideal derecho de M, y en particular, cualquier subconjunto no vacío de M que no contenga a α debe ser una subacción de M_M. Además de eso, como X es un conjunto infinito, existe una sucesión de elementos de X, digamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Debido a que $\alpha \notin X$, ningún elemento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a α. Se tiene así que

$$\{x_1\} \subsetneq \{x_1, x_2\} \subsetneq \{x_1, x_2, x_3\} \subsetneq ... \subsetneq ...$$

es una sucesión creciente de subconjuntos de M (ninguno de los cuáles contiene a α) que no se estaciona, y por lo tanto esta es una sucesión creciente de subacciones de M_M que no se estaciona. De ahí que M_M no es una acción Noetheriana y en consecuencia M no es un monoide Noetheriano derecho. □

Una vez hecho todo este preámbulo, se define en seguida la noción de biacción.

Definición 9.9.4. *Si S y T son monoides, una $(S,T)-$biacción es un conjunto no vacío A tal que ${}_S A$ es una $S-$acción izquierda, A_T es una $T-$acción derecha y para cada $s \in S$, $t \in T$ y $a \in A$ se verifica que $(sa)t = s(at)$. Escribimos ${}_S A_T$ para indicar que A es una $(S,T)-$biacción.*

Ejemplos 9.9.5.

1. *Todo monoide S es una $(S,S)-$biacción, y si además S es abeliano, entonces toda $S-$acción es una $(S,S)-$biacción.*

2. *Sean A una $S-$acción izquierda y $End(A)$ su monoide de endomorfismos. Entonces A es una $End(A)^{op}-$acción derecha haciendo para cada $a \in A$ y $f \in End(A)$, $af := f(a)$. En efecto, note que $a\, id_A := id_A(a) = a$ y además para $f, g \in End(A)$, $(af)g = f(a)g := g(f(a)) = (gf)(a) = (f \cdot g)(a) = a(f \cdot g)$. Luego A es una $End(A)^{op}-$acción derecha. Más aún, si $s \in S$, entonces $s(af) = sf(a) = f(sa) = (sa)f$ y por consiguiente A es una $(S, End(A)^{op})-$biacción. ($\cdot$ denota la operación en el monoide opuesto)*

3. *Si A_S es una $S-$acción derecha, denotemos por $End_r(A)$ a la colección de todos los $S-$morfismos derechos de A en sí misma. Está claro que $End_r(A)$ es un monoide bajo la composición usual. Si para cada $a \in A$ y $f \in End_r(A)$ hacemos $f * a := f(a)$, entonces se prueba como en el inciso anterior que A es una $End_r(A)-$acción izquierda. Más aún, para cada $a \in A$, $s \in S$ y $f \in End_r(A)$ se tiene que $f * (as) := f(as) = f(a)s = (f * a)s$ y por lo tanto A es una $(End_r(A), S)-$biacción.*

Teorema. 9.9.6. *Sea ${}_SA_T$ una $(S,T)-$biacción.*

1. *Si ${}_SB$ es una $S-$acción, entonces $Hom(A,B)$ (la colección de todos los $S-$morfismos de acciones izquierdas de A en B) es una $T-$acción izquierda definiendo para cada $t \in T$ y cada $f \in Hom_S(A,B)$ a la función $tf : A \longrightarrow B$ dada por $(tf)(a) := f(at)$.*

2. *Si B_T es una $T-$acción, entonces $Hom(A,B)$ (la colección de todos los $T-$morfismos de acciones derechas de A en B) es una $S-$acción derecha definiendo para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_S(A,B)$ a la función $fs : A \longrightarrow B$ dada por $(fs)(a) := f(sa)$.*

Demostración. Solo ofrecemos la prueba del primer inciso, pues la del segundo requiere un razonamiento similar. Sean $t \in T$ y $f \in Hom(A,B)$ arbitrarios. Para cada $s \in S$ y $a \in A$ se tiene que $(tf)(sa) := f((sa)t) = f(s(at)) = sf(at) = s(tf)(a)$ y por consiguiente tf es un $S-$morfismo de acciones izquierdas i,e, $tf \in Hom(A,B)$. Además, se tiene que $(e_T f)(a) := f(ae_T) = f(a)$ y en consecuencia $e_T f = f$. Ahora, para $u,v \in T$ ocurre que $(u(vf))(a) := (vf)(au) := f((au)v) = f(a(uv)) = ((uv)f)(a)$ y por lo tanto $u(vf) = (uv)f$. De ahí que $Hom(A,B)$ es una $T-$acción izquierda. ☐

Si en el Teorema 9.2.4 agregamos a la hipótesis que cada A_i es una $(S,S)-$biacción, entonces la biyección que se garantiza pasa a ser un isomorfismo de acciones.

Teorema. 9.9.7. *Sean $(A_i)_{i\in I}$ una familia de $(S,S)-$acciones y ${}_SB$ una $S-$acción. Entonces*

$$Hom(\coprod_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} Hom(A_i, B)$$

Donde el isomorfismo es entre $S-$acciones izquierdas.

Demostración. Recordar que $\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$, y además este conjunto es una $S-$acción izquierda haciendo para cada $s \in S$ y $(a,j) \in \coprod_{i\in I} A_i$, $s(a,j) := (sa,j)$. Ahora bien, el conjunto $\coprod_{i\in I} A_i$ también puede ser dotado de estructura de $S-$acción derecha haciendo $(a,j)s := (as,j)$. Más aún, para cada $s,t \in S$ y $(a,j) \in \coprod_{i\in I} A_i$ se tiene que $s((a,j)t) = s(at,j) = (s(at),j) = ((sa)t,j) = (sa,j)t = (s(a,j))t$ y por consiguiente $\coprod_{i\in I} A_i$ es una $(S,S)-$biacción. Luego, de acuerdo con el primer inciso del Teorema 9.9.6, el conjunto $Hom(\coprod_{i\in I} A_i, B)$ es una $S-$acción izquierda cuya operación viene dada por $(sf)(a,j) := f((a,j)s) = f(as,j)$ para cada $s \in S$ y $f \in Hom(\coprod_{i\in I} A_i, B)$. Por otra parte, como cada A_i es una $(S,S)-$biacción, entonces cada conjunto $Hom(A_i,B)$ es una $S-$acción izquierda con operación dada por $(sf_i)(x) := f_i(xs)$ para cada $s \in S$ y $f_i \in Hom(A_i,B)$. Así, puede considerarse a la $S-$acción producto $\prod_{i\in I} Hom(A_i,B)$, la cuál es una $S-$acción izquierda. Ahora, sea $\Gamma : Hom(\coprod_{i\in I} A_i, B) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom(A_i,B)$ dada por $\Gamma(f) := \overline{f}$ donde para cada $j \in I$, $\overline{f}(j) := f\sigma_j$. En la demostración del Teorema 9.2.4 ya se exhibió que Γ es una biyección. Veremos en seguida que Γ es un $S-$morfismo: sean $s \in S$ y $f \in Hom(\coprod\limits_{i\in I} A_i, B)$ arbitrarios y considere a las funciones $\overline{sf}, s\overline{f} : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} Hom(A_i, B)$. Si $j \in I$, entonces $\overline{sf}(j)$ y $(s\overline{f})(j)$ son $S-$morfismos de A_j en B. Así, para cada $a \in A_j$ se tiene que $(\overline{sf}(j))(a) = ((sf)\sigma_j)(a) = (sf)(\sigma_j(a)) = (sf)(a, j) = f(as, j)$, mientras que $((s\overline{f})(j))(a) = (s\overline{f}(j))(a) := \overline{f}(j)(as) = (f\sigma_j)(as) = f(\sigma_j(as)) = f(as, j)$. Por consiguiente la igualdad $(\overline{sf}(j))(a) = ((s\overline{f})(j))(a)$ se verifica para cada $a \in A_j$ y así $\overline{sf}(j) = (s\overline{f})(j)$. De ahí que $\overline{sf} = s\overline{f}$ y por consiguiente $\Gamma(sf) = s\Gamma(F)$. Se desprende de esto que Γ es un isomorfismo de acciones y por lo tanto $Hom(\coprod\limits_{i\in I} A_i, B) \cong \prod\limits_{i\in I} Hom(A_i, B)$. $\square$

9.10. Los funtores Hom(A,_)

Toda $S-$acción ${}_SA$ determina un funtor de la categoría $S-Act$ en la categoría de conjuntos, como veremos en seguida.

Teorema. 9.10.1. *Sea ${}_SA$ una $S-$acción. Entonces*

$$\begin{tikzcd}
S - Act \arrow[rr, "Hom(A,\_)"] & & \mathfrak{Set} \\
{}_SX \arrow[d, "f"] \arrow[r, mapsto] & {} & Hom(A, X) \arrow[d, "f^*"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & {} & {} \\
{}_SY \arrow[r, mapsto] & {} & Hom(A, Y)
\end{tikzcd}$$

es un funtor, donde f^* viene dada por $f^*(\alpha) := f\alpha$.

Demostración. Para cada $S-$acción ${}_SX$ se tiene que si $\alpha \in Hom(A, X)$, entonces $id_X^*(\alpha) := id_X\alpha = \alpha$ y por lo tanto $id_X^* = id_{Hom(A,X)} = id_{Hom(A,\_)(X)}$. De ahí que $Hom(A, \_)(id_X) = id_{Hom(A,\_)(X)}$. Por otra parte, considere a los $S-$morfismos ${}_SX \xrightarrow{f} {}_SY \xrightarrow{g} {}_SZ$. Para cada $\alpha \in Hom(A, X)$ ocurre que $(g^*f^*)(\alpha) = g^*(f^*(\alpha)) = g^*(f\alpha) = g(f\alpha) = (gf)\alpha = (gf)^*(\alpha)$ y por lo tanto $(gf)^* = g^*f^*$ i,e, $Hom(A, \_)(gf) = Hom(A, \_)(g)Hom(A, \_)(f)$. Por consiguiente $Hom(A, \_)$ es un funtor. $\square$

Todo lo anterior puede también llevarse a cabo partiendo ahora de una $S-$acción derecha, pero lo que se obtiene esta vez es un funtor de la categoría $Act - S$ en la categoría de conjuntos. Más precisamente, si A_S es una $S-$acción, entonces $Hom(A, \_) : Act - S \longrightarrow \mathfrak{Set}$ definido exactamente como en el caso anterior también es un funtor. En resumen, toda $S-$acción izquierda define un funtor de $S - Act$ en $\mathfrak{Set}$ y toda $S-$acción derecha define uno de $Act - S$ en $\mathfrak{Set}$, pero ¿qué pasa cuándo estos funtores son inducidos por una biacción?

Teorema. 9.10.2. *Sea ${}_SA_T$ una $(S,T)-$biacción. Entonces:*

1. *La asociación*

$$\begin{tikzcd}
S - Act \arrow[rr, "Hom(A,\_)"] & & T - Act \\
{}_SX \arrow[dd, "f"] & \longmapsto & Hom(A,X) \arrow[dd, "f^*"] \\
 & \longmapsto & \\
{}_SY & \longmapsto & Hom(A,Y)
\end{tikzcd}$$

   define un funtor, donde $f^*(\alpha) := f\alpha$.

2. *La asociación*

$$\begin{tikzcd}
Act - T \arrow[rr, "Hom(A,\_)"] & & Act - S \\
X_T \arrow[dd, "f"] & \longmapsto & Hom(A,X) \arrow[dd, "f^*"] \\
 & \longmapsto & \\
Y_T & \longmapsto & Hom(A,Y)
\end{tikzcd}$$

   define un funtor, donde $f^*(\alpha) := f\alpha$.

Demostración. $1)$ Como ${}_SA_T$ es una $(S,T)-$biacción, del primer inciso del Teorema 9.9.6 se tiene que si ${}_SX$ es una $S-$acción, entonces $Hom(A,X)$ es una $T-$acción izquierda con operación dada por $(t\alpha)(a) := \alpha(at)$ para cada $s \in S$ y $\alpha \in Hom(A,X)$. Ahora, sea $f :_S X \longrightarrow_S Y$ un $S-$morfismo. Veamos que $f^* : Hom(A,X) \longrightarrow Hom(A,Y)$ es un $T-$morfismo (de acciones izquierdas): sean $t \in T$ y $\alpha \in Hom(A,X)$. Para cada $a \in A$ se tiene que $(f^*(t\alpha))(a) = (f(t\alpha))(a) = f((t\alpha)(a)) = f(\alpha(at))$, mientras que $(tf^*(\alpha))(a) := (f^*(\alpha))(at) = (f\alpha)(at) = f(\alpha(at))$. Por consiguiente $(f^*(t\alpha))(a) = (tf^*(\alpha))(a)$ para cada $a \in A$ y así $f^*(t\alpha) = tf^*(\alpha)$. De ahí que f^* es un $T-$morfismo. Lo anterior muestra que la asociación

$$\begin{tikzcd}
S - Act \arrow[r, "Hom(A,\_)"] & T - Act
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{}_{S}X \arrow[d, "f"] & \longmapsto & Hom(A,X) \arrow[d, "f^{*}"] \\
{} & \longmapsto & {} \\
{}_{S}Y & \longmapsto & Hom(A,Y)
\end{tikzcd}$$

está bien definida, en el sentido de que manda objetos y morfismos de $S - Act$ en objetos y morfismos de $T - Act$. La prueba de que esta asociación es funtorial es exactamente la misma que la hecha para el Teorema 9.10.1. Finalmente, para el segundo inciso se procede de manera análoga. ☐

A manera de síntesis, toda $(S,T)-$biacción induce un par de funtores, más precisamente, si ${}_{S}A_{T}$ es una $(S,T)-$biacción, entonces se tiene lo siguiente: cuando en $Hom(A,\_)$ se hace *correr a las variables* sobre $S - Act$, entonces se obtiene un funtor de $S - Act$ en $T - Act$, y cuando se hace *correr a las variables* sobre $Act - T$ lo que se obtiene es un funtor de $Act - T$ en $Act - S$.

Proposición 9.10.3. *Para cada $S-$acción ${}_{S}A$, el funtor $Hom(A,\_) : S - Act \longrightarrow \mathfrak{Set}$ manda $S-$morfismos inyectivos en funciones inyectivas.*

Demostración. Sea ${}_{S}X \xrightarrow{f} {}_{S}Y$ un $S-$morfismo inyectivo y considere a la función $f^{*} : Hom(A,X) \longrightarrow Hom(A,Y)$ dada por $f^{*}(\alpha) := f\alpha$. Si $\alpha, \beta \in Hom(A,X)$ son tales que $f^{*}(\alpha) = f^{*}(\beta)$, entonces $f\alpha = f\beta$, pero que f sea cancelabe a la izquierda implica que $\alpha = \beta$ y por lo tanto f^{*} es inyectiva. ☐

Está claro que el mismo resultado se verifica para el funtor $Hom(A,\_)$ inducido por una $S-$acción derecha A_{S}.

Definición 9.10.4. *Decimos que el funtor $F : S - Act \longrightarrow \mathfrak{Set}$ es:*

1. *Rees-exacto izquierdo, si para cada sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

con f inyectivo, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

es una sucesión de funciones con $F(f)$ inyectiva y $\mathcal{K}_{im(F(f))} = Ker(F(g))$.

2. *Rees-exacto derecho, si para cada sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

con g sobreyectivo, se tiene que

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

es una sucesión de funciones con $F(g)$ sobreyectiva y $\mathcal{K}_{im(F(f))} = Ker(F(g))$.

3. *Rees-exacto, si para cada sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

con f inyectivo y g sobreyectivo se tiene que

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

es una sucesión de funciones para la cuál $F(f)$ es inyectiva, $F(g)$ es sobreyectiva y $\mathcal{K}_{im(F(f))} = Ker(F(g))$.

Los conceptos anteriores se definen sin dificultad para funtores de $Act - S$ en $\mathfrak{Set}$.

A diferencia de lo que ocurre en módulos, en el caso de las acciones, los funtores $Hom(A, \_)$ no son necesariamente exactos izquierdos.

Teorema. 9.10.5. *Sea ${}_SX \xrightarrow{f} {}_SY \xrightarrow{g} {}_SZ$ una sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos con f inyectivo. Si $im(f) \neq Y$ y $ker(g) \neq \Delta_Y$, entonces $Hom(Ker(g), \_)$ no es Rees-exacto izquierdo.*

Demostración. Recordar que $Ker(g) := \{(y, y') \in A \times A \,|\, g(y) = g(y')\}$. Ahora, no es difícil verificar que $Ker(g)$ es una $S-$acción si hacemos para cada $s \in S$ y $(y, y') \in Ker(g)$, $s(y, y') := (sy, sy')$. Hágase ${}_SA := Ker(g)$ y suponga que $im(f) \neq Y$ y $ker(g) \neq \Delta_Y$. A manera de generar una contradicción, supongamos que $Hom(A, \_)$ es un funtor Rees-exacto izquierdo. Bajo este supuesto, para la sucesión de $S-$morfismos ${}_SX \xrightarrow{f} {}_SY \xrightarrow{g} {}_SZ$ se tiene que $Hom(A, X) \xrightarrow{f^*} Hom(A, Y) \xrightarrow{g^*} Hom(A, Z)$ es una sucesión de funciones con $\mathcal{K}_{im(f^*)} = Ker(g^*)$. Ahora, sean $A \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} Y$ las funciones dadas por $u(y, y') := y$ y $v(y, y') := y'$. Es fácil ver que u y v son $S-$morfismos. Más aún, para cada $(y, y') \in A := Ker(g)$ ocurre que $g(u(y, y')) = g(y) = g(y') = g(v(y, y'))$ y por consiguiente $gu = gv$ i,e, $g^*(v) = g^*(v)$. Por lo tanto $(u, v) \in Ker(g^*) = \mathcal{K}_{im(f^*)}$. Por otra parte, como $Ker(g) \neq \Delta_Y$, existe $(y_1, y_2) \in Ker(g)$ tal que $y_1 \neq y_2$ y así $u(y_1, y_2) := y_1 \neq y_2 = v(y_1, y_2)$. Luego $u \neq v$, pero como $(u, v) \in \mathcal{K}_{im(f^*)}$, entonces necesariamente sucede que $(u, v) \in im(f^*) \times im(f^*)$ y en consecuencia $u \in im(f^*)$. Por lo tanto $u = f^*(h) := fh$ para algún $h \in Hom(A, X)$. Además de eso, como $im(f) \neq Y$, existe $y_0 \in Y$ tal que $y_0 \notin Im(f)$, pero claramente $(y_0, y_0) \in Ker(g) = A$, luego, como $u = fh$, entonces $y_0 = u(y_0, y_0) = f(h(y_0, y_0))$ i,e, $y_0 \in im(f)$, contradicción. Por consiguiente el funtor $Hom(Ker(g), \_)$ no es Rees-exacto izquierdo. ☐

Ejemplo 9.10.6. *Sea ${}_SA$ una $S-$acción y B una subacción propia de A con $|B| \geq 2$. Del Ejemplo 3.3.10 se desprende que la sucesión*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "\iota"] & A \arrow[r, "\pi"] & \frac{A}{B} \end{tikzcd}$$

es Rees-exacta con $Ker(\pi) = \rho_B := (B \times B) \cup \Delta_A$. Por otra parte como $B < A$, entonces $im(\iota) = B \neq A$, y además, de que B tiene al menos dos elementos, se tiene que existen $x, y \in B$ con $x \neq y$, de tal manera que $(x, y) \in Ker(\pi)$ pero $(x, y) \notin \Delta_A$. Luego $Ker(\pi) \neq \Delta_A$ y en consecuencia, del Teorema anterior se sigue que el funtor $Hom(Ker(\pi), \_)$ no es Rees-exacto izquierdo.

Observación 9.10.7. *En el artículo On the Homological Classification of Semigroups with Local Units (referencia [13]), los autores afirman que para cada $S-$acción A el funtor $Hom(A, \_)$ siempre es exacto izquierdo, pero como acabamos de exhibir, esto no es en general verdadero. Ellos, con el fin de tratar de mostrar que $Hom(A, \_)$ es exacto izquierdo dan un argumento como el siguiente: sean ${}_SA$ una $S-$acción y ${}_SX \xrightarrow{f} {}_SY \xrightarrow{g} {}_SZ$ una sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos con f inyectivo. Considerar ahora a la siguiente sucesión de funciones:*

$$\begin{tikzcd} Hom(A, X) \arrow[r, "f^*"] & Hom(A, Y) \arrow[r, "g^*"] & Hom(A, Z) \end{tikzcd}$$

Veamos que $Ker(g^*) \subseteq \mathcal{K}_{im(f^*)}$: tómense $\alpha, \beta \in Hom(A, Y)$ tales que $(\alpha, \beta) \in Ker(g^*)$. Entonces $g^*(\alpha) = g^*(\beta)$ y en consecuencia $g\alpha = g\beta$. De ahí que para cada $a \in A$, $g(\alpha(a)) = g(\beta(a))$ y por lo tanto para cada $a \in A$, $(\alpha(a), \beta(a)) \in Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$ i,e, para cada $a \in A$ o bien $(\alpha(a), \beta(a)) \in im(f) \times im(f)$ o bien $\alpha(a) = \beta(a)$. Es claro que si $\alpha = \beta$, entonces $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}_{im(f^*)}$. Así, puede suponerse que $\alpha \neq \beta$ y por consiguiente, para cada $a \in A$, $\alpha(a) \neq \beta(a)$. De esto se sigue que para cada $a \in A$, $(\alpha(a), \beta(a)) \in im(f) \times im(f)$ y así para cada $a \in A$ existen $l, k \in X$ tales que $\alpha(a) = f(l)$ y $\beta(a) = \beta(k)$. Observe que estos k y l deben ser únicos, pues f es inyectiva. A partir de esto se definen a las funciones $\varphi : A \longrightarrow X$ y $\psi : A \longrightarrow X$ como $\varphi(a) := l$ si $\alpha(a) = f(l)$ y $\psi(a) := k$ si $\beta(a) = f(k)$. Es fácil verificar que φ y ψ son $S-$morfismos. Más aún, para cada $a \in A$ se tiene que $f(\varphi(a)) = f(l) = \alpha(a)$ y $f(\psi(a)) = f(k) = \beta(a)$ i,e, $\alpha = f\varphi$ y $\beta = f\psi$. De ahí que $\alpha = f^*(\varphi)$ y $\beta = f^*(\psi)$ y en consecuencia $(\alpha, \beta) \in im(f^*) \times im(f^*) \subseteq \mathcal{K}_{im(f^*)}$. Por lo tanto $Ker(g^*) \subseteq \mathcal{K}_{im(f^*)}$. Pero, ¿dónde se encuentra el error? El fallo está en suponer que si dos funciones son distintas, entonces sus imagenes también son distintas en cada punto i,e, el error se encuentra en la línea:

Así, puede suponerse que $\alpha \neq \beta$ y por consiguiente, para cada $a \in A$, $\alpha(a) \neq \beta(a)$.

Es claro que si dos funciones son distintas en cada punto, entonces tales funciones son distintas, pero que dos funciones sean diferentes no implica que estas difieran en cada punto. Por ejemplo, las funciones $\mathbb{R} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$ dadas por $f(x) := x$ y $g(x) := x^2$ son distintas, pues $2 = f(2) \neq g(2) = 4$, y sin embargo hay puntos en las que ambas coinciden, como $f(1) = 1 = g(1)$.

A pesar de que no siempre los funtores $Hom(A, \_)$ son exactos izquierdos, puede probarse que para acciones cíclicas, el funtor Hom sí resulta ser exacto izquierdo. Más precisamente se tiene el siguiente resultado.

Teorema. 9.10.8. *Sea ${}_SA$ una $S-$acción cíclica. Entonces el funtor*

$$\begin{tikzcd} S-Act \arrow[r, "{Hom(A,\_)}"] & \mathfrak{Set} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {}_SX \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "f"] & Hom(A,X) \arrow[dd, "f^*"] \\ {} \arrow[r, mapsto] & {} \\ {}_SY \arrow[r, mapsto] & Hom(A,Y) \end{tikzcd}$$

donde $f^*(\alpha) := f\alpha$, es un funtor Rees-exacto izquierdo.

Demostración. Suponga que $A = \langle w \rangle$ es una $S-$acción cíclica y sea ${}_SX \xrightarrow{f} {}_SY \xrightarrow{g} {}_SZ$ una sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos con f inyectivo. Considere ahora a la sucesión de funciones

$$Hom(A, X) \xrightarrow{f^*} Hom(A, Y) \xrightarrow{g^*} Hom(A, Z)$$

Exhibir que f^* es inyectiva se hace exactamente igual que como en la demostración del Teorema 9.10.3. Ahora, como la sucesión ${}_SX \xrightarrow{f} {}_SY \xrightarrow{g} {}_SZ$ es Rees-exacta, entonces gf es una función constante (véase Proposición 3.2.2). Suponga que k es el único valor que toma gf y sea $\overline{k} : A \longrightarrow Y$ la función constante definida por $a \mapsto k$. Está claro que para cada $\alpha \in Hom(A, X)$ ocurre que $(gf)\alpha = \overline{k}$, pero también $(g^*f^*)(\alpha) = g^*(f^*(\alpha)) = g^*(f\alpha) = g(f\alpha) = (gf)\alpha = \overline{k}$. Por lo tanto g^*f^* es una función constante y en consecuencia $\mathcal{K}_{im(f^*)} \subseteq Ker(g^*)$ (véase Proposición 3.2.3). Ahora, sean $u, v \in Hom(A, Y)$ tales que $g^*(u) = g^*(v)$ i,e, sea $(u, v) \in Ker(g^*)$. Entonces $gu = gv$ y así para cada $a \in A$, $g(u(a)) = g(v(a))$. De ahí que para cada $a \in A$, $(u(a), v(a)) \in Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$ i,e, para cada $a \in A$ ocurre que o bien $(u(a), v(a)) \in im(f) \times im(f)$ o bien $u(a) = v(a)$. En particular, para $a = w$ se tienen los dos siguientes casos posibles:

1. $(u(w), v(w)) \in im(f) \times im(f)$
2. $u(w) = v(w)$

En el segundo caso, el tercer inciso del Lema 6.1.2 impica que $u = v$ y en consecuencia $(u, v) \in \mathcal{K}_{im(f^*)}$. En el primer caso, existen $l, k \in X$ tales que $u(w) = f(l)$ y $v(w) = f(k)$. Observe que k y l son únicos, pues f es inyectiva. Sean $A \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} X$ las funciones dadas por $\varphi(sw) := sl$ y $\psi(sw) := sk$. Note que si $s, t \in S$ son tales que $sw = tw$, entonces $su(w) = tu(w)$ y en consecuencia $sf(l) = tf(l)$, de donde $f(sl) = f(tl)$, y al ser f inyectiva se desprende que $sl = tl$. Luego φ está bien definida. De manera similar se verifica que ψ también está bien definida. Ahora bien, no es difícil ver que φ y ψ son $S-$morfismos. Más aún, se tiene que $f(\varphi(w)) = f(l) = u(w)$ y $f(\psi(w)) = f(k) = v(w)$, de manera que el tercer inciso del Lema 6.1.2 impica que $u = f\varphi$ y $v = f\psi$. De ahí que $u = f^*(\varphi)$ y $v = f^*(\psi)$ y en consecuencia $(u, v) \in im(f^*) \times im(f^*) \subseteq \mathcal{K}_{im(f^*)}$. Por lo tanto $Ker(g^*) \subseteq \mathcal{K}_{im(f^*)}$. Concluimos así que $Ker(g^*) = \mathcal{K}_{im(f^*)}$ y por consiguiente $Hom(A, \_)$ es Rees-exacto izquierdo. ☐

9.11. S-Act no es una categoría abeliana

Para cada anillo unitario R siempre se tiene que la categoría $R-$mod compuesta de todos los $R-$módulos izquierdos forma una categoría abeliana. En contraste, dado un monoide S, en esta sección se exhibirá que la categoría $S - Act$ no es abeliana y que en general $S - Act_0$ tampoco lo es.

Definición 9.11.1. *Dada una categoría $\mathcal{A}$ se dice que:*

1. *$\mathbb{I} \in Ob(\mathcal{A})$ es un objeto inicial si para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$ el conjunto $Hom(\mathbb{I}, A)$ es no vacío y contiene exactamente un elemento.*
2. *$\mathbb{F} \in Ob(\mathcal{A})$ es un objeto terminal si para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$ el conjunto $Hom(A, \mathbb{F})$ es no vacío y contiene exactamente un elemento.*
3. *$\mathbb{O} \in Ob(\mathcal{A})$ es un objeto cero si $\mathbb{O}$ es a la vez un objeto inicial y terminal.*

Lema 9.11.2. *Para cada $S-$acción A existe una $S-$acción B y un par de $S-$morfismos $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ con $f \neq g$.*

Demostración. Sean A una $S-$acción arbitraria y B un conjunto con exactamente dos elementos, digamos x y y con $x \neq y$. Para cada $s \in S$ hágase $sx := x$ y $sy := y$. No es difícil ver que con esto B es una $S-$acción, y además x y y son ambos elementos cero. Considerar a las funciones $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ definidas por $f(a) := x$ y $g(a) := y$. Observar que para cada $a \in A$

y $s \in S$ se tiene que $f(sa) := x = sx = sf(a)$ y en consecuencia f es un $S-$morfismo. De manera similar se ve que g es un $S-$morfismo. Más aún, debido a que $x \neq y$ se sigue entonces que $f \neq g$. ☐

Teorema. 9.11.3. *1. La categoría $S - Act$ tiene objeto terminal pero carece de objeto inicial. En consecuencia $S - Act$ no tiene objeto cero.*

2. Las categorías $(S - Act)_0$ y $S - Act_0$ tienen objeto cero.

Demostración. 1) Sea $\Theta := \{\theta\}$ la $S-$acción con un único elemento. Si A es cualquier $S-$acción, debido a que Θ solo tiene un elemento, la única función de A en Θ es la que asocia a cada elemento de A con el único elemento de Θ. Además, claramente tal función es un $S-$morfismo. Por consiguiente $Hom(A, \Theta)$ tiene exactamente un elemento. De ahí que Θ es objeto terminal de $S - Act$. Por otra parte, si suponemos que A_1 es un objeto inicial de $S - Act$, entonces por el Lema anterior existe una $S-$acción B y un par de $S-$morfismos $\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$ con $f \neq g$, pero esto no es posible, pues al ser A_1 inicial el conjunto $Hom(A_1, B)$ debe tener exactamente un elemento. Por lo tanto $S - Act$ no tiene objeto inicial.
2) Sea $\Theta := \{\theta\}$ la $S-$acción con un único elemento. Claramente $\Theta \in (S - Act)_0$, y además de la Proposición 3.3.2 se deduce que Θ es objeto cero de $(S - Act)_0$. De esto último se desprende que para cada $A \in (S - Act)_0$ los conjuntos $Hom(A, \Theta)$ y $Hom(\Theta, A)$ tienen exactamente un elemento, pero como $\Theta \in S - Act_0 \subseteq (S - Act)_0$, entonces lo anterior se verifica para cada $A \in S - Act_0$, de manera que entonces Θ es objeto cero de $S - Act_0$. ☐

Definición 9.11.4. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría con objeto cero Θ, para cada $A \in Ob(\mathcal{A})$ denotaremos por 0 al único elemento de $Hom(A, \Theta)$ y también al único elemento de $Hom(\Theta, A)$. Además, para cualquier otro $B \in Ob(\mathcal{A})$ denotamos también por 0 a la composición de los morfismos $A \longrightarrow \Theta \longrightarrow B$.*

Definición 9.11.5. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría con objeto cero Θ y $f : A \longrightarrow B$ un $\mathcal{A}-$morfismo. Decimos que:*

1. *El $\mathcal{A}-$morfismo $K : N \longrightarrow A$ es núcleo de f si K es igualador de los morfismos* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \end{tikzcd}$.

2. *El $\mathcal{A}-$morfismo $C : B \longrightarrow D$ es conúcleo de f si C es coigualador de los morfismos* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \end{tikzcd}$.

Teorema. 9.11.6. *Todo morfismo de la categoría* $(S - Act)_0$ *tiene un núcleo y un conúcleo. En particular esto ocurre para cada morfismo de* $S - Act_0$.

Demostración. Se sigue de los Teoremas 3.3.14 y 3.3.15. ☐

Definición 9.11.7. *Se dice que una categoría* $\mathcal{A}$ *con objeto cero* Θ *es:*

1. *normal si todo monomorfismo es el núcleo de algún morfismo.*
2. *conormal si todo epimorfismo es el conúcleo de algún morfismo.*

Lema 9.11.8. *Sea* $\mathcal{A}$ *una categoría con objeto cero* Θ *y* $f : A \longrightarrow B$ *un* $\mathcal{A}-$*morfismo. Si* f *es conúcleo de algún morfismo y además* f *tiene núcleo, entonces* f *es conúcleo de su núcleo.*

Demostración. Suponga que f es conúcleo de $h : X \longrightarrow A$ y sea $K : N \longrightarrow A$ núcleo de f. Exhibiremos que f es conúcleo de K: observar primero que como K es núcleo de f, entonces $fK = 0$. Ahora bien, como f es conúcleo de h, entonces $fh = 0$, de manera que como K es núcleo de f, entonces existe un único morfismo l que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, dashed, "l"'] & & A \\
& N \arrow[ur, "K"'] &
\end{tikzcd}$$

i,e, $h = Kl$. Por otra parte, si $F : A \longrightarrow D$ es un morfismo tal que $FK = 0$, entonces $Fh = F(Kl) = (FK)l = 0l = 0$ i,e, $Fh = 0$. De ahí que como f es conúcleo de h se sigue que existe un único morfismo g que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "f"'] & & D \\
& B \arrow[ur, dashed, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, cualquier morfismo $F : A \longrightarrow D$ tal que $FK = 0$ se factoriza de manera única a través de f. Por consiguiente f es conúcleo de K. ☐

Teorema. 9.11.9. *La categoría $S - Act_0$ es normal.*

Demostración. Sean $m : A \longrightarrow B$ un morfismo inyectivo en $S - Act_0$ y $\pi : B \longrightarrow \dfrac{B}{m(A)}$ el $S-$morfismo canónico. Como $S - Act_0$ es cerrada bajo cocientes (véase Teorema 2.5.10), entonces π es un morfismo en $S - Act_0$. Afirmamos que m es núcleo de π. En efecto, del Teorema 3.3.15 se sigue que $\pi m = 0$. Ahora, sea $M : D \longrightarrow B$ un morfismo en $S - Act_0$ tal que $\pi M = 0$. En este caso debe ocurrir que para cada $x \in D$, $[M(x)] = \pi(M(x)) = m(A)$ (pues $m(A)$ es el elemento cero del cociente $\dfrac{B}{m(A)}$) y por consiguiente $M(x) \in m(A)$ para cada $x \in D$. De ahí que $M(D) \subseteq m(A)$. Así, para $x \in D$ arbitrario se tiene que $M(x) \in M(D) \subseteq m(A)$, y al ser m inyectiva, existe un único $a_x \in A$ para el que $M(x) = m(a_x)$. Considerar a la función $\beta : D \longrightarrow A$ dada por $\beta(x) := a_x$. Observar que si $s \in S$ y $x \in D$, entonces la igualdad $M(x) = m(a_x)$ implica que $M(sx) = m(sa_x)$ y en consecuencia $a_{sx} = sa_x$. De ahí que $\beta(sx) := a_{sx} = sa_x = s\beta(x)$ y por lo tanto β es un $S-$morfismo. Ahora, para cada $x \in D$ se tiene que $m(\beta(x)) = m(a_x) = M(x)$ y por consiguiente $M = m\beta$ i,e, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "M"] \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & & B \\
& A \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd} \tag{9.4}$$

es conmutativo. Suponga que γ es un $S-$morfismo tal que $M = m\gamma$. Entonces para cada $x \in D$ sucede que $M(x) = m(\gamma(x))$, pero luego la unicidad de a_x debe implicar que $\gamma(x) = a_x$ y por lo tanto $\gamma(x) = \beta(x)$ para cada $x \in D$. De ahí que $\gamma = \beta$ y así β es el único $S-$morfismo que hace conmutativo al diagrama (9.4). Lo anterior muestra que todo $S-$morfismo M tal que $\pi M = 0$ se factoriza de manera única a través de m. Por consiguiente m es núcleo de π y así $S - Act_0$ es una categoría normal. ☐

Usando el mismo razonamiento que como en el Teorema anterior se exhibe que $(S - Act)_0$ también es una categoría normal. Ahora bien, a pesar de que a la luz del Teorema 9.11.9 la categoría $S - Act_0$ siempre resulta ser normal, puede suceder que $S - Act_0$ no sea una categoría conormal, como a continuación se exhibe.

Ejemplo 9.11.10. *Sea $S := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$. Con la multiplicación usual de enteros S es un monoide con neutro 1 y con elemento cero 0. Para $p = 3$ considerar al conjunto $\mathbb{Z}_3$ de enteros módulo 3. De acuerdo a la Observación 3.3.18, $\mathbb{Z}_3$ es una $S-$acción haciendo $s[a] := [sa]$ para cada $s \in S$ y $[a] \in \mathbb{Z}_3$. Considerar al $S-$morfismo $f : S \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ dado por $f(s) := s[2]$. Siguiendo los detalles ofrecidos en las Observaciones 3.3.18 y 3.3.24 se desprende que f es un $S-$morfismo sobreyectivo tal que $Nu(f) = \{0\}$. Más aún, del Teorema 3.3.14 se tiene que la inclusión $Nu(f) \hookrightarrow S$, que denotaremos por ι, es núcleo de f. Afirmamos que f no puede ser conúcleo de ι. En efecto, suponga, por el contrario, que f es conúcleo de ι. Bajo este supuesto, todo $S-$morfismo h tal que $h\iota = 0$ debe factorizarse (de manera única) a través de f, pero* *como $Nu(f) = \{0\}$, entonces la inclusión $Nu(f) \hookrightarrow S$ es en realidad el $S-$morfismo cero. Luego, cualquier $S-$morfismo h con dominio S satisface que $h\iota = 0$, y en particular $h = id_S$ satisface lo anterior, por lo que $h = id_S$ debe factorizarse (de manera única) a través de f i,e, existe un (único) $S-$morfismo β tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "id_S"] \arrow[dr, "f"'] & & S \\
& \mathbb{Z}_3 \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta i,e, $id_S = \beta f$, pero esto implica que f debe ser inyectiva, lo cuál es imposible, pues S es un conjunto infinito, mientrás que $\mathbb{Z}_3$ no. Este absurdo surge de suponer que f es conúcleo de ι. Por consiguiente f no es conúcleo de su núcleo ι. Usando al morfismo f podemos exhibir que $S - Act_0$ no es una categoría conormal. En efecto, suponga que $S - Act_0$ es conormal. Entonces el $S-$morfismo sobreyectivo f debe ser el conúcleo de algún morfismo en $S - Act_0$, de manera que el Lema 9.11.8 implica que f es conúcleo de su núcleo, pero como vimos, esto no es cierto. Por lo tanto $S - Act_0$ no puede ser conormal.

Definición 9.11.11. *Se dice que una categoría $\mathcal{A}$ es abeliana si:*

1. *$\mathcal{A}$ tiene objeto cero.*
2. *Cualesquiera dos objetos de $\mathcal{A}$ tienen un producto y un coproducto.*
3. *Cualquier $\mathcal{A}-$morfismo tiene un núcleo y un conúcleo.*
4. *$\mathcal{A}$ es normal.*
5. *$\mathcal{A}$ es conormal.*

Observación 9.11.12. *Puede probarse, aunque no lo haremos aquí, que la lista de axiomas que definen a una categoría abeliana $\mathcal{A}$ permiten definir para cada $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, una única estructura de grupo abeliano en el conjunto $Hom(A, B)$ de tal suerte que la operación en estos grupos abelianos es bilineal con respecto de la composición en la categoría.*

Después de toda esta digresión podemos decidir si la categoría $S - Act$ es o no una categoría abeliana, pero de acuerdo con el primer inciso del Teorema 9.11.3 la categoría $S - Act$ no tiene objeto cero, por lo que $S - Act$ no satisface el primer requisito de la Definición 9.11.11. En consecuencia $S - Act$ no es una categoría abeliana. Ahora, para el caso de $S - Act_0$ se tiene lo siguiente: según los Teoremas 9.11.3, 9.11.6 y 9.11.9 la categoría $S - Act_0$ siempre satisface los incisos 1, 3 y 4 de la Definición 9.11.11, sin embargo, puede ocurrir que $S - Act_0$ no satisfaga el quinto, pues según el Ejemplo 9.11.10, para el monoide $S := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ con la multiplicación usual de enteros se tiene que la categoría $S - Act_0$ no es conormal y en consecuencia tampoco abeliana.

CAPÍTULO 10

ACCIONES PROYECTIVAS

Según la Proposición 9.10.3, para cada $S-$acción A el funtor $Hom(A, \_)$ siempre manda $S-$morfismos inyectivos en funciones inyectivas, pero algo así no ocurre con los morfismos sobreyectivos i,e, no es cierto que $Hom(A, \_)$ manda siempre $S-$morfismos sobreyectivos en funciones sobreyectivas.

Ejemplo 10.0.1. *Sea $p \geq 2$ un entero positivo y considere a la $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción $\mathbb{Z}_p$ con operación $n[a] := [na]$ y suponga que $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un $(\mathbb{Z}, \cdot)-$morfismo arbitrario. Es fácil ver que $\mathbb{Z}_p$ es una acción cíclica, de hecho $\mathbb{Z}_p = \langle [1] \rangle$. Así, f quedará determinado completamente si se conoce su valor en $[1]$. Ahora bien, como $[p] = [0]$ y los morfismos de acciones mandan ceros en ceros (véase Lema 3.3.1), entonces $f([p]) = 0$. Por otra parte, se tiene que $f([p]) = f(p[1]) = pf([1])$ i,e, $f([p]) = pf([1])$, de manera que $pf([1]) = 0$ y por consiguiente $f([1]) = 0$. De ahí que f es el morfismo cero. Se concluye así que $Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})$ solo contiene al morfismo cero. Además de eso, no es difícil ver que $Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ contiene al menos dos elementos, a saber, a la identidad y al morfismo cero. Consideremos al $(\mathbb{Z}, \cdot)-$morfismo $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ definido por $\varphi(n) := [n]$. Está claro que φ es sobreyectivo, sin embargo, la función $Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi^*} Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ dada por $\varphi^*(\alpha) := \varphi\alpha$ no puede ser sobreyectiva, pues ello implicaría, junto con el axioma de elección, la existencia de una función inyectiva de $Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ en $Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})$, de donde $2 \leq |Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)| \leq |Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})| = 1$, lo cuál es absurdo. Por consiguiente $Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi^*} Hom(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ no es una función sobreyectiva. En particular, el funtor $Hom(\mathbb{Z}_p, \_)$ no manda $(\mathbb{Z}, \cdot)-$morfismos sobreyectivos en funciones sobreyectivas.*

A pesar de lo anterior, es posible hallar $S-$acciones para las cuáles el funtor Hom síempre mande $S-$morfismos sobreyectivos en funciones sobreyectivas. Tales acciones recibirán el nombre de acciones proyectivas y serán el objeto de estudio de este capítulo.

10.1. Acciones proyectivas

Definición 10.1.1. *Se dice que una $S-$acción P es proyectiva si el funtor $Hom(P,\_)$ manda $S-$morfismos sobreyectivos en funciones sobreyectivas.*

Definición 10.1.2. *Se dice que un $S-$morfismo sobreyectivo $f : A \longrightarrow B$ se escinde si existe un $S-$morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $fg = id_B$.*

Como veremos a continuación, no resulta extraño que las acciones proyectivas sean en realidad los objetos proyectivos de la categoría $S - Act$.

Teorema. 10.1.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción P:*

1. *P es una $S-$acción proyectiva.*
2. *P es un objeto proyectivo de $S - Act$ (véase Definición 1.1.15).*
3. *Todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio P se escinde.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Suponga que P es una $S-$acción proyectiva y sean $g : B \longrightarrow C$ y $\alpha : P \longrightarrow C$ un par de $S-$morfismos con g sobreyectivo. Como P es proyectiva, el funtor $Hom(P,\_)$ manda $S-$morfismos sobreyectivos en funciones sobreyectivas, en particular, la función $Hom(P,B) \xrightarrow{g*} Hom(P,C)$ dada por $g^*(h) := gh$ es una función sobreyectiva. De ahí que para $\alpha \in Hom(P,C)$ existe $\beta \in Hom(P,B)$ tal que $\alpha = g^*(\beta) := g\beta$ i,e, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo tanto P es un objeto proyectivo de $S - Act$.
$2) \Longrightarrow 3)$ Suponga que P es un objeto proyectivo de $S - Act$ y sea $g : B \longrightarrow P$ un $S-$morfismo sobreyectivo. De que P es proyectivo, se sigue que existe un $S-$morfismo β que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "id_P"] \\ B \arrow[r, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

i,e, $g\beta = id_P$. De ahí que g se escinde. Por lo tanto todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio P se escinde.
3) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio P se escinde y sea $g : B \longrightarrow C$ un $S-$morfismo sobreyectivo. Sea $Hom(P, B) \xrightarrow{g*} Hom(P, C)$ la función dada por $g^*(h) := gh$ y sea $\alpha \in Hom(P, C)$ arbitrario. Observe que el conjunto $\mathbb{E} := \{(p, b) \in P \times B \,|\, \alpha(p) = g(b)\}$ es no vacío, pues para $p \in P$ cualquiera se tiene que $\alpha(p) \in C$, de manera que como g es sobreyectiva, entonces existe $b \in B$ tal que $\alpha(p) = g(b)$ y por consiguiente $(p, b) \in \mathbb{E}$. De ahí que $\mathbb{E}$ es no vacío. Así, del Teorema 9.4.1 se sigue que existen $S-$morfismos u y v tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & P \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd} \tag{10.1}$$

es un diagrama pullback. Más aún, el $S-$morfismo u viene dado por $u(p, b) := p$. Ahora bien, u es sobreyectivo, pues como g es sobreyectivo, entonces para cada $p \in P$ existe $b \in B$ tal que $\alpha(p) = g(b)$, luego el par (p, b) pertenece a $\mathbb{E}$ y es tal que $u(p, b) = p$. Por lo tanto u es sobreyectiva. Así, como todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio P se escinde, para el $S-$morfismo sobreyectivo $u : \mathbb{E} \longrightarrow P$ existe un $S-$morfismo $\varepsilon : P \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $u\varepsilon = id_P$. Por otra parte, como el diagrama (10.1) es un pullback, entonces $\alpha u = gv$, de manera que $\alpha u\varepsilon = gv\varepsilon$ y por consiguiente $\alpha = g(v\varepsilon)$. De ahí que $\alpha = g^*(v\varepsilon)$ y por lo tanto g^* es sobreyectiva. Se concluye que el funtor $Hom(P, \_)$ manda $S-$morfismos sobreyectivos en funciones sobreyectivas y por lo tanto P es una $S-$acción proyectiva. □

Dos consecuencias de este Teorema son los siguientes resultados.

Corolario 10.1.4. *Toda $S-$acción libre es proyectiva.*

Demostración. Considere a la categoría concreta $(S - Act, \mathcal{U})$ donde $\mathcal{U} : S - Act \longrightarrow \mathfrak{Set}$ es el funtor olvidadizo. Como la $S-$acción libre $S^{(X)}$ es un objeto libre sobre el conjunto X, de que $\mathcal{U}$ manda epimorfismos en epimorfismos y del Teorema 1.1.17 se desprende que $S^{(X)}$ es un objeto proyectivo de $S - Act$ i,e, $S^{(X)}$ es una $S-$acción proyectiva. □

Corolario 10.1.5. *Toda $S-$acción proyectiva es isomorfa a una subacción de una $S-$acción libre.*

Demostración. Sea P una $S-$acción proyectiva. Del Teorema 7.1.18 se tiene que existe un conjunto X y un $S-$mofismo sobreyectivo $\varphi : S^{(X)} \longrightarrow P$. Por el tercer inciso del Teorema 10.1.3 concluimos que el $S-$morfismo sobreyectivo φ se escinde y por lo tanto existe un $S-$morfismo $\psi : P \longrightarrow S^{(X)}$ tal que $\varphi\psi = id_P$. En particular ψ debe ser inyectivo y en consecuencia $P \cong im(\psi) \leq S^{(X)}$. □

Sobre cierto tipo de monoides ocurre que acción proyectiva es lo mismo que acción libre.

Teorema. 10.1.6. *Si S es un monoide cancelativo derecho y de ideales principales izquierdos, entonces la clase de todas las $S-$acciones proyectivas coincide con la clase de todas las $S-$acciones libres.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ la clase de todas las $S-$acciones libres y sea $\mathfrak{P}$ la clase de todas las $S-$acciones proyectivas. Según el Corolario 10.1.4 se tiene que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}$. Ahora bien, sea $P \in \mathfrak{P}$ i,e, sea P una $S-$acción proyectiva. De acuerdo al Corolario 10.1.5, existen una $S-$acción libre $S^{(X)}$ y $A \leq S^{(X)}$ tales que $P \cong A$. Por otro lado, del Teorema 7.2.2 se desprende que A es una $S-$acción libre y por consiguiente P es libre. Así $P \in \mathfrak{F}$ y en consecuencia $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}$. ☐

El Corolario 10.1.4 muestra que siempre existen acciones que son proyectivas, sin embargo, no toda acción lo es, pues de acuerdo con el Ejemplo 10.0.1, la $(\mathbb{Z}, \cdot)-$acción $\mathbb{Z}_p$ no puede ser proyectiva.

Teorema. 10.1.7. *Si P es una $S-$acción proyectiva y $P \cong Q$, entonces Q es proyectiva.*

Demostración. Suponga que P es una $S-$acción proyectiva y sea $\vartheta : P \longrightarrow Q$ un isomorfismo. Veamos que todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio Q se escinde: sea $g : B \longrightarrow Q$ un $S-$morfismo sobreyectivo arbitrario. Observe que el $S-$morfismo composición $B \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{\vartheta^{-1}} P$ es sobreyectivo, y como P es proyectiva, entonces existe un $S-$morfismo $\gamma : P \longrightarrow B$ tal que $\vartheta^{-1}g\gamma = id_P$, de donde $g\gamma = \vartheta$ y así $g(\gamma\vartheta^{-1}) = id_Q$. Por lo tanto g se escinde y así todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio Q se escinde. Por consiguiente Q es proyectiva. ☐

A continuación se establece un criterio para decidir cuándo una acción cíclica es proyectiva, pero antes se necesita un resultado previo. Se recomienda revisar la Definición 1.2.14 y la Proposición 1.2.21.

Lema 10.1.8. *Si $\alpha \in E(S)$, entonces el ideal izquierdo $S\alpha$ es una $S-$acción proyectiva.*

Demostración. Mostraremos que todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio $S\alpha$ se escinde. Así, sea $g : B \longrightarrow S\alpha$ un $S-$morfismo sobreyectivo. Para $\alpha \in S\alpha$ existe $b_0 \in B$ tal que $\alpha = g(b_0)$. Considerar al $S-$morfismo composición $S\alpha \hookrightarrow S \xrightarrow{f} B$ con $f(s) := sb_0$. Se tiene que $g(f(\iota(\alpha))) = g(f(\alpha)) = g(\alpha b_0) = \alpha g(b_0) = \alpha^2 = \alpha$ i,e, $g(f(\iota(\alpha))) = id_{S\alpha}(\alpha)$. Así, del tercer inciso del Lema 6.1.2 se deduce que $g(f\iota) = id_{S\alpha}$ y por consiguiente g se escinde. En consecuencia todo $S-$morfismo sobreyectivo con codominio $S\alpha$ se escinde y por lo tanto $S\alpha$ es una $S-$acción proyectiva. ☐

Teorema. 10.1.9. *Los siguientes enunciados son equivalentes para la $S-$acción cíclica $\langle w\rangle$:*

1. *$\langle w\rangle$ es proyectiva.*
2. *Existe un $S-$morfismo inyectivo $\varphi : \langle w\rangle \longrightarrow S$ tal que $w = \varphi(w)w$.*
3. *Existe $\alpha \in E(S)$ tal que $\langle w\rangle \cong S\alpha$.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Suponga que $\langle w\rangle$ es proyectiva y sea $f : S \longrightarrow \langle w\rangle$ el $S-$morfismo dado por $f(s) := sw$. Está claro que f es sobreyectivo, luego, al ser $\langle w\rangle$ proyectiva se sigue que existe un $S-$morfismo φ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \langle w\rangle \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "id_{\langle w\rangle}"] \\
S \arrow[r, "f"'] & \langle w\rangle
\end{tikzcd}$$

i,e, $f\varphi = id_{\langle w\rangle}$. De ahí que φ es inyectivo y además $w = f(\varphi(w)) := \varphi(w)w$.
2) $\Longrightarrow$ 3) Suponga que existe un $S-$morfismo inyectivo $\varphi : \langle w\rangle \longrightarrow S$ tal que $w = \varphi(w)w$. De que φ es inyectivo se sigue que $\langle w\rangle \cong im(\varphi) \leq S$. Por otro lado, como las subacciones de ${}_SS$ son los ideales izquierdos de S, entonces $im(\varphi)$ es un ideal izquierdo de S. Más aún, el isomorfismo $\langle w\rangle \cong im(\varphi)$ implica que $im(\varphi)$ es cíclica, de hecho $im(\varphi) = \langle\varphi(w)\rangle$ (véase Lema 6.1.2). De ahí que $im(\varphi) = S\varphi(w)$ i,e, $im(\varphi)$ es el ideal izquierdo de S generado por $\varphi(w)$. Finalmente, veamos que $\varphi(w)$ es un idempotente de S: se tiene que $\varphi(w)^2 = \varphi(w)\varphi(w) = \varphi(\varphi(w)w) = \varphi(w)$ i,e, $\varphi(w)^2 = \varphi(w)$. Por consiguiente $\varphi(w) \in E(S)$.
3) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que existe $\alpha \in E(S)$ tal que $\langle w\rangle \cong S\alpha$. Del Lema 10.1.8 se sigue que $S\alpha$ es una $S-$acción proyectiva, de manera que el Teorema 10.1.7 garantiza que $\langle w\rangle$ también es proyectiva. ☐

Corolario 10.1.10. *Si $\alpha \in E(S)$, entonces el funtor*

$$\begin{tikzcd}
S - Act \arrow[rr, "Hom(S\alpha,\_)"] & & \mathfrak{Set} \\
{}_SX \arrow[dd, "f"] & \longmapsto & Hom(S\alpha, X) \arrow[dd, "f^*"] \\
& \longmapsto & \\
{}_SY & \longmapsto & Hom(S\alpha, Y)
\end{tikzcd}$$

donde $f^*(h) := fh$, es un funtor Rees-exacto.

Demostración. Sea

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

una sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos con f inyectivo y g sobreyectivo. Puesto que $S\alpha$ es cíclica, del Teorema 9.10.8 se sigue que $Hom(S\alpha, \_)$ es Rees-exacto izquierdo y por lo tanto la sucesión de funciones

$$Hom(S\alpha, X) \xrightarrow{f^*} Hom(S\alpha, Y) \xrightarrow{g^*} Hom(S\alpha, Z)$$

es tal que $Ker(g^*) = \mathcal{K}_{im(f^*)}$ con f^* inyectiva. Ahora bien, como $\alpha \in E(S)$, entonces $S\alpha$ es proyectiva y por lo tanto $Hom(S\alpha, \_)$ manda $S-$morfismos sobreyectivos en funciones sobreyectivas, de donde en particular g^* es sobreyectiva y por consiguiente $Hom(S\alpha, \_)$ es Rees-exacto. ☐

El Lema 10.1.8 afirma que todo ideal principal generado por un idempotente debe ser una acción proyectiva. A continuación, exhibiremos una especie de recíproco de este resultado. Más precisamente, mostraremos que un ideal proyectivo e inescindible debe ser isomorfo a un ideal principal generado por un idempotente.

Teorema. 10.1.11. *Los siguientes enunciados son equivalentes para I un ideal izquierdo inescindible de S:*

1. *Existe $\alpha \in E(S)$ tal que $I \cong S\alpha$.*
2. *I es una $S-$acción proyectiva.*

Demostración. $1) \implies 2)$ Si $I \cong S\alpha$ para algún $\alpha \in E(S)$, entonces del Lema 10.1.8 y del Teorema 10.1.7 se sigue que I es proyectiva.
$2) \implies 1)$ Suponga que I es un ideal proyectivo e inescindible (véase Definición 5.0.1). Del Teorema 7.1.18 se tiene que existe un conjunto X y un $S-$mofismo sobreyectivo $\varphi : S^{(X)} \longrightarrow I$. Ahora, puesto que I es proyectivo, del tercer inciso del Teorema 10.1.3 concluimos que el $S-$morfismo sobreyectivo φ se escinde y por lo tanto existe un $S-$morfismo $\psi : I \longrightarrow S^{(X)}$ tal que $\varphi\psi = id_I$. En particular ψ es inyectivo y así $I \cong im(\psi) \leq S^{(X)}$. Ahora bien, de la demostración del Teorema 10.3.3 se tiene que $im(\psi) = \coprod\limits_{k\in Z} I_k$ para alguna familia $(I_k)_{k\in Z}$ de ideales izquierdos de S y algún $Z \subseteq X$. Por otra parte, se tiene que $\coprod\limits_{k\in Z} I_k := \bigcup\limits_{k\in Z} (I_k \times \{k\})$ donde cada $I_k \times \{k\}$ es claramente una subacción de $S^{(X)}$ i,e, $\coprod\limits_{k\in Z} I_k$ es una unión disjunta de subacciones de $S^{(X)}$. Así, de que $im(\psi)$ es inescindible, pues I lo es (véase Teorema 5.0.5), se desprende que el conjunto de índices Z solo tiene un elemento, pues de lo contrario, $im(\psi)$ podría ser expresada como unión disjunta de dos subacciones, lo cuál no es posible. Por lo tanto $Z = \{k\}$ y así $im(\psi) = I_k \times \{k\}$, de donde $im(\psi) \subseteq S \times \{k\}$. De esto último se sigue que $I = \varphi(\psi(I)) \subseteq \varphi(S \times \{k\}) \subseteq \varphi(S^{(X)})$, pero como φ es sobreyectiva, entonces $I = \varphi(S^{(X)})$ y por consiguiente $I = \varphi(S \times \{k\})$. Más aún, observe que $S \times \{k\} = \langle (e, k) \rangle$ i,e, $S \times \{k\}$ es una acción cíclica, de manera que

entonces $I = \varphi(\langle(e,k)\rangle) = \langle\varphi(e,k)\rangle$ y por lo tanto I es una $S-$acción cíclica. Esto último aunado a que I es proyectivo permite deducir, usando el Teorema 10.1.9, que $I \cong S\alpha$ para algún $\alpha \in E(S)$. $\square$

Corolario 10.1.12. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción inescindible P:*

1. *P es proyectiva.*
2. *$P \cong S\alpha$ para algún $\alpha \in E(S)$.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Si P es proyectiva, entonces por los Teoremas 10.1.5 y 10.3.3 existe $(I_k)_{k\in K}$ una familia de ideales izquierdos de S tales que $P \cong \coprod\limits_{k\in K} I_k$. Por otra parte, recuerde que $\coprod\limits_{k\in K} I_k := \bigcup\limits_{k\in K}(I_k \times \{k\})$ i,e, $\coprod\limits_{k\in K} I_k$ es una unión ajena de $S-$acciones, luego, de que P es inescindible se sigue que el conjunto de índices K solo tiene un elemento, digamos j. Así que $\coprod\limits_{k\in K} I_k = I_j$ y por lo tanto $P \cong I_j$. De este isomorfismo se deduce que I_j es un ideal proyectivo e inescindible, de manera que el Teorema anterior implica que $I_j \cong S\alpha$ para algún $\alpha \in E(S)$ y en consecuencia $P \cong S\alpha$.
$2) \Longrightarrow 1)$ Si $P \cong S\alpha$ para algún $\alpha \in E(S)$, entonces del Lema 10.1.8 y del Teorema 10.1.7 se sigue que I es proyectiva. $\square$

Teorema. 10.1.13. *Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de $S-$acciones. Entonces cada A_i es proyectiva si y solo si $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ es proyectiva.*

Demostración. Suponga que cada A_j es proyectiva y sea $\left\{ A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod\limits_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ la familia que se define en el Teorema 9.2.3, la cuál es un coproducto para $(A_i)_{i\in I}$. Ahora, sean $g : B \longrightarrow C$ y $\alpha : \coprod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow C$ dos $S-$morfismos con g sobreyectivo. Como cada A_j es proyectiva, para cada $j \in I$ existe un $S-$morfismo β_j que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A_j \arrow[d, "\sigma_j"] \arrow[ddl, dashed, "\beta_j"'] \\
 & \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd} \tag{10.2}$$

Ahora bien, debido a que $\left\{ A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod\limits_{i\in I} A_i \right\}_{j\in I}$ es un coproducto para $(A_i)_{i\in I}$, para las familias $\left\{ A_j \xrightarrow{\beta_j} B \right\}_{j\in I}$ y $\left\{ A_j \xrightarrow{\alpha\sigma_j} C \right\}_{j\in I}$ existen únicos $S-$morfismos φ y ψ, respectivamente, tal que para cada $j \in I$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\beta_j"] \arrow[d, "\sigma_j"'] & B \\ \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha\sigma_j"] \arrow[d, "\sigma_j"'] & C \\ \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd} \tag{10.3}$$

son conmutativos. Ahora, usando el hecho de que el diagrama (10.2) y el primero de los diagramas (10.3) sean conmutativos se desprende que para cada $j \in I$, $g\beta_j = \alpha\sigma_j$ y $\beta_j = \varphi\sigma_j$, de donde $(g\varphi)\sigma_j = \alpha\sigma_j$, pero esto último implica que tanto $g\varphi$ como α son $S-$morfismos que hacen conmutar al segundo de los diagramas (10.3). Como esto ocurre para cada $j \in I$, de la unicidad de ψ se sigue que $g\varphi = \alpha$. Así, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

es conmutativo y por consiguiente $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ es proyectiva. Y viceversa, suponga que $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ es proyectiva y sea $j \in I$ arbitrario. Exhibiremos que A_j es proyectiva. Sean $g : B \longrightarrow C$ y $\alpha : A_j \longrightarrow C$ dos $S-$morfismos con g sobreyectivo. Tómense θ, θ_B y θ_B tales que $\theta \notin A_j$, $\theta_C \notin C$ y $\theta_B \notin B$ y considere a las $S-$acciones $A_j^0 := A_j \cup \{\theta\}$, $B^0 := B \cup \{\theta_B\}$ y $C^0 := C \cup \{\theta_C\}$ definidas como en la demostración del Teorema 2.5.11. Ahora, sean $\delta : \coprod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j^0$, $\alpha^0 : A_j^0 \longrightarrow C^0$ y $g^0 : B^0 \longrightarrow C^0$ la funciones definidas como

$$\delta(a,i) := \begin{cases} a & si \quad i = j. \\ \theta & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

$$\alpha^0(a) := \begin{cases} \alpha(a) & si \quad a \in A_j. \\ \theta_C & si \quad a = \theta. \end{cases}$$

y

$$g^0(b) := \begin{cases} g(b) & si \quad b \in B. \\ \theta_C & si \quad a = \theta_B. \end{cases}$$

Es fácil ver que todas ellas son $S-$morfismos, y además está claro que también g^0 es sobreyectiva. Ahora, como $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ es proyectiva existe un $S-$morfismo β que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[ddl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\delta"] \\
 & A_j^0 \arrow[d, "\alpha^0"] \\
B^0 \arrow[r, "g^0"'] & C^0
\end{tikzcd}$$

i,e, $g^0\beta = \alpha^0\delta$. Considere ahora al $S-$morfismo $\sigma_j : A_j \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} A_i$ dado por $\sigma_j(a) := (a, j)$ y observe que para cada $a \in A_j$ se tiene que $\delta(\sigma_j(a)) = \delta(a, j) := a$ y por lo tanto $\delta\sigma_j$ es la inclusión de A_j en A_j^0. A continuación considere a la composición de los $S-$morfismos $A_j \xrightarrow{\sigma_j} \coprod\limits_{i\in I} A_i \xrightarrow{\beta} B^0$. Afirmamos que $im(\beta\sigma_j) \subseteq B$. En efecto, sea $a \in A_j$ arbitrario. Como $\beta(\sigma_j(a)) \in B^0 := B \cup \{\theta_B\}$, entonces $\beta(\sigma_j(a)) \in B$ o bien $\beta(\sigma_j(a)) = \theta_B$. Supongamos que $\beta(\sigma_j(a)) = \theta_B$. En este caso $g^0(\beta(\sigma_j(a))) = g^0(\theta_B) := \theta_C$, pero como $g^0\beta = \alpha^0\delta$, entonces $\theta_C = g^0(\beta(\sigma_j(a))) = \alpha^0(\delta(\sigma_j(a))) = \alpha^0(a) := \alpha(a)$ i,e, $\alpha(a) = \theta_C$. Ahora bien, como $im(\alpha) \subseteq C$, la igualdad $\alpha(a) = \theta_C$ implica que $\theta_C \in C$, lo cuál es una contradicción. Por consiguiente el caso $\beta(\sigma_j(a)) = \theta_B$ no ocurre y así $\beta(\sigma_j(a)) \in B$. Por lo tanto $im(\beta\sigma_j) \subseteq B$. Esto último permite considerar al $S-$morfismo $\beta\sigma_j$ como un $S-$morfismo de A_j en B. Considere al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A_j \arrow[dl, dashed, "\beta\sigma_j"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Para cada $a \in A_j$ se tiene que como $\beta(\sigma_j(a)) \in B$, entonces $g(\beta(\sigma_j(a))) = g^0(\beta(\sigma_j(a))) = \alpha^0(\delta(\sigma_j(a))) = \alpha^0(a) := \alpha(a)$ y así $g(\beta\sigma_j) = \alpha$. Por lo tanto el diagrama anterior es conmutativo y en consecuencia A_j es proyectiva. □

Haciendo uso de algunos de los resultados anteriores es que podemos describir completamente a todas las $S-$acciones proyectivas. En concreto, tenemos el siguiente resultado debido a U. Knauer.

Teorema. 10.1.14. *Una $S-$acción P es proyectiva si y solo si existe $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq E(S)$ tal que $P \cong \coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i$.*

Demostración. Suponga que P es una $S-$acción proyectiva. Por el Teorema 5.1.1 existe una colección $(P_i)_{i\in I}$ de subacciones inescindibles de P y disjuntas por pares tales que $P = \bigcup\limits_{i\in I} P_i$. De que esta unión es disjunta se sigue que para cada $p \in P$ existe un único $i_p \in I$ tal que $p \in P_{i_p}$. Ahora bien, está claro que la función $P \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} P_i$ dada por $p \mapsto (p, i_p)$ es una biyección. Más aún, no es difícil ver que también es un $S-$morfismo. Por consiguiente $P \cong \coprod\limits_{i\in I} P_i$. Así, como P es proyectiva, del Teorema 10.1.13 se desprende que cada P_i es proyectiva y además inescindible, de tal manera que el Teorema 10.1.12 implica que para cada $i \in I$ existe $\alpha_i \in E(S)$ tal que $P_i \cong S\alpha_i$ y por consiguiente $P \cong \coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i$. Finalmente, si existe $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq E(S)$ tal que $P \cong \coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i$, entonces del Lema 10.1.8 y los Teoremas 10.1.7 y 10.1.13 se deduce que P es proyectiva. ☐

Corolario 10.1.15. *Si S es un monoide con exactamente un idempotente, entonces la clase de todas las $S-$acciones libres coincide con la clase de todas las $S-$acciones proyectivas.*

Demostración. Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{P}$ la clase de todas las $S-$acciones libres y la clase de todas las $S-$acciones proyectivas, respectivamente. Del Teorema 10.1.4 se sigue que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}$. Ahora bien, sea P una $S-$acción proyectiva. Por el Teorema anterior, existe una colección $(\alpha_i)_{i\in I}$ de idempotentes de S tales que $P \cong \coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i$, pero como S solo tiene un idempotente, el cuál tiene que ser el neutro, entonces para cada $i \in I$ se tiene que $\alpha_i = e$. Así $S\alpha_i = Se = S$ y por lo tanto $P \cong \coprod\limits_{i\in I} S$, pero como S es libre, entonces el Corolario 7.3.4 implica que $\coprod\limits_{i\in I} S$ también es libre y en consecuencia P es libre. Por lo tanto $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F}$ y así $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}$. ☐

Un resultado conocido sobre módulos afirma que dado un anillo R, un $R-$módulo P es proyectivo si y solo si toda sucesión exacta de $R-$módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se escinde. Sin embargo, un hecho análogo a este no puede ser replicado para el caso de los monoides y sus acciones. Recordar que una sucesión Rees-exacta de $S-$morfismos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd} \tag{10.4}$$

con f inyectiva y g sobreyectiva se escinde a la derecha si hay un $S-$morfismo $\beta : P \longrightarrow B$ tal que $g\beta = id_P$. Del tercer inciso del Teorema 10.1.3 se sigue que si en una sucesión como la (10.4) P es una $S-$acción proyectiva, entonces tal sucesión se escinde a la derecha. Sin embargo, pueden construirse acciones P tal que toda sucesión como la (10.4) se escinde a la derecha y que a pesar de eso P no es proyectiva. A continuación ofrecemos un ejemplo de esto.

Ejemplo 10.1.16. *Sea S el monoide de la Observación 3.3.18. De acuerdo a los detalles ahí establecidos, para $p = 3$ se tiene que el conjunto $\mathbb{Z}_3$ de enteros módulo 3 es una $S-$acción cuya operación viene dada por $s[a] := [sa]$. Más aún, $[0] \in \mathbb{Z}_3$ es el único elemento cero de $\mathbb{Z}_3$ y además $\mathbb{Z}_3 = \langle [1] \rangle$, pues $[0] = 0[1]$, $[1] = 1[1]$ y $[2] = 2[1]$. Ahora bien, observe que como los elementos de S son o el cero o potencias de 2, para $s \in S$ se tiene que*

$$\begin{aligned} s[1] = [0] &\iff [s] = [0] \\ &\iff 3 \mid s \\ &\iff s = 0 \end{aligned}$$

Sea $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_3$ una sucesión Rees- exacta de $S-$morfismos con f inyectivo y g sobreyectivo. De la Proposición 3.2.2 se tiene que gf es una función constante, de manera que para $x \in A$ fijo se tiene que para cada $s \in S$, $g(f(x)) = g(f(sx)) = sg(f(x))$ y en consecuencia $g(f(x))$ es elemento cero de $\mathbb{Z}_3$, pero entonces la unicidad de $[0]$ garantiza que $g(f(x)) = [0]$. Por consiguiente para cada $x \in A$, $g(f(x)) = [0]$. Ahora bien, de que g es sobreyectiva se sigue que $[1] = g(b_0)$ para algún $b_0 \in B$. Considere al diagrama

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z}_3 \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "id_{\mathbb{Z}_3}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & \mathbb{Z}_3 \end{tikzcd}$$

donde β es la función dada por $\beta(s[1]) := sb_0$ para cada $s \in S$. Si $s, t \in S$ son tales que $s[1] = t[1]$, entonces $sg(b_0) = tg(b_0)$ y por lo tanto $g(sb_0) = g(tb_0)$. De ahí que $(sb_0, tb_0) \in Ker(g) = \mathcal{K}_{im(f)}$ y así $sb_0, tb_0 \in im(f)$ o bien $sb_0 = tb_0$. Si ocurre que $sb_0, tb_0 \in im(f)$, entonces puede escribirse $sb_0 = f(x)$ y $tb_0 = f(y)$ para algunos $x, y \in A$. Luego entonces $s[1] = sg(b_0) = g(sb_0) = g(f(x)) = [0]$ i,e, $s[1] = [0]$. De manera similar se ve que $t[1] = [0]$. Así $s[1] = [0] = t[1]$ y por consiguiente $s = 0 = t$. En consecuencia $sb_0 = tb_0$. Por lo tanto la igualdad $s[1] = t[1]$ siempre implica que $sb_0 = tb_0$ y por consiguiente β está bien definida. Más aún, es fácil ver que β es un $S-$morfismo. Además de eso se tiene que $g(\beta([1])) = g(b_0) = [1] = id_{\mathbb{Z}_3}([1])$, de manera que el tercer inciso del Lema 6.1.2 implica que $g\beta = id_{\mathbb{Z}_3}$ y por lo tanto la sucesión $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_3$ se escinde a la derecha. Este argumento exhibe que cualquier sucesión Rees- exacta de $S-$morfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_3$ con f inyectivo y g sobreyectivo se escinde a la derecha. Finalmente, note que $\mathbb{Z}_3$ no es una $S-$acción proyectiva, pues de ser así, como $\mathbb{Z}_3$ es cíclica, el Teorema 10.1.9 implicaría que existe $\alpha \in E(S)$ tal que $\mathbb{Z}_3 \cong S\alpha$. Ahora bien, está claro que para el monoide S se tiene que $E(S) = \{0,1\}$. Si $\alpha = 1$, entonces $S\alpha = S$ y así $\mathbb{Z}_3 \cong S$, pero esto no es posible, pues S es infinito mientras que $\mathbb{Z}_3$ no. Luego debe ser que $\alpha = 0$, pero en este caso $S\alpha = S0 = \{0\}$, de manera que $\mathbb{Z}_3 \cong \{0\}$, lo cuál es absurdo. Por lo tanto $\mathbb{Z}_3$ no es una $S-$acción proyectiva.

Se concluye esta sección con un resultado que relaciona acciones Hopfianas, Cohopfianas y proyectivas (véase Definición 6.5.6).

Teorema. 10.1.17. *Si P es una $S-$acción Cohopfiana y proyectiva, entonces P es Hopfiana.*

Demostración. Suponga que P es una $S-$acción Cohopfiana y proyectiva. Ahora, tómese $g : P \longrightarrow P$ un $S-$morfismo sobreyectivo arbitrario. Como P es proyectiva, del Teorema 10.1.3 se sigue que existe un $S-$morfismo $\beta : P \longrightarrow P$ tal que $g\beta = id_P$. De ahí que en particular β es inyectivo, y como P es Cohopfiana, entonces β es un isomorfismo. Está claro que el inverso de β, β^{-1}, también es un isomorfismo, y además la igualdad $g\beta = id_P$ implica que $g = \beta^{-1}$. Por lo tanto g es un isomorfismo y en consecuencia P es Hopfiana. ☐

10.2. Otros criterios de proyectividad

Recordar que una $S-$acción P es proyectiva si y solo si es un objeto proyectivo de la categoría $S - Act$ i,e, si para cada par de $S-$morfismos $g : B \longrightarrow C$ y $\alpha : P \longrightarrow C$ con g sobreyectivo existe un $S-$morfismo β que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd} \tag{10.5}$$

Con el fin de verificar si una $S-$acción es proyectiva, bastará con verificar que la condición de *levantamiento* en el diagrama (10.5) se satisface solo para $S-$morfismos g de la forma $\pi : A \longrightarrow \dfrac{A}{\rho}$ con ρ una $S-$congruencia en A.

Teorema. 10.2.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción P:*

1. *P es proyectiva.*
2. *Para cada $S-$acción B, cada $S-$congruencia ρ de B y cada $S-$morfismo $\alpha : P \longrightarrow \dfrac{B}{\rho}$ existe un $S-$morfismo β que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] \\
B \arrow[r, "\pi"'] & \dfrac{B}{\rho}
\end{tikzcd}$$

donde π es el $S-$morfismo canónico.

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Es inmediato.
$2) \Longrightarrow 1)$ Sean $g : B \longrightarrow C$ y $\alpha : P \longrightarrow C$ dos $S-$morfismos con g sobreyectivo. Por el Teorema 3.1.1 existe un único $S-$morfismo $\overline{g}$ que hace conmutativo al triángulo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & C \\
& \frac{B}{Ker(g)} \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

i,e, $g = \overline{g}\pi$. Más aún, como g es sobreyectiva, entonces $\overline{g}$ debe ser un isomorfismo. Sea k el inverso de $\overline{g}$. De acuerdo a la hipótesis, existe un $S-$morfismo β que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddl, dashed, "\beta"'] \\
& C \arrow[d, "k"] \\
B \arrow[r, "\pi"'] & \frac{B}{Ker(g)}
\end{tikzcd}$$

i,e, $\pi\beta = k\alpha$. De ahí que $(\overline{g}\pi)\beta = (\overline{g}k)\alpha$ y por lo tanto $g\beta = \alpha$. Así el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y por consiguiente P es proyectiva. $\square$

Corolario 10.2.2. *Suponga que $\mathcal{B}$ es una clase de $S-$acciones tal que para cada $S-$acción A existe un $S-$morfismo inyectivo $m : A \longrightarrow B$ con $B \in \mathcal{B}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción P:*

1. *P es proyectiva.*

2. *Para cada par de $S-$morfismos $g : B \longrightarrow C$ y $\alpha : P \longrightarrow C$ con g sobreyectivo y $B \in \mathcal{B}$, existe un $S-$morfismo β que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Es inmediato.

$2) \Longrightarrow 1)$ Sean A una $S-$acción, ρ una $S-$congruencia en A y $\alpha : P \longrightarrow \dfrac{A}{\rho}$ un $S-$morfismo arbitrario. Por hipótesis, para A existe un $S-$morfismo inyectivo $m : A \longrightarrow B$ con $B \in \mathcal{B}$. Defínase $\rho_m := m(\rho) \cup \Delta_B$ donde $m(\rho) := \{(m(a), m(a')) \mid (a, a') \in \rho\}$. Usando el hecho de que ρ es una $S-$congruencia en A se verifica sin dificultad que ρ_m es una $S-$congruencia en B. Denotemos por $[a]_\rho$ y $[b]$ a los elementos de $\dfrac{A}{\rho}$ y $\dfrac{B}{\rho_m}$ respectivamente, y considere al diagrama de $S-$morfismos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_\rho"] \arrow[d, "m"'] & \dfrac{A}{\rho} \arrow[d, "\delta"] \\ B \arrow[r, "\pi"'] & \dfrac{B}{\rho_m} \end{tikzcd}$$

con $\pi_\rho(a) := [a]_\rho$, $\pi(b) := [b]$ y $\delta([a]_\rho) := [m(a)]$. No es difícil ver que δ está bien definida, pues para cada $(a, a') \in \rho$ está claro que $(m(a), m(a')) \in \rho_m$. Más aún, para cada $a \in A$ se tiene que $\delta(\pi_\rho(a)) = \delta([a]_\rho) := [m(a)] = \pi(m(a))$ y por consiguiente $\delta\pi_\rho = \pi m$. Además de eso, notar que si $[a]_\rho, [a']_\rho \in \dfrac{A}{\rho}$ son tales que $[m(a)] = [m(a')]$, entonces $(m(a), m(a')) \in \rho_m$ y por lo tanto $(m(a), m(a')) \in m(\rho)$ o bien $m(a) = m(a')$. En el primer caso la inyectividad de m permite deducir que $(a, a') \in \rho$ y por consiguiente $[a]_\rho = [a']_\rho$. En el segundo caso, de nuevo, usando la inyectividad de m se deduce que $a = a'$ y en consecuencia $[a]_\rho = [a']_\rho$. En ambos casos se desprende que $[a]_\rho = [a']_\rho$ y así δ es inyectiva. Ahora bien, como $B \in \mathcal{B}$ y π es sobreyectivo, de la hipótesis se sigue que existe un $S-$morfismo β que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddl, dashed, "\beta"'] \\
 & \dfrac{A}{\rho} \arrow[d, "\delta"] \\
B \arrow[r, "\pi"'] & \dfrac{B}{\rho_m}
\end{tikzcd}$$

i,e, $\pi\beta = \delta\alpha$. Sea $p \in P$ arbitrario. Como $\alpha(p) \in \dfrac{A}{\rho}$, entonces $\alpha(p) = [a]_\rho$ para algún $a \in A$. Así la igualdad $\pi\beta = \delta\alpha$ implica que $[\beta(p)] = \pi(\beta(p)) = \delta(\alpha(p)) = \delta([a]_\rho) = [m(a)]$ i,e, $[\beta(p)] = [m(a)]$. De ahí que $(\beta(p), m(a)) \in \rho_m$ y en consecuencia $(\beta(p), m(a)) \in m(\rho)$ o bien $\beta(p) = m(a)$. De acuerdo con la definición de $m(\rho)$, no es difícil ver que ambos casos implican que $\beta(p) \in im(m)$. Por consiguiente $im(\beta) \subseteq im(m)$. Esto último junto con la inyectividad de m permite concluir que para cada $p \in P$ existe un único elemento de A, digamos a_p, tal que $\beta(p) = m(a_p)$. A partir de esto se define a la función $\overline{\beta} : P \longrightarrow A$ como $\overline{\beta}(p) := a_p$. Es fácil ver que $\overline{\beta}$ es un $S-$morfismo. Veamos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\overline{\beta}"'] \\
A \arrow[r, "\pi_\rho"'] & \dfrac{A}{\rho}
\end{tikzcd}$$

Tómese $p \in P$ arbitrario. Como $\beta(p) = m(a_p)$, de las igualdades $\pi\beta = \delta\alpha$ y $\delta\pi_\rho = \pi m$ se sigue que $\delta(\alpha(p)) = \pi(\beta(p)) = \pi(m(a_p)) = \delta(\pi_\rho(a_p))$ i,e, $\delta(\alpha(p)) = \delta(\pi_\rho(a_p))$, luego la inyectividad de δ implica que $\alpha(p) = \pi_\rho(a_p) = \pi_\rho(\overline{\beta}(p))$ y por consiguiente $\alpha = \pi_\rho\overline{\beta}$. De todo lo anterior se sigue que P satisface el segundo inciso del Teorema 10.2.1 y en consecuencia P es proyectiva. $\square$

Se puede mostrar que la clase de todas las $S-$acciones inyectivas, que son el concepto dual de las proyectivas, satisface las condiciones del Corolario anterior, de tal manera que este resultado permite establecer una conexión entre las acciones proyectivas e inyectivas.

10.3. Monoides hereditarios

Se dice que un anillo R es hereditario izquierdo si todo ideal izquierdo de R es un $R-$módulo proyectivo. De hecho, puede probarse que el anillo R es hereditario izquierdo si y solo si todo submódulo de un $R-$módulo proyectivo es proyectivo. Con base en estas ideas, a continuación definiremos el concepto de monoide hereditario y probaremos algunos resultados análogos a los existentes para anillos hereditarios y sus módulos.

Definición 10.3.1. *Se dice que un monoide S es hereditario izquierdo si todo ideal izquierdo de S es una $S-$acción proyectiva.*

De manera similar se define la noción de monoide hereditario derecho.

Ejemplos 10.3.2.

1. *Todo grupo G es un monoide hereditario izquierdo. En efecto, el único ideal izquierdo de G es el propio G, y además como $G = Ge$, entonces G es un ideal generado por un idempotente, de manera que el Lema 10.1.8 garantiza que G es una $G-$acción proyectiva. Luego G es hereditario izquierdo.*

2. *Sea $\mathbb{B}$ el monoide bicíclico definido en el quinto de los Ejemplos 6.3. De acuerdo a la Proposición 10.0.7. de [8], todo ideal izquierdo de $\mathbb{B}$ es de la forma $I_n := \langle (n, n) \rangle$ con $n \in \mathbb{N}_0$. Más aún, la Proposición 10.0.4. de [8] afirma que los idempotentes de $\mathbb{B}$ son todos los pares (n, n) con $n \in \mathbb{N}_0$. Así, cualquier ideal izquierdo de $\mathbb{B}$ es generado por un idempotente, de manera que del Lema 10.1.8 se sigue que todo ideal izquierdo de $\mathbb{B}$ es una $\mathbb{B}-$acción proyectiva y por consiguiente $\mathbb{B}$ es un monoide hereditario izquierdo.*

Un hecho referente a anillos hereditarios, y atribuido a I. Kaplansky, versa que sobre un anillo hereditario R todo submódulo de un $R-$módulo libre es isomorfo a una suma directa de ideales de R (véase el Teorema 2.8.1 de [1]), sin embargo, este resultado permanece cierto para acciones a pesar de que el monoide S no sea hereditario. Más precisamente se tiene el siguiente resultado, el cuál ofrece una caracterización completa de todas las subacciones de una acción libre.

Teorema. 10.3.3. *Toda subacción de una $S-$acción libre es suma directa de ideales izquierdos de S.*

Demostración. Como toda $S-$acción libre es, hasta isomorfismo, una de la forma $S^{(X)}$ bastará con realizar la prueba para este tipo de acciones. Sea A una subacción de $S^{(X)}$. De acuerdo con la Observación 7.1.5, se tiene que si para cada $x \in X$ se define $S^{(x)} := S \times \{x\}$, entonces $S^{(X)} = \bigcup\limits_{x \in X} S^{(x)}$ con $S^{(x)} \cap S^{(y)} = \emptyset$ si $x \neq y$. De ahí que $A = A \cap S^{(X)} = A \cap \bigcup\limits_{x \in X} S^{(x)} = \bigcup\limits_{x \in X} (A \cap S^{(x)})$. Si para cada $x \in X$ definimos $Ax := A \cap S^{(x)}$, entonces la igualdad anterior toma la forma $A = \bigcup\limits_{x \in X} Ax$. Ahora, para $Z := \{x \in X \mid Ax \neq \emptyset\}$, es claro que $A = \bigcup\limits_{x \in Z} Ax$. Observe que si $x \in Z$ y $(s, y) \in Ax := A \cap S^{(x)}$, entonces $(s, y) \in S^{(x)} := S \times \{x\}$ y por lo tanto $y = x$. De lo anterior se sigue que $Ax = \{(s, x) \mid (s, x) \in A\}$. Veamos ahora que para cada $x \in Z$ el conjunto $I_x := \{s \in S \,|\, (s, x) \in A\}$ es un ideal izquierdo de S: en efecto, como $x \in Z$, entonces $Ax = \{(s, x) \,|\, (s, x) \in A\}$ es no vacío y por consiguiente I_x es no vacío. Así, para $a \in I_x$ y $s \in S$ arbitrarios se tiene que $(a, x) \in A$ y en consecuencia $s(a, x) = (sa, x) \in A$. De ahí que $sa \in I_x$ y por lo tanto I_x es un ideal izquierdo de S. Veamos que para cada $x \in Z$ ocurre que $Ax = I_x \times \{x\}$: en efecto, sea $x \in Z$ y $(s, x) \in I_x \times \{x\}$. Entonces $s \in I_x$ y por lo tanto $(s, x) \in A$. De ahí que $(s, x) \in Ax$ y en consecuencia $I_x \times \{x\} \subseteq Ax$. Por otra parte, si $(s, x) \in Ax$, entonces $(s, x) \in A$ y así $s \in I_x$. Luego $(s, x) \in I_x \times \{x\}$ y por consiguiente $Ax \subseteq I_x \times \{x\}$. Se tiene así la igualdad $Ax = I_x \times \{x\}$. Ahora bien, de esto último, la unión $A = \bigcup\limits_{x \in Z} Ax$ se reescribe como $A = \bigcup\limits_{x \in Z} (I_x \times \{x\})$, pero por definición, $\bigcup\limits_{x \in Z} (I_x \times \{x\})$ es la suma directa de la familia $(I_x)_{x \in Z}$ (véase Definición 7.3.1), luego $A = \coprod\limits_{x \in Z} I_x$. De ahí que A es una suma directa de ideales izquierdos de S. ☐

Corolario 10.3.4. *Si S es un monoide hereditario izquierdo, entonces toda subacción de una $S-$acción libre es proyectiva.*

Demostración. Suponga que S es un monoide hereditario izquierdo y sea $S^{(X)}$ una $S-$acción libre. Si $A \leq S^{(X)}$, entonces del Teorema 10.3.3 se sigue que $A = \coprod\limits_{k \in I} I_k$ para alguna familia $(I_k)_{k \in I}$ de ideales izquierdos de S. Ahora bien, como S es un monoide hereditario izquierdo, entonces cada I_k es una $S-$acción proyectiva, de manera que el Teorema 10.1.13 garantiza que $A = \coprod\limits_{k \in I} I_k$ es una $S-$acción proyectiva. ☐

Teorema. 10.3.5. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es hereditario izquierdo.*
2. *Toda subacción de una $S-$acción proyectiva es proyectiva.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Suponga que S es hereditario izquierdo y sean $Q \leq P$ con P una $S-$acción proyectiva. Como P es proyectiva, entonces del Corolario 10.1.5 se tiene que existe un $S-$morfismo inyectivo $m : P \longrightarrow S^{(X)}$ para alguna $S-$acción libre $S^{(X)}$. Sea δ el $S-$morfismo composición $Q \hookrightarrow P \xrightarrow{m} S^{(X)}$. Como este morfismo es inyectivo, entonces $Q \cong im(\delta)$ con $im(\delta)$ subacción de $S^{(X)}$. Ahora bien, como S es hereditario izquierdo, entonces del Corolario 10.3.4 se desprende que $im(\delta)$ es proyectiva y por consiguiente Q también es proyectiva. De ahí que toda subacción de una $S-$acción proyectiva es proyectiva.

2) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que toda subacción de una $S-$acción proyectiva es proyectiva. De que ${}_SS$ es proyectiva, pues es libre, se sigue que toda subacción de ${}_SS$ es proyectiva, pero las subacciones de ${}_SS$ son precisamente los ideales izquierdos de S. De ahí que S es un monoide hereditario izquierdo. ☐

10.4. Cubiertas proyectivas y monoides perfectos

Definición 10.4.1. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría, se dice que un $\mathcal{A}-$epimorfismo $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo superfluo (o coescencial) si para cada $\mathcal{A}-$morfismo $h : X \longrightarrow A$, que fh sea epimorfismo implica que h es epimorfismo.*

Lema 10.4.2. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría.*

1. *Todo $\mathcal{A}-$isomorfismo es un epimorfismo superfluo.*
2. *Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son epimorfismos superfluos, entonces gf es un epimorfismo superfluo.*

Demostración. 1) Suponga que $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo y sea $h : X \longrightarrow A$ un $\mathcal{A}-$morfismo tal que fh es un epimorfismo. Como f^{-1} es un epimorfismo, entonces $f^{-1}(fh) = h$ es un epimorfismo y por lo tanto f es un epimorfismo superfluo.

2) Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ epimorfismos superfluos y tómese $h : X \longrightarrow A$ un $\mathcal{A}-$morfismo tal que $(gf)h$ es un epimorfismo. Como $(gf)h = g(fh)$ y g es epimorfismo superfluo, entonces fh es epimorfismo, y así al ser f epimorfismo superfluo se sigue que h es epimorfismo. Por consiguiente gf es un epimorfismo superfluo. ☐

En seguida se determinan a los epimorfismos superfluos de la categoría $S - Act$.

Teorema. 10.4.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un $S-$morfismo sobreyectivo $f : A \longrightarrow B$:*

1. *f es un epimorfismo superfluo en $S - Act$.*
2. *Para cada subacción propia C de A el $S-$morfismo composición $C \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B$ no es sobreyectivo, o lo que es lo mismo $B \neq f(C)$.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Suponga que f es un epimorfismo superfluo en $S - Act$ y sea C una subacción propia de A. Sea δ la composición de los $S-$morfismos $C \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B$ y suponga, a modo de obtener un absurdo, que $\delta := f\iota$ es sobreyectivo. Que f sea un epimorfismo superfluo implica entonces que la inclusión $C \hookrightarrow A$ es sobreyectiva, pero esto no es posible, pues $C \neq A$. Por consiguiente $\delta := f\iota$ no es sobreyectivo.
$2) \Longrightarrow 1)$ Suponga que para cada subacción propia C de A el $S-$morfismo composición $C \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B$ no es sobreyectivo. Tómese $h : X \longrightarrow A$ un $S-$morfismo tal que fh es sobreyectivo. Si h no fuése sobreyectivo, entonces $im(h)$ es una subacción propia de A, de manera que así la composición de los $S-$morfismos $im(h) \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B$ no es sobreyectiva y por lo tanto $f(im(h)) \neq B$, pero por otra parte, fh si es sobreyectivo, de donde $f(im(h)) = B$, contradicción. Por consiguiente h es sobreyectivo y en consecuencia f es un epimorfismo superfluo en $S - Act$. ☐

Definición 10.4.4. *Una cubierta proyectiva para la $S-$acción A es un par (P, f) siendo P una $S-$acción proyectiva y $f : P \longrightarrow A$ un $S-$epimorfismo superfluo.*

De acuerdo al Teorema 7.1.18, toda $S-$acción es imagen homomorfa de una $S-$acción libre, y como toda libre es proyectiva, entonces cualquier $S-$acción es imagen homomorfa de una proyectiva. El siguiente resultado muestra que una cubierta proyectiva para una $S-$acción A es, en cierto sentido, la menor aproximación a A como imagen homomorfa de una $S-$acción proyectiva.

Teorema. 10.4.5. *Si (P, f) es una cubierta proyectiva para la $S-$acción A y $g : Q \longrightarrow A$ es un $S-$morfismo sobreyectivo con Q proyectiva, entonces existe un $S-$morfismo inyectivo m que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "m"'] & & A \\
& Q \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

En particular Q contiene una copia de P.

Demostración. Como f es sobreyectivo y Q es proyectiva, existe un $S-$morfismo h que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
P \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

i,e, $fh = g$. Ahora bien, como g es sobreyectivo, entonces fh es sobreyectivo, de manera que al ser f un epimorfismo superfluo se sigue que $h : Q \longrightarrow P$ es sobreyectivo. Ahora bien, como P es proyectivo, entonces h se escinde i,e, existe un $S-$morfismo $m : P \longrightarrow Q$ tal que $hm = id_P$. En particular m es inyectivo. Más aún, la igualdad $fh = g$ implica que $f(hm) = gm$ con $hm = id_P$. Luego $f = gm$ y por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "m"'] & & A \\
& Q \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. ☐

Corolario 10.4.6. *Si (P, f) y (Q, g) son dos cubiertas proyectivas de la $S-$acción A, entonces existe un isomorfismo $m : P \longrightarrow Q$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "m"'] & & A \\
& Q \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Por el Teorema anterior existe un $S-$morfismo inyectivo $m : P \longrightarrow Q$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "m"'] & & A \\
& Q \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo i,e, $gm = f$, pero como f es un epimorfismo, entonces gm es epimorfismo, de tal manera que al ser g un epimorfismo superfluo se sigue entonces que m es epimorfismo i,e, m es sobreyectivo. De ahí que m es un isomorfismo. ☐

El Corolario anterior garantiza que cuando una $S-$acción tiene cubierta proyectiva, entonces esta es única, salvo isomorfismo.

Proposición 10.4.7. *Sean A y B dos $S-$acciones tales que $A \cong B$. Si A tiene cubierta proyectiva, entonces B tiene cubierta proyectiva.*

Demostración. Sean (P, f) una cubierta proyectiva de A y $\varphi : A \longrightarrow B$ un isomorfismo. De acuerdo al Lema 10.4.2, la composición de los $S-$morfismos $P \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\varphi} B$ es un epimorfismo superfluo. Por lo tanto el par $(P, \varphi f)$ es una cubierta proyectiva de B. ☐

Proposición 10.4.8. *Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de $S-$acciones. Si cada A_i tiene cubierta proyectiva, entonces $\coprod\limits_{I \in I} A_i$ tiene cubierta proyectiva.*

Demostración. Para cada $i \in I$ sea (P_i, f_i) una cubierta proyectiva de A_i y considere a la función $f : \coprod\limits_{i \in I} P_i \longrightarrow \coprod\limits_{i \in I} A_i$ dada por $f(p, i) := (f_i(p), i)$. Es fácil ver que f es un $S-$morfismo y que además f es sobreyectiva. Ahora bien, el Teorema 10.1.13 garantiza que $\coprod\limits_{i \in I} P_i$ es proyectiva, de manera que f es un candidato a ser cubierta proyectiva de $\coprod\limits_{i \in I} A_i$. Para ver que esto es así solo resta exhibir que f es un epimorfismo superfluo. Para tal fin, sea P una subacción propia de $\coprod\limits_{i\in I} P_i$. Observe que $P = P \cap \coprod\limits_{i\in I} P_i = P \cap \bigcup\limits_{i\in I}(P_i \times \{i\}) = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ con $X_i := P \cap (P_i \times \{i\})$ para cada $i \in I$. Si $Z := \{i \in I \,|\, X_i \neq \emptyset\}$, entonces está claro que la unión $P = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ se reescribe como $P = \bigcup\limits_{i\in Z} X_i$. Ahora, como $P \neq \coprod\limits_{i\in I} P_i$, existe $(q, j) \in \coprod\limits_{i\in I} P_i$ tal que $(q, j) \notin P$. Supongamos, a modo de obtener una contradicción, que $\coprod\limits_{i\in I} A_i = f(P)$. De acuerdo a que $P = \bigcup\limits_{i\in Z} X_i$, la igualdad $\coprod\limits_{i\in I} A_i = f(P)$ implica que $\coprod\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} f(X_i)$. Así para $f(q, j) \in \coprod\limits_{i\in I} A_i$ existe $i \in Z$ tal que $f(q, j) \in f(X_i)$, de manera que puede escribirse $f(q, j) = f(p_0, i)$ para algún $(p_0, i) \in X_i$. Así la definición de f implica que $(f_j(q), j) = (f_i(p_0), i)$ y por consiguiente $i = j$. De ahí que $(p_0, i) = (p_0, j) \in X_j$. Defínase $Y_j := \{p \in P_j \,|\, (p, j) \in P\}$. Como $(p_0, j) \in X_j := P \cap (P_j \times \{j\})$, entonces $(p_0, j) \in P$ y así $p_0 \in Y_j$. De ahí que $Y_j \neq \emptyset$. Además no es difícil ver que Y_j es una subacción de P_j. Más aún, no puede ocurrir que $Y_j = P_j$, pues de ser así se tendría que $q \in P_j = Y_j$ y en consecuencia $(q, j) \in P$, lo cuál contradice el hecho de que $(q, j) \notin P$. Por consiguiente $Y_j \neq P_j$. Considerar al $S-$morfismo $f_j : P_j \longrightarrow A_j$ y sea $a \in A_j$ arbitrario. Del supuesto de que $\coprod\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} f(X_i)$, se deduce que para el par $(a, j) \in \coprod\limits_{i\in I} A_i$ existe $k \in Z$ tal que $(a, j) \in f(X_k)$ y por lo tanto $(a, j) = f(p, k) := (f_k(p), k)$ para algún $(p, k) \in X_k$, pero esto implica que $j = k$ y $a = f_j(p)$. Además, como $(p, j) \in X_j := P \cap (P_j \times \{j\})$, entonces $(p, j) \in P$ y por consiguiente $p \in Y_j$. De ahí que $a = f_j(p) \in f_j(Y_j)$ y así $A_j = f_j(Y_j)$. Finalmente, como $f_j : P_j \longrightarrow A_j$ es un epimorfismo superfluo y Y_j es una subacción propia de P_j el Teorema 10.4.3 garantiza que el $S-$morfismo composición $Y_j \hookrightarrow P_j \xrightarrow{f_j} A_j$ no es sobreyectivo y por lo tanto $A_j \neq f_j(Y_j)$, lo cuál es absurdo. Tal contradicción surge de suponer que $\coprod\limits_{i\in I} A_i = f(P)$. Por consiguiente $\coprod\limits_{i\in I} A_i \neq f(P)$ y así f es un epimorfismo superfluo. De ahí que el par $(\coprod\limits_{i\in I} P_i, f)$ es cubierta proyectiva de $\coprod\limits_{i\in I} A_i$. ☐

Teorema. 10.4.9. *Si A es una $S-$acción cíclica y (P, f) es cubierta proyectiva de A, entonces P es cíclica. De hecho $P \cong S\alpha$ para algún $\alpha \in E(S)$.*

Demostración. Sea $A = \langle w \rangle$ y suponga que (P, f) es una cubierta proyectiva para $\langle w \rangle$. Como ${}_S S$ es proyectiva, pues es libre, para el $S-$morfismo $f_w : S \longrightarrow \langle w \rangle$ dado por $f_w(s) := sw$ existe un $S-$morfismo h que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f_w"] \\
P \arrow[r, "f"'] & \langle w \rangle
\end{tikzcd}$$

i,e, $fh = f_w$. Ahora bien, está claro que f_w es sobreyectivo, luego fh es sobreyectivo, pero como f es un epimorfismo superfluo, entonces $h : S \longrightarrow P$ es sobreyectivo. Así, de que $S = \langle e \rangle$ es cíclica, del cuarto inciso del Lema 6.1.2 se deduce que $P = \langle h(e) \rangle$ i,e, P es cíclica. Más aún, como P es proyectiva, del Teorema 10.1.9 se deduce que $P \cong S\alpha$ para algún $\alpha \in E(S)$. □

Así, cubiertas proyectivas de cíclicas son también cíclicas. A continuación se determinan condiciones necesarias y suficientes para las que una $S-$acción cíclica posee cubierta proyectiva.

Definición 10.4.10. *Si A es una $S-$acción cíclica, al conjunto $Gen(A) := \{w \in A \,|\, A = \langle w \rangle\}$ se le llama conjunto de generadores de A.*

Teorema. 10.4.11. *Los siguientes enunciados son equivalentes para una $S-$acción cíclica A:*

1. *A tiene una cubierta proyectiva.*
2. *Existe $w \in Gen(A)$ tal que el monoide $Stab(w)$ (véase Definición 8.1.6) contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Sea (P, g) una cubierta proyectiva de la $S-$acción cíclica A. Puesto que A es cíclica, del Teorema 10.4.9 se sigue que P es cíclica, y de hecho, existe $\alpha \in E(S)$ para el que $P \cong S\alpha$. Sea $\varphi : S\alpha \longrightarrow P$ un isomorfismo y sea f la composición de los $S-$morfismos $S\alpha \xrightarrow{\varphi} P \xrightarrow{g} A$. Del Lema 10.4.2 se desprende que f es un epimorfismo superfluo con $S\alpha$ proyectiva, de manera que entonces el par $(S\alpha, f)$ es una cubierta proyectiva de A. Ahora bien, como f es sobreyectivo, entonces $A = \langle f(\alpha) \rangle$ y por lo tanto $f(\alpha) \in Gen(A)$. Defínase $w := f(\alpha)$ y sea $T := Stab(w)$. Observe que $\alpha w = \alpha f(\alpha) = f(\alpha^2) = f(\alpha) = w$ y por lo tanto $\alpha \in T := Stab(w)$. Afirmamos que $T\alpha$ es un ideal izquierdo minimal del monoide T. En efecto, sea I un ideal izquierdo del monoide T tal que $I \subseteq T\alpha$. Supongamos a manera de obtener una contradicción, que $I \neq T\alpha$ y considere al conjunto $SI := \{sa \,|\, s \in S, a \in I\}$. Es fácil ver que SI es un ideal izquierdo de S, más aún, como todo elemento de SI es de la forma sa con $s \in S$ y $a \in I$, y a su vez todo elemento de I debe ser de la forma $t\alpha$ con $t \in T$, entonces cualquier elemento de SI es de la forma $(st)\alpha$ con $s \in S$ y $t \in T$ y por lo tanto $SI \subseteq S\alpha$. Ahora bien, no puede ocurrir que $SI = S\alpha$, pues de ser así se tendría que $\alpha \in S\alpha = SI$ y por consiguiente $\alpha = (st)\alpha$ para algunos $s \in S$ y $t \in T := Stab(w)$ con $t\alpha \in I$, de donde $w := f(\alpha) = f(st\alpha) = (st)f(\alpha) = s(tf(\alpha)) = sf(\alpha) = sw$ y en consecuencia $s \in T := Stab(w)$, pero como $t\alpha \in I$ e I es ideal izquierdo de T, entonces $s(t\alpha) \in I$, pero $\alpha = (st)\alpha = s(t\alpha)$, luego $\alpha \in I$ y por consiguiente $I = T\alpha$, lo que contradice al supuesto de que $I \neq T\alpha$. Por lo tanto $SI \subsetneq S\alpha$. De esto último y de que f es un epimorfismo superfluo se sigue que la composición de los $S-$morfismos $SI \hookrightarrow S\alpha \xrightarrow{f} \langle w \rangle$ no es sobreyectiva y en consecuencia $\langle w \rangle \neq f(SI)$. Por otra parte para $a \in I$ arbitrario puede escribirse $a = t\alpha$ con $t \in T := Stab(w)$, luego $f(a) = f(t\alpha) = tf(\alpha) = tw = w$, y por

lo tanto $w \in f(I) \subseteq f(SI)$. Así $w \in f(SI)$, pero esto implica que $\langle w\rangle = f(SI)$, lo cuál es una contradicción que surge de suponer que $I \neq T\alpha$. Por consiguiente $I = T\alpha$ y así $T\alpha$ es un ideal izquierdo minimal del monoide $T := Stab(w)$.
2) $\Longrightarrow$ 1) Sea $T := Stab(w)$ con $w \in Gen(A)$ y suponga que existe $\alpha \in E(T)$ tal que $T\alpha$ es ideal izquierdo minimal de T. Como $T \subseteq S$ y $\alpha^2 = \alpha$, entonces está claro que $\alpha \in E(S)$. Así, del Lema 10.1.8 se deduce que $S\alpha$ es una $S-$acción proyectiva. Considerar a la función $f : S\alpha \longrightarrow \langle w\rangle$ dada por $f(s\alpha) := sw$. Observe que si $s, t \in S$ son tales que $s\alpha = t\alpha$, entonces $(s\alpha)w = (t\alpha)w$ y así $s(\alpha w) = t(\alpha w)$, pero como $\alpha \in T := Stab(w)$, entonces $\alpha w = w$ y en consecuencia $sw = tw$. De ahí que f está bien definida, más aún, no es difícil ver que f es un $S-$morfismo sobreyectivo. Ahora, sea I una subacción propia de $S\alpha$ i,e, sea $I \leq S\alpha$ con $I \neq S\alpha$ y sea δ la composición de los $S-$morfismos $I \hookrightarrow S\alpha \xrightarrow{f} \langle w\rangle$. Si δ fuese sobreyectivo, entonces $\langle w\rangle = f(I)$ y así existe $a \in I$ para el que $w = f(a)$. Ahora bien, como $I \subseteq S\alpha$, entonces $a \in S\alpha$ y por lo tanto $a = s\alpha$ para algún $s \in S$. Luego, la igualdad $w = f(a)$ implica que $w = f(s\alpha) := sw$ i,e, $w = sw$. De ahí que $s \in T := Stab(w)$ y por consiguiente $a = s\alpha \in T\alpha$. De ahí que $ta \in T\alpha$ para cada $t \in T$ y por lo tanto Ta es un ideal izquierdo de T contenido en $T\alpha$. Así, como $T\alpha$ es un ideal izquierdo minimal de T, entonces $Ta = T\alpha \ni \alpha$ y en consecuencia $\alpha = ra$ para algún $r \in T$. De ahí que como $a \in I$, entonces $\alpha = ra \in I$, pero esto implica que $S\alpha \subseteq I$ y por lo tanto $I = S\alpha$, contradicción. Este absurdo surge de suponer que la composición de los $S-$morfismos $I \hookrightarrow S\alpha \xrightarrow{f} \langle w\rangle$ es sobreyectivo. Por consiguiente $I \hookrightarrow S\alpha \xrightarrow{f} \langle w\rangle$ no es sobreyectivo para cada I subacción propia de $S\alpha$. De ahí que f es un epimorfismo superfluo y por lo tanto el par $(S\alpha, f)$ es una cubierta proyectiva de $\langle w\rangle$. $\square$

Corolario 10.4.12. *La $S-$acción cero $\Theta := \{\theta\}$ tiene una cubierta proyectiva si y solo si S contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente.*

Demostración. No es difícil ver que $\Theta = \langle\theta\rangle$ i,e, Θ es una acción cíclica. Más aún, en este caso $Gen(\Theta) = \{\theta\}$ y $Stab(\theta) := \{s \in S \mid s\theta = \theta\} = S$. Así, aplicando el Teorema anterior se obtiene lo pedido. $\square$

La primera implicación del Teorema 10.4.11 afirma que si una acción cíclica tiene cubierta proyectiva, entonces existe un generador de esta acción, digamos w, tal que el monoide $Stab(w)$ contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente. De hecho, puede mejorarse este resultado exhibiendo que cualquier generador de una acción cíclica con cubierta proyectiva cumple con esta propiedad. A continuación ofrecemos los detalles.

Lema 10.4.13. *Sea A una $S-$acción y $x, y \in A$ tales que $x = uy$ y $y = vx$ para algunos $u, v \in S$.*

1. *Si $t \in Stab(y)$, entonces $utv \in Stab(x)$.*
2. *Si $s \in Stab(x)$, entonces $vsu \in Stab(y)$.*

Demostración. Primero, observe que si $x = uy$ y $y = vx$, entonces $x = u(vx) = (uv)x$ y $y = v(uy) = (vu)y$ i,e, $uv \in Stab(x)$ y $vu \in Stab(y)$. Así, sea $t \in Stab(y)$ arbitrario. Entonces $ty = y$ y por lo tanto $(tv)x = vx$. De ahí que $(utv)x = (uv)x = x$ y en consecuencia $utv \in Stab(x)$. De manera similar se exhibe que si $s \in Stab(x)$, entonces $vsu \in Stab(y)$. ☐

Teorema. 10.4.14. *Sea A una $S-$acción cíclica y $x \in Gen(A)$. Si A tiene cubierta proyectiva, entonces el monoide $Stab(x)$ contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente.*

Demostración. Sea A una $S-$acción cíclica y $x \in Gen(A)$. Si A tiene cubierta proyectiva, del Teorema 10.4.11 se sigue que existe $y \in Gen(A)$ tal que el monoide $Stab(y)$ contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente. Hágase $T := Stab(y)$ y sea $\alpha \in E(T)$ tal que $T\alpha$ es un ideal izquierdo minimal de T. Como $x, y \in Gen(A)$, entonces puede escribirse $x = uy$ y $y = vx$ para algunos $u, v \in S$. Así, del Lema anterior se sigue que $vu \in T := Stab(y)$, y por lo tanto $Tvu\alpha$ es un ideal izquierdo de T tal que $Tvu\alpha \subseteq T\alpha$, pero como $T\alpha$ es minimal, entonces $Tvu\alpha = T\alpha$ y por consiguiente $\alpha = (tv)u\alpha$ para algún $t \in T$. De esta igualdad se sigue sin dificultad que $Su\alpha = S\alpha$. Ahora bien, como α es idempotente, entonces $S\alpha$ es una $S-$acción proyectiva (véase Lema 10.1.8), y así para el $S-$morfismo sobreyectivo $g : S \longrightarrow Su\alpha$ dado por $g(s) := su\alpha$ existe un $S-$morfismo h que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Su\alpha \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "id_{Su\alpha}"] \\
S \arrow[r, "g"'] & Su\alpha
\end{tikzcd}$$

de donde $h(u\alpha)u\alpha = g(h(u\alpha)) = u\alpha$ y así $h(u\alpha)^2 = h(u\alpha)h(u\alpha) = h(h(u\alpha)u\alpha) = h(u\alpha)$ i,e, $h(u\alpha)$ es idempotente. Más aún, observe que como $\alpha y = y$, entonces $h(u\alpha)x = h(u\alpha)uy = h(u\alpha)u\alpha y = u\alpha y = uy = x$ i,e, $h(u\alpha)x = x$. Por lo tanto $h(u\alpha) \in Stab(x)$. Hágase $L := Stab(x)$. Afirmamos que $Lh(u\alpha)$ es un ideal izquierdo minimal de L. En efecto, sea I un ideal izquierdo de L tal que $I \subseteq Lh(u\alpha)$. De acuerdo al Lema anterior, para cada $s \in I$ se tiene que $vsu \in T := Stab(y)$. Por lo tanto el conjunto $I' := \{tvsu\alpha \,|\, t \in T, s \in I\}$ es un subconjunto de T. Además de eso, no es difícil ver que I' es un ideal izquierdo de T tal que $I' \subseteq T\alpha$, y como $T\alpha$ es minimal, entonces $I' = T\alpha$. De ahí que $\alpha = tvsu\alpha$ para algunos $t \in T$ y $s \in I$, de manera que $u\alpha = (utvs)u\alpha$ y por lo tanto $h(u\alpha) = h((utvs)u\alpha) = (utvs)h(u\alpha)$ i,e, $h(u\alpha) = (utvs)h(u\alpha)$. Ahora bien, como $t \in T$, del Lema anterior se sigue que $utv \in L$, y como $s \in I$ e I es ideal izquierdo de L, entonces $a := utvs \in I$, de tal forma que $h(u\alpha) = ah(u\alpha)$ con $a \in I$. Ahora, como $a \in I \subseteq Lh(u\alpha)$, entonces puede escribirse $a = lh(u\alpha)$ para algún $l \in L$, de manera que $ah(u\alpha) = lh(u\alpha)^2 = lh(u\alpha) = a$ y por lo tanto $h(u\alpha) = ah(u\alpha) = a \in I$. De ahí que $Lh(u\alpha) \subseteq I$ y así $I = Lh(u\alpha)$. Se deduce de esta forma que $Lh(u\alpha)$ es un ideal izquierdo minimal de $L := Stab(x)$, lo que termina la prueba. ☐

Existen módulos que no poseen cubierta proyectiva, por ejemplo, puede mostrarse que si $n \geq 2$ es un entero, entonces el $\mathbb{Z}-$módulo $\mathbb{Z}_n$ no tiene cubierta proyectiva. En el caso de las acciones ocurre la misma situación, es decir, existen acciones que no poseen cubiertas proyectivas.

Ejemplos 10.4.15.

1. *Cualquier $S-$acción proyectiva tiene cubierta proyectiva. En efecto, si P es una $S-$acción proyectiva, entonces el $S-$morfismo identidad es un epimorfismo superfluo. Por lo tanto (P, id_P) es cubierta proyectiva de P.*

2. *Sea $\mathbb{B}$ el monoide bicíclico definido en el quinto de los Ejemplos 6.3. De acuerdo a la demostración del Corolario 10.0.10. de [8], el monoide $\mathbb{B}$ no contiene ideales izquierdos minimales. Por consiguiente, del Corolario 10.4.12 se desprende que la $\mathbb{B}-$acción cero no tiene cubierta proyectiva.*

¿Cómo debe ser un monoide S para que toda $S-$acción tenga una cubierta proyectiva? Esta pregunta da lugar al siguiente concepto.

Definición 10.4.16. *Se dice que un monoide S es perfecto izquierdo si toda $S-$acción izquierda posee una cubierta proyectiva. De manera similar se define monoide perfecto derecho.*

Definición 10.4.17. *Se dice que un submonoide T de S es unitario derecho si existe ρ una $S-$congruencia de ${}_SS$ tal que $T = [e]_\rho$.*

Ejemplo 10.4.18. *Si A es una $S-$acción y $w \in A$, entonces $Stab(w)$ es un submonoide unitario derecho de S. En efecto, considerar al $S-$morfismo $f_w : S \longrightarrow A$ dado por $f_w(s) := sw$ y sea $\rho := Ker(f_w)$. Para $t \in Stab(w)$ arbitrario se tiene que $tw = w$ y así está claro que $tw = ew$ i,e, $f_w(t) = f_w(e)$. De ahí que $(s, e) \in \rho$ y por consiguiente $t \in [e]_\rho$. Luego $Stab(w) \subseteq [e]_\rho$. Si ahora tomamos $s \in [e]_\rho$ arbitrario, entonces $(s, e) \in \rho := Ker(f_w)$ y por lo tanto $f_w(s) = f_w(e)$ i,e, $sw = ew = w$. De ahí que $s \in Stab(w)$ y en consecuencia $[e]_\rho \subseteq Stab(w)$. En definitiva $Stab(w) = [e]_\rho$ y así $Stab(w)$ es un submonoide unitario derecho de S.*

Teorema. 10.4.19. *Todo submonoide unitario derecho T de S satisface la siguiente propiedad: para cada $s \in S$ y para cada $t \in T$, que $st \in T$ implica que $s \in T$.*

Demostración. Si T es un submonoide unitario derecho de S, entonces existe ρ una congruencia de ${}_SS$ para la que $T = [e]_\rho$. Así, para $s \in S$ y $t \in T$ tales que $st \in T = [e]_\rho$ se tiene que $(st, e) \in \rho$, pero como $t \in T = [e]_\rho$, entonces $(t, e) \in \rho$ y así $(e, t) \in \rho$, de donde $(s, st) \in \rho$ y por lo tanto $(s, st), (st, e) \in \rho$. De ahí que $(s, e) \in \rho$ y en consecuencia $s \in T = [e]_\rho$. □

Definición 10.4.20. *Se dice que la $S-$acción A satisface la condición de cadena ascendente en subacciones cíclicas (CCASC) si para toda cadena de subacciones cíclicas de A de la forma*

$$\langle w_1 \rangle \subseteq \langle w_2 \rangle \subseteq \langle w_3 \rangle \subseteq \cdots \subseteq \cdots$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$, $\langle w_n \rangle = \langle w_{n+j} \rangle$ i,e, si toda sucesión creciente de subacciones cíclicas de A se estaciona.

Un anillo R se dice perfecto izquierdo si todo $R-$módulo izquierdo posee una cubierta proyectiva. Existe un resultado atribuido a H. Bass, conocido como Teorema P de Bass, que caracteriza a los anillos perfectos (véase Teorema 4.3.4 de [1]). Ahora bien, para el caso de los monoides existe un resultado debido a J.R. Isbell, y que es análogo al Teorema P de Bass, que ofrece condiciones necesarias y suficientes para las que un monoide S es perfecto izquierdo. Antes de entrar en detalles sobre tal hecho se necesita establecer un resultado auxiliar.

Lema 10.4.21. *Sea A una $S-$acción tal que $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle a_n \rangle$ para alguna sucesión $(\langle a_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ de subacciones cíclicas con $\langle a_n \rangle \subsetneq \langle a_{n+1} \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces A no posee cubierta proyectiva.*

Demostración. Suponga, por el contrario, que (P, f) es una cubierta proyectiva para $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle a_n \rangle$. Puesto que P debe ser proyectiva, del Teorema 10.1.14 (y de que los isomorfismos son epimorfismos superfluos) puede suponerse que $P = \coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i$ para alguna colección $(\alpha_i)_{i\in I}$ de idempotentes de S. Suponga que el conjunto de índices I tiene exactamente un elemento, digamos k. En este caso se tendría que $P = S\alpha_k$ i,e, P es cíclica, y como $f : P \longrightarrow A$ es sobreyectiva, entonces $\langle f(\alpha_k) \rangle = A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle a_n \rangle$ y así $f(\alpha_k) \in \langle a_N \rangle$ para algún $N \in \mathbb{N}$. De ahí que $A = \langle f(\alpha_k) \rangle = \langle a_N \rangle$, pero esto implicaría que la sucesión $(\langle a_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona, lo cual no es cierto. Por lo tanto el conjunto de índices I debe tener al menos dos elementos. De ahí que para $j \in I$ se tiene que $S\alpha_j \times \{j\} \subsetneq \coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i$, y además como I tiene al menos dos elementos, entonces $\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (S\alpha_i \times \{i\})$ es una subacción propia de $\coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i$. Ahora bien, se tiene que $f(\alpha_j, j) \in \langle a_m \rangle$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y así $f(S\alpha_j \times \{j\}) = \langle f(\alpha_j, j) \rangle \subseteq \langle a_m \rangle$. Afirmamos que $A = f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i)$. En efecto, primero observe que como f es sobreyectiva, entonces $A = f(\coprod\limits_{i\in I} S\alpha_i) = f(\bigcup\limits_{i\in I} (S\alpha_i \times \{i\})) = f(\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} (S\alpha_i \times \{i\})) \cup f(S\alpha_j \times \{j\}) = f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i) \cup f(S\alpha_j \times \{j\})$ i,e, $A = f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i) \cup f(S\alpha_j \times \{j\})$. Ahora bien, si ocurriera que $A \neq f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i)$, entonces $A - f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i) \neq \emptyset$ y para $a \in A - f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i)$ arbitrario la igualdad $A = f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i) \cup f(S\alpha_j \times \{j\})$ implicaría que $a \in f(S\alpha_j \times \{j\}) = \langle f(\alpha_j, j) \rangle \subseteq \langle a_m \rangle$ y en consecuencia $A - f(\coprod\limits_{i\neq j} S\alpha_i) \subseteq \langle a_m \rangle$, pero esto implica que como

$a_{m+1} \notin \langle a_m \rangle$ (pues $\langle a_m \rangle \subsetneq \langle a_{m+1} \rangle$), entonces $a_{m+1} \notin A - f(\coprod\limits_{i \neq j} S\alpha_i)$ y por lo tanto la igualdad $A = f(\coprod\limits_{i \neq j} S\alpha_i) \cup f(S\alpha_j \times \{j\})$ garantiza que $a_{m+1} \in f(S\alpha_j \times \{j\}) = \langle f(\alpha_j, j) \rangle \subseteq \langle a_m \rangle$ i,e, $a_{m+1} \in \langle a_m \rangle$, contradicción. Por consiguiente $A = f(\coprod\limits_{i \neq j} S\alpha_i)$, como se afirmaba. Finalmente, de que $\coprod\limits_{i \neq j} S\alpha_i$ es subacción propia de $\coprod\limits_{i \in I} S\alpha_i$ y de que f es un epimorfismo superfluo se deduce que $A \neq f(\coprod\limits_{i \neq j} S\alpha_i)$, lo cual es absurdo. Todas estas contradicciones surgen de suponer que A tiene una cubierta proyectiva. Por consiguiente A no posee cubierta proyectiva. $\square$

Teorema. 10.4.22. *(Isbell) Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es perfecto izquierdo.*
2. *Toda $S-$acción satisface la CCASC y además, todo submonoide unitario derecho de S contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Suponga que S es un monoide perfecto izquierdo y sea A una $S-$acción arbitraria. Si A no satisface la CCASC, entonces existe una sucesión creciente de subacciones cíclicas de A, digamos $(\langle a_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$, que no se estaciona. Luego, el Lema anterior implica que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \langle a_n \rangle$ es una $S-$acción que no posee cubierta proyectiva, pero esto va en contra del hecho de que S es perfecto izquierdo. Por consiguiente toda $S-$acción satisface la CCASC. Ahora, sea T un submonoide unitario derecho de S. Entonces $T = [e]_\rho$ para alguna $S-$congruencia ρ de ${}_S S$. Observe que la $S-$acción cociente $\dfrac{S}{\rho}$ es cíclica, de hecho $\dfrac{S}{\rho} = \langle [e]_\rho \rangle$. Ahora bien, como S es un monoide perfecto izquierdo, entonces $\dfrac{S}{\rho}$ tiene cubierta proyectiva, de manera que el Teorema 10.4.14 garantiza que el monoide $Stab([e]_\rho)$ contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente, pero además es fácil ver que $Stab([e]_\rho) = [e]_\rho = T$. Por consiguiente todo submonoide unitario derecho de S contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente.

2) $\Longrightarrow$ 1) Sea A una $S-$acción arbitraria. Bajo las hipótesis dadas, es preciso exhibir que A posee una cubierta proyectiva. Para ello, sea $w \in A$ arbitrario y considere a la familia $\mathcal{F}_w := \{B \leq A \,|\, B \text{ es cíclica y } w \in B\}$. Está claro que $\mathcal{F}_w$ es no vacía, pues se tiene que $\langle w \rangle \in \mathcal{F}_w$. Ahora, sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_w$ una $\subseteq -$cadena de $\mathcal{F}_w$. Como los elementos de $\mathcal{C}$ son subacciones (cíclicas) de A que contienen a w, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es una subacción de A que contiene a w. Más aún, $\bigcup \mathcal{C}$ es subacción cíclica. En efecto, supongamos por el contrario, que $\bigcup \mathcal{C}$ no es cíclica. Tómese $C_1 \in \mathcal{C}$. Puesto que $\bigcup \mathcal{C}$ no es cíclica, entonces $C_1 \neq \bigcup \mathcal{C}$. Así existe $a_1 \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $a_1 \notin C_1$. A la vez, para a_1 hay un $C_2 \in \mathcal{C}$ para el cuál $a_1 \in C_2$, y como $\mathcal{C}$ es una $\subseteq -$cadena, entonces $C_1 \subseteq C_2$ o bien $C_2 \subseteq C_1$. Observe que como $a_1 \in C_2$ y $a_1 \notin C_1$ no puede ocurrir que $C_2 \subseteq C_1$. Por consiguiente $C_1 \subseteq C_2$. Más aún, de que $a_1 \in C_2$ y que $a_1 \notin C_1$ se sigue que $C_1 \subsetneq C_2$. Ahora, como $\bigcup \mathcal{C}$ no es cíclica, entonces $C_2 \neq \bigcup \mathcal{C}$.

Luego existe $a_2 \in \bigcup \mathcal{C}$ tal que $a_2 \notin C_2$. Por otra parte, para a_2 existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $a_2 \in C_3$, y como $\mathcal{C}$ es una $\subseteq -$cadena, entonces $C_2 \subseteq C_3$ o bien $C_3 \subseteq C_2$. Observe que como $a_2 \in C_3$ y $a_2 \notin C_2$, entonces no puede ocurrir que $C_3 \subseteq C_2$. Por consiguiente $C_2 \subseteq C_3$. Más aún, de que $a_2 \in C_3$ y que $a_2 \notin C_2$ se sigue que $C_2 \subsetneq C_3$. Por lo tanto $C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq C_3$. Continuando de esta forma obtenemos una sucesión creciente $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{C}$ que no se estaciona, pero esta sería entonces una sucesión creciente de subacciones cíclicas de A que no se estaciona, lo que contradice al hecho de que toda $S-$acción satisface la CCASC. En consecuencia $\bigcup \mathcal{C}$ es una subacción cíclica de A y por lo tanto $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}_w$. Lo anterior muestra que si ordenamos a $\mathcal{F}_w$ mediante la contención, entonces toda $\subseteq -$cadena de $\mathcal{F}_w$ tiene una cota superior y por lo tanto el Lema de Zorn implica que $\mathcal{F}_w$ tiene elementos $\subseteq -$maximales. Sea pues $B_w \in \mathcal{F}_w$ un elemento $\subseteq -$maximal y B una subacción cíclica de A tal que $B_w \subseteq B$. Como $w \in B_w$, entonces $w \in B$ y por lo tanto $B \in \mathcal{F}_w$. De esto último y de la maximalidad de B_w se sigue que $B_w = B$ y por consiguiente B_w es un elemento $\subseteq -$maximal del conjunto $\mathcal{F} := \{B \leq A \,|\, B \text{ es cíclica}\}$. El argumento anterior exhibe que todo elemento de A está contenido en una subacción cíclica maximal, y en consecuencia

$$A = \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B \tag{10.6}$$

donde $\mathcal{G}$ es la colección de todos los elementos $\subseteq -$maximales de $\mathcal{F}$. Por otra parte, bajo la hipótesis de que todo submonoide unitario derecho de S contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente, el Teorema 10.4.11 junto con el Ejemplo 10.4.18 garantizan que toda $S-$acción cíclica tiene una cubierta proyectiva, y en particular esto es cierto para cualquier elemento de $\mathcal{G}$. Así, la Proposición 10.4.8 garantiza que la $S-$acción $\coprod_{B\in\mathcal{G}} B := \bigcup_{B\in\mathcal{G}} (B\times\{B\})$ tiene cubierta proyectiva. Sea pues (P, f) una cubierta proyectiva para $\coprod_{B\in\mathcal{G}} B$. Considere ahora a la función $g : \coprod_{B\in\mathcal{G}} B \longrightarrow A$ dada por $g(b, B) := b$. No es difícil ver que g es un $S-$morfismo. Más aún, la igualdad (10.6) implica que g es sobreyectivo. Veamos que g es un epimorfismo superfluo: sea X una subacción propia cualquiera de $\coprod_{B\in\mathcal{G}} B$. Afirmamos que existe $B_0 = \langle w_0\rangle \in \mathcal{G}$ tal que $(w_0, B_0) \notin X$. En efecto, suponga que para cada $B = \langle w_B\rangle \in \mathcal{G}$ ocurre que $(w_B, B) \in X$ y sea $(b, B) \in \coprod_{B\in\mathcal{G}} B$ arbitrario. Como $b \in B = \langle w_B\rangle$, entonces $b = sw_B$ para algún $s \in S$. Ahora, de que $(w_B, B) \in X$ y X es subacción, se sigue que $(b, B) = (sw_B, B) = s(w_B, B) \in X$ y por consiguiente cualquier elemento de $\coprod_{B\in\mathcal{G}} B$ pertenece a X, pero esto no es posible, pues X es subacción propia de $\coprod_{B\in\mathcal{G}} B$. Por lo tanto existe $B_0 = \langle w_0\rangle \in \mathcal{G}$ tal que $(w_0, B_0) \notin X$. Usando al par (w_0, B_0) podemos exhibir que $g(X) \neq A$. En efecto, si sucediera que $g(X) = A$, entonces para $w_0 \in A$ existe $(b, B) \in X$ tal que $w_0 = g(b, B) := b$ y en consecuencia $w_0 = b \in B$. De ahí que $B_0 = \langle w_0\rangle \subseteq B$, pero como B_0 es una subacción cíclica maximal lo anterior implica que $B_0 = B$. En consecuencia $(w_0, B_0) = (b, B) \in X$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente $g(X) \neq A$ y así g es un epimorfismo superfluo. Para concluir, del Lema 10.4.2 se deduce que la composición de los $S-$morfismos $P \xrightarrow{f} \coprod\limits_{B\in\mathcal{G}} B \xrightarrow{g} A$ es un epimorfismo superfluo y así el par (P, gf) es una cubierta proyectiva para A. Se concluye de todo lo anterior que S es un monoide perfecto izquierdo. ☐

Los siguientes resultados están encaminados a ofrecer ejemplos de monoides perfectos.

Lema 10.4.23. *Una $S-$acción A es cíclica si y solo si $A \cong \frac{S}{\rho}$ para alguna congruencia ρ de ${}_SS$. En particular, para cada $S-$acción cíclica A ocurre que $|A| \leq |S|$.*

Demostración. Si A es una $S-$acción cíclica, entonces $A = \langle a \rangle$ para algún $a \in A$. Es claro así que el $S-$morfismo $f_a : S \longrightarrow A$ dado por $f_a(s) := sa$ es sobreyectivo. Luego se tiene que $A \cong \frac{S}{\rho}$ con $\rho = Ker(f_a)$. Y viceversa, sea ρ una congruencia de ${}_SS$. Observe que para cada $s \in S$ ocurre que $[s]_\rho = s[e]_\rho$, de manera que entonces la $S-$acción cociente $\frac{S}{\rho}$ es generada por $[e]_\rho$ i,e, $\frac{S}{\rho}$ es cíclica. Por lo tanto toda $S-$acción isomorfa a $\frac{S}{\rho}$ es cíclica. Finalmente, el $S-$morfismo sobreyectivo $\pi : S \longrightarrow \frac{S}{\rho}$ dado por $\pi(s) := [s]_\rho$ implica la existencia de una función inyectiva $\frac{S}{\rho} \longrightarrow S$, y en particular $|\frac{S}{\rho}| \leq |S|$ para cada congruencia ρ de ${}_SS$. ☐

Teorema. 10.4.24. *Si S es un monoide conmutativo y finito, entonces toda $S-$acción satisface la CCASC.*

Demostración. Sea S un monoide conmutativo y finito. La finitud de S implica que S solo tiene una cantidad finita de congruencias, de manera que así ${}_SS$ es una $S-$acción Artiniana en congruencias (véase Definición 6.5.1 y Teorema 6.5.2). Ahora, sean A una $S-$acción y $(\langle a_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subacciones cíclicas de A. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase $\rho_n := \{(s,t) \in S \times S \,|\, sa_n = ta_n\}$. Se tiene que ρ_n es una congruencia de ${}_SS$, de hecho $\rho_n = ker(f_n)$ siendo $f_n : S \longrightarrow \langle a_n \rangle$ el $S-$morfismo sobreyectivo dado por $f_n(s) := sa_n$. Veamos que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de congruencias de S: en efecto, si $n \in \mathbb{N}$ y $(s,t) \in \rho_{n+1}$, entonces $sa_{n+1} = ta_{n+1}$. Ahora bien, como $\langle a_n \rangle \subseteq \langle a_{n+1\rangle}$, entonces puede escribirse $a_n = ka_{n+1}$ para algún $k \in S$, y así

$$\begin{aligned} sa_n &= s(ka_{n+1}) \\ &= (sk)a_{n+1} \\ &= (ks)a_{n+1} \\ &= k(sa_{n+1}) \\ &= k(ta_{n+1}) \\ &= (kt)a_{n+1} \\ &= (tk)a_{n+1} \\ &= t(ka_{n+1}) \\ &= ta_n \end{aligned}$$

De ahí que $(s,t) \in \rho_n$ y por consiguiente $\rho_{n+1} \subseteq \rho_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, como S es Artiniano en congruencias, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \geq 1$, $\rho_N = \rho_{N+j}$. Afirmamos que para cada $j \geq 1$, $\langle a_N \rangle = \langle a_{N+j} \rangle$: en efecto si $j \geq 1$, como $(\langle a_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente la contención $\langle a_N \rangle \subseteq \langle a_{N+j} \rangle$ se verifica. Ahora bien, como f_N y f_{N+j} son $S-$morfismos sobreyectivos, se tiene que $\langle a_N \rangle \cong \dfrac{S}{\rho_N}$ y $\langle a_{N+j} \rangle \cong \dfrac{S}{\rho_{N+j}}$, pero como $\rho_N = \rho_{N+j}$, entonces $\dfrac{S}{\rho_N} = \dfrac{S}{\rho_{N+j}}$ y por lo tanto $\langle a_N \rangle \cong \langle a_{N+j} \rangle$. En particular $\langle a_N \rangle$ y $\langle a_{N+j} \rangle$ son equipotentes, pero de acuerdo al Lema 10.4.23, la finitud de S implica la finitud de $\langle a_N \rangle$ y $\langle a_{N+j} \rangle$. Luego la contención $\langle a_N \rangle \subseteq \langle a_{N+j} \rangle$ junto con la equipotencia de estos conjuntos implica que $\langle a_N \rangle = \langle a_{N+j} \rangle$. Por lo tanto la sucesión $(\langle a_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento y así toda $S-$acción satisface la CCASC. □

Teorema. 10.4.25. *Si S es un monoide Artiniano izquierdo, entonces todo submonoide unitario derecho de S es también un monoide Artiniano izquierdo.*

Demostración. 1) Sea T un submonoide unitario derecho de S y sea $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de ideales izquierdos de T. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $SL_n := \{sl \mid s \in S, l \in L_n\}$ i,e, SL_n es el ideal izquierdo de S generado por L_n. Como $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, entonces $(SL_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de ideales izquierdos de S. Así, de que S es Artiniano izquierdo se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \geq 1$, $SL_N = SL_{N+j}$. Afirmamos que la sucesión $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estaciona en el $N-$ésimo elemento. En efecto, sea $j \geq 1$. La contención $L_{N+j} \subseteq L_N$ se verifica, pues la sucesión $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente. Ahora, para $l \in L_N$ arbitrario se tiene que $l \in L_N \subseteq SL_N = SL_{N+j}$ y así $l = sw$ para algunos $s \in S$ y $w \in L_{N+j}$. Ahora, como cada L_n es un ideal de T, entonces $l, w \in T$ y por lo tanto la igualdad $sw = l$ junto con el Teorema 10.4.19 garantizan que $s \in T$, luego como $w \in L_{N+j}$ y L_{N+j} es ideal izquierdo de T, entonces debe ocurrir que $l = sw \in L_{N+j}$. En consecuencia $L_N \subseteq L_{N+j}$ y con ello $L_N = L_{N+j}$ para cada $j \geq 1$, como se afirmaba. Por consiguiente toda sucesión decreciente de ideales izquierdos de T se estaciona y así T es un monoide Artiniano izquierdo. □

Definición 10.4.26. *Decimos que un semigrupo S es:*

1. *regular, si para cada $a \in S$ existe $b \in S$ tal que $a = aba$.*
2. *completamente regular, si para cada $a \in S$ existe $b \in S$ tal que $a = aba$ y $ba = ab$.*

Observación 10.4.27. *Note que, por definición, todo semigrupo completamente regular es regular, y además, todo semigrupo conmutativo y regular debe ser completamente regular.*

Teorema. 10.4.28. *Si S es un monoide Artiniano izquierdo y completamente regular, entonces todo submonoide unitario derecho de S contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente.*

Demostración. Sea T un submonoide unitario derecho de S. Puesto S es Artiniano izquierdo, del Teorema 10.4.25 se sigue que T es Artiniano izquierdo. Sea $\mathcal{F} := \{T\alpha \,|\, \alpha \in E(T)\}$ la familia de todos los ideales izquierdos de T que son generados por idempotentes. Observe que $\mathcal{F}$ es no vacía, pues $T = Te \in \mathcal{F}$, y además, como T es Artiniano izquierdo, entonces $\mathcal{F}$ tiene elementos $\subsetneq -$minimales. Suponga que $T\delta$ con $\delta \in E(T)$ es un elemento $\subsetneq -$minimal de $\mathcal{F}$.
Afirmación $1)$: Todo ideal izquierdo de T contiene idempotentes. En efecto, sea $I \subseteq T$ un ideal izquierdo de T y sea $a \in I$ arbitrario. Como $I \subseteq T \subseteq S$ y S es completamente regular, para a existe $b \in S$ tal que $a = aba$ y $ab = ba$. Ahora, como $(ab)a = a \in T$, del Teorema 10.4.19 se sigue que $ab = ba \in T$, pero como $a \in T$, entonces de nuevo el Teorema 10.4.19 implica que $b \in T$. De esto último y de que $a \in I$, siendo I ideal izquierdo de T, se sigue que $ab = ba \in I$. Más aún, de la igualdad $a = aba$ se deduce que $ab = abab$ i,e, ab es un idempotente. Por consiguiente todo ideal izquierdo de T contiene idempotentes.
Afirmación $2)$: $T\delta$ es un ideal izquierdo minimal de T. En efecto, sea I un ideal izquierdo de T tal que $I \subsetneq T\delta$. De acuerdo a la Afirmación $1)$, el ideal I contiene idempotentes. Así, sea $\beta \in I$ idempotente. Observe que $T\beta \subseteq I \subsetneq T\delta$ y en consecuencia $T\beta \subsetneq T\delta$, pero como β es idempotente, entonces $T\beta \in \mathcal{F}$, de manera que la contención $T\beta \subsetneq T\delta$ junto con que $T\delta$ es elemento $\subsetneq -$minimal de $\mathcal{F}$ implican que $T\beta = T\delta$ y por lo tanto $I = T\delta$. Se deduce de esta manera que $T\delta$ es un ideal izquierdo minimal de T. ☐

Corolario 10.4.29. *Todo monoide conmutativo, finito, y regular es un monoide perfecto.*

Demostración. Observe que todo monoide conmutativo, finito y regular debe ser Artiniano y completamente regular. Después, conlcluya la demostración aplicando los Teoremas 10.4.24, 10.4.28 y el Teorema 10.4.22 de Isbell. ☐

Corolario 10.4.30. *Todo monoide conmutativo, finito y en el que todo elemento es idempotente es un monoide perfecto.*

Demostración. Observe que si S es un monoide en el que todo elemento es idempotente, entonces S debe ser también regular, pues para cada $s \in S$, $sss = ss^2 = ss = s$. Luego, si S es además conmutativo y finito, que S sea perfecto se sigue del Corolario anterior. ☐

Un semigrupo S para el que cualquiera de sus elementos es idempotente recibe el nombre de banda. Así, el último corolario afirma que un monoide finito que es una banda conmutativa debe ser un monoide perfecto. En la Proposición 7.3.16. del capítulo 7 de [8] se exhibe como a partir de un semigrupo completamente regular se obtiene una banda conmutativa, de manera que siempre podemos construir monoides perfectos usando las ideas del Corolario 10.4.30. Los grupos son también monoides perfectos, como se muestra enseguida.

Lema 10.4.31. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un monoide S:*

1. *S es un grupo.*
2. *Toda $S-$acción cíclica es simple.*

Demostración. $1) \Longrightarrow 2)$ Suponga que S es un grupo y sea $A = \langle a \rangle$ una $S-$acción cíclica con $B \leq A$. Para $b \in B$ arbitrario puede escribirse $b = sa$ con $s \in S$, de donde se sigue que $a = s^{-1}b \in B$ y por consiguiente $A = \langle a \rangle \subseteq B$. De ahí que $B = A$ y por lo tanto toda $S-$acción cíclica es simple.
$2) \Longrightarrow 1)$ Si toda $S-$acción cíclica es simple, entonces en particular la $S-$acción regular ${}_SS$ es simple, y como para cada $g \in S$ ocurre que $\langle g \rangle \leq S$, entonces $\langle g \rangle = S$ para cada $g \in S$. De ahí que para cada $g \in S$ existe $s \in S$ tal que $e = sg$ y en consecuencia todo elemento de S es invertible izquierdo. El Teorema 1.2.13 implica entonces que S es un grupo. □

Teorema. 10.4.32. *Todo grupo es un monoide perfecto izquierdo.*

Demostración. Sean S un grupo, X una $S-$acción arbitraria y $(\langle a_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ una suceción arbitraria y creciente de subacciones cíclicas de X. Para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario se tiene que $\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_n \rangle$, pero como toda cíclica es simple (pues S es un grupo), entonces $\langle a_1 \rangle = \langle a_n \rangle$ y por lo tanto la sucesión $(\langle a_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ solo consta de un elemento. En particular tal sucesión se estaciona. Por consiguiente toda $S-$acción satisface la CCASC. Ahora, de acuerdo al segundo de los Ejemplos 6.3 S es un monoide Artiniano izquierdo. Más aún, S es completamente regular, pues para cada $g \in S$ se tiene que $g = gg^{-1}g$ con $gg^{-1} = e = g^{-1}g$. Por lo tanto del Teorema 10.4.28 se sigue que todo submonoide unitario derecho de S contiene un ideal izquierdo minimal generado por un idempotente. Así, el Teorema 10.4.22 de Isbell permite concluir que S es perfecto izquierdo. □

CONCLUSIONES

Queda claro después de todo, que el uso de las acciones es una herramienta poderosa con el fin de determinar propiedades de un monoide, además de que las acciones también ayudan a definir nuevos tipos de monoides, como los monoides Noetherianos, Artinianos, hereditarios y perfectos. Por otra parte, a pesar de la frecuente comparación usada en el trabajo entre los anillos y sus módulos con los monoides y sus acciones, está claro que son objetos distintos, pero que cumplen un objetivo común: determinar propiedades de la estructura algebraica que les da origen. Aún quedaron algunos cuestionamientos, que por razones de tiempo y espacio, no pudieron ser abordados. Por ejemplo, sería interesante explorar sobre la teoría de prerradicales en la categoría $S - Act$, abordar el concepto de acción inyectiva, el de producto tensorial de acciones y el de acción plana. También podría pensarse en trabajar en acciones sobre semigrupos en lugar de monoides, y tratar de ver qué propiedades cumplen ciertas acciones sobre semigrupos de alguna especie, como los semigrupos inversos, ortodoxos, regulares, etc. Además, creemos que sería interesante estudiar acciones sobre conjuntos con alguna estructura adicional, como de orden o topológica. Esperamos abordar estos problemas en algún trabajo futuro.

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Facchini . *Introduction to Ring and Module Theory* . Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser, 2024.

[2] A. Mikhalev y B. Kozhukhov. *Acts over Semigroups.* Journal of Mathematical Sciences, Vol. 269, No. 3, 2023.

[3] A. Mikhalev, M. Kilp, y U. Knauer. *Monoids, Acts and Categories.* Walter de Gruyter, 2000.

[4] A. Solotar, M. Farinati y M. Suárez. *Anillos y sus Categorías de Representaciones.* Cuadernos de Matemática y Mecánica, IMAL, CONICET - UNL, Santa Fe, 2007.

[5] E. Lluis y H. Cárdenas. *Módulos Semisimples y Representación de Grupos Finitos.* Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana. Serie: Textos. Vol. 16, 2012.

[6] F. Zaldívar. *Introducción a la teoría de grupos.* Instituto de Matemáticas, UNAM. Aportaciones Matemáticas. Serie: Textos. Número 32, 2018.

[7] G.E Strecker, H. Herrlich y J. Adámek. *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats.* Dover Books on Mathematics, 1990.

[8] L. A. Huerta-Sánchez. *Semigrupos.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, 2023. (`https://hdl.handle.net/20.500.12371/19475`)

[9] M. Broué. *On Characters of Finite Groups.* Mathematical Lectures from Peking University, 2017.

[10] M. Medina-Bárcenas. *Una introducción a la teoría de módulos sobre anillos no conmutativos.* Notas de curso, 2023.

[11] P.E. Bland. *Rings and Their Modules.* Walter de Gruyter, 2011.

[12] P.M. Cohn. *Introduction to Ring Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2000.

[13] R. Khosravi, X. Liam y X. Zhao. *On the Homological Classification of Semigroups with Local Units*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc, 2021.

[14] T.Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer, Second Edition, 1991.

[15] T.Y. Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Springer, First Edition, 1999.

ÍNDICE ALFABÉTICO

S-acciones, S-conguencias y S-morfismos

- $(S,T)-$biacción 152
- $(S-Act)_0$ 32
- $S(0)$ 66
- $S-$acción
  - $0-$simple 59
  - Artiniana 81
    - en congruencias 95
  - cero 42
  - cociente 31
  - Cohopfiana 97
  - colibre 141
  - completamente $0-$reducible 64
  - completamente reducible 62
  - cíclica 59
  - derecha 150
  - fiel 110
  - finitamente generada 77
  - fuertemente fiel 110
  - Hopfiana 97
  - inescindible 73
  - izquierda 26
  - libre 99
  - Noetheriana 81
    - en congruencias 95
  - producto 125
  - proyectiva 166
  - regular 27
  - simple 59
  - simétrica 116
- $S-$congruencia 29
  - generada 31
  - imagen 30
  - inducida por la subacción X 30
  - Kernel 30
- $S-$morfismo 29
  - canónico 31
  - cero 42
  - coproducto 132
  - de acciones derechas 151
  - isomorfismo 29
  - producto 132
  - proyección 125
  - sobreyectivo que se escinde 166
- $S-Act$ 123
- $S-Act_0$ 32
- órbita 116

A

- anulador 30

B

- base 99
  - categórica 101

C

categoría abeliana 164
categoría concreta 16
categoría conormal 162
categoría de representaciones de S 145
categoría normal 162
cogenerador 14
coigualador 6
condición de cadena
  ascendente (CCA) 81
  ascendente en subacciones cíclicas (CCASC) 190
  descendente (CCD) 81
conjunto linealmente independiente 112
constructo 16
conúcleo 44
conúcleo en una categoría 161
cotraza 138
cubierta proyectiva 183

D

descomposición de una $S-$acción 73
diagonal 30

E

elemento cero de un semigrupo 20
elemento cero de una acción 31
epimorfismo superfluo 182
escinde a la derecha 54
escinde a la izquierda 54
estabilizador 116

F

funtor olvidadizo 137
funtor Rees-exacto 157
  derecho 157
  izquierdo 156

G

generador 14
grupo 21

I

ideal 22
  derecho 22
  izquierdo 22
  maximal 22
  minimal 22
idempotente 22
igualador 5

M

monoide 20
  Artiniano 81
  bicíclico 89
  de endomorfismos 140
  hereditario 180
  Noetheriano 81
  opuesto 151
  perfecto 189
morfismo
  de monoides 22
  de representaciones 143
  de semigrupos 22

N

núcleo 44
núcleo en una categoría 161

O

objeto cero 160
objeto inicial 160
objeto libre 16
objeto proyectivo 16
objeto terminal 160
operación binaria 19
  asociativa 19
  conmutativa 20

P

par $A-$fiel 110
par fuertemente $A-$fiel 110
pullback 10
puntos fijos de un elemento 121
pushout 11

R

rango 104

    representación de S por transformaciones de X 26
representación de S por un objeto de una categoría 143
representación unitaria 26

S

semigrupo 20
    regular 194
    cancelativo 22
    cancelativo derecho 22
    cancelativo izquierdo 22
    completamente regular 194
    de ideales principales 23
soporte 130
subacción 27
    generada 28
    maximal 78
subcategoría 123
submonoide 22
    unitario derecho 189
subsemigrupo 22
sucesión Rees-exacta 40
    corta 43
suma directa 108
sumando directo 52

T

traza 138

Z

zoclo 61