



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Cálculo del gasto de un fluido en una arteria del sistema
circulatorio

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciada en Física

(Física)

por

Natalia López Paleta

asesorada por

Dr. J. Noé F. Herrera Pacheco y Dra. Deriabina Alexandra

Puebla Pue.

Abril 2018



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Cálculo del gasto de un fluido en una arteria del sistema
circulatorio

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciada en Física

(Física)

por

Natalia López Paleta

asesorada por

Dr. J. Noé F. Herrera Pacheco y Dra. Deriabina Alexandra

Puebla Pue.

Abril 2018

Título: Cálculo del gasto de un fluido en una arteria del sistema circulatorio

Estudiante: Natalia López Paleta

COMITÉ

Dr. Jorge Velázquez Castro
Presidente

Dr. Roberto Ramírez Sánchez
Secretario

M.C. Pedro Tolentino Eslava
Vocal

Dra. Beatriz Bonilla Capilla
Suplente

Dr. J. Noé F. Herrera Pacheco y Dra. Deriabina Alexandra
Asesor

A mi hija, mi fuerza, mi luz.

Agradecimientos

Agradezco, en primer lugar, a toda mi familia. En especial a mis padres por todo su apoyo y cariño y a mi hija por ser mi fuente de inspiración.

A mi asesor de tesis, Dr. José Noé F. Herrera Pacheco, por su tiempo, su paciencia y sus enseñanzas.

A mis amigos, por sus palabras de aliento y su cariño.

A mis maestros de la FCFM por su ejemplo.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) por la formación y a la VIEP por la beca brindada.

Índice general

Índice general	VII
Resumen	XIII
Introducción	XV
1. El sistema circulatorio	1
1.1. Las partes del sistema circulatorio	1
1.1.1. El corazón	1
1.1.2. Los vasos sanguíneos	2
1.1.3. La sangre	3
1.2. Defectos del sistema circulatorio y sus consecuencias	4
1.3. El sistema circulatorio como sistema físico	6
2. La mecánica de fluidos	9
2.1. Ecuaciones básicas	9
2.2. Flujo de Poiseuille	10
2.3. Principio de Bernoulli	12
2.4. Flujo en desarrollo	13
2.5. Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos al Sistema Circulatorio	14
3. Modelo del sistema circulatorio	15
3.1. Flujo de Poiseuille en un tubo elástico	15
3.2. Gasto para un flujo pulsátil	16
3.3. Onda Pulsátil	20
3.4. Aplicación al sistema circulatorio	22
3.5. Propagación de ondas con viscosidad diferente de cero	23
4. Estenosis	29
4.1. Las ecuaciones básicas	29
4.2. El perfil de velocidades	32
4.3. Caída de presión debida a una estenosis	36
Conclusiones	39
A. Metodo de Euler implementado en FORTRAN	41

B. Método Runge-Kutta implementado en FORTRAN**43****Bibliografía****47**

Índice de figuras

1.1. Esquema simplificado de corazón y la circulación.	2
1.2. Esquema de la transición arteria-arteriola-capilar.	3
1.3. Esquema de las partes del sistema circulatorio y su papel.	6
1.4. La aorta distendiéndose y relajándose.	7
2.1. Perfil parabólico de velocidades.	10
2.2. Flujo en un vaso tubular.	11
2.3. Fuerzas sobre una partícula de un fluido.	12
3.1. Fluido no viscoso y no compresible dentro de un tubo elástico.	21
4.1. Representación de un vaso sanguíneo recto con estenosis leve.	30
4.2. uR^2 vs. $\frac{r}{R}$ para distintos valores de UR^2	35
4.3. Geometría de estenosis para un $\delta = 0.3$ y un $Z_0 = 0.5$ y $R_0 = 1$	36
4.4. Gráfica del perfil de velocidad $U(z)$ con $\delta = 0.3$, $Z_0 = 0.5$ y $U_0 = 3.2$ para distintos valores de Re	37

Índice de tablas

1.1. Relación de los vasos sanguíneos de la circulación sistémica y sus características físicas.	4
1.2. Relación de las diferentes presiones dentro de cada una de las cavidades del sistema circulatorio (mmHg) con V.I., A.I., V.D. y A.D. los ventrículos y aurículas izquierdos y derechos.	6

Resumen

En este trabajo se estudiará el sistema circulatorio humano desde la perspectiva de la mecánica de biofluidos. Para ello es necesario crear un modelo suficientemente acertado que tome en cuenta las propiedades físicas de la sangre y de los vasos sanguíneos a fin de establecer las ecuaciones que describan el flujo y buscar sus soluciones analíticas y numéricas,

Aquí se presenta un acercamiento a este problema mediante la escritura y solución de las ecuaciones básicas, a saber: la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y para fluidos con restricciones tanto en el sistema como en el tubo. Se presenta en especial el cálculo de la velocidad para un fluido viscoso en un tubo cilíndrico con estenosis leve.

Palabras clave: Navier-Stokes, Sistema circulatorio, Fluidos, Biofísica, Gasto, Flujo pulsado, Estenosis.

Introducción

Las *enfermedades cardiovasculares* (ECV), son aquellas que afectan al corazón y a los vasos sanguíneos y muchas veces derivan en los llamados *accidentes vasculares cerebrales* AVC o en ataques al corazón; y estos, a su vez, pueden resultar mortales.

Según la Organización Mundial de la Salud, tan solo en 2015, hubo al rededor de 150,000 muertes debidas a las ECV, en México; convirtiendo a éstas en la primera causa de muerte en nuestro país.¹ Con el aumento del sedentarismo y la alimentación procesada, con exceso de grasas y azúcares, ambos factores de riesgo para las ECV, esta cifra ha aumentado drásticamente en los últimos años.

Es por ello que se vuelve imperativo para la ciencia crear métodos de detección y prevención para estos padecimientos desde distintas áreas, pues el tema atañe no solo a la medicina, sino a la biología, a la química y a la física por igual; y así obtener una visión multidisciplinaria de nuestro sistema circulatorio y su funcionamiento.

Con esto en mente es que el presente trabajo toma forma. Si, desde la física, logramos tener un mejor entendimiento, interpretación y predicción del funcionamiento del corazón y del comportamiento de un fluido viscoso, como lo es la sangre, dentro del sistema circulatorio, del movimiento normal del corazón, del recorrido de la sangre por nuestro cuerpo y de las posibles alteraciones a nuestro sistema, podemos contribuir a la pronta detección de enfermedades y a su tratamiento.

Así, en el presente trabajo de tesis, y partiendo de la mecánica de fluidos, nos propusimos plantear y reunir algunos modelos físicos del sistema circulatorio humano. Es decir, con base en la hidrodinámica, y partiendo de sus ecuaciones básicas, planteamos modelos del sistema circulatorio añadiendo algunas de sus características físicas y sus consecuencias a nuestro modelo básico.

En el primer capítulo, se hace una breve relación del sistema circulatorio humano, se da el término médico de algunas de sus partes y se describe a grandes rasgos su funcionamiento; todo esto para poner en contacto al lector con el léxico y el contexto necesario de los siguientes capítulos.

En el capítulo 2 se da un repaso de la mecánica de fluidos y sus ecuaciones básicas. En el tercer capítulo se plantean modificaciones a los modelos planteados en el capítulo anterior, añadiendo a ellos algunas características físicas del sistema circulatorio para lograr una descripción más precisa del flujo de sangre en el cuerpo humano. En el cuarto y último capítulo se modela una afectación leve a una arteria: una compresión pequeña y simétrica (llamada *estenosis leve*) y se estudia el flujo de sangre en ella.

Finalmente, se agregaron dos apéndices en los que se proponen un métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que puede ser aplicado para resolver algunas de las ecuaciones que se deducen en este trabajo de tesis y se transcribe el código fuente en lenguaje de programación Fortran utilizado en la resolución de una de ellas.

¹Información obtenida de la página web de la OMS: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/es/>

Capítulo 1

El sistema circulatorio

Para ser capaces de construir un modelo del sistema circulatorio como modelo físico, es necesario familiarizarnos con el léxico particular con el que la medicina lo describe. De esa forma, podremos conocer las partes que lo conforman y sus características más importantes, sobre todo aquellas que pudieran influir más directamente en la mecánica de los vasos sanguíneos y de la sangre, es decir, en lo que en medicina es conocido como *reología de la sangre*.

1.1. Las partes del sistema circulatorio

El sistema circulatorio está compuesto por la sangre, los vasos sanguíneos y el corazón. Su función es proveer a cada una de las células de nuestro cuerpo de los nutrientes y el oxígeno que necesitan para realizar sus funciones biológicas y recoger los desechos, derivados de éstas, para transportarlos a los órganos que se encargan de expulsarlos fuera del organismo, como el hígado, los riñones, los intestinos, entre otros. De ello se entiende que una falla en el sistema circulatorio de una persona, fácilmente, puede derivar en un padecimiento o incluso en su muerte.

El recorrido que hace la sangre a través de todo el cuerpo es a lo que llamamos *circulación*. Ésta se forma en la 4ª semana de gestación y no termina de cambiar hasta la edad adulta. El cambio más radical es el que sufre justo después del nacimiento, pues se separa de la circulación de la madre y comienza a funcionar la respiración. Sin embargo, el cuerpo no deja de cambiar durante la niñez y, en especial, durante la adolescencia; por lo que, hasta terminada esa etapa, la circulación se encuentra en constante cambio.

La circulación está dividida en dos etapas: La *circulación pulmonar* o *pequeña circulación*, es en la que el corazón manda sangre a los pulmones para su oxigenación y que regresa al corazón, ya oxigenada. La *circulación sistémica* o *gran circulación*, por su parte, es en la que la sangre viaja desde el corazón a todo el organismo y de regreso a aquél. Ver figura 1.1.

Esta división es necesaria pues las características físicas de una y de otra son diferentes. De ellas hablaremos más adelante.

1.1.1. El corazón

Es bien sabido que el corazón es uno de los órganos más importantes del cuerpo humano. Esto justamente porque su papel consiste en poner en movimiento la sangre que transporta todos los

CAPÍTULO 1. EL SISTEMA CIRCULATORIO

1.1. LAS PARTES DEL SISTEMA CIRCULATORIO

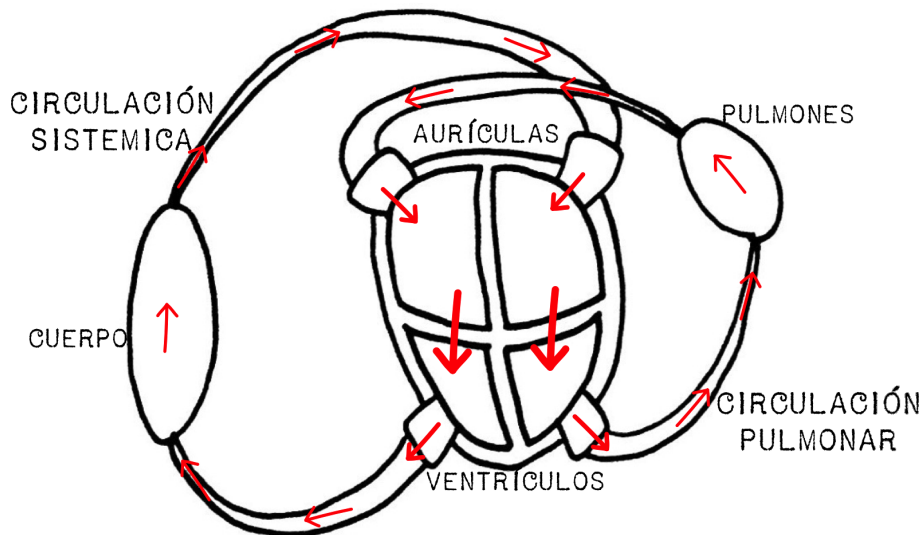


Figura 1.1: Esquema simplificado de corazón y la circulación.

nutrientes sin los cuales ninguna de nuestras células podría vivir. Este órgano es un músculo hueco del tamaño de un puño colocado dentro de la caja torácica y, aunque solemos pensar que está del lado izquierdo de nuestro cuerpo, no es así, sino que se encuentra centrado. Está dividido en cuatro cavidades, dos inferiores y dos superiores, dos del lado izquierdo y dos del lado derecho. A las cavidades superiores del corazón se les llama *aurículas* y a las inferiores *ventrículos*. Las primeras tienen la función de recibir la sangre de los vasos sanguíneos y mandarla a los segundos, los cuales mandan la sangre fuera del corazón. Para ello, el corazón hace dos tipos de movimientos, uno de contracción llamado *sístole* y uno de distensión llamado *diástole*. Entre cada cavidad hay válvulas que, gracias a la presión hidrostática, se abren o cierran para evitar que la sangre regrese a la cavidad anterior.

Como se puede apreciar en la Figura 1.1, el ventrículo izquierdo, al contraerse, inicia la circulación sistémica lanzando, al cuerpo, aproximadamente cinco litros de sangre por minuto¹. Después de recorrer todo el organismo, la sangre regresa al corazón por la aurícula derecha, quien la manda al ventrículo derecho que, a su vez, la manda a la circulación pulmonar para su oxigenación. Por último, la sangre regresa de los pulmones a la aurícula izquierda que la pasa al ventrículo izquierdo para iniciar nuevamente el ciclo.²

1.1.2. Los vasos sanguíneos

Los vasos sanguíneos son la “tubería” por la que circula la sangre. Por sus características y por sus funciones se divide en tres tipos: las arterias, las venas y los capilares.

Las arterias son las encargadas de llevar la sangre del corazón a las distintas partes del cuerpo,

¹A este valor, que describe el volumen de sangre que expulsa el corazón, por unidad de tiempo, se le conoce como *salida cardíaca* o CO (cardiac output).

²Para una descripción más amplia pero sintetizada de esta sección y la siguiente ver Faller and Schünke [5]; o Latarjet and Ruiz [9] para un tratamiento más detallado.

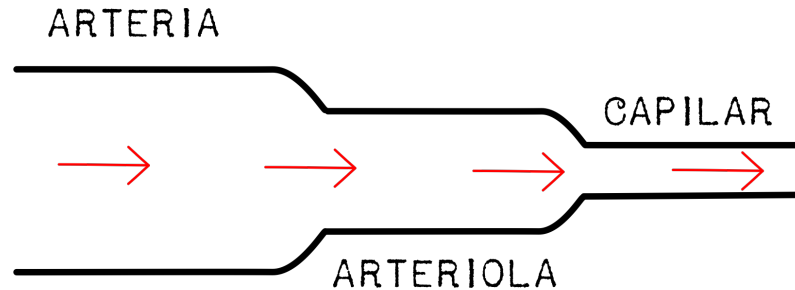


Figura 1.2: Esquema de la transición arteria-arteriola-capilar.

tanto en la circulación sistémica como en la pulmonar. Son los vasos sanguíneos más elásticos y, en general, los de *lumen*³ más grande y los más gruesos y musculosos. Los capilares son en los que se da el intercambio de sustancias, están en el otro extremo de la circulación, son los menos elásticos, los más abundantes y los de lumen más pequeño. Estos conectan los segmentos arteriales con los venosos. Las venas son las que se encargan de regresar la sangre de los capilares al corazón, son plegables y distensibles y los de paredes más delgadas.

Además de esta clasificación se hace una más detallada, siendo las arterias más gruesas y elásticas las más cercanas al corazón. La primera, por la que sale la sangre a la circulación sistémica, se llama *aorta*, mientras que la primera arteria de la circulación pulmonar es la *arteria pulmonar*. A las arterias más pequeñas se les conoce por *arteriolas* y éstas, a su vez, se dividen en *elásticas* y *musculares*. Las venas más pequeñas se llaman *vénulas*, mientras que la más grande se llama *vena cava* y es la que recibe la sangre de la circulación sistémica. La *vena pulmonar*, por su parte es la más grande de la circulación pulmonar. A las uniones entre arteriolas y capilares se le llama *uniones arteriolo precapillaris* y las que hay entre los capilares y las vénulas se llaman *uniones venulopostcapillaris*. La transición entre un tipo de vaso y el siguiente bien puede ser abrupto o progresivo, fig.1.2.

Cada tipo de vaso sanguíneo (a excepción de los capilares) tiene distintas capas que lo conforman, es decir, no son un “tubo” liso sino que sus paredes están conformadas por varias partes. Las más representativas son la *túnica adventicia*, la externa, la *túnica media* y la *túnica íntima*. Además, la pared más interior de ellos, formada de una sola capa de células, se llama *pared endotelial* o *endotelio*.

Dependiendo del grosor o las características de estas partes un vaso sanguíneo es más o menos elástico o musculoso. En la tabla 1.1 se muestran las diferencias de tamaño entre los vasos sanguíneos de la circulación sistémica.

Por todo esto, "sería un error considerar [a los vasos sanguíneos] como tubos más o menos largos y anchos y estudiar [solo] su trayecto, sus relaciones y distribución. [...] Es necesario, también conocer su aspecto viviente, por lo tanto cambiante, sus leyes fisiológicas, su evolución durante la vida"⁴.

1.1.3. La sangre

Nuestra sangre es un fluido bastante complejo. En primer lugar no es un fluido homogéneo sino que está formada de una suspensión de partículas en una solución acuosa. A esta solución líquida

³lumen: área transversal que encierra un vaso sanguíneo.

⁴Latarjet and Ruiz [9].

CAPÍTULO 1. EL SISTEMA CIRCULATORIO
1.2. DEFECTOS DEL SISTEMA CIRCULATORIO Y SUS CONSECUENCIAS

Tabla 1.1: Relación de los vasos sanguíneos de la circulación sistémica y sus características físicas.

Vaso *	Diámetro (<i>cm</i>)	Tamaño del lumen (<i>cm</i> ²)	Grosor de la pared (<i>cm</i>)	Presión media (<i>kPa</i>)	Velocidad media (<i>cm/s</i>)
Aorta	3	7	2×10^{-1}	12.5	12
Arterias	10^{-1}	8×10^{-3}	10^{-1}	12	45
Arteriola	5×10^{-3}	2×10^{-5}	2×10^{-3}	7	5
Capilares	8×10^{-4}	5×10^{-7}	10^{-4}	3	0.1
Vénulas	10^{-2}	7.9×10^{-5}	2×10^{-4}	1.5	2
Venas	1.8×10^{-1}	10^{-1}	5×10^{-2}	1	10
Vena cava	3	6	0.15	0.5	14

* Ver Fasano and Sequeira [6] para más información.

se le llama *plasma* y está formado principalmente por electrolitos y proteínas de las cuales la mitad son *albúminas*, el 45% *globulinas* y lo restante son *fibrinógeno*, *betalipoproteínas*, *lipalbúminas*, entre otras.

Por otro lado, las partículas suspendidas en el plasma se dividen en tres tipos: Los glóbulos blancos o *leucocitos* que combaten enfermedades, los glóbulos rojos o *eritrocitos* que transportan el oxígeno y las plaquetas o *trombocitos* encargados de la coagulación.

De estas partes, los glóbulos rojos son muy importantes pues conforman del 42 al 45% del volumen de la sangre. A esta concentración de células rojas en la sangre se la llama *hematócrito*.

Los eritrocitos se componen de una fina membrana semi-permeable hecha de proteínas, lípidos y esteroides con forma bicóncava, que encierra una solución concentrada de una proteína: la *hemoglobina*. Esta última es la encargada de transportar el oxígeno y entregarlo a los tejidos.

1.2. Defectos del sistema circulatorio y sus consecuencias

La mayoría de las enfermedades relacionadas con el sistema circulatorio son debidas a un mal funcionamiento o a una deformidad de los vasos sanguíneos que modifica el tamaño del lumen y, por lo tanto disminuyen o detienen el flujo de la sangre. Estos problemas bien pueden darse por características congénitas o como resultado de algún otro padecimiento.

En general estos padecimientos se pueden clasificar, por las causas físicas que los provocan, como sigue:

- Formación de trombos.

Un trombo es un coágulo de sangre que se forma en venas o arterias. Estos provocan dolor agudo, entumecimiento, cosquilleo, debilidad, descenso de temperatura o palidez. Las enfermedades en donde hay trombos son:

- Tromboangitis Obliterante o enfermedad de Buerger.

Se da, sobre todo, en los vasos sanguíneos pequeños de manos y pies. Principalmente en los hombres fumadores de ente 25 y 40 años de edad. Afecta más a las arterias que a las venas.

CAPÍTULO 1. EL SISTEMA CIRCULATORIO

1.2. DEFECTOS DEL SISTEMA CIRCULATORIO Y SUS CONSECUENCIAS

- Trombosis Venosa Profunda o TVP.

Es la formación de un trombo en una vena profunda, principalmente de piernas o muslos; aunque también puede darse en brazos y pelvis. Si el trombo se desprende puede causar una embolia. Puede provocar una inflamación de la vena; que no hay que confundir con una vena varicosa.

- Embolia.

Ésta se da cuando una masa extraña es transportada por los vasos sanguíneos y bloquea vasos más pequeños de algún organo como el cerebro, corazón, riñón o bazo. Estas masas pueden ser trombos, grasa, aire o tumores. Algunos padecimientos que pueden derivar en una embolia son:

- Fibrilación auricular. Es un tipo de arritmia, es decir, un tipo de latido anormal, en general rápido e irregular. Puede darse por hipertensión, hipertiroidismo, insuficiencia cardiaca, entre otros.
- Daño en una pared arterial.
- Coagulación de la sangre anormal (por ejemplo por conteo de plaquetas alto).

- Compresión.

Una compresión es cuando el tamaño del lumen se ve reducido debido a una fuerza externa. Por ejemplo, por torniquetes, tumores, yesos o vendajes.

- Vasoespasmos.

Un vasoespasmos es una contracción de un vaso sanguíneo, por ejemplo, por reflejos neuronales o locales o por exposición a temperaturas bajas. Pueden provocar:

- Isquemia
- Lesiones en tejidos
- Síndrome de Raynaud. Éste se da cuando, debido a temperaturas bajas o a emociones fuertes, el flujo sanguíneo a manos, pies, orejas y nariz se ve reducido por vasoespasmos. El fenómeno de Raynaud primario afecta más a mujeres menores de 30 años, mientras que el secundario se debe a otras afecciones y afecta más a personas mayores de 30 años

- Cambios estructurales.

Por ejemplo rigidez, estrechamiento o engrosamiento de los vasos sanguíneos como en la arterioesclerosis o en la esclerosis de Mönckberg. Provocan:

- Infarto al corazón. Un infarto se da cuando alguna arteria coronaria queda boqueada por un trombo por lo que el flujo de sangre al corazón se ve afectado.
- Aneurismas. Un aneurisma es una dilatación anormal de una vena o una arteria.
- Derrame cerebral. Sucede cuando el flujo de sangre se ve interrumpido en alguna área del cerebro por lo que las neuronas de esa parte no se oxigenan y comienzan a morir.
- Venas varicosas. Son venas dilatadas o torcidas, sobre todo en las piernas.

CAPÍTULO 1. EL SISTEMA CIRCULATORIO
1.3. EL SISTEMA CIRCULATORIO COMO SISTEMA FÍSICO

Tabla 1.2: Relación de las diferentes presiones dentro de cada una de las cavidades del sistema circulatorio (mmHg) con V.I., A.I., V.D. y A.D. los ventrículos y aurículas izquierdos y derechos.

V.I.	Aorta	Arterias	Arteriolas	Capilares	Vénulas	Venas	Vena Cava
100	100	90	75	45	25	10	5
A.I.	Venas	Capilares	Arteriolas	Arterias	Arteria Pulmonar	V.D.	A.D.
100	5	10	15	20	25	25	25

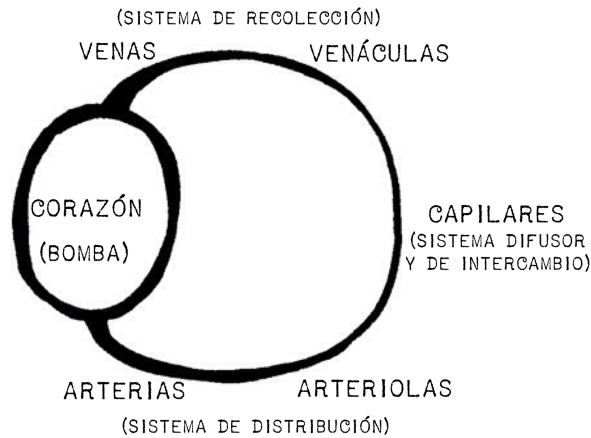


Figura 1.3: Esquema de las partes del sistema circulatorio y su papel.

Además, el medir ciertas características físicas de la sangre, el corazón o los vasos sanguíneos puede darnos información sobre alguna posible enfermedad. Por ejemplo, se ha observado que, pacientes con Diabetes Melitus o con Ansiedad Crónica, presentan una viscosidad inusual de la sangre (μ grande).

Es por todo esto que una buena comprensión de las características de nuestro sistema circulatorio y una modelación de sus funciones es de gran interés para la comunidad científica.⁵

1.3. El sistema circulatorio como sistema físico

Como vimos, la circulación está dividida en dos partes, la circulación sistémica es un sistema de altas presiones, necesarias para que la sangre llegue a todo el cuerpo; mientras que la circulación pulmonar es un sistema de bajas presiones, pues el corazón y los pulmones se encuentran a la misma altura. En la Tabla 1.2 se pueden apreciar las diferentes presiones de ambas en las diferentes cavidades que las conforman.

Dentro del corazón, los ventrículos actúan como bombas que arrojan la sangre fuera de él, mientras que las aurículas tienen el papel de cámaras de recolección y como bombas auxiliares de los ventrículos. Como ya se mencionó anteriormente, en cada entrada y salida de cada una de las partes del corazón hay válvulas que evitan que la sangre regrese a la cavidad anterior. Éstas se cierran y se abren gracias a la diferencia de presiones entre cavidades llamada *presión intravascular*.

⁵Para más información sobre esta sección ver Orland and Saltman [13].

CAPÍTULO 1. EL SISTEMA CIRCULATORIO
1.3. EL SISTEMA CIRCULATORIO COMO SISTEMA FÍSICO

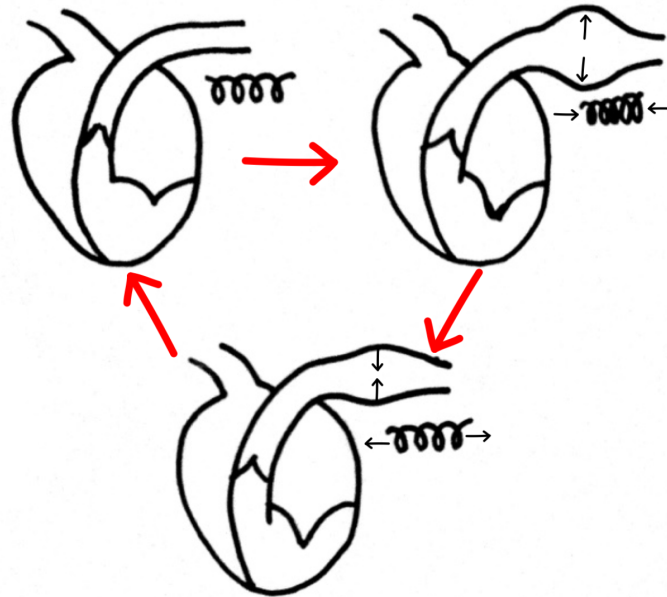


Figura 1.4: La aorta distendiéndose y relajándose.

En general, el corazón es eso, una bomba; las arterias son el sistema de distribución, tanto de materia como de energía; las venas, el de recolección y los capilares son el sistema difusor y de intercambio (Fig. 1.3). Justo para poder realizar esta última función, es necesario que la sangre viaje en un flujo suave dentro de los capilares, lo cual es en sí un reto, pues la presión que puede llegar a ejercer un corazón adulto sano, durante la sístole es de hasta 120 mmHg en la circulación sistémica y hasta 80 mmHg en la pulmonar (Mazumdar [10]).

Una característica muy importante de los vasos sanguíneos es su elasticidad. Gracias a ésta las arterias pueden soportar las presiones que ejerce la sangre sobre ellas debida a la sístole. Además, al distenderse, actúan como reservorio de energía la cual se libera dando un segundo impulso a la sangre y convirtiendo el flujo pulsátil, provocado por el corazón, en un flujo suave, necesario en los capilares para el intercambio de sustancias. Así, solo parte del trabajo efectuado durante la sístole, se gasta en mover la sangre y lo demás sirve para dilatar las paredes de la aorta (Fig. 1.4).

A la sangre, por su parte, hay que estudiarla con detenimiento pues ésta funciona como medio de transporte y sistema de distribución. Como se mencionó anteriormente la sangre no es un fluido simple, es más, no es un fluido newtoniano. Aunque el plasma, a bajas velocidades de cizalla, puede tener comportamiento newtoniano y tiene 1.2 veces la viscosidad del agua, pues es en un 91 % agua, se ha observado, experimentalmente, que no sucede lo mismo con la sangre. Debido a que tratamos con una mezcla de partículas suspendidas en un líquido, es necesario tener en cuenta los fenómenos de coagulación y de sedimentación de la sangre.

Recordemos que la mayor concentración volumétrica de la sangre se debe a los glóbulos rojos. Así, las propiedades físicas de estos influyen fuertemente en la mecánica de la sangre. Como se dijo anteriormente, estas células consisten en una membrana flexible rellena de hemoglobina, gracias a esta flexibilidad, ellas pueden introducirse en los vasos sanguíneos más pequeños y traspasar la pared endotelial, y debido a su forma bicóncava, el área disponible para el intercambio de sustancias

CAPÍTULO 1. EL SISTEMA CIRCULATORIO

1.3. EL SISTEMA CIRCULATORIO COMO SISTEMA FÍSICO

se maximiza. La hemoglobina, por su parte, es cinco veces más viscosa que el agua y su gravedad específica es 1.03 veces la del plasma, gracias a lo cual se da la sedimentación.

De hecho, aunque el hematócrito H representa la concentración volumétrica de eritrocitos en la sangre, $\phi > H$ representa la concentración real pues, atrapado entre las células, hay plasma. Así, para valores de ϕ de hasta 0.05 la tasa de deformación por esfuerzo cortante se mantiene constante, como en un fluido Newtoniano. Sin embargo, para $\phi > 0.05$ las interacciones entre partículas (como la sedimentación, la coagulación y la elasticidad de las células) modifican la viscosidad de la sangre.

Otro elemento que hay que tomar en cuenta es el tipo de flujo que se desarrolla en los vasos sanguíneos. Como ya dijimos, dentro de los capilares y para que sea posible el intercambio de sustancias, debemos tener un flujo suave, es decir un *flujo laminar*. En un sistema hidráulico, un flujo laminar se consigue con un Número de Reynolds Re menor a 2300; mientras que para $Re > 4000$ se observa un *flujo turbulento*. Sin embargo, para el caso de la sangre y, en general, de otros biofluidos se pueden tener flujos laminares con un número de Reynolds del orden de 5000 a 10000.⁶

Esta característica de los fluidos y otros fenómenos relacionados los abordaremos en el siguiente capítulo.

⁶Mazumdar [10].

Capítulo 2

La mecánica de fluidos

2.1. Ecuaciones básicas

En la mecánica de fluidos que se estudia en la licenciatura las ecuaciones necesarias para describir el comportamiento de un fluido son: las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen su movimiento, y la ecuación de continuidad, que introduce el principio de conservación de la masa. Así, para describir las propiedades mecánicas de un fluido es necesario conocer las tres variables que lo describen:

- La presión $p = p(x, y, z, t)$
- La densidad $\rho = \rho(x, y, z, t)$
- La velocidad $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z, t) = (u, v, w)$

Para el caso de un fluido no compresible, es decir con $\rho = cte.$, las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad, están dadas por:

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{q} \quad (2.1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{q} = 0 \quad (2.2)$$

respectivamente; con $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{q} \cdot \nabla$, la derivada material, ρ la viscosidad del fluido, μ su viscosidad y \vec{F} la fuerza externa, por unidad de volumen, actuando sobre el fluido.¹

En coordenadas cartesianas, la ecuación (2.1) está dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (2.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (2.4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad (2.5)$$

Para el caso que nos interesa (la sangre dentro de un vaso sanguíneo), podemos considerar que el fluido viaja a lo largo de un tubo cilíndrico. Es necesario, entonces, hacer la conversión a coordenadas cilíndricas. Llamaremos a las tres componentes de la velocidad como sigue:

¹Para una explicación más detallada de la deducción de estas ecuaciones ver Chandran et al. [4] y Mazumdar [10].

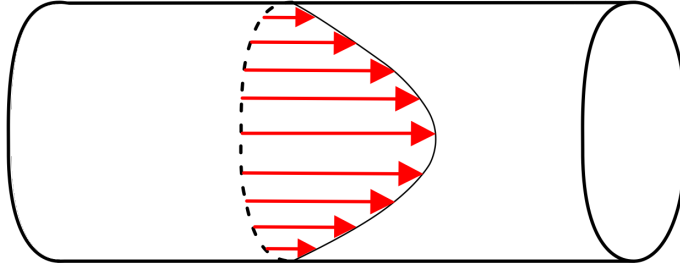


Figura 2.1: Perfil parabólico de velocidades.

- v_r - la velocidad a lo largo del radio del tubo
- v_z - la velocidad a lo largo del eje del tubo
- v_θ - la velocidad perpendicular a r y a z

Podemos además considerar que no actúa ninguna fuerza externa y que hay simetría respecto al eje del tubo, es decir $v_\theta = 0$, y que v_r , v_z y p no dependen de θ por lo que las ecuaciones (2.2) y (2.1), se convertirán en:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (2.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.8)$$

(ver Çengel and Cimbala [18]).

Notemos que, tanto para un fluido no viscoso $\mu = 0$, como para $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0$, es decir, cuando las fuerzas viscosas son despreciables, la ecuación (2.1) se convierte en

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla p \quad (2.9)$$

Por componentes, esta última expresión, son las llamadas ecuaciones de Euler que describen el movimiento de un fluido no viscoso.

Esto es importante ya que, para muchos fluidos, se han observado dos tipos de movimiento: el que se da cerca de una frontera sólida y el que se da lejos de ésta. En el primer caso son necesarias las ecuaciones de Navier-Stokes, puesto que tendremos un fluido con $\mu \neq 0$, los efectos debidos a la viscosidad son importantes ya que la “lámina” de fluido pegada a la pared tendrá la misma velocidad que ésta, $v = 0$, pero, conforme la distancia de la capa de fluido a la pared crece, la velocidad también irá creciendo hasta una *capa límite* a partir de la cual los efectos viscosos serán despreciables, por lo que la ecuación (2.9) será una buena aproximación.

De este modo, para el caso de un flujo dentro de un tubo obtendremos un perfil parabólico de velocidades como se demostrará en la sección 2.2 y como se muestra en la figura 2.1.

2.2. Flujo de Poiseuille

En el siglo XIX Jean Léonard Marie Poiseuille, intentando estudiar precisamente la sangre, midió el gasto Q de un flujo laminar, a través de un tubo cilíndrico, de un fluido no compresible y

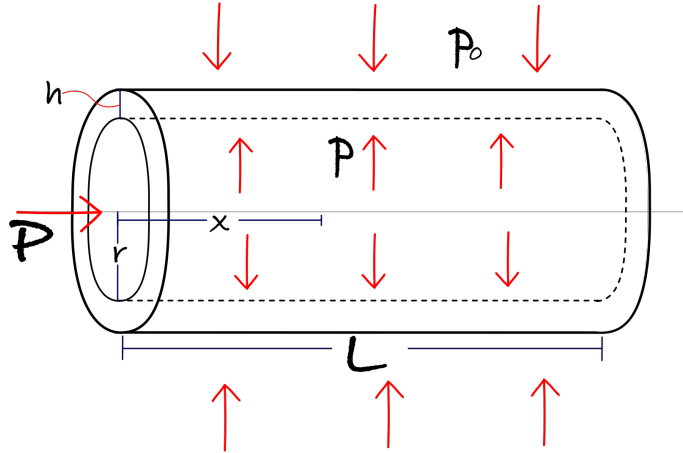


Figura 2.2: Flujo en un vaso tubular.

de viscosidad $\mu = cte.$ y encontró que Q es proporcional a Pr^4/L , con P la presión con la que el fluido ingresa al tubo, r el radio del tubo y L su longitud (ver Fig. 2.2).

Aunque Poiseuille no pudo trabajar con la sangre debido a que ésta coagula, gracias a sus estudios Hagenbach y Wiedemann calcularon, de forma independiente, una expresión para el gasto partiendo de igualar las fuerzas actuantes sobre el fluido: la debida a la diferencia de presiones por unidad de área, F_p , y la debida a la viscosidad del fluido F_v , dada por el producto del área del tubo, la viscosidad μ y el gradiente de velocidad $\frac{du}{dr}$. Así

$$\pi r^2(p_1 - p_2) = F_p = -F_v = (2\pi r L)\mu \left(\frac{du}{dr}\right) \quad (2.10)$$

donde u es la velocidad del fluido, p_1 la presión de entrada, p_2 la presión de salida y L la longitud del tubo.

Resolviendo para $u(r)$:

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4L\mu} (R^2 - r^2) \quad (2.11)$$

de donde se ve que la ecuación (2.11) describe una parábola, por lo que el perfil de velocidades es un paraboloide de revolución, como se había dicho anteriormente (ver figura 2.1).

Para obtener el gasto sustituimos en

$$Q = \int_0^R u(2r\pi dr) \quad (2.12)$$

la expresión de (2.11) y resolvemos. Con lo que obtenemos:

$$Q = \frac{\pi \Delta P r^4}{8\mu L} \quad (2.13)$$

que es llamada la ecuación de Hagen-Poiseuille.

Sin embargo, para que esta expresión se cumpla, tienen que darse varias condiciones, entre ellas:

- Que el tubo por donde el fluido se mueve sea rígido ($r = cte.$ con respecto a la diferencia de presiones $p_0 - p$).

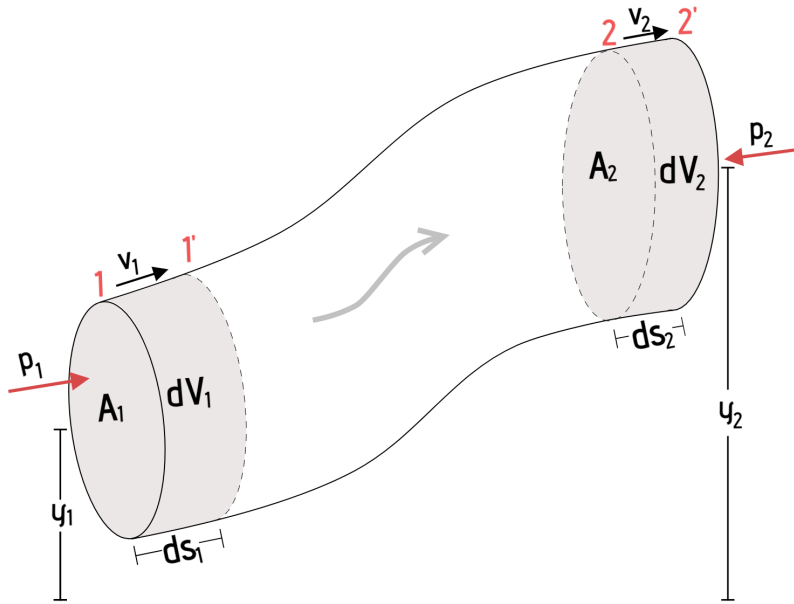


Figura 2.3: Fuerzas sobre una partícula de un fluido.

- Que el flujo sea continuo (Q no depende del tiempo).
- Que el fluido en cuestión sea homogéneo (μ constante para todas las velocidades de corte).

condiciones que el sistema circulatorio no cumple pues, como ya se mencionó, las arterias deben de ser elásticas, no rígidas, el corazón bombea la sangre en pulsaciones, no de forma continua y la sangre no es un fluido homogéneo ni newtoniano.

2.3. Principio de Bernoulli

La presión de un flujo dentro de un conducto cilíndrico puede variar con la velocidad del fluido y con el radio del tubo que lo contiene. Para encontrar esa dependencia partiremos de la ecuación de continuidad para un fluido no compresible en su forma más simple

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{2.14}$$

con A_1 el área transversal del tubo en el punto 1, A_2 el área transversal del tubo en el punto 2 y v_1 y v_2 la velocidad del fluido en esos mismos puntos. Ver figura 2.3.

En un intervalo pequeño de tiempo dt , la porción de fluido que se encontraba en punto 1, se mueve una distancia ds_1 , y el que se encontraba en el punto 2 se desplazará en un ds_2 por lo que $v_1 = \frac{ds_1}{dt}$ y $v_2 = \frac{ds_2}{dt}$. Puesto que nuestro fluido es incompresible tendremos que:

$$A_1 ds_1 = dV = A_2 ds_2 \tag{2.15}$$

es decir que el volumen de fluido que pasa por cualquier sección transversal del tubo en un intervalo de tiempo dt es dV .

Calcularemos, ahora, el trabajo efectuado sobre este elemento de fluido dV . Puesto que consideramos que el fluido no es viscoso, la única fuerza actuante sobre él será la debida a la presión del fluido circundante. En el punto 1, sobre A_1 , la presión será p_1 y sobre A_2 , en el punto 2', será p_2 . es decir que las fuerzas correspondientes estarán dadas por p_1A_1 y p_2A_2 . Con lo que el trabajo queda descrito como sigue:

$$W = p_1A_1ds_1 - p_2A_2ds_2 \quad (2.16)$$

y por la ecuación (2.15):

$$W = (p_1 - p_2)dV \quad (2.17)$$

Por otro lado, el trabajo debe de ser igual al cambio de la energía mecánica total, es decir al cambio de la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitacional del elemento de fluido dV . En el punto 1, la energía cinética está dada por $\frac{1}{2}\rho dV v_1^2$ y en el punto 2, por $\frac{1}{2}\rho dV v_2^2$ por lo que la diferencia en la energía cinética estará dada por:

$$dK = \frac{1}{2}\rho dV (v_2^2 - v_1^2) \quad (2.18)$$

A su vez, en el punto 1, la energía potencial gravitacional es $\rho(dV)gy_1$ y en el punto 2, $\rho(dV)gy_2$. Por lo que el cambio en la energía potencial será:

$$dU = \rho dV g(y_2 - y_1) \quad (2.19)$$

Por lo que igualando dW de la ecuación (2.17) con la suma de $dK + dU$, tendremos:

$$\begin{aligned} dW &= dK + dU \\ \Rightarrow (p_1 - p_2) &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ésta es la ecuación de Bernoulli². Y podemos reescribirla como:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (2.21)$$

y puesto que los puntos 1 y 2 son arbitrarios, podemos concluir que

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte. \quad (2.22)$$

Esto quiere decir, que para un sistema sin perdidas por fricción, la energía total por unidad de volumen permanece constante. Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli no puede aplicarse en los casos en los que los efectos viscosos son significativos ni para casos en los que hay perdidas de energía por fluidos turbulentos.

2.4. Flujo en desarrollo

Definimos el número de Reynolds como:

$$\text{Re} = \frac{vd}{\mu/\rho} \quad (2.23)$$

Con v la velocidad media del fluido a través de una sección transversal del tubo de diámetro d , μ la viscosidad del fluido y ρ su densidad. Este número representa la razón entre las fuerzas

²ver Chandran et al. [4] y Young and Freedman [17].

inerciales (vd) y las fuerzas viscosas (μ/ρ) del fluido y nos da información respecto al tipo de flujo que podemos esperar de un fluido dentro de un tubo.

Se ha observado que, para $Re < 2100$ el tipo de flujo dentro de un tubo es laminar, mientras que para $Re > 4000$ tendremos flujos turbulentos. Para $2100 < Re < 4000$ hay una fase que se llama de transición.

Sin embargo, estos perfiles de velocidad (laminar y turbulento), solo son válidos para lo que llamamos *Flujo Completamente Desarrollado* (FCD de aquí en adelante). Dentro de un tubo de paredes lisas, podremos tener un FCD solo a una distancia suficientemente grande de cualquier disturbio en el flujo como para que los efectos de éste se hayan disipado. Las causas de este disturbio pueden ser debidas a cambios o discontinuidades geométricas del tubo como una fuente o un sumidero. En el caso de un vaso sanguíneo estas discontinuidades pueden darse por alguna alteración como un trombo o alguna malformación, pero también pueden darse de forma “natural” debido a una bifurcación, o a la transición de un tipo de vaso al siguiente.

Los efectos de estas perturbaciones, si son suficientemente pequeñas, solo son perceptibles cerca de ellas y en dirección de la corriente. En esta región es que se da el *flujo en desarrollo*, es decir es donde se estabiliza el flujo. Mientras que la región posterior, donde las consecuencias de las alteraciones ya no son perceptibles, se da el FCD.

2.5. Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos al Sistema Circulatorio

Con la ecuación de Hagen-Poiseuille (2.13) se puede calcular, experimentalmente, la viscosidad de la sangre μ_B dando como resultado que:

$$\mu_B = \frac{\pi P r^4}{8 L Q} = 5 \mu_w \quad (2.24)$$

con μ_w la viscosidad del agua y para r suficientemente grande. Note, pues, que μ_B depende de r por lo que $\mu_B \neq cte$. La sangre no es un fluido newtoniano.

La ecuación de Bernoulli, por otro lado, puede aplicarse para medir cambios en la presión en ciertas zonas del sistema circulatorio. Partiendo de la ecuación (2.21) y considerando los puntos 1 y 2 con presiones, alturas y velocidades $p_1, p_2, z_1, z_2, v_1, v_2$, respectivamente, pero haciendo $z_1 = z_2$, obtenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad (2.25)$$

de donde, si consideramos $v_2 \gg v_1$ y despreciamos el aporte de ρv_1^2 , la ecuación (2.25) se convierte en

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (2.26)$$

Esta expresión se utiliza para medir caídas de presión debido a estenosis³ o a bloqueos, asumiendo que la densidad de la sangre es $\rho_s = 1.06g/cm^3$ y haciendo uso de instrumentos como el ultrasonido Doppler o resonancias magnéticas (Chandran et al. [4]).

Sin embargo, como ya se dijo, estos modelos no consideran muchas de las características del sistema circulatorio. Así, para crear un modelo fiel a éste, tendremos que tomar en cuenta sus características físicas.

³estenosis: estrechamiento de un orificio o conducto.

Capítulo 3

Modelo del sistema circulatorio

Este capítulo y el siguiente contienen el aporte principal de este trabajo, donde se muestra un conjunto de modelos a fin de estudiar de forma analítica el flujo de un fluido en un sistema de tubos cilíndricos que eventualmente son representativos de un sistema circulatorio humano.

Partiremos, entonces, de la expresión para el gasto de Hagen-Poiseuille (2.13), para construir una ecuación que describa de forma más precisa al sistema circulatorio. Para ello introduciremos dos de las características físicas de nuestro sistema y calcularemos el flujo para cada uno de los casos modificados.

Las modificaciones que haremos serán:

1. Tubo elástico en vez de rígido
2. Flujo pulsátil

3.1. Flujo de Poiseuille en un tubo elástico

En esta sección añadiremos la característica de la elasticidad de las arterias al modelo básico del flujo para, de esta manera, encontrar una expresión que lo describa dentro de un tubo elástico.

Comenzaremos este análisis imaginando un tubo con un fluido en reposo dentro de él (figura 2.2). El radio del tubo es r , el grosor $h \ll r$, la presión sobre él debido a un fluido externo será p_0 y la presión dentro del tubo p . Consideremos que el tubo es una membrana elástica y que, en su centro, el sistema está en equilibrio.

La fuerza neta hacia abajo sobre la mitad del cilindro, debida a la fuerza elástica, por unidad de longitud, ejercida por el tubo, será

$$F_e = -2Th \quad (3.1)$$

con T la tensión por unidad de longitud por unidad de grosor del tubo, mientras que la fuerza ascendente por unidad de longitud, debida a la diferencia de presiones, estará dada por:

$$\begin{aligned} F_p &= \int_0^\pi (p - p_0)r \sin \theta d\theta \\ &= 2(p - p_0)r \end{aligned} \quad (3.2)$$

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.2. GASTO PARA UN FLUJO PULSÁTIL

Debido a que están en equilibrio, estas fuerzas deben ser iguales y opuestas, por lo que:

$$\begin{aligned} F_p &= -F_e \\ \Rightarrow Th &= r(p - p_0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Además, por la Ley de Hook, la tensión T , está dada por:

$$T = E \frac{r - r_0}{r_0} \quad (3.4)$$

con E la constante de elasticidad del tubo, r_0 un radio de referencia y r el radio bajo la tensión T .

Sustituyendo T de la ecuación (3.4) en la (3.3), asumiendo que $p = p(x)$ y reordenando, obtenemos:

$$p(x) - p_0 = \frac{Eh}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \quad (3.5)$$

Pero, tomando $\frac{dp}{dx} \simeq \frac{p-p_0}{L}$, podemos escribir la ecuación (2.13) como:

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} r^4 \quad (3.6)$$

Por lo que podemos integrar (3.6) observando que por la ecuación (3.5), r es función de $(p - p_0)$, es decir, $r = r(p - p_0)$. Así:

$$\begin{aligned} \int_0^L Q dx &= -\frac{\pi}{8\mu} \int_{p_1}^{p_2} r^4 dp \\ \Leftrightarrow QL &= \frac{\pi}{8\mu} \int_{p_2-p_0}^{p_1-p_0} r^4 d(p-p_0) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Despejando Q de esta última expresión podemos ver que Q es inversamente proporcional a L , también que Q depende de $p_1 - p_0$ y de $p_2 - p_0$. De la ecuación (3.5) podemos despejar r lo que nos dará:

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0 p'}{Eh}} \quad (3.8)$$

con $p' = p - p_0$. Sustituimos la ecuación (3.8) en la (3.7) e integramos para p' :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi}{8L\mu} \int_{p_2-p_0}^{p_1-p_0} \left(\frac{r_0}{1 - \frac{r_0 p'}{Eh}}\right)^4 dp' \\ &= \frac{\pi r_0^3 Eh}{24L\mu} \left[\left[1 - \frac{r_0}{Eh}(p_1 - p_0)\right]^{-3} - \left[1 - \frac{r_0}{Eh}(p_2 - p_0)\right]^{-3} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Notemos que si expandemos en Serie de Taylor la última expresión y nos quedamos a primer orden tendremos:

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8L\mu} (p_1 - p_2) \quad (3.10)$$

que es justamente la ecuación (2.13).

3.2. Gasto para un flujo pulsátil

El flujo de sangre en las arterias no es continuo, los movimientos del corazón imprimen una excitación al fluido que se propaga en forma de ondas elásticas¹. Para incluir la característica

¹para más información al respecto ver Fung [8].

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.2. GASTO PARA UN FLUJO PULSÁTIL

del flujo pulsátil, comenzaremos por asumir un fluido viajando dentro de un tubo cilíndrico cuya velocidad solo tiene componente en la dirección del eje del tubo, a esta velocidad le llamaremos u . Suponiendo que hay simetría axial tendremos que u y p no dependen de ϕ , es decir, $u = u(x, r, t)$ y $p = p(x, r, t)$ con x la dirección a lo largo del eje, r la dirección radial, y t el tiempo.

Tomando esto en cuenta, la ecuación de continuidad (2.2), se ve reducida a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes (2.7) y (2.8) se convierten en:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.12)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.13)$$

así, tomando en cuenta las ecuaciones (3.11) y (3.12), la expresión (3.13) se convierte en

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.14)$$

vemos, entonces que u no depende de x ni p depende de r , por lo que $u = u(r, t)$ y $p = p(x, t)$. Para resolver la ecuación (3.14) la reescribimos de la siguiente forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.15)$$

notamos que el lado izquierdo de esta última expresión solo podría depender de x y de t , mientras que el lado derecho dependería de r y de t . Puesto que están igualadas, concluimos que ambas solo dependen de t .

Proponemos, entonces

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{P} e^{i\omega t} \quad (3.16)$$

$$u(r, t) = \mathcal{U}(r) e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

con $\mathcal{P} = cte.$, $\mathcal{U}(r)$ una función que describe el perfil de velocidades del flujo y ω la frecuencia del flujo pulsátil.

De esta manera, la ecuación (3.15) la podemos escribir como

$$\mathcal{P} e^{i\omega t} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{U} e^{i\omega t} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} e^{i\omega t} \quad (3.18)$$

Podemos ver que, en el caso de que $\omega = 0$, nos referiremos a el caso estacionario y la ecuación (3.18) se reduce, de nuevo, a la (2.13).

Reordenando la ecuación (3.18) obtenemos

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{U}}{dr} - \frac{i\omega\rho}{\mu} \mathcal{U} = \frac{\mathcal{P}}{\mu} \quad (3.19)$$

Por otro lado, sabemos (por Bell [3] y Arfken [2]) que una ecuación diferencial homogénea de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - k^2 y = 0 \quad (3.20)$$

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.2. GASTO PARA UN FLUJO PULSÁTIL

tiene solución

$$y = \mathbf{A}J_0(ikx) + \mathbf{B}Y_0(ikx) \quad (3.21)$$

donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel con argumento complejo. Por lo que podemos concluir que la solución para (3.19) será:

$$\mathcal{U}(r) = \mathbf{A}J_0\left(i\sqrt{\frac{i\omega\rho}{\mu}}r\right) + \mathbf{B}Y_0\left(i\sqrt{\frac{i\omega\rho}{\mu}}r\right) + \frac{\mathcal{P}}{i\omega\rho} \quad (3.22)$$

Para simplificar esta expresión recordemos que $Y_0(x)$ diverge en $x = 0$ (ver Arfken [2]); así que como en el centro del tubo necesitamos una \mathcal{U} finita, \mathbf{B} debe de ser cero. Por lo que la ecuación (3.22) se convierte en:

$$\mathcal{U}(r) = \mathbf{A}J_0\left(i\sqrt{\frac{i\omega\rho}{\mu}}r\right) + \frac{\mathcal{P}}{i\omega\rho} \quad (3.23)$$

Además, recordemos que la capa de fluido “pegada” a la pared tiene la misma velocidad que ésta. Es decir que, si a es la medida del radio del tubo, $\mathcal{U}(a) = 0$ por la condición de no deslizamiento. Esto es:

$$\mathbf{A}J_0\left(i\sqrt{\frac{i\omega\rho}{\mu}}a\right) + \frac{\mathcal{P}}{i\omega\rho} = 0 \quad (3.24)$$

de donde, despejando \mathbf{A} , obtenemos

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathcal{P}}{i\omega\rho} \frac{1}{J_0\left(i\sqrt{\frac{i\omega\rho}{\mu}}a\right)} \quad (3.25)$$

Introducimos la viscosidad cinética $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ y el parámetro de Womersley $\alpha = a\sqrt{\frac{\omega\rho}{\nu}}$. Por lo que:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{P}}{\omega\rho} i \frac{1}{J_0(i^{3/4}\alpha)} \quad (3.26)$$

Sustituimos esta última expresión en (3.27) introduciendo, también ahí, a α :

$$\mathcal{U}(r) = \frac{\mathcal{P}}{\omega\rho} i \left[1 - \frac{J_0(i^{3/4}\frac{r}{a}\alpha)}{J_0(i^{3/4}\alpha)} \right] \quad (3.27)$$

De esta forma, sustituyendo (3.27) en la ecuación (3.17) tenemos que:

$$u(r, t) = \frac{i\mathcal{P}}{\omega\rho} \left[1 - \frac{J_0(i^{3/4}\frac{r}{a}\alpha)}{J_0(i^{3/4}\alpha)} \right] e^{i\omega t} \quad (3.28)$$

Calcularemos, ahora, la razón de flujo volumétrico Q .

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a u 2\pi r dr \\ &= -\frac{2\pi i\mathcal{P}}{\omega\rho} e^{i\omega t} \left[\int_0^a r dr - \frac{1}{J_0(i^{3/4}\alpha)} \int_0^a r J_0(i^{3/4}\frac{r}{a}\alpha) dr \right] \\ &= -\frac{\pi i\mathcal{P}}{\omega\rho} e^{i\omega t} a^2 \left[1 - \frac{2}{a^2 J_0(i^{3/4}\alpha)} \int_0^a r J_0(i^{3/4}\frac{r}{a}\alpha) dr \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.2. GASTO PARA UN FLUJO PULSÁTIL

Para resolver la última integral introduciremos los parámetros $\beta = i^{3/4}\alpha$ y $\theta = \frac{i\beta}{a}$. Y nos enfocaremos en la última parte de la ecuación (3.29), a la que llamaremos I :

$$I = \frac{2}{a^2 J_0(i^{3/4}\alpha)} \int_0^a r J_0(i^{3/4} \frac{r}{a} \alpha) dr. \quad (3.30)$$

Que, en términos de β y θ , queda:

$$I = \frac{2}{J_0(\beta)\beta^2} \int_0^\beta \theta J_0(\theta) d\theta, \quad (3.31)$$

pero

$$\beta J_1(\beta) = \int_0^\beta \theta J_0(\theta) d\theta. \quad (3.32)$$

(ver Arfken [2]). Por lo que

$$I = \frac{2J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta)} \quad (3.33)$$

Así, sustituyendo esta última expresión en (3.29) y llamando $\chi(\beta)$ al término $1 - \frac{2J_1(\beta)}{\beta J_0(\beta)}$ obtenemos

$$Q = -\frac{\pi i \mathcal{P}}{\omega \rho} e^{i\omega t} a^2 \chi(\beta) \quad (3.34)$$

Notemos que, en general $\chi(\beta) \in \mathbb{C}$, por lo que

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \quad (3.35)$$

(ver Bell [3] y Arfken [2]), es decir que

$$J_0(x) \simeq 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (3.36)$$

$$J_1(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{x}{2}\right)^7 + \dots \quad (3.37)$$

Así

$$\chi(\beta) \simeq 1 - \left(\frac{1 - \frac{\beta^2}{8} + \frac{\beta^4}{192} - \dots}{1 - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{64} - \dots} \right) \quad (3.38)$$

para $\beta \ll 1$ expandemos en serie el término $(1 - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{64} - \dots)^{-1}$ y obtenemos que

$$\begin{aligned} \chi(\beta) &\simeq 1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{8} + \frac{\beta^4}{192} - \dots\right) \left(1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^4}{64} - \dots\right) \\ &= -\frac{\beta^2}{8} + \mathcal{O}(\beta^4) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Puesto que $\beta \propto \alpha$, podemos reescribir a $\chi(\beta)$ en términos de α :

$$\chi(\alpha) = \frac{i\alpha^2}{8} + \mathcal{O}(\alpha^4) \quad (3.40)$$

Por último, sustituyendo $\chi(\beta)$ en la ecuación (3.34) y en términos de α nos queda la siguiente expresión para el gasto

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\pi i \mathcal{P}}{\omega \rho} e^{i\omega t} a^2 \left[\frac{i\alpha^2}{8} + \mathcal{O}(\alpha^4) \right] \\ &= \left[\frac{\pi \mathcal{P} a^4}{8\mu} + \mathcal{O}(\alpha^4) \right] e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.41)$$

En esta expresión podemos ver que, cuando $\alpha \rightarrow 0$, es decir, si $\omega \rightarrow 0$, la ecuación (3.41) se reduce a

$$Q_0 = \frac{\pi P a^4}{8\mu} e^{i\omega t} \quad (3.42)$$

de donde vemos que $|Q_0| = \frac{\pi P a^4}{8\mu}$ es la razón de flujo volumétrico para un gradiente constante de presión y es la misma que la de un flujo estacionario de Poiseuille.

Si separamos las partes reales y las imaginarias de la expresión para $\chi(\beta)$ y de la ecuación (3.42) tenemos que

$$Q = \frac{\pi P a^2}{\omega \rho} [\chi_2(\alpha) \cos \omega t + \chi_1(\alpha) \sen \omega t - i(\chi_1(\alpha) \cos \omega t - \chi_2(\alpha) \sen \omega t)] \quad (3.43)$$

Con $\chi(\beta) = \chi_1(\alpha) + i\chi_2(\alpha)$.

De la ecuación (3.43), la parte real da el flujo cuando la presión es $\mathcal{P} \cos \omega t$ y la parte imaginaria da el flujo cuando la presión es $\mathcal{P} \sen \omega t$.

Con esto, podemos calcular la razón entre la magnitud del flujo $|Q|$ y la magnitud del flujo de Poiseuille $|Q_0|$:

$$\frac{|Q|}{|Q_0|} = \frac{8\sqrt{\chi_1^2(\alpha) + \chi_2^2(\alpha)}}{\alpha^2} \quad (3.44)$$

Que en el caso del sistema circulatorio, con una frecuencia cardiaca de 72 latidos por minuto y una densidad de la sangre $\rho_b = 1.05g/cm^3$ una viscosidad $\mu = 0.04gr/s \cdot cm$ y en un vaso sanguíneo de radio $a = 0.5cm$ (es decir con $\alpha \simeq 7$ y $\omega = 8rad/s$).

$$\frac{|Q|}{|Q_0|} \simeq \frac{1}{8} \quad (3.45)$$

3.3. Onda Pulsátil

Otro aspecto interesante que se puede analizar sobre el flujo de la sangre en los vasos sanguíneos es la velocidad de la onda de presión producida por los latidos del corazón sobre las arterias y gracias a la cual se puede medir la frecuencia cardiaca en la muñeca de una persona.

Para ello, consideremos un tubo elástico a través del cual fluye un fluido no viscoso e incompresible. Dentro del tubo, a una distancia x y en un momento t el fluido cruza el área transversal, $A(x, t)$, con velocidad paralela al eje del tubo $u(x, t)$ y ρ la densidad del fluido (Fig. 3.1)

La fuerza en dirección axial, sobre el elemento de volumen de ancho Δx , a la distancia x será PA , mientras que a una distancia $x + \Delta x$ es:

$$PA + \Delta(PA) = pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)\Delta x \quad (3.46)$$

y la fuerza debida a la presión externa P_0 estará dada por $P_0 \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x$. Sumando las expresiones anteriores tenemos que la fuerza neta actuante sobre el elemento de volumen, está dada por:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(P - P_0) A \Delta x \quad (3.47)$$

Esta última expresión debe ser igual a la masa del elemento de volumen, $\rho A \Delta x$, por su aceleración, $(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x})$, para que se cumpla la 2ª Ley de Newton, es decir que tendremos:

$$\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x}(P - P_0) A \quad (3.48)$$

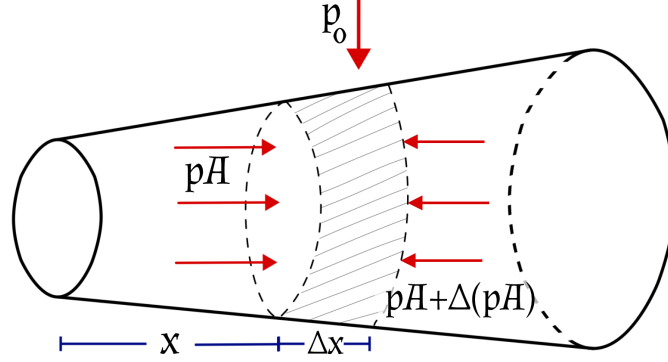


Figura 3.1: Fluido no viscoso y no compresible dentro de un tubo elástico.

Por otro lado, con $A_0 = \pi r_0$ y $A = \pi r$, la ecuación de continuidad para un fluido incompresible es:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Au) = 0 \quad (3.49)$$

y la ecuación (3.5) se convertirá en

$$P - P_0 = \frac{Eh}{r_0} \left[1 - \left(\frac{A_0}{A} \right)^{1/2} \right] \quad (3.50)$$

Asumiendo u , $P - P_0$ y $A - A_0$ pequeños, las ecuaciones (3.48), (3.49) y (3.50), se pueden escribir como sigue

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.52)$$

$$P - P_0 = \frac{Eh}{2r_0 A_0} (A - A_0) \quad (3.53)$$

Si derivamos parcialmente la ecuación (3.51) respecto a x , la (3.52) respecto a t y la (3.53) dos veces respecto a t obtendremos

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{2r_0 A_0}{Eh} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.56)$$

respectivamente. De las dos primeras, igualamos $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ y nos quedará la expresión siguiente

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{A_0}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (3.57)$$

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.4. APLICACIÓN AL SISTEMA CIRCULATORIO

por último, igualamos $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ de las ecuaciones (3.56) y (3.57) y tendremos que

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.58)$$

con $c^2 = \frac{Eh}{2r_0\rho}$.

Análogamente, se puede obtener una expresión similar para la velocidad $u(x, t)$, tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.59)$$

Notemos que, estas últimas ecuaciones, tienen la forma de una ecuación de onda clásica con velocidad de propagación de onda c . En este caso, las expresiones (3.58) y (3.59) describen la onda de presión y la onda de velocidad de flujo, respectivamente, cuyas velocidades son, ambas, $c = \sqrt{Eh/2r_0\rho}$.

Por otra parte, la *Ecuación de Moens-Korteweg* nos da una expresión para la velocidad de onda de presión c , para un fluido no viscoso dentro de un tubo cilíndrico elástico.²

Partiendo de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos (2.6), (2.7) y (2.8), introduciendo la velocidad de flujo axial promedio

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_0^a u(x, t) 2\pi r dr \quad (3.60)$$

con a la medida del radio del tubo relajado, y tomando en cuenta las siguientes suposiciones:

- La viscosidad del fluido es despreciable ($\mu \rightarrow 0$).
- La velocidad del flujo en dirección axial es pequeña en comparación con la de la onda pulsátil.
- El diámetro del tubo es un grado de magnitud más pequeño que la longitud de onda.
- Los términos de aceleración conectiva $\frac{\partial u}{\partial x}$ y de velocidad radial v son pequeños en comparación con los de velocidad axial u y de aceleración local $\frac{\partial u}{\partial t}$

se puede demostrar que

$$c = \left(\frac{Eh}{2a\rho} \right)^{1/2} \quad (3.61)$$

donde E es el modulo de elasticidad del tubo³.

3.4. Aplicación al sistema circulatorio

Esta última expresión resulta muy importante, pues gracias a ella se puede hacer un diagnostico sobre diferentes padecimientos de algunas partes del sistema circulatorio. Por medio de estudios médicos no invasivos⁴ se puede determinar la velocidad promedio de la onda de velocidad del flujo sanguíneo y, con ello, calcular el módulo de elasticidad (o de Young) de algunos vasos y la forma de la onda de presión.

El procedimiento con lo que esto se logra se explicará a continuación.

²En Tijsseling and Anderson [16] se puede encontrar una descripción del trabajo de Isebree Moens y Diederik Korteweg para deducir esta ecuación y en Rusak et al. [14] un ejemplo de su aplicación en diagnósticos médicos.

³ver Mazumdar [10].

⁴como un Ecocardiograma Doppler y una toma de presión con un Esfigmomanómetro.

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.5. PROPAGACIÓN DE ONDAS CON VISCOSIDAD DIFERENTE DE CERO

Tomando en cuenta las suposiciones anteriores, la ecuación (2.8) se convierte en

$$\rho \frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (3.62)$$

Además, podemos expresar a $\bar{u}(x, t)$ en la forma de D'Alembert; es decir, como una superposición de ondas viajeras: una en dirección positiva (f) y otra en dirección negativa del eje del tubo (g)

$$\bar{u}(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (3.63)$$

así, despreciando g , partiendo de la ecuación (3.62) y asumiendo que p tiene la misma forma que \bar{u} (es decir $p(x, t) = f'(x - ct)$), vemos que:

$$\bar{u}(x, t) = f(x - ct) \quad , \quad p(x, t) = \rho c f'(x - ct) \quad (3.64)$$

Podemos expresar, ahora, a \bar{u} y a p en serie de Fourier:

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x) e^{i2\pi n t/T} \quad (3.65)$$

$$p(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(x) e^{i2\pi n t/T} \quad (3.66)$$

con T el periodo de los latidos del corazón, también llamado ciclo cardiaco.

De esta forma, al medir la forma de onda por medio de un flujometro Doppler, podemos calcular los coeficientes u_n por la forma integral de Euler

$$u_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}(x, t) e^{-i2\pi n t/T} dt \quad (3.67)$$

y, debido a que $p = \rho c \bar{u}'$ (por la ecuación (3.64)) podemos construir la forma de la onda de presión dada por la ecuación (3.66), con:

$$p_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^T p(x, t) e^{-i2\pi n t/T} dt \quad (3.68)$$

Gracias a esto es posible asignar parámetros de forma de onda a diferentes enfermedades del sistema circulatorio.

3.5. Propagación de ondas con viscosidad diferente de cero

Los modelos comentados hasta ahora nos han permitido hacer una descripción más apegada a las características físicas del sistema circulatorio humano y entender mejor su funcionamiento. Estos modelos también nos dan herramientas para detectar algunos posibles problemas de salud en algunas zonas del organismo donde son válidas nuestras hipótesis.

Sin embargo, la elasticidad de las arterias y el flujo pulsátil de la sangre no son las únicas características a tomar en cuenta. Hasta ahora, hemos trabajado con un fluido no viscoso, $\mu = 0$, pero, como se mencionó en el capítulo 1, la sangre tiene una viscosidad diferente de cero y, es más, no es un fluido newtoniano.

En esta sección, las condiciones mencionadas en la sección 3.3 siguen siendo válidas, excepto que μ será diferente de cero, por lo que la tomaremos en cuenta.

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.5. PROPAGACIÓN DE ONDAS CON VISCOSIDAD DIFERENTE DE CERO

Así, las ecuaciones básicas (2.6), (2.8) y (2.7), se convertirán en

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (3.69)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.71)$$

respectivamente, con $u = u(x, r, t)$ y $v = v(x, r, t)$ las velocidades de flujo; la primera con dirección axial y la segunda con dirección radial. Además, las ecuaciones de movimiento de un tubo elástico son:

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \sigma_{rr} - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\eta}{a^2} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad ; \quad \sigma_{rr} = p \quad (3.72)$$

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma_{rx} - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad ; \quad \sigma_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.73)$$

(ver Fung [7]) con ρ_w la densidad de la pared del tubo, E su módulo de elasticidad, h su grosor, ν la razón de Poisson⁵ y ξ y η los desplazamientos de la pared axial y radial respectivamente. Añadiremos, ahora, las condiciones de frontera:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{r=a} = u \quad , \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{r=a} = v \quad (3.74)$$

Así, tendremos un sistema de ecuaciones que describirán la forma de onda para la velocidad de flujo, axial y radial, para la presión y para las velocidades axial y radial de la pared dadas por:

$$\begin{aligned} u(x, r, t) &= u_0(r) e^{i(kx - \omega t)} \\ v(x, r, t) &= v_0(r) e^{i(kx - \omega t)} \\ p(x, t) &= p_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \xi(x, t) &= \xi_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \eta(x, t) &= \eta_0 e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

con $\omega = 2\pi/T$ la frecuencia, $\lambda = 2\pi/k$ la longitud de onda y $\omega/k = c$ la velocidad de onda.

Aunque en realidad, la función de onda del flujo sanguíneo debiera ser una composición de componentes armónicos, con diferentes frecuencias; vamos a tomar, en este análisis, una sola frecuencia ω para obtener una relación entre las amplitudes de las ondas de velocidad de flujo promedio y presión.

Sustituimos las expresiones para u y v de la ecuación (3.75) en la (3.69) y obtenemos

$$\frac{d(rv_0)}{dr} = -ik(rv_0) \quad (3.76)$$

Sustituimos, ahora, las expresiones para u y p de la ecuación (3.75) en la (3.70) y obtenemos lo siguiente

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} + i \frac{\omega \rho}{\mu} u_0 = \frac{ikp_0}{\mu} \quad (3.77)$$

⁵Anteriormente habíamos denotado por ν a la viscosidad cinética sin embargo, en esta sección, no lo será.

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.5. PROPAGACIÓN DE ONDAS CON VISCOSIDAD DIFERENTE DE CERO

que es, nuevamente, una ecuación Bessel no-homogénea (ver Bell [3]) para u_0 , y su solución está dada por

$$u_0(r) = \frac{k}{\omega\rho}p_0 + \mathcal{A}J_0(\beta r) - \mathcal{B}Y_0(\beta r) \quad ; \quad \beta = \frac{i\omega\rho}{\mu} \quad (3.78)$$

nuevamente \mathcal{B} debe de ser cero, pues Y_0 diverge en $r = 0$ (Arfken [2], Bell [3]). Por lo que

$$u_0(r) = \frac{k}{\omega\rho}p_0 + \mathcal{A}J_0(\beta r) \quad (3.79)$$

Esta última expresión la sustituimos en la ecuación (3.76) y tendremos

$$\frac{d}{dr}(rv_0) = -ikr \left(\frac{k}{\omega\rho}p_0 + \mathcal{A}J_0(\beta r) \right) \quad (3.80)$$

Debido a que hay simetría axial, tenemos que $v_0|_{r=0}$; además, una relación de recurrencia de las funciones Bessel dice que $\int rJ_0(r)dr = rJ_1$ (Bell [3]) por lo que integrando la ecuación anterior tendremos

$$v_0(r) = -\frac{ik^2}{2\omega\rho}p_0r - \frac{ik\mathcal{A}}{\beta}J_1(\beta r) \quad (3.81)$$

De la ecuación (3.75), tomamos las expresiones para ξ , η y p y las introducimos en (3.72). Simplificando y acomodando obtenemos:

$$p_0 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)a^2}\eta_0 + \frac{iEhk\nu}{(1-\nu^2)a}\xi_0 - \rho_w h\omega^2\eta_0 \quad (3.82)$$

Hacemos lo mismo para la ecuación (3.73), sustituyendo de (3.75) las expresiones para ξ , η y u con lo que tendremos:

$$\xi_0 + (1-\nu^2)\frac{\rho_w\omega^2}{Ek}\xi_0 = (1-\nu^2)\frac{\mu\mathcal{A}\beta}{Ehk^2}J_1(\beta a) - \frac{i\nu}{ka}\eta_0 \quad (3.83)$$

El último término del lado derecho de la ecuación (3.82) y el último del lado izquierdo de la (3.83) son pequeños en comparación con los demás, así que ambas expresiones se verán reducidas a:

$$p_0 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)a^2}\eta_0 + \frac{iEhk\nu}{(1-\nu^2)a}\xi_0 \quad (3.84)$$

$$\xi_0 = (1-\nu^2)\frac{\mu\mathcal{A}\beta}{Ehk^2}J_1(\beta a) + \frac{i\nu}{ka}\eta_0 \quad (3.85)$$

Aplicando las condiciones de frontera dadas por la ecuación (3.74), tendremos que

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{r=a} = u \quad \Rightarrow \quad -i\omega\xi_0 = u_0(a) \quad (3.86)$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{r=a} = v \quad \Rightarrow \quad -i\omega\eta_0 = v_0(a)$$

donde u_0 y v_0 están dadas por la ecuación (3.79) y la (3.81). Por lo que:

$$-i\omega\xi_0 = \frac{k}{\omega\rho}p_0 + \mathcal{A}J_0(\beta a) \quad (3.87)$$

$$-i\omega\eta_0 = -\frac{ik^2}{2\omega\rho}p_0a - \frac{ik\mathcal{A}}{\beta}J_1(\beta a) \quad (3.88)$$

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.5. PROPAGACIÓN DE ONDAS CON VISCOSIDAD DIFERENTE DE CERO

Despejando ξ_0 y η_0 tendremos:

$$\xi_0 = -\frac{k}{i\omega^2\rho}p_0 - \frac{\mathcal{A}}{i\omega}J_0(\beta a) \quad (3.89)$$

$$\eta_0 = \frac{k^2 a}{2\omega^2\rho}p_0 + \frac{k\mathcal{A}}{\omega\beta}J_1(\beta a) \quad (3.90)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.84) e introduciendo $E^* \equiv Eh/(1-\nu^2)a$ tendremos la siguiente expresión para p_0 y para \mathcal{A}

$$p_0 \left[\frac{E^* k^2}{\omega^2\rho} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) - 1 \right] + \mathcal{A} \frac{kE^*}{\omega} \left[\frac{J_1(\beta a)}{\beta a} - \nu J_0(\beta a) \right] = 0 \quad (3.91)$$

Por otro lado, igualando las ecuaciones (3.89) y (3.85) y obtenemos:

$$p_0 \left[\frac{k}{2i\omega^2\rho} (2 - \nu) \right] + \mathcal{A} \left[J_1(\beta a) \left(\frac{\mu\beta}{aE^*k^2} + \frac{i\nu}{a\beta\omega} \right) + \frac{J_0(\beta a)}{i\omega} \right] = 0 \quad (3.92)$$

de esta forma, para una amplitud de onda diferente de cero, obtenemos un sistema de ecuaciones para p_0 y \mathcal{A} igualadas a cero, por lo que se pueden expresar de forma matricial, como sigue:

$$\begin{pmatrix} \frac{E^* k^2}{\omega^2\rho} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) - 1 & \frac{kE^*}{\omega} \left[\frac{J_1(\beta a)}{\beta a} - \nu J_0(\beta a) \right] \\ \frac{k}{2i\omega^2\rho} (2 - \nu) & J_1(\beta a) \left(\frac{\mu\beta}{aE^*k^2} + \frac{i\nu}{a\beta\omega} \right) + \frac{J_0(\beta a)}{i\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} = 0$$

por lo que el determinante de la matriz debe de ser cero, esto es:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{E^* k^2}{\omega^2\rho} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) - 1 \right] \left[J_1(\beta a) \left(\frac{\mu\beta}{aE^*k^2} + \frac{i\nu}{a\beta\omega} \right) + \frac{J_0(\beta a)}{i\omega} \right] \\ & - \frac{kE^*}{\omega} \left[\frac{J_1(\beta a)}{\beta a} - \nu J_0(\beta a) \right] \frac{k}{2i\omega^2\rho} (2 - \nu) = 0 \end{aligned} \quad (3.93)$$

Si definimos $\mathbb{X} \equiv \frac{E^* k^2}{\omega^2}$ y $\mathbb{S} \equiv \frac{J_0(\beta a)}{J_1(\beta a)}$ la expresión (3.93) se convertirá en:

$$(\mathbb{X}(1 - 2\nu) - 2\rho) \left(\frac{i\mu\beta}{\omega a} + \mathbb{X} \left(\frac{\nu}{\beta a} - \mathbb{S} \right) \right) + \mathbb{X}^2(2 - \nu) \left(\frac{1}{\beta a} - \nu\mathbb{S} \right) = 0 \quad (3.94)$$

y por definición de β y de α

$$(\mathbb{X}(1 - 2\nu) - 2\rho) \left(\frac{\rho}{a} + \mathbb{X} \left(\frac{\nu}{\beta a} - \mathbb{S} \right) \right) + \mathbb{X}^2(2 - \nu) \left(\frac{1}{\beta a} - \nu\mathbb{S} \right) = 0 \quad (3.95)$$

de esta manera, obtenemos una ecuación cuadrática para \mathbb{X} que puede ser resuelta para obtener a \mathbb{X} en términos de \mathbb{S} , a , ν y β .

Así, se puede calcular la velocidad de onda $c = \omega/k$ al monitorear el tiempo de transito como el intervalo de tiempo entre los picos o centroides de la forma de onda, medida por ultrasonido, del diámetro arterial de dos sitios separados por una distancia conocida.

Con esta información E^* puede ser calculado y, con c conocido, se calcula el valor de \mathcal{A} en términos de p_0 :

$$\mathcal{A} = -\frac{\left(\frac{E^* k^2}{2\rho\omega^2} (1 - 2\nu) - 1 \right) p_0}{\frac{E^* k}{\omega} \left(\frac{J_1(\beta a)}{\beta a} - \nu J_0(\beta a) \right)} \quad (3.96)$$

CAPÍTULO 3. MODELO DEL SISTEMA CIRCULATORIO
3.5. PROPAGACIÓN DE ONDAS CON VISCOSIDAD DIFERENTE DE CERO

y sustituyendo ésta en la ecuación (3.79) obtenemos:

$$u_0(r) = \left(\frac{k}{\omega\rho} - \theta J_0(\beta r) \right) p_0 \quad (3.97)$$

con $\theta = \frac{(E^* \frac{k^2}{2\rho\omega^2} (1-2\nu)-1)}{\frac{E^*k}{\omega} \left(\frac{J_1(\beta a)}{\beta a} - \nu J_0(\beta a) \right)}$ que permite relacionar la amplitud de la velocidad promedio de lumen, \bar{u}_0 , correspondiente a la frecuencia de pulso ω

$$\bar{u}_0(r) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u_0(r) 2\pi r dr \quad (3.98)$$

con la amplitud de presión correspondiente, p_0 , en términos de cantidades conocidas como ρ , monitoreables como a y calculables como S y β . De esta manera, podemos construir la forma de onda para la presión arterial siguiendo los siguientes pasos:

- Monitorear la forma de onda de velocidad de flujo promedio del lumen por medio de un flujómetro Doppler

$$\bar{u}(x_0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{u}_n e^{in\omega t} \quad (3.99)$$

- Determinar las u_n , llamadas las componentes espectrales, con

$$\bar{u}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}(t) e^{-in\omega t} dt \quad (3.100)$$

- Determinar la p_n asociada a cada componente armónica \bar{u}_n con frecuencia $\omega_n = n\omega$ con la ecuación (3.97) y la (3.98)

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\pi a^2 \bar{u}_n}{\int_0^a \left(\frac{k}{\omega_n \rho} - \theta J_0(\beta r) \right) 2\pi r dr} \\ &= \frac{a \bar{u}_n}{\left(\frac{ak}{\omega_n \rho} - \frac{2\theta}{\beta} J_1(\beta a) \right)} \end{aligned} \quad (3.101)$$

- Con esto último, calcular la forma de onda de presión a cierto $x = x_0$:

$$p(x_0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{-in\omega t} \quad (3.102)$$

- Por último, se calibra $p(x_0, t)$ haciendo el valor máximo del ciclo igual a presión sistólica arterial dada por un esfigmomanómetro; lo cual, equivale a desplazar la forma de onda de presión $p(x_0, t)$ en su valor medio.

Con todo lo anterior, podemos ahora calcular la salida cardiaca (CO), en términos de p_0 , k y ω , por medio de la razón de flujo aórtico

$$CO = \int_0^T Q dt \quad (3.103)$$

tomando en cuenta las ecuaciones (3.99), (3.60), (3.97) y (3.68) y con $Q(t) = \pi a^2 \bar{u}(x_0, t)$.

Con todos estos modelos, somos ahora capaces de describir al sistema arteria-flujo sanguíneo con mayor precisión, puesto que hemos tomado en cuenta sus características físicas más significativas.

Capítulo 4

Estenosis

Hasta ahora los modelos que hemos analizado han tomado en cuenta, como conducto por el que transita el fluido, un tubo cilíndrico y elástico pero liso. Sabemos, sin embargo, que las arterias aún sanas, no son así, pues pueden presentar estrechamientos debidos, por ejemplo, a la acumulación de placa intravascular. Es más, como se dijo en el capítulo 1, la mayor parte de las enfermedades relacionadas con el sistema circulatorio vienen acompañadas de una modificación del lumen, y por lo tanto del flujo posterior a la estenosis, causando numerosos problemas de salud. Es por esto que en esta sección se analizará el flujo de un fluido no compresible y con viscosidad constante dentro de un conducto cilíndrico rígido con estenosis leve.

Así, gracias a este modelo seremos capaces de determinar el grado de estenosis en un punto determinado del sistema circulatorio por medio de la medición de algunos parámetros como el cambio de presión, de velocidad o la CO.

4.1. Las ecuaciones básicas

Comenzamos, entonces, teniendo en cuenta la presión media, $p_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$ y el flujo medio $q_0 = \frac{1}{T} \int_0^T q dt$, promediados sobre el periodo del ciclo cardiaco, de un fluido dentro de un tubo cilíndrico rígido de radio a , cuya relación está dada, por la ecuación (3.6), como sigue

$$q_0 = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{dp_0}{dx} \quad (4.1)$$

además, el perfil de velocidad asociado está dado por la ecuación (2.11) con $\frac{dp_0}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{L}$

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4L\mu} (a^2 - r^2) \quad (4.2)$$

Sin embargo, este perfil (junto con otras características del flujo como la presión) se verá modificado para el caso que trataremos en esta sección. En la figura 4.1 se representa este caso: un vaso sanguíneo relativamente recto de radio R_0 con un segmento convergente-divergente, donde v y u serán las velocidades en dirección r y z , respectivamente¹.

Para trabajar las ecuaciones que rigen este problema, es decir las de Navier-Stokes y la de continuidad ocuparemos las siguientes variables reducidas:

¹Ver Schultz and D.H. [15].

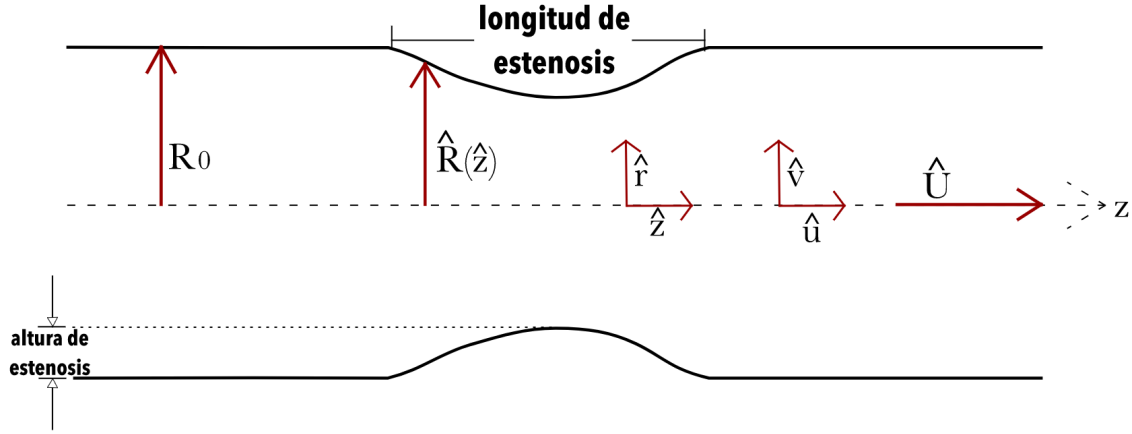


Figura 4.1: Representación de un vaso sanguíneo recto con estenosis leve.

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\hat{r}}{R_0} & z &= \frac{\hat{z}}{R_0} & R &= \frac{\hat{R}}{R_0} \\
 u &= \frac{\hat{u}}{\bar{U}_0} & v &= \frac{\hat{v}}{\bar{U}_0} & p &= \frac{\hat{p}}{\rho \bar{U}_0^2} \\
 & & U &= \frac{\hat{U}}{\bar{U}_0} & &
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

con U la velocidad en el eje del tubo, \bar{U}_0 la velocidad promedio sobre el lumen en la región sin estenosis, p la presión y ρ la densidad del fluido. De esta forma, las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos, para el caso cilíndrico con simetría axial, se convertirán en:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \tag{4.4}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \tag{4.5}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{4.6}$$

(ver Schultz and D.H. [15]) con Re el número de Reynolds y μ la viscosidad del fluido. Las ecuaciones anteriores no son lineales y las soluciones exactas, en general, no se obtienen fácilmente. Así, para obtener soluciones aproximadas, habrá que hacer algunas suposiciones.

Comenzamos multiplicando la ecuación (4.6) por ru :

$$\begin{aligned}
 ru^2 \frac{\partial u}{\partial z} + ruv \frac{\partial u}{\partial r} + ru \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{2}{\text{Re}} \left(ru \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u \frac{\partial u}{\partial r} + ru \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 \Rightarrow \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (ru^3) &= -ruv \frac{\partial u}{\partial r} - ru \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{\text{Re}} \left(ru \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u \frac{\partial u}{\partial r} + ru \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

para después integrarla de 0 a R :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u^3 dr &= - \int_0^R r u v \frac{\partial u}{\partial r} dr - \int_0^R r u \frac{\partial p}{\partial z} dr \\ &+ \frac{2}{\text{Re}} \left(\int_0^R r u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} dr + \int_0^R u \frac{\partial u}{\partial r} dr + \int_0^R r u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dr \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

De ésta última expresión, vemos que, por la condición de no deslizamiento de la pared, el primer término del lado derecho es $\int_0^R r u v \frac{\partial u}{\partial r} dr = \int_0^R r u v du = 0$.

Además, si llamamos I al término $\int_0^R u \frac{\partial u}{\partial r} dr + \int_0^R r u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} dr$ y puesto que

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad y \quad u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} \quad (4.9)$$

tendremos que:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} dr + \int_0^R r \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \left(r \frac{\partial^2 u^2}{\partial r^2} + \frac{\partial u^2}{\partial r} \right) dr - \int_0^R r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \end{aligned} \quad (4.10)$$

pero $r \frac{\partial^2 u^2}{\partial r^2} + \frac{\partial u^2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^2}{\partial r} \right)$, por lo que I se convertirá en:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^2}{\partial r} \right) dr - \int_0^R r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \\ &= \int_0^R r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \end{aligned} \quad (4.11)$$

y la ecuación (4.8) en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u^3 dr &= - \int_0^R r u \frac{\partial p}{\partial z} dr \\ &+ \frac{2}{\text{Re}} \left(\int_0^R r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr + \int_0^R r u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dr \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Análogamente, multiplicamos la misma ecuación (4.6) por r , obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u^2 dr = - \int_0^R r \frac{\partial p}{\partial z} dr + \frac{2}{\text{Re}} \left(R \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_R + \int_0^R r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dr \right) \quad (4.13)$$

De estas últimas expresiones, (4.12) y (4.13), los términos que contienen $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ son despreciables y las últimas dos ecuaciones quedan como sigue:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u^3 dr = - \int_0^R r u \frac{\partial p}{\partial z} dr + \frac{2}{\text{Re}} \int_0^R r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u^2 dr = - \int_0^R r \frac{\partial p}{\partial z} dr + \frac{2}{\text{Re}} R \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_R \quad (4.15)$$

Además el término $\int_0^R r \frac{\partial p}{\partial z} dr$ puede ser aproximado² a

$$\int_0^R r \frac{\partial p}{\partial z} dr \approx R^2 \int_0^R ru \frac{\partial p}{\partial z} dr \quad (4.16)$$

asumiendo que, en este caso, el perfil de velocidades es casi plano y que el gradiente de presión es aproximadamente constante. Por lo que los primeros términos del lado derecho de las ecuaciones anteriores son aproximadamente iguales.

De esta manera, al restar la ecuación (4.15) de la (4.14) obtendremos la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}R^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R ru^3 dr - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R ru^2 dr = -\frac{2}{\text{Re}} \left(R^2 \int_0^R r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \right. \\ \left. + R \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_R \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2. El perfil de velocidades

Para resolver esta ecuación debemos conocer el perfil de velocidad axial como una función de r , es decir, $u = u(r)$. Para lo cual, impondremos las hipótesis siguientes que se deben satisfacer:

- I) Para Re grande el perfil debe producir una región delgada de alta velocidad de corte cerca de la pared en la sección convergente con un perfil plano al centro del tubo
- II) El perfil puede asumir las características de un haz central con baja velocidad de corte con reflujo cerca de la pared en la sección divergente
- III) La condición de no deslizamiento, es decir

$$u = 0 \quad \text{en} \quad r = R$$

- IV) En el eje del tubo la velocidad es U :

$$u = U \quad \text{en} \quad r = 0$$

- v) La condición de suavidad, asociada al salto de tensión cero, en el origen:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = 0$$

- VI) Al eliminar el término de presión de las ecuaciones (4.5) y (4.6) y considerando la ecuación resultante en el límite cuando $r \rightarrow 0$, tendremos que:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = 0 \quad \text{en} \quad r = 0$$

- VII) El flujo neto a través de una sección transversal es una constante, por lo que podemos hacer que:

$$\int_0^R ru dr = \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

²Para más información de cómo se hace está aproximación ver Morgan and Young [11].

Así, para que se satisfagan estas condiciones, la ecuación que describa el perfil de velocidades del fluido dentro del tubo está dada por dos partes:

a)

$$u = U \left[A + B \left(\frac{r}{R} \right) + C \left(\frac{r}{R} \right)^2 + D \left(\frac{r}{R} \right)^3 + E \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (4.19)$$

cuyos coeficientes se obtienen de aplicar las condiciones de la III a la VII de la siguiente manera:

Por III:

$$\begin{aligned} u(r = R) &= U(A + B + C + D + E) = 0 \\ &\Rightarrow A + B + C + D + E = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por IV:

$$\begin{aligned} u(r = 0) &= U(A) = U \\ &\Rightarrow A = 1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por V:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} &= U \left(\frac{B}{R} + 2C \frac{r}{R^2} + 3D \frac{r^2}{R^3} + 4E \frac{r^3}{R^4} \right) \Big|_{r=0} = 0 \\ &\Rightarrow U \frac{B}{R} = 0 \quad \Rightarrow B = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por VI:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right|_{r=0} &= U \left(\frac{6D}{R^3} + \frac{24E}{R^4} r \right) \Big|_{r=0} = 0 \\ &\Rightarrow U \frac{6D}{R^3} = 0 \quad \Rightarrow D = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones (4.21), (4.22) y (4.23) en la (4.20) obtenemos que

$$C + E = -1 \quad (4.24)$$

y la ecuación (4.19) se ve reducida a:

$$u = U \left[1 + C \left(\frac{r}{R} \right)^2 + E \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (4.25)$$

Por último, de VII y utilizando la forma para u dada en la ecuación (4.25):

$$\begin{aligned} \int_0^R rU \left[1 + C \left(\frac{r}{R} \right)^2 + E \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] dr &= U \left(\frac{R^2}{2} + C \frac{R^2}{4} + E \frac{R^2}{6} \right) \\ &= \frac{UR^2}{2} \left(1 + \frac{C}{2} + \frac{E}{3} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{C}{2} + \frac{E}{3} = \frac{1}{U^2 R} - 1 \quad (4.26)$$

De esta manera, con las ecuaciones (4.24) y (4.26) obtenemos un sistema de ecuaciones para E y C , que resulta en que $C = \frac{2}{UR^2}(3 - 2UR^2)$ y $E = \frac{3}{UR^2}(UR^2 - 2)$. Con lo que la ecuación (4.25) queda como:

$$\begin{aligned} u &= U \left[1 + \frac{2}{UR^2}(3 - 2UR^2) \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{3}{UR^2}(UR^2 - 2) \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right] \\ &= \frac{1}{R^2} \left[R^2U + 2(3 - 2UR^2) \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 3(UR^2 - 2) \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

para $R^2U \geq 1.5$.

La segunda parte del perfil de velocidades está dada por

b)

$$u = \begin{cases} U & \text{para } 0 \leq \frac{r}{R} \leq \lambda \\ a + b \left(\frac{r}{R}\right)^2 + c \left(\frac{r}{R}\right)^4 & \text{para } \lambda \leq \frac{r}{R} \leq 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

Con λ un parámetro a determinar.

Esta última expresión cumple con la condición de no deslizamiento, $u(r = R) = 0$, además de que en $\frac{r}{R} = \lambda$, $u = U$ y $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$. Con estas condiciones se encuentran los coeficientes a , b y c , de tal forma que

$$\begin{aligned} a &= \frac{U}{(1 - \lambda^2)^2} (1 - 2\lambda^2) \\ b &= \frac{2U}{(1 - \lambda^2)^2} \lambda^2 \\ c &= -\frac{U}{(1 - \lambda^2)^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

y al sustituirlas en la ecuación (4.28) tendremos:

$$u = \begin{cases} U & \text{para } 0 \leq \frac{r}{R} \leq \lambda \\ \frac{U}{(1 - \lambda^2)^2} \left[1 - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right] & \text{para } \lambda \leq \frac{r}{R} \leq 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

para $R^2U \leq 1.5$

Para determinar el parámetro λ hacemos uso de la ecuación (4.27) y, por continuidad, hacemos $\frac{r}{R} = \lambda$. Resolvemos para λ y obtenemos³:

$$\lambda^2 = \frac{2(3 - 2R^2U)}{3(2 - R^2U)} \quad (4.31)$$

Si sustituimos este valor de λ en la ecuación (4.30) y multiplicamos a ésta y a (4.27) por R^2 , tendremos una expresión para uR^2 que podremos graficar, en función de $\frac{r}{R}$, para distintos valores de UR^2 , como se muestra en la figura 4.2.

$$uR^2 = R^2U + 2(3 - 2UR^2) \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3(2 - UR^2) \left(\frac{r}{R}\right)^4 \quad (4.32)$$

$$uR^2 = \begin{cases} UR^2 & ; 0 \leq \frac{r}{R} \leq \lambda \\ \frac{UR^2}{\left(1 - \frac{2(3 - 2R^2U)}{3(2 - R^2U)}\right)^2} \left[1 - \frac{4(3 - 2R^2U)}{3(2 - R^2U)} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right] & ; \lambda \leq \frac{r}{R} \leq 1 \end{cases} \quad (4.33)$$

³en Mazumdar [10] se utiliza una aproximación de λ , tal que $\lambda^2 = \frac{3}{R^2U} - 2$.

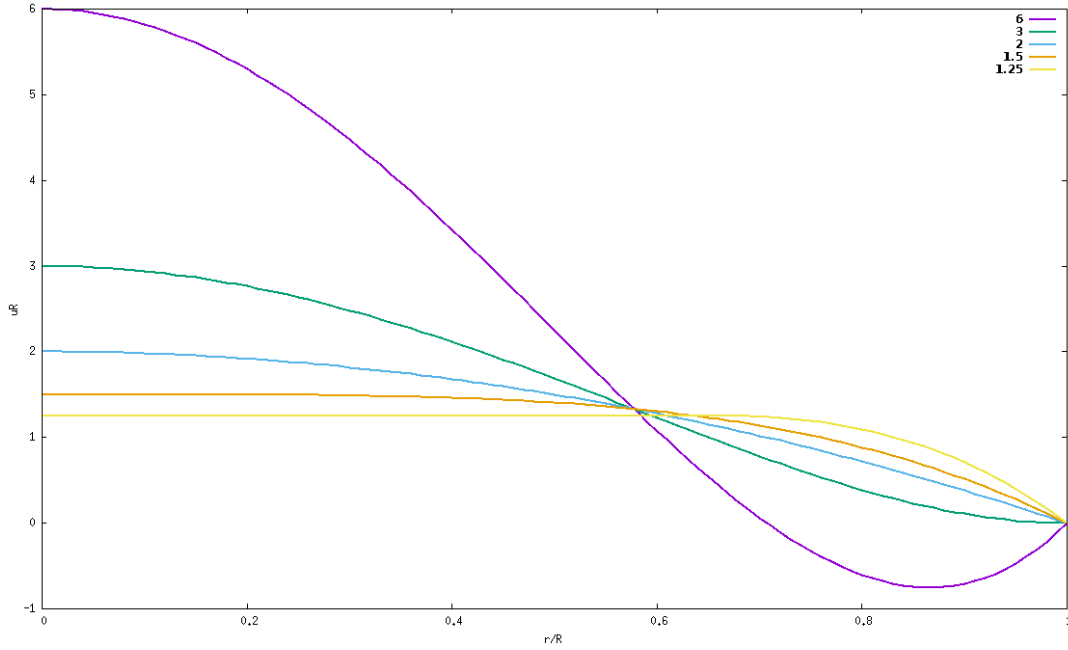


Figura 4.2: uR^2 vs. $\frac{r}{R}$ para distintos valores de UR^2 .

La primera para $R^2U \geq 1.5$ y la segunda si $R^2U < 1.5$

Por otro lado, las expresiones completas para u , su segunda y tercera potencia, y sus derivadas parciales respecto a r , las podemos sustituir en la ecuación (4.17) y, al resolver las integrales y derivar los términos del lado izquierdo, obtendremos una expresión en términos de $\frac{dU}{dz}$ y $\frac{dR}{dz}$. Despejamos $\frac{dU}{dz}$ y obtenemos

$$\frac{dU}{dz} = \frac{\left[-\frac{1}{R^3} \frac{dR}{dz} (0.028(R^2U)^3 - 0.133(R^2U)^2 + 0.257R^2U - 0.34) + \frac{4U\Gamma}{\text{Re}}\right]}{[0.0429(R^2U)^2 - 0.004R^2U - 0.029]} \quad (4.34)$$

con

$$\Gamma = \begin{cases} 2 - R^2U & \text{para } R^2U \geq 1.5 \\ \frac{3R^2U - 1}{9(R^2U - 1)} & \text{para } R^2U < 1.5 \end{cases} \quad (4.35)$$

Sustituyendo R por una geometría de estenosis como la dada en la siguiente ecuación⁴ y representada en la figura 4.3,

$$R(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\delta}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{Z_0}\right) & \text{para } |z| \leq Z_0 \\ 1 & \text{para } |z| > Z_0 \end{cases} \quad (4.36)$$

con δ la altura de estenosis sobre R_0 y Z_0 la longitud de estenosis sobre $2R_0$; podemos resolver la ecuación (4.34) numéricamente para la velocidad centilínea U utilizando el método Runge-Kutta⁵ con lo que se obtuvo la figura 4.4. En ella, se puede apreciar como varía la velocidad de flujo en el centro del tubo para distintos valores de Re .

Cuando el número de Reynolds es pequeño, $\text{Re} = 4, 16$, es decir, cuando los efectos viscosos dominan sobre los inerciales, la sangre inicia con $U = 3.2$. Al entrar a la región de estenosis, en $z = -0.5$ la velocidad comienza a crecer hasta llegar a un máximo poco después de $z = 0$, es decir,

⁴Esta expresión para R se propone por primera vez en Morgan and Young [11].

⁵El código fuente en Fortran empleado está en el apéndice B.

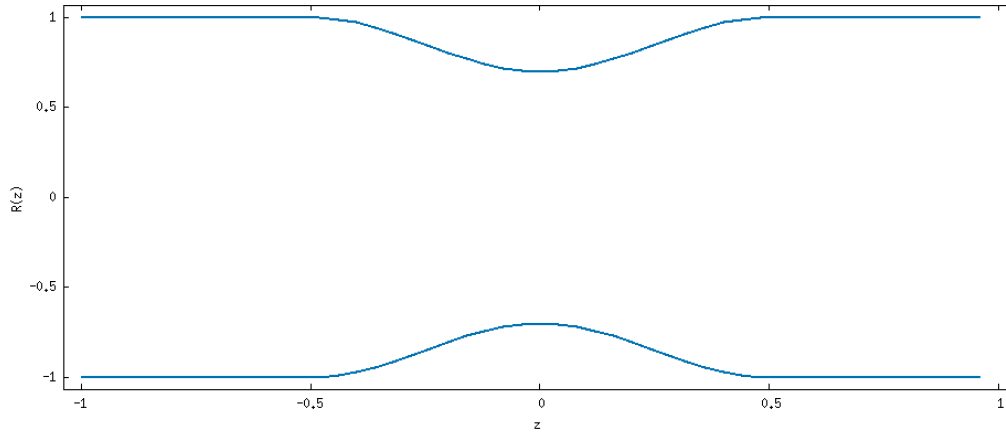


Figura 4.3: Geometría de estenosis para un $\delta = 0.3$ y un $Z_0 = 0.5$ y $R_0 = 1$.

cuando el estrechamiento del conducto es máximo; a continuación la velocidad disminuye hasta salir de la región de estenosis, en $z = 0.5$, en donde la velocidad se estabiliza cerca de $U = 3.2$.

Por otro lado, para números de Reynolds más grandes $\text{Re} = 185$, es decir cuando la viscosidad es pequeña en comparación con la velocidad del flujo, U comienza constante y al entrar a la zona de estenosis, disminuye pues genera zonas de turbulencia que no favorecen el flujo y lo entorpecen, alcanzando un mínimo en $z = 0$ y al pasar por esa región de máximo estrechamiento la velocidad aumenta nuevamente hasta el final de la zona de estenosis en $z = 0.5$. Hay que notar que este modelo sigue siendo uno muy simplificado.

Estos resultados resultan congruentes pues, por un lado, después de una estenosis se espera que haya un cambio de presión, y por lo tanto, podemos esperar un cambio en la velocidad de flujo (en este caso de $U = 3.2$ antes de la estenosis a $U \in (3.2, 3.4)$ después de ésta) y por otro, se espera que, para un flujo laminar (Re pequeño) la velocidad crezca conforme el conducto se haga más estrecho, y disminuya conforme aumente el radio del tubo. Además, como se dijo en la sección 2.4, a una distancia suficientemente grande de cualquier disturbio en el sistema se logra, nuevamente, un flujo completamente desarrollado.

4.3. Caída de presión debida a una estenosis

De esta forma al obtener una expresión para U , podemos calcular la caída de presión adimensional, Δp , como función de δ , Z_0 y R_0 . Para ello, usamos el promedio del cambio de presión dado por:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{prom.} &= \frac{\int_0^R r \frac{\partial p}{\partial z} dr}{\int_0^R r dr} \\ &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \frac{\partial p}{\partial z} dr \end{aligned} \quad (4.37)$$

Pero, por la ecuación (4.13):

$$\int_0^R r \frac{\partial p}{\partial r} dr = \frac{2}{\text{Re}} \left(R \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_R + \int_0^R r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dr \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^R r u^2 dr \quad (4.38)$$

CAPÍTULO 4. ESTENOSIS
4.3. CAÍDA DE PRESIÓN DEBIDA A UNA ESTENOSIS

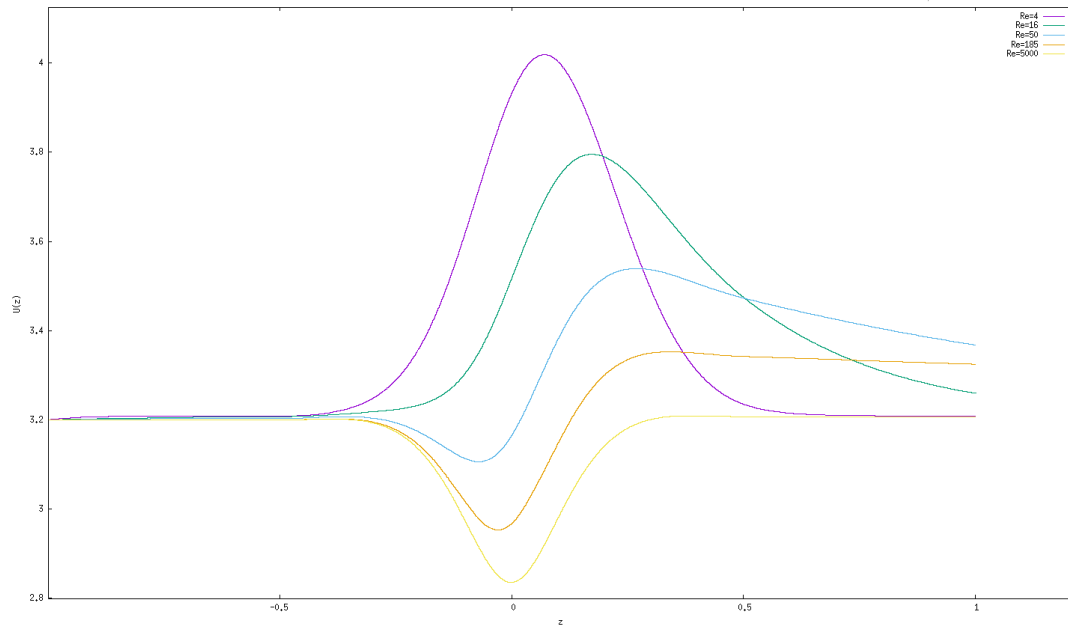


Figura 4.4: Gráfica del perfil de velocidad $U(z)$ con $\delta = 0.3$, $Z_0 = 0.5$ y $U_0 = 3.2$ para distintos valores de Re .

donde u estará dada, por las expresiones (4.27) y (4.30), en términos de U ; misma que se calculará a partir de resolver la ecuación (4.34).

De este modo, sustituimos en (4.37) y obtendremos una expresión para $\frac{\partial p}{\partial z}$ que sustituiremos en

$$\Delta p = \int_{-Z_0}^{Z_0} \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (4.39)$$

obteniendo, así, la caída de presión adimensional, en función de z , para una arteria con estenosis leve para valores conocidos de Z_0 , δ y R_0 .

Discusión de resultados y conclusiones

El sistema circulatorio humano, es un sistema extremadamente complejo. Como todo sistema vivo es un sistema abierto, es decir que está en constante interacción con sus alrededores, y esta relación influye de manera significativa en su funcionamiento. Por ello, el intentar crear un modelo que lo reproduzca fielmente resulta muy complicado.

Sin embargo, sí que pueden hacerse modelos suficientemente aproximados para que resulten útiles. Los modelos teóricos aquí presentados pueden ser tratados de forma analítica solo en casos particulares que, en general, no contienen todas las características físicas del sistema circulatorio, ya que como se ha mencionado de forma reiterada, por ejemplo, la sangre es un fluido viscoso y no es un fluido newtoniano.

Por el momento podemos decir que los modelos aquí representados son casos particulares a los que seguramente un modelo más completo se debe reducir, por lo tanto son modelos útiles que pueden considerarse casos límites pero que tienen aplicaciones prácticas.

Nuestra hipótesis de partida fue que era posible usar el formalismo de la teoría de mecánica de medios continuos para estudiar el gasto de un fluido como la sangre. Y en este trabajos hemos hecho un acercamiento hacia esa dirección, haciendo uso de esa herramienta para describir físicamente a una arteria y al flujo de sangre dentro de ella. Podemos concluir, entonces, que a partir de la ecuación de continuidad y de las ecuaciones de Navier-Stokes, podemos calcular el flujo de fluido en diferentes circunstancias; incluso en algunas muy complejas como en el sistema circulatorio humano.

Apéndice A

Metodo de Euler implementado en FORTRAN

Para resolver ecuaciones diferenciales de forma numérica podemos hacer uso de varios métodos matemáticos. El método de Euler (transcrito a continuación) es el más sencillo en su planteamiento y su programación .

```
1 !programa para resolver las ecuaciones diferenciales que describen
   a un oscilador armónico con Euler
2 program Ec_dif_Euler
3   implicit none
4   integer, parameter::p=110000 *!tamaño máximo de arreglo
5   real,dimension(P)::T,x,v !tiempo, posiciones(theta) y
   velocidades(omega)
6   real:: xin,vin,tfi !condiciones iniciales
7   integer::Nt,i!contadores, numero total de puntos y iteraciones
8   !el usuario da las condiciones iniciales x0,v0 y el tiempo
   final tf y Nt
9   print*, 'Dame las condiciones iniciales, el tiempo final y el
   numero de iteraciones'
10  print*, 'x0=,v0=,tf=,Nt='
11  read(5,*) xin,vin,tfi,Nt
12  !podemos checar que no se rebase la memoria disponible
13  if(Nt.gt.P)then
14      print*, 'Nt no puede ser más grande que',P
15      stop
16  endif
17  call euler(xin,vin,tfi,nt,t,x,v)!llamamos a la subrutina euler
18  open(unit=20,file='euler.dat')
19  do i=1,Nt
20      write(20,*) T(i),x(i),v(i)
21  end do
```

APÉNDICE A. METODO DE EULER IMPLEMENTADO EN FORTRAN

```
22     close(20)
23 end program Ec_dif_Euler
24 !definimos la función a resolver
25 real function accel(x)
26 implicit none
27 real x
28 accel=-10.0*sin(x) !la aceleración es la de la gravedad por el seno
    del angulo x
29 end function accel
30 !subrutina euler
31 subroutine euler(xin,vin,tfi,nt,t,x,v)
32     implicit none
33     integer::Nt
34     real, dimension(Nt):: T,x,v
35     real:: xin,vin,tfi
36     integer:: i
37     real:: h,accel !h=dt
38     !condiciones iniciales
39     t(1)=0.0
40     x(1)=xin
41     v(1)=vin
42     !h es la discretizacion del tiempo
43     h=Tfi/(Nt-1)
44     do i=2,Nt
45         t(i)=t(i-1)+h
46         x(i)=x(i-1)+v(i-1)*h
47         v(i)=v(i-1)+accel(x(i-1))*h
48     end do
49 end subroutine euler
```

Sin embargo, esta sencillez es a costa de un error significativo en sus cálculos. Aún utilizando mejoras a este método, como lo son los métodos de Euler-Cromer y Euler-Verlet, el error sigue siendo significativo.

Apéndice B

Método Runge-Kutta implementado en FORTRAN

El método Runge-Kutta de orden 4, arroja resultados más acertados en comparación con el método de Euler por lo que puede ser una buena herramienta para resolver las ecuaciones diferenciales que se plantean en este trabajo. A continuación transcribimos este método en el lenguaje de programación Fortran.¹

```
1 !programa para resolver la ecuación diferencial para U con Runge-
   Kutta 4 con delta=0.3, numero de Reynolds Re=4 y Z0=0.5
2 program rk4_U !main program
3   integer, parameter :: P=10000000
4   real, dimension(P):: z,U !real,dimension declara vectores
   reales de dimensión(p)
5   real:: zi,zf,U0
6   integer:: Nt,i
7   !entrada
8   !método RK4 para la integración de U
9   print*, 'Meter numero total de iteraciones, z inicial, z final,
   U inicial'
10  print*, 'Nt=, zi=, zf=, U0='
11  read*, nt,zi,zf,U0
12  if(Nt.gt.P)then
13     print*, 'Nt muy grande'
14     stop
15  end if
16  !el cálculo
17  call RK(z,U,zi,zf,U0,Nt)
18  !salida
19  open(unit=11,file='rk4U4.dat')
```

¹Más detalles sobre el método y su programación en Fortran se pueden encontrar en Anagnostopoulos [1] y en Nakamura [12].

APÉNDICE B. MÉTODO RUNGE-KUTTA IMPLEMENTADO EN FORTRAN

```

20     do i=1,Nt
21         write(11,*)z(i),U(i)
22     end do
23     close(11)
24 end program rk4_U
25 !metemos la función que vamos a necesitar
26 real function f(z,U)
27     implicit none
28     real:: z,U
29     real:: R,R2,R3,G,dR
30     real, parameter:: pi=3.141592
31     if(abs(z).le.0.5)then
32         R=1.0-(0.3/2.0)*(1.0+cos(pi*z/0.5)) !R(z) dado
33         dR=sin(pi*z/0.5)*(0.3*pi)/(2.0*0.5) !derivada de R
34     else
35         R=1.0
36         dR=0
37     end if
38     R2=R**2 !R^2
39     R3=R2*R !R^3
40     if(R2*U.ge.1.5)then !Gamma para distintos valores de R^2U
41         G=2.0-R2*U
42     else
43         G=(3.0*R2*U-1)/(9*R2*U-9)
44     end if
45     f=(-1/R3*dR*(0.028*(R2*U)**3-0.133*(R2*U)**2+0.257*R2*U-0.34)
46         +(4.0D0*U*G)/4.0D0)/(0.0429*(R2*U)**2-0.004*R2*U-0.029) !la
47         expresion para dU/dz
48 end function f
49 !La subrutina RK
50 subroutine RK(z,U,zi,zf,U0,Nt)
51     implicit none
52     integer:: nt
53     real, dimension(NT):: z,U!vectores de dimension maxima nt
54     real:: zi,zf,U0
55     real:: dz
56     real:: zs,Us
57     integer:: i
58     !iniciamos variables
59     dz=(zf-zi)/(nt-1)
60     z(1)=zi
61     U(1)=U0
62     zs=zi
63     Us=U0
64     !hacemos los pasos de RK, usando argumentos de RKSTEP*, e

```

APÉNDICE B. MÉTODO RUNGE-KUTTA IMPLEMENTADO EN FORTRAN

```

      iteramos
63   do i=2,Nt
64       call RKSTEP(zs,Us,dz)
65       z(i)=zs
66       U(i)=Us
67   end do
68 end subroutine RK
69 !metemos la subrutina con el algoritmo de solución
70 subroutine RKSTEP(z,U,dz)
71     implicit none
72     real:: z,U,dz
73     real:: f
74     real:: k1,k2,k3,k4
75     real:: h,h2,h6
76     h=dz
77     h2=0.5D0*h !h/2
78     h6=h/6.0D0
79     k1=f(z,U)
80     k2=f(z+h2,U+h2*k1)
81     k3=f(z+h2,U+h2*k2)
82     k4=f(z+h,U+h*k3)
83     z=z+h
84     U=U+h6*(k1+2.0d0*(k2+k3)+k4)
85 end subroutine
```


Bibliografía

- [1] K. N. Anagnostopoulos. *Computational Physics*. KONSTANTINOS N. ANAGNOSTOPOULOS, 2014.
- [2] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press Inc., 1985.
- [3] W. W. Bell. *Special Functions for Scientists and Engineers*. D. Van Nostrand Company LTD, 1968.
- [4] K. B. Chandran, A. P. Yoganathan, and S. E. Rittgers. *Biofluid mechanics: the human circulation*. Taylor & Francis Group, 2007.
- [5] A. Faller and M. Schünke. *The human body. An introduction to Structure and Function*. Thieme, 2004.
- [6] A. Fasano and A. Sequeira. *Hemomath. The Mathematics of Blood*. Springer, 2017.
- [7] Y. C. Fung. *Biodynamics Circulation*. Springer, 1984.
- [8] Y. C. Fung. *Biomechanics: motion, flow, stress and growth*. Springer, 1990.
- [9] M. Latarjet and L. A. Ruiz. *Anatomía Humana*, volume II. Editorial Medica Panamericana, 3a edition, 1999.
- [10] J. N. Mazumdar. *Biofluid Mechanics*. World Scientific, 1992.
- [11] B. E. Morgan and D. F. Young. An integral method for the analysis of flow in arterial stenoses. *Bulletin of mathematical biology*, 36:39–53, 1974.
- [12] S. Nakamura. *Métodos numéricos aplicados con software*. Pearson Educación, 1992.
- [13] M. J. Orland and R. J. Saltman. *Manual de Terapéutica Médica*. Salvat, 1987.
- [14] E. J. Rusak, C. A. Bellido, O. R. Iavicoli, S. T. Vázquez, M. Duarte, and J. Lerman. La velocidad de la onda del pulso como método para evaluar la función endotelial. *Revista argentina de cardiología*, 78(1):17–22, February 2010. ISSN 1850-3748. URL http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1850-37482010000100006&lng=es&nrm=iso&tlng=es.
- [15] R.N. Schultz and Pralhad D.H. Modeling of arterial stenosis and its applications to blood diseases. *Mathematical Biosciences*, 190:203–220, 2004. URL <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.533.5535&rep=rep1&type=pdf>.

BIBLIOGRAFÍA
BIBLIOGRAFÍA

- [16] A. Tijsseling and A. Anderson. A. isebree moens and d. j. korteweg: On the speed of propagation of waves in elastic tubes. In *BHR Group - 11th International Conferences on Pressure Surges*, 2012.
- [17] H. D. Young and R. A. Freedman. *Física Universitaria*, volume I. Pearson Educación, 2009.
- [18] Y. A. Çengel and J. M. Cimbala. *Mecánica de fluidos. Fundamentos y Aplicaciones*. 2006.