



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"ASPECTOS GRAVITATORIOS DE LA
CORRESPONDENCIA HOLOGRÁFICA"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA:

VIRIDIANA MATLALCUATZI ZAMORA

ASESOR(ES):

ALFREDO HERRERA AGUILAR

No. de CVU: 633197

JULIO DE 2020

Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”

Aspectos gravitatorios de la correspondencia holográfica

Tesis presentada por

Viridiana Matlalcuatzi Zamora

para obtener el grado de

**Doctorado en Ciencias
(Física)**

Dirigida por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla, México

Julio 2020

©2020 - Viridiana Matlalcuatzi Zamora

Derechos Reservados

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Alfredo Herrera Aguilar por su paciencia, dedicación y retroalimentación durante el desarrollo y presentación de este trabajo. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) le agradezco por el apoyo económico otorgado a lo largo del Doctorado. Igualmente estoy gratamente agradecida con todo el apoyo que me brindó el personal del IFUAP. Finalmente pero no menos importante, agradezco a cada uno de los docentes que contribuyeron en mi formación académica.

Dedicado a mi familia conformada por mis padres, hermanos, pareja y amigos.

Aspectos gravitatorios de la correspondencia holográfica

Resumen

En esta tesis nos centramos en estudiar sistemas gravitatorios que describen gravedad con constante cosmológica acoplada a distintos campos de materia, haciendo uso de diversos *ansätze* para la métrica que generaliza la geometría de Lifshitz con la finalidad de hallar soluciones exactas, en especial de agujero negro. Particularmente, nos enfocamos en construir una nueva familia de espaciotiempos de Lifshitz espacialmente anisótropos con exponente dinámico arbitrario z y curvatura negativa constante en $d+1$ dimensiones dentro del marco de la teoría de Einstein-Proca con un solo campo vectorial. Cabe mencionar que hasta ahora, este tipo de espacios anisótropos se ha construido con la ayuda de un conjunto de campos vectoriales. Dentro de nuestro objetivo, también obtuvimos el espaciotiempo de Lifshitz espacialmente isótropo como un caso particular. Adicionalmente, obtuvimos un nuevo espectro con masa cuadrada negativa para el espacio tiempo de Lifshitz anisótropo, de ahí que, calculamos la cota de Breitenlohner-Freedman correspondiente y observamos que la familia de espaciotiempos de Lifshitz espacialmente anisótropos encontrada respeta esta cota. Por lo tanto, estas nuevas soluciones son estables y pueden ser útiles dentro de la dualidad holográfica de la teoría de la gravedad/materia condensada, ya que el espectro con masa cuadrada negativa es complementario a los positivos ya conocidos en la literatura. Asimismo, examinamos la condición de energía nula y mostramos que se satisface esencialmente a lo largo de todas las direcciones de la frontera, es decir, a lo largo de todas las direcciones, excepto la coordenada holográfica r , de nuestro espaciotiempo de Lifshitz.

Por otro lado, introducimos la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón con un potencial escalar arbitrario en $d+1$ dimensiones. Posteriormente derivamos las ecuaciones de campo y obtenemos un conjunto de nuevas soluciones tipo agujero negro de Lifshitz. Además, calculamos varios invariantes geométricos, como el escalar de Ricci, el tensor de Ricci contraído y el invariante de Kretschmann, ya que estamos interesados en obtener soluciones de agujeros negros de Lifshitz y estas configuraciones desarrollan singularidades de curvatura genéricas que deben estar cubiertas por un horizonte de eventos regular. Aquí, también revisamos algunos aspectos relevantes de la termodinámica de los agujeros negros y calculamos algunas cantidades termodinámicas para las configuraciones de agujeros negros. Igualmente, dentro de este trabajo calculamos las fuerzas de marea de nuestra configuración de agujero negro.

Gravitational aspects of holographic correspondence

Abstract

In this work, we focus on studying gravitational systems that describe gravity with cosmological constant, coupled to different fields of matter, using various *ansätze* for the metric that generalize Lifshitz geometry to find exact solutions, principally black hole configurations. Specially, we focus on constructing a new family of spatially anisotropic Lifshitz spacetimes with arbitrary dynamical exponent z and constant negative curvature in $d + 1$ dimensions within the framework of the Einstein–Proca theory with a *single* vector field. It is worth mentioning that, so far, this kind of anisotropic space has been constructed with the aid of a set of vector fields. We also consider the spatially isotropic case as a particular limit. We also obtain a novel spectrum with negative squared mass; we compute the corresponding Breitenlohner–Freedman (B-F) bound and observe that the found family of spatially anisotropic Lifshitz spaces respects this bound. Hence, these new solutions are stable and can be useful within the gravity/condensed matter theory holographic duality, since the spectrum with negative squared mass is complementary to the positive ones already known in the literature. We also examine the null energy condition and show that it is essentially satisfied along all the boundary directions, i.e., along all directions, except the holographic coordinate (r), of our Lifshitz spacetime.

On the other hand, we introduce the Einstein–Maxwell–dilaton theory with an arbitrary scalar potential in $d+1$ dimensions, we derive the corresponding field equations and obtain a set of new Lifshitz black hole solutions. Additionally, we calculate various geometric invariants such as the curvature scalar, the contracted Ricci tensor, and the Kretschmann invariant since we are interested in obtaining asymptotically Lifshitz black hole solutions and these gravity configurations develop generic curvature singularities that must be dressed by a regular event horizon. Here, we also review some relevant aspects of the thermodynamics of black holes and compute some thermodynamic quantities for our black hole solutions. Also, we compute within this work the tidal forces in the vicinity of our black hole configuration.

Publicaciones

- R. Cartas-Fuentevilla, A. Herrera-Aguilar, V. Matlalcuatzi-Zamora, *et al.*, *Anisotropic Lifshitz holography in Einstein-Proca theory with stable negative mass spectrum*, *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 155, 2020.

Participación en eventos

- *AdS/Diffusion correspondence*, V. Matlalcuatzi-Zamora, A. Herrera-Aguilar, *School on AdS/CMT Correspondence*, International Centre for Theoretical Physics, South American Institute for Fundamental Research (ICTP-SAIFR), São Paulo, Brasil (2017).
- *Lifshitz dentro de la teoría de Einstein-Proca*, V. Matlalcuatzi-Zamora, A. Herrera-Aguilar, *VI Taller de Gravitación y Cosmología*, Instituto de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Autónoma de México (ICF-UNAM), Cuernavaca, México (2018).
- *Espaciotiempos anisótropos de Lifshitz en Einstein-Proca*, V. Matlalcuatzi-Zamora, A. Herrera-Aguilar, *XIII Taller de la División de Gravitación y Física Matemática (DGFM) de la Sociedad Mexicana de Física (SMF)*, Universidad de Guanajuato, Sede Fórum, León, Gto., México (2019).

Contenido

1	Introducción	1
1.1	La correspondencia AdS/CFT	3
1.1.1	Éxitos de la correspondencia AdS/CFT	4
1.2	Más allá de la correspondencia AdS/CFT	6
1.2.1	Teorías cuánticas críticas	7
1.2.2	Superconductores de alta temperatura	10
2	Espaciotiempos invariantes relativistas y no relativistas	14
2.1	Grupo de simetría relativista	14
2.2	Espaciotiempo AdS	15
2.3	Grupos de simetría no relativista	15
2.3.1	Grupo de Lifshitz	16
2.3.2	Grupo de Schrödinger	16
2.4	Espaciotiempo de Lifshitz	18
2.5	Espaciotiempo de Schrödinger	19
3	Espaciotiempo de Lifshitz dentro del marco de la teoría Einstein-Proca	21
3.1	Acción de Einstein-Proca	22
3.2	Ecuaciones de campo de Einstein-Proca	22
3.2.1	Escalar de curvatura	24
3.2.2	Campo de Proca	29
3.3	Resultados	30
3.3.1	Espaciotiempo de Lifshitz espacialmente anisótropo	30
3.3.2	Fondo de Lifshitz espacialmente isótropo	31
3.3.3	Geometría de Lifshitz isótropa desde otra perspectiva	32
3.3.4	Espaciotiempo de Lifshitz en la teoría de Einstein-Proca con $A_i \neq 0$	34
4	Propiedades del fondo de Lifshitz anisótropo	38
4.1	Cota de Breitenlohner-Freedman	38
4.1.1	Resultados	39
4.2	La condición de energía nula	43

5	Agujeros negros de Lifshitz	45
5.1	Formulación Einstein-Maxwell-dilatón	45
5.1.1	Ecuaciones de Einstein-Maxwell-dilatón bajo el ansatz métrico (5.5)	48
5.1.2	Agujero negro de Lifshitz	49
5.2	Invariantes geométricos	50
5.3	Termodinámica de Agujeros Negros de Lifshitz	53
5.4	Fuerzas de marea	57
6	Conclusiones	60
A	Comprobación de las ecuaciones de campo (3.35)-(3.38)	64
B	Propiedades del fondo de Lifshitz espacialmente isótropo	66
B.1	La cota de B-F	66
B.2	La NEC	68
	Bibliografía	69

Capítulo 1

Introducción

Históricamente, a mediados del siglo pasado Sheldon Glashow, Steven Weinberg, Abdus Salam [1–3], entre otros, unificaron la Electrodinámica Cuántica y las interacciones débiles en una sola teoría, la teoría electrodébil. Posteriormente, a esta teoría se agregó una teoría de norma (*gauge*) de las interacciones fuertes llamada Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés), dando lugar a una de las teorías más exitosas ahora bien conocida como el Modelo Estándar (ME) de partículas elementales. El ME es una teoría cuántica relativista basada en el grupo de norma $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. Esta teoría de norma describe tres de las cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza (electromagnética, débil y fuerte), sin embargo uno de los problemas con estas teorías de norma surge cuando los sistemas descritos son altamente correlacionados y no se tiene un parámetro pequeño para realizar desarrollos perturbativos. Una herramienta que se ha desarrollado y ha dado solución a ciertos problemas de este tipo es la correspondencia norma/gravedad, ya que una característica de ésta es que al tener una teoría de norma altamente correlacionada, su dual es una teoría de gravedad débilmente acoplada (la curvatura del espaciotiempo es pequeña) en donde sí es posible realizar los cálculos [4].

La dualidad es igualmente conocida como correspondencia anti-de Sitter/teoría de campo conforme (AdS/CFT, por sus siglas en inglés), correspondencia norma/cuerdas, correspondencia bulto/frontera, correspondencia de Maldacena o correspondencia holográfica tiene como característica principal establecer una relación entre la física de una teoría de campo en d dimensiones la cual puede o no ser relativista y la física de la gravedad en $d + 1$ dimensiones [5]. Esta correspondencia holográfica es de fundamental importancia ya que proporciona nuevos vínculos entre la teoría de cuerdas, la teoría cuántica de campos y la

relatividad general, asimismo nos permite tener nuevas perspectivas sobre la estructura de las teorías mencionadas anteriormente. La dualidad incluso ha dado lugar a nuevos conceptos en matemáticas y física, proporcionando nuevas herramientas para resolver problemas en muchas áreas de la física teórica como lo son: la física de partículas elementales, física nuclear, física de materia condensada, la hidrodinámica entre otras ramas de la física. La correspondencia norma/gravedad realiza el principio holográfico. Este principio afirma que todo el contenido de información de una teoría de la gravedad cuántica en un volumen dado puede ser codificado en una teoría efectiva en la superficie de este volumen. La teoría que describe los grados de libertad en la frontera codifica toda la información sobre los grados de libertad en el bulto, su dinámica y viceversa, es por ello que aplicaciones de la holografía requieren un entendimiento detallado de la correspondencia entre campos en el bulto (es decir en la dimensión extra) y operadores de frontera, es decir un diccionario holográfico detallado. El principio holográfico es de naturaleza muy general y se espera que se realice en muchos ejemplos. En varios de estos casos, sin embargo, la forma precisa de la teoría en la frontera es desconocida, por lo que no se puede utilizar para describir la dinámica en el bulto [5–7].

Como se mencionó precedentemente, la dualidad es particularmente útil si se tienen procesos físicos que son difíciles de calcular en la formulación de una teoría, pero fáciles de obtener en otra. Asimismo, dentro del contexto de la dualidad holográfica se tiene un diccionario en donde un campo en el bulto corresponde a un operador en la teoría del campo dual. El diccionario holográfico esencialmente fue formulado por primera vez por Gubser-Klebanov-Polyakov y Witten [8, 9]. Además, en [10] se muestra una revisión exhaustiva y completamente general de la conexión entre los campos en el bulto y los operadores en la teoría del campo dual. Allí observamos que la relación importante es

Teoría de campo d -dimensional	\equiv	Teoría gravitacional $d + 1$ -dimensional	
Fuente h	\iff	Comportamiento del término principal del campo en el bulto $\phi_{(0)}$	*
Valor esperado $\langle O \rangle$	\iff	Comportamiento del segundo término del campo en el bulto $\phi_{(1)}$	**

Aquí, $\phi_{(0)}$ es el valor en la frontera (es decir, h) de ϕ (donde ϕ es un campo en el bulto); mientras $\phi_{(1)}$ es el valor esperado $\langle O \rangle$ de ϕ . Además, es importante mencionar

que dado que las relaciones (*) y (**) son completamente generales, entonces, como ejemplos concretos, las fuentes podrían ser el potencial químico o un campo eléctrico y los valores esperados serían la densidad de carga y corriente eléctrica respectivamente.

1.1 La correspondencia AdS/CFT

El prototipo más destacado y mejor comprendido hasta ahora de este principio holográfico es la llamada correspondencia anti-de Sitter/teoría de campo conforme (AdS/CFT), la célebre propuesta de Maldacena [11, 12] (para una revisión más completa ver [5, 13]). Esta dualidad establece una relación entre fondos con curvatura negativa y teorías de campo conforme con una dimensión espacial menor (no compacta). La correspondencia AdS/CFT se caracteriza por un alto grado de simetría, es decir las teorías de campo y gravedad involucradas en la correspondencia AdS/CFT poseen tanto la supersimetría como la simetría conforme.

Encontrar una teoría de campo que cumpla con las simetrías antes mencionadas, es difícil, de hecho, es crucial notar que AdS/CFT normalmente hace uso en la dualidad de teorías similares a las teorías de norma utilizadas para describir la “realidad”. Un ejemplo de esto es el uso de la teoría $\mathcal{N} = 4$ súper-Yang-Mills (SYM) que es la teoría más simple proveniente de las teorías más generales $SU(\mathcal{N})$ supersimétricas de Yang-Mills, donde \mathcal{N} es el número de supersimetrías. La teoría SYM con $\mathcal{N} = 4$ es invariante bajo el grupo conforme, por lo cual se le da el nombre de teoría de campo conforme. Una teoría de gravedad apropiada que posee las mismas simetrías que CFT es la gravedad AdS(5) \otimes S(5), que como se sabe es una solución de la supergravedad 10-dimensional que describe una teoría de cuerdas a bajas energías. Este espaciotiempo tiene las simetrías de $O(6)$ para la esfera 5-dimensional y una simetría adicional, la supersimetría $\mathcal{N} = 4$, las cuales son trascendentales en la descripción holográfica [13]. Persistiendo en la descripción holográfica, existen cantidades y parámetros en ambas teorías que están relacionados, por ejemplo, del lado de gravedad los parámetros tienen dimensiones propias como: la masa, la longitud y la temperatura; mientras que en la teoría SYM las cantidades son adimensionales. Para poder convertir estas últimas cantidades a variables del bulto, el factor de conversión será el radio de curvatura R del espaciotiempo.

1.1.1 Éxitos de la correspondencia AdS/CFT

Pese a que normalmente la dualidad no es directa en el sentido mencionado anteriormente, el método ha mostrado ser eficiente, tal es el caso que ha permitido la descripción de teorías relacionadas con la cromodinámica cuántica de bajas energías, por lo que es conveniente mencionar algunos de los éxitos de la correspondencia AdS/CFT:

- *La relación entre la viscosidad de corte y la densidad de entropía η/s del plasma de quarks y gluones (QGP, por sus siglas en inglés)*

Dentro de la física de bajas energías surge un nuevo estado fuertemente acoplado de la materia a altas temperaturas sobre la temperatura del desconfinamiento de QCD que es el plasma de quarks y gluones, cuyo estado de la materia se supone existió en los primeros microsegundos del universo. Los físicos en el intento de comprender lo que ocurrió en esos primeros instantes después del Big-Bang realizan actualmente una intensa actividad de investigación teórica y experimental. En el aspecto experimental, el QGP ha sido observado y sigue estando bajo estudio, en particular en el Acelerador Relativista de Iones Pesados (RHIC, por sus siglas en inglés) en Brookhaven y en el gran colisionador de hadrones (LHC, por sus siglas en inglés) en el CERN, en Ginebra, que son actualmente los aceleradores de partículas más poderosos del mundo. Quizás la propiedad más importante del QGP es el cociente entre su viscosidad de corte¹ y su entropía. No obstante, calcular este parámetro utilizando la cromodinámica cuántica es imposible en la actualidad (incluso usando la QCD numérica o QCD en el retículo). En este contexto, la correspondencia holográfica contribuye al célebre resultado de la relación entre la viscosidad de corte y la densidad de entropía, dando como resultado $\eta/s \approx 0.080$, que es comparable con el obtenido en el LHC cuyo valor mínimo en función de la temperatura es $(\eta/s)_{min} = 0.085$ [14]. Este resultado proporciona un ejemplo de universalidad en la dualidad norma/gravedad, lo que significa que las teorías de la gravedad con diferente estructura, dimensión y contenido de campos dan el mismo resultado para η/s .

¹La viscosidad de corte es una medida de la cantidad de disipación en un fluido simple. En la teoría cinética, la viscosidad de corte está relacionada con la tasa de transporte de momento por cuasi-partículas, y la relación de incertidumbre sugiere que la relación de viscosidad de corte η y densidad de entropía s está limitada por una constante en unidades de \hbar/k_B , donde \hbar es la constante de Planck y k_B es la constante de Boltzmann.

- *Las propiedades de un fluido "perfecto"*

Un fluido es un material que se describe mediante las leyes de la dinámica de fluidos. En el marco de estas leyes, la respuesta de un fluido a ciertas perturbaciones externas que varían lentamente es gobernada por ciertas leyes de conservación. Por ejemplo, en el caso del agua que es un fluido simple, las cantidades conservadas son la masa, la energía y el momento. Aunque el estudio de los fluidos es un problema vetusto en física, comprender por qué ciertos materiales son excelentes fluidos y otros no, sigue siendo una pregunta complicada. Más aún, se descubre experimentalmente el plasma de quarks y gluones que lleva a confirmar la existencia de un fluido "perfecto". Se sabe que la calidad de un fluido se puede caracterizar por su viscosidad de corte η y la relación entre la viscosidad de corte y la densidad de entropía para este material tiene un valor específico que deriva en la conclusión de tener un flujo hidrodinámico "perfecto". Ligado a esto, se propuso la correspondencia holográfica como un método completamente nuevo para calcular la relación η/s , y con este procedimiento también se pudieron calcular algunas propiedades de transporte de fluidos altamente correlacionadas, como la viscosidad aparente, las constantes de difusión, las conductividades, etc. Estas propiedades se observaron de forma indirecta tras el análisis estadístico de las partículas producto de su desintegración en las colisiones de iones pesados (plomo contra plomo) en el LHC y tales observaciones se suman al hecho de confirmar que el QGP se comporta como un fluido perfecto [15, 16].

- *Superconductores holográficos*

Un éxito más de la dualidad norma/gravedad tuvo lugar en la descripción de superconductores de alta temperatura T_c (finita). La manera de establecer un diccionario entre la gravedad y un material superconductor, tiene como primer paso encontrar el dual gravitacional del superconductor también llamado "superconductor holográfico" (esto ya fue encontrado en [17]). Por el contrario antes de hallarlo debemos saber cuáles son las características mínimas de ambos sistemas, tal que en este caso son las siguientes: en un superconductor necesitamos las nociones de temperatura y condensado; del lado de gravedad el rol de la temperatura será jugado por un agujero negro con la temperatura de Hawking igual a la temperatura de la teoría de campo, y el papel de un condensado cargado puede ser desempeñado por un campo escalar cargado.

Finalmente, por esta razón en el ámbito de la teoría de la gravitación tenemos que

encontrar un agujero negro que tenga pelo escalar a bajas temperaturas, pero que no lo tenga a altas temperaturas.

Actualmente la predicción holográfica de una teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ en función del límite de acoplamiento débil de una teoría gravitacional ha vislumbrado y dado resultados de algunas de las propiedades de fluidos cuánticos altamente correlacionados que no pueden ser determinadas en el límite de acoplamiento fuerte de la teoría cuántica de campos QCD. Más aún, la correspondencia norma/gravedad permite dar una visión en la que en ambos lados de la dualidad se tiene un significado físico interesante. Esta visión tiene consecuencias prácticas. Por ejemplo, buscando una descripción dual de la superconductividad, uno se da cuenta de que puede haber una brecha en los teoremas de ‘agujero negro’ tal que uno es conducido a nuevos tipos de soluciones de agujero negro [18–20].

1.2 Más allá de la correspondencia AdS/CFT

Motivados por los éxitos de la correspondencia AdS/CFT en su forma original, muchos físicos han comenzado a preguntarse si la correspondencia AdS/CFT puede ser usada para obtener nueva información o simplemente para poder explicar problemas abiertos en la física teórica que estén vinculados al acoplamiento fuerte. Hay muchos sistemas fuertemente acoplados importantes en la física. Sin embargo, aunque existen enfoques para describir subconjuntos de sus propiedades, no existe un método general para calcular sus observables, en contraste con los sistemas débilmente acoplados donde la teoría de perturbaciones está bien establecida. En consecuencia, las nuevas ideas para describir sistemas fuertemente acoplados son bienvenidas y las generalizaciones de la correspondencia norma/gravedad han hecho contribuciones útiles a nuevas descripciones de al menos algunos aspectos de sistemas fuertemente acoplados.

Por ello, la dualidad nuevamente juega un rol importante debido a que se ha aplicado a sistemas que son descritos por puntos cuánticos críticos y además son fuertemente acoplados en el área de física de materia condensada [6, 7, 10, 21–23]. En materia condensada, existen sistemas altamente correlacionados y estos son interesantes ya que pueden ser diseñados y estudiados con detalle en laboratorios. Algunos de estos sistemas, incluso son de interés tecnológico significativo. Las observaciones en materiales que implican electrones fuertemente correlacionados están desafiando los paradigmas tradicionales de la materia condensada que se basaban en las cuasipartículas de interacción débil y la teoría de la ruptura

de simetría. Más aún, los sistemas de materia condensada pueden ofrecer un campo en el que muchos de los conceptos fascinantes de la teoría de altas energías pueden ser realizados experimentalmente.

1.2.1 Teorías cuánticas críticas

Una pregunta esencial es la siguiente: ¿Hasta qué punto la física clásica es suficiente y hasta qué punto es necesaria la mecánica cuántica para comprender los fenómenos críticos? En términos generales, la mecánica cuántica es primordial cada vez que la temperatura se vuelve más baja que alguna energía característica del sistema bajo observación [24].

Uno de los triunfos del siglo XX de la física de la materia condensada fue la comprensión de la criticidad clásica. Un material que se encuentra cerca de una transición de fase clásica (ocurre a temperatura finita), detecta el cambio inminente de estado a medida que el parámetro de orden desarrolla fluctuaciones térmicas en regiones cada vez más grandes de la muestra: dicho estado se conoce como estado crítico. Sin embargo, también existe la criticidad cuántica que implica una clase completamente nueva de transformaciones en las propiedades del material. Aquí, los puntos cuánticos críticos surgen a temperatura $T = 0$, es decir, las transiciones de fase cuántica ocurren cuando los cambios en el parámetro de orden resultan no de fluctuaciones térmicas, sino de fluctuaciones mecánico cuánticas. Dicho de otra forma, en una transición de fase a temperatura cero, ésta resulta no ser analítica en el estado fundamental del sistema (infinito) como función de algún parámetro dado, como la presión, el dopaje o el campo magnético aplicado, es decir, cuando el estado base de los sistemas sufre un cambio (transición de fase) que no puede expresarse analíticamente en función de parámetros externos tales como la presión, el dopaje o un campo magnético, en ese punto las teorías cuánticas se vuelven críticas. En dichos casos las transiciones son disparadas por fluctuaciones cuánticas del sistema, es decir dos fases diferentes a $T = 0$ estarán separadas por un punto cuántico crítico. Son estas fluctuaciones misteriosas que los físicos aún no entienden [25]. Además, los puntos críticos en la materia condensada se caracterizan por dos exponentes de escala, conocidos como el exponente crítico dinámico z y el exponente de violación de hiperescala θ . Hoy, el fenómeno de la criticidad cuántica se ha convertido en un gran desafío para nuestra comprensión de la materia condensada. De modo que existe una acumulación de ejemplos que carecen de explicaciones y hasta ahora no tienen un marco teórico satisfactorio para describirlos. Por ejemplo, existe toda una

variedad de materiales metálicos en los que surgen puntos cuánticos críticos, entre los que se incluyen los óxidos de cobre, óxidos de rutenio, pnictidos de hierro, metales orgánicos y compuestos de fermiones pesados. Enseguida mostramos los diagramas de sistemas que presentan fluctuaciones cuánticas, es decir, donde se tienen dos fases diferentes a $T = 0$, las cuales están separadas por un punto cuántico crítico.

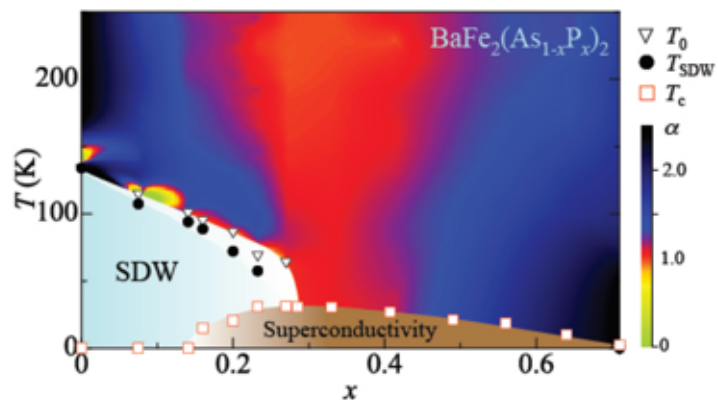


Figura 1.1: Diagrama del compuesto de pnictido $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$ en función de la temperatura [25].

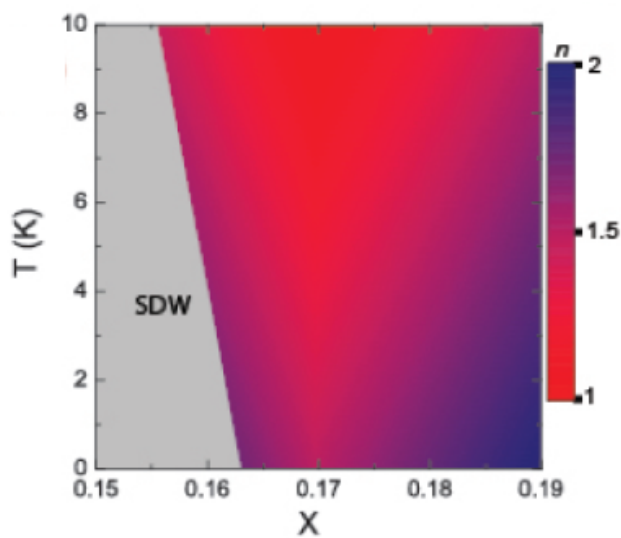


Figura 1.2: Diagrama del rutenio $\text{Sr}_3\text{Ru}_2\text{O}_7$ en función de la temperatura [25].

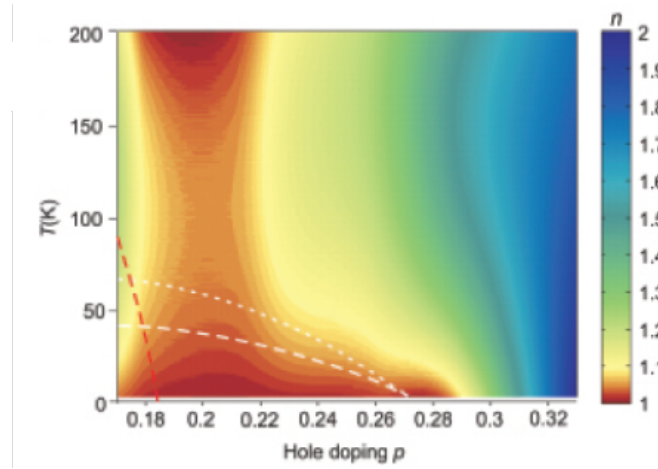


Figura 1.3: Diagrama del cuprato dopado $\text{La}_2 - x\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ [25].

Sin embargo, en general una transición de fase cuántica genérica se puede visualizar como se muestra en la Fig. 1.4

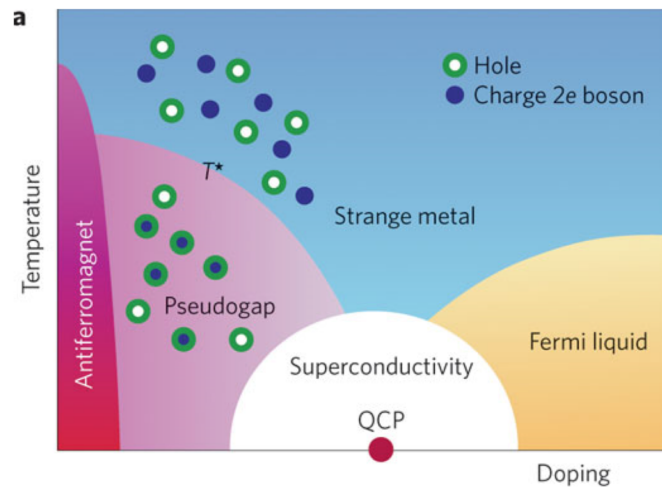


Figura 1.4: Diagrama de transición de fases cuánticas en función de la temperatura y un parámetro arbitrario, que puede ser el dopaje, la presión, el campo magnético, etc. [26].

Hasta el momento, los sistemas cuánticos críticos resultan difíciles de abordar mediante métodos perturbativos y aunque ciertamente no son los únicos sistemas de materia condensada, parecen ser un lugar prometedor y natural para comenzar a aplicar las técnicas holográficas ya que éstas podrían dar respuesta a comportamientos extraños dentro de los sistemas cuánticos críticos. En la última década, ha existido una intensa actividad en promover

las ideas de la correspondencia a modo de obtener una mejor comprensión de las teorías de campos fuertemente acopladas con reescalamientos anisótropos, como por ejemplo en sistemas cuánticos críticos (Figuras: 1.1, 1.2, 1.3). Por otro lado, los puntos cuánticos críticos tienen una invariancia de escala del espaciotiempo que proporciona una conexión cinemática fuerte a las versiones más simples de la correspondencia holográfica, lo que a menudo hace difícil estudiar las teorías críticas cuánticas utilizando métodos tradicionales [21, 22].

Más allá de la correspondencia AdS/CFT, tenemos finalmente que una extensión interesante de la correspondencia holográfica es la dualidad Lifshitz/materia condensada, la cual consiste en el estudio de sistemas cuánticos críticos que pertenecen al ámbito de la física de la materia condensada [23, 27–30]. Estos modelos cuánticos críticos son invariantes de escala donde el espacio y el tiempo se transforman de una manera diferente [31]. Más aún, estos sistemas exhiben la simetría de escala no relativista de la siguiente forma

$$t \longrightarrow t' = \lambda^z t, \quad x^i \longrightarrow x'^i = \lambda x^i \quad (1.1)$$

donde λ es una constante real arbitraria con exponente crítico dinámico $z \neq 1$. Este tipo de simetrías caracteriza a los puntos cuánticos críticos y proporciona una fuerte relación cinemática con diferentes extensiones de la correspondencia AdS/CFT. Es muy importante mencionar que las transformaciones con cambio de escala de Lifshitz² (1.1) están presentes en el grupo de simetría asintótica de la teoría dual gravitacional.

Vale la pena mencionar que desde 1941, Lifshitz demostró que los sistemas que son invariantes bajo la transformación de escala anisótropa (1.1) aparecen dentro del marco de la física de la materia condensada [55]. Un ejemplo de esto son los superconductores de alta temperatura.

1.2.2 Superconductores de alta temperatura

Desde el punto de vista teórico de la física de materia condensada nuestra noción de los superconductores es altamente interesante pues reproduce características que han sido medidas en experimentos. Hasta el momento se conocen dos tipos de superconductores.

²Las teorías de campo invariantes bajo las transformaciones de escala anisótropa (1.1) mejoran su comportamiento de alta energía [32–40]. En particular, Hořava formuló una gravedad modificada con $z = 3$, que parece estar libre de fantasmas y ser renormalizable por conteo de potencias, utilizando estas transformaciones [41]. Esta gravedad modificada tuvo inconsistencias dinámicas al principio [42], pero muy pronto se encontraron extensiones saludables de dicha teoría [43, 44]. Sorprendentemente, la gravedad de Hořava predice que la dimensión espectral del espacio-tiempo se reduce a distancias cortas [45]. Otras propiedades interesantes de la gravedad de Hořava se pueden encontrar en [46–54].

Superconductores convencionales

En superconductores convencionales (por ejemplo Al , Nb , Pb) los pares de electrones ligados con espín opuesto forman un bosón cargado llamado par de Cooper. Por debajo de la temperatura crítica T_c , hay una transición de fase de segundo orden tal que se obtiene un condensado de bosones. La conductividad dc (corriente directa) se vuelve infinita, resultando en superconductividad. Esto está bien descrito por la teoría de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) en la que la formación de pares de Cooper se debe a las interacciones con vibraciones de la red o fonones. Esta interacción es débil y un par de Cooper típico es mucho más grande que el espaciado de la red. Las excitaciones parecidas a las partículas por encima del estado fundamental superconductor se llaman generalmente cuasipartículas [56].

Superconductores no convencionales

Los superconductores no convencionales se caracterizan por presentar una fuerte repulsión entre los electrones, algunos ejemplos de este tipo de superconductores son: la superconductividad de ondas p que tiene lugar en sistemas de partículas fuertemente correlacionadas, los superconductores de ondas d , etc. La mayoría de estos fenómenos carece de una explicación microscópica ampliamente aceptada por enfoques convencionales [57].

Existen nuevas clases de superconductores de alta T_c basados en cobre y hierro, la superconductividad en estos materiales se observa a lo largo de planos bidimensionales. Aquí, existe la evidencia de que se forman pares de electrones en estos materiales de alta T_c , pero el mecanismo de apareamiento no está bien definido e igualmente se carece de una formulación bien establecida que explique su comportamiento.

Justo aquí es donde basados en la naturaleza y el requerimiento de la descripción de puntos cuánticos críticos (Fig. 1.4) el espaciotiempo de Lifshitz fue diseñado de manera que su geometría sea invariante precisamente bajo el cambio de escala (1.1) [58]. Debido a ello puede ser utilizado como el dual, del lado de gravedad, para teorías de campo que estudian a los sistemas de materia condensada con la invariancia de escala antes mencionada. Finalmente, haciendo hincapié en nuestra introducción, mostramos nuestra total motivación por el hecho de que los espaciotiempos de Lifshitz son relevantes actualmente, ya que son excelentes candidatos para ser duales a las teorías cuánticas críticas utilizadas para describir sistemas fuertemente acoplados en materia condensada. Precedentemente se mencionaron ejemplos concretos y destacados de tales sistemas, cuyas propiedades físicas

se rigen por puntos cuánticos críticos no relativistas. Por otra parte, la holografía no relativista es interesante por sí misma, pues dejando de lado las aplicaciones que pueda tener la dualidad con el espaciotiempo de Lifshitz, el desarrollo de este tema es en sí mismo importante, ya que podría contribuir a un mayor entendimiento de la dualidad en general. La correspondencia también puede realizar aportaciones importantes al desarrollo del establecimiento de la relación entre cantidades obtenidas de un lado de la dualidad y del otro arrojar algo de luz sobre cuestiones fundamentales y generales del principio holográfico [6], es decir, al desarrollo del llamado diccionario holográfico. Por lo tanto, en esta tesis, nos centraremos en la construcción de nuevas familias de soluciones exactas para las ecuaciones de campo resultantes de las formulaciones Einstein-Proca y Einstein-Maxwell-dilatón cuyas soluciones representen configuraciones gravitacionales de Lifshitz con exponente dinámico arbitrario z .

El trabajo está organizado de la siguiente forma: En el capítulo 2, revisamos los espaciotiempos Anti-de Sitter y los espaciotiempos de Lifshitz. En el capítulo 3, presentamos la teoría de Einstein-Proca con un solo campo vectorial y como solución a las ecuaciones de campo obtenemos una nueva familia de soluciones exactas que tienen simetría de Lifshitz espacialmente anisótropas. Más aún, en la subsección (3.3.2) se encuentra el fondo de Lifshitz espacialmente isótropo como un caso particular de nuestra familia de espaciotiempos de Lifshitz espacialmente anisótropos. En la subsección (3.3.3) se muestra otra forma de visualizar a los fondos de Lifshitz espacialmente isótropos. Por otra parte, presentamos en la siguiente subsección un fondo de Lifshitz con el mínimo de anisotropía espacial deducido dentro de la misma formulación de Einstein-Proca pero considerando una sola componente magnética del campo vectorial masivo. Continuamos en el capítulo 4 con una discusión sobre el nuevo espectro con masa cuadrada negativa que respeta la cota de Breitenlohner-Freedman (BF). Posteriormente examinamos una propiedad más de la familia de fondos de Lifshitz hallados en el capítulo 3, que es la condición de energía nula.

Por otra parte, en el capítulo 5 trabajamos dentro de la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón donde hemos remplazado la constante cosmológica por un potencial escalar arbitrario. Aquí, derivamos las ecuaciones de campo correspondientes y como solución a este conjunto de ecuaciones de campo, obtuvimos nuevas soluciones de agujero negro de Lifshitz. Más aún, dentro de este capítulo presentamos en la sección 5.2 el cálculo de varios invariantes geométricos, como el escalar de curvatura, el tensor de Ricci contraído consigo mismo y el invariante de Kretschmann. Luego, en la sección 5.3 revisamos algunos aspectos relevantes de la termodinámica de agujeros negros y calculamos algunas cantidades termodinámicas

para nuestras soluciones. Concluyendo en la sección 5.4 con los resultados obtenidos de examinar las fuerzas de marea en la vecindad de nuestra configuración de agujero negro.

Finalmente se concluye en el capítulo 6 con un breve resumen y conclusiones de los resultados. En los apéndices ubicados al final de esta tesis se dan las herramientas necesarias para el desarrollo de la misma. En el ap. B se calculó tanto la cota de BF, como la condición de energía nula para el espaciotiempo de Lifshitz isótropo.

Capítulo 2

Espaciotiempos invariantes relativistas y no relativistas

2.1 Grupo de simetría relativista

El grupo de Poincaré consiste de transformaciones de Lorentz y traslaciones, es un grupo de simetría relativista

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &: x^\mu \rightarrow x'^\mu = M^\mu_\nu x^\nu; \\ P^\mu &: x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $M^\mu_\nu \in SO(d,1)$. Una teoría de campo es relativista si resulta ser invariante, por ejemplo, bajo el grupo de Poincaré. Además esta teoría puede tener invariancia conforme (el grupo conforme de d dimensiones es $SO(d,2)$) si es invariante bajo dilataciones \mathcal{D} (invariancia de escala) y bajo transformaciones especiales conformes K^μ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &: x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu; \\ K^\mu &: x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + k^\mu x \cdot x}{(1 + 2k^\mu x_\mu + k^2 x^2)}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $x \cdot x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$. A pesar de que no está rigurosamente probado, es ampliamente conocido que si una teoría es invariante de escala, esta teoría es conformemente invariante.

En el ámbito de la correspondencia holográfica algunas de estas teorías (p. ej., la teoría de campo conforme) han encontrado su contraparte gravitacional en el espaciotiempo AdS, ya que éste cumple con este tipo de invariancias o simetrías en su geometría, conocidas como isometrías.

2.2 Espaciotiempo AdS

La geometría del espaciotiempo AdS disfruta de la invariancia conforme total y está dada por la siguiente métrica (en coordenadas de Poincaré):

$$ds^2 = l^2 \left[r^{\pm 2} (-dt^2 + dx_i^2) + \frac{dr^2}{r^2} \right], \quad (2.3)$$

donde $i = 1, 2, \dots, D$. El espaciotiempo descrito por la métrica (2.3) es un fondo gravitacional en $D + 2$ dimensiones, aquí D se asocia con la dimensión espacial de la teoría de campos dual, l es el radio de curvatura AdS [13]. La frontera de la configuración AdS se encuentra en $r \rightarrow \infty$ (para el signo $+$ en los exponentes de r) y $r \rightarrow 0$ (para el signo $-$).

El espaciotiempo AdS es una solución máximamente simétrica de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa que se derivan de la siguiente acción

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} [R + D(D + 1)], \quad (2.4)$$

donde d es el número de dimensiones espaciales de esta teoría de la gravedad, tal que $d = D + 1$ y $\Lambda = -\frac{D(D+1)}{2}$. Las ecuaciones de Einstein resultantes de (2.4) son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{D(D + 1)}{2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

El escalar de curvatura del fondo gravitacional AdS está dado por

$$R = -\frac{(D + 1)(D + 2)}{l^2} = -\frac{d(d + 1)}{l^2}. \quad (2.6)$$

Aquí el escalar de curvatura evidentemente es definido negativo para cualquier dimensión y posee un factor arbitrario dado por l^{-2} .

2.3 Grupos de simetría no relativista

Sin embargo, en la naturaleza, no todos los sistemas de teoría de campos poseen una invariancia conforme relativista cerca de un punto cuántico crítico, muchos sistemas realmente exhiben simetrías no relativistas en estos puntos cuánticos. En general, en un punto cuántico crítico el tiempo y el espacio transforman de forma anisótropa.

2.3.1 Grupo de Lifshitz

Un grupo con simetría no relativista es el llamado grupo de Lifshitz y está conformado por las traslaciones temporales H , traslaciones espaciales P^i , rotaciones espaciales L^{ij}

$$\begin{aligned} H : \quad t &\longrightarrow t' = t + a; \\ P^i : \quad x^i &\longrightarrow x'^i = x^i + a^i; \\ L^{ij} : \quad x^i &\longrightarrow x'^i = L_j^i x^j, \end{aligned} \tag{2.7}$$

y además por la simetría con cambio de escala no relativista

$$\begin{aligned} D_z : \quad r &\longrightarrow r' = \lambda^{\pm 1} r, \\ t &\longrightarrow t' = \lambda^{\mp z} t, \\ x^i &\longrightarrow x'^i = \lambda^{\mp 1} x^i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde z es un parámetro también llamado exponente dinámico crítico. Denotaremos este grupo de simetría como $\mathbf{Lif}_D(\mathbf{z})$.

Por otro lado, una teoría invariante de Lifshitz es espacialmente isótropa y homogénea, es decir, es invariante bajo el grupo de simetría $\mathbf{Lif}_D(\mathbf{z})$. Además, se produce una generalización de una teoría invariante de Lifshitz cuando se considera una métrica espacialmente anisótropa, es decir, cuando ahora una teoría de Lifshitz admite la siguiente simetría de escala no relativista

$$\begin{aligned} D_z : \quad r &\longrightarrow r' = \lambda^{\pm 1} r, \\ t &\longrightarrow t' = \lambda^{\mp z} t, \\ x^i &\longrightarrow x'^i = \lambda^{\mp z_i} x^i, \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde z_i son exponentes dinámicos críticos a lo largo de diferentes direcciones espaciales [6].

2.3.2 Grupo de Schrödinger

Existe otro grupo de simetría no relativista e invariante bajo cambios de escala, el grupo de Schrödinger [59] denotado por $\mathbf{Sch}_D(\mathbf{z})$. Este es realizado en $(D + 2)$ dimensiones con D coordenadas espaciales x^i y dos coordenadas de cono de luz x^+ y x^- . Este grupo

consiste de traslaciones espaciales P^i y rotaciones espaciales L^{ij} dadas en (2.7), así como de traslaciones de las coordenadas de cono de luz,

$$\begin{aligned} H : \quad x^+ &\longrightarrow x'^+ = x^+ + a, \\ M : \quad x^- &\longrightarrow x'^- = x^- + a, \end{aligned} \quad (2.10)$$

boosts galileanos C^i y dilataciones D_z , actuando como

$$\begin{aligned} C^i : \quad x^i &\longrightarrow x'^i = x^i - v^i x^+; \\ &x^- \longrightarrow x'^- = x^- - v^i x^i; \\ D_z : \quad x^i &\longrightarrow x'^i = \lambda x^i; \\ &x^+ \longrightarrow x'^+ = \lambda^z x^+; \\ &x^- \longrightarrow x'^- = \lambda^{2-z} x^-. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Resulta que para algunos valores del parámetro z , este grupo de simetría es un subgrupo del grupo conforme en $(D + 2)$ dimensiones, $SO(D + 2, 2)$.

Sin embargo, más convencionalmente el grupo de Schrödinger es realizado en $D + 1$ dimensiones con D coordenadas espaciales x^i y una coordenada temporal t . Específicamente para este caso y con $z = 2$ el grupo de simetría se conforma¹ de las traslaciones y rotaciones espaciales dadas en (2.7), las traslaciones de las coordenadas de cono de luz (2.10), boosts galileanos y dilataciones dados en (2.11) y la transformación especial conforme K

$$\begin{aligned} K : \quad x^i &\longrightarrow x'^i = \frac{x^i}{1 + kx^+}, \\ x^+ &\longrightarrow x'^+ = \frac{x^+}{1 + kx^+}, \\ x^- &\longrightarrow x'^- = \frac{x^- + \frac{1}{2}kx \cdot x}{1 + kx^+}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Finalmente dada la importancia central de la correspondencia holográfica entre las teorías de campo y la gravedad, ahora uno puede ir más lejos, puesto que se tiene como motivación hallar configuraciones gravitacionales que sean invariantes bajo los grupos de $\mathbf{Lif}_D(\mathbf{z})$ y $\mathbf{Sch}_D(\mathbf{z})$ y así vislumbrar extensiones de la correspondencia original, dando inicio a la dualidad entre gravedad (espaciotiempos de Lifshitz o Schrödinger) y teorías de campo no relativistas (sistemas de materia condensada) como se puede ver en [58, 60–63]. De este

¹Se hace notar que en la literatura la terminología Schrödinger es algunas veces reservado solo para $z = 2$.

modo se podrían describir nuevos estados exóticos de la materia que surjan en las teorías cuánticas de campo con simetrías no relativistas. Igualmente, un paso más sería tratar de buscar en el laboratorio estos estados de la materia.

2.4 Espaciotiempo de Lifshitz

Para comprender cómo surgieron los spaciotiempos de Lifshitz es relevante mencionar que inicialmente la construcción de las métricas invariantes bajo los cambios de escala anisótropos (1.1) requirió de un tensor de energía-momento con las mismas simetrías. Una primera y modesta realización de esta idea está basada en la gravedad de Einstein con una constante cosmológica negativa en cuatro dimensiones acoplada a campos de norma y una 2-forma que interactúan topológicamente [58]. Dicho lagrangiano está dado por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{e^2} F_{(2)} \wedge *F_{(2)} + F_{(3)} \wedge *F_{(3)} \right) - c \int B_{(2)} \wedge F_{(2)}. \quad (2.13)$$

Aquí, $F_{(2),(3)}$ son las intensidades de campo para los campos de norma $F_{(2)} = dA_{(1)}$, $F_{(3)} = dB_{(2)}$. Además de la acción estándar de Einstein-Hilbert, la constante cosmológica Λ y los términos cinéticos para los campos de norma, se introduce el acoplamiento topológico $\int B_{(2)} \wedge F_{(2)} = \int A_{(1)} \wedge F_{(3)}$. Esta interacción es necesaria para encontrar soluciones apropiadas de las ecuaciones de campo, donde c es el parámetro de acoplamiento. Finalmente, resulta que en el marco de la formulación (2.13) se obtienen geometrías de Lifshitz como soluciones a sus ecuaciones de campo. A continuación presentamos la geometría más simple de Lifshitz dada por la siguiente métrica

$$ds^2 = \ell^2 \left(-r^{\pm 2z} dt^2 + r^{\pm 2} dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right), \quad (2.14)$$

donde $0 \leq r < \infty$, ℓ es el radio de Lifshitz, $i = 1, 2$ denota las dimensiones espaciales planas y z es el exponente dinámico². Esta métrica admite traslaciones de espacio y tiempo, las rotaciones espaciales (2.7) y la simetría con cambio de escala (2.8). Los signos '+' y '-' están relacionados a través de la transformación de coordenadas $r \rightarrow \frac{1}{r}$ que deja la métrica invariante³ [58, 60, 64].

²Cuando $z = 1$ lo que tenemos es el spaciotiempo AdS.

³Los campos de materia de la teoría considerada pueden tener un comportamiento diferente bajo la transformación $r \rightarrow \frac{1}{r}$, ya que solo los invariantes de campo conservan su forma bajo esta inversión.

No obstante, es conveniente mencionar que las ecuaciones resultantes de la formulación anterior no son las únicas que tienen como solución un espaciotiempo de Lifshitz. A continuación mencionamos algunas formulaciones que admiten soluciones con invariancia de Lifshitz: primera, en [6] el autor presenta una formulación equivalente y mucho más simple dentro del marco de la gravedad acoplada a un campo vectorial masivo, es decir, dentro del marco de la teoría de Einstein-Proca (la cual será desarrollada en el capítulo siguiente), y en consecuencia, también se encuentra que esta teoría soporta la geometría más simple de Lifshitz (2.14) donde al igual que en la métrica AdS (2.3) $i = 1, 2, \dots, D$, donde D representa el número de dimensiones de la teoría de campo dual, de tal modo que el fondo de Lifshitz es un espaciotiempo de $D + 2$ dimensiones; segunda, se mostró una configuración analítica que tiende asintóticamente a la solución tipo Lifshitz en $d = 4$ dimensiones con exponente dinámico $z = 3/2$ dentro de una teoría de gravedad cuya acción gravitacional incluye el término cuadrático de la curvatura R^2 [65]; tercera, resulta que la gravedad masiva tridimensional admite la solución simple de agujero negro de Lifshitz con $z = 3$ como se muestra en [66], aquí es importante enfatizar que estos espaciotiempos son particularmente interesantes ya que pueden ser duales gravitatorios para describir puntos fijos con invariancia de escala (2.9); y por último, en la formulación [67] se encontró un gran zoológico de soluciones analíticas de agujeros negros en D dimensiones con exponente crítico genérico z para la gravedad con correcciones de curvatura cuadráticas R^2 a la acción de Einstein-Hilbert, dentro de los resultados presentados en este trabajo, los autores ampliaron su análisis al agregar correcciones de la curvatura más altas a la acción de Einstein-Hilbert, lo que condujo a nuevas familias de configuraciones asintóticas de agujeros negros Lifshitz para los exponentes críticos $z > 2 - D$, $z > 1$ y $z < 0$.

2.5 Espaciotiempo de Schrödinger

Como se argumentó anteriormente, el grupo de Schrödinger es un subgrupo del grupo conforme. Por lo tanto, es legítimo preguntarnos cuál es el procedimiento equivalente para encontrar las isometrías de Schrödinger desde el punto de vista de AdS, debido a que es bien sabido que $SO(D + 2, 2)$ es también el grupo de isometría del espaciotiempo AdS en $(D + 3)$ dimensiones.

Obviamente, el espaciotiempo de AdS se beneficia de la invariancia conforme total. Entonces, si queremos realizar geoméricamente solo las isometrías de Schrödinger, la

invariancia completa debe romperse. En particular, las dilataciones relativistas (2.2) deben romperse con las no relativistas dadas por (2.11) y $r \rightarrow \lambda r$ (para más detalles ver [60, 68]), de tal modo que la métrica de Schrödinger sea

$$ds^2 = -\frac{b^2(dx^+)^2}{r^{2z}} + \frac{1}{r^2} (dr^2 + dx^i dx_i + 2dx^+ dx^-), \quad (2.15)$$

donde b es un parámetro arbitrario que puede ser removido mediante el siguiente cambio de escala

$$x^+ \rightarrow x'^+ = bx^+, \quad x^- \rightarrow x'^- = \frac{x^-}{b}. \quad (2.16)$$

Finalmente, las geometrías de Schrödinger también surgen como soluciones a modelos que consisten de la gravedad de Einstein acoplada a campos vectoriales masivos, así como las geometrías de Lifshitz.

Por otra parte, el hecho de hallar geometrías gravitacionales de Lifshitz, de Schrödinger o de alguna otra formulación dentro de modelos de gravedad que tienen acoplados campos de materia implica, como segundo paso esencial, comprender la física que está codificada en la teoría gravitacional cuando se acoplan dichos campos.

Capítulo 3

Espaciotiempo de Lifshitz dentro del marco de la teoría Einstein-Proca

Motivados por los resultados presentados en [6, 7]. En este capítulo, se construye una familia de métricas espacialmente anisótropas tipo Lifshitz con exponente dinámico arbitrario z en $d + 1$ dimensiones dentro del marco de la teoría de Einstein-Proca con un solo campo vectorial masivo acoplado a la gravedad con constante cosmológica negativa. Dicha familia de métricas es más general que la métrica dada en (2.14) y cuya generalidad radica en la anisotropía que presenta nuestra solución en todas las direcciones espaciales. La métrica (2.14) resulta ser un spaciotiempo AdS cuando el exponente crítico toma el valor $z = 1$. Por lo tanto, en este punto resulta conveniente preguntarse, ¿una métrica tipo Lifshitz es solución de la acción (2.4)? La respuesta es: No.

A pesar de que el spaciotiempo AdS resulta particularmente de los fondos de Lifshitz cuando $z = 1$, para hallar métricas tipo Lifshitz se necesita algo más que la simple acción de AdS. Una forma de intentar obtener configuraciones de Lifshitz es agregando a la acción de AdS (2.4) al menos un campo vectorial sin masa, de modo que la solución a la acción resultante sea un spaciotiempo de Lifshitz, pero surge un inconveniente más: las ecuaciones de campo solo se satisfacen para la dimensión $d = 2$, lo que lleva a tener un fondo de Lifshitz en 2-dimensiones espaciales o bien en $D = 1$ en términos de la dimensión de la teoría de campo dual. Es por ello que como se mencionó en el capítulo anterior y al inicio de éste, la búsqueda de configuraciones de Lifshitz que den una posible interpretación física a sistemas reales en la teoría de campo dual con más de una dimensión (por ejemplo,

a sistemas de materia condensada) necesariamente surge de una acción más compleja que la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica negativa.

3.1 Acción de Einstein-Proca

A continuación presentamos la acción¹ de Einstein-Proca

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}M^2 A^2 \right], \quad (3.1)$$

donde Λ es la constante cosmológica, $F_{\mu\nu}$ es la intensidad del campo vectorial², A_μ es un campo vectorial masivo³, M es su masa, y los índices griegos van desde 0 hasta $D + 1$.

3.2 Ecuaciones de campo de Einstein-Proca

Las ecuaciones de campo de Einstein-Proca que resultan de esta acción son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{D(D+1)}{2}g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 \right) + \frac{M^2}{2} \left(A_\mu A_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}A^2 \right), \quad (3.2)$$

donde el primer miembro de las ecuaciones es el tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, con constante cosmológica, $\Lambda = -\frac{D(D+1)}{2}$, y el segundo miembro es el tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$, mientras que las ecuaciones de Proca son:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - M^2 A^\nu = 0. \quad (3.3)$$

Ansatz métrico

Puesto que nuestro objetivo central es obtener nuevos spaciotiempos de Lifshitz espacialmente anisótropos dentro del marco de la formulación Einstein-Proca, nuestro primer

¹Es importante tener en cuenta que la acción (3.1) no preserva la invariancia de norma.

²Por definición tenemos que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}.$$

³Igualmente, definimos

$$A^2 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu.$$

ansatz para la métrica va a tener la siguiente forma⁴:

$$ds^2 = \ell^2 \left(-\mathbf{f}(\mathbf{r})dt^2 + \mathbf{P}_i(\mathbf{r})dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right), \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{P}_i(\mathbf{r})$ son funciones arbitrarias de la coordenada radial (también llamada coordenada holográfica), aquí nuevamente $i = 1, 2, \dots, D$. En forma matricial la métrica (3.4) en el orden t, r, x_i , se expresa de la forma:

$$g_{\mu\nu} = \ell^2 \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_1(r) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_i(r) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Símbolos de Christoffel

Subsecuentemente, calculamos los llamados símbolos de Christoffel, definidos de la siguiente manera⁵:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (3.6)$$

Bajo la métrica (3.4), se obtienen los siguientes símbolos de Christoffel diferentes de cero

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{f'}{2f}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{r^2 f'}{2}, \\ \Gamma_{rr}^r &= -\frac{1}{r}, & \Gamma_{ij}^r &= -\frac{r^2 P'_i}{2} \delta_{ij}, \\ \Gamma_{jr}^i &= \frac{P'_i}{2P_i} \delta_j^i, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada r , mientras que el índice i se refiere al i -ésimo elemento.

Tensor de Ricci

Una vez calculados los símbolos de Christoffel procedemos a calcular el tensor de Ricci, cuya definición es la siguiente:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \quad (3.8)$$

⁴Otro tipo de construcciones geométricas (black branes) espacialmente anisótropas con invarianza de Lifshitz fueron construidas perturbativamente en [69].

⁵Aquí, $g^{\mu\nu}$ representa la inversa de la métrica. Por ejemplo, dada la métrica (5.6), las componentes diferentes de cero de la métrica inversa son: $g^{tt} = -\frac{1}{f(r)}$, $g^{rr} = r^2$ y $g^{kl} = \frac{1}{P_i} \delta^{kl}$.

Al emplear los símbolos dados en (3.7), obtenemos las siguientes expresiones para las componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$R_{tt} = \frac{r^2 f''}{2} + \frac{r^2 f'}{2r} - \frac{r^2 (f')^2}{4f} + \frac{r^2 f' P'_k}{4P_k}, \quad (3.9)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2} \left[-\frac{f''}{f} + \frac{(f')^2}{2f^2} - \frac{f'}{rf} - \frac{P''_k}{P_k} + \frac{P'^2_k}{2P_k^2} - \frac{P'_k}{rP_k} \right], \quad (3.10)$$

$$R_{ii} = \frac{r^2}{2} \left[-P''_i - \frac{f' P'_i}{2f} - \frac{P'_i}{r} - \frac{P'_i P'_k}{2P_k} + \frac{P'^2_i}{P_i} \right], \quad (3.11)$$

donde el índice repetido k denota una suma de 1 a D , mientras que el índice i se refiere al i -ésimo elemento.

3.2.1 Escalar de curvatura

Resulta que el escalar de curvatura (o escalar de Ricci) está dado por definición como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

tal que, para el ansatz métrico (3.4) se lee

$$R = \frac{r^2}{2\ell^2} \left[-2\frac{f''}{f} - 2\frac{f'}{rf} + \frac{f'^2}{f} - \frac{f' P'_k}{f P_k} - 2\frac{P''_k}{P_k} + \frac{3 P'^2_k}{2 P_k^2} - 2\frac{P'_k}{rP_k} - \frac{1 P'_l P'_k}{2 P_l P_k} \right]. \quad (3.13)$$

Aquí, los índices repetidos k y l denotan una suma de 1 a D .

Tensor de Einstein

Con los cálculos realizados anteriormente se puede escribir el primer miembro de las ecuaciones de Einstein-Proca por componentes con ayuda del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ más el término de la constante cosmológica negativa $\Lambda = -\frac{D(D+1)}{2}$. A partir de la definición del tensor de Einstein tenemos que

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{D(D+1)}{2} g_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Por consiguiente, las componentes del primer miembro de las ecuaciones de Einstein-Proca resultan ser no nulas cuando $\mu = \nu$:

$$G_{tt} + \Lambda g_{tt} = -\frac{r^2 f P''_k}{2P_k} + \frac{r^2 f}{8} \left(\frac{3P'^2_k}{P_k^2} - \frac{P'_k P'_l}{P_k P_l} \right) - \frac{r f P'_k}{2P_k} + \frac{D(D+1)\ell^2 f}{2}, \quad (3.15)$$

$$G_{rr} + \Lambda g_{rr} = -\frac{P'_k}{8P_k} \left(\frac{P'_k}{P_k} - \frac{P'_l}{P_l} \right) + \frac{f'P'_k}{4fP_k} - \frac{D(D+1)\ell^2}{2r^2}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} G_{ii} + \Lambda g_{ii} &= \left[-\frac{r^2 P''_i}{2} - \frac{r^2 f' P'_i}{4f} - \frac{r P'_i}{2} - \frac{r^2 P'_i P'_k}{4P_k} + \frac{r^2 P_i'^2}{2P_i} + \frac{r^2 f''}{2f} P_i \right. \\ &+ \frac{r f'}{2f} P_i - \frac{r^2 f'^2}{4f^2} P_i + \frac{r^2 P''_k}{2P_k} P_i + \frac{r^2 f' P'_k}{4f P_k} P_i + \frac{r P'_k}{2P_k} P_i \\ &\left. + \frac{r^2 P'_l P'_k}{8P_l P_k} P_i - \frac{3r^2 P_k'^2}{8P_k^2} P_i - \frac{D(D+1)\ell^2}{2} P_i \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tensor de energía momento

De (3.2) se visualiza que el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ está dado por la siguiente expresión

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) + \frac{M^2}{2} \left(A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^2 \right), \quad (3.18)$$

donde $F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho = g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} = g^{tt} F_{\mu t} F_{\nu t} + g^{rr} F_{\mu r} F_{\nu r} + g^{ij} F_{\mu i} F_{\nu j}$. Asimismo, si usamos las definiciones de F^2 y A^2 dadas anteriormente, entonces el tensor (3.18) se reordena como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[g^{tt} F_{\mu t} F_{\nu t} + g^{rr} F_{\mu r} F_{\nu r} + g^{ij} F_{\mu i} F_{\nu j} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \left(g^{\sigma\mu'} g^{\rho\nu'} F_{\sigma\rho} F_{\mu'\nu'} \right) \right] \\ &+ \frac{M^2}{2} \left[A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\sigma\rho} A_\sigma A_\rho) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Antes de continuar notamos que para nuestro caso

$$F^2 = g^{\sigma\mu'} g^{\rho\nu'} F_{\sigma\rho} F_{\mu'\nu'} = 2g^{rr} [g^{tt} (A'_t)^2 + g^{ij} A'_i A'_j], \quad (3.20)$$

$$A^2 = g^{\sigma\rho} A_\sigma A_\rho = g^{tt} (A_t)^2 + g^{rr} (A_r)^2 + g^{ij} A_i A_j. \quad (3.21)$$

De este modo, al sustituir (3.20), (3.21) en (3.19) obtenemos que las componentes diagonales del tensor $T_{\mu\nu}$ son:

$$T_{tt} = \frac{r^2}{4\ell^2} A_t'^2 + \frac{r^2 f}{4P_k} A_k'^2 + \frac{M^2}{4} \left[A_t^2 + \frac{r^2}{f} A_r^2 + \frac{f}{P_k} A_k^2 \right], \quad (3.22)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{4\ell^2} \left[-\frac{1}{f} A_t'^2 + \frac{1}{P_k} A_k'^2 \right] + \frac{M^2}{4} \left[\frac{1}{r^2 f} A_t^2 + A_r^2 - \frac{1}{r^2 P_k} A_k^2 \right], \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \frac{1}{4\ell^2} \left[\frac{r^2 P_i}{f} A_t'^2 + 2r^2 A_i'^2 - r^2 \frac{P_i}{P_k} A_k'^2 \right. \\
&\quad \left. + M^2 \ell^2 \left(\frac{P_i}{f} A_t^2 - r^2 P_i A_r^2 + 2A_i^2 - \frac{P_i}{P_k} A_k^2 \right) \right]. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Sin embargo, las componente no diagonales del tensor de energía momento⁶ $T_{\mu\nu}$, es decir, cuando $\mu \neq \nu$ son:

$$T_{tr} = \frac{M^2}{2} A_t A_r = 0, \tag{3.25}$$

$$T_{ti} = \frac{r^2}{2\ell^2} A_t' A_i' + \frac{M^2}{2} A_t A_i = 0, \tag{3.26}$$

$$T_{ri} = \frac{M^2}{2} A_r A_i = 0, \tag{3.27}$$

$$T_{ij} = \frac{r^2}{2\ell^2} A_i' A_j' + \frac{M^2}{2} A_i A_j = 0, \quad \text{con } i \neq j. \tag{3.28}$$

Ecuaciones de Proca

Por otro lado, las ecuaciones de Proca están dadas por (3.3), de modo que para expresarlas de manera explícita, es decir, en términos de las componentes del campo vectorial (A_t , A_r y A_k covariantes), antes las redefiniremos de la siguiente manera:

$$g^{\mu\mu'} \nabla_\mu F_{\mu'\nu} = M^2 A_\nu, \tag{3.29}$$

lo que lleva a poder expresar lúcidamente la ecuación (3.29) para el ansatz métrico diagonal, tal que

$$g^{tt} \nabla_t F_{t\nu'} + g^{rr} \nabla_r F_{r\nu'} + g^{ij} \nabla_i F_{j\nu'} = M^2 A_{\nu'}, \tag{3.30}$$

donde la derivada covariante para un tensor de rango 2 está definida por

$$\nabla_\mu F_{\nu\rho} = \partial_\mu F_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma F_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma F_{\nu\sigma}. \tag{3.31}$$

Haciendo uso de la derivada covariante (3.31) en las ecuaciones de Proca (3.30), se obtienen explícitamente las ecuaciones para las componentes del campo vectorial masivo A_μ .

Ecuación para la componente $A_t(r)$:

$$A_t'' + \left[\frac{P_k'}{2P_k} - \frac{f'}{2f} + \frac{1}{r} \right] A_t' - \frac{M^2 \ell^2}{r^2} A_t = 0, \tag{3.32}$$

⁶Debido a que tenemos una métrica diagonal, $G_{\mu\nu}$ solo tiene componentes no nulas diagonales, por lo que $T_{\mu\nu}$ debe anularse en los casos cuando $\mu \neq \nu$.

Ecuación para la componente $A_r(r)$:

$$A_r(r) = 0. \quad (3.33)$$

Ecuación para la componente $A_k(r)$:

$$A_k'' + \left[\frac{f'}{2f} + \frac{P'_k}{P_k} - \frac{P'_i}{P_i} + \frac{1}{r} \right] A_k' - \frac{M^2 \ell^2}{r^2} A_k = 0. \quad (3.34)$$

Hemos llegado a un resultado relevante ya que la expresión (3.33) lleva a que las ecuaciones (3.25) y (3.27) se satisfagan. Pero para que las ecuaciones restantes (3.26) y (3.28) se cumplan se tienen dos casos: el primero lleva a considerar $A_t(r) = 0$ (ver la subsección 3.3.4); dando así que el segundo caso sea tomar $A_k(r) = 0$.

Ecuaciones de campo de Einstein-Proca bajo el ansatz métrico (3.4)

Finalmente y sin pérdida de generalidad, consideraremos el caso en el que el único componente no trivial del campo vectorial es A_t . Este requisito es consistente con el hecho de que los componentes mixtos del tensor de energía-momento T_{tr} , T_{ti} y T_{ir} deben anularse ya que estamos considerando un ansatz métrico diagonal. Por lo tanto, bajo el ansatz (3.4) las ecuaciones de campo de Einstein-Proca consisten de las siguientes EDO no lineales para las funciones desconocidas $f(r)$, $P_i(r)$ y $A_t(r)$:

$$-\frac{r^2 P_i P_k''}{2 P_k} + \frac{3r^2 P_i P_k'^2}{8 P_k^2} - \frac{r^2 P_i P_l' P_k'}{8 P_l P_k} - \frac{r P_i P_k'}{2 P_k} + \frac{D(D+1)}{2} \ell^2 P_i = \frac{r^2 P_i}{4\ell^2 f} A_t'^2 + \frac{M^2 P_i}{4f} A_t^2, \quad (3.35)$$

$$-\frac{r^2 P_i P_k'^2}{8 P_k^2} + \frac{r^2 P_i P_l' P_k'}{8 P_l P_k} + \frac{r^2 P_i f' P_k'}{4f P_k} - \frac{D(D+1)}{2} \ell^2 P_i = -\frac{r^2 P_i}{4\ell^2 f} A_t'^2 + \frac{M^2 P_i}{4f} A_t^2, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{r^2 P_i''}{2} - \frac{r^2 f' P_i'}{4f} - \frac{r P_i'}{2} - \frac{r^2 P_i' P_k'}{4 P_k} + \frac{r^2 P_i'^2}{2 P_i} + \frac{r^2 P_i f''}{2f} + \frac{r P_i f'}{2f} - \frac{r^2 P_i}{4} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{r^2 P_i P_k''}{2 P_k} + \\ & \frac{r^2 P_i f' P_k'}{4f P_k} + \frac{r P_i P_k'}{2 P_k} + \frac{r^2 P_i P_l' P_k'}{8 P_l P_k} - \frac{3r^2 P_i P_k'^2}{8 P_k^2} - \frac{D(D+1)}{2} \ell^2 P_i = \frac{r^2 P_i}{4\ell^2 f} A_t'^2 + \frac{M^2 P_i}{4f} A_t^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$A_t'' + \left(\frac{1}{2} \frac{P'_k}{P_k} - \frac{1}{2} \frac{f'}{f} + \frac{1}{r} \right) A_t' - \frac{M^2 \ell^2}{r^2} A_t = 0, \quad (3.38)$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada r y los índices repetidos k y l denotan una suma de 1 a D .

Para resolver las ecuaciones de campo (3.35)-(3.38), es conveniente usar los dos siguientes *ansätze*

$$f(r) = r^{\pm 2z}, \quad (3.39)$$

$$P_i(r) = r^{a_i}, \quad (3.40)$$

donde z es un parámetro arbitrario y las a_i son constantes arbitrarias. Como resultado de sustituir estos *ansätze* en la resta de las ecuaciones de campo (3.35)-(3.37), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas para las a_i ,

$$P_i'' + \left(\frac{1 \pm z}{r} \right) P_i' + \frac{P_i' P_k'}{2 P_k} - \frac{P_i'^2}{P_i} + P_i \left[-2 \frac{P_k''}{P_k} + \frac{3 P_k'^2}{2 P_k^2} - \frac{2 P_k'}{r P_k} - \frac{1 P_l' P_k'}{2 P_l P_k} \mp \frac{z P_k'}{r P_k} - \frac{2 (z^2 - \ell^2 D(D+1))}{r^2} \right], \quad (3.41)$$

cuyas soluciones independientes son:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[\mp 2z - \sum_{m=3}^D a_m \pm \sqrt{-2 \sum_{m=3}^D a_m^2 - \sum_{m,n=3}^D a_m a_n \mp 4z \sum_{m=3}^D a_m - 12z^2 + 8D(D+1)\ell^2} \right], \quad (3.42)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left[\mp 2z - \sum_{m=3}^D a_m \mp \sqrt{-2 \sum_{m=3}^D a_m^2 - \sum_{m,n=3}^D a_m a_n \mp 4z \sum_{m=3}^D a_m - 12z^2 + 8D(D+1)\ell^2} \right], \quad (3.43)$$

y las constantes arbitrarias $a_3, a_4, a_5, \dots, a_D$ están sujetas a la siguiente restricción

$$\sum_{k=1}^D a_k = \mp 2z, \quad (3.44)$$

la cual exhibe dependencia de la dimensión D del espaciotiempo y del exponente crítico z , además permite una abundante cantidad de potencias de r para las funciones métricas $P_i(r)$ diferentes de las reportadas hasta ahora en la literatura [7].

Como todas las a_m que se encuentran dentro de (3.42) y (3.43) son constantes completamente arbitrarias, al elegir las como positivas, $a_m > 0$, tendremos un a_2 definido negativo, mientras que el signo de a_1 dependerá de si la suma del primer y segundo término es menor o mayor que el tercero; sin embargo, su diferencia puede hacerse positiva estableciendo adecuadamente el radio de curvatura ℓ . Por ejemplo, cuando $D = 2$, si $\ell^2 > \frac{z^2}{3}$, entonces $a_1 > 0$; cuando $D = 3$, si $\ell^2 > 3z^2$, con $a_3 \sim z$, entonces $a_1 > 0$. Por lo tanto, con la ayuda del radio de curvatura ℓ^2 (donde ℓ continua siendo un parámetro arbitrario de la teoría) podemos tener tantos a_m positivos como deseemos.

3.2.2 Campo de Proca

Dadas las funciones métricas (3.39) y (3.40), el siguiente paso consiste en obtener la ecuación para la componente no nula del campo vectorial masivo A_μ en términos del tensor métrico, de tal modo que obtenemos

$$A_t'' + \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^D a_k \mp z + 1 \right) \frac{A_t'}{r} - \frac{M^2 \ell^2}{r^2} A_t = 0, \quad (3.45)$$

cuya solución es

$$A_t = C_\pm r^{\frac{1}{2} \left(\pm z - \frac{1}{2} \sum_k a_k \pm \frac{1}{2} \sqrt{16M^2 \ell^2 + \left(\sum_k a_k \mp 2z \right)^2} \right)}. \quad (3.46)$$

Sin embargo, debido a que la solución obtenida para $A_t(r)$ debe ser solución a las ecuaciones de campo, para que todo el sistema de ecuaciones (3.35)-(3.38) se satisfaga simultáneamente entonces A_t adopta la forma

$$A_t = c r^{\pm z}, \quad (3.47)$$

donde la constante c está dada por

$$c = \frac{\sqrt{2D(D+1)} \ell^2}{z}. \quad (3.48)$$

En consecuencia, los parámetros de la teoría que resultan para que las ecuaciones de Einstein-Proca sean autoconsistentes (para más detalles ver el apéndice A) son:

$$M^2 = -\frac{z^2}{\ell^2}, \quad (3.49)$$

$$\sum_{k=1}^D a_k^2 = 4D(D+1)\ell^2 - 4z^2. \quad (3.50)$$

Una característica interesante y novedosa de la familia de soluciones de Lifshitz antes mencionada es que poseen un espectro con masas cuadradas negativas. Sin embargo, estos modos del campo vectorial masivo deben satisfacer la cota de Breitenlohner-Freedman para que el sistema sea estable (ver el siguiente capítulo).

3.3 Resultados

3.3.1 Espaciotiempo de Lifshitz espacialmente anisótropo

Hasta el momento, hemos obtenido las siguientes expresiones para las funciones que aparecen en nuestro ansatz métrico y la componente A_t del campo de Proca

$$f(r) = r^{\pm 2z}, \quad (3.51)$$

$$P_i(r) = r^{a_i}, \quad (3.52)$$

$$A_t = c r^{\pm z}, \quad (3.53)$$

donde la constante c está dada en (3.48), las constantes a_i están dadas por las expresiones (3.42), (3.43) y el resto de constantes arbitrarias $a_3, a_4, a_5, \dots, a_D$ están sujetas a la restricción (3.44).

Finalmente, la métrica resultante se expresa de la siguiente manera

$$ds^2 = \ell^2 \left(-r^{\pm 2z} dt^2 + \frac{1}{r^2} dr^2 + r^{a_i} dx^i dx_i \right), \quad (3.54)$$

la cual es invariante bajo las transformaciones de Lifshitz espacialmente anisótropas (2.9) si las coordenadas se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r &\longrightarrow r' = \lambda r, \\ t &\longrightarrow t' = \lambda^{\mp z} t, \\ x^i &\longrightarrow x'^i = \lambda^{-\frac{a_i(z, D, \ell^2)}{2}} x^i. \end{aligned} \quad (3.55)$$

El escalar de curvatura al sustituir las funciones métricas f y P_i en (3.13), se lee

$$R = -D(D + 1); \quad (3.56)$$

aquí notamos que el escalar de curvatura solo depende de la dimensión D , es constante, negativo e independiente del exponente crítico z . Hay varios trabajos en los que el término de masa y el escalar de curvatura dependen tanto de la dimensión D como del exponente dinámico z (ver, por ejemplo, [6, 7, 70]) dentro de la teoría de Einstein-Proca. Sería interesante encontrar nuevas soluciones y/o las condiciones bajo las cuales estas cantidades adquieren dependencia tanto de la dimensión D como del exponente crítico arbitrario z .

3.3.2 Fondo de Lifshitz espacialmente isótropo

En el transcurso de la sección 3, mostramos la construcción general de una nueva familia de spaciotiempos de Lifshitz espacialmente anisótropos (3.54) con exponente dinámico arbitrario z y curvatura escalar negativa constante en dimensiones $d + 1$ dentro del marco de la teoría de Einstein-Proca.

Sin embargo, aquí mostramos que es posible obtener un fondo de Lifshitz espacialmente isótropo a partir de los resultados obtenidos en la sección anterior. Por construcción, partimos de la misma acción dada en la sección 3.1 y haciendo $P_i(r) = p(r)$, obtenemos el siguiente ansatz métrico

$$ds^2 = \ell^2 \left(-f(r)dt^2 + p(r)dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right), \quad (3.57)$$

donde nuevamente $i = 1, 2, \dots, D$. Si además consideramos

$$f(r) = r^{\pm 2z}, \quad (3.58)$$

tal como en nuestro análisis anterior, como resultado de sustituir estos *ansätze* en las ecuaciones de campo de Einstein-Proca (3.35)-(3.38), obtenemos las siguientes expresiones para la función $p(r)$ y la componente A_t del campo vectorial masivo, respectivamente

$$p(r) = r^{\mp \frac{(D-1)z}{D^2}} \quad (3.59)$$

$$A_t = c r^{\pm z}, \quad (3.60)$$

donde la potencia de la función $p(r)$ muestra una dependencia de la dimensión D del spaciotiempo y el exponente crítico z . La componente no nula del campo vectorial masivo A_t resulta tener una constante real arbitraria c . Por consiguiente, los parámetros de la teoría son:

$$M^2 = -\frac{2D^2(D-1)}{3D-1}, \quad (3.61)$$

$$c = \sqrt{\frac{(3D-1)(2D-1)(D+1)}{4D^5}} z, \quad (3.62)$$

$$\ell^2 = \frac{(3D-1)z^2}{4D^3}. \quad (3.63)$$

Es importante remarcar que esta solución de Lifshitz posee un espectro con masas cuadradas negativas como en el caso espacialmente anisótropo. Como se señaló anteriormente, estos

modos del campo vectorial masivo deben satisfacer una cota de Breitenlohner-Freedman. Esto se discutirá en el apéndice B junto con la propiedad de la condición de energía nula.

De este modo, la métrica que resulta se expresa de la siguiente manera

$$ds^2 = \ell^2 \left(-r^{\pm 2z} dt^2 + \frac{1}{r^2} dr^2 + r^{\mp \frac{(D-1)z}{D^2}} dx^i dx_i \right), \quad (3.64)$$

cuya métrica es invariante bajo las transformaciones de Lifshitz (2.8) si las coordenadas se transforman de la siguiente manera:

$$r \longrightarrow r' = \lambda^\pm r, \quad (3.65)$$

$$t \longrightarrow t' = \lambda^{\mp z} t, \quad (3.66)$$

$$x^i \longrightarrow x'^i = \lambda^{\pm \frac{(D-1)z}{2D^2}} x^i. \quad (3.67)$$

El escalar de Ricci (3.13) tras la sustitución de las funciones métricas $f(r)$ y $p(r)$, así como la expresión para el radio de curvatura de Lifshitz ℓ dado por (3.13), da como resultado la expresión

$$R = -\frac{(D+1)(5D^2 - 2D + 1)}{(3D-1)}; \quad (3.68)$$

aquí notamos que el escalar de curvatura solo depende de la dimensión D , es constante y definido negativo.

Además nos exhortamos a examinar qué ocurre cuando t , r y x_i se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r &= \tilde{r}^{-\frac{2D^2}{(D-1)z}}, \\ t &= \tilde{t}, \\ x_i &= \tilde{x}_i, \end{aligned} \quad (3.69)$$

y $z = \frac{-2D^2}{D-1}$, llevándonos a reescribir la métrica (3.64) del siguiente modo

$$ds^2 = \ell^2 \left(-\tilde{r}^{\pm 2z} d\tilde{t}^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2} + \tilde{r}^{\pm 2} d\tilde{x}_i^2 \right). \quad (3.70)$$

A partir de este resultado podemos concluir que el fondo espacialmente isótropo de Lifshitz dado por (3.64) es difeomorfo al reportado en [6].

3.3.3 Geometría de Lifshitz isótropa desde otra perspectiva

Otra forma prudente de visualizar a los fondos de Lifshitz espacialmente isótropos es realizada en este apartado. Ahora, comenzaremos mostrando que si uno considera $P_i = r^2$,

el ansatz métrico se expresa de la siguiente manera

$$ds^2 = \ell^2 \left(-f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 dx_i^2 \right). \quad (3.71)$$

Como resultado de sustituir las funciones $P_i = r^2$ en las ecuaciones de campo de Einstein-Proca (3.35)-(3.38), obtenemos la siguiente función $f(r)$ como solución

$$f(r) = r^{2z}, \quad (3.72)$$

donde el parámetro z es el exponente crítico y puede ser positivo o negativo en principio.

Al sustituir (3.72) en (3.71), tenemos

$$ds^2 = \ell^2 \left(-r^{2z} dt^2 + \frac{1}{r^2} dr^2 + r^2 dx^i dx_i \right). \quad (3.73)$$

donde los parámetros de la teoría resultan ser

$$\ell^2 = \frac{(2z + D - 1)^2 + (3D - 1)(D + 1)}{4D(D + 1)}, \quad (3.74)$$

$$M^2 = \frac{2D^2(D + 1)}{(2z + D - 1)^2 + (3D - 1)(D + 1)} z, \quad (3.75)$$

$$c = \sqrt{\frac{2D(z - 1)}{M^2}}, \quad (3.76)$$

y el campo vectorial masivo se expresa seguidamente como

$$A_t = cr^z. \quad (3.77)$$

Como se puede ver, el campo vectorial masivo es real para valores de $z > 1$, lo que implica que M^2 también es positivo. Es conveniente resaltar que en este punto se recupera el fondo espacialmente isótropo de Lifshitz reportado en [6]. Mientras que si se tiene $z \leq 0$ el campo vectorial masivo resulta ser real si M^2 es negativo, ya que M^2 es proporcional a z . Para valores del exponente crítico entre $0 < z < 1$ no hay una solución de campo vectorial real.

Finalmente, el escalar de curvatura al sustituir las funciones métricas $f(r)$ y $p(r)$ en (3.13), se lee

$$R = -\frac{2D(D + 1) [4z^2 + 2D(2z + D + 1)]}{(2z + D - 1)^2 + (3D - 1)(D + 1)}, \quad (3.78)$$

aquí observamos que el escalar de curvatura depende de la dimensión D y el exponente crítico z , además este es negativo y constante para cualquier valor del parámetro z .

3.3.4 Espaciotiempo de Lifshitz en la teoría de Einstein-Proca con $A_i \neq 0$

Una solución nueva que también se deduce a partir de la formulación Einstein-Proca surge al suponer que las componentes A_i del campo vectorial masivo no son nulas, con $i = 1, \dots, D$. Por lo tanto, en esta subsección mostraremos qué ocurre si consideramos que las componentes A_i son diferentes de cero y la componente A_t se anula, contrariamente a lo realizado en el capítulo 3. En consecuencia, las ecuaciones de Einstein-Proca con constante cosmológica también se satisfacen y la solución geométrica da lugar a un spaciotiempo de Lifshitz con el mínimo de anisotropía espacial⁷.

Este tratamiento comienza al igual que el desarrollado en el capítulo 3: primero considerando las ecuaciones de Einstein-Proca (3.2) y (3.3); segundo, proponiendo el mismo ansatz métrico (3.4); tercero, asumiendo que las componentes del campo vectorial A_i son no nulas y que $A_t = 0$, tal que obtenemos las ecuaciones de Einstein-Proca correspondientes; cuarto, con base en lo planteado anteriormente, se propone también que las funciones $f(r)$ y $P_i(r)$ estén dadas por (3.39) y (3.40), respectivamente. En consecuencia, el sistema de ecuaciones resultante nos lleva a concluir que en realidad, si consideramos las componentes A_i no nulas, ya sea la masa M o el radio de curvatura ℓ se debe anular para que el sistema sea autoconsistente, un hecho que restringe fuertemente la geometría para que no sea del tipo Lifshitz. Afortunadamente, si permitimos que uno de los A_i no sea trivial, digamos $A_1 \neq 0$, esta restricción se puede evitar y se puede construir una métrica espacialmente anisótropa (con una cantidad mínima de anisotropía espacial), tal que el sistema de ecuaciones bajo la consideración $A_1 \neq 0$ adopta la forma

$$\sum_{k=1}^D a_k^2 + \sum_{k=1}^D a_k \sum_{l=1}^D a_l + 8\Lambda\ell^2 = -\frac{2}{\ell^2 r^{a_1}} [r^2 (A_1')^2 + M^2 \ell^2 A_1^2], \quad (3.79)$$

$$-\sum_{k=1}^D a_k^2 \pm 4z \sum_{k=1}^D a_k + \sum_{k=1}^D a_k \sum_{l=1}^D a_l + 8\Lambda\ell^2 = \frac{2}{\ell^2 r^{a_1}} [r^2 (A_1')^2 - M^2 \ell^2 A_1^2], \quad (3.80)$$

⁷Para más detalles consultar:

O. Gallardo, (2019), Espaciotiempo anisótropo de Lifshitz en la teoría Einstein-Proca (tesis de licenciatura), Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP.

$$\mp 4za_1 - 2a_1 \sum_{k=1}^D a_k + 8z^2 + \sum_{k=1}^D a_k^2 \pm 4z \sum_{k=1}^D a_k + \sum_{k=1}^D a_k \sum_{l=1}^D a_l + 8\Lambda\ell^2 = \frac{2}{\ell^2 r^{a_1}} [r^2 (A'_1)^2 + M^2 \ell^2 A_1^2], \quad (3.81)$$

$$\mp 4za_j - 2a_j \sum_{k=1}^D a_k + 8z^2 + \sum_{k=1}^D a_k^2 \pm 4z \sum_{k=1}^D a_k + \sum_{k=1}^D a_k \sum_{l=1}^D a_l + 8\Lambda\ell^2 = -\frac{2}{\ell^2 r^{a_1}} [r^2 (A'_1)^2 + M^2 \ell^2 A_1^2]. \quad (3.82)$$

La ecuación de Proca para la componente A_1 es:

$$A_1''(r) + \frac{1}{r} \left(1 - a_1 + \sum_{k=1}^D \frac{a_k}{2} \pm z \right) A_1'(r) - \frac{1}{r^2} M^2 \ell^2 A_1(r) = 0, \quad (3.83)$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada r y el índice j se refiere a las componentes $j = 2, \dots, D$. Resolviendo la ecuación (3.83), obtenemos que la componente $A_1(r)$ del campo vectorial A_μ es:

$$A_1 = C r^{\lambda_1 + \tau_1}, \quad (3.84)$$

donde C es una constante real arbitraria, λ_1 y τ_1 se expresan de la siguiente manera, respectivamente

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{2} - \sum_{k=1}^D \frac{a_k}{4} \mp \frac{z}{2},$$

$$\tau_1 = \sqrt{M^2 \ell^2 + \left(\frac{a_1}{2} - \sum_{k=1}^D \frac{a_k}{4} \mp \frac{z}{2} \right)^2}.$$

En vista de que esta solución también debe satisfacer las ecuaciones de Einstein-Proca, se obtiene que la masa al cuadrado es

$$M^2 = \frac{a_1}{4\ell^2} \left(\sum_{m=2}^D a_m \pm 2z \right). \quad (3.85)$$

Por consiguiente como fruto de resolver las ecuaciones de Einstein que se obtienen una vez considerada la relación (3.85), obtenemos que las funciones a_1 y a_j están determinadas por

las siguientes expresiones:

$$a_1 = \mp(D-1)z \pm \sqrt{-(3D-1)(D+1)z^2 - 8\Lambda\ell^2}; \quad (3.86)$$

$$a_j = \pm 2z, \quad j \in [2, D]. \quad (3.87)$$

Luego, la única componente del campo vectorial masivo se expresa como sigue

$$A_1 = Cr^{\frac{\mp(D-1)z}{2} \pm \frac{\sqrt{-(3D-1)(D+1)z^2 - 8\Lambda\ell^2}}{2}}. \quad (3.88)$$

Seguidamente, los parámetros de la teoría que se obtienen son:

$$M^2 = \frac{1}{2\ell^2} \left[-D(D-1)z^2 + Dz\sqrt{\Omega} \right], \quad (3.89)$$

donde $\Omega = -(3D-1)(D+1)z^2 - 8\Lambda\ell^2$. La constante de la componente magnética

$$C^2 = \frac{2\ell^2 [8\Lambda\ell^2 + 4z^2D(D+1)]}{-2z^2(D+1)(2D-1) - 8\Lambda\ell^2 \pm 2z(\pm\sqrt{\Omega})}. \quad (3.90)$$

Aquí, la constante (3.90) nos lleva a considerar que el parámetro lagrangiano Λ debe restringirse al siguiente rango de valores negativos, tal que Λ depende del exponente crítico z , del radio de Lifshitz ℓ y de la dimensión D de la siguiente forma

$$-D(D+1)\frac{z^2}{2\ell^2} \leq \Lambda < -D^2\frac{z^2}{2\ell^2}. \quad (3.91)$$

Puesto que (3.90) es la constante de la componente $A_1(r)$ dada por (3.88) del campo vectorial masivo A_μ , si no consideramos el rango de valores permitido para (3.91) tendremos genéricamente soluciones imaginarias para $A_1(r)$. Igualmente notamos que debido a la restricción (3.91), la relación del cuadrado de la masa (3.89) también se ve afectada y, por lo tanto, también se tiene un rango de validez asociado a ella, el cual resulta ser $0 < M^2 \leq D\frac{z^2}{\ell^2}$.

Por otra parte, otro resultado notable es el escalar de Ricci, que resulta ser el siguiente después de sustituir (3.86) en (3.13)

$$R = -\frac{1}{2\ell^2} \left[-2z^2(D^2-1) - 8\Lambda\ell^2 + 2z\sqrt{\Omega} \right], \quad (3.92)$$

puesto que el escalar de curvatura depende de la constante Λ , entonces, se tiene asociado un rango de validez, que está dado por $-(D+1)(D+2)\frac{z^2}{\ell^2} \leq R < -(D^2+1)\frac{z^2}{\ell^2}$.

En resumen, el resultado final es un spaciotiempo de Lifshitz con el mínimo de anisotropía espacial dentro de la formulación de Einstein-Proca y cuya métrica resultante se expresa de la siguiente forma:

$$ds^2 = \ell^2 \left[-r^{\pm 2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^{\mp(D-1)z \pm \sqrt{\Omega}} dx_1^2 + r^{\pm 2z} dx_j^2 \right], \quad (3.93)$$

donde $j = 2, \dots, D$ y $\Omega = -(3D - 1)(D + 1)z^2 - 8\Lambda\ell^2$. El espaciotiempo presentado es invariante bajo las transformaciones de Lifshitz, si las coordenadas transforman como

$$r \rightarrow r' = \lambda^{\pm} r; \quad (3.94)$$

$$t \rightarrow t' = \lambda^{\mp z} r; \quad (3.95)$$

$$x_1 \rightarrow x'_1 = \lambda^{\rho} x_1; \quad (3.96)$$

$$x_j \rightarrow x'_j = \lambda^{\mp z} x_j. \quad (3.97)$$

donde $\rho = \frac{\pm(D-1)z \mp \sqrt{\Omega}}{2}$.

Capítulo 4

Propiedades del fondo de Lifshitz anisótropo

En este capítulo examinaremos al menos dos propiedades importantes de nuestra familia de espaciotiempos de Lifshitz espacialmente anisótropos: la primera será hallar la cota de Breitenlohner-Freedman puesto que encontramos una geometría con curvatura negativa y espectro de masa cuadrado negativo M^2 ; la segunda propiedad será analizar la condición de energía nula.

4.1 Cota de Breitenlohner-Freedman

Es bien conocido que en el espaciotiempo AdS pueden aparecer taquiones (partículas con cuadrado de masa negativo), causando una inestabilidad solo si su masa cuadrada cae por debajo de cierto valor negativo. El rango permitido para la masa cuadrada negativa se obtiene calculando la cota de Breitenlohner-Freedman (BF), garantizando así la energía positiva del sistema y, por lo tanto, su estabilidad [71].

Por lo tanto, a pesar de que nuestro espaciotiempo de Lifshitz tenga un espectro de masa al cuadrado negativo dado por (3.49), dichos valores son permitidos para espaciotiempos con curvatura negativa si y solo si estos satisfacen la cota de BF, bajo la cual se garantizan valores positivos para la energía del sistema.

En particular, para encontrar la cota de BF respecto a nuestro caso, consideraremos el espaciotiempo de Lifshitz dado por el fondo (3.54) y las ecuaciones de Proca en el límite perturbativo en el que el campo vectorial masivo $A_\mu(t, r, x_i)$ no altera la estructura del

espaciotiempo. Las ecuaciones de Proca perturbadas son:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - M_p^2 A^\nu = 0, \quad (4.1)$$

las cuales conducen a la siguiente restricción en el espaciotiempo curvo

$$\nabla_\nu A^\nu = \partial_t A^t + \partial_r A^r + \partial_i A^i + \frac{r}{\ell^2} A_r = 0, \quad (4.2)$$

obtenido por la contracción de la ecuación (4.1) con ∇_ν .

De este modo se obtienen las siguientes ecuaciones de campo acopladas para las componentes del campo de Proca A_t , A_r y A_i ,

$$r^{\mp 2z} \partial_t^2 A_t - r^2 \partial_r^2 A_t - \partial_i \partial^i A_t - (1 \mp 2z) r \partial_r A_t \mp 2z r \partial_t A_r + M_p^2 \ell^2 A_t = 0, \quad (4.3)$$

$$r^{\mp 2z} \partial_t^2 A_r - r^2 \partial_r^2 A_r - \partial_i \partial^i A_r - 2r \partial_r A_r - (1 \pm 2z) r^{\mp 2z-1} \partial_t A_t + \frac{1+a_i}{r} \partial_i A_i + M_p^2 \ell^2 A_r = 0, \quad (4.4)$$

$$r^{\mp 2z} \partial_t^2 A_k - r^2 \partial_r^2 A_k - \partial_i \partial^i A_k - (1 \pm 2z) r \partial_r A_k \pm 2z r \partial_k A_r + M_p^2 \ell^2 A_k = 0, \quad (4.5)$$

donde $A_t = A_t(t, r, x_i)$, $A_r = A_r(t, r, x_i)$ y $A_k = A_k(t, r, x_i)$. Si además consideramos, por simplicidad, que el único componente del potencial vectorial distinto de cero sea A_t (siguiendo los trabajos [6, 70]), entonces se deduce de la ecuación (4.4) que $\partial_t A_t = 0$. Por lo tanto, la ecuación de campo (4.3) para el componente A_t del potencial vectorial adopta la forma (consulte [72, 73] para un tratamiento similar del campo vectorial perturbado en un espaciotiempo curvo dentro de un modelo de mundo membrana):

$$[r^2 \partial_r^2 + (1 \mp 2z) r \partial_r + r^{-a_i} \partial_i^2 - M_p^2 \ell^2] A_t(r, x^i) = 0. \quad (4.6)$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a x^i , la ecuación (4.6) se reescribe como una ecuación diferencial ordinaria

$$[r^2 \partial_r^2 + (1 \mp 2z) r \partial_r - k_i^2 r^{-a_i} - M_p^2 \ell^2] A_t(r, k_i) = 0, \quad (4.7)$$

la cual puede resolverse analíticamente para $D \geq 1$.

4.1.1 Resultados

Aplicando a la ecuación (4.7) la siguiente transformación

$$A_t(r, k_i) = r^{\frac{1}{2}(\pm 2z-1)} a_t(r, k_i), \quad (4.8)$$

nos conduce a la subsecuente ecuación diferencial para la función $a_t(r, k_i)$

$$-\frac{\partial^2 a_t(r, k_i)}{\partial r^2} + \left(\frac{4k_i^2}{r^{a_i}} + 4z^2 - 1 + 4M_p^2 \ell^2 \right) \frac{a_t(r, k_i)}{4r^2} = 0. \quad (4.9)$$

Aquí, la ecuación tiene una forma similar a la de Schrödinger con el potencial $V(r) = \frac{1}{4r^2} \left(\frac{4k_i^2}{r^{a_i}} + 4z^2 - 1 + 4M_p^2 \ell^2 \right)$. Por lo tanto, la solución exacta para esta ecuación con $D = 1$ y valores arbitrarios del parámetro z , se lee

$$a_t(r) = r^{\frac{1}{2}} \left[c_1 I_\alpha \left(\beta r^{-\frac{a_1}{2}} \right) + c_2 I_{-\alpha} \left(\beta r^{-\frac{a_1}{2}} \right) \right], \quad (4.10)$$

donde, c_1 y c_2 son constantes de integración, $I_{\pm\alpha} \left(\beta r^{-\frac{a_1}{2}} \right)$ representan funciones de Bessel modificadas de primera clase y orden $\pm\alpha$, con

$$\alpha = \pm \frac{2\sqrt{M_p^2 \ell^2 + z^2}}{a_1}, \quad \beta = \frac{2k_1}{a_1}. \quad (4.11)$$

Si sustituimos la función $a_t(r)$ en (4.8) obtenemos para el campo vectorial la siguiente expresión

$$A_t(r) = r^{\pm z} \left[c_1 I_\alpha \left(\beta r^{-\frac{a_1}{2}} \right) + c_2 I_{-\alpha} \left(\beta r^{-\frac{a_1}{2}} \right) \right]. \quad (4.12)$$

Al expresar las funciones de Bessel modificadas de primera clase en términos de series infinitas, tenemos

$$I_\alpha \left(\beta r^{-\frac{a_1}{2}} \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+\alpha)!} \left(\frac{\beta r^{-\frac{a_1}{2}}}{2} \right)^{2s+\alpha}, \quad (4.13)$$

$$I_{-\alpha} \left(\beta r^{-\frac{a_1}{2}} \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s-\alpha)!} \left(\frac{\beta r^{-\frac{a_1}{2}}}{2} \right)^{2s-\alpha}, \quad (4.14)$$

Más aún, para tener soluciones reales, requerimos que el orden de las funciones de Bessel sea real, por lo tanto, el radicando de α debe ser positivo, lo que lleva a

$$M_p^2 \geq -\frac{z^2}{\ell^2}, \quad (4.15)$$

que es la cota de Breitenlohner-Freedman para nuestro espaciotiempo de Lifshitz cuando $D = 1$.

Para los casos $D \geq 2$ hemos realizado un análisis detallado, pero no exhaustivo, del potencial de la ecuación tipo Schrödinger (4.9) para los valores permitidos de las constantes a_i , y hemos encontrado una gran cantidad de potenciales que van desde pozos de potencial

hasta barreras de potencial. Entre ellos hemos identificado una familia de pozos de potencial con paredes infinitas que necesariamente incluyen energías negativas y se asemejan a la estructura del potencial del oscilador armónico. Por lo tanto, la ecuación tipo Schrödinger correspondiente a esta clase de potenciales se puede resolver analíticamente y nos permite hacer un análisis completo del espectro de masa respectivo para valores concretos del exponente dinámico z y las constantes a_i .

Para los casos donde $D = 2, 3, 4$ obtenemos la siguiente ecuación maestra tipo Schrödinger para los valores de a_i y z que se muestran en la Tabla 4.1:

$$-\frac{\partial^2 a_t(r, k_i^2)}{\partial r^2} + \left(\xi_{D,z}^2 r^2 + \frac{z^2 - \frac{1}{4} + M_p^2 \ell^2}{r^2} \right) a_t(r, k_i^2) = -\zeta_{D,z}^2 a_t(r, k_i^2), \quad (4.16)$$

donde $\xi_{D,z}$ y $\zeta_{D,z}$ dependen de las k_i^2 acorde a la Tabla 4.1.

D	z	a_i	$\xi_{D,z}(k_i^2)$	$\zeta_{D,z}(k_i^2)$
2	3	$a_1 = -2, a_2 = -4$	k_2^2	k_1^2
3	4	$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -2$	k_2^2	$k_1^2 + k_3^2$
	5	$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -4$	$k_2^2 + k_3^2$	k_1^2
4	5	$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -2, a_4 = -2$	k_2^2	$k_1^2 + k_3^2 + k_4^2$
	6	$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -2, a_4 = -4$	$k_2^2 + k_4^2$	$k_1^2 + k_3^2$
	7	$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -4, a_4 = -4$	$k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$	k_1^2

Tabla 4.1: Los valores especiales de D , z y a_i correspondientes a las expresiones de $\xi_{D,z}(k_i^2)$ y $\zeta_{D,z}(k_i^2)$ para las cuales la ecuación tipo Schrödinger (4.16) brinda soluciones analíticas con energía finita.

A medida que la dimensión D del espaciotiempo aumenta, también aumenta el número de casos que obedecen a la ecuación maestra tipo Schrödinger (4.16). La solución exacta para esta ecuación es

$$a_t(r, k_i^2) = e^{-\frac{\xi_{D,z} r^2}{2}} r^{2\rho - \frac{1}{2}} \left[\hat{c}_1 U(n, \rho, (\xi_{D,z} r^2)) + \hat{c}_2 L_{-n}^{2\rho - 1}(\xi_{D,z} r^2) \right], \quad (4.17)$$

donde \hat{c}_1 y \hat{c}_2 son constantes de integración, $U(n, \rho, k_2 r^2)$ es la función hipergeométrica confluyente y $L_{-n}^{2\rho - 1}(k_2 r^2)$ denota los polinomios de Laguerre generalizados, con

$$n = \frac{\zeta_{D,z}^2}{4\xi_{D,z}} + \rho, \quad \rho = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{M_p^2 \ell^2 + z^2}). \quad (4.18)$$

Sin embargo, se puede demostrar que las últimas funciones son divergentes y, por lo tanto, establecemos que $\hat{c}_2 = 0$. Por lo tanto, solo tendremos en cuenta el término que contiene a la función hipergeométrica confluyente como la solución a la ecuación tipo Schrödinger (4.16).

Mediante la sustitución $a_t(r, \xi_D, z, \zeta_D, z)$ en (4.8), obtenemos la expresión final para la componente A_t genérica (Fig. 4.1)

$$A_t(r, k_i^2) = \hat{c}_1 e^{-\frac{\xi_{D,z} r^2}{2}} r^{\pm z + 2\rho - 1} U(n, \rho, (\xi_{D,z} r^2)). \quad (4.19)$$

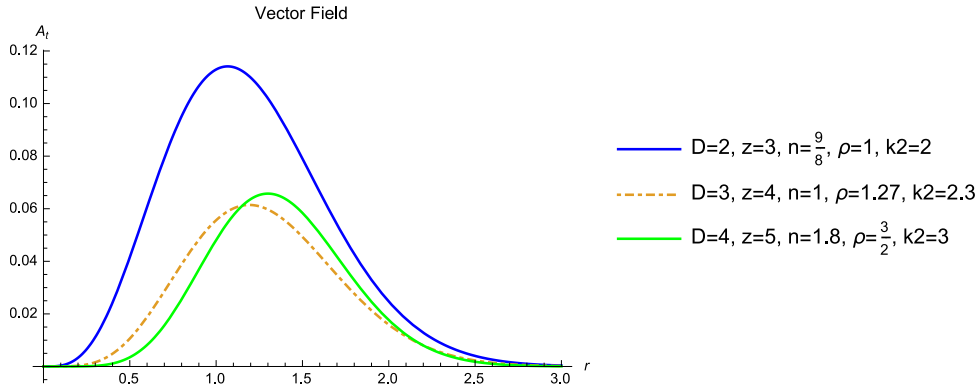


Figura 4.1: Los perfiles de A_t asociados a $D = 2$, $D = 3$, $D = 4$, donde $\hat{c}_1 = 1$ para todos los casos.

Es notable que para que estas soluciones sean reales, debe cumplirse la misma condición dada en (4.15) para todos los casos considerados en la Tabla 4.1. Por lo tanto, hemos obtenido la misma cota de Breitenlohner-Freedman que para el caso $D = 1$.

Independientemente de lo realizado, aquí nos gustaría comentar sobre un enfoque alternativo para derivar la cota de Breitenlohner-Freedman para nuestro fondo gravitacional. En [70] los autores comienzan el tratamiento partiendo de las ecuaciones de Proca (4.1) e inmediatamente consideran solo la componente eléctrica $A_t = A_t(r) dt$ no nula en el bulto. Al proceder como ellos y usar la métrica dada por (3.54), encontramos que

$$A_t(r) = \check{c}_1 r^{\tau_{\pm} + \lambda_{\pm}} + \check{c}_2 r^{\tau_{\pm} + \lambda_{\mp}}, \quad (4.20)$$

donde $\tau_{\pm} = \pm z$ y $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{M^2 \ell^2 + z^2}$. Por consiguiente, hemos obtenido una vez más la misma cota de Breitenlohner-Freedman (4.15) para el campo vectorial masivo.

Por esta razón, podemos concluir que el espectro de masas de la solución dada por (3.49) satisface la cota de Breitenlohner-Freedman luego de la sustitución en (4.15) de una

manera directa y se cumple para cualquier dimensión D cuando $A_t = A_t(r, k_i)$ y en este sentido lo obtenido produce una configuración de campo estable.

Un aspecto importante que vale la pena resaltar son los observables dentro de los sistemas gravitacionales ya que estos pueden ser difíciles de caracterizar, debido a la naturaleza dinámica del espaciotiempo, pero al final estos observables se pueden definir en la frontera de tales fondos gravitacionales (como en el caso de las geometrías Lifshitz) [10]. Siguiendo el mismo argumento que para la correspondencia AdS/CFT en [9] dado nuestro fondo de Lifshitz podemos interpretar \tilde{c}_2 en (4.20) como el modo normalizable para el operador dual de dimensión Lifshitz $\tau_- + \lambda_-$.

4.2 La condición de energía nula

Las ecuaciones de Einstein se pueden obtener sin especificar la materia, de modo que $T_{\mu\nu}$ es arbitrario. Por lo tanto, es muy importante comprender las propiedades de las ecuaciones de Einstein que tienen una cierta variedad de fuentes (campos). En consecuencia, es conveniente imponer condiciones de energía que restrinjan la arbitrariedad de $T_{\mu\nu}$. Luego, para calcular estas condiciones de energía debemos construir escalares de $T_{\mu\nu}$, contrayéndolos con vectores arbitrarios temporales ζ^μ o vectores nulos arbitrarios ξ^μ .

Es importante mencionar que hay varios tipos de condiciones de energía, que son apropiadas para diferentes circunstancias. En nuestro caso, se supone generalmente que la condición de energía nula (NEC, por sus siglas en inglés) proporciona una condición suficiente para tener un dual holográfico físicamente viable en el límite semiclásico [74].

A pesar de que se puede calcular la NEC usando el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, también se puede escribir esta condición en términos del tensor de Ricci. Siguiendo el tratamiento dado en [30], la NEC en términos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y un vector nulo arbitrario, es la siguiente

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0, \quad (4.21)$$

o bien, expresada explícitamente

$$R_{tt}(\xi^t)^2 + R_{rr}(\xi^r)^2 + R_{ij}\xi^i\xi^j \geq 0. \quad (4.22)$$

Si usamos nuestro fondo gravitacional dado por (3.54), un cálculo directo de los componentes

del tensor de Ricci da como resultado

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{g_{tt}}{\ell^2} \left[z^2 \pm \frac{z}{2} \sum_{k=1}^D a_k \right], \\
R_{rr} &= -\frac{g_{rr}}{\ell^2} \left[z^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^D a_k^2 \right], \\
R_{ij} &= -\frac{g_{ij}}{\ell^2} \left[\pm z + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^D a_k \right] \frac{a_i}{2}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Al sustituir estas expresiones en (4.22) obtenemos

$$\left[z^2 \pm \frac{z}{2} \sum_{k=1}^D a_k \right] r^{\pm 2z} (\xi^t)^2 - \left[z^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^D a_k^2 \right] r^{-2} (\xi^r)^2 - \left[\pm z + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^D a_k \right] \frac{a_i}{2} r^{a_i} (\xi^i)^2 \geq 0. \tag{4.24}$$

Posteriormente, sustituyendo las expresiones explícitas de $\sum_{k=1}^D a_k$ y $\sum_{k=1}^D a_k^2$, que están dadas por (3.44) y (3.50), respectivamente, en la desigualdad (4.24), conseguimos lo siguiente

$$-D(D+1)\ell^2 r^{-2} (\xi^r)^2 \geq 0. \tag{4.25}$$

En consecuencia, la desigualdad (4.25) no puede satisfacerse para un vector nulo arbitrario ya que se suprime solo cuando ξ^r es idénticamente cero. En otras palabras, la NEC solo se satisface cuando se aplica a lo largo de las direcciones $t - x_i$. Es importante enfatizar que incluso cuando la NEC no se satisface para todas las direcciones del bulto de nuestro espaciotiempo, es decir, para t, r, x_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots, D$, sí lo hace a lo largo de las $D+1$ direcciones de la frontera, es decir, en la dirección del tiempo t y las direcciones espaciales x_i de la teoría de campo.

Capítulo 5

Agujeros negros de Lifshitz

La idea principal en esta sección es buscar configuraciones de agujeros negros de Lifshitz, ya que estos describen situaciones físicas dentro del ámbito de la física de la materia condensada donde los sistemas exhiben un comportamiento particular (transiciones de fase) a temperatura finita y preservan la simetría de Lifshitz (por lo menos asintóticamente).

Nosotros realizaremos la búsqueda de este tipo de configuraciones gravitacionales dentro de la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón. En este contexto, notamos que al agregar un término adicional a la acción de la gravedad dilatónica presentada en [7], es decir, al reemplazar la constante cosmológica Λ por un potencial escalar que depende del campo dilatónico, obtenemos una familia más general de soluciones de agujeros negros tipo Lifshitz que reproducen como casos particulares las configuraciones gravitacionales ya conocidas reportadas en [7, 62, 67].

5.1 Formulación Einstein-Maxwell-dilatón

Comenzamos considerando una acción en la que la materia aparece como un campo escalar acoplado a un campo de norma. La acción es la siguiente:

$$S = \int d^{D+2}x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4}F^2 e^{\lambda\phi} - V(\phi) \right], \quad (5.1)$$

donde R es el escalar de curvatura, ϕ es el campo dilatónico, A_μ es un campo vectorial, λ es una constante de acoplamiento y $V(\phi)$ es el potencial escalar que depende de ϕ . En la acción presentada, es importante notar que hemos sustituido la constante cosmológica por el potencial $V(\phi)$, como en el caso de una teoría de supergravedad [75]. Enseguida, de la

acción (5.1) derivamos sus ecuaciones de campo y obtenemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + F_{\mu\rho} F_\nu^\rho e^{\lambda\phi} \right] - \frac{1}{4} \left[(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}F^2 e^{\lambda\phi} + 2V(\phi) \right] g_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

$$\nabla^\mu \left(e^{\lambda\phi} F_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (5.3)$$

$$\square\phi = \frac{\lambda}{4} F^2 e^{\lambda\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (5.4)$$

Ansatz métrico de agujero negro tipo Lifshitz

Para resolver las ecuaciones de campo (5.2)-(5.4), asumimos el siguiente *ansatz* geométrico de agujero negro tipo Lifshitz dado por

$$ds^2 = \ell^2 \left[-\mathbf{f}(\mathbf{r}) r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 \mathbf{f}(\mathbf{r})} + r^2 dx_i dx^i \right], \quad i = 1, 2, \dots, D. \quad (5.5)$$

donde z es el exponente crítico, $f(r)$ es el factor de ennegrecimiento y es una función arbitraria de la coordenada holográfica. En forma matricial la métrica (5.5) en el orden t, r, x_i , se expresa de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \ell^2 \begin{pmatrix} -f(r)r^{2z} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 f(r)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r^2 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel (3.6) diferentes de cero bajo el *ansatz* métrico (5.5) son los siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{z}{r} + \frac{f'}{2f}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} r^{2z+1} f (2zf + rf'), \\ \Gamma_{rr}^r &= -\frac{1}{r} - \frac{f'}{2f}, & \Gamma_{ij}^r &= -r^3 f \delta_{ij}, \\ \Gamma_{jr}^i &= \frac{1}{r} \delta_j^i, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada r .

Tensor de Ricci

Las componentes no nulas del tensor de Ricci (3.8) al usar los símbolos de Christoffel (5.7) son las siguientes:

$$R_{tt} = \frac{1}{2} r^{2z} f [r^2 f'' + (3z + D + 1) r f' + 2z(z + D) f], \quad (5.8)$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2r^2 f} [r^2 f'' + (3z + D + 1) r f' + 2(z^2 + D) f], \quad (5.9)$$

$$R_{ij} = -r^2 [r f' + (z + D) f] \delta_{ij}, \quad (5.10)$$

Escalar de curvatura

Bajo el *ansatz* métrico (5.5), el escalar de Ricci (3.12) se expresa de la siguiente forma

$$R = -\frac{1}{\ell^2} [r^2 f'' + (3z + 2D + 1) r f' + (2z^2 + 2zD + D(D + 1)) f] \quad (5.11)$$

Tensor de Einstein

Con los cálculos realizados anteriormente, ahora podemos deducir las componentes no nulas del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, tal que tenemos

$$G_{tt} = -\frac{r^{2z} f}{2} (Dr f' + D(D + 1) f), \quad (5.12)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{2r^2 f} (Dr f' + D(2z + D - 1) f), \quad (5.13)$$

$$G_{ij} = \frac{r^2}{2} (r^2 f'' + (3z + 2D - 1) r f' + (2z(z + D - 1) + D(D - 1)) f) \delta_{ij}. \quad (5.14)$$

Tensor de energía momento

De la ecuación (5.2) se observa que el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ es

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + F_{\mu\rho} F_\nu^\rho e^{\lambda\phi} \right] - \frac{1}{4} \left[(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} F^2 e^{\lambda\phi} + 2V(\phi) \right] g_{\mu\nu}, \quad (5.15)$$

donde $F_{\mu\rho} F_\nu^\rho = g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} = g^{tt} F_{\mu t} F_{\nu t} + g^{rr} F_{\mu r} F_{\nu r} + g^{ij} F_{\mu i} F_{\nu j}$; para el caso en que solo la componente temporal del campo vectorial A_t es no trivial obtenemos $F^2 = 2g^{rr} g^{tt} A_t'^2$,

además, $(\nabla\phi)^2 = g^{rr}\phi'^2$, dando que el tensor (5.15) se reescribe como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\left(g^{tt}F_{\mu t}F_{\nu t} + g^{rr}F_{\mu r}F_{\nu r} + g^{ij}F_{\mu i}F_{\nu j}\right)e^{\lambda\phi} \\ &- \frac{1}{4}\left[g^{rr}\phi'^2 + g^{rr}g^{tt}A_t'^2e^{\lambda\phi} + 2V(\phi)\right]g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

Luego, las componentes diagonales del tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ son:

$$T_{tt} = \frac{r^{2z}f}{2}\left[\frac{r^{-2(z-1)}}{2\ell^2}A_t'^2e^{\lambda\phi} + \frac{r^2f}{2}\phi'^2 + \ell^2V(\phi)\right], \quad (5.17)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2r^2f}\left[-\frac{r^{-2(z-1)}}{2\ell^2}A_t'^2e^{\lambda\phi} + \frac{r^2f}{2}\phi'^2 - \ell^2V(\phi)\right], \quad (5.18)$$

$$T_{ij} = -\frac{r^2}{2}\left[-\frac{r^{-2(z-1)}}{2\ell^2}A_t'^2e^{\lambda\phi} + \frac{r^2f}{2}\phi'^2 + \ell^2V(\phi)\right]\delta_{ij}. \quad (5.19)$$

5.1.1 Ecuaciones de Einstein-Maxwell-dilatón bajo el ansatz métrico (5.5)

Finalmente y sin pérdida de generalidad, las ecuaciones de campo dadas por (5.2)-(5.4) en términos del ansatz métrico (5.5) se expresan explícitamente de la siguiente manera:

$$-(Drf' + D(D+1)f) = \frac{r^{-2(z-1)}}{2\ell^2}A_t'^2e^{\lambda\phi} + \frac{r^2f}{2}\phi'^2 + \ell^2V(\phi) \quad (5.20)$$

$$Drf' + D(2z + D - 1)f = -\frac{r^{-2(z-1)}}{2\ell^2}A_t'^2e^{\lambda\phi} + \frac{r^2f}{2}\phi'^2 - \ell^2V(\phi) \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} r^2f'' + (3z + 2D - 1)rf' + (2z(z + D - 1) + D(D - 1))f = \\ \frac{r^{-2(z-1)}}{2\ell^2}A_t'^2e^{\lambda\phi} - \frac{r^2f}{2}\phi'^2 - \ell^2V(\phi), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$A_t'' + \left[\lambda r\phi' + (D - z + 1)\right]\frac{A_t'}{r} = 0, \quad (5.23)$$

$$\phi'' + \left(\frac{z + D + 1}{r} + \frac{f'}{f}\right)\phi' = -\frac{\lambda e^{\lambda\phi}r^{-2z}}{2\ell^2f}A_t'^2 + \frac{\ell^2}{r^2f}\frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (5.24)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones de campo (5.20)-(5.24), obtenemos las siguientes soluciones para el campo escalar, el campo de norma, el potencial escalar y la función $f(r)$, respectivamente

$$\phi = \sqrt{Db}\ln r, \quad (5.25)$$

$$A_t = q r^a, \quad (5.26)$$

$$V(\phi) = \frac{b}{q^2} \left[\frac{D(b-a)}{a} m_2 e^{-b\phi/\sqrt{Db}} - a + 1 \right], \quad (5.27)$$

y

$$f(r) = 1 + m_1 r^{-a} + m_2 r^{-b}, \quad (5.28)$$

donde m_1 y m_2 son constantes arbitrarias, y $a = z + D$, $b = 2(z - 1)$, $\lambda = -\frac{2D}{\sqrt{Db}}$ y $\ell^2 = \frac{q^2 a}{b}$. Además, dado que el parámetro b debe ser positivo de acuerdo con la definición de λ , esta restricción conduce a la condición de que nuestra solución solo admite exponentes críticos $z > 1$.

5.1.2 Agujero negro de Lifshitz

Finalmente obtenemos configuraciones de agujero negro de Lifshitz dentro de la teoría antes mencionada, para cualquier dimensión D y valor arbitrario del exponente crítico z dadas por

$$ds^2 = \ell^2 \left[- \left(1 + \frac{m_1}{r^a} + \frac{m_2}{r^b} \right) r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{m_1}{r^a} + \frac{m_2}{r^b} \right) r^2} + r^2 dx_i dx^i \right], \quad (5.29)$$

Aquí, tenemos varias configuraciones de agujero negro de Lifshitz (asintóticamente) si $f(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$, es decir, si el exponente crítico es $z > 1$. Vale la pena notar que si consideramos que las constantes de integración m_1 y m_2 se transforman de la siguiente forma

$$\begin{aligned} m_1 &\rightarrow m'_1 = \lambda^{\pm a} m_1, \\ m_2 &\rightarrow m'_2 = \lambda^{\pm b} m_2, \end{aligned} \quad (5.30)$$

cuando $r \rightarrow r' = \lambda^{\pm 1} r$, la solución completa del agujero negro conservará las simetrías anisótropas de Lifshitz. Por lo tanto, la configuración inicial de agujero negro de Lifshitz (5.29) con los parámetros m_1 y m_2 bajo una transformación anisótropa da lugar a una solución de agujero negro de Lifshitz con los parámetros m'_1 y m'_2 , preservando la forma de la métrica bajo las simetrías (2.8).

El horizonte de eventos r_H para la familia de soluciones de agujero negro de Lifshitz encontrada, se obtiene resolviendo la ecuación polinómica

$$r_H^{2(z-1)} + m_1 r_H^{z-D-2} + m_2 = 0. \quad (5.31)$$

En este punto es relevante mencionar que dentro de esta nueva familia de configuraciones de agujeros negros, tenemos una gran cantidad de casos particulares debido al carácter arbitrario de la dimensión D y el exponente crítico z . Por ejemplo, obtenemos como casos especiales las soluciones derivadas en [7, 62] y uno de los casos abordados en [67], es decir, cuando $m_2 = 0$ recuperamos la solución de agujero negro [7], cuando $m_1 = 0$, $z = 2$ y $D = 2$ obtenemos la configuración dada en [62], finalmente cuando $m_1 = 0$ y z es arbitrario, obtenemos una de las soluciones derivadas en [67].

5.2 Invariantes geométricos

Se sabe que las configuraciones de agujero negro desarrollan singularidades de curvatura genéricas que deben estar vestidas por un horizonte de eventos regular para evitar obtener una singularidad desnuda. Es por ello que en esta sección nosotros corroboramos este hecho calculando además del escalar de Ricci (5.11) otros invariantes geométricos como la contracción del tensor de Ricci consigo mismo $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ y el invariante de Kretschmann $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Posteriormente realizamos un análisis detallado de su comportamiento en el origen (cuando $r \rightarrow 0$), en el horizonte de eventos $r = r_H$ y en el infinito, es decir, cuando $r \rightarrow \infty$. Partiendo de la configuración gravitacional (5.29), obtenemos que las expresiones explícitas para los invariantes geométricos son las siguientes:

- **Escalar de curvatura**

El escalar de curvatura (5.11) se reescribe de la siguiente manera

$$R = -\frac{1}{\ell^2} \left[(z^2 + a^2 + D) - m_1 \frac{D(z-1)}{r^a} + m_2 \frac{(D+2)^2 - 2z(D+1) + D}{r^b} \right]. \quad (5.32)$$

Al analizar la expresión (5.32) es evidente que ésta es regular en el horizonte de eventos; también notamos que incluso cuando R depende de varios parámetros, solo diverge cuando $r \rightarrow 0$; finalmente, dado que tanto a y b son positivos, es fácil ver que $R \rightarrow C < 0$, cuando $r \rightarrow \infty$, concluyendo así que tenemos asintóticamente un agujero negro de Lifshitz.

- **Contracción del tensor de Ricci consigo mismo**

Por definición tenemos que la contracción del tensor de Ricci consigo mismo está dada por

$$I = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}R_{\mu\nu}R_{\mu'\nu'} = (g^{tt})^2R_{tt}^2 + (g^{rr})^2R_{rr}^2 + g^{ij}g^{lk}R_{il}R_{jk}. \quad (5.33)$$

Al sustituir el *ansatz* métrico (5.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\ell^4} \left[r^4 f''^2 + (9z^2 + 6zD + 6z + D^2 + 4D + 1)r^2 f'^2 + 2(3z + D + 1)r^3 f'' f' \right. \\
&+ 2(2z^4 + 2z^3 D + z^2 D(D + 3) + 2zD^2 + D^2(D + 1))f^2 + 2(2z^2 + D(z + 1))r^2 f'' f \\
&+ \left. 2(6z^3 + z^2(5D + 2) + zD(D + 6) + D(3D + 1))r f' f \right]. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Luego, al sustituir (5.29) en la expresión (5.34), obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\ell^2} \left\{ (D + z^2) [(z + D)^2 + D + z^2] + m_1^2 \frac{\beta_1(z, D)}{r^{2a}} \right. \\
&+ \left. m_2^2 \frac{\beta_2(z, D)}{r^{2b}} + m_1 \frac{\beta_3(z, D)}{r^a} + m_2 \frac{\beta_4(z, D)}{r^b} + m_1 m_2 \frac{\beta_5(z, D)}{r^{a+b}} \right\}, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

donde por simplicidad obtenemos el invariante geométrico en términos de las siguientes constantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ y β_5 las cuales dependen de la dimensión D y el exponente crítico z y están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= D^2(z - 1)^2, & \beta_2 &= (D + 1) [D^2 + D(z - 4)(z - 2) + 2(z - 2)^2], \\
\beta_3 &= -2D(z - 1)(D + z^2), & \beta_4 &= 2 [D^3 + 4D^2 + D(2 + 3z + z^2 - z^3) - 2(z - 2)z^2], \\
\beta_5 &= 2D(D + 1)(z - 1)(z - 2). \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Igualmente notamos que este invariante geométrico también diverge solo cuando $r \rightarrow 0$ y es regular en el horizonte de eventos $r = r_H$. Además, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \rightarrow C_1$, es decir, es positivo cuando $r \rightarrow \infty$, evidenciando que tenemos una configuración asintóticamente de agujero negro de Lifshitz.

- **El invariante de Kretschmann**

El invariante de Kretschmann se define como

$$\mathcal{K} = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{5.37}$$

de modo que al desarrollarlo, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\tau\tau'} g^{\sigma\sigma'} R_{\mu\nu\tau\sigma} R_{\mu'\nu'\tau'\sigma'} \\
&= (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{trtr})^2 + (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{trrt})^2 + (g^{tt})^2 g^{ij} g^{kl} R_{tikl} R_{tjlt} \\
&+ (g^{tt})^2 g^{ij} g^{kl} R_{tikl} R_{tjlt} + (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{rttr})^2 + (g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{rttr})^2 \\
&+ (g^{rr})^2 g^{ij} g^{kl} R_{rikr} R_{rjlr} + (g^{rr})^2 g^{ij} g^{kl} R_{rikr} R_{rjlr} + (g^{tt})^2 g^{ij} g^{kl} R_{ittk} R_{jtll} \\
&+ (g^{tt})^2 g^{ij} g^{kl} R_{ittk} R_{jtll} + (g^{rr})^2 g^{ij} g^{kl} R_{irrk} R_{jrll} + (g^{rr})^2 g^{ij} g^{kl} R_{irrk} R_{jrll} \\
&+ g^{ij} g^{kl} g^{mn} g^{pq} R_{ikmp} R_{jlnq} \\
&= 2(g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{trtr})^2 + 2(g^{tt})^2 g^{ij} g^{kl} R_{tikl} R_{tjlt} + 2(g^{tt})^2 (g^{rr})^2 (R_{rttr})^2 \\
&+ 2(g^{rr})^2 g^{ij} g^{kl} R_{rikr} R_{rjlr} + 2(g^{tt})^2 g^{ij} g^{kl} R_{ittk} R_{jtll} + 2(g^{rr})^2 g^{ij} g^{kl} R_{irrk} R_{jrll}. \quad (5.38)
\end{aligned}$$

Al escribir de manera explícita sus componentes en términos del *ansatz* métrico (5.5) encontramos que la expresión para el invariante \mathcal{K} resulta ser

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{1}{\ell^4} \left[r^4 f''^2 + 2(3z+1)r^3 f' f'' + 4z^2 r^2 f f'' + (9z^2 + 6z + 2D + 1) f'^2 r^2 \right. \\
&\quad \left. + 4(3z^3 + z^2 + D(z+1)) r f f' + 2(2z^4 + 2Dz^2 + D(D-1)) f^2 \right]. \quad (5.39)
\end{aligned}$$

Después, si sustituimos la solución (5.29) en la expresión del invariante geométrico (5.39), obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{1}{\ell^4} \left\{ 2 \left[2z^2(z^2 + D) + D(D+1) \right] + m_1^2 \frac{\Omega_1(z, D)}{r^{2a}} + m_2^2 \frac{\Omega_2(z, D)}{r^{2b}} \right. \\
&\quad \left. + m_1 \frac{\Omega_3(z, D)}{r^a} + m_2 \frac{\Omega_4(z, D)}{r^b} + m_1 m_2 \frac{\Omega_5(z, D)}{r^{a+b}} \right\}. \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Aquí, el invariante de Kretschmann resulta tener una expresión simple si introducimos las siguientes constantes Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 y Ω_5 que dependen del exponente crítico z y la dimensión D , dadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= D [D^3 - 2D^2(z-1) + 2(z-1)^2 + D(z^2 - 2)], & \Omega_2 &= 2(D+1) [D + 2(z-2)^2], \\
\Omega_3 &= 4D(z-1) [(D-z)z - 1], & \Omega_4 &= 4 [D(D+3) - 2(z-2)z^2], \\
\Omega_5 &= 4D(z-1)(2z-3). & & (5.41)
\end{aligned}$$

En consecuencia, podemos realizar el análisis necesario para saber si tenemos una configuración de agujero negro. En este caso el invariante de Kretschmann como se puede observar también diverge solo cuando $r \rightarrow 0$, es regular en el horizonte de eventos y tiene un comportamiento asintótico que tiende a una constante positiva $\mathcal{K} \rightarrow C_2 > 0$, respaldando así nuestra

interpretación de la nueva familia de soluciones de agujero negro de Lifshitz con exponente crítico arbitrario z encontrada dentro del marco de la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón complementada con un potencial escalar y definida en cualquier dimensión espaciotemporal D .

5.3 Termodinámica de Agujeros Negros de Lifshitz

Uno de los aspectos fascinantes de la Relatividad General corresponde a la existencia de agujeros negros, caracterizados por estar envueltos en un horizonte de eventos y que todo objeto clásico que pasa por éste no puede retornar. Sin embargo, gracias al trabajo realizado por S. Hawking [76], se logró demostrar que el horizonte en sí emite radiación con una temperatura característica T_H . Adicionalmente, mediante el trabajo de J. Bekenstein [77], se mostró que los agujeros negros poseen una entropía que es proporcional al área del horizonte de eventos. Concretamente, J. Bardeen, B. Carter y S. Hawking en 1973 formularon un conjunto de cuatro leyes que gobiernan el comportamiento de los agujeros negros [78] y que poseen una coincidencia sorprendente con las cuatro leyes de la termodinámica clásica. Por supuesto, como hemos mencionado precedentemente estas formulaciones fueron complementadas con el descubrimiento de Hawking que tuvo lugar un año más tarde, donde se establece que un agujero negro puede emitir radiación térmica, reforzando las ideas de que efectivamente estos objetos se comportan como sistemas termodinámicos. Por ello, enunciaremos brevemente cada una de estas leyes.

Ley cero

De termodinámica sabemos que un sistema eventualmente llega a un estado de equilibrio térmico con su alrededor. Para un agujero negro estacionario, por otro lado, tenemos la propiedad de que independientemente de la existencia de asimetrías iniciales, eventualmente esta configuración llegará a poseer simetría esférica, lo cual lleva a enunciar la ley cero análoga en relatividad general

La gravedad de superficie κ de un agujero negro estacionario es uniforme sobre todo el horizonte de eventos.

Esta es similar a la ley cero de la termodinámica donde la gravedad de superficie¹ en el horizonte sustituye el comportamiento del concepto de temperatura.

Primera Ley

La variación de la masa δM , del momento angular δJ y del área de superficie δA están relacionados como

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J. \quad (5.43)$$

Aquí, el término $\Omega_H \delta J$ hace referencia al incremento en el momento angular del horizonte de eventos. La relación presentada anteriormente también es conocida como la fórmula de Smarr.

Segunda Ley

Un problema que puede plantearse a la analogía entre agujeros negros y sistemas termodinámicos es que en principio nada escapa del agujero negro y en un sistema termodinámico cerrado la entropía siempre aumenta. Entonces, la segunda ley se enuncia así

El área de superficie de un agujero negro nunca puede disminuir, es decir

$$\delta A \geq 0. \quad (5.44)$$

Tercera Ley

La gravedad de superficie κ no puede reducirse a cero para ningún proceso físico, sin importar cuan idealizado sea.

Es relevante mencionar que esta ley no tiene una prueba matemática rigurosa.

Finalmente, dado lo anterior, podemos realizar una comparación entre estos comportamientos de los agujeros negros y las cuatro leyes de la termodinámica clásica resumidas en la Tabla 5.1

¹Una expresión explícita para κ está dada por

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \nabla^\nu \xi^\nu \nabla_\mu \xi_\nu. \quad (5.42)$$

donde, ξ representa un vector de Killing.

Leyes	Termodinámica clásica	Agujeros negros
Cero	T es constante sobre un cuerpo en equilibrio térmico.	κ es constante sobre el horizonte de un agujero negro estacionario.
Primera	$\delta E = T\delta S$ + términos de trabajo.	$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H\delta J$.
Segunda	$\delta S \geq 0$ en cualquier proceso.	$\delta A \geq 0$ en cualquier proceso.
Tercera	Es imposible mediante un proceso físico alcanzar $T = 0$.	Es imposible mediante un proceso físico lograr $\kappa = 0$

Tabla 5.1: Analogías entre los sistemas termodinámicos y los agujeros negros.

Si nos enfocamos desde el punto de vista de la ley cero de la termodinámica clásica, se tiene que la gravedad de superficie κ toma el rol de la temperatura del sistema. Más aún, los agujeros negros tienen una temperatura bien definida, conocida como temperatura de Hawking [76], proporcional a κ dada por

$$T = \frac{\kappa\hbar}{2\pi}, \quad (5.45)$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ y h es la constante de Planck.

Las propiedades termodinámicas que poseen las soluciones de agujero negro dentro de la relatividad general igualmente serán de suma importancia tanto en la correspondencia AdS/CFT como en las extensiones de ésta. Por consiguiente, en este apartado nos enfocamos en nuestra solución de agujero negro de Lifshitz para obtener información termodinámica. Por lo tanto, partimos de la Rotación de Wick la cual es un truco, que conlleva ciertas sutilezas, pero que nos permitirá obtener la temperatura de un agujero negro. La rotación de Wick $t = it_E$ nos permite pasar de un espaciotiempo pseudoeuclidiano a uno totalmente euclidiano, de tal manera que si aplicamos la rotación de Wick a nuestro ansatz métrico (5.5), obtenemos

$$ds^2 = \ell^2 \left(f(r)r^{2z} dt_E^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 dx_i^2 \right), \quad (5.46)$$

Aquí es importante mencionar que posteriormente aplicaremos este resultado a la configuración de agujero negro (5.29) que encontramos anteriormente, cuya solución tiende asintóticamente a una métrica tipo Lifshitz cuando $r \rightarrow \infty$, tal que $f(r) \rightarrow 1$. Continuando con el análisis notamos que en la región cercana al horizonte de eventos tenemos $r \approx r_H$ y $f(r_H) = 0$. Entonces, al realizar una expansión en serie de una función F cerca del horizonte

obtenemos

$$F = f(r_H) + f'(r_H)(r - r_H) + \dots, \quad (5.47)$$

de modo que

$$F \simeq f'(r_H)(r - r_H).$$

Al realizar la expansión de la métrica (5.46) cerca del horizonte de eventos obtenemos

$$\begin{aligned} ds_E^2 &\simeq \ell^2 \left[\frac{dr^2}{r_H^2 f'(r_H)(r - r_H)} + r_H^{2z} f'(r_H)(r - r_H) dt_E^2 + r_H^2 dx_i^2 \right] \\ &\approx \frac{\ell^2}{r_H^2} \left[\frac{dr^2}{f'(r_H)(r - r_H)} + r_H^{2z+2} f'(r_H)(r - r_H) dt_E^2 + r_H^2 dx_i^2 \right] \\ &\simeq \left(\frac{\ell}{r_H} \right)^2 \left[d\rho^2 + \rho^2 d \left(\frac{r_H^{z+1}}{2} f'(r_H) t_E \right)^2 + r_H^2 dx_i^2 \right], \end{aligned} \quad (5.48)$$

si $\rho = 2 \left(\frac{r - r_H}{|f'(r_H)|} \right)^{\frac{1}{2}}$ y definimos $\phi = \frac{r_H^{z+1}}{2} |f'(r_H)| t_E$, lo que tendremos es la métrica en las siguientes coordenadas

$$ds_E^2 = \left(\frac{\ell}{r_H} \right)^2 [d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + r_H^2 dx_i^2]. \quad (5.49)$$

Aquí se reconoce que la métrica está expresada como un espacio plano en coordenadas cilíndricopolares. Para evitar la singularidad en $\rho = 0$ debemos realizar la identificación $\phi \sim \phi + 2\pi$, además como ϕ está en términos de t_E , entonces t_E también tendrá periodicidad $t_E \sim t_E + 1/T$, de modo que, finalmente la expresión para la temperatura de Hawking es:

$$T_H \equiv \frac{r_H^{1+z} |f'(r_H)|}{4\pi}. \quad (5.50)$$

Temperatura del agujero negro de Lifshitz

Por otro lado, al sustituir la expresión dada para el factor de ennegrecimiento (5.28), encontramos que la temperatura de Hawking para nuestra solución de agujero negro de Lifshitz está dada por

$$T_H = \frac{r_H^z}{4\pi} \left| -\frac{(z+D)m_1}{r_H^{z+D}} - \frac{2(z-1)m_2}{r_H^{2(z-1)}} \right|. \quad (5.51)$$

Entropía de la configuración de Lifshitz

A continuación presentamos la llamada fórmula de Bekenstein-Hawking [77], la cual es un resultado general en gravedad semiclásica, que relaciona la entropía de un agujero negro con el área del horizonte de eventos a través de la ecuación

$$S = \frac{A}{4G\hbar} k_B c^3, \quad (5.52)$$

donde G es la constante gravitacional y k_B es la constante de Boltzmann. De modo que para calcular el área del horizonte de eventos de un agujero negro debemos evaluar la siguiente integral en $r = r_H$

$$A = \int d^D x \sqrt{g_{11} \cdot g_{22} \cdot \dots \cdot g_{DD}} \Big|_{r=r_H}. \quad (5.53)$$

Al sustituir el ansatz métrico (5.5) en la integral anterior, notamos que es sencillo calcular la integral puesto que nuestro ansatz es diagonal y las componentes del mismo dependen únicamente de la variable r . Así pues, realizando la integración obtenemos que la entropía para la configuración de Lifshitz está dada por

$$\mathcal{S} = \frac{r_H^{D+1}}{4G_{D+2}} V_{D+1} = \frac{V_{D+1}}{4G_{D+2}} \left[\frac{4\pi}{|f'(r_H)|} \right]^{\frac{D+1}{z+1}} T_H^{\frac{D+1}{z+1}}, \quad (5.54)$$

aquí, V_{D+1} representa el volumen de las direcciones transversales y G_{D+2} es la constante gravitacional en $(D + 2)$ dimensiones.

5.4 Fuerzas de marea

En esta sección, calculamos las fuerzas de marea de nuestra familia de agujeros negros de Lifshitz (5.29) y lo hacemos siguiendo el mismo procedimiento dado en las referencias [61, 79, 80]. Es bien conocido que existe una amplia clase de agujeros negros con cierto tipo de anomalías, por ejemplo, que se tenga que el área del horizonte del agujero negro sea muy grande y que los invariantes de curvatura resulten muy pequeños cerca del horizonte de eventos. Por otro lado, cualquier objeto que se acerque al horizonte de eventos experimentará grandes fuerzas de marea fuera del horizonte de sucesos. Además, si la región de grandes fuerzas de marea es visible para observadores distantes, lo que se tiene es un agujero negro “desnudo”.

Comenzamos considerando las geodésicas temporales descritas por $u^\mu u_\mu = -1$ para nuestro fondo (5.29) con el vector tangente $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ donde τ es el tiempo propio. Además,

nuestra familia de agujeros negros de Lifshitz tienen un vector de *Killing* temporal y D vectores de *Killing* espaciales, de modo que las constantes de movimiento están dadas por

$$E = -g_{tt}\dot{t}, \quad p_i = g_{ii}\dot{x}_i, \quad (5.55)$$

donde el punto denota la derivada $\frac{d}{d\tau}$, E representa la energía y p_i es el momento a lo largo de la geodésica. Cabe mencionar que aquí no tenemos una suma implícita sobre los índices latinos (i). Además, para simplificar nuestro tratamiento, solo consideramos la geodésica radial, de modo que $p_i = 0$ y obtenemos la siguiente expresión

$$\dot{r}^2 = -g^{rr} (1 + g_{tt}\dot{t}^2) = \frac{E^2}{\ell^4 r^{2(z-1)}} - \frac{r^2}{\ell^2} f(r). \quad (5.56)$$

Ahora, introducimos el *vielbein* en el sistema de referencia ortonormal dado por

$$\begin{aligned} (e_0)_\mu &= -\sqrt{-g_{tt}}\partial_\mu t = -\ell r^z \sqrt{f(r)}\partial_\mu t, \\ (e_1)_\mu &= \sqrt{g_{rr}}\partial_\mu r = \ell r^{-1} \sqrt{f(r)}\partial_\mu r, \\ (e_i)_\mu &= \sqrt{g_{ii}}\partial_\mu x_i = \ell r \partial_\mu x_i, \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde $f(r)$ es el factor de ennegrecimiento. Además, si efectuamos un *boost* en el *vielbein*, lo que obtenemos es un sistema de referencia ortonormal paralelo propagado a lo largo de una geodésica, denotado por $(\tilde{e}_0)_\mu = u_\mu$ y dado por

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_0)_\mu &= -E\partial_\mu t + E\sqrt{-g^{tt}g_{rr}}\sqrt{1 - \frac{-g_{tt}}{E^2}}\partial_\mu r, \\ (\tilde{e}_1)_\mu &= -E\sqrt{1 - \frac{-g_{tt}}{E^2}}\partial_\mu t + E\sqrt{-g^{tt}g_{rr}}\partial_\mu r, \\ (\tilde{e}_i)_\mu &= \sqrt{g_{ii}}\partial_\mu x_i. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Para poder abordar preguntas físicas, necesitamos calcular los componentes del tensor de Riemann dentro del sistema de referencia ortonormal paralelo propagado a lo largo de una geodésica radial temporal. Luego, adoptando la notación

$$R_{ijkl} \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta}(\tilde{e}_i)_\alpha(\tilde{e}_j)_\beta(\tilde{e}_k)_\gamma(\tilde{e}_l)_\delta, \quad (5.59)$$

encontramos que las entradas correspondientes distintas de cero del tensor de Riemann en

el *boosted frame* son las siguientes:

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= \frac{E^2}{2\ell^2} [2z^2 f(r) + (3z + 1)rf'(r) + r^2 f''(r)], \\
R_{0i0i} &= \frac{E^2(z-1)}{\ell^4 r^{2z}} + \frac{1}{\ell^2} \left(f(r) + \frac{rf'(r)}{2} \right), \\
R_{1i1i} &= \frac{E^2(z-1)}{\ell^4 r^{2z}} - \frac{1}{\ell^2} \left(zf(r) + \frac{rf'(r)}{2} \right), \\
R_{0i1i} &= \frac{E^2(z-1)}{\ell^4 r^{2z}} \sqrt{1 - \frac{\ell^2 r^{2z} f(r)}{E^2}}, \\
R_{ijij} &= -\frac{f(r)}{\ell^2},
\end{aligned} \tag{5.60}$$

donde $i \neq j$. Al sustituir el factor de ennegrecimiento (5.28) en (5.60) obtenemos

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= \frac{E^2}{2\ell^2} \left[2z^2 - (z-D)D \frac{m_1}{r^{z+D}} - 2(z-2) \frac{m_2}{r^{2(z-1)}} \right], \\
R_{0i0i} &= \frac{E^2(z-1)}{\ell^4 r^{2z}} + \frac{1}{\ell^2} \left[1 - \frac{(z+D-2)}{2} \frac{m_1}{r^{z+D}} - (z-2) \frac{m_2}{r^{2(z-1)}} \right], \\
R_{1i1i} &= \frac{E^2(z-1)}{\ell^4 r^{2z}} - \frac{1}{\ell^2} \left[z + \frac{(z-D)}{2} \frac{m_1}{r^{z+D}} + \frac{m_2}{r^{2(z-1)}} \right], \\
R_{0i1i} &= \frac{E^2(z-1)}{\ell^4 r^{2z}} \sqrt{1 - \frac{\ell^2 r^{2z}}{E^2} \left(1 + \frac{m_1}{r^{z+D}} + \frac{m_2}{r^{2(z-1)}} \right)}, \\
R_{ijij} &= -\frac{1}{\ell^2} \left[1 + \frac{m_1}{r^{z+D}} + \frac{m_2}{r^{2(z-1)}} \right].
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Ahora bien, si observamos el siguiente componente del tensor de Riemann, vemos que la fuerza de marea en la región cerca del horizonte de sucesos está dada por

$$R_{0i0i} = \frac{E^2(z-1)}{\ell^4 r_H^{2z}}. \tag{5.62}$$

Aquí, es importante mencionar que es suficiente mantener solo el término proporcional a E^2 , ya que dicho término representa la diferencia entre el sistema de referencia ortonormal y el *boosted frame*; particularmente, podemos ver que la fuerza de marea desaparece cuando $z = 1$.

Luego, si suponemos que $r_H \ll 1$ y además requerimos que el área del horizonte sea grande, es decir, $A \propto \ell^D r_H^D \gg 1 \rightarrow \ell r_H \gg 1$, obtenemos

$$R_{0i0i} \propto \frac{1}{(\ell r_H)^4 r_H^{2z-4}}. \tag{5.63}$$

Aquí, notamos que la fuerza de marea indica que es posible tener agujeros negros "desnudos" solo para el caso en el que $z > 2$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis obtuvimos los siguientes resultados: Primeramente, hemos obtenido una nueva familia de soluciones exactas para las ecuaciones de Einstein-Proca con un *solo* campo vectorial masivo, esta geometría tiene la simetría de Lifshitz espacialmente anisótropa, para cualquier dimensión D y exponente dinámico arbitrario z . Nuestras funciones $P_i(r)$, que multiplican a los dx_i^2 en la métrica, dependen de la dimensión D , el radio de curvatura de Lifshitz ℓ^2 y el exponente crítico z , dando lugar a una generalización espacialmente anisótropa de los ya conocidos fondos de Lifshitz construidos dentro de la teoría de Einstein-Proca, debido a que en la métrica todas las coordenadas espaciales x_i se transforman de manera diferente. Por lo tanto, hemos obtenido una nueva familia de soluciones de Lifshitz espacialmente anisótropas muy interesante, y que es diferente de las construidas en modelos que consisten de la gravedad de Einstein acoplada a varios campos vectoriales masivos y con constante cosmológica negativa [7]. Además, hemos encontrado que la masa al cuadrado del campo de Proca es definida negativa, por lo que resulta necesario obtener una cota de Breitenlohner-Freedman generalizada para nuestra teoría. Entonces, dentro de este trabajo calculamos tal cota de dos maneras diferentes (una de ellas considera una dependencia total del campo vectorial A_t en todas las coordenadas espacio-temporales) y demostramos que nuestro espectro de masas lo respeta, produciendo una configuración de campo estable y físicamente significativa. Igualmente hallamos que el escalar de curvatura es definido negativo, y se observó que depende solo de la dimensión D y que es completamente independiente del exponente dinámico z . Aquí es importante enfatizar en que sería interesante obtener más generalizaciones de estos fondos de Lifshitz donde los escalares de curvatura dependan tanto de la dimensión D como del exponente crítico z .

Complementariamente analizamos una propiedad más de nuestra configuración espacialmente anisótropa de Lifshitz (3.54); la condición de energía nula. Esta condición de energía resulta relevante, ya que juega un rol sobresaliente en el sentido de que podemos obtener restricciones para los exponentes dinámicos determinados por la NEC y estas restricciones se aplicarán al estudiar los puntos fijos invariantes en las teorías de campo dual [74]. En el caso de nuestra configuración gravitacional (3.54) encontramos que la NEC se satisface para todas las direcciones en la frontera, es decir, a lo largo de la dirección del tiempo t y las direcciones espaciales x_i de la teoría de campo dual con las condiciones correspondientes en los exponentes de escala. Sin embargo, la NEC no se satisface para un vector nulo completamente arbitrario debido a la presencia de exponentes críticos negativos. No obstante, en [81] los autores presentaron fondos de Lifshitz obtenidos dentro de un modelo gravitacional con correcciones de curvatura al cuadrado R^2 donde también se permiten soluciones con exponentes dinámicos negativos $z < 1$ y, en principio, la NEC se satisface para estos valores negativos de los exponentes. Esto implica que hasta el momento no hay un estudio exhaustivo sobre el hecho de que la NEC se cumpla o no para las soluciones tipo Lifshitz con $z < 1$, lo que abre una ventana para configuraciones gravitacionales para las cuales la NEC quizá pueda satisfacerse. Sería interesante confirmar o refutar esta hipótesis dentro del contexto de nuestro modelo, es decir, agregando correcciones al cuadrado de la curvatura a la teoría de Einstein-Proca y ver si podemos obtener espaciotiempos de Lifshitz donde la condición de energía nula se pueda satisfacer para exponentes críticos negativos. No obstante, dejamos este tema para futuros trabajos, así como el de las consecuencias físicas de tener un espectro de masa al cuadrado negativo en la teoría cuántica de campo dual, puesto que esto no ha sido estudiado concretamente, pero podría ser relevante para complementar el diccionario holográfico existente.

Igualmente, dentro de la formulación Einstein-Proca obtuvimos: primeramente, como caso particular de nuestros resultados, un fondo espacialmente isótropo de Lifshitz, dado por (3.64). Este espaciotiempo es espacialmente isótropo y es difeomorfo a una geometría de Lifshitz con exponente crítico z negativo como se muestra en la subsección 3.3.2. Un efecto sobresaliente del fondo de Lifshitz espacialmente isótropo es igualmente el carácter negativo que define al término de masa al cuadrado del campo de Proca, debido a que éste complementa los espectros de masa al cuadrado definidos positivos conocidos hasta el momento en la literatura. Al igual que en el espaciotiempo de Lifshitz espacialmente anisótropo presentado en el capítulo 3, también hemos encontrado la cota de Breitenlohner-Freedman

con respecto a este fondo y hemos demostrado que el espectro de masas lo respeta, produciendo una configuración de campo estable (ver ap. B). Asimismo, se calculó el escalar de curvatura, el cual resultó definido negativo y que depende solo de la dimensión D . Suplementariamente examinamos la condición de energía nula de este fondo espacialmente isótropo de Lifshitz (3.64), y dado que el espaciotiempo de Lifshitz posee un exponente dinámico negativo, se encontró que también se viola la NEC (ver ap. B); en seguida se mostró otra forma prudente de visualizar a los fondos de Lifshitz espacialmente isótropos. Aquí conviene resaltar que dentro de este contexto se obtiene la geometría de Lifshitz reportada en [6] y un detalle relevante es que el espectro de masa al cuadrado resulta ser positivo o negativo cuando el parámetro $z > 1$ o cuando $z \leq 0$, respectivamente, dando lugar a un campo vectorial masivo real en ambos casos; finalmente en la subsección 3.3.4 se mostraron nuevas soluciones espacialmente anisótropas a las ecuaciones de Einstein-Proca suponiendo que la única componente del campo vectorial de Proca no nula es $A_1(r)$. Es importante resaltar que el grado de anisotropía de las geometrías (3.93) es el mínimo puesto que las propias ecuaciones de Einstein-Proca restringen el tensor métrico g_{ii} a tener componentes iguales para $i = 2, \dots, D$. Asimismo, se encontró que los parámetros de la teoría Λ y M^2 , deben estar restringidos para tener una configuración de campo real.

Consecutivamente, dentro de la teoría de Einstein-Maxwell-dilatón en $D + 2$ dimensiones, hemos encontrado una nueva familia de soluciones analíticas de agujeros negros de Lifshitz (5.29) con exponente crítico arbitrario z , de las cuales hemos calculado las expresiones generales de los invariantes de curvatura, como el escalar de Ricci, el tensor de Ricci contraído consigo mismo y el invariante de Kretschmann, y al examinarlos hallamos que todos los invariantes divergen solo cuando $r \rightarrow 0$, siendo regular en el horizonte y alcanzando asintóticamente una geometría tipo Lifshitz. Además, examinamos algunas cantidades termodinámicas como la temperatura y la entropía de nuestra configuración de agujero negro de Lifshitz. Igualmente, calculamos las fuerzas de marea para esta configuración gravitacional.

Una futura investigación que nos gustaría señalar consiste en construir soluciones de agujeros negros más generales, es decir, obtener configuraciones gravitacionales anisótropas donde todas las direcciones espaciales se transformen de manera diferente y por lo tanto, esto nos llevaría a tener z_i exponentes dinámicos arbitrarios para cada dirección x_i . Hasta el momento como lo hemos reportado en esta tesis solo se han encontrado fondos de Lifshitz espacialmente anisótropos en $D + 2$ dimensiones con z_i exponentes críticos arbitrarios dentro de la teoría Einstein-Proca con un solo campo vectorial masivo [82].

Finalmente, para poder aplicar la holografía de Lifshitz a los sistemas de materia condensada, es necesario comprender en detalle la correspondencia existente entre los campos masivos y los operadores en la frontera, es decir, establecer un diccionario holográfico. Hasta el momento, existe un diccionario holográfico, pero este es muy sutil y no se entiende completamente para las teorías no relativistas como la de Lifshitz. El progreso reciente en este tema muestra que los modelos holográficos describen las clases de universalidad de la teoría de Lifshitz con acoplamiento fuerte y el diccionario holográfico se ha usado para deducir las propiedades universales de ciertos sistemas de Lifshitz. Sería interesante determinar si el carácter negativo del espectro de masas al cuadrado de nuestra solución (3.54) introduce algunas sutilezas dentro de alguna teoría de campo dual dada, al igual que las configuraciones de agujero negro de Lifshitz (5.29) aquí presentadas.

Apéndice A

Comprobación de las ecuaciones de campo (3.35)-(3.38)

Rescribiendo las ecuaciones de Einstein-Proca (3.35)-(3.38) en términos de las funciones

$$f(r) = r^{\pm 2z}, \quad (\text{A.1})$$

$$P_i(r) = r^{a_i}, \quad (\text{A.2})$$

$$A_t = c r^{\pm z}, \quad (\text{A.3})$$

donde $c = \frac{\sqrt{2D(D+1)}\ell^2}{z}$, obtenemos las ecuaciones para cada componente del espaciotiempo y la ecuación de Proca

componente **tt**:

$$\sum_k^D a_k^2 + \sum_l^D a_l \sum_k^D a_k - 4D(D+1)\ell^2 = -\frac{2c^2}{\ell^2} (z^2 + M^2\ell^2), \quad (\text{A.4})$$

componente **rr**:

$$-\sum_k^D a_k^2 + \sum_l^D a_l \sum_k^D a_k \pm 4z \sum_k^D a_k - 4D(D+1)\ell^2 = -\frac{2c^2}{\ell^2} (z^2 - M^2\ell^2), \quad (\text{A.5})$$

componentes **ii**:

$$\begin{aligned} \mp & 4za_i - 2a_i \sum_k^D a_k + 8z^2 + \sum_k^D a_k^2 + \sum_l^D a_l \sum_k^D a_k \pm 4z \sum_k^D a_k \\ & - 4D(D+1)\ell^2 = \frac{2c^2}{\ell^2} (z^2 + M^2\ell^2), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde el índice i se refiere a la i -ésima componente.

Ec. de Proca:

Al sustituir $f(r)$ y P_i en la ecuación de Proca (3.38), obtenemos

$$A_t'' + \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^D a_k \mp z + 1 \right) \frac{A_t'}{r} - \frac{M^2\ell^2}{r^2} A_t = 0, \quad (\text{A.7})$$

y al sustituir (A.3) en (A.7), lo que resulta es

$$M^2\ell^2 = \pm \frac{z}{2} \sum_{k=1}^D a_k. \quad (\text{A.8})$$

Posteriormente si sustituimos la siguiente expresión

$$\sum_{k=1}^D a_k = \mp 2z, \quad (\text{A.9})$$

en las ecuaciones (A.4), (A.5), (A.6), obtenemos que éstas se satisfacen idénticamente cuando

$$\sum_{k=1}^D a_k^2 = 4D(D+1)\ell^2 - 4z^2. \quad (\text{A.10})$$

Además, encontramos que el espectro de masas al cuadrado es

$$M^2\ell^2 = -z^2. \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Propiedades del fondo de Lifshitz espacialmente isótropo

B.1 La cota de B-F

Para encontrar la cota de Breitenlohner-Freedman del fondo gravitacional (3.64), partimos de las ecuaciones de Proca en el límite perturbativo en el que el campo vectorial masivo no altera la estructura del espaciotiempo. Por lo tanto, las ecuaciones son

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - M_{\text{p}}^2 A^\nu = 0, \quad (\text{B.1})$$

y se complementan con la siguiente restricción en el espaciotiempo curvo

$$\nabla_\nu A^\nu = \partial_0 A^0 + \partial_r A^r + \partial_i A^i + \left[1 \pm \frac{(D+1)z}{2D} \right] \frac{r}{\ell^2} A_r = 0, \quad (\text{B.2})$$

cuya restricción es obtenida mediante la contracción de la ecuación (B.1) con ∇_ν .

Luego, se obtienen las siguientes ecuaciones de campo acopladas para las componentes del campo vectorial A_r , A_t y A_i ,

$$r^{\mp 2z} \partial_t^2 A_t - r^2 \partial_r^2 A_t - r^{\pm \frac{z(D-1)}{D^2}} \partial_i^2 A_t - \left(1 \mp \frac{(3D-1)z}{2D} \right) r \partial_r A_t \mp 2zr \partial_t A_r + M_{\text{p}}^2 \ell^2 A_t = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} & r^{\mp 2z} \partial_t^2 A_r - r^2 \partial_r^2 A_r - r^{\pm \frac{z(D-1)}{D^2}} \partial_i^2 A_r - \left(2 \pm \frac{(D+1)z}{2D} \right) r \partial_r A_r - \\ & (1 \pm 2z) r^{\mp 2z-1} \partial_t A_t + \left(1 \mp \frac{(D-1)z}{D^2} \right) r^{-1} \partial_i A^i + M_{\text{p}}^2 \ell^2 A_r = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
 r^{\mp 2z} \partial_t^2 A_k - r^2 \partial_r^2 A_k - r^{\pm \frac{z(D-1)}{D^2}} \partial_i^2 A_k - \left(1 \pm \frac{(2D-1)(D+1)z}{2D^2} \right) r \partial_r A_k \pm \quad (B.5) \\
 \frac{(D^2-1)z}{2D^2} r \partial_k A_r + M_p^2 \ell^2 A_k = 0,
 \end{aligned}$$

donde en principio todas las componentes del campo vectorial dependen de todas las coordenadas del espaciotiempo considerado, es decir, $A_t = A_t(t, r, x_i)$, $A_r = A_r(t, r, x_i)$ y $A_k = A_k(t, r, x_i)$. Pero, por simplicidad, solo consideraremos que la única componente no nula es A_t , entonces se deduce de la ecuación (B.4) que $\partial_t A_t = 0$. Por ello, la ecuación de campo (B.3) para el componente A_t del potencial vectorial adopta la forma:

$$\left\{ \partial_r^2 + \left[1 \mp \frac{(3D-1)z}{2D} \right] r^{-1} \partial_r + r^{\pm \frac{(D-1)z}{D^2} - 2} \partial_i^2 - \ell^2 M_p^2 r^{-2} \right\} A_t(r, x^i) = 0. \quad (B.6)$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a x^i , la ecuación (B.6) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria

$$\left\{ \partial_r^2 + \left[1 \mp \frac{(3D-1)z}{2D} \right] r^{-1} \partial_r - k^2 r^{\pm \frac{(D-1)z}{D^2} - 2} - \ell^2 M_p^2 r^{-2} \right\} A_t(r, k_i) = 0, \quad (B.7)$$

donde $k^2 = k_i k^i$ y la solución exacta de esta ecuación para valores generales de z es

$$A_t(r) = r^{\pm \frac{(3D-1)z}{4D}} \left[c_+ I_\gamma \left(\eta r^{\pm \frac{(D-1)z}{2D^2}} \right) + c_- I_{-\gamma} \left(\eta r^{\pm \frac{(D-1)z}{2D^2}} \right) \right], \quad (B.8)$$

donde, c_+ y c_- son constantes de integración, $I_{\pm\gamma} \left(\eta r^{\pm \frac{(D-1)z}{2D^2}} \right)$ representan las funciones de Bessel modificadas de primera clase y orden $\pm\gamma$, con

$$\gamma = \pm \frac{D \sqrt{16D^2 \ell^2 M_p^2 + (3D-1)^2 z^2}}{2(D-1)z}, \quad (B.9)$$

$$\eta = \pm \frac{2D^2 k}{(D-1)z}. \quad (B.10)$$

Además, para tener soluciones reales, requerimos que el orden de las funciones de Bessel sea real, por lo que

$$16D^2 \ell^2 M_p^2 + (3D-1)^2 z^2 \geq 0, \quad (B.11)$$

al sustituir el valor de ℓ^2 dado por (3.63) en esta expresión, obtenemos

$$M_p^2 \geq -\frac{D(3D-1)}{4}, \quad (B.12)$$

que resulta ser la cota de Breitenlohner-Freedman del espaciotiempo de Lifshitz espacialmente isótropo.

Una forma alternativa de obtener este resultado es la siguiente: primero partimos de las ecuaciones de Proca (B.1), considerando solo la componente eléctrica $A = A_t(r) dt$ no nula en el bulto y usando la métrica dada por (3.64), tal que

$$A_t(r) = \tilde{c}_1 r^{\kappa_{\pm} + \omega_{\mp}} + \tilde{c}_2 r^{\kappa_{\pm} + \omega_{+}}, \quad (\text{B.13})$$

donde $\kappa_{\pm} = \pm \frac{(3D-1)z}{4D}$ y $\omega_{\mp} = \mp \frac{\sqrt{16D^2 \ell^2 M_p^2 + (3D-1)^2 z^2}}{4D}$. Al sustituir el valor de ℓ^2 (3.63) en el radicando de ω_{\mp} , obtenemos la misma cota de Breitenlohner-Freedman (B.12) para el campo vectorial masivo.

El espectro de masas para esta solución dado por (3.61) satisface la cota de B-F de una manera directa tras la sustitución en (B.12), lo que genera la desigualdad, $(D+1)^2 \geq 0$, que se mantiene para cualquier dimensión D y produce una configuración de campo estable.

B.2 La NEC

En términos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y un vector nulo arbitrario, la NEC se lee

$$R_{\mu\nu} \xi^{\mu} \xi^{\nu} \geq 0. \quad (\text{B.14})$$

Para el caso espacialmente isótropo, las componentes del tensor de Ricci son las siguientes:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= - \left(\frac{D+1}{2D} \right) z^2 \frac{g_{tt}}{\ell^2}, \\ R_{rr} &= - \left(1 + \frac{(D-1)^2}{4D^3} \right) z^2 \frac{g_{rr}}{\ell^2}, \\ R_{ij} &= \left(\frac{D^2-1}{4D^3} \right) z^2 \frac{g_{ij}}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Al sustituir estos componentes tensoriales de Ricci en (B.14) generamos

$$z^2 \frac{(D+1)}{2D} r^{\pm 2z} (\xi^t)^2 - z^2 \left(1 + \frac{(D-1)^2}{4D^3} \right) r^{-2} (\xi^r)^2 + z^2 \left(\frac{D^2-1}{4D^3} \right) r^{\mp \frac{(D-1)z}{d^2}} (\xi^i)^2 \geq 0. \quad (\text{B.16})$$

Al igual que en la sección 4.2, para este espaciotiempo de Lifshitz espacialmente isótropo en particular, tenemos que la NEC no puede satisfacerse para un vector arbitrario nulo ya que se anula solo cuando ξ^r es idénticamente cero. En otras palabras, la NEC solo se satisface cuando se aplica a lo largo de las direcciones de la frontera, es decir, a lo largo de la dirección del tiempo t y las direcciones espaciales x_i de la teoría de campo.

Bibliografía

- [1] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.
- [2] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.
- [3] A. Salam, *In Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Almquist and Wiksells, Stockholm (1969) 367-377.
- [4] M. Ammon and J. Erdmenger, *Gauge-gravity duality: Foundations and applications*, Cambridge University Press U. K. (2015).
- [5] M. Natsuume, *AdS/CFT Duality User Guide*, *Lect. Notes Phys.* **903** (2015); arXiv:[1409.3575](#) [hep-th].
- [6] M. Taylor, *Lifshitz holography*, *Class. Quantum Grav.* **33** (2016) 033001; arXiv:[1512.03554](#) [hep-th].
- [7] M. Taylor, *Non-relativistic holography*, (2008); arXiv:[0812.0530](#) [hep-th].
- [8] S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from non-critical string theory*, *Phys. Lett.* **B 428** (1998) 105114; arXiv:[9802109](#) [hep-th].
- [9] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253291; arXiv:[hep-th/9802150](#).
- [10] S. A. Harnoll, A. Lucas and S. Sachdev, *Holographic quantum matter*, (2016); arXiv:[1612.07324v3](#) [hep-th].
- [11] J. M. Maldacena, *The large- N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231; arXiv:[9711200](#) [hep-th].

- [12] J. M. Maldacena, *The large- N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113; arXiv:9711200 [hep-th].
- [13] H. Nastase, *Introduction to AdS-CFT*, (2007); arXiv:0712.0689 [hep-th].
- [14] J. E. Bernhard, J. S. Moreland and S. A. Bass, *Bayesian estimation of the specific shear and bulk viscosity of quark-gluon plasma*, *Nat. Phys.* **15** (2019) 1113-1117; arXiv:1804.06469 [nucl-th].
- [15] K. J. Eskola, *Nearly perfect quark-gluon fluid*, *Nat. Phys.* **15** (2019) 1111–1112; arXiv:0904.3107 [hep-ph].
- [16] S. Heshmatian, R. Morad, *Jet suppression in non-conformal plasma using AdS/CFT*. *J. High Energ. Phys.* **2019** (2019) 45; arXiv:1812.09374 [hep-th].
- [17] G. T. Horowitz, *Surprising connections between general relativity and condensed matter*, *Class. Quantum Grav.* **28** (2011) 114008; arXiv:1010.2784 [gr-qc].
- [18] S. S. Gubser, *Phase Transitions near black hole horizons*, *Class. Quantum Grav.* **22** (2005) 5121-5143; arXiv:0505189 [hep-th].
- [19] S.S Gubser, *Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon*, *Phys. Rev. D.* **78** (2008) 065034.
- [20] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G.T. Horowitz, *Building a holographic superconductor* *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 031601; arXiv:0803.3295 [hep-th].
- [21] S. A. Hartnoll, *Lectures on holographic methods for condensed matter physics*, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009) 224002; arXiv:0903.3246 [hep-th].
- [22] C. P. Herzog, *Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity*, *J. Phys.* **A 42** (2009) 343001; arXiv:0904.1975 [hep-th].
- [23] S. A. Hartnoll, *Quantum Critical Dynamics from Black Holes*, (2010); arXiv:0909.3553 [cond-mat.str-el].
- [24] D. Belitz and T. R. Kirkpatrick *Quantum phase transitions*, (1998); arXiv:9811058 [cond-mat.stat-mech].

- [25] S. Sachdev and B. Keimer, *Quantum criticality*, *Physics Today* **64** (2011) 29; arXiv:1102.4628 [cond-mat.str-el].
- [26] P. Phillips, *Fractionalize this*, *Nature Physics* **6** (2010) 931933; arXiv:1012.1861 [cond-mat.str-el].
- [27] J. McGreevy, *Holographic duality with a view toward many-body physics*, *Adv. High Energy Phys.* (2010) 723105; arXiv:0909.0518 [hep-th].
- [28] G. T. Horowitz, *Introduction to holographic superconductors*, *Lect. Notes Phys.* **828** (2011) 313; arXiv:1002.1722 [hep-th].
- [29] Z.-Y. Nie, Q. Pan, H.-B. Zeng, H. Zeng, *Split degenerate states and stable $p+ip$ phases from holography*, *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 69; arXiv:1611.07278 [hep-th].
- [30] J. W. Foster and J. T. Liu, *Spatial anisotropy in nonrelativistic holography*, (2017); arXiv:1612.01557 [hep-th].
- [31] J. A. Hertz, *Quantum critical phenomena*, *Phys. Rev. B* **14** (1976) 1165.
- [32] D. Anselmi and M. Halat, *Renormalization of Lorentz violating theories*, *Phys. Rev. D* **76**, (2007) 125011; arXiv:0707.2480 [hep-th].
- [33] C. F. Farias M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, *On the effective potential, Hořava-Lifshitz-like theories and finite temperature*, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 025014; arXiv:1311.6313 [hep-th].
- [34] H. Hatanaka, M. Sakamoto and K. Takenaga, *Gauge-Higgs Unification in Lifshitz Type Gauge Theory*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 025018; arXiv:1105.3534 [hep-ph].
- [35] J. Alexandre, N.E. Mavromatos and D. Yawitch, *Emergent relativistic-like kinematics and dynamical mass generation for a Lifshitz-type Yukawa model*, *Phys. Rev. D* **82**, (2010) 125014; arXiv:1009.4811 [hep-ph].
- [36] J. Alexandre and A. Vergou, *Properties of a consistent Lorentz-violating Abelian gauge theory*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 125008; arXiv:1103.2701 [hep-th].
- [37] P. Hořava, *Quantum Criticality and Yang-Mills Gauge Theory*, *Phys. Lett. B* **694** (2010) 172; arXiv:0811.2217 [hep-th].

- [38] B. Chen and Q-G. Huang, *Field Theory at a Lifshitz Point*, *Phys. Lett. B* **683** (2010) 108; arXiv:0904.4565[hep-th].
- [39] J. Alexandre and N. E. Mavromatos, *A Lorentz-Violating Alternative to Higgs Mechanism?*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 105013; arXiv:1108.3983 [hep-ph].
- [40] J. Alexandre, *Lifshitz-type Quantum Field Theories in Particle Physics*, *Int. J. Mod. Phys. A* **26** (2011) 4523; arXiv:1109.5629 [hep-ph].
- [41] P. Hořava, *Quantum Gravity at a Lifshitz Point*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084008; arXiv:0901.3775 [hep-th].
- [42] M. Henneaux, A. Kleinschmidt and G. L. Gomez, *A dynamical inconsistency of Hořava gravity*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 064002; arXiv:0912.0399 [hep-th].
- [43] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, *Consistent Extension of Hořava Gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 181302; arXiv:0909.3525 [hep-th].
- [44] T. Zhu, F.-W. Shu, Q. Wu and A. Wang, *General covariant Horava-Lifshitz gravity without projectability condition and its applications to cosmology*, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 044053; arXiv:1110.5106 [hep-th].
- [45] P. Hořava, *Spectral dimension of universe in quantum gravity at Lifshitz point*, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 161301; arXiv:0902.3657 [hep-th].
- [46] T. Griffin, P. Hořava and Ch. M. Melby-Thompson, *Conformal Lifshitz Gravity from Holography*, *JHEP* **1205** (2012) 010; arXiv: 1112.5660 [hep-th].
- [47] T. Griffin, P. Hořava and Ch. M. Melby-Thompson, *Lifshitz Gravity for Lifshitz Holography*, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 081602; arXiv: 1211.4872 [hep-th].
- [48] E. Kiritsis and G. Kofinas, *Hořava-Lifshitz Cosmology*, *Nucl. Phys. B* **821** (2009) 467; arXiv:0904.1334 [hep-th].
- [49] H. Lu, J. Mei and C.N. Pope, *Solutions to Hořava Gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 091301; arXiv:0904.1595 [hep-th].
- [50] S. Mukohyama, *Scale-invariant cosmological perturbations from Hořava-Lifshitz gravity without inflation*, *JCAP* **0906** (2009) 001; arXiv:0904.2190 [hep-th].

- [51] A. Kobakhidze, *On the infrared limit of Horava's gravity with the global Hamiltonian constraint*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 064011; arXiv:0906.5401 [hep-th].
- [52] C. Charmousis, G. Niz, A. Padilla and P. M. Saffin, *Strong coupling in Hořava gravity*, *JHEP* **0908** (2009) 070; arXiv:0905.2579 [hep-th].
- [53] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, *Phys. Rept.* **513** (2012) 1; arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO].
- [54] B. F. Li, A. Wang, Y. Wu and Z. C. Wu, *Quantization of (1+1)-dimensional Hořava-Lifshitz theory of gravity*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 124076; arXiv:1408.2345 [hep-th].
- [55] E. M. Lifshitz, *On the theory of second-order phase transitions I & II*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **11** (1941) 255.
- [56] J. G. Bednorz and K. A. Müller, *Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system* *Z. Physik B-Condensed Matter Phys.* **B 64** (1986) 189.
- [57] E. Papantonopoulos (Ed.), *From gravity to thermal gauge theories: The AdS/CFT correspondence*, *Lect. Notes Phys.* Vol. **828** (2011).
- [58] S. Kachru, X. Liao and M. Mulligan, *Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 106005; arXiv:0808.1725 [hep-th].
- [59] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation*, *Helv. Phys. Acta.* **45** (1972) 802.
- [60] D. T. Son, *Toward an AdS/cold atoms correspondence: A geometric realization of the Schrödinger symmetry*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 046003; arXiv:0804.3972 [hep-th].
- [61] D.-W. Pang, *A Note on Black Holes in Asymptotically Lifshitz Spacetime*, *Commun. Theor. Phys.* **62** (2014) 265.
- [62] K. Balasubramanian and J. McGreevy, *An analytic Lifshitz black hole*, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 104039; arXiv:0909.0263 [hep-th].
- [63] J. F. Pedraza, W. Sybesma and M. R. Visser, *Hyperscaling violating black holes with spherical and hyperbolic horizons*, *Class. Quantum Grav.* **36** (2019) 054002; arXiv:1807.09770 [hep-th].

- [64] M. C. N. Cheng, S. A. Hartnoll and C. A. Keeler, *Deformations of Lifshitz holography*, *JHEP* **03** (2010) 062; arXiv:[0912.2784](#) [hep-th].
- [65] Rong-Gen Cai *et al*, *A Lifshitz black hole in four dimensional R^2 gravity*, *JHEP* **10** (2009) 080; arXiv:[0909.2807](#) [hep-th].
- [66] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Lifshitz Black Hole in Three Dimensions*, *Phys. Rev.* **D 80** (2009) 104029; arXiv:[0909.1347](#) [hep-th].
- [67] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Analytic Lifshitz Black Holes in Higher Dimensions*, *JHEP* **30** (2010) 030; arXiv:[1001.2361](#) [hep-th].
- [68] K. Balasubramanian and J. McGreevy *Gravity duals for non-relativistic CFTs* *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 061601; arXiv:[0804.4053](#) [hep-th].
- [69] D. Roychowdhury, *On anisotropic black branes with Lifshitz scaling*, *Phys. Rev.* **B 759** (2016) 410; arXiv:[1509.05229](#) [hep-th].
- [70] H. S. Liu and H. Lu, *Thermodynamics of Lifshitz Black Holes*, *JHEP* **12** (2014) 071; arXiv:[1410.6181](#) [hep-th].
- [71] P. Breitenlohner and D. Z. Freedman, *Positive energy in anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity*, *Phys. Lett.* **B 115** (1982) 197.
- [72] H. Guo, A. Herrera-Aguilar, Y.-X. Liu, D. Malagón-Morejón, R. R. Mora-Luna, *Localization of bulk matter fields, the hierarchy problem and corrections to Coulomb's law on a pure de Sitter thick braneworld*, *Phys. Rev.* **D 87** (2013) 095011; arXiv:[1103.2430](#) [hep-th].
- [73] A. Herrera-Aguilar, A. D. Rojas, E. Santos-Rodríguez, *Localization of gauge fields in a tachyonic de Sitter thick braneworld*, *Eur. Phys. J.* **C 74** (2014) 2770; arXiv:[1401.0999](#) [hep-th].
- [74] R. C. Myers and A. Singh *Comments on holographic entanglement entropy and RG flows*, *JHEP* **01** (2012) 102; arXiv:[1202.2068](#) [hep-th].
- [75] J. Maldacena, D. Martelli and Y. Tachikawa, *Comments on string theory backgrounds with non-relativistic conformal symmetry*, *JHEP* **10** (2008) 072.

-
- [76] S. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 191.
- [77] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
- [78] J. M. Bardeen, B. Carter and S. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161-170.
- [79] G. T. Horowitz and S. F. Ross, *Naked black holes*, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 2180; arXiv:9704058 [hep-th].
- [80] G. T. Horowitz and S. F. Ross, *Properties of Naked Black Holes*, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 1098; arXiv:9709050 [hep-th].
- [81] C. Hoyos and P. Koroteev *On the Null Energy Condition and Causality in Lifshitz Holography*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 084002; arXiv:1007.1428 hep-th].
- [82] R. Cartas-Fuentevilla, A. Herrera-Aguilar, V. Matlalcuatzi-Zamora, U. Noriega and J. M. Romero, *Anisotropic Lifshitz holography in Einstein-Proca theory with stable negative mass spectrum*, *Eur. Phys. J. Plus* **135** (2020) 155; arXiv:1804.02278 [hep-th].