Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

por

José de Jesús Sáez Macegoza

para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Director de tesis

Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo

Puebla Pue.
Enero de 2023

Título: Los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales
Estudiante: José de Jesús Sáez Macegoza

JURADO REVISOR

Dr. César Cejudo Castilla
Presidente

Dr. Carlos Alberto López Andrade
Secretario

Dr. David Villa Hernández
Vocal

Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo
Director de tesis

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a todas las personas que estuvieron cerca de mi durante estos años de la carrera. En primer lugar quiero agradecer a mis padres por haberme dado la vida, por haberme apoyado para que este sueño fuera posible. A mi papá (Q.E.P.D), que aunque ya no puede estar conmigo en este momento, siempre me enseñó a luchar y perseverar por muy difícil que sean los retos, pues me enseño que por muy difícil que parezcan las cosas, con esfuerzo y decisión siempre es posible lograrlas.

Agradezco al Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo, primero por haber sido mi tutor académico durante la carrera, por los cursos que tuve oportunidad de tomar con él, por haberme dado la oportunidad de realizar el servicio social con él y finalmente, por haberme aceptado como tesista y haberme llevado de la mano durante el tiempo que me llevó realizar este trabajo.

Agradezco los doctores César Cejudo Castilla, David Villa Hernández y Carlos Alberto López Andrade por haber aceptado ser mis sinodales, por el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis y haberme dado sus observaciones para mejorarla significativamente. Al Dr. López Andrade, además le agradezco los conocimientos que me transmitió en las materias que tuve oportunidad de tomar con él, el tiempo que me dedicó para algunas asesorías de las mismas y que a través de ser exigente con nosotros, nos enseñó el valor de la responsabilidad y compromiso con lo que se realiza.

Estoy agradecido con todos los profesores de la FCFM con quienes tuve la oportunidad de tomar materias por el tiempo dedicado a transmitirnos, en particular transmitirme los conocimientos que hoy tengo y que me permitieron realizar este trabajo.

Finalmente, agradezco a todos los compañeros que compartieron conmigo estos cinco años de carrera, por los momentos que pasamos de risas, de tensión, de relajo, de satisfacciones así como por la oportunidad que tuve de formar equipos con ellos en las diferentes materias y haber concluido los objetivos con éxito.

MUCHAS GRACIAS A TODAS LAS PERSONAS QUE MENCIONE ANTERIORMENTE Y A QUIENES ME HAYA FALTADO MENCIONAR.
GRACIAS POR HABER CAMINADO CONMIGO EN ESTE PROCESO.

Antecedentes

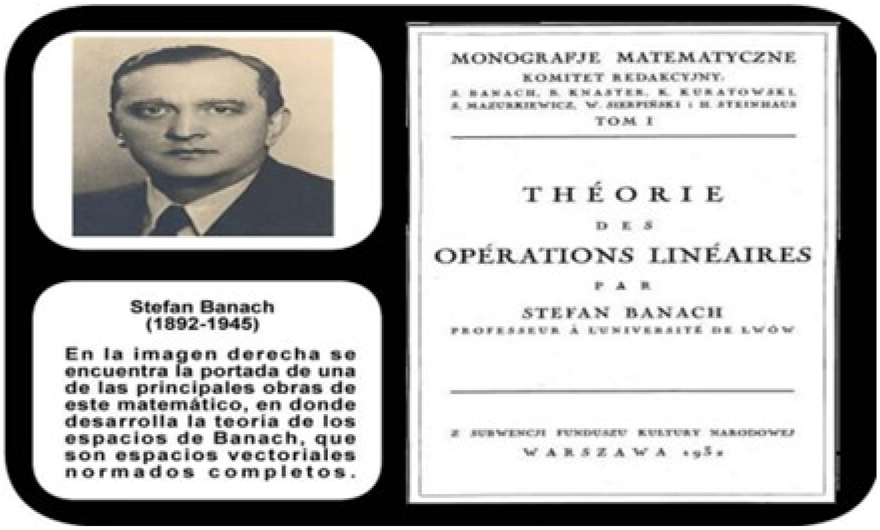
La primera vez que se expuso lo que hoy conocemos como *Álgebra lineal*, fue en el año 1844, gracias a que *Hermann Grassmann (1809-1877)*, dió a conocer su obra maestra *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik (Teoría de las extensiones lineales, una nueva rama de la matemática)*. Esta obra consistía de algunas ideas básicas del álgebra lineal que hoy conocemos, dentro de éstas estaban los espacios vectoriales de dimensión finita, subespacios, conjuntos generadores, suma e intersección de subespacios, bases y dimensión. Sin embargo, este material presentado por *Grassmann*, no tuvo mucha influencia, debido a que muchos planteamientos eran considerados como filosóficos.
En 1862, *Grassmann*, ofreció una mejora de su trabajo, la cual fue apoyada por *Alfred Clebsch (1833-1872)*; esta nueva versión ya incluía temas relacionados con dependencia e independencia lineal, así como productos interiores. Además, esta versión ya incluía algunas demostraciones sobre la dimensión, entre ellas la conocida fórmula

$$dim(U) + dim(W) = dim(U + W) + dim(U \cap W)$$

donde U y W son subespacios de cierto espacio vectorial V.

Hermann Hankel (1839-1873), fue quien valoró el trabajo presentado por *Grassmann*, por lo que en su obra *Theorie der Complexen Zahlensysteme (Teoría de Sistemas de Números Complejos)*, presentada en 1867, hizo que se conocieran muchas de las aportaciones de *Grassmann*. La definición de espacio vectorial que a la fecha utilizamos, fue dada por *Giuseppe Peano (1858-1932)*, quien ya propuso el término de *Linear System (Sistema Lineal)*. Gracias a él, se conocieron los conceptos de cerradura, asociatividad, distributividad y existencia del elemento neutro. Podemos decir que como tal el concepto de espacio vectorial, se conoció abiertamente hasta el año 1920, gracias a los trabajos de *Hermann Weyl (1885-1955)*, mismos que llevan por nombre *Space, Time, Matter (Espacio, tiempo y materia)*; fue en este trabajo, publicado en 1918, donde él da la definición formal de espacio vectorial sobre el campo de los números reales, sin darse cuenta que este concepto había sido definido por *Peano*, treinta años atrás.

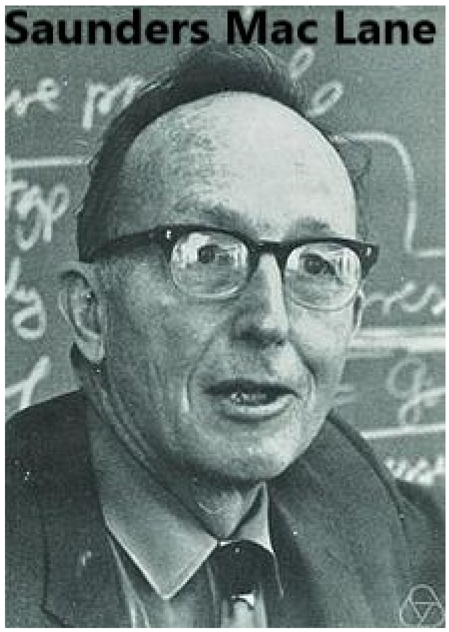
Con respecto a los espacios de dimensión infinita, el concepto se introdujo en el año 1890, debido a que *Salvatore Pincherle (1853-1936)*, comenzó a trabajar una teoría de operadores lineales, los cuáles estaban definidos precisamente sobre espacios vectoriales de dimensión infinita. En el desarrollo de esta teoría, *Pincherle*, no se basó en la teoría expuesta por *Peano*, sino en los trabajos de *Gottfried Leibniz (1646-1716)* y *Jean D'Alembert (1717-1783)*. Esta teoría de inicio no tuvo mucho impacto, hasta en el año 1920, *Stefan Banach (1892-1945)*, en su tesis doctoral, *On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations (Sobre operaciones con conjuntos abstractos y su Aplicación a las ecuaciones integrales)*

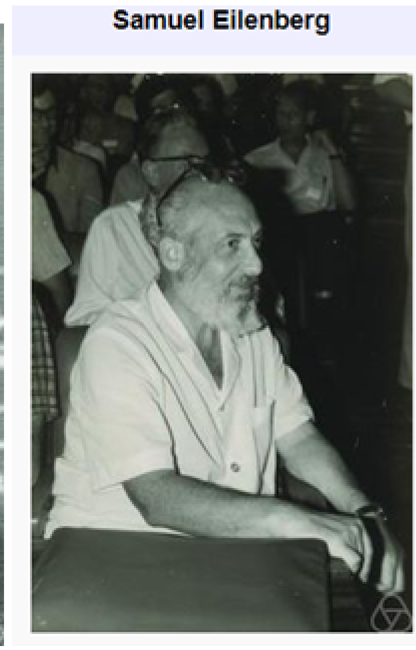


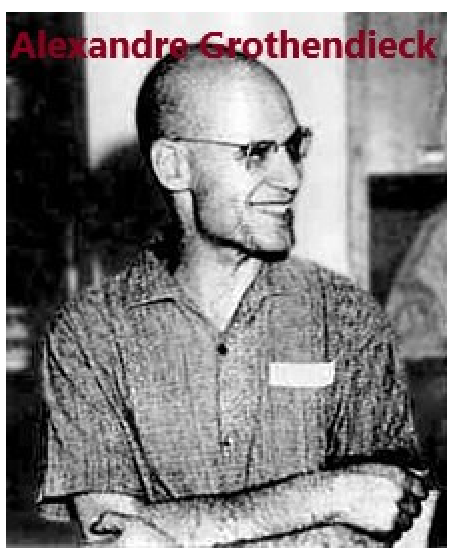
presentó la axiomática de los espacios infinito-dimensionales así como los tópicos asociados a este tema que se comenzaron a investigar en este mismo año. En este trabajo también se introdujo el concepto de *espacio vectorial normado*, que a la fecha tiene muchísima relevancia en el área de *análisis matemático*.
Otra aportación importante respecto a espacios infinito-dimensionales, se presentó en los trabajos de *Henri Lebesgue (1875- 1941)*, donde se presentó una construcción de los espacios de funciones. Anterior a estos trabajos, *David Hilbert (1862-1943)* y su alumno *Erhard Schmidt (1876-1959)*

habían hecho investigaciones sobre espacios de funciones donde la dimensión es infinita, esto en el año 1905. *Hilbert*, introdujo el concepto de *Espacio euclideo*, que siempre es de dimensión infinita, estos espacios son los que actualmente conocemos como *Espacios de Hilbert*, dicho trabajo se publicó en 1909. Estos conceptos sentaron las bases de la teoría que hoy en día conocemos sobre espacios de dimensión infinita, la cual se estudia en el *análisis funcional*.

En lo que corresponde a *teoría de categorías*, fue entre los años 1942 y 1945, cuando *Saunders Mac Lane (1909-2005)* y *Samuel Eilenberg (1913-1998)*, en conexión con la *topología algebraica*, introdujeron esta nueva teoría que empezó a expandirse entre los años 1960 y 1970, gracias a *Alexandre Grothendieck (1928-2014)*.







El concepto de categoría ya se había utilizado desde 1969, a partir de los trabajos de *William Lawvere*, nacido en 1937

con el objetivo de definir la lógica y la teoría de conjuntos. Actualmente, la *teoría de categorías*, puede ser considerada la base de las matemáticas. Sin embargo, no es muy utilizada por ser un área relativamente nueva.

Introducción

En esta tesis, se presenta un estudio acerca de los funtores Hom y *Tensor*, dentro de la categoría de espacios vectoriales sobre un campo dado. En esta categoría, los objetos son, valga la redundancia, los espacios vectoriales y las flechas o morfismos, son las transformaciones lineales entre los mismos cuya composición es la usual para funciones. A diferencia del enfoque que tradicionalmente se le da a los objetos antes mencionados, aquí se hace desde un punto de vista categórico, desde luego que primero se construyen los objetos $Hom(V, W)$ y $V \otimes W$ y posteriormente se definen las asignaciones de la categoría $\mathbf{Vec}_F$ (es como nosotros denotamos a la categoría de espacios vectoriales sobre el campo F) en sí misma, definiéndolas tanto para objetos como para morfismos. Usando esto, se deducen algunas propiedades ya conocidas de estos, pero aplicando los funtores antes mencionados.
Esta tesis está conformada por tres capítulos y dos apéndices, a continuación se ofrece un panorama general de como está constituido cada uno de éstos. En lo que respecta a capítulos, está estructurada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1, se abordan los conceptos básicos de álgebra lineal que serán fundamentales durante todo el desarrollo de la tesis. Se da la definición de espacio vectorial sobre un campo F y algunos ejemplos, se exponen resultados sobre bases y dimensión generalizados para espacios de cualquier dimensión con el objetivo de que nos funcionen tanto para el caso de dimensión finita como el de dimensión infinita. Se da a conocer el concepto de suma directa de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial dado, así como algunos ejemplos y equivalencias a esta definición. También, se muestra lo más importante respecto a las transformaciones lineales; dentro de lo que destaca es: una propiedad universal para las bases, equivalencias a las definiciones de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo y su relación con la dimensión de los espacios. En ese apartado, se ofrece una generalización de los conceptos de representación en cordenadas así como del isomorfismo entre las matrices y el espacio de las transformaciones lineales, donde se deja abierta una pregunta de investigación acerca de la utilidad de representar a las transformaciones lineales como un tipo de matrices.

- En el Capítulo 2, se expone el espacio vectorial cociente, mismo que se construye a partir de un subespacio de un espacio vectorial dado. Sobre esto, se muestran propiedades de este espacio tales como su dimensión, además de tres teoremas de isomorfismo y uno de correspondencia que involucran fuertemente a este espacio. Posteriormente, se exponen los conceptos de suma y producto directo de familias arbitrarias de espacios vectoriales, donde se resaltan sus propiedades universales así como una relación entre suma directa interna y suma directa externa, además de caracterizar a las bases de nuestros espacios vectoriales mediante sumas directas internas.

- En el Capítulo 3, a nuestro juicio, el más importante de la tesis, se abordan primero los conceptos más importantes sobre los funtores en espacios vectoriales. Posteriormente, se exponen los funtores Hom, uno covariante y otro contravariante. Se exhiben algunos isomorfismos naturales que se deducen a partir de la construcción de estos funtores, además, se explica su comportamiento respecto a sumas y productos directos de espacios vectoriales. Se muestran a los funtores dual y bidual como casos particulares de los funtores Hom. Con respecto al funtor bidual, se hace notar un monomorfismo natural entre un espacio y su bidual; se hace énfasis de que en el caso finito-dimensional, este monomorfismo se convierte en isomorfismo natural.

Respecto a Tensor, primero se explican los conceptos más relevantes sobre funciones bilineales. Después se construye una categoría, cuya clase de objetos está formada por funciones bilineales que tienen como dominio al producto cartesiano de dos espacios vectoriales fijados previamente, precisamente esta categoría nos motiva a definir el producto tensorial de dos espacios vectoriales. Después de construir el producto tensorial, se define la asignación del funtor *Tensor*, primero en la categoría producto y posteriormente, fijando uno de los objetos, se definen dos funtores covariantes y aditivos en la categoría normal. Una vez hecho esto, se dan a conocer propiedades del producto tensorial, tales como conmutatividad, asociatividad, entre otras. Finalmente, mostramos la adjunción entre los funtores Hom y *Tensor*, hecho que nos permite deducir propiedades interesantes sin mayor dificultad.

Los apéndices están constituidos de la siguiente manera:

- En el Apéndice A, se muestran los axiomas básicos de la teoría de conjuntos, algunas definiciones y propiedades básicas de funciones y finalmente, propiedades de la aritmética cardinal que se usan para establecer resultados con respecto a la dimensión de los espacios, principalmente para el caso infinito-dimensional.

- En el Apéndice B, se exponen los conceptos básicos sobre categorías, tales como su definición, ejemplos, tipos de objetos, tipos de morfismos, funtores, transformaciones naturales y funtores adjuntos. Estos conceptos se utilizan principalmente en los resultados expuestos en el Capítulo 3 de esta tesis.

Capítulo 1

Preeliminares

En este capítulo se presentarán los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal, en los que abarcaremos los temas de espacios vectoriales, subespacios, dependencia e independencia lineal, bases, dimensión y transformaciones lineales.

Es importante comentar que los conceptos de base y dimensión se abordarán de manera general con el fin de que funcionen para espacios tanto de dimensión finita como infinita y se expondrán ejemplos y propiedades de ambos casos.
Para efectos de este trabajo consideraremos los números naturales como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. De manera conjuntista se considerará a los numeros naturales como $0 = \emptyset$ y $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ si $n > 0$. Esto se utilizará principalmente para cuestiones relacionadas con cardinalidad de conjuntos; para fines operacionales se considerarán como normalmente los conocemos, con las operaciones usuales y sus respectivas propiedades.

1.1. Espacios vectoriales

1.1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1 (Espacio vectorial)**.** *Sea F un campo y V un conjunto no vacío. Un espacio vectorial es una quinteta $(V, +, 0, F, \cdot : F \times V \to V)$ que cumple lo siguiente:*

1) $(V, +, 0)$ *es un grupo abeliano.*

2) $\cdot : F \times V \to V$ *satisface:*

- *a)* *Para cada $v \in V$, $1 \cdot v = v$.*
- *b)* *Para cada $c, d \in F$, $v \in V$, $(cd) \cdot v = c \cdot (d \cdot v)$.*
- *c)* *Para cada $c, d \in F$, $v \in V$, $(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v$.*
- *d)* *Para cada $c \in F$, $v, w \in V$, $c \cdot (v + w) = c \cdot v + c \cdot w$.*

*Los elementos de V se llaman **vectores**, los de F, **escalares**; siempre que sea claro como se definieron las operaciones se escribirá ${}_FV$ en lugar de toda la quinteta ordenada, es decir, ${}_FV$ se lee: V es un espacio vectorial sobre el campo F. Siempre que no haya lugar a confusión con el campo de escalares, denotaremos al espacio vectorial simplemente como V. Además, siempre que no sea necesario, no se escribirá el punto para denotar el producto por escalar, es decir, $c \cdot v = cv$, para $c \in F, v \in V$.*

Ejemplo 1.1.1. *Consideremos F un campo y X un conjunto no vacío. Definimos*

$$F^X = \{f : X \to F \mid f \text{ es función}\}$$

y la suma en F^X de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} +: & F^X \times F^X & \to & F^X \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array}$$

donde $f+g : X \to F$ se define como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, para cada $x \in X$. Definamos la función $\overline{0} : X \to F$, como $\overline{0}(x) = 0$, para cada $x \in X$. Veamos que $\left(F^X, +, \overline{0}\right)$ es un grupo abeliano:

1) Sean $f, g, h \in F^X$, entonces, para $x \in X$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f+(g+h))(x) &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= f(x) + (g(x)+h(x)) \\ &= (f(x)+g(x)) + h(x) \\ &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= ((f+g)+h)(x) \end{aligned}$$

es decir, $f+(g+h) = (f+g)+h$, con lo cual establecemos la asociatividad.

2) Sean $f, g \in F^X$, entonces, para $x \in X$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ &= g(x)+f(x) \\ &= (g+f)(x) \end{aligned}$$

de ahí que $f+g = g+f$.

3) Sea $f \in F^X$, entonces para $x \in X$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (f+\overline{0})(x) &= f(x)+\overline{0}(x) \\ &= f(x)+0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

por consiguiente, $f+\overline{0} = f = \overline{0}+f$, por lo que $\overline{0}$ es el neutro aditivo en F^X.

4) Sea $f \in F^X$, definamos $-f : X \to F$ como $(-f)(x) = -f(x)$, para cada $x \in X$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (f+(-f))(x) &= f(x)+(-f)(x) \\ &= f(x)+(-f(x)) \\ &= 0 \\ &= \overline{0}(x) \end{aligned}$$

así, $-f$ es el inverso aditivo de f, para cada $f \in F^X$.

Por lo tanto, $\left(F^X, +, \overline{0}\right)$ es un grupo abeliano.
Ahora, definamos el producto por escalar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & F \times F^X & \to & F^X \\ & (c,f) & \mapsto & cf \end{array}$$

Donde $cf : X \to F$ se define por $(cf)(x) = cf(x)$, para cada $x \in X$. Vamos a mostrar que este producto satisface las cuatro propiedades para el producto por escalar de la definición de espacio vectorial:

a) Sea $f \in F^X$, si $x \in X$, entonces $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$, pues 1 es el neutro multiplicativo en el campo F, de ahí que $1f = f$.

b) *Sean* $c, d \in F$, $f \in F^X$, *entonces, para* $x \in X$, $((cd)f)(x) = (cd)f(x) = c(df(x)) = c(df)(x)$. *Por consiguiente,* $(cd)f = c(df)$.

c) *Sean* $c, d \in F$, $f \in F^X$, *entonces para* $x \in X$, $((c+d)f)(x) = (c+d)f(x) = cf(x)+df(x) = (cf)(x) + (df)(x)$, *así que* $(c+d)f = cf + df$.

d) *Sea* $c \in F$, $f, g \in F^X$, *entonces para* $x \in X$, $(c(f+g))(x) = c(f+g)(x) = c(f(x)+g(x)) = cf(x) + cg(x) = (cf)(x) + (cg)(x)$, *de ahí que* $c(f+g) = cf + cg$.

Así las cosas, hemos probado que $(F^X, +, \overline{0}, F, \cdot : F \times F^X \to F^X)$ *es un espacio vectorial.*

Ejemplo 1.1.2. *Consideremos un conjunto no vacío* X, ${}_FV$ *un espacio vectorial y formemos el conjunto* $V^X = \{f : X \to V \mid f \text{ es función}\}$. *Definamos la suma en* V^X *de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rccc} + : & V^X \times V^X & \to & V^X \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array}$$

donde $f + g : X \to V$ *está dada por* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, *para cada* $x \in X$. *Definamos la función* $\overline{0} : X \to V$, *como* $\overline{0}(x) = 0$, *para cada* $x \in X$. *Es claro que* $\overline{0} \in V^X$. *Veamos que* $\left(V^X, +, \overline{0}\right)$ *es un grupo abeliano:*

1) *(Asociatividad): Sean* $f, g, h \in V^X$, $x \in X$, *entonces:*

$$\begin{aligned} (f + (g+h))(x) &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= ((f+g)+h)(x). \end{aligned}$$

De ahí que $f + (g+h) = (f+g) + h$.

2) *(Conmutatividad): Sean* $f, g \in V^X$, *luego, tenemos la siguiente cadena de igualdades:*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= g(x) + f(x). \end{aligned}$$

Por consiguiente, se sigue que $f + g = g + f$.

3) *(Elemento neutro): Sea* $f \in V^X$, *entonces tenemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} (f + \overline{0})(x) &= f(x) + \overline{0}(x) \\ &= f(x) + 0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Es importante comentar que como en el punto anterior ya probamos la conmutatividad, es suficiente probar esta propiedad en un solo orden de efectuar la operación, por tanto, $f + \overline{0} = f = \overline{0} + f$.

4) *(Elemento inverso): Sea* $f \in V^X$, *definamos* $-f : X \to V$, *como* $(-f)(x) = -f(x)$, *para cada* $x \in X$. *Es claro que* $-f \in V^X$, *ahora:*

$$\begin{aligned} (f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) + (-f(x)) \\ &= 0 \\ &= \overline{0}(x). \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, por la conmutatividad es sufiente verificar la igualdad en un solo orden de efectuar la operación, en consecuencia, $f + (-f) = \overline{0} = (-f) + f$.

Con todo lo anterior, hemos probado que $\left(V^X, +, \overline{0}\right)$ *es un grupo abeliano.*
Ahora, vamos a definir el producto por escalares como

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & F \times V^X & \to & V^X \\ & (a, f) & \mapsto & af \end{array}$$

donde $af : X \to V$ *está dada por* $(af)(x) = af(x)$*, para cada* $x \in X$*. Vamos a ver que este producto satisface las propiedades del producto por escalar de la definición de espacio vectorial, en efecto:*

a) *Sea* $f \in V^X$*, si* $x \in X$*, entonces* $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$*, ya que* 1 *es el elemento neutro en* F *y* $f(x) \in V$*, el cual es un espacio vectorial sobre* F*.*

b) *Sean* $c, d \in F$*,* $f \in V^X$*, entonces, para* $x \in X$*,* $((cd)f)(x) = (cd)f(x) = c(df(x)) = c(df)(x)$*. Por consiguiente,* $(cd)f = c(df)$*.*

c) *Sean* $c, d \in F$*,* $f \in V^X$*, entonces para* $x \in X$*,* $((c+d)f)(x) = (c+d)f(x) = cf(x)+df(x) = (cf)(x) + (df)(x)$*, así que* $(c+d)f = cf + df$*.*

d) *Sea* $c \in F$*,* $f, g \in V^X$*, entonces para* $x \in X$*,* $(c(f+g))(x) = c(f+g)(x) = c(f(x)+g(x)) = cf(x) + cg(x) = (cf)(x) + (cg)(x)$*, de ahí que* $c(f+g) = cf + cg$*.*

Por lo tanto, $\left(V^X, +, \overline{0}, F, \cdot : F \times V^X \to V^X\right)$ *es un espacio vectorial.*

Teorema 1.1.1. *Sea* ${}_FV$ *un espacio vectorial. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Para cada* $x \in V$*,* $0_F \cdot x = 0_V$*, donde* 0_F *es el neutro aditivo en* F *y* 0_V *es el neutro aditivo en* V*.*

2) *Para cada* $a \in F$*,* $a \cdot 0_V = 0_V$*.*

3) *Para cada* $x \in V$*,* $(-1)x = -x$*.*

4) *Para cada* $a \in F$*,* $x \in V$*,* $ax = 0_V$ *si y solo si* $a = 0_F$ *ó* $x = 0_V$*.*

1.1.2. Subespacios vectoriales

Definición 1.1.2 (Subespacio vectorial)**.** *Sea* $(V, +, 0, F, \cdot : F \times V \to V)$ *un espacio vectorial y* $W \subseteq V$*. Decimos que* W *es un subespacio vectorial de* V*, o simplemente que* W *es un subespacio de* V*, si* $\left(W, +_{|W\times W}, 0, F, \cdot_{|F\times W} : F \times W \to V\right)$ *es un espacio vectorial. Cuando esto suceda, escribiremos* $W \leq V$*.*

Teorema 1.1.2 (Caracterización de los subespacios)**.** *Sea* ${}_FV$ *un espacio vectorial y* $W \subseteq V$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para* W*:*

1) $W \leq V$*.*

2) W *satisface las siguientes condiciones:*

  a) $w_1, w_2 \in W$*, implica que* $w_1 + w_2 \in W$*.*
  b) $0 \in W$*.*
  c) $a \in F, w \in W$*, implica que* $aw \in W$*.*

Ejemplo 1.1.3. *Si* ${}_FV$ *es un espacio vectorial,* $\{0\}$ *y* V *son subespacios de* V*, donde* 0 *es el elemento neutro en* V*.* $\{0\}$ *es llamado el* ***subespacio trivial de*** V*.*

Definición 1.1.3. *Sea* F *un campo,* X *un conjunto y* $f : X \to F$ *una función. Definimos el soporte de* f *de la siguiente manera:*

$$sop(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

Notación 1.1.1. *Para indicar que un conjunto A es finito, escribiremos $|A| < \infty$.*

Ejemplo 1.1.4. *Consideremos F un campo y X un conjunto, sabemos que ${}_F F^X$ es un espacio vectorial. Consideremos el siguiente subconjunto de F^X:*

$$F^{(X)} = \{f \in F^X \mid |sop(f)| < \infty\}.$$

Veamos que $F^{(X)} \leq F^X$:

a) Sean $f, g \in F^{(X)}$, luego $|sop(f)|, |sop(g)| < \infty$, veamos que $sop(f+g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$, en efecto, sea $x \in sop(f+g)$, entonces $(f+g)(x) \neq 0$, esto es $f(x) + g(x) \neq 0$, por lo que $f(x) \neq 0$ ó $g(x) \neq 0$, así que $x \in sop(f)$ ó $x \in sop(g)$, es decir, $x \in sop(f) \cup sop(g)$. Por lo tanto, $sop(f+g) \subseteq sop(f) \cup sop(g)$, entonces $|sop(f+g)| \leq |sop(f) \cup sop(g)|$ y dado que $sop(f)$ y $sop(g)$ son finitos se tiene que $sop(f) \cup sop(g)$ es finito, lo cual nos obliga a que $sop(f+g)$ sea finito. Por lo tanto $f + g \in F^{(X)}$.

b) Sabemos que $\overline{0} : X \to F$ definida por $\overline{0}(x) = 0$, para cada $x \in X$, es el elemento neutro en F^X, además $sop(\overline{0}) = \emptyset$, por lo que $sop(\overline{0})$ es finito, así que $\overline{0} \in F^{(X)}$.

c) Sea $a \in F$, $f \in F^{(X)}$, entonces para $x \notin sop(f)$ se tiene que $f(x) = 0$ y por tanto $af(x) = 0$, es decir, $(af)(x) = 0$, para $x \notin sop(f)$, además, si $a = 0$, entonces $af = \overline{0}$. Finalmente, si $a \neq 0$, entonces $sop(af) = sop(f)$, pues para cada $x \in sop(f)$, $af(x) \neq 0$, es decir, $(af)(x) \neq 0$, por lo que $sop(af)$ es finito, en consecuencia $af \in F^{(X)}$.

Por lo tanto, $F^{(X)} \leq F^X$.

Ejemplo 1.1.5. *Si ${}_F V$ es un espacio vectorial, X un conjunto no vacío y definimos el conjunto*

$$V^{(X)} = \{f \in V^X \mid |sop(f)| < \infty\}.$$

Haciendo un razonamiento similar al del ejemplo anterior se tiene que $V^{(X)} \leq V^X$.

1.1.3. Subespacios generados

Teorema 1.1.3. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subespacios de V, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha \leq V$.*

Demostración. Vamos a probar las tres condiciones que de acuerdo al Teorema 1.1.2 es suficiente verificar:

a) Supongamos que $w_1, w_2 \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$, entonces $w_1, w_2 \in W_\alpha$, para cada $\alpha \in I$, como $W_\alpha \leq V$, para cada $\alpha \in I$, entonces $w_1 + w_2 \in W_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. Por lo tanto, $w_1 + w_2 \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$.

b) Como $W_\alpha \leq V$, para cada $\alpha \in I$, entonces $0 \in W_\alpha$, para cada $\alpha \in I$, esto es, $0 \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$.

c) Supongamos que $a \in F$ y $w \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$, entonces $w \in W_\alpha$, para cada $\alpha \in I$, como $W_\alpha \leq V$, para cada $\alpha \in I$, entonces $aw \in W_\alpha$, para cada $\alpha \in I$, es decir, $aw \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$.

Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha \leq V$. □

Corolario 1.1.1. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial y $X \subseteq V$. Entonces existe un subespacio más pequeño de V que contiene a X.*

Demostración. Consideremos la familia de subespacios:

$$\mathcal{F} = \{W \leq V \mid X \subseteq W\}.$$

Es claro que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $V \in \mathcal{F}$. Por el Teorema 1.1.3, se tiene que $\bigcap \mathcal{F} \leq V$. Además, como $X \subseteq W$, para cada $W \in \mathcal{F}$, entonces, $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ y $\bigcap \mathcal{F} \leq V$. Ahora, si $H \leq V$ y $X \subseteq H$, entonces $H \in \mathcal{F}$, en consecuencia, $\bigcap \mathcal{F} \subseteq H$, más aún, como $\bigcap \mathcal{F}, H \leq V$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \leq H$. □

Definición 1.1.4 (Subespacio generado)**.** *Sea $_FV$ un espacio vectorial y $X \subseteq V$. Al subespacio más pequeño de V que contiene a X se le llama el* ***subespacio generado por*** *X y se denota como $\langle X \rangle$. Es decir:*

$$\langle X \rangle = \bigcap \{W \leq V \mid X \subseteq W\}.$$

Observación 1.1.1. *Sea $_FV$ un espacio vectorial y $W \subseteq V$. Entonces, $W \leq V$ si y solo si $W = \langle W \rangle$.*

Ejemplo 1.1.6. *Si $_FV$ es un espacio vectorial, entonces $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$, donde 0 es el elemento neutro en V.*

Proposición 1.1.1. *Sea $_FV$ un espacio vectorial, $X, Y \subseteq V$. Si $X \subseteq Y$, entonces $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.*

Demostración. Por hipótesis $X \subseteq Y$ y por definición, sabemos que $Y \subseteq \langle Y \rangle$, entonces $X \subseteq \langle Y \rangle$, así, $\langle Y \rangle$ es un subespacio de V que contiene a X, entonces $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$. Más aún, $\langle X \rangle \leq \langle Y \rangle$, ya que $\langle X \rangle, \langle Y \rangle \leq V$. □

En el siguiente teorema, presentaremos una forma sencilla de obtener el subespacio generado por un subconjunto no vacío de un espacio vectorial, pues salvo en casos excepcionales, hacerlo directamente por la definición no es factible para fines prácticos.

Teorema 1.1.4. *Sea $_FV$ un espacio vectorial y $X \subseteq V$, $X \neq \emptyset$. Entonces:*

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_i \in X, a_i \in F, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Demostración. Denotemos

$$C(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_i \in X, a_i \in F, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Vamos a probar que $C(X)$ es un subespacio vectorial de V que contiene a X:

a) Sean $x, y \in C(X)$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$, con $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_i, y_j \in X$, $a_i, b_j \in F$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, luego $x + y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$, por lo que $x + y \in C(X)$, pues es una combinación lineal finita de elementos de X.

b) Como $X \neq \emptyset$, existe $x \in V$ tal que $x \in X$, luego $0 = 0 \cdot x$, con $0 \in F$, en consecuencia $0 \in C(X)$.

c) Sean $\alpha \in F$, $x \in C(X)$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_i \in X$, $a_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, así $\alpha x = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) x_i$, de ahí que $\alpha x \in C(X)$.

Por lo tanto $C(X) \leq V$, ahora, si $x \in X$, entonces $x = 1 \cdot x$, donde $1 \in F$, así que $x \in C(X)$, por lo tanto, $X \subseteq C(X)$. Así las cosas, hemos probado que $C(X) \leq V$ y $X \subseteq C(X)$, pero $\langle X \rangle$ es el subespacio de V más pequeño que contiene a X, entonces $\langle X \rangle \leq C(X)$. Ahora vamos a probar que $C(X) \leq \langle X \rangle$, ya sabemos que ambos son subespacios de V, así que basta probar que $C(X) \subseteq \langle X \rangle$, sea $x \in C(X)$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_i \in X$, $a_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $x_i \in X$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $X \subseteq \langle X \rangle$, entonces $x_i \in \langle X \rangle$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, pero $\langle X \rangle \leq V$, así que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \langle X \rangle$, es decir, $x \in \langle X \rangle$. Por lo tanto, $C(X) \leq \langle X \rangle$ y en consecuencia $\langle X \rangle = C(X)$. □

Corolario 1.1.2. *Sea $_FV$ un espacio vectorial, $X \subseteq V$. Entonces:*

$$\langle X \rangle = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \text{ finito}}} \langle Y \rangle.$$

Demostración. Veamos la primera contención, es decir, veamos que $\langle X\rangle \subseteq \bigcup_{\substack{Y\subseteq X\\ Y \text{ finito}}} \langle Y\rangle$. Si $X=\emptyset$, dado que $\langle\emptyset\rangle=\{0\}$ por el Ejemplo 1.1.6, el resultado es inmediato. A partir de este momento podemos suponer que $X\neq\emptyset$. Sea $v\in\langle X\rangle$, entonces $v=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, con $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, x_i\in X, a_i\in F, i\in\{1,\ldots,n\}$, luego $v\in\langle\{x_1,\ldots,x_n\}\rangle$ y $\{x_1,\ldots,x_n\}$ es finito, por consiguiente, $v\in \bigcup_{\substack{Y\subseteq X\\ Y \text{ finito}}} \langle Y\rangle$. Por lo tanto, $\langle X\rangle \subseteq \bigcup_{\substack{Y\subseteq X\\ Y \text{ finito}}} \langle Y\rangle$. Ahora, si $Y\subseteq X$, entonces $\langle Y\rangle\subseteq\langle X\rangle$, en particular cuando Y es finito, por lo tanto, $\bigcup_{\substack{Y\subseteq X\\ Y \text{ finito}}} \langle Y\rangle \subseteq \langle X\rangle$. De ambas contenciones se tiene la igualdad deseada. $\square$

1.1.4. Suma de subespacios

Definición 1.1.5. *Sea $_F V$ un espacio vectorial, $W_1, W_2\leq V$. La suma de W_1 y W_2 se define de la siguiente manera:*

$$W_1+W_2=\langle W_1\cup W_2\rangle.$$

Teorema 1.1.5. *Sea $_F V$ un espacio vectorial, $W_1,W_2\leq V$. Entonces:*

$$W_1+W_2=\{w_1+w_2 \mid w_1\in W_1, w_2\in W_2\}.$$

Demostración. Denotemos $S=\{w_1+w_2\mid w_1\in W_1,w_2\in W_2\}$. Veamos que $S\leq V$:

a) Sean $x,y\in S$, entonces $x=w_1^1+w_2^1$, $y=w_1^2+w_2^2$, con $w_1^1,w_1^2\in W_1, w_2^1,w_2^2\in W_2$, entonces $x+y=(w_1^1+w_2^1)+(w_1^2+w_2^2)=(w_1^1+w_1^2)+(w_2^1+w_2^2)$, pero como $W_1,W_2\leq V$, entonces $w_1^1+w_1^2\in W_1, w_2^1+w_2^2\in W_2$, por lo tanto $x+y\in S$.

b) $0=0+0$, con $0\in W_1, 0\in W_2$, por lo que $0\in S$.

c) Sea $\alpha\in F$, $x\in S$, entonces $x=w_1+w_2$, con $w_1\in W_1, w_2\in W_2$, así $\alpha x=\alpha(w_1+w_2)=\alpha w_1+\alpha w_2$, pero $W_1,W_2\leq V$, entonces $\alpha w_1\in W_1, \alpha w_2\in W_2$, en consecuencia $\alpha x\in S$.

Por lo tanto $S\leq V$. Ahora veamos que $W_1\cup W_2\subseteq S$, en efecto, sea $x\in W_1\cup W_2$, entonces $x\in W_1$ ó $x\in W_2$, si $x\in W_1$, entonces $x=x+0$, con $x\in W_1, 0\in W_2$, por consiguiente $x\in S$; si $x\in W_2$, entonces $x=0+x$, con $0\in W_1, x\in W_2$, por consiguiente $x\in S$. Por lo tanto $W_1\cup W_2\subseteq S$. Así las cosas, hemos mostrado que $S\leq V$ y $W_1\cup W_2\subseteq S$, pero W_1+W_2 es el subespacio de V más pequeño que contiene a $W_1\cup W_2$, entonces $W_1+W_2\leq S$.
Ahora mostremos que $S\leq W_1+W_2$, en efecto, sea $x\in S$, entonces $x=w_1+w_2$, con $w_1\in W_1, w_2\in W_2$, pero $W_1,W_2\subseteq W_1\cup W_2$, entonces $w_1,w_2\in W_1\cup W_2$, pero $W_1\cup W_2\subseteq W_1+W_2$, así $w_1,w_2\in W_1+W_2$, como $W_1+W_2\leq V$, entonces $w_1+w_2\in W_1+W_2$, es decir, $x\in W_1+W_2$. Por lo tanto, $S\leq W_1+W_2$ y consecuentemente, $W_1+W_2=S$. $\square$

La definición para dos subespacios la podemos generalizar a cualquier familia de subespacios, lo cual lo hacemos en la siguiente definición.

Definición 1.1.6. *Sea $_F V$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V. Definimos la suma de la familia $\{W_i\}_{i\in I}$, de la siguiente manera:*

$$\sum_{i\in I} W_i=\left\langle \bigcup_{i\in I} W_i\right\rangle.$$

Teorema 1.1.6. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V. Entonces, $\sum_{i\in I} W_i$ es el subespacio de V más pequeño que contiene a cada W_i.*

Demostración. Notemos que para cada $j \in I$, $W_j \subseteq \bigcup_{i\in I} W_i \subseteq \sum_{i\in I} W_i$, por transitividad $W_j \subseteq \sum_{i\in I} W_i$, para cada $j \in I$. Ahora, supongamos que $Z \leq V$ es tal que $W_j \subseteq Z$, para cada $j \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} W_i \subseteq Z$, pero $\sum_{i\in I} W_i$ es el subespacio de V más pequeño que contiene a $\bigcup_{i\in I} W_i$, entonces $\sum_{i\in I} W_i \leq Z$. □

Teorema 1.1.7. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios de V, entonces*

$$\sum_{i\in I} W_i = \left\{ \sum_{j\in J} w_j \mid J \subseteq I, |J| < \infty, w_j \in W_j \text{ para cada } j \in J \right\}.$$

Proposición 1.1.2. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $X, Y \subseteq V$. Entonces:*

$$\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle.$$

Demostración. Por definición, $\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle$. Ahora, sabemos que $X \subseteq \langle X \rangle$ y $Y \subseteq \langle Y \rangle$, entonces $X \cup Y \subseteq \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle$, por la Proposición 1.1.1, $\langle X \cup Y \rangle \subseteq \langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle$. Por otro lado, $X \subseteq X \cup Y$ y $Y \subseteq X \cup Y$, entonces $\langle X \rangle \subseteq \langle X \cup Y \rangle$ y $\langle Y \rangle \subseteq \langle X \cup Y \rangle$, así que $\langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle \subseteq \langle X \cup Y \rangle$. Por lo tanto, $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle$. □

Teorema 1.1.8 (Ley Modular)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, X, Y, Z subespacios de V tales que $X \leq Y$. Entonces:*

$$Y \cap (X + Z) = X + (Y \cap Z).$$

Demostración. Veamos la primera contención, es decir, veamos que $Y \cap (X + Z) \subseteq X + (Y \cap Z)$, sea $v \in Y \cap (X + Z)$, entonces $v \in Y$ y $v \in X + Z$, luego $v = x + z$, con $x \in X, z \in Z$. Es suficiente ver que $z \in Y \cap Z$, pero ya tenemos que $z \in Z$, ahora, como $z = v - x$, donde $v \in Y$, $x \in X$, $X \leq Y$ y $Y \leq V$, tenemos que $z \in Y$. Así las cosas, tenemos que $z \in Y \cap Z$, entonces $v = x + z$, con $x \in X, z \in Y \cap Z$, por consiguiente $v \in X + (Y \cap Z)$. Por lo tanto, $Y \cap (X + Z) \subseteq X + (Y \cap Z)$. Ahora vamos a ver que $X + (Y \cap Z) \subseteq Y \cap (X + Z)$. Sabemos que $X, Y \cap Z \subseteq Y$, entonces $X \cup (Y \cap Z) \subseteq Y$, por consiguiente, $\langle X \cup (Y \cap Z) \rangle \subseteq \langle Y \rangle = Y$, ya que $Y \leq V$, es decir, $X + (Y \cap Z) \subseteq Y$. Por otro lado, $X \subseteq X + Z$ y $Y \cap Z \subseteq Z \subseteq X + Z$, por lo que $X \cup (Y \cap Z) \subseteq X + Z$, entonces $\langle X \cup (Y \cap Z) \rangle \subseteq \langle X + Z \rangle = X + Z$, ya que $X + Z \leq V$, pero por definición, $\langle X \cup (Y \cap Z) \rangle = X + (Y \cap Z)$, entonces $X + (Y \cap Z) \subseteq X + Z$. Como $X + (Y \cap Z) \subseteq Y$ y $X + (Y \cap Z) \subseteq X + Z$, entonces $X + (Y \cap Z) \subseteq Y \cap (X + Z)$. Nótese que para probar esta contención no necesitamos usar que $X \leq Y$. De ambas contenciones, tenemos que $Y \cap (X + Z) = X + (Y \cap Z)$. □

1.1.5. Dependencia e independencia lineal

Definición 1.1.7 (Dependencia e independencia lineal)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$. Decimos que S es* ***linealmente dependiente****, lo cual se abrevia como l.d, si existe $x \in S$ tal que $x \in \langle S \backslash \{x\} \rangle$. Cuando S no es linealmente dependiente, se dice que es* ***linealmente independiente*** *y se abrevia como l.i.*

Ejemplo 1.1.7. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial, $\{0\}$ es l.d, donde 0 es el elemento neutro en V. En efecto, por el Ejemplo 1.1.6, $\{0\} = \langle \emptyset \rangle$. Así, tenemos que $0 \in \langle \emptyset \rangle = \langle \{0\} \setminus \{0\} \rangle$, por lo tanto, $\{0\}$ es l.d.*

Ejemplo 1.1.8. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial, $\emptyset$ es l.i en V.*

Teorema 1.1.9 (Caracterización de conjuntos linealmente dependientes)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones sobre S:*

1) S es l.d.

2) Existe $x \in S$ tal que $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{x\} \rangle$.

3) Existe $S' \subseteq S$, S' finito tal que S' es l.d.

4) Existe $S' \subseteq S$, $S' = \{y_1, \ldots, y_n\}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$, $a_i \in F$ y $a_j \neq 0$, para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que S es l.d, luego existe $x \in S$ tal que $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$. Veamos que $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{x\} \rangle$, en efecto, sabemos que $S \setminus \{x\} \subseteq S$, entonces $\langle S \setminus \{x\} \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Ahora, $\{x\} \subseteq \langle S \setminus \{x\} \rangle$, además, $S \setminus \{x\} \subseteq \langle S \setminus \{x\} \rangle$, entonces $S \subseteq \langle S \setminus \{x\} \rangle$, por lo que $\langle S \rangle \subseteq \langle S \setminus \{x\} \rangle$. De ambas contenciones tenemos que $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{x\} \rangle$.
2) $\Rightarrow$ 3): Supongamos que existe $x \in S$ tal que $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{x\} \rangle$, entonces $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$, luego, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_i \in X$, $x_i \neq x$, $a_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos $S' = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$, claramente S' es finito, $x \in S'$ y $x \in \langle S' \setminus \{x\} \rangle$, de ahí que S' es finito y l.d.
3) $\Rightarrow$ 4): Supongamos que existe $S' \subseteq S$, S' finito tal que S' es l.d, luego $S' = \{y_1, \ldots, y_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, como S' es l.d, existe $y_j \in \langle \{S' \setminus \{y_j\} \rangle$, para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, luego $y_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} a_i y_i$, con $a_i \in F$, $y_i \in S'$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\sum_{i=1, i \neq j}^{n} a_i y_i - y_j = 0$, así se tiene que S' es finito y es tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$, con $a_j = -1 \neq 0$.
4) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que existe $S' \subseteq S$, $S' = \{y_1, \ldots, y_n\}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$, $a_i \in F$ y $a_j \neq 0$, para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, luego $y_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} (-a_j^{-1} a_i) y_i$, por lo que $y_j \in \langle S' \setminus \{y_j\} \rangle$, con $y_j \in S'$, pero $S' \subseteq S$, entonces $y_j \in S$, además, $S' \setminus \{y_j\} \subseteq S \setminus \{y_j\}$, por lo que $\langle S' \setminus \{y_j\} \rangle \leq \langle S \setminus \{y_j\} \rangle$, en consecuencia $y_j \in \langle S \setminus \{y_j\} \rangle$, de ahí que S es l.d. $\square$

En el siguiente teorema vamos a probar una equivalencia de dependencia lineal para el caso especial cuando el subconjunto es finito.

Teorema 1.1.10. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$. Entonces S es l.d si y solo si existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i \in \langle \{x_j \mid j < i\} \rangle$.*

Demostración. $\Rightarrow$) : Supongamos que S es l.d, luego existe $l \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_l = \sum_{j=1, j \neq l}^{n} a_j x_j$, con $a_j \in F$, $x_j \in S$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, considermos $i = \mathit{mayor}\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid a_j \neq 0\}$, el cuál es claro que existe; ahora, $\sum_{j=1, j \neq l}^{n} a_j x_j - x_l = 0$, note que $l \in \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid a_j \neq 0\}$, entonces $l \leq i$, así $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0$; esta suma la podemos separar como $\sum_{j=1}^{i} a_j x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_j x_j = 0$, pero $j > i$ implica que $a_j = 0$ pues $i = \mathit{mayor}\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid a_j \neq 0\}$, entonces $\sum_{j=1}^{i} a_j x_j = 0$, luego $x_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-a_i^{-1} a_j) x_j$, de ahí que $x_i \in \langle \{x_j \mid j < i\} \rangle$.
$\Leftarrow$) : Supongamos que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i \in \langle \{x_j \mid j < i\} \rangle$, pero $\langle \{x_j \mid j < i\} \rangle \leq \langle S \setminus \{x_i\} \rangle$, así que $x_i \in \langle S \setminus \{x_i\} \rangle$ y por consiguiente S es l.d. $\square$

Proposición 1.1.3. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial y $x \in V$. Entonces $\{x\}$ es l.i si y solo si $x \neq 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$): Supongamos que $\{x\}$ es l.i. Si $x = 0$, entonces $x \in \{0\} = \langle \emptyset \rangle = \langle \{x\} \setminus \{x\} \rangle$, es decir, $x \in \langle \{x\} \setminus \{x\} \rangle$, así $\{x\}$ sería l.d lo cual es absurdo por hipótesis. Por lo tanto, $x \neq 0$.
$\Leftarrow$): Supongamos que $x \neq 0$, entonces para cada $y \in \{x\}$, $y \notin \{0\} = \langle \emptyset \rangle = \langle \{x\} \setminus \{x\} \rangle$, por lo que $\{x\}$ es l.i. $\square$

Teorema 1.1.11. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial y $T \subseteq V$. Si $S \subseteq T$ y S es l.d entonces T es l.d.*

Demostración. Supongamos que $S \subseteq T$ y S es l.d, luego existe $x \in S$ tal que $x \in \langle S \setminus \{x\} \rangle$. Ahora, como $S \subseteq T$ entonces $S \setminus \{x\} \subseteq T \setminus \{x\}$, entonces $\langle S \setminus \{x\} \rangle \leq \langle T \setminus \{x\} \rangle$, en consecuencia $x \in T$ y es tal que $x \in \langle T \setminus \{x\} \rangle$, de ahí que T es l.d. $\square$

Corolario 1.1.3. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$. Si $0 \in S$, entonces S es l.d.*

Corolario 1.1.4. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial, $S \subseteq T \subseteq V$. Si T es l.i entonces S es l.i.*

El siguiente teorema nos ofrece una caracterización de los conjuntos l.i.

Teorema 1.1.12 (Caracterización de los conjuntos linealmente independientes)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$. Las siguientes afirmaciones sobre S son equivalentes.*

1) S es l.i.

2) Para cada $x \in S$, $\langle S \setminus \{x\} \rangle \lneq \langle S \rangle$.

3) Para cada $S' \subseteq S$, $|S'| < \infty$, S es l.i.

4) Para cada $S' \subseteq S$, $S' = \{x_1, \ldots, x_n\}$, si $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, con $a_i \in F$, entonces $a_i = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 1.1.13. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, β un subconjunto l.i de V y $x \in V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $x \notin \langle \beta \rangle$.

2) $\beta \cup \{x\}$ es l.i.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que $x \notin \langle \beta \rangle$. Debemos mostrar que $\beta \cup \{x\}$ es l.i, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_{n+1} x = 0$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i, c_{n+1} \in F$, $x_i \in \beta$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $c_{n+1} \neq 0$, entonces $x = -\sum_{i=1}^{n} (c_{n+1}^{-1} c_i) x_i$, de esta manera $x \in \langle \beta \rangle$, lo cual es absurdo por hipótesis, en consecuencia $c_{n+1} = 0$. Luego, $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ y como β es l.i, entonces $c_i = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $c_i = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ y de esta manera establecemos que $\beta \cup \{x\}$ es l.i.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que $\beta \cup \{x\}$ es l.i. Si $x \in \langle \beta \rangle$, entonces $\beta \cup \{x\}$ es l.d, lo cual no es posible. Por lo tanto, $x \notin \langle \beta \rangle$. □

1.2. Base y dimensión

1.2.1. Caracterización de las bases

Definición 1.2.1 (Conjunto generador)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\beta \subseteq V$. Decimos que β genera a V si $\langle \beta \rangle = V$. En tal caso tambien se dice que β es un conjunto generador de V.*

Observación 1.2.1. *Dado que $V \leq V$ y $\langle V \rangle = V$, entonces V es un conjunto generador de V, por lo que se concluye que todo espacio vectorial tiene conjuntos generadores.*
De igual forma, dado que $\emptyset$ es l.i en cualquier espacio vectorial ${}_FV$, se concluye que todo espacio vectorial tiene conjuntos l.i.

Definición 1.2.2 (Base)**.** *Sea V un espacio vectorial sobre un campo F, $\beta \subseteq V$. Decimos que β es una base para V si β es linealmente independiente y genera a V.*

Notación 1.2.1. *Para un espacio vectorial V sobre un campo F, denotamos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(V) = & \quad \{\beta \subseteq V \mid \beta \text{ es l.i}\}. \\ \mathcal{G}(V) = & \quad \{\beta \subseteq V \mid \beta \text{ genera a } V\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.2.1 (Caracterización de Bases)**.** *Son equivalentes para $\beta \subseteq V$:*

1) β es base de V.

2) β es un elemento máximo en $\mathcal{I}(V)$.

3) β es un elemento mínimo en $\mathcal{G}(V)$.

4) Para cada $x \in V$, existe una única combinación lineal $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $x_i \in \beta$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que β es base de V. Claramente, $\beta \in \mathcal{I}(V)$. Veamos que es máximo, supongamos que $\beta \subsetneq \beta'$, luego, existe $x \in V$ tal que $x \in \beta'$ y $x \notin \beta$, como $\langle \beta \rangle = V$, entonces $\beta \cup \{x\}$ es l.d, ya que $x \in V = \langle \beta \rangle = \langle (\beta \cup \{x\}) \setminus \{x\} \rangle$, pero $\beta \cup \{x\} \subseteq \beta'$, con $\beta \cup \{x\}$ l.d, por consiguiente β' es l.d, de ahí que $\beta' \notin \mathcal{I}(V)$ y así queda establecida la maximalidad de β en $\mathcal{I}(V)$.
2) $\Rightarrow$ 3): Supongamos que β es un elemento máximo en $\mathcal{I}(V)$, luego $\beta \in \mathcal{I}(V)$. Primero veamos que $V = \langle \beta \rangle$, es claro que $\langle \beta \rangle \leq V$. Ahora, sea $x \in V$, entonces $x \in \beta$ ó $x \notin \beta$. Si $x \in \beta$, como $\beta \subseteq \langle \beta \rangle$, trivialmente se tiene que $x \in \langle \beta \rangle$. Si $x \notin \beta$, entonces $\beta \subsetneq \beta \cup \{x\}$, pero β es máximo en $\mathcal{I}(V)$, así que $\beta \cup \{x\}$ es l.d, luego existe una combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1} x = 0$, con $a_i \in F$, $x_i \in \beta$, con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, si $a_{n+1} = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, pero esto es absurdo ya que β es l.i, de ahí que $a_{n+1} \neq 0$, en consecuencia $x = \sum_{i=1}^{n} (-a_{n+1}^{-1} a_i) x_i$, con lo que $x \in \langle \beta \rangle$. Por lo tanto, de cualquier manera $V \leq \langle \beta \rangle$, por consiguiente, $V = \langle \beta \rangle$, es decir, $\beta \in \mathcal{G}(V)$.
Ahora, falta ver que β es mínimo en $\mathcal{G}(V)$, en efecto sea $\beta' \subsetneq \beta$, luego existe $x \in V$ tal que $x \in \beta$ y $x \notin \beta'$, así $\beta' \cup \{x\} \subseteq \beta$, como β es l.i, por el Corolario 1.1.4, tenemos que $\beta' \cup \{x\}$ es l.i, luego, por el Teorema 1.1.12, para cada $y \in \beta' \cup \{x\}$, tenemos que $\langle \beta' \cup \{x\} \setminus \{y\} \rangle \lneq \langle \beta' \cup \{x\} \rangle$, en particular, $\langle \beta' \cup \{x\} \setminus \{x\} \rangle \lneq \langle \beta' \cup \{x\} \rangle$, es decir, $\langle \beta' \rangle \lneq \langle \beta' \cup \{x\} \rangle$, luego, como $\beta' \subseteq \beta' \cup \{x\} \subseteq \beta$, entonces $\langle \beta' \rangle \lneq \langle \beta' \cup \{x\} \rangle \leq \langle \beta \rangle = V$, con lo que $\langle \beta' \rangle \lneq V$, esto es $\beta' \notin \mathcal{G}(V)$, con lo que se establece la minimalidad de β en $\mathcal{G}(V)$.
3) $\Rightarrow$ 4): Sea $x \in V$, como $V = \langle \beta \rangle$, existe una combinación lineal para x de elementos de β, a saber

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{I}$$

con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $x_i \in \beta$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que hay otra combinación lineal distinta para x de elementos de β, a saber

$$x = \sum_{j=1}^{m} d_j y_j \tag{II}$$

con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 \neq d_j \in F$, $y_j \in \beta$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Restando miembro a miembro las ecuaciones I y II, se tiene que $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{j=1}^{m} d_j y_j$, con al menos uno de los coeficientes distintos de cero, esto implica que $\gamma = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ es l.d, pero $\gamma \subseteq \beta$, en consecuencia β es l.d. Luego, existe $y \in \beta$ tal que $\langle \beta \setminus \{y\} \rangle = \langle \beta \rangle = V$, así, $\beta \setminus \{y\} \in \mathcal{G}(V)$ con $\beta \setminus \{y\} \subsetneq \beta$, lo que contradice la minimalidad de β en $\mathcal{G}(V)$. Por lo tanto, la representación de x como combinación lineal finita de elementos de β es única.
4) $\Rightarrow$ 1): Es inmediato. $\square$

1.2.2. Existencia de bases

Teorema 1.2.2 (Existencia de bases)**.** *Todo espacio vectorial tiene base.*

Demostración. Sea ${}_F V$ un espacio vectorial. Recordemos que $\mathcal{I}(V) = \{\beta \subseteq V \mid \beta \text{ es l.i}\}$, sabemos que $(\mathcal{I}(V), \subseteq)$ es un COPO, además $\mathcal{I}(V) \neq \emptyset$, pues $\emptyset \in \mathcal{I}(V)$. Consideremos un conjunto I no vacío y $\{A_i\}_{i \in I}$ una cadena en $\mathcal{I}(V)$. Consideremos $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, luego A es una cota superior para $\{A_i\}_{i \in I}$, pues para cada $i \in I$, $A_i \subseteq A$. Ahora, veamos que $A \in \mathcal{I}(V)$, es decir, hay que ver que A es l.i, para esto, consideremos un subconjunto finito de A, a saber $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$, para algún $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, como $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe $i_j \in I$ tal que $x_j \in A_{i_j}$. Como $\{A_i\}_{i \in I}$ es una cadena, entonces $\left\{A_{i_j}\right\}_{j=1}^{m}$ también lo es, por consiguiente existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{m} A_{i_j} = A_{i_k}$, como $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_{i_j} = A_{i_k}$, entonces $S \subseteq A_{i_k}$, pero por hipótesis A_{i_k} es l.i, por tanto S es l.i, ya que está contenido en un conjunto l.i. Así las cosas, hemos probado que A es l.i, por lo tanto $A \in \mathcal{I}(V)$, además A es cota superior para la cadena $\{A_i\}_{i\in I}$, por el Lema de Zorn, $\mathcal{I}(V)$ tiene un elemento máximo, digamos β, por el Teorema 1.2.1, β es base de V. □

Teorema 1.2.3. *Todo subconjunto linealmente independiente en un espacio vectorial $_FV$ está contenido en una base de V.*

Demostración. Sea $_FV$ un espacio vectorial, X un subconjunto linealmente independiente de V. Consideremos la siguiente familia de subconjuntos de V:

$$\mathcal{A} = \{Y \subseteq V \mid X \subseteq Y, Y \in \mathcal{I}(V)\}.$$

Por hipótesis, $X \in \mathcal{A}$, así que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, además, es claro que $(\mathcal{A}, \subseteq)$ es un COPO.
Sea I un conjunto no vacío, $\mathcal{C} = \{Y_i\}_{i\in I}$ una cadena de $\mathcal{A}$ y denotemos $B = \bigcup_{i\in I} Y_i$. Sabemos que para cada $i \in I$, $Y_i \subseteq B$, de ahi que B es una cota superior para $\mathcal{C}$. Ahora, para cada $i \in I$, $X \subseteq Y_i \subseteq B$, entonces $X \subseteq B$ y como $\mathcal{C}$ es una cadena, haciendo un razonamiento similar al del Teorema 1.2.2, tenemos que B es l.i, en consecuencia, $B \in \mathcal{A}$, aplicando el Lema de Zorn tenemos que $\mathcal{A}$ tiene un elemento máximo, digamos M.
Por último, veamos que M es máximo en $\mathcal{I}(V)$, en efecto, sea $Z \in \mathcal{I}(V)$ tal que $M \subseteq Z$, luego $X \subseteq M \subseteq Z$, con lo que $X \subseteq Z$ con Z l.i, así $Z \in \mathcal{A}$, pero M es máximo en $\mathcal{A}$, entonces $Z = M$. Por el Teorema 1.2.1 se tiene que M es base de V y es tal que $X \subseteq M$. □

Teorema 1.2.4. *Todo subconjunto generador de un espacio vectorial $_FV$ contiene una base.*

Demostración. Sea $_FV$ un espacio vectorial y γ un conjunto generador de V. Consideremos la siguiente familia de subconjuntos de V:

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq V \mid A \text{ es l.i y} A \subseteq \gamma\}.$$

Notemos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, ya que $\emptyset \in \mathcal{A}$. Además, $(\mathcal{A}, \subseteq)$ es un COPO. Sea I un conjunto no vacío, $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i\in I}$ una cadena de $\mathcal{A}$ y consideremos $B = \bigcup_{i\in I} A_i$. Sabemos que para cada $i \in I$, $A_i \subseteq B$, además $B \subseteq \gamma$, más aún, con el mismo razonamiento usado en el Teorema 1.2.2 se establece que B es l.i, con lo que $B \in \mathcal{A}$. Hemos mostrado que toda cadena de $\mathcal{A}$ tiene una cota superior en $\mathcal{A}$, por el Lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tiene un elemento máximo, digamos β, es decir, β es l.i y $\beta \subseteq \gamma$.
Para mostrar que β es una base de V, solo falta mostrar que $V = \langle\beta\rangle$, en efecto, sea $x \in V$, como $V = \langle\gamma\rangle$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $x_i \in \gamma$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, si existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i \notin \langle\beta\rangle$, por el Teorema 1.1.13, $\beta \cup \{x_i\}$ es l.i, además, $x_i \notin \beta$ ya que $\beta \subseteq \langle\beta\rangle$, luego $\beta \subsetneq \beta \cup \{x_i\}$, $\beta \cup \{x_i\}$ es l.i y $\beta \cup \{x_i\} \subseteq \gamma$, esto es, $\beta \cup \{x_i\} \in \mathcal{A}$ y $\beta \subsetneq \beta \cup \{x_i\}$, pero esto contradice la maximalidad de β en $\mathcal{A}$, en consecuencia para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $x_i \in \langle\beta\rangle$ y como $\langle\beta\rangle \leq V$, entonces $x \in \langle\beta\rangle$. Así las cosas, tenemos que β es base de V y $\beta \subseteq \gamma$. □

1.2.3. Dimensión

Aquí, como en el caso de cualquier clase de conjuntos es importante introducir algún tipo de medida, los espacios vectoriales no tienen por qué ser la excepción. En el caso de los espacios vectoriales vamos a introducir el concepto de dimensión, el cuál definiremos como el número de elementos de su base, pero para introducir esa definición es necesario mostrar que el concepto está bien definido, sin importar si la cardinalidad de la base es finita o infinita, pues en el siguiente ejemplo vamos a ver que un espacio vectorial puede tener bases diferentes.

Ejemplo 1.2.1. *Consideremos el espacio vectorial $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. Sabemos que $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, pero tambien $\beta' = \{(1,1),(5,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$, pues para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la ecuación $c_1(1,1) + c_2(5,1) = (x,y)$ tiene solución única.*

Notemos que pese a que β y β' son diferentes, ambas tienen el mismo número de elementos. Resulta que este hecho no es coincidencia, siempre se cumple que todas las bases tienen el mismo tamaño sean finitas o infinitas, eso es lo que vamos a mostrar para que el concepto de dimensión quede bien definido.

Notación 1.2.2. *Si A, B son conjuntos y $f : A \to B$ es una función inyectiva, podemos denotar $f : A \rightarrowtail B$. La notación antes mencionada indicará que la función es inyectiva, aún cuando no se diga en palabras.*

Notación 1.2.3. *Si A, B son conjuntos con $A \subseteq B$, para denotar la función inclusión $\iota : A \to B$, definida por $\iota(a) = a$, para cada $a \in A$, se escribirá simplemente $A \hookrightarrow B$. Dicha notación se referirá a la inclusión, aún cuando no se diga explícitamente.*

El siguiente teorema es precisamente el argumento que necesitamos para poder establecer el concepto de dimensión de un espacio vectorial, en el cuál se establecerá que cualesquiera dos bases de un espacio vectorial tienen el mismo tamaño, esto sin importar si tienen una cantidad finita o infinita de elementos.

Teorema 1.2.5. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, A y B bases de V. Entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto:

$$Q = \left\{(I_x, F_x) \mid I_x \subseteq A, F_x : I_x \rightarrowtail B, (B \setminus [F_x(I_x)])\mathring{\cup} I_x \text{ es l.i en } V\right\}.$$

Es importante comentar que Q es una familia de parejas (I_x, F_x), donde $I_x \subseteq A$, $F_x : I_x \to B$ es una función inyectiva. Se pide que $B \setminus [F_x(I_x)]$ sea ajeno con I_x y su unión sea l.i en V. De manera conjuntista, a B le quitamos la imagen de I_x bajo F_x y la reemplazamos por I_x.
Definamos la relación $\leq$ en Q de la siguiente manera:
$(I_x, F_x) \leq (I_y, F_y)$ si y solo si $I_x \subseteq I_y$ y $F_{y|I_x} = F_x$, para cada $(I_x, F_x), (I_y, F_y) \in Q$. Veamos que $(Q, \leq)$ es un COPO:
Reflexividad: Sea $(I_x, F_x) \in Q$, luego $I_x \subseteq I_x$ y $F_{x|I_x} = F_x$, por lo que $(I_x, F_x) \leq (I_x, F_x)$
Antisimetría: Sean $(I_x, F_x), (I_y, F_y) \in Q$ y supongamos que $(I_x, F_x) \leq (I_y, F_y)$ y $(I_y, F_y) \leq (I_x, F_x)$, luego $I_x \subseteq I_y$ y $I_y \subseteq I_x$, entonces $I_x = I_y$. Además, $F_{y|I_x} = F_x$ y $F_{x|I_y} = F_y$, entonces $F_x = F_{x|I_x} = F_{x|I_y} = F_y$. Por lo tanto $I_x = I_y$ y $F_x = F_y$, es decir, $(I_x, F_x) = (I_y, F_y)$.
Transitividad: Sean $(I_x, F_x), (I_y, F_y), (I_z, F_z) \in Q$, supongamos que $(I_x, F_x) \leq (I_y, F_y)$ y $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$, entonces $I_x \subseteq I_y$ y $I_y \subseteq I_z$, por transitividad $I_x \subseteq I_z$, además $F_{y|I_x} = F_x$ y $F_{z|I_y} = F_y$, observemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
I_z \arrow[r, tail, "F_z"] & B \\
I_y \arrow[u, hook] \arrow[ur, "F_y"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I_y \arrow[r, tail, "F_y"] & B \\
I_x \arrow[u, hook] \arrow[ur, "F_x"'] &
\end{tikzcd}$$

así, tenemos que $F_{z|I_x} = (F_{z|I_y})_{|I_x} = F_{y|I_x} = F_x$. De ahí que $I_x \subseteq I_z$ y $F_{z|I_x} = F_x$, es decir, $(I_x, F_x) \leq (I_z, F_z)$.
Por lo tanto, $(Q, \leq)$ es un COPO.
Ahora bien, tenemos que $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset : \emptyset \to B$ es inyectiva por vacuidad y $B = [B \setminus \emptyset(\emptyset)]\mathring{\cup}\emptyset$ es l.i, dado

que B es base de V, por consiguiente $(\emptyset, \emptyset) \in Q$, con lo cual se tiene que $Q \neq \emptyset$.
Consideremos un conjunto no vacío X y $\Gamma = \{(I_x, F_x)\}_{x \in X}$ una cadena de Q. Definamos la función

$$\begin{array}{rccl} F: & \bigcup_{x\in X} I_x & \to & B \\ & v & \mapsto & F_y(v), \text{ si } v \in I_y. \end{array}$$

En primera instancia, vamos a mostrar que F está bien definida, para eso, supongamos que $v \in I_y$ y $v \in I_z$, con $(I_y, F_y), (I_z, F_z) \in \Gamma$, como Γ es una cadena, entonces $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$ ó $(I_z, F_z) \leq (I_y, F_y)$; sin pérdida de generalidad supongamos que $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$, entonces $I_y \subseteq I_z$, por lo que $v \in I_z$, entonces $F_z(v) = F_{z|I_y}(v) = F_y(v)$, así, hemos mostrado que F está bien definida. Vamos a ver que F es inyectiva: si $v, w \in \bigcup_{x\in X} I_x$, con $v \neq w$, entonces $v \in I_y$ y $w \in I_z$, para algunos $y, z \in X$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $(I_y, F_y) \leq (I_z, F_z)$, así $I_y \subseteq I_z$ y en consecuencia, $v, w \in I_z$. Además, $F(v) = F_y(v) = F_z(v) \neq F_z(w) = F(w)$, puesto que F_z es inyectiva. Por lo tanto, F es inyectiva.
Ahora, vamos a exhibir que $\left[B \setminus F\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)\right] \cup \left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)$ es l.i en V: sabemos que:

$$\begin{array}{rcl} \left[B \setminus F\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)\right] \cup \left(\bigcup_{x\in X} I_x\right) & = & \left[B \setminus \left(\bigcup_{x\in X} F(I_x)\right)\right] \cup \left(\bigcup_{x\in X} I_x\right) \\ & = & \left[\bigcap_{x\in X}(B \setminus F(I_x))\right] \cup \left(\bigcup_{x\in X} I_x\right) \end{array}$$

así, si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \bigcap_{x\in X}(B \setminus F(I_x))$ y $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq \bigcup_{x\in X} I_x$, entonces $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq I_y$, para algún $y \in X$, ya que Γ es una cadena y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq B \setminus F(I_y)$, así tenemos que $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\} \subseteq (B \setminus F(I_y)) \cup I_y$, el cúal es l.i, por lo que $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ es l.i. Así las cosas, hemos mostrado que cualquier subconjunto finito de $\left[B \setminus F\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)\right] \cup \left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)$ es l.i, por lo tanto, $\left[B \setminus F\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)\right] \cup \left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)$ es l.i. Finalmente, vamos a ver que $B \setminus F\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)$ y $\bigcup_{x\in X} I_x$ son conjuntos ajenos, en efecto, supongamos que existe $v \in \left[B \setminus F\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)\right] \cap \left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)$, entonces $v \in \bigcap_{x\in X}(B \setminus F(I_x))$ y $v \in I_x$, para algún $x \in X$, con lo que $v \in (B \setminus F(I_x)) \cap I_x$, para algún $x \in X$, pero esto es absurdo pues para cada $x \in X$, $(B \setminus F(I_x)) \cap I_x = \emptyset$. Por lo tanto, $B \setminus F\left(\bigcup_{x\in X} I_x\right)$ y $\bigcup_{x\in X} I_x$ son ajenos.
Con todo lo anterior, tenemos que $\left(\bigcup_{x\in X} I_x, F\right) \in Q$, además es una cota superior para Γ, ya que para cada $x \in X$, $I_x \subseteq \bigcup_{x\in X} I_x$ y $F_{|I_x} = F_x$, es decir, para cada $(I_x, F_x) \in \Gamma$, $(I_x, F_x) \leq \left(\bigcup_{x\in X} I_x, F\right)$. Por el Lema de Zorn, Q tiene un elemento máximo, digamos (M, g). En particular, $g: M \to B$ es una función inyectiva y $(B \setminus g(M)) \mathring{\cup} M$ es l.i en V.
Vamos a demostrar que $B \setminus g(M) = \emptyset$ ó $A \setminus M = \emptyset$, supongamos que no es así, entonces existe $v \in V$ tal que $v \in B \setminus g(M)$ y $A \setminus M \neq \emptyset$, entonces $(B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M$ es l.i en V, ya que $(B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \subseteq (B \setminus g(M)) \mathring{\cup} M$ y $(B \setminus g(M)) \mathring{\cup} M$ es l.i. Además, $\left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle \neq V$, pues de no ser así, tendriamos que $v \in \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$ y por consiguiente, $(B \setminus g(M)) \mathring{\cup} M$ sería l.d, lo cual es absurdo. Más aún, $A \setminus M \nsubseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$, pues si $A \setminus M \subseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$, tendriamos que $A = (A \setminus M) \cup M \subseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$, así, tendriamos que $V = \langle A \rangle \leq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$, por lo que $V = \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$, lo cual mostramos que no es posible. Así las cosas, $A \setminus M \nsubseteq \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$, por lo que existe $w \in V$ tal que $w \in A \setminus M$ y $w \notin \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$. Consideremos $\overline{M} = M \cup \{w\}$ y definamos $\overline{g}: \overline{M} \to B$ por $\overline{g}(w) = v$ y $\overline{g}(m) = g(m)$ para $m \in M$. Es claro que $\overline{g}$ es inyectiva. Veamos que $(\overline{M}, \overline{g}) \in Q$, en efecto, $(B \setminus \overline{g}(\overline{M}) \cup \overline{M} = [B \setminus (g(M) \cup \{v\})] \cup (M \cup \{w\})$, el cual es l.i, ya que $v, w \notin \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$. Además, $B \setminus (g(M) \cup \{v\})$ y $M \cup \{w\}$ son ajenos, de otra manera $w \in \left\langle (B \setminus (g(M) \cup \{v\})) \mathring{\cup} M \right\rangle$, lo que es absurdo. Por consiguiente, $(\overline{M}, \overline{g}) \in Q$, además, $M \subsetneq \overline{M}$ y en consecuencia $(M, g) \lneq (\overline{M}, \overline{g})$, pero esto contradice la maximalidad de (M, g) en Q. Por lo tanto, $B \setminus g(M) = \emptyset$ ó $A \setminus M = \emptyset$. Analicemos cada caso. Si $A \setminus M = \emptyset$, entonces $A \subseteq M \subseteq A$, así $A = M$ y $(B \setminus g(A)) \mathring{\cup} A$ es l.i en V, pero A es l.i máximo, pues es base de V, entonces $B \setminus g(A) = \emptyset$, consecuentemente $B = g(A)$, lo que implica que $g: A \to B$ es una biyección y por lo tanto $|A| = |B|$. Si $B \setminus g(M) = \emptyset$, entonces $B \subseteq g(M) \subseteq B$, es decir, $B = g(M)$, entonces $g: M \to B$ es suprayectiva, con lo que $|A| \geq |M| \geq |B|$, por transitividad, $|A| \geq |B|$. Tomando ahora una familia de subconjuntos de B con las mismas características que Q

y realizando el mismo razonamiento tendriamos que $|B| \geq |A|$, aplicando el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein tenemos que $|A| = |B|$. $\square$

Una vez que hemos mostrado la existencia de bases en cualquier espacio vectorial y que todas las bases tienen el mismo tamaño, estamos en perfectas condiciones de definir la dimensión de un espacio vectorial, lo cual se hará a continuación.

Definición 1.2.3 (Dimensión de un espacio vectorial)**.** *Sea $_FV$ un espacio vectorial. Definimos la dimensión de V, la cual se denota como $dim(V)$, como $|\beta|$, donde β es una base de V, es decir, $dim(V) = |\beta|$. Cuando $dim(V) = n$, con n un número natural se dice que V es un espacio vectorial de dimensión finita, mientras que si $dim(V) = \kappa$, con κ un cardinal infinito se dice que V es un espacio de dimensión infinita. En muchas ocasiones a las bases para espacios de dimensión infinita se les llama* ***bases de Hamel****.*

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos un campo F, X un conjunto no vacío. Recordemos que $F^{(X)} = \{f \in F^X \mid |sop(f)| < \infty\}$. Vamos a ver que $dim(F^{(X)}) = |X|$, consideremos la función*

$$\begin{array}{rccc} \delta: & X & \to & F^{(X)} \\ & x & \mapsto & \delta_x \end{array}$$

donde $\delta_x : X \to F$ se define por $\delta_x(x) = 1$ y $\delta_x(y) = 0$, si $y \neq x$. Veamos primero que $\delta : X \to F^{(X)}$ es inyectiva, en efecto, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, si $\delta(x) = \delta(y)$, entonces $1 = \delta_x(x) = \delta_y(x) = 0$, es decir, $1 = 0$, lo cual es absurdo dado que F es campo, así que $\delta(x) \neq \delta(y)$. Por lo tanto $\delta : X \to F^{(X)}$ es inyectiva, además $Im(\delta) = \{\delta_x\}_{x\in X}$, por lo que $\delta : X \to \{\delta_x\}_{x\in X}$ ya es una función biyectiva. Ahora, por simplicidad denotemos $B = Im(\delta) = \{\delta_x\}_{x\in X}$, demostremos que B es una base de $F^{(X)}$:

- *B es l.i: Supongamos que $\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i} = \overline{0}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $\delta_{x_i} \in B$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos las siguientes igualdades:*

$$c_j = c_j\delta_{x_j}(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}\right)(x_j) = \overline{0}(x_j) = 0$$

  es decir, $c_j = 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, B es l.i en $F^{(X)}$.

- *B genera a $F^{(X)}$: Sea $f \in F^{(X)}$. Si $f = \overline{0}$ es inmediato, así que podemos suponer que $f \neq \overline{0}$, entonces $sop(f) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, por lo que $f(x_j) = c_j$ con $c_j \neq 0$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$. Veamos que $f = \sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}$, en efecto, si $x \notin sop(f)$ la igualdad se ve de forma inmediata. Ahora, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, ($x_j \in sop(f)$), tenemos lo siguiente:*

$$f(x_j) = c_j = c_j\delta_{x_j}(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}\right)(x_j)$$

  Así las cosas, tenemos que para cada $x \in X$, $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}\right)(x)$, de ahí que $f = \sum_{i=1}^n c_i\delta_{x_i}$. De esta manera queda demostrado que B genera a $F^{(X)}$.

De lo anterior tenemos que $dim(F^{(X)}) = |B| = |X|$. De esta manera se tiene que $dim(F^{(X)}) = \kappa$, donde κ es el cardinal asociado a X, el cual puede ser finito o infinito, en otras palabras la dimensión de $F^{(X)}$ depende del cardinal de X.

Ejemplo 1.2.3. *Sea F un campo. Consideremos el espacio de los polinomios con coeficientes en X, definido como sigue:*

$$F[x] = \{f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, n = grd(f(x))\}$$

Es fácil ver que $\beta = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una base de $F[x]$, además $|\beta| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, así que $dim(F[x]) = \aleph_0$. Por consiguiente $F[x]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Teorema 1.2.6. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial. Si $\beta \in \mathcal{I}(V)$ y $\gamma \in \mathcal{G}(V)$, entonces $|\beta| \leq |\gamma|$.*

Demostración. Por un lado, como β es l.i, por el Teorema 1.2.3, existe β' base de V tal que $\beta \subseteq \beta'$. Por otro lado, como γ es un conjunto generador de V, por el Teorema 1.2.4, existe β'' base de V tal que $\beta'' \subseteq \gamma$. Ahora, por el Teorema 1.2.5, $|\beta'| = |\beta''|$, esto es, existe una función biyectiva $f : \beta' \to \beta''$. Observemos el siguiente diagrama:

$$\beta \hookrightarrow \beta' \xrightarrow{f} \beta'' \hookrightarrow \gamma$$

así, la función $g = \iota_{\beta''}^{\gamma} f \iota_{\beta}^{\beta'} : \beta \to \gamma$ es una función inyectiva, de ahí que $|\beta| \leq |\gamma|$. □

Teoremas de dimensión

Teorema 1.2.7. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $W \leq V$. Entonces $dim(W) \leq dim(V)$.*

Demostración. Como $W \leq V$, en particular es un espacio vectorial, por el Teorema 1.2.2, existe $\beta \subseteq W$ tal que β es base de W. Luego, β es l.i en W, pero $W \subseteq V$, por consiguiente β tambien es l.i en V, de acuerdo al Teorema 1.2.3, existe $\gamma \subseteq V$ tal que γ es base de V y $\beta \subseteq \gamma$. Ahora, como $\beta \subseteq \gamma$, tenemos que la inclusión $\beta \hookrightarrow \gamma$ es una función inyectiva, de ahí que $|\beta| \leq |\gamma|$. De lo anterior tenemos lo siguiente:

$$dim(W) = |\beta| \leq |\gamma| = dim(V)$$

es decir, $dim(W) \leq dim(V)$. □

Teorema 1.2.8. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión finita y $W \leq V$. Entonces, $dim(W) = dim(V)$ si y solo si $W = V$.*

Demostración. Supongamos que $dim(W) = dim(V)$. Si $V = \{0\}$, el resultado es inmediato, por lo que podemos suponer que $V \neq \{0\}$. Sea $n = dim(V) = dim(W)$, con n un número natural diferente de cero y consideremos $\beta = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W. Como $W \leq V$, tenemos que $W \subseteq V$, falta ver que $V \subseteq W$, en efecto, sea $v \in V$, si $v \in W$ habremos terminado. Si $v \notin W$, entonces $\beta \subsetneq \beta \cup \{v\}$ y como β es base de W, β es l.i máximo, así que $\beta \cup \{v\}$ es l.d, entonces existe una combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} c_i w_i + c_{n+1} v = 0$ con $c_j \neq 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, además $c_{n+1} \neq 0$, ya que si $c_{n+1} = 0$, β es l.d lo cual no es posible. Así, $v = -\sum_{i=1}^{n} (c_{n+1}^{-1} c_i) w_i \in W$, es decir, $v \in W$. Por lo tanto, $V \subseteq W$. De ambas contenciones tenemos la igualdad deseada. La otra implicación es inmediata. □

Corolario 1.2.1. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión finita y $W \leq V$. Entonces $dim(W) < dim(V)$ si y solo si $W \lneq V$.*

Para el caso de dimensión infinita puede haber subespacios propios de la misma dimensión del espacio. El siguiente ejemplo nos muestra este hecho.

Ejemplo 1.2.4. *Consideremos un campo F y el espacio de los polinomios $F[x]$. Consideremos*

$$W = \{a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2m} x^{2m} \in F[x] \mid \textit{existe } m \in \mathbb{N} \textit{ tal que } k > m \textit{ implica } a_{2k} = 0\}$$

Es fácil ver que $W \leq F[x]$, además $W \lneq V$, pues $x \in F[x] \setminus W$. También se ve fácilmente que $\beta = \{x^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una base de W y $|\beta| = \aleph_0$. Así, tenemos que $dim(W) = dim(F[x]) = \aleph_0$, pero $W \lneq F[x]$.

Teorema 1.2.9. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $U, W \leq V$. Entonces:*

$$dim(U) + dim(W) = dim(U + W) + dim(U \cap W).$$

Demostración. Sabemos que $U \cap W \leq U$ y $U \cap W \leq W$, en particular $U \cap W$ es un espacio vectorial, por el Teorema 1.2.2, existe $\beta \subseteq U \cap W$ tal que β es base de $U \cap W$. Como β es l.i en $U \cap W$, $U \cap W \leq U$ y $U \cap W \leq W$, entonces β es l.i en U y en W, por el Teorema 1.2.3, existen $\beta' \subseteq U$, $\beta'' \subseteq W$ tales que β' es base de U, β'' es base de W, $\beta \subseteq \beta'$ y $\beta \subseteq \beta''$. Supongamos que $\beta' = \beta \cup \gamma'$, $\beta'' = \beta \cup \gamma''$ con $\gamma' \subseteq U$, $\gamma'' \subseteq W$, $\beta \cap \gamma' = \emptyset$ y $\beta \cap \gamma'' = \emptyset$. Además $\gamma' \cap \gamma'' = \emptyset$, pues si $x \in \gamma' \cap \gamma''$, entonces $x \in U \cap W = \langle \beta \rangle$, con lo que $\beta \cup \{x\}$ es l.d, pero $\beta \cup \{x\} \subseteq \beta'$, por lo que β' es l.d, pero esto es absurdo ya que β' es base de U.
Veamos que $\beta \cup \gamma' \cup \gamma''$ es base de $U + W$:

- $\beta \cup \gamma' \cup \gamma''$ es l.i: Supongamos que $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' y_i + \sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k = 0$, con $m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i, c_j', c_k'' \in F$, $x_i \in \beta$, $y_j \in \gamma'$, $z_k \in \gamma''$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, p\}$. Entonces se tiene que
$$-\sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' y_i \tag{I}$$
pero $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' y_i \in U$, con lo que $-\sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k \in U$, además $-\sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k \in W$ dado que $z_k \in W$ para cada $k \in \{1, \dots, p\}$, en consecuencia $-\sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k \in U \cap W$, como β es base de $U \cap W$ tenemos que $-\sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k = \sum_{l=1}^{s} a_l z_l'$ con $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_l \in F$, $z_l' \in \beta$, $l \in \{1, \dots, s\}$, esto es $\sum_{l=1}^{s} a_l z_l' + \sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k = 0$, al ser β una base de $U \cap W$ se tiene que $c_k'' = a_l = 0$ para cada $k \in \{1, \dots, p\}$, $l \in \{1, \dots, s\}$. De esta manera se concluye que $-\sum_{k=1}^{p} c_k'' z_k = 0$. Sustituyendo en (I) se tiene que $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' y_i = 0$, pero $x_i, y_j \in \beta'$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ y β' es base de U, de ahí que $c_i = c_j' = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. En resumen, $c_i = c_j' = c_k'' = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, p\}$.

- $\beta \cup \gamma' \cup \gamma''$ genera a $U + W$: Sea $x \in U + W$, luego $x = u + w$ con $u \in U$ y $w \in W$. Como β' es base de U y β'' es base de W, se tiene que $u = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' y_j$ con $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i, c_j' \in F$, $x_i \in \beta$, $y_j \in \gamma'$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ y $v = \sum_{i=1}^{m} d_i x_i + \sum_{l=1}^{t} c_l'' z_l$ con $m, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $d_i, c_l'' \in F$, $x_i \in \beta$, $z_l \in \gamma''$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, t\}$. Notemos que la suma de los elementos de β se pueden escribir en la misma longitud, esto se consigue ordenando los elementos y agregando ceros si es necesario. Lo anterior nos conduce a las siguientes igualdades:
$$\begin{aligned} x &= u + v = \textstyle\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' y_j + \sum_{i=1}^{m} d_i x_i + \sum_{l=1}^{t} c_l'' z_l \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (c_i + d_i) x_i + \sum_{j=1}^{n} c_j' y_j + \sum_{l=1}^{t} c_l'' z_l \end{aligned}$$
de ahí que $x \in \langle \beta \cup \gamma' \cup \gamma'' \rangle$.

Por consiguiente se tiene que $\beta \cup \gamma' \cup \gamma''$ es base de $U + W$, en consecuencia tenemos las siguientes igualdades respecto a las dimensiones:
$$\begin{aligned} dim(U) + dim(W) &= |\beta'| + |\beta''| \\ &= |\beta \cup \gamma'| + |\beta \cup \gamma''| \\ &= |\beta| + |\gamma'| + |\beta| + |\gamma''| \\ &= (|\beta| + |\gamma'| + |\gamma''|) + |\beta| \\ &= |\beta \cup \gamma' \cup \gamma''| + |\beta| \\ &= dim(U + W) + dim(U \cap W) \end{aligned}$$
es decir, $dim(U) + dim(W) = dim(U + W) + dim(U \cap W)$, lo que se deseaba probar. ☐

Es importante mencionar que el teorema anterior se cumple independientemente de la dimensión del espacio vectorial en cuestión, sin embargo, vale la pena precisar los detalles de cuando el espacio es de dimensión finita y cuando es de dimensión infinita, lo cual se hace en la siguiente observación.

Observación 1.2.2. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, U y W subespacios de V.*

- *Si V es dimensión finita, entonces $dim(V) = n$ para algún número natural n. Ahora, como $U, W \leq V$, por el Teorema 1.2.7 se tiene que $dim(U), dim(W) \leq dim(V)$. Además, $U \cap W \leq U$ y $U \cap W \leq W$, con lo que $dim(U \cap W) \leq dim(U)$ y $dim(U \cap W) \leq dim(W)$. Por estos argumentos, a partir de la igualdad*

  $$dim(U) + dim(W) = dim(U + W) + dim(U \cap W)$$

  dada por el teorema anterior, tiene sentido hacer el despeje para $dim(U+W)$, obteniendo una fórmula para la dimensión de la suma de los subespacios, quedando de la siguiente manera:

  $$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

- *Si V es de dimensión infinita, entonces $dim(V) = \kappa$, donde κ es un cardinal infinito. Puede ocurrir que tanto U como W sean de dimensión finita y en tal caso todo queda como el caso anterior, excepto la dimensión de V.*
  Ahora, si al menos uno de los subespacios es de dimensión infinita, supongamos sin pérdida de generalidad que $dim(U) = \lambda$ con λ un cardinal infinito y que $dim(W) = \mu$ con $\mu \leq \lambda$, en tal caso se tiene que $dim(U) + dim(W) = \lambda$, ya que $\lambda = mayor\{\lambda, \mu\}$, pero por el teorema anteior se tiene que $dim(U) + dim(W) = dim(U + W) + dim(U \cap W)$, así que $dim(U + W) + dim(U \cap W) = \lambda$, en consecuencia, $dim(U + W) = \lambda$ ó $dim(U \cap W) = \lambda$. Es fácil ver que $U \cap W \leq U + W$, así que por el Teorema 1.2.7, $dim(U \cap W) \leq dim(U + W)$, por lo que si $dim(U \cap W) = \lambda$, forzosamente se debe cumplir que $dim(U + W) = \lambda$.

Bases ordenadas

Definición 1.2.4 (Base ordenada). *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión κ con κ un cardinal, I un conjunto tal que $|I| = \kappa$. Decimos que la terna $\overline{\beta} = (\beta, I, f)$ es una base ordenada de V si β es base de V y $f : I \to \beta$ es una función biyectiva.*

Ejemplo 1.2.5. *Considere n un número natural diferente de cero y ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión n. Por el Teorema 1.2.2, existe β base de V, además $|\beta| = |n|$, luego, existe una función biyectiva $f : I_n = \{1, \ldots, n\} \to \beta$. Entonces la terna $\overline{\beta} = (\beta, I_n, f)$ es una base ordenada de V.*
En los espacios de dimensión finita no es necesario poner el conjunto sobre el que se ordena la base, ya que por lo general en estos espacios las bases son muy específicas y todas son ordenadas.

Ejemplo 1.2.6. *Consideremos un campo F y el espacio vectorial de los polinomios $F[x]$. Sabemos que $\beta = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $F[x]$. Es fácil ver que*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \to & \beta \\ & n & \to & x^n \end{array}$$

es una función biyectiva, por lo tanto la terna $\overline{\beta} = (\beta, \mathbb{N}, f)$ es una base ordenada de $F[x]$.

1.3. Suma directa de dos subespacios

Definición 1.3.1 (Definición). *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $W, K \leq V$. Decimos que V es la suma directa de W y K si $V = W + K$ y $W \cap K = \{0\}$. En este caso escribimos $V = W \oplus K$.*

Ejemplo 1.3.1. *Consideremos el espacio vectorial ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:*

$$\begin{array}{rl} P(\mathbb{R}) = & \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-x) = f(x), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\}. \\ I(\mathbb{R}) = & \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Dichos conjuntos se conocen como el conjunto de las funciones pares e impares, respectivamente. Primero veamos que $P(\mathbb{R}), I(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Veamos para $P(\mathbb{R})$:

a) *Sean $f, g \in P(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, por lo que $f+g \in P(\mathbb{R})$.*

b) *$\overline{0}(-x) = 0 = \overline{0}(x)$, así que $\overline{0} \in P(\mathbb{R})$.*

c) *Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f \in P(\mathbb{R})$, entonces $(cf)(-x) = cf(-x) = cf(x) = (cf)(x)$, de ahí que $cf \in P(\mathbb{R})$.*

Por lo tanto, $P(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ahora veamos que $I(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

a) *Sean $f, g \in I(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)+(-g(x)) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x)$, por lo que $f+g \in I(\mathbb{R})$.*

b) *$\overline{0}(-x) = 0 = -0 = -\overline{0}(x)$, así que $\overline{0} \in I(\mathbb{R})$.*

c) *Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f \in I(\mathbb{R})$, entonces $(cf)(-x) = cf(-x) = c(-f(x)) = -cf(x) = -(cf)(x)$, de ahí que $cf \in I(\mathbb{R})$.*

Por consiguiente, tenemos que $I(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Una vez hecho lo anterior, vamos a demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R})$, veamos que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) + I(\mathbb{R})$, en efecto, sea $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, consideremos las funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$, así que $g \in P(\mathbb{R})$. Ahora, $h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$, en consecuencia $h \in I(\mathbb{R})$. Además, observe que $(g+h)(x) = g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$. Así las cosas, tenemos que $f = g+h$, con $g \in P(\mathbb{R}), h \in I(\mathbb{R})$, por consiguiente, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) + I(\mathbb{R})$. Finalmente, veamos que $P(\mathbb{R}) \cap I(\mathbb{R}) = \{\overline{0}\}$, supongamos que $f \in P(\mathbb{R}) \cap I(\mathbb{R})$, entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, $-f(x) = f(-x) = f(x)$, luego, $2f(x) = 0$, es decir, $f(x) = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$, así que $f = \overline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R})$.

Teorema 1.3.1. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $W \leq V$. Entonces existe $W' \leq V$ tal que $V = W \oplus W'$.*

Demostración. Como $W \leq V$, en particular es espacio vectorial, por el Teorema 1.2.2, existe $\beta \subseteq W$ tal que β es base de W. Ahora, como β es l.i en W y $W \subseteq V$, entonces, β es l.i en V, por el Teorema 1.2.3, existe $\gamma \subseteq V$ tal que γ es base de V y $\beta \subseteq \gamma$. Consideremos, $\beta' = \gamma \setminus \beta$ y $W' = \langle \beta' \rangle$. Vamos a mostrar que $V = W \oplus W'$, veamos primero que $V = W + W'$:

$$V = \langle \gamma \rangle = \langle \beta \cup \beta' \rangle = \langle \beta \rangle + \langle \beta' \rangle = W + W'.$$

De lo anterior, tenemos que $V = W + W'$. Finalmente, vamos a demostrar que $W \cap W' = \{0\}$, en efecto, supongamos que $x \in W \cap W'$, luego, $x \in \langle \beta \rangle$ y $x \in \langle \beta' \rangle$,así, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i \in F$, $x_i \in \beta$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$ con $a_j \in F$, $y_j \in \beta'$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces, $0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$, con $x_i, y_j \in \gamma$, pero como γ es l.i, entonces $a_i = 0$, $b_j = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, con lo que $x = 0$. Por lo tanto, $V = W \oplus W'$. ☐

Teorema 1.3.2 (Caracterización de la suma directa de dos subespacios)**.** *Sean ${}_FV$ un espacio vectorial, $W, K \leq V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$V = W \oplus K$.*

2) *Para cada $v \in V$, existen únicos $w \in W, k \in K$, tales que $v = w + k$.*

3) *K es máximo con la propiedad de que $W \cap K = \{0\}$.*

4) *K es mínimo con la propiedad de que $W + K = V$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que $V = W \oplus K$. Sea $v \in V$, luego como $V = W + K$, entonces, $v = w + k$, con $w \in W$, $k \in K$. Ahora, supongamos que $v = w' + k'$, con $w' \in W, k' \in K$, así $w + k = w' + k'$, entonces $w - w' = k' - k \in W \cap K = \{0\}$, por consiguiente $w - w' = 0$, $k' - k = 0$, de ahí que $w = w'$ y $k = k'$.
2) $\Rightarrow$ 3): Veamos primero que $W \cap K = \{0\}$, en efecto, si $x \in W \cap K$, se tiene que $x + 0 = 0 + x$, pero por la unicidad de la representación, $x = 0$. Ahora veamos que K es máximo con la propiedad. Es claro que $V = W + K$. Supongamos que $K \lneq K' \leq V$, por la Ley Modular, tenemos que $K' \cap (K + W) = K + (K' \cap W)$. Además, $K' \cap (K + W) = K' \cap V = K'$, por lo que $K' = K' \cap (K + W) = K + (K' \cap W)$. Si $K' \cap W = \{0\}$, entonces $K' = K + \{0\} = K$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $K' \cap W \neq \{0\}$.
3) $\Rightarrow$ 4): Supongamos que K es máximo con la propiedad de que $W \cap K = \{0\}$. Veamos que K es mínimo con la propiedad de que $W + K = V$, para esto, primero veamos que $W + K = V$. Sea $x \in V$, si $x \in K$, entonces $x = 0 + x$, con $0 \in W$, $x \in K$ y en consecuencia $x \in W + K$. Ahora, si $x \notin k$, entonces $K \lneq K + \langle x \rangle$, como K es máximo tal que $W \cap K = \{0\}$, entonces $W \cap (K + \langle x \rangle) \neq \{0\}$, luego, existe $y \in V$, $y \neq 0$ tal que $y \in W \cap (K + \langle x \rangle)$, así $y = k + \alpha x$, con $\alpha \in F$, notemos que $\alpha \neq 0$, pues si $\alpha = 0$, entonces $y = k \in K \cap W = \{0\}$, con lo que $y = 0$, lo cual no es posible. Así, se tiene que $x = \alpha^{-1} y + (-\alpha^{-1} k)$, pero $\alpha^{-1} y \in W$, $-\alpha^{-1} k \in K$, dado que $W, K \leq V$, con lo que $x \in W + K$. Por lo tanto, $V = W + K$. Finalmente, vamos a probar que K es mínimo con la propiedad de que $V = W + K$, si $K' \lneq K$, entonces existe $z \in V$ tal que $z \in K$ pero $z \notin K'$. Si $V = W + K'$, entonces $z \in W + K'$, así, $z = w + k'$, con $w \in W, k' \in K'$, entonces $w = z - k'$, con $z, k' \in K$, con lo que $z - k' \in W \cap K = \{0\}$, entonces $z - k' = 0$, es decir, $z = k'$, con lo que $z \in K'$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $W + K' \neq V$.
4) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que K es mínimo con la propiedad de que $W + K = V$, con lo cual es claro que $V = W + K$. Falta probar que $W \cap K = \{0\}$, supongamos que no es así, es decir, supongamos que $W \cap K \neq \{0\}$, luego, existe $x \in V$, $x \neq 0$ tal que $x \in W \cap K$, como $\langle x \rangle \leq K$, por el Teorema 1.3.1, existe $K' \leq K$ tal que $K = \langle x \rangle \oplus K'$; como $\langle x \rangle \neq 0$, entonces $K' \lneq K$, además, como $x \in W$, entonces $W = W + \langle x \rangle$. Con todo lo anterior, tenemos que $K' + W = K' + (\langle x \rangle + W) = (K' + \langle x \rangle) + W = K + W = V$, es decir, $K' + W = V$, con $K' \lneq K$, lo cual no es posible, ya que por hipótesis K es mínimo con la propiedad mencionada anteriormente. Por lo tanto, $W \cap K = \{0\}$. $\square$

Teorema 1.3.3. *Sea $_F V$ un espacio vectorial, $W, K \leq V$. Si $V = W \oplus K$, entonces $dim(V) = dim(W) + dim(K)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.9, tenemos que

$$dim(W) + dim(K) = dim(W + K) + dim(W \cap K)$$

pero en este caso $dim(W \cap K) = 0$, ya que $W \cap K = \{0\}$, por lo que $dim(W) + dim(K) = dim(W + K)$. Ahora, como $V = W + K$, entonces $dim(V) = dim(W + K) = dim(W) + dim(K)$. $\square$

1.4. Transformaciones Lineales

En este apartado vamos a exponer material relacionado con las transformaciones lineales y sus propiedades. Estos objetos son de gran importancia dentro del álgebra lineal, ya que son funciones entre espacios vectoriales que respetan las operaciones. Se presentarán tres tipos de transformaciones lineales, estos son: monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos. Cabe mencionar que a nuestro juicio, los isomorfismos tienen una mayor relevancia porque preservan la estructura de nuestros espacios, en palabras, el hecho de que exista un isomorfismo entre dos espacios vectoriales significa que tienen exactamente la misma estructura algebraica y lo único que cambia entre ellos es la representación de los elementos.

1.4.1. Definición y ejemplos

Definición 1.4.1 (Transformación lineal). *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una función. Decimos que T es una transformación lineal si satisface las siguientes condiciones:*

1) Para cada $x, y \in V$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

2) Para cada $c \in F$, $x \in V$, $T(cx) = cT(x)$.

En este caso tambien se dice que T es un morfismo de espacios vectoriales.

Observación 1.4.1. *Si ${}_FV, {}_FW$ son espacios vectoriales y $T : V \to W$ es una función, entonces T es una transformación lineal si y solo si para cada $c \in F$, $x, y \in V$, $T(x + cy) = T(x) + cT(y)$.*

A continuación, vamos a mostrar algunos ejemplos de transformaciones lineales.

Ejemplo 1.4.1 (La transformación identidad). *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial, es claro que la función identidad $id_V : V \to V$, definida por $id_V(x) = x$, para cada $x \in V$, es una transformación lineal de V en V.*

Ejemplo 1.4.2 (La transformación inclusión). *Consideremos un espacio vectorial ${}_FV$ y $W \leq V$. La función inclusión $\iota_W^V : W \to V$, definida por $\iota_W^V(x) = x$, para cada $x \in W$, es una transformación lineal de W en V.*
Cuando no haya lugar a confusión con el espacio y subespacio en cuestión se denotará simplemente $\iota : W \to V$ ó $W \hookrightarrow V$.

Ejemplo 1.4.3 (La transformación cero). *Consideremos ${}_FV$ y ${}_FW$ espacios vectoriales. La función $\overline{0} : V \to W$, definida por $\overline{0}(x) = 0_W$, para cada $x \in V$, es una transformación lineal.*

1.4.2. Propiedades de las transformaciones lineales

Proposición 1.4.1. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces $T(0_V) = 0_W$.*

Demostración. Como $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$, así, $T(0_V) = T(0_V) + T(0_V)$, más aún, $T(0_V) + 0_W = T(0_V) + T(0_V)$, aplicando leyes de cancelación, tenemos que $T(0_V) = 0_W$. $\square$

Notación 1.4.1. *Siempre que no dé lugar a confusión el espacio vectorial al que nos referimos, el elemento neutro lo denotaremos únicamente como 0, con el cual nos estaremos refiriendo al elemento neutro en el espacio vectorial con el que estemos trabajando al momento de mencionarlo.*

Definición 1.4.2. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, $X \leq V$ y $Y \leq W$. Definimos:*

1) La imagen directa de X bajo T, como:

$$T(X) = \{w \in W \mid w = T(x), \text{ para algún } x \in X\} = \{T(x) \mid x \in X\}.$$

2) La imagen inversa de Y bajo T, como:

$$T^{-1}(Y) = \{v \in V \mid T(v) \in Y\}.$$

Teorema 1.4.1. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:*

1) Si $X \leq V$, entonces $T(X) \leq W$.

2) Si $Y \leq W$, entonces $T^{-1}(Y) \leq V$.

Demostración.

1) Supongamos que $X \leq V$, vamos a ver que $T(X) \leq W$, en efecto:

   a) Sean $w_1, w_2 \in T(X)$, $c \in F$, entonces $w_1 = T(x_1)$, $w_2 = T(x_2)$, con $x_1, x_2 \in X$, luego, $w_1 + cw_2 = T(x_1) + cT(x_2) = T(x_1 + cx_2)$, como $x_1, x_2 \in X$, $c \in F$ y $X \leq V$, entonces $x_1 + cx_2 \in X$, por lo que $w_1 + w_2 \in T(X)$.

   b) Como $0_W = T(0_V)$, con $0_V \in Y$, entonces $0_W \in T(Y)$.

   c) Sea $c \in F, w \in T(X)$, entonces $w = T(x)$, con $x \in X$, luego, $cw = cT(x) = T(cx)$, como $X \leq V$, entonces $cx \in X$, así que $cw \in T(X)$.

2) Supongamos que $Y \leq W$, ahora:

   a) Sean $v_1, v_2 \in T^{-1}(Y)$, entonces $T(v_1), T(v_2) \in Y$, como $Y \leq W$, entonces $T(v_1)+T(v_2) \in Y$, pero $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$, ya que T es lineal, con lo que $T(v_1 + v_2) \in Y$, en consecuencia, $v_1 + v_2 \in T^{-1}(Y)$.

   b) Como $T(0_V) = 0_W \in W$, entonces $0_V \in T^{-1}(Y)$.

   c) Sean $c \in F$, $v \in T^{-1}(Y)$, entonces $T(v) \in Y$, como $Y \leq V$, entonces $cT(v) \in Y$, pero $cT(v) = T(cv)$, así que $cv \in T^{-1}(Y)$.

   Por lo tanto, $T^{-1}(Y) \leq V$.

$\square$

Definición 1.4.3. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Se define:*

1) El Kernel de T como:
$$Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}.$$

2) La Imagen de T como:
$$Im(T) = T(V) = \{T(v) \mid v \in V\}.$$

Corolario 1.4.1. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:*

1) $Ker(T) \leq V$.

2) $Im(T) \leq W$.

Ahora, veamos como se comporta la composición de transformaciones lineales.

Teorema 1.4.2. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$, ${}_FZ$ espacios vectoriales, $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ transformaciones lineales. Entonces:*

1) $ST : V \to W$ es una transformación lineal.

2) $Ker(ST) = T^{-1}(Ker(S))$.

Demostración.

1. Sean $c \in F$, $x, y \in V$, entonces tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}(ST)(x + cy) &= S(T(x + cy)) \\ &= S(T(x) + cT(y)) \\ &= S(T(x)) + cS(T(y)) \\ &= (ST)(x) + c(ST)(y).\end{aligned}$$

   De lo anterior se establece la linealidad de ST.

2. Observemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Ker(ST) &= \{v \in V \mid (ST)(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid S(T(v)) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid T(v) \in Ker(S)\} \\ &= \left\{v \in V \mid v \in T^{-1}(Ker(S))\right\} \\ &= T^{-1}(Ker(S)). \end{aligned}$$

□

A continuación, mostraremos que el conjunto de transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales sobre cierto campo previamente fijados, tiene estructura de espacio vectorial sobre el campo en cuestión. Notemos que si ${}_FV$ y ${}_FW$ son espacios vectoriales, como en particular V es un conjunto, por el Ejemplo 1.1.2, W^V es un espacio vectorial sobre F con las operaciones como se definieron en dicho ejemplo.

Definición 1.4.4. *Consideremos ${}_FV$ y ${}_FW$ espacios vectoriales. Definimos:*

$$Hom\,(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}.$$

Teorema 1.4.3. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales. Entonces ${}_FHom\,(V, W)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Es claro que $Hom\,(V, W) \subseteq W^V$, el cuál es un espacio vectorial por el Ejemplo 1.1.2. Veamos ahora que $Hom\,(V, W) \leq W^V$, en efecto:

a) Sean $T, U \in Hom\,(V, W)$, veamos que $T + U \in Hom\,(V, W)$, para eso, sean $c \in F$, $x, y \in V$, entonces:

$$\begin{aligned} (T + U)(x + cy) &= T(x + cy) + U(x + cy) \\ &= (T(x) + cT(y)) + (U(x) + cU(y)) \\ &= (T(x) + U(x)) + c(T(y) + U(y)) \\ &= (T + U)(x) + c(T + U)(y). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $T + U \in Hom\,(V, W)$.

b) Sabemos que $\overline{0} : V \to W$, definida por $\overline{0}(x) = 0_W$, para cada $x \in V$ es el elemento neutro en W^V. Ahora, por el Ejemplo 1.4.3, se tiene que $\overline{0} \in Hom\,(V, W)$.

c) Sean $d \in F$, $T \in Hom\,(V, W)$. Veamos que $dT \in Hom\,(V, W)$, en efecto, sean $c \in F$, $x, y \in V$, entonces:

$$\begin{aligned} (dT)(x + cy) &= dT(x + cy) \\ &= d(T(x) + cT(y)) \\ &= dT(x) + d(cT(y)) \\ &= dT(x) + (dc)T(y) \\ &= dT(x) + (cd)T(y) \\ &= dT(x) + c(dT(y)) \\ &= (dT)(x) + c(dT)(y). \end{aligned}$$

Así las cosas, hemos demostrado que $Hom\,(V, W) \leq W^V$, lo cual implica que $Hom\,(V, W)$ es un espacio vectorial sobre el campo F. □

1.4.3. Propiedad universal de las bases

El teorema que vamos a exponer a continuación nos ofrece una caracterización de las bases utiizando la herramienta de las transformaciones lineales.

Teorema 1.4.4 (Propiedad universal de las bases)**.** *Sean ${}_FV$ un espacio vectorial y $\beta \subseteq V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *β es base de V.*

2) *Para cada espacio vectorial ${}_FW$ y para cada función $f : \beta \to W$, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T_{|\beta} = f$. Lo anterior lo podemos resumir diciendo que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & W \\ V \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que β es base de V. Sea ${}_FW$ un espacio vectorial y $f : \beta \to W$ una función. Por el Teorema 1.2.1, para cada $x \in V$, existen únicos $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_1, \ldots, a_n \in F$, $x_1, \ldots, x_n \in \beta$ tales que $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Lo anterior nos permite definir la función:

$$\begin{array}{cccc} T: & V & \to & W \\ & \sum_{i=1}^n a_i x_i = x & \mapsto & \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \end{array}$$

Vamos a ver que T es una transformación lineal, en efecto, sean $c \in F$, $x, y \in V$, luego $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^n b_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_i, b_i \in F$, $x_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es importante comentar que es posible escribir ambos vectores en terminos de los mismos básicos, lo cual se consigue agregando ceros y reordenándolos si es necesario para tomar una longitud común de las combinaciones lineales. Ahora si procederemos a mostrar la linealidad de T:

$$\begin{aligned} T(x + cy) = & \; T\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i + c\sum_{i=1}^n b_i x_i\right) \\ = & \; T\left(\sum_{i=1}^n (a_i + cb_i) x_i\right) \\ = & \; \sum_{i=1}^n (a_i + cb_i) f(x_i) \\ = & \; \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) + \sum_{i=1}^n (cb_i) f(x_i) \\ = & \; \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) + c\sum_{i=1}^n b_i f(x_i) \\ = & \; T\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) + cT\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i\right) \\ = & \; T(x) + cT(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T : V \to W$ es una transformación lineal. Ahora, si $x \in \beta$, entonces $x = 1 \cdot x$, así, $T_{|\beta}(x) = T(x) = T(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, con lo que se tiene que $T_{|\beta} = f$.
Finalmente, probaremos la unicidad, para eso, supongamos que existe otra transformación lineal $U : V \to W$ tal que $U_{|\beta} = f$, veamos que $U = T$, en efecto, sea $x \in V$, luego, $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, para únicos $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_i \in F$, $x_i \in \beta$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} U(x) = & \; U\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \\ = & \; \sum_{i=1}^n a_i U(x_i) \\ = & \; \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \\ = & \; T\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \\ = & \; T(x) \end{aligned}$$

Así las cosas tenemos que $U = T$ y de esta manera se establece la unicidad.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que para cada espacio vectorial ${}_FW$ y para cada función $f : \beta \to W$, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T_{|\beta} = f$. Debemos mostrar que β es base de V.

Primero veamos que β es l.i, supongamos que no es así, es decir, supongamos que β es l.d, luego, existe $x \in \beta$ tal que $x \in \langle \beta \setminus \{x\} \rangle$. Sabemos que el campo F es un espacio vectorial sobre sí mismo, por lo que podemos definir la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & \beta & \to & F \\ & x & \mapsto & 1 \\ & x \neq y & \mapsto & 0 \end{array}$$

por hipótesis, existe una única transformación lineal $T : V \to F$ tal que $T_{|\beta} = f$. Ahora, como $x \in \langle \beta \setminus \{x\} \rangle$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_i \in F$, $y_i \in \beta$,$y_i \neq x$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 = {} & f(x) \\ = {} & T(x) \\ = {} & T\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right) \\ = {} & \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i T(y_i) \\ = {} & \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i f(y_i) \\ = {} & \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 0 \\ = {} & 0. \end{aligned}$$

Así, $1 = 0$, lo cual es absurdo, ya que F es campo. Por lo tanto, β es l.i.
Ahora, demostremos que $V = \langle \beta \rangle$, supongamos que $\langle \beta \rangle \lneq V$, por el Teorema 1.3.1, existe $\{0\} \neq W \leq V$ tal que $V = \langle \beta \rangle \oplus W$. Consideremos la función inclusión $\beta \hookrightarrow V$. Ahora, la función $S : V = \langle \beta \rangle \oplus W \to V$, definida por $S(x + w) = x$, con $x \in \langle \beta \rangle, w \in W$ es una transformación lineal tal que $S_{|\beta} = \iota$, pero la función $Id_V : V \to V$ tambien es lineal y cumple que $Id_{V|\beta} = \iota$, además, como $\langle \beta \rangle \lneq V$, existe $y \in V$ tal que $y \notin \langle \beta \rangle$, así que $y = x + w$, con $x \in \langle \beta \rangle$ y $w \in W \setminus \langle \beta \rangle$, por consiguiente $S(x) = x \neq y = Id_V(y)$. Así las cosas, la función inclusión $\beta \hookrightarrow V$ tiene dos trasformaciones lineales distintas con la propiedad enunciada en 2), lo cual no es posible por hipótesis. Por lo tanto, $V = \langle \beta \rangle$. Con lo anterior y la independencia lineal de β en V, probada anteriormente, se establece que β es base de V. $\square$

A continución proporciamos un ejemplo en el cual aplicamos la Propiedad universal de las bases.

Ejemplo 1.4.4. *Consideremos los espacios vectoriales* ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$, ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ *y consideremos la base canónica de* $\mathbb{R}^2$, *a saber,* $\beta = \{e_1, e_2\}$. *Definamos la función:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & e_1 & \mapsto & (-1, 5, \pi) \\ & e_2 & \mapsto & (8, -3, \sqrt{8}) \end{array}$$

por la Propiedad universal de las bases, podemos definir una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *la cual quedaría definida de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} T(x, y) = {} & T(xe_1 + ye_2) \\ = {} & xT(e_1) + yT(e_2) \\ = {} & x(-1, 5, \pi) + y(8, -3, \sqrt{8}) \\ = {} & (-x, 5x, \pi x) + (8y, -3y, y\sqrt{8}) \\ = {} & (-x + 8y, 5x - 3y, \pi x + y\sqrt{8}). \end{aligned}$$

En otras palabras, la Propiedad universal de las bases afirma que para definir una transformación lineal, es suficiente definirla en la base.

A continuación vamos a comentar algunas consecuencias de la Propiedad universal de las bases.

Corolario 1.4.2. *Sean $_FV$, $_FW$ espacios vectoriales, β una base de V, $S, T : V \to W$ transformaciones lineales. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $S = T$.

2) $S_{|\beta} = T_{|\beta}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Es inmediato.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que $S_{|\beta} = T_{|\beta}$. Denotemos $g = S_{|\beta} = T_{|\beta}$, la cual es una función de β en W. Ahora, S y T son transformaciones lineales de V en W tales que $S_{|\beta} = g$ y $T_{|\beta} = g$, por la unicidad que nos garantiza la Propiedad universal de las bases, se tiene que $S = T$. $\square$

Corolario 1.4.3. *Sean $_FV$,$_FW$ espacios vectoriales y $\beta \subseteq V$ una base de V. Entonces $|W^\beta| = |Hom(V, W)|$.*

Demostración. Es claro por la Propiedad universal de las bases y el Corolario 1.4.2 que la función:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & W^\beta & \to & Hom(V, W) \\ & f & \mapsto & T_f \end{array}$$

donde $T_f : V \to W$ es la transformación lineal garantizada por la Propiedad universal de las bases, es una biyección de W^β en $Hom(V, W)$, en consecuencia, $|W^\beta| = |Hom(V, W)|$. $\square$

1.4.4. Monomorfismos

Definición 1.4.5 (Monomorfismo)**.** *Sean $_FV$, $_F,W$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Decimos que T es monomorfismo si es cancelable por la izquierda, esto es, para cualesquiera espacio vectorial $_FX$ y transformaciones lineales $S_1, S_2 : X \to V$, $TS_1 = TS_2$ implica que $S_1 = S_2$.*

Teorema 1.4.5 (Caracterización de los monomorfismos)**.** *Sean $_FV$, $_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones sobre T son equivalentes:*

1) T *es monomorfismo.*

2) T *es inyectiva.*

3) $Ker(T) = \{0\}$.

4) Si $\beta \in \mathcal{I}(V)$, *entonces* $T(\beta) \in \mathcal{I}(W)$.

5) Existe una transformación lineal $S : W \to V$ *tal que* $ST = id_V$.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que T no es inyectiva, luego existen $x_1, x_2 \in V$ tales que $x_1 \neq x_2$ pero $T(x_1) = T(x_2)$. Dado que $_FF$ es un espacio vectorial y $\{1_F\}$ es una base para el mismo, por la Propiedad universal de las bases, existen únicas transformaciones lineales $S_1, S_2 : F \to V$, tales que $S_1(1_F) = x_1$ y $S_2(1_F) = x_2$. Así las cosas tenemos que

$$(TS_1)(1_F) = T(S_1(1_F)) = T(x_1) = T(x_2) = T(S_2(1_F)) = (TS_2)(1_F)$$

es decir, $(TS_1)(1_F) = (TS_2)(1_F)$, lo cual por el Corolario 1.4.2, implica que $TS_1 = TS_2$. Sin embargo, $S_1(1_F) = x_1 \neq x_2 = S_2(1_F)$, o sea, $S_1(1_F) \neq S_2(1_F)$, de ahí que $S_1 \neq S_2$. De esta manera, hemos encontrado un espacio vectorial, a saber $_FF$ y transformaciones lineales $S_1, S_2 : F \to V$, tales que $TS_1 = TS_2$ pero $S_1 \neq S_2$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que T es monomorfismo. Por lo tanto, T es inyectiva.
2) $\Rightarrow$ 3): Supongamos que T es inyectiva. Veamos que $Ker(T) = \{0\}$. Por la Proposición 1.4.1, tenemos que $\{0\} \subseteq Ker(T)$. Ahora, si $x \in Ker(T)$, entonces $T(x) = 0 = T(0)$, pero T es inyectiva,

así que $x = 0$. De ambas contenciones, tenemos la igualdad deseada.
3) $\Rightarrow$ 4): Supóngase que $Ker(T) = \{0\}$. Ahora, tomemos $\beta \in \mathcal{I}(V)$. Vamos a mostrar que $T(\beta) \in \mathcal{I}(W)$, en efecto, tomemos $\gamma \subseteq T(\beta)$, γ finito. Luego, $\gamma = T(\beta')$, donde $\beta' \subseteq \beta$ es finito, entonces $\beta' = \{x_1, \ldots, x_n\}$, por consiguiente $\gamma = \{T(x_1), \ldots, T(x_n)\}$. Podemos asumir que todos los elementos de γ son distintos, pues si $T(x_i) = T(x_j)$, entonces $T(x_i - x_j) = 0$, así, $x_i - x_j \in Ker(T) = \{0\}$, en consecuencia $x_i = x_j$. Ahora veamos que γ es l.i, para eso supongamos que $\sum_{i=1}^{n} c_i T(x_i) = 0$, como T es lineal, entonces $T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = 0$, luego $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \in Ker(T) = \{0\}$, así que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$, pero $x_1, \ldots, x_n \in \beta'$, el cual es l.i, por lo que $c_i = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así las cosas, hemos probado que γ es l.i, en consecuencia $T(\beta)$ es l.i en W.
4) $\Rightarrow$ 5): Veamos primero que T es inyectiva, en efecto, si no es así, existen $x, y \in V$ tales que $x \neq y$ pero $T(x) = T(y)$. Luego, $\{x - y\}$ es l.i, ya que $x - y \neq 0$, pero $T(\{x - y\})$ es l.d en W, pues $T(x - y) = T(x) - T(y) = 0$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Ahora, consideremos β una base para V, en particular, β es l.i en V, por hipótesis $T(\beta)$ es l.i en W, por el Teorema 1.2.3, existe γ base de W tal que $T(\beta) \subseteq \gamma$. Observemos el diagrama

$$\beta \xrightarrow{T_{|\beta}^{|T(\beta)}} T(\beta) \hookrightarrow \gamma$$

de donde obtenemos que la función $g = \iota T_{|\beta}^{|T(\beta)} : \beta \to \gamma$ es inyectiva por ser composición de funciones inyectivas. En consecuencia, existe una función $h : \gamma \to \beta$ tal que $hg = id_\beta$. Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $S : W \to V$ tal que $S_{|\gamma} = h$. Para mostrar que $ST = id_V$, por el Corolario 1.4.2, es suficiente ver que $(ST)_{|\beta} = id_\beta$, en efecto, sea $x \in \beta$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
(ST)_{|\beta}(x) &= (ST)(x) \\
&= S(T(x)) \\
&= S(\iota(T(x))) \\
&= h((\iota T)(x)) \\
&= h(g(x)) \\
&= (hg)(x) \\
&= id_\beta(x)
\end{aligned}$$

es decir, $(ST)_{|\beta}(x) = id_\beta(x)$. Por lo tanto, S es la transformación lineal buscada.
5) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que existe $S : W \to V$ tal que $ST = id_V$. Debemos mostrar que T es monomorfismo, en efecto, sean ${}_FX$ un espacio vectorial y $S_1, S_2 : X \to V$ transformaciones lineales tales que $TS_1 = TS_2$, entonces se tiene que

$$S_1 = id_V S_1 = (ST)S_1 = S(TS_1) = S(TS_2) = (ST)S_2 = id_V S_2 = S_2$$

es decir, $S_1 = S_2$. $\square$

Ejemplo 1.4.5. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial y $H \leq V$, la inclusión $H \hookrightarrow V$ es un monomorfismo.*

El teorema que vamos a exponer a continuación, nos ofrece una relación entre la existencia de un monomorfismo entre dos espacios vectoriales y su dimensión.

Teorema 1.4.6. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $dim(V) \leq dim(W)$.

2) Existe un monomorfismo $T : V \to W$.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que $dim(V) \leq dim(W)$. Como V y W son espacios vectoriales, por el Teorema 1.2.2, existen $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ tales que son bases de V y W, respectivamente, ahora, como $dim(V) \leq dim(W)$, entonces $|\beta| \leq |\gamma|$, así que existe una función inyectiva $f : \beta \to \gamma$. Notemos que en particular f es una función de β en W, ya que $\gamma \subseteq W$, por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T_{|\beta} = f$. Demostremos que T es inyectiva, para esto, supongamos que $x \in Ker(T)$, luego, $T(x) = 0$. Ahora bien, como β es base de V, existe una única combinación lineal $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_i \in \beta$, $c_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, por la linealidad de T, se tiene que $0 = T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$, así, $\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = 0$, pero $f(x_i) \in \gamma$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y γ es l.i en W, por lo que $c_i = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, en consecuencia $x = 0$. Así las cosas, tenemos que $Ker(T) = \{0\}$, por el Teorema 1.4.5, T es monomorfismo..
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que existe un monomorfismo $T : V \to W$, en consecuencia T es inyectiva por el Teorema 1.4.5. Por el Teorema 1.2.2, tenemos que existe $\beta \subseteq V$ tal que β es base de V, luego, $T(\beta)$ es l.i en W, haciendo uso del Teorema 1.2.3, tenemos que existe $\gamma \subseteq W$ tal que γ es base de W y $T(\beta) \subseteq \gamma$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\beta \xrightarrow{T_{|\beta}^{|T(\beta)}} T(\beta) \hookrightarrow \gamma$$

así, tenemos que la función $g = \iota T_{|\beta}^{|T(\beta)} : \beta \to \gamma$ es una función inyectiva, pues es composición de funciones inyectivas, en consecuencia $dim(V) = |\beta| \leq |\gamma| = dim(W)$, es decir, $dim(V) \leq dim(W)$. $\square$

Ejemplo 1.4.6. *Consideremos un espacio vectorial* ${}_FV$ *y* $W \leq V$. *Como la inclusión* $\iota : W \to V$ *es un monomorfismo, aplicando el teorema anterior tenemos que* $dim(W) \leq dim(V)$, *lo cual se confirma con el Teorema 1.2.7.*

Teorema 1.4.7 (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein para espacios vectoriales)**.** *Sean* ${}_FV$, ${}_FW$ *espacios vectoriales. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $dim(V) = dim(W)$.
2) *Existen monomorfismos* $T : V \to W$ *y* $S : W \to V$.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2): Como V y W son espacios vectoriales, por el Teorema 1.2.2, existen $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$, bases de V y W, respectivamente. Ahora, por hipótesis $dim(V) = dim(W)$, así que $|\beta| = |\gamma|$, luego, existe una función biyectiva $f : \beta \to \gamma$, por ser f biyectiva, tiene inversa $f^{-1} : \gamma \to \beta$, la cuál tambien es biyectiva. Observemos los siguientes diagramas:

$$\beta \xrightarrow{f} \gamma \hookrightarrow W$$

$$\gamma \xrightarrow{f^{-1}} \beta \hookrightarrow V$$

denotemos $g = \iota f : \beta \to W$ y $h = \iota g : \gamma \to V$, las cuales son funciones inyectivas, puesto que son composiciones de inyectivas. La Propiedad universal de las bases nos garantiza que existen transformaciones lineales $T : V \to W$ y $S : W \to V$ tales que $T_{|\beta} = g$ y $S_{|\gamma} = h$. Utilizando el mismo argumento de la demostración del Teorema 1.4.6, tenemos que $T : V \to W$ y $S : W \to V$ son monomorfismos.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que existen monomorfismos $T : V \to W$ y $S : W \to V$. Ahora, sean β y γ bases de V y W, respectivamente. Por el Teorema 1.4.6, $dim(V) \leq dim(W)$ y $dim(W) \leq dim(V)$, esto es, $|\beta| \leq |\gamma|$ y $|\gamma| \leq |\beta|$, aplicando el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein, tenemos que $|\beta| = |\gamma|$, es decir, $dim(V) = dim(W)$. $\square$

Teorema 1.4.8. *Sean ${}_FV, {}_FW, {}_FZ$ espacios vectoriales, $T : V \to W$ y $S : W \to Z$. Si S y T son monomorfismos, entonces $ST : V \to Z$ es monomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 1.4.2, $ST : V \to Z$ es una transformación lineal. Veamos que es cancelable por la izquierda, en efecto, sea ${}_FX$ un espacio vectorial, $U_1, U_2 : X \to V$ tales que $(ST)U_1 = (ST)U_2$, luego $S(TU_1) = S(TU_2)$, pero S es monomorfismo, así que $TU_1 = TU_2$ y como T es monomorfismo, se tiene que $U_1 = U_2$. □

1.4.5. Epimorfismos

Definición 1.4.6 (Epimorfismo)**.** *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Decimos que T es un epimorfismo si es cancelable por la derecha, es decir, para cualesquiera espacio vectorial ${}_FY$ y transformaciones lineales $S_1, S_2 : W \to Y$, $S_1T = S_2T$, implica que $S_1 = S_2$.*

Teorema 1.4.9 (Caracterización de los epimorfismos)**.** *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones sobre T son equivalentes:*

1) T es epimorfismo.

2) T es suprayectiva.

3) $T(V) = W$.

4) Si $\beta \in \mathcal{G}(V)$, entonces $T(\beta) \in \mathcal{G}(W)$.

5) Existe una transformación lineal $S : W \to V$ tal que $TS = id_W$.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que T no es suprayectiva, entonces existe $w_0 \in W \setminus T(V)$, de donde concluimos que $T(V) \lneq W$. Luego, existe $\{0\} \neq Y \leq W$ tal que $W = T(V) \oplus Y$. Notemos que como $w_0 \notin T(V)$, entonces $w_0 = T(v_0) + y_0$, con $v_0 \in V$ y $y_0 \in Y \setminus \{0\}$. Consideremos las transformaciones lineales $id_W : W \to W$ y $S : W \to W$, dada por $S(w) = T(v)$, si $w = T(v) + y$, con $v \in V$, $y \in Y$. Es claro que $id_W T = ST$, sin embargo, $id_W(w_0) = T(v_0) + y_0 \neq T(v_0) = S(w_0)$, es decir, $id_W(w_0) \neq S(w_0)$, de donde se sigue que $id_W \neq S$. Esto último contradice la hipótesis de que T es epimorfismo. Por lo tanto, T es suprayectiva.
2) $\Rightarrow$ 3): Es inmediato.
3) $\Rightarrow$ 4): Sea $\beta \in \mathcal{G}(V)$, luego $\langle \beta \rangle = V$. Veamos que $\langle T(\beta) \rangle = W$, en efecto, sea $w \in W = T(V)$, entonces existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$, como $V = \langle \beta \rangle$, entonces $v = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_i \in \beta$, $c_i \in F$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, como T es lineal, entonces $w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(x_i)$, pero $T(x_i) \in T(\beta)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, en consecuencia $w \in \langle T(\beta) \rangle$, con lo que $T(\beta) \in \mathcal{G}(W)$.
4) $\Rightarrow$ 5): Consideremos β una base de V, en particular, $\beta \in \mathcal{G}(V)$, por hipótesis se tiene que $T(\beta) \in \mathcal{G}(W)$. En consecuencia, existe γ base de W tal que $\gamma \subseteq T(\beta)$. Es claro que la función $g = T_{|\beta}^{|\gamma} : \beta \to \gamma$ es suprayectiva, por consiguiente, existe una función $h : \gamma \to \beta$ tal que $gh = id_\gamma$. Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $S : W \to V$ tal que $S_{|\gamma} = h$. Debemos mostrar que $TS = id_W$, pero por el Corolario 1.4.2, es suficiente mostrar que $(TS)_{|\gamma} = id_\gamma$. En efecto, sea $y \in \gamma$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(TS)_{|\gamma}(y) &= (TS)(y) \\
&= T(S(y)) \\
&= T(h(y)) \\
&= g(h(y)) \\
&= (gh)(y) \\
&= id_\gamma(y)
\end{aligned}
$$

es decir, $(TS)_{|\gamma}(y) = id_\gamma(y)$, lo cual ocurre para cada $y \in \gamma$. De esta manera se concluye lo deseado.
5) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que existe una transformación lineal $S : W \to V$ tal que $TS = id_W$. Para mostrar que T es epimorfismo, sea ${}_FY$ un espacio vectorial, $S_1, S_2 : W \to Y$ tales que $S_1T = S_2T$. Luego, se tiene lo siguiente:

$$S_1 = S_1 id_W = S_1(TS) = (S_1T)S = (S_2T)S = S_2(TS) = S_2 id_W = S_2$$

es decir, $S_1 = S_2$. $\square$

Ejemplo 1.4.7. *Consideremos un espacio vectorial ${}_FV$, $W, K \leq V$ tales que $V = W \oplus K$. Entonces las funciones:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_W : & V = W \oplus K & \to & W \\ & v = w + k & \mapsto & w \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \pi_K : & V = W \oplus K & \to & K \\ & v = w + k & \mapsto & k \end{array}$$

son epimorfismos, pues son transformaciones lineales suprayectivas.

Teorema 1.4.10. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $dim(V) \geq dim(W)$.

2) Existe un epimorfismo $T : V \to W$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) : Sean β y γ bases de V y W, respectivamente. Como $dim(V) \geq dim(W)$, por la Observación A.3.1 se tiene que existe una función suprayectiva $f : \beta \to \gamma$. Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T_{|\beta} = f$. Veamos que T es suprayectiva, sea $w \in W$, como γ es base de W, entonces $w = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $y_i \in \gamma$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, como para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_i \in \gamma$ y $f : \beta \to \gamma$ es suprayectiva, existe $x_i \in \beta$ tal que $y_i = f(x_i)$. Entonces, $w = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(x_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$, con $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \in V$. Por lo tanto, $T : V \to W$ es suprayectiva y por lo tanto epimorfismo.
2) $\Rightarrow$ 1) : Supongamos que existe un epimorfismo $T : V \to W$. Sea β una base de V, por el Teorema 1.4.9, $T(\beta)$ es un generador de W, de acuerdo al Teorema 1.2.4, existe una base γ de W tal que $\gamma \subseteq T(\beta)$. Por un lado, como $\gamma \hookrightarrow T(\beta)$ es una función inyectiva, entonces $|\gamma| \leq |T(\beta)|$. Por otro lado, como $T_{|\beta}^{|T(\beta)} : \beta \to T(\beta)$ es suprayectiva, de acuerdo a la Observación A.3.1 se tiene que $|T(\beta)| \leq |\beta|$. En consecuencia, $dim(V) = |\beta| \geq |T(\beta)| \geq |\gamma| = dim(W)$, es decir, $dim(V) \geq dim(W)$. $\square$

Teorema 1.4.11. *Sean ${}_FV,{}_FW,{}_FZ$ espacios vectoriales, $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ transformaciones lineales. Si S y T son epimorfismos, entonces $ST : V \to Z$ es epimorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 1.4.2, tenemos que $ST : V \to Z$ es una transformación lineal. Veamos que es cancelable por la derecha. Sea ${}_FY$ un espacio vectorial, $U_1, U_2 : Z \to Y$ transformaciones lineales tales que $U_1(ST) = U_2(ST)$, entonces $(U_1S)T = (U_2S)T$, como T es epimorfismo, se tiene que $U_1S = U_2S$, pero S también es epimorfismo, así que $U_1 = U_2$. $\square$

1.4.6. Isomorfismos

Definición 1.4.7 (Isomorfismo)**.** *Sean ${}_FV,{}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Decimos que T es un isomorfismo si existe una transformación lineal $S : W \to V$ tal que $ST = id_V$ y $TS = id_W$.*
Cuando existe un isomorfimo $T : V \to W$ se dice que V es isomorfo a W, lo cual se denota como $V \cong W$.

A continuación se presenta una caracterización de los isomorfismos.

Teorema 1.4.12 (Caracterización de los isomorfismos). *Sean* ${}_FV, {}_FW$ *espacios vectoriales y* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones sobre* T *son equivalentes:*

1) T *es isomorfismo.*

2) T *es monomorfismo y epimorfismo.*

3) T *es biyectiva.*

4) Si β *es base de* V*,* $T(\beta)$ *es base de* W*.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2): Se sigue de las implicaciones 5) $\Rightarrow$ 1) del Teorema 1.4.5 y 5) $\Rightarrow$ 1) del Teorema 1.4.9.
2) $\Rightarrow$ 3): Se sigue de la implicación 1) $\Rightarrow$ 2) del Teorema 1.4.5 y la implicación 1) $\Rightarrow$ 2) del Teorema 1.4.9.
3) $\Rightarrow$ 4): Se sigue de 2) $\Rightarrow$ 4) del Teorema 1.4.5 y 2) $\Rightarrow$ 4) del Teorema 1.4.9.
4) $\Rightarrow$ 1): Como V es espacio vectorial, por el Teorema 1.2.2, V tiene una base, digamos β, por hipótesis $T(\beta)$ es base de W. Vamos a probar que $T_{|\beta}^{|T(\beta)} : \beta \to T(\beta)$ es biyectiva, es claro que es suprayectiva, por lo que solo falta ver que es inyectiva, supogamos que no es así, entonces existen $u, v \in \beta$ tales que $u \neq v$ pero $T(u) = T(v)$. Consideremos el conjunto $\beta' = (\beta \setminus \{v\}) \cup \{u - v\}$. Veamos que β' es l.i, para esto supongamos que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_{n+1}(u - v) = 0$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $c_{n+1} \in F$, $x_i \in \beta$, $x_i \neq v$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $x_i \neq u$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_{n+1} u - c_{n+1} v = 0$, pero $x_i, u, v \in \beta$, con β l.i, así que $c_i = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Ahora, si $x_j = u$, para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\sum_{i=1, i \neq j}^{n} c_i x_i + (c_{n+1} + c_j)u - c_{n+1} v = 0$, como $x_i, u, v \in \beta$ y β es l.i, entonces $c_1 = \cdots c_n = c_{n+1} = 0$ y $c_{n+1} + c_j = 0$, como $c_{n+1} = 0$, se deduce que $c_j = 0$. Por lo tanto, β' es l.i, de acuerdo al Teorema 1.2.3, existe una base de V, digamos γ tal que $\beta' \subseteq \gamma$, por hipótesis $T(\gamma)$ es base de W, además $T(\beta') \subseteq T(\gamma)$. Ahora, $0 = T(u) - T(v) = T(u - v) \in T(\beta') \subseteq T(\gamma)$, así que $0 \in T(\gamma)$, con lo que $T(\gamma)$ es l.d, pero esto es absurdo ya que $T(\gamma)$ es base de W. Por lo tanto, $T_{|\beta}^{|T(\beta)}$ es inyectiva. Por comodidad, denotemos $g = T_{|\beta}^{|T(\beta)} : \beta \to T(\beta)$, así g es biyectiva, consideremos la función inversa $g^{-1} : T(\beta) \to \beta$. Por la Propiedad universal de las bases, existe única transformación lineal $S : W \to V$ tal que $S_{|T(\beta)} = g^{-1}$. Ahora, si $x \in \beta$, entonces $(ST)_{|\beta}(x) = (ST)(x) = S(T(x)) = S(g(x)) = g^{-1}(g(x)) = (g^{-1}g)(x) = id_\beta(x) = x$, de ahi que $(ST)_{|\beta} = id_\beta$ Análogamente se muestra que $(TS)_{|T(\beta)} = id_{T(\beta)}$. Por el Corolario 1.4.2, se tiene que $ST = id_V$ y $TS = id_W$, consecuentemente $T : V \to W$ es isomorfismo. $\square$

Ejemplo 1.4.8. *Consideremos un campo* F *y un espacio vectorial* ${}_FV$ *tal que* $dim(V) = n$*, con* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. Consideremos* $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *una base ordenada de* V *y* $\gamma = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *la base canónica de* F^n*. Definamos la función:*

$$\begin{array}{cccc} f: & \beta & \to & F^n \\ & x_i & \mapsto & e_i \end{array}$$

por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ *tal que* $T_{|\beta} = f$*. Veamos explícitamente como está definida* T*, sea* $x \in V$*, luego como* β *es base de* V*, existe una única combinación lineal* $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$*, con* $c_i \in F$*,* $x_i \in \beta$*,* $i \in \{1, \ldots, n\}$*. Entonces* $T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = (c_1, \ldots, c_n)$*. Así las cosas, tenemos que* $T(x) = (c_1, \ldots, c_n)$*, donde los* c_i *son los coeficientes de la combinación lineal de* x *en la base* β*. Veamos que* T *es biyectiva, primero veamos la inyectividad, para esto tomemos* $y \in Ker(T)$*, luego* $T(y) = 0$ *(el cero de* F^n*), luego* $y = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i$*, con* $d_i \in F, x_i \in \beta$*, entonces* $(d_1, \ldots, d_n) = (0, \ldots, 0)$*, por lo que* $d_i = 0$*, para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *y en consecuecia* $y = 0$*. Por lo tanto,* T *es inyectiva. Ahora, si* $z \in F^n$*, entonces* $z = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$*, con* $a_i \in F$*,* $e_i \in \gamma$*,* $i \in \{1, \ldots, n\}$*. Tomando* $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V$*, se tiene que* $T(x) = z$*. Por lo tanto* T *es isomorfismo y en consecuencia* $V \cong F^n$*. Para* $v \in V$*,* $T(v)$ *se suele denotar por* $[v]_\beta$ *y se le llama* ***la representación en***

coordenadas del vector v ***respecto a la base*** β *y* T *se suele denotar como* Φ_β.
Generalmente es más usual escribir al vector de coordenadas en forma de columna, es decir:

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Definición 1.4.8. *Sean* ${}_FV$, ${}_FW$ *espacios vectoriales. Decimos que* V *se sumerge en* W *si existe un monomorfismo* $T : V \to W$.

Proposición 1.4.2. *Sean* ${}_FV$, ${}_FW$ *espacios vectoriales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) V *se sumerge en* W.

2) Existe $L \leq W$ *tal que* $V \cong L$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que V se sumerge en W, por definición existe un monomorfismo $T : V \to W$. Sabemos que $Im(T) \leq W$, además $T^{|T(V)} : V \to T(V)$ ya es un isomorfismo. Tomando $L = T(V)$ se tiene que $V \cong L$ con $L \leq W$.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que existe $L \leq W$ tal que $V \cong L$. Luego, existe un isomorfismo $\psi : V \to L$. Ahora, observemos el siguiente diagrama:

$$V \xrightarrow{\psi} L \hookrightarrow W.$$

Consideremos $\iota\psi : V \to W$, donde $\iota : L \to W$ es el morfismo inclusión. Al ser $\iota\psi : V \to W$ composición de monomorfismos es monomorfismo. Por lo tanto, V se sumerge en W. $\square$

Teorema 1.4.13. *Sean* ${}_FV$, ${}_FW$ *espacios vectoriales y* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Entonces existen* $X \leq V$ *y* $Z \leq W$ *tales que* $V = Ker(T) \oplus X$ *y* $W = Im(T) \oplus Z$. *Además,* $X \cong Im(T)$.

Demostración. Como $Ker(T) \leq V$, por el Teorema 1.3.1, existe $X \leq V$ tal que $V = Ker(T) \oplus X$. De igual forma, como $Im(T) \leq W$, existe $Z \leq W$ tal que $W = Im(T) \oplus Z$.
Ahora, consideremos $T_{|X} : X \to Im(T)$. Veamos que $T_{|X}$ es inyectiva, en efecto, sea $x \in Ker(T_{|X})$, como $Ker(T_{|X}) = Ker(T) \cap X = \{0\}$, ya que $Ker(T) \oplus X = V$, tenemos que $x = 0$.
Ahora veamos la suprayectividad. Si $y \in Im(T)$, entonces $y = T(v)$, con $v \in V$, pero $V = Ker(T) \oplus X$, entonces $v = k + x$, con únicos $k \in Ker(T)$, $x \in X$. De esta manera, $T(v) = T(x + k) = T(k) + T(x) = T(x) = T_{|X}(x)$, de esta manera se prueba la suprayectividad. Por lo tanto, $T_{|X} : X \to Im(T)$ es isomorfismo y consecuentemente $X \cong Im(T)$. $\square$

Clases de isomorfimo

Recordemos que si F es un campo, entonces:

$$\mathbf{Vec}_F = \{V \mid V \text{ es un espacio vectorial sobre } F\}$$

no es un conjunto sino una clase propia. Entonces utilizando el convenio que nos permite definir relaciones de equivalencia en clases, podemos particionar la clase de espacios vectoriales en clases de isomorfismo, para eso mostraremos primero que la relación de isomorfismo es de equivalencia en la clase de espacios vectoriales sobre un campo F. El siguiente lema nos ayudará a establecer este resultado.

Lema 1.4.1. *Sean* ${}_FV$, ${}_FW$ *y* ${}_FZ$ *espacios vectoriales. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1) Si $T : V \to W$ *y* $S : W \to Z$ *son isomorfismos, entonces* $ST : V \to Z$ *es isomorfismo.*

2) Si $T : V \to W$ es isomorfismo, entonces $S^{-1} : W \to Z$ es isomorfismo.

Demostración.

1) Es inmediato a partir de los Teoremas 1.4.8 y 1.4.11.

2) Supongamos que $T : V \to W$ es isomorfismo, por el Teorema 1.4.12 se tiene que $T : V \to W$ es una función biyectiva. Entonces existe la función inversa $T^{-1} : W \to V$ tal que $T^{-1}T = id_V$ y $TT^{-1} = id_W$, además $T^{-1} : W \to V$ es una función biyectiva. Veamos que $T^{-1} : W \to V$ es una transformación lineal, para esto sean $w, w' \in W$, $c \in F$, luego $w, cw' \in W$, así se tiene que $T^{-1}(w)$ y $cT^{-1}(w')$. Como $T : V \to W$ es lineal, entonces

$$\begin{aligned} T(T^{-1}(w) + cT^{-1}(w')) &= T(T^{-1}(w)) + cT(T^{-1}(w')) \\ &= (TT^{-1})(w) + c(TT^{-1})(w') \\ &= id_W(w) + cid_W(w') \\ &= w + cw' \end{aligned}$$

es decir:

$$T(T^{-1}(w) + cT^{-1}(w')) = w + cw' \tag{I}$$

aplicando T^{-1} a la ecuación (I) tenemos:

$$T^{-1}(T(T^{-1}(w) + cT^{-1}(w'))) = T^{-1}(w + cw')$$

esto es:

$$(T^{-1}T)(T^{-1}(w) + cT^{-1}(w')) = T^{-1}(w + cw')$$

pero $T^{-1}T = id_V$, así que la última ecuación nos conduce a:

$$T^{-1}(w + cw') = T^{-1}(w) + cT^{-1}(w')$$

De donde se establece la linealidad de T^{-1}. Por lo tanto, $T^{-1} : W \to V$ es un isomorfismo.

□

Observación 1.4.2. *Sean $_FV$, $_FW$ espacios vectoriales. Si $T : V \to W$ es isomorfismo, entonces $T^{-1} : W \to V$ es la única transformación lineal tal que $T^{-1}T = id_V$ y $TT^{-1} = id_W$. Además, T^{-1} tambien es isomorfismo.*

Teorema 1.4.14. *Sea F un campo. Entonces la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en $\textbf{Vec}_F$.*

Demostración.

- **Reflexividad:** Sea $_FV$ un espacio vectorial. Luego, la transformación identidad $id_V : V \to V$, definida por $id_V(v) = v$ para cada $v \in V$ es un isomorfismo, de ahí que $V \cong V$.

- **Simetría:** Sean $_FV,_FW$ espacios vectoriales. Supongamos que $V \cong W$, luego, existe un isomorfismo $T : V \to W$, por el Lema 1.4.1, se tiene que $T^{-1} : W \to V$ es un isomorfismo, de ahí que $W \cong V$.

- **Transitividad:** Sean $_FV$, $_FW$ y $_FZ$ espacios vectoriales. Supongamos que $V \cong W$ y $W \cong Z$, entonces existen isomorfismos $T : V \to W$ y $S : W \to Z$, por el Lema 1.4.1, tenemos que $ST : V \to W$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $V \cong Z$.

De lo anterior, tenemos que la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en $\textbf{Vec}_F$. □

Definición 1.4.9. *Sea $_FV$ un espacio vectorial. Definimos la clase de isomorfismo de V de la siguiente manera:*

$$\mathcal{C}(V) = \{W \in \textbf{\textit{Vec}}_F \mid W \cong V\}.$$

Ejemplo 1.4.9. *De acuerdo al Ejemplo 1.4.8, tenemos que si n es un número natural, F es un campo y ${}_FV$ es un espacio vectorial de dimensión n, entonces $V \cong F^n$. Utilizando este hecho podemos definir la clase de isomorfismo de F^n como sigue:*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(F^n\right) &= \{V \in \boldsymbol{Vec}_F \mid V \cong F^n\} \\ &= \{V \in \boldsymbol{Vec}_F \mid dim(V) = n\}\,.\end{aligned}$$

De esta manera concluimos que todos los espacios vectoriales de dimensión n están en la misma clase de isomorfismo de F^n y por lo tanto es lo mismo trabajar con un espacio de dimensión n particular que con el espacio F^n, ya que su estructura interna es exactamente la misma.

A continuación vamos a mostrar que de hecho este hecho no es una coincidencia ni es casualidad, en general, para ver que dos espacios son isomorfos es suficiente ver que tienen la misma dimensión y visceversa. Los detalles se presentan en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.15 (Teorema fundamental del Álgebra Lineal)**.** *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $V \cong W$.

2) $dim(V) = dim(W)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que $V \cong W$, luego existe un isomofismo $T : V \to W$. Sea β una base de V, por el Teorema 1.4.12, $T(\beta)$ es una base de W, además, $T_{|\beta}^{|T(\beta)} : \beta \to T(\beta)$ es una función biyectiva. Así, $dim(V) = |\beta| = |T(\beta)| = dim(W)$.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que $dim(V) = dim(W)$. Por el Teorema 1.2.2, sabemos que todo espacio vectorial tiene base y por el Teorema 1.2.5, todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad, por consiguiente podemos considerar bases cualesquiera de nuestros espacios. Sea β una base de V y γ una base de W, por hipótesis existe una función biyectiva $f : \beta \to \gamma$, por ser f biyectiva tiene inversa $f^{-1} : \gamma \to \beta$. Por la propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T_{|\beta} = f$ y existe una única transformación lineal $S : W \to V$ tal que $S_{|\gamma} = f^{-1}$. Es fácil ver que $(ST)_{|\beta} = id_\beta$ y $(TS)_{|\gamma} = id_W$, por el Corolario 1.4.2, tenemos que $ST = id_V$ y $TS = id_W$, de ahí que $T : V \to W$ es un isomorfismo y en consecuencia $V \cong W$. $\square$

Corolario 1.4.4. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial. Entonces $V \cong F^{(X)}$, para algún conjunto X.*

Demostración. Como V es un espacio vectorial, por el Teorema 1.2.2, existe $\beta \subseteq V$ tal que β es base de V. Así, tenemos que $dim(V) = |\beta|$ y por lo realizado en el Ejemplo 1.2.2, se tiene que $dim(F^{(\beta)}) = |\beta|$, en consecuencia $dim(V) = |\beta| = dim(F^{(\beta)})$, aplicando el teorema anterior tenemos que $V \cong F^{(\beta)}$. $\square$

Esto último nos permite concluir que si X es un conjunto y F es un campo, entonces podemos definir la clase de isomorfismo de $F^{(X)}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}(F^{(X)}) = \{V \in \mathbf{Vec}_F \mid dim(V) = |X|\}\,.$$

Esto último nos dice que hay tantos espacios vectoriales como cardinales haya, ya que recordemos que el Axioma de Elección nos permite asignarle a cada conjunto un cardinal. De aquí podemos concluir que hay una correspondencia biyectiva entre la clase de los cardinales y la clase de los espacios vectoriales sobre un campo F dado, por lo que ambas clases son equipotentes, es decir, $|\mathbf{Card}| = |\mathbf{Vec}_F|$.

Observación 1.4.3. *Dado que todo espacio vectorial ${}_FV$ es isomorfo a $F^{(\beta)}$, con β base de V, podemos abusar y decir que β es una base de $F^{(\beta)}$, que aunque no es propiamente así, la biyección entre las bases β de V y $\{\delta_x\}_{x\in\beta}$ de $F^{(\beta)}$, con las δ_x como se definieron en el Ejemplo 1.2.2, las hace algebraicamente indistinguibles.*

Las propiedades expuestas hasta el momento, nos permite introducir un funtor de la categoría de conjuntos a la categoría de espacios vectoriales sobre el campo F y otro de la categoría de espacios vectoriales sobre el campo F a la categoría de conjuntos. Además, mostraremos que estos funtores son adjuntos entre sí. Para revisar con detalle estos conceptos se puede consultar la **Sección B.8** del **Apéndice B**.

Proposición 1.4.3. *Sea F un campo. Entonces existe un funtor covariante G : $\boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Vec}_F$, definido en objetos como:*

$$\begin{array}{rccc} G: & Obj(\boldsymbol{Set}) & \to & Obj(\boldsymbol{Vec}_F) \\ & X & \to & F^{(X)} \end{array}$$

y en morfismos como:

$$\begin{array}{rccc} G: & \boldsymbol{Set}(X,Y) & \to & \boldsymbol{Vec}_F(F^{(X)}, F^{(Y)}) \\ & f & \to & T_f \end{array}$$

donde T_f es la única transformación lineal $T_f : F^{(X)} \to F^{(Y)}$, garantizada por la Propiedad universal de las bases que cumple $T_{f|X} = f$.

Demostración. Es claro que la asignación está bien definida en objetos, ya que por el Ejemplo 1.1.4, $F^{(X)}$ es un espacio vectorial sobre el campo F, para cualquier conjunto X. Además, por el Corolario 1.4.4, todos los espacios vectoriales que tengan como base al conjunto X están en la misma clase de isomorfismo de $F^{(X)}$ y eso los hace indistinguibles algebraicamente.
Ahora veamos que está bien definida en morfismos, si X y Y son conjuntos y $f : X \to Y$ una función, por la Observación 1.4.3, podemos suponer que $Y \subseteq F^{(Y)}$, por lo que $f : X \to F^{(Y)}$ es una función. Ahora, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & F^{(Y)} \\ F^{(X)} & \end{tikzcd}$$

por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T_f : F^{(X)} \to F^{(Y)}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & F^{(Y)} \\ F^{(X)} \arrow[ur, "T_f"'] & \end{tikzcd}$$

de esta manera establecemos que el funtor está bien definido en morfismos. Finalmente, veamos que este funtor es covariante, para esto sean X, Y, Z conjuntos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones, luego $gf : X \to Z$ es una función, $T_f : F^{(X)} \to F^{(Y)}$ y $T_g : F^{(Y)} \to F^{(Z)}$ son transformaciones lineales, por el Teorema 1.4.2 tenemos que $T_g T_f : F^{(X)} \to F^{(Z)}$ es una transformación lineal y por la definición del funtor, $T_{gf} : F^{(X)} \to F^{(Z)}$ es una transformación lineal. Debemos mostrar que $T_{gf} = T_g T f$, por el Corolario 1.4.2, es suficiente ver que coinciden en la base. Sea $x \in X$, entonces, $T_{gf}(x) = (gf)(x) = g(f(x)) = T_g(f(x)) = T_g(T_f(x)) = (T_g T_f)(x)$. De ahí que $T_{gf} = T_g T_f$.
Es claro que para cada conjunto X, $T_{id_X} = id_{F^{(X)}}$. Por lo tanto, G : **Set** $\to$ $\mathbf{Vec}_F$ es un funtor covariante. $\square$

Definición 1.4.10. *Sea ${}_FV$ un campo. El funtor que olvida H : $\boldsymbol{Vec}_F \to \boldsymbol{Set}$ está definido en objetos como:*

$$\begin{array}{rccc} H: & Obj(\boldsymbol{Vec}_F) & \to & Obj(\boldsymbol{Set}) \\ & {}_FV & \to & V \end{array}$$

donde V es el conjunto subyacente de ${}_FV$, en otras palabras le quitamos a ${}_FV$ la estructura de espacio vectorial. En morfismos se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} H: & \textit{\textbf{Vec}}_F({}_FV,{}_FW) & \to & \textit{\textbf{Set}}(V,W) \\ & T & \to & T \end{array}$$

donde $T : V \to W$ es la función entre los conjuntos V y W, es decir, le quitamos a T la linealidad. Es fácil ver que este funtor es covariante.

Teorema 1.4.16. *Sea F un campo. $G : \textit{\textbf{Set}} \to \textit{\textbf{Vec}}_F$ el funtor definido en la Proposición 1.4.3 y $H : \textit{\textbf{Vec}}_F \to \textit{\textbf{Set}}$ el funtor que olvida. Entonces $G \dashv H$.*

Demostración. Sea X un conjunto y ${}_FV$ un espacio vectorial. Proponemos:

$$\begin{array}{rccc} \tau_{X,V}: & \mathbf{Vec}_F\left(F^{(X)},{}_FV\right) & \to & \mathbf{Set}\,(X,V) \\ & T & \mapsto & \tau_{X,V}(T) \end{array}$$

donde $\tau_{X,V}(T) : X \to V$ está definida por $\tau_{X,V}(T)(x) = T(x)$, para cada $x \in X$. Claramente, $\tau_{X,V}(T)$ está bien definida. Vamos a demostrar que $\tau_{X,V}(T) : \mathbf{Vec}_F\left(F^{(X)},{}_FV\right) \to \mathbf{Set}\,(X,V)$ es una biyección:

- **Inyectividad:** Sean $T : F^{(X)} \to_F V$, $U : F^{(X)} \to_F V$ transformaciones lineales y supongamos que $\tau_{X,V}(T) = \tau_{X,V}(U)$. Debemos exhibir que $T = U$, por el Corolario 1.4.2, es suficiente ver que coinciden en la base, en efecto, sea $x \in X$, luego $T(x) = \tau_{X,V}(T)(x) = \tau_{X,V}(U)(x) = U(x)$, es decir, $T(x) = U(x)$, para cada $x \in X$. Por lo tanto, $T = U$.

- **Suprayectividad:** Sea $g : X \to V$ una función, como X es base de $F^{(X)}$, de acuerdo con la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T_g : F^{(X)} \to_F V$ tal que $T_{g|X} = g$. Ahora, si $x \in X$, entonces $\tau_{X,V}(T_g)(x) = T_g(x) = g(x)$, de esta manera $g = \tau_{X,V}(T_g)$ y así se concluye que $\tau_{X,V}$ es suprayectiva.

Así las cosas, tenemos que $\tau_{X,V} : \mathbf{Vec}_F\left(F^{(X)},{}_FV\right) \to \mathbf{Set}\,(X,V)$ es una biyección.
Finalmente, vamos a probar la naturalidad. Tomemos un conjunto Y, un espacio vectorial ${}_FW$, una función $f : Y \to X$ y una transformación lineal $T :_F V \to_F W$. Necesitamos exhibir que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vec}_F(F^{(X)},{}_FV) \arrow[r, "\tau_{X,V}"] \arrow[d, "T\_G(f)"] & \mathbf{Set}(X,V) \arrow[d, "H(T)\_f"] \\ \mathbf{Vec}_F(F^{(Y)},{}_FW) \arrow[r, "\tau_{Y,W}"] & \mathbf{Set}(Y,W) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $H(T)\_f\tau_{X,V} = \tau_{Y,W}T\_G(f)$, donde $(T\_G(f))(S) = TSG(f)$, para cada $S : F^{(X)} \to_F V$ en $\mathbf{Vec}_F$ y $(H(T)\_f)(g) = H(T)gf$, para cada $g : X \to V$ en $\mathbf{Set}$. Tomemos $S : F^{(X)} \to_F V$ en $\mathbf{Vec}_F$. Por un lado, $(H(T)\_f\tau_{X,V})(S) = H(T)\tau_{X,V}(S)f : Y \to W$ es una función en $\mathbf{Set}$ y para cada $y \in Y$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (H(T)\tau_{X,V}(S)f)(y) & = & (H(T)\tau_{X,V}(S))(f(y)) \\ & = & H(T)(\tau_{X,V}(S)(f(y))) \\ & = & H(T)(S(f(y)) \\ & = & T(S(f(y))). \end{array} \tag{I}$$

Por otro lado, $(\tau_{Y,W}T\_G(f))(S) = \tau_{Y,W}(TSG(f)) : Y \to W$ es una función en $\mathbf{Set}$ y para $y \in Y$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \tau_{Y,W}(TSG(f))(y) & = & (TSG(f))(y) \\ & = & (TS)(G(f)(y)) \\ & = & (TS)(f(y)) \\ & = & T(S(f(y))). \end{array} \tag{II}$$

Comparando las igualdades (I) y (II), tenemos que $H(T)\_f\tau_{X,V} = \tau_{Y,W}T\_G(f)$, lo que estabamos buscando.
Por lo tanto, $\tau_{X,V} : \mathbf{Vec}_F\left(F^{(X)},_F V\right) \to \mathbf{Set}\,(X,V)$ es una biyección natural, para cada $X \in Obj(\mathbf{Set})$ y $_FV \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. En consecuencia, $G \dashv H$. $\square$

1.4.7. Representación en coordenadas y matrices

Para finalizar este capítulo, vamos a introducir una representación en coordenadas en espacios vectoriales de dimensión arbitraria así como las representaciones matriciales de las transformaciones lineales.
Consideremos F un campo y $_FV$ un espacio vectorial. Por el Teorema 1.2.2, V tiene al menos una base, dado que por el Teorema 1.2.5, todas las bases tienen la misma cardinalidad nos podemos conformar con tomar una base cualquiera. Para generalizar el concepto de representación en coordenadas, vamos a considerar un conjunto I cualquiera (puede ser finito o infinito) y (β, I, f) una base ordenada de V. Como para cada $i \in I$, $f(i) \in \beta$, entonces $f(i) = x_i$, donde $x_i \in \beta$, además cada elemento de β proviene de un único elemento de I bajo la función f, esto nos permite denotar $\beta = \{x_i\}_{i\in I}$, donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, para cada $i, j \in I$. Como V y $F^{(I)}$ tienen la misma dimensión, a saber $|I|$, entonces $V \cong F^{(I)}$. Vamos a hacer explícito tal isomorfismo. Consideremos la función:

$$\begin{array}{rccc} \delta: & \beta & \to & F^{(I)} \\ & x_i & \mapsto & \delta_i \end{array}$$

donde $\delta_i : I \to F$ se define como $\delta_i(i) = 1$ y $\delta_i(j) = 0$, si $i \neq j$. Por lo realizado en el Ejemplo 1.2.2, se tiene que $\{\delta_i\}_{i\in I}$ es una base de $F^{(I)}$, además $\delta : \beta \to \{\delta_i\}_{i\in I}$ es una biyeción. Aplicando la propiedad universal de las bases a δ, existe una única transformación lineal $\Phi_\beta : V \to F^{(I)}$ tal que $\Phi_{\beta|\beta} = \delta$. Ahora, si $v \in V$, entonces $v = \sum_{j\in J} c_j x_j$, con únicos $J \subseteq I$ finito, $c_j \in F$, $x_j \in \beta$, $j \in J$. De esta manera, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_\beta(v) & = & \Phi_\beta\left(\sum_{j\in J} c_j x_j\right) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j \Phi_\beta(x_j) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j \delta_j \end{array}$$

Así, para cada $i \in I$, si $i \in J$, entonces $\Phi_\beta(v)(i) = c_i$ y si $i \notin J$, entonces $\Phi_\beta(v)(i) = 0$.
Vamos a ver que $\Phi_\beta : V \to F^{(I)}$ es un isomorfismo:

- (**Inyectividad:**) Sea $v \in ker(\Phi_\beta)$, entonces $\Phi_\beta(v) = \overline{0}$. Como β es base de V, $v = \sum_{j\in J} c_j x_j$, con únicos $J \subseteq I$ finito, $c_j \in F$, $x_j \in \beta$, $j \in J$. como $\Phi_\beta(v)(i) = 0$, para cada $i \in I$, en particular $\Phi_\beta(v)(j) = 0$, para cada $j \in J$, esto es $c_j = 0$, para cada $j \in J$ y por consiguiente $v = 0$.

- (**Suprayectividad:**) Sea $f \in F^{(I)}$, entonces $sop(f) = J$, donde $J \subseteq I$ es un conjunto finito, entonces $f(j) = a_j$, con $a_j \in F$, $a_j \neq 0$, para cada $j \in J$. Así, $f = \sum_{j\in J} a_j \delta_j$. Si elegimos $v = \sum_{j\in J} a_j x_j \in V$, tenemos que $\Phi_\beta(v) = f$.

Por lo tanto, $\Phi_\beta : V \to F^{(I)}$ es un isomorfismo. Además, $\Phi_\beta^{-1} : F^{(I)} \to V$ es tal que $\Phi_\beta^{-1}(\delta_i) = x_i$, para cada $i \in I$.
A partir de lo anterior, estamos en posibilidades de introducir el concepto de representación en coordenadas.

Definición 1.4.11 (Representación en coordenadas). *Sea $_FV$ un espacio vectorial de dimensión κ, (β, I, f) una base ordenada de V y $\Phi_\beta : V \to F^{(I)}$ definida como antes. Para cada $v \in V$, $\Phi_\beta(v)$ se llama la representación en coordenadas de v en la base β, donde si $v = \sum_{j\in J} c_j x_j$, con $J \subseteq I$ finito, $c_j \in F$ y $x_j \in \beta$ es la combinación lineal de v en la base β, entonces:*

$$\Phi_\beta(v)(i) = \begin{cases} c_i & \textit{si } i \in J \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

$\Phi_\beta(v)$ se denota como $[v]_\beta$.

Ejemplo 1.4.10. *Consideremos F un campo y $F[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes en F. Sabemos que $(\beta, \mathbb{N}, f)$ es una base ordenada de $F[x]$, donde $\beta = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y $f : \mathbb{N} \to \beta$ está definida por $f(i) = x^i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Si $p(x) \in F[x]$ es un polinomio de grado n, con n un número natural, consideremos $J = \{0, 1, \ldots, n\}$, entonces $p(x) = \sum_{j \in J} a_j x^j$, donde $a_n \neq 0$. La representación en coordenadas de $p(x)$ en la base β es $[p(x)]_\beta$, donde:*

$$[p(x)]_\beta(i) = \begin{cases} a_i & \textit{si } i \in J \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 1.4.12. *Sea F un campo e I un conjunto no vacío. Definimos la base canónica de $F^{(I)}$ como $\beta = \{\delta_i\}_{i \in I}$, donde $\delta_i(i) = 1$ y $\delta_i(j) = 0$ si $j \neq i$, para cada $i, j \in I$.*

Para que sea más provechosa esta representación que hemos construido, vamos a definir el espacio de las matrices de dimensiones arbitrarias. Considemos conjuntos cualesquiera I, J y F un campo. Como $I \times J$ es un conjunto , por el Ejemplo 1.1.1, se tiene que $F^{I \times J}$ es un espacio vectorial, con las operaciones definidas como $(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$ y $(cA)(i, j) = cA(i, j)$, para cada $A, B \in F^{I \times J}$, $c \in F$, $(i, j) \in I \times J$. Si $A \in F^{I \times J}$, como para cada $(i, j) \in I \times J$, $A(i, j) \in F$, entonces $A(i, j) = a_{ij}$, con $a_{ij} \in F$, para cada $(i, j) \in I \times J$, esto nos permite denotar a A como $A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$, o abusando, siempre que sea claro los conjuntos I y J que se están utilizando, podemos denotar solamente $A = (a_{ij})$.
Si $A \in F^{I \times J}$, entonces para cada $j \in J$, podemos definir la función $A(\ \ , j) : I \to F$, como $A(\ \ , j)(i) = a_{ij}$. Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{M}_{I \times J}(F) = \{A \in F^{I \times J} \mid |sop(A(\ \ , j)| < \infty, \text{ para cada } j \in J\}.$$

Notemos que si $A, B \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ y $c \in F$, para cada $j \in J$, en realidad $A(\ \ , j), B(\ \ , j) \in F^{(I)}$, pero sabemos que $F^{(I)} \leq F^I$, por lo que $A(\ \ , j) + B(\ \ , j) \in F^{(I)}$ y $cA(\ \ , j) \in F^{(I)}$, de esta manera se concluye que $A + B \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ y $cA \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$. Además, es claro que la función $\overline{0} : I \times J \to F$, definida por $\overline{0}(i, j) = 0$, para cada $(i, j) \in I \times J$ satisface que $sop(\overline{0}(\ \ , j))$ es finito, para cada $j \in J$, por lo que $\overline{0} \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}_{I \times J}(F) \leq F^{I \times J}$ y consecuentemente, $\mathcal{M}_{I \times J}(F)$ es un espacio vectorial sobre el campo F. A este conjunto le podemos dar un nombre, lo cual haremos en la siguiente definición.

Definición 1.4.13. *Sean I, J conjuntos y F un campo. El espacio vectorial $\mathcal{M}_{I \times J}(F)$ es llamado **el espacio de las matrices $I \times J$ con coeficientes en F**.*

Definición 1.4.14. *Sean I, J conjuntos, $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$.*

- *Para cada $i \in I$, definimos la i-ésima fila de A como la función $A(i,\ \ ) : J \to F$, dada por $A(i,\ \ )(j) = A(i, j) = a_{ij}$, para cada $j \in J$.*
- *Para cada $j \in J$, definimos la columna j-ésima de A como la función $A(\ \ , j) : I \to F$, dada por $A(\ \ , j)(i) = A(i, j) = a_{ij}$, para cada $i \in I$.*

Es importante mencionar que cuando los conjuntos I y J son finitos, estaríamos hablando de los espacios de matrices finitas ya conocidos. Vamos a definir un producto generalizado de matrices. Consideremos I, J y K conjuntos cualesquiera. Si $A \in \mathcal{M}_{I \times J}(F)$ y $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, proponemos el producto de A con B como $(AB)(i, k) = \sum_{j \in J} A(i, j)B(j, k)$, para cada $i \in I$, $k \in K$. Ahora, para $k \in K$, como $B \in \mathcal{M}_{J \times K}(F)$, entonces $sop(B(\ \ , k)) = J_0$, con $J_0 \subseteq J$ un conjunto finito, notemos que si $j \notin J_0$, entonces $A(i, j)B(j, k) = 0$, por lo que en realidad $(AB)(i, k) = \sum_{j \in J_0} A(i, j)B(j, k)$, para cada $i \in I, k \in K$. De esta manera, la suma anterior es finita. Ahora, si $i \in sop((AB)(\ \ , k)$, entonces $(AB)(i, k) \neq 0$, esto es $\sum_{j \in J_0} A(i, j)B(j, k) \neq 0$, por consiguiente existe $j_0 \in J_0$ tal que $A(i, j_0)B(j_0, k) \neq 0$, pero $B(j_0, k) \neq 0$, ya que $j_0 \in sop(B(\ \ , k))$, así que $A(i, j_0) \neq 0$, esto es, $i \in sop(A(\ \ , j_0))$. De esta manera, $sop((AB)(\ \ , k)) \subseteq \bigcup_{j \in J_0} sop((A(\ \ , j))$, pero $\bigcup_{j\in J_0} sop((A(\ \ ,j))$ es un conjunto finito, pues es la unión finita de conjuntos finitos, lo que nos obliga a que $sop((AB)(\ \ ,k))$ sea finito, esto para cada $k \in K$. De esta manera $AB \in \mathcal{M}_{I\times K}(F)$ y por lo tanto nuestra propuesta tiene sentido.

Notación 1.4.2. *Si $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F), B \in \mathcal{M}_{J\times K}(F)$, denotaremos las evaluaciones del producto $AB \in \mathcal{M}_{I\times K}(F)$ por:*

$$(AB)(i,k) = \sum_{j\in J} A(i,j)B(j,k) = \sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk}$$

para cada $i \in I$, $k \in K$, esto para simplificar la notación, pues ya vimos que esta suma es finita y no nos debe causar problemas.

Definición 1.4.15 (Producto de matrices)**.** *Sea F un campo, I, J, K conjuntos, $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{J\times K}(F)$. Definimos el producto de A con B como la matriz $AB \in \mathcal{M}_{I\times K}(F)$, definida como:*

$$(AB)(i,k) = \sum_{j\in J} A(i,j)B(j,k) = \sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk}$$

para cada $i \in I$, $k \in K$.

Proposición 1.4.4 (Propiedades del producto de matrices)**.** *Sean I, J, K, L conjuntos, $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{J\times K}(F)$, $C \in \mathcal{M}_{J\times K}(F)$, $D \in \mathcal{M}_{K\times L}(F)$ y $\alpha \in F$. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $A(B + C) = AB + AC$.

2) $A(BD) = (AB)D$.

3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

Demostración.

1) Como $B, C \in \mathcal{M}_{J\times K}(F)$, entonces $B + C \in \mathcal{M}_{J\times K}(F)$, en consecuencia $A(B + C) \in \mathcal{M}_{I\times K}(F)$. De igual forma, $AB, AC \in \mathcal{M}_{I\times K}(F)$, por lo que $AB + AC \in \mathcal{M}_{I\times K}(F)$. De aquí concluimos que las matrices de ambos lados están definidas en los mismos conjuntos, ahora veamos que son iguales en cada pareja $(i,k) \in I \times K$, en efecto:

$$\begin{array}{rcl} (A(B+C))(i,j) & = & \sum_{j\in J} A(i,j)(B+C)(j,k) \\ & = & \sum_{j\in J}(a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})) \\ & = & \sum_{j\in J}(a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}) \\ & = & \sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j\in J} a_{ij}c_{jk} \\ & = & (AB)(i,k) + (AC)(i,k) \end{array}$$

esto sucede para cada $i \in I$, $k \in K$, por lo que $A(B + C) = AB + AC$.

2) Como $B \in \mathcal{M}_{J\times K}(F), D \in \mathcal{M}_{K\times L}(F)$, entonces $BD \in \mathcal{M}_{J\times L}(F)$, pero $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$, así que $A(BD) \in \mathcal{M}_{I\times L}(F)$. Por otro lado, como $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F), B \in \mathcal{M}_{J\times K}(F)$, entonces $AB \in \mathcal{M}_{I\times K}(F)$ y como $D \in \mathcal{M}_{K\times L}(F)$, entonces $(AB)D \in \mathcal{M}_{I\times L}(F)$. Así, hemos visto que en ambos lados de la igualdad tenemos matrices definidas en los mismos conjuntos. Ahora, falta ver que son iguales en cada elemento de su dominio, en efecto, sea $i \in I$, $l \in L$, entonces, desarrollando el lado izquierdo de nuestra igualdad tenemos:

$$\begin{array}{rcl} (A(BD))(i,l) & = & \sum_{j\in J} A(i,j)(BD)(j,l) \\ & = & \sum_{j\in J}\left(a_{ij}\left(\sum_{k\in K} b_{jk}c_{kl}\right)\right) \\ & = & \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{ij}b_{jk}c_{kl}. \end{array} \tag{I}$$

Si ahora desarrollamos el lado derecho de la igualdad, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} ((AB)D)(i,l) & = & \sum_{k\in K}(AB)(i,k)D(k,l) \\ & = & \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk}\right) d_{kl} \\ & = & \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} a_{ij}b_{jk}d_{kl} \\ & = & \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{ij}b_{jk}d_{kl}. \end{array} \tag{II}$$

Comparando (I) y (II) tenemos que $(A(BD))(i,l) = ((AB)D)(i,l)$, para cada $i \in I$, $l \in L$. Por lo tanto, $A(BD) = (AB)D$.

3) Veamos que $(\alpha A)B = A(\alpha B)$:

$$\begin{array}{rcl} ((\alpha A)B)(i,k) & = & \sum_{j\in J}(\alpha A)(i,j)B(j,k) \\ & = & \sum_{j\in J} \alpha a_{ij}b_{jk} \\ & = & \sum_{j\in J} a_{ij}(\alpha b_{jk}) \\ & = & \sum_{j\in J} A(i,j)(\alpha B)(j,k) \\ & = & (A(\alpha B))(i,k). \end{array}$$

Como esto sucede para cada $i \in I$, $k \in K$, tenemos que $(\alpha A)B = A(\alpha B)$. De manera similar se muestra que $(\alpha A)B = \alpha(AB)$.

$\square$

Una vez teniendo estas propiedades vamos a relacionar las matrices con transformaciones lineales en espacios de cualquier dimensión.

Observación 1.4.4. *A partir de este momento, vamos a suponer que todas las bases son ordenadas respecto a un conjunto I no vacío. De esta manera, si ${}_FV$ es un espacio vectorial y β es una base de V, podemos denotar $\beta = \{x_i\}_{i\in I}$, con I un conjunto no vacío, donde $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.*

Observación 1.4.5. *Si F es un campo, I es un conjunto no vacío y $h \in F^{(I)}$, entonces podemos considerar a h como una matriz de $I \times 1$, donde $1 = \{0\}$, incluso podemos considerar cualquier conjunto de un solo elemento, así que podemos pensar que $h(i) = h(i,0)$, para cada $i \in I$, de esta manera sop$(h(\ \ ,0))$ es finito y nuestra afirmación es correcta. Para no complicar la notación consideraremos $h(i,0) = h(i)$, para cada $i \in I$.*

Consideremos I, J conjuntos y un campo F. Si $T : F^{(J)} \to F^{(I)}$ es una transformación lineal y $f \in F^{(J)}$, como $\{\delta_j\}_{i\in J}$ es base de $F^{(J)}$, entonces $f = \sum_{j\in J} c_j\delta_j$, recordemos que esta suma es finita, pero se denota sobre toda $j \in J$ para tomar en cuenta los coeficientes cero, que sabemos que son casi todos salvo un número finito de ellos. Luego, $T(f) = T\left(\sum_{j\in J} c_j\delta_j\right) = \sum_{j\in J} c_jT(\delta_j)$. Esto nos motiva a introducir la siguiente definición.

Definición 1.4.16. *Sean I, J conjuntos, F un campo y $T : F^{(J)} \to F^{(I)}$ una transformación lineal. Definimos a la matriz de T como la matriz $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$ tal que para cada $j \in J$, $A(\ \ ,j) = T(\delta_j)$.*

Ahora, la intención es poder definir la representación matricial de una transformación lineal, para esto consideremos ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales, $\beta = \{x_j\}_{j\in J}$ una base ordenada de V, $\gamma = \{y_i\}_{i\in I}$ una base ordenada de W y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_\beta"] & W \arrow[d, "\Phi_\gamma"] \\ F^{(J)} \arrow[r, "\Phi_\gamma T \Phi_\beta^{-1}"] & F^{(I)} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, de esta manera introducimos la siguiente definición.

Definición 1.4.17 (La matriz de una transformación lineal)**.** *Sean $_FV$, $_FW$ espacios vectoriales, $\beta = \{x_j\}_{j\in J}$ una base ordenada de V, $\gamma = \{y_i\}_{i\in I}$ una base ordenada de W y $T : V \to W$ una transformación lineal. La representación matricial de T respecto a las bases β y γ se define como la matriz de $\Phi_\gamma T \Phi_\beta^{-1} : F^{(J)} \to F^{(I)}$ y se denota como $[T]_\beta^\gamma$.*

Observemos que para $j \in J$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (\Phi_\gamma T \Phi_\beta^{-1})(\delta_j) & = & (\Phi_\gamma T)((\Phi_\beta^{-1})(\delta_j)) \\ & = & (\Phi_\gamma T)(x_j) \\ & = & \Phi_\gamma(T(x_j)) \\ & = & [T(x_j)]_\gamma \end{array}$$

De esta manera concluimos que la j-ésima columna de $[T]_\beta^\gamma$ es la representación en coordenadas de $T(x_j)$, para cada $j \in J$, más aún, $[T]_\beta^\gamma(i,j) = [T(x_j)]_\gamma(i)$, para cada $i \in I$, es decir, el i,j-ésimo coeficiente de $[T]_\beta^\gamma$ es la i-ésima coordenada de $[T(x_j)]_\gamma$, esto para cada $i \in I$, $j \in J$.

Teorema 1.4.17. *Sean I, J conjuntos, $_FV$ un espacio vectorial de dimensión $|J|$ y $_FW$ un espacio vectorial de dimensión $|I|$. Entonces $Hom(V,W) \cong \mathcal{M}_{I\times J}(F)$.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 1.2.2, que todo espacio vectorial tiene base, además, por el Teorema 1.2.5, sabemos que todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad lo cual nos garantiza que no hay problema con las bases que consideremos. Consideremos $\beta = \{x_j\}_{j\in J}$ una base ordenada de V y $\gamma = \{y_i\}_{i\in I}$ una base ordenada de W. Definamos:

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & Hom(V,W) & \to & \mathcal{M}_{I\times J}(F) \\ & T & \mapsto & [T]_\beta^\gamma. \end{array}$$

Es claro que Ψ está bien definida.

- **Φ es una transformación lineal:** Sean $T, U \in Hom(V,W)$ y $c \in F$. Debemos mostrar que $\Psi(T + cU) = \Psi(T) + c\Psi(U)$, como $\Psi(T + cU), \Psi(T) + c\Psi(U) \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$, debemos checar la igualdad en cada $(i,j) \in I \times J$. Sea $(i,j) \in I \times J$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \Psi(T + cU)(i,j) & = & [T + cU]_\beta^\gamma(i,j) \\ & = & [(T + cU)(x_j)]_\gamma(i) \\ & = & [T(x_j) + cU(x_j)]_\gamma(i) \\ & = & ([T(x_j)]_\gamma + c[U(x_j)]_\gamma)(i) \\ & = & [T(x_j)]_\gamma(i) + c[U(x_j)]_\gamma(i) \\ & = & [T]_\beta^\gamma(i,j) + c[U]_\beta^\gamma(i,j) \\ & = & \Psi(T)(i,j) + c\Psi(U)(i,j) \end{array}$$

  con lo que concluimos que $\Psi(T + cU) = \Psi(T) + c\Psi(U)$ y así queda establecida la linealidad.

- **Ψ es monomorfismo:** Sea $T \in Ker(\Psi)$, entonces $\Psi(T) = \overline{0}$, donde $\overline{0} : I \times J$ está definida por $\overline{0}(i,j) = 0$, para cada $i \in I$, $j \in J$. Como $\Psi(T) = [T]_\beta^\gamma$, entonces $[T]_\beta^\gamma(i,j) = 0$, para cada $i \in I$, $j \in J$, así para cada $j \in J$, $[T(x_j)]_\gamma(i) = 0$, para cada $i \in T$, de esta manera todos los coeficientes de la combinación lineal de $T(x_j)$ en la base γ son ceros, lo que implica que $T(x_j) = 0$ y esto sucede para cada $j \in J$. Así las cosas tenemos que T se anula en todos los elementos de la base, por el Corolario 1.4.2, se tiene que $T = \overline{0}$ (la transformación lineal cero). Por lo tanto $Ker(\Psi) = \{\overline{0}\}$ y así se concluye que Ψ es monomorfismo.

- **Ψ es epimorfismo:** Sea $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$, luego, para cada $j \in J$, $sop(A(\ \ ,j))$ es finito, esto nos permite definir la función:

$$\begin{array}{rccc} f : & \beta & \to & W \\ & x_j & \mapsto & \sum_{i\in I} A(i,j) y_i \end{array}$$

donde $y_i \in \gamma$, para cada $i \in I$. Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(x_j) = f(x_j) = \sum_{i \in I} A(i,j)y_i$, para cada $j \in J$. De esta manera tenemos que $A = [T]_\beta^\gamma = \Psi(T)$. Así queda demostrada la suprayectividad.

Por lo tanto $\Psi : Hom(V,W) \to \mathcal{M}_{I\times J}(F)$ es un isomorfismo y por tal razón $Hom(V,W) \cong \mathcal{M}_{I\times J}(F)$. □

Observación 1.4.6. *Sean F un campo, I, J conjuntos y $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$. Consideremos $\beta = \{\delta_j\}_{j\in J}$ la base canónica de $F^{(J)}$. Definamos la función:*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \beta & \to & F^{(I)} \\ & \delta_j & \mapsto & A\delta_j. \end{array}$$

Notemos que para cada $i \in I$, $j \in J$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \mu(\delta_j)(i) = (A\delta_j)(i) & = & \sum_{k\in J} A(i,k)\delta_j(k) \\ & = & A(i,j)\delta_j(j) \\ & = & A(i,j) \end{array}$$

de ahí concluimos que $\mu(\delta_j) = A\delta_j = A(\ \ ,j)$, para cada $j \in J$, es decir, $\mu(\delta_j) = A\delta_j$ es la j-ésima columna de A. Aplicando la Propiedad universal de las bases a μ, existe una única transformación lineal $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$ tal que $L_{A|\beta} = \mu$. Sea $h \in F^{(J)}$, deseamos ver quien es explícitamente $L_A(h)$. Como β es base de $F^{(J)}$, entonces $h = \sum_{j\in J} c_j\delta_j$, con $c_j \in F$, para cada $j \in J$, recordemos que esta última suma es finita. Entonces, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} L_A(h) & = & L_A\left(\sum_{j\in J} c_j\delta_j\right) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j L_A(\delta_j) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j \mu(\delta_j) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j (A\delta_j) \\ & = & \sum_{j\in J} A(c_j\delta_j) \\ & = & A\sum_{j\in J} c_j\delta_j \\ & = & Ah. \end{array}$$

Así las cosas, se tiene que $L_A(h) = Ah$, para cada $h \in F^{(J)}$. En pocas palabras, $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$ no hace otra cosa más que multiplicar a h por la izquierda por la matriz A.

Definición 1.4.18. *Sean F un campo, I, J conjuntos, $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$. Definimos como $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$ la transformación lineal que multiplica por A a la izquierda por cada elemento de $F^{(J)}$.*

Observación 1.4.7. *Si F es un campo, I, J conjuntos, $\beta = \{\delta_j\}_{j\in J}$ la base canónica de $F^{(J)}$, $\gamma = \{\delta_i\}_{i\in I}$ la base canónica de $F^{(I)}$ y $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$. Entonces la matriz de $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$ respecto a las bases β y γ es A. En efecto, es suficiente notar las siguientes igualdades para cada $i \in I$, $j \in J$:*

$$\begin{array}{rcl} [L_A]_\beta^\gamma(i,j) & = & [L_A(\delta_j)]_\gamma(i) \\ & = & [A\delta_j]_\gamma(i) \\ & = & [A(\ \ ,j)]_\gamma(i) \\ & = & A(i,j). \end{array}$$

Teorema 1.4.18. *Sean F un campo, I, J conjuntos y $T : F^{(J)} \to F^{(I)}$ una transformación lineal. Entonces existe $A \in \mathcal{M}_{I\times J}$ tal que $T = L_A$.*

Demostración. Consideremos $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$ la matriz de T, la cuál está dada por $A(\ \ ,j) = T(\delta_j)$, para cada $j \in J$. Tomemos $h \in F^{(J)}$, como $\beta = \{\delta_j\}_{j\in J}$ es base de $F^{(J)}$, entonces $h = \sum_{j\in J} c_j\delta_j$, con $c_j \in F$, donde $c_j = 0$ para casi toda $j \in J$. Luego, $T(h) = T\left(\sum_{j\in J} c_j\delta_j\right) = \sum_{j\in J} c_jT(\delta_j) = \sum_{j\in J} c_jA(\ \ ,j) = \sum_{j\in J} c_j(A\delta_j) = A\sum_{j\in J} c_j\delta_j = Ah = L_A(h)$. De esta manera, $T = L_A$, donde A es la matriz de T. $\square$

En palabras lo que dice el teorema anterior es que todas las transformaciones lineales entre dos productos de copias del campo, en realidad son de la forma L_A, para alguna matriz adecuada A.

Teorema 1.4.19. *Sea F un campo, I, J, K conjuntos, $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$ y $B \in \mathcal{M}_{J\times K}$. Consideremos las transformaciones lineales $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$ y $L_B : F^{(K)} \to F^{(J)}$. Entonces $L_AL_B = L_{AB}$.*

Demostración. Consideremos $\beta = \{\delta_k\}_{k\in K}$ la base canónica de $F^{(K)}$. Por un lado, $L_AL_B : F^{(K)} \to F^{(I)}$ es una transformación lineal, pues es composición de transformaciones lineales. Por otro lado, $L_{AB} : F^{(K)} \to F^{(I)}$ es una transformación lineal, ya que $AB \in \mathcal{M}_{I\times K}$. De esta manera, ambas transformaciones lineales tienen el mismo dominio y el mismo contradominio. Por el Corolario 1.4.2, es suficiente ver que ambas coinciden en la base, para esto sea $k \in K$, luego se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(L_AL_B)(\delta_k) &= L_A(L_B(\delta_k)) \\
&= L_A(B\delta_k) \\
&= A(B\delta_k) \\
&= (AB)\delta_k \\
&= L_{AB}(\delta_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $L_AL_B = L_{AB}$. $\square$

Teorema 1.4.20. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales con bases ordenadas $\beta = \{x_j\}_{j\in J}$ y $\gamma = \{y_i\}_{i\in I}$, respectivamente y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & W \arrow[d, "\Phi_\gamma"] \\
F^{(J)} \arrow[r, "L_{[T]^\gamma_\beta}"] & F^{(I)}
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\Phi_\gamma T = L_{[T]^\beta_\beta}\Phi_\beta$.

Demostración. Sea $v \in V$, como β es base de V, entonces $v = \sum_{j\in J} c_jx_j$, donde $c_j \in F$ y $c_j = 0$ para casi toda $j \in J$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\Phi_\gamma T)(v) &= \Phi_\gamma(T(v)) \\
&= \Phi_\gamma\left(T\left(\textstyle\sum_{j\in J} c_jx_j\right)\right) \\
&= \Phi_\gamma\left(\textstyle\sum_{j\in J} c_jT(x_j)\right) \\
&= \textstyle\sum_{j\in J} c_j\Phi_\gamma(T(x_j)) \\
&= \textstyle\sum_{j\in J} c_j[T(x_j)]_\gamma \\
&= \textstyle\sum_{j\in J} c_j[T]^\gamma_\beta(\ \ ,j) \\
&= \textstyle\sum_{j\in J} c_j([T]^\gamma_\beta\delta_j) \\
&= \textstyle\sum_{j\in J}[T]^\gamma_\beta(c_j\delta_j) \\
&= [T]^\gamma_\beta\textstyle\sum_{j\in J} c_j\delta_j \\
&= [T]^\gamma_\beta\textstyle\sum_{j\in J} c_j\delta_j \\
&= [T]^\gamma_\beta[v]_\beta \\
&= (L_{[T]^\gamma_\beta}\Phi_\beta)(v).
\end{aligned}$$

De ahí que $\Phi_\gamma T = L_{[T]^\gamma_\beta}\Phi_\beta$, lo que se buscaba. $\square$

En el siguiente teorema, vamos a encontrar una representación matricial para la composición de transformaciones lineales.

Teorema 1.4.21. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ y ${}_FZ$ espacios vectoriales con bases ordenadas $\beta = \{x_j\}_{j\in J}$, $\gamma = \{y_i\}_{i\in I}$ y $\lambda = \{z_k\}_{k\in K}$, respectivamente. Sean $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ transformaciones lineales, entonces*

$$[ST]_\beta^\lambda = [S]_\gamma^\lambda [T]_\beta^\gamma.$$

Demostración. De acuerdo a nuestras hipótesis y los resultados previos tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & W \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\Phi_\gamma"'] & Z \arrow[d, "\Phi_\lambda"'] \\
F^{(J)} \arrow[r, "L_{[T]_\beta^\gamma}"] & F^{(I)} \arrow[r, "L_{[S]_\gamma^\lambda}"] & F^{(K)}
\end{tikzcd} \tag{I}$$

el cuál podemos extender como

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & W \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\Phi_\gamma"'] & Z \arrow[d, "\Phi_\lambda"'] \\
F^{(J)} \arrow[r, "L_{[T]_\beta^\gamma}"] \arrow[d, "Id"'] & F^{(I)} \arrow[r, "L_{[S]_\gamma^\lambda}"] & F^{(K)} \arrow[d, "Id"'] \\
F^{(J)} \arrow[rr, "L_{[S]_\gamma^\lambda} L_{[T]_\beta^\gamma}"] & & F^{(K)}
\end{tikzcd} \tag{II}$$

Por otro lado, tenemos el diagrama para la composición de T con S de esta manera

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "ST"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & Z \arrow[d, "\Phi_\lambda"] \\
F^{(J)} \arrow[r, "L_{[ST]_\beta^\lambda}"] & F^{(K)}
\end{tikzcd} \tag{III}$$

Comparando los diagramas (II) y (III) y por el Teorema 1.4.19, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
L_{[ST]_\beta^\lambda} &= \Phi_\beta^{-1}(ST)\Phi_\lambda \\
&= L_{[S]_\gamma^\lambda} L_{[T]_\beta^\gamma} \\
&= L_{[S]_\gamma^\lambda [T]_\beta^\gamma}.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $L_{[ST]_\beta^\lambda} = L_{[S]_\gamma^\lambda [T]_\beta^\gamma}$ y de la Observación 1.4.7, se concluye que $[ST]_\beta^\lambda = [S]_\gamma^\lambda [T]_\beta^\gamma$. □

Definición 1.4.19 (La matriz identidad)**.** *Sea I un conjunto no vacío. Definimos la matriz identidad como la matriz $\delta_I \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$, definida como*

$$\delta_I(i,j) = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $i, j \in I$.

Proposición 1.4.5. *Sean F un campo, I, J conjuntos, $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{J\times I}(F)$. Entonces:*

1) $\delta_I A = A$.

2) $B\delta_I = B$.

Demostración.

1) Como $\delta_I \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$ y $A \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$, entonces $\delta_I A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$. Ahora, para cada $i \in I$, $j \in J$, $(\delta_I A) = \sum_{k\in I} \delta_I(i,k)A(k,j) = \delta_I(i,i)A(i,j) = A(i,j)$. Por lo tanto, $\delta_I A = A$.

2) Dado que $B \in \mathcal{M}_{J\times I}(F)$ y $\delta_I \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$, tenemos que $B\delta_I \in \mathcal{M}_{J\times I}(F)$. Falta ver que ambas matrices son iguales en cada pareja $(j,i) \in J\times I$, en efecto, sean $j \in J$, $i \in I$, entonces $(B\delta_I)(j,i) = \sum_{k\in K} B(j,k)\delta_I(k,i) = B(j,i)\delta_I(i,i) = B(j,i)$. De esta manera tenemos lo deseado.

□

Observación 1.4.8. *Sea $_FV$ un espacio vectorial, $\beta = \{x_i\}_{i\in I}$ una base ordenada de V. Entonces $[id_V]_\beta^\beta = \delta_I$. En efecto, sean $i,j \in I$. Entonces $[id_V]_\beta^\beta(i,j) = [x_j]_\beta(i)$. Pero*

$$[x_j]_\beta(i) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

y dado que δ_I está definida de la misma forma para cada $i,j \in I$, tenemos lo deseado.

Ahora, vamos a definir una matriz invertible para dimensiones arbitrarias.

Definición 1.4.20. *Sea F un campo, I, J conjuntos y $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$. Decimos que A es invertible si existe $B \in \mathcal{M}_{J\times I}(F)$ tal que $BA = \delta_J$ y $AB = \delta_I$. En este caso se dice que B es matriz inversa de A.*

Teorema 1.4.22. *Sea F un campo, I, J conjuntos y $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$. Si $B, C \in \mathcal{M}_{J\times I}(F)$ son matrices inversas de A, entonces $B = C$. Además, $|I| = |J|$.*

Demostración. Consideremos la transformación lineal $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$ como en la Definición 1.4.18. Ahora, consideremos las transformaciones lineales $L_B, L_C : F^{(I)} \to F^{(J)}$, también como en la Definición 1.4.18. Notemos que $L_B L_A = L_{BA} = L_{\delta_J} = id_{F^{(J)}}$ y $L_A L_B = L_{AB} = L_{\delta_I} = id_{F^{(I)}}$. De igual forma, $L_C L_A = id_{F^{(J)}}$ y $L_A L_C = id_{F^{(I)}}$. Así, tenemos que $L_B, L_C : F^{(I)} \to F^{(J)}$ son funciones inversas de $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$, pero sabemos que la función inversa cuando existe es única, en consecuencia $L_B = L_C$ con lo que se concluye que $B = C$. Además, $L_A : F^{(J)} \to F^{(I)}$ es una transformación lineal con inversa $L_B : F^{(I)} \to F^{(J)}$, por consiguiente L_A es un isomorfismo y consecuentemente $F^{(J)} \cong F^{(I)}$. Por el Teorema 1.4.15, $|I| = |J|$. □

Notación 1.4.3. *Al ver que cuando existe la matriz inversa es única, si I, J son conjuntos, $A \in \mathcal{M}_{I\times J}(F)$ y $B \in \mathcal{M}_{J\times I}$ es la matriz inversa de A, denotamos $B = A^{-1}$. Además, dada la biyección entre I y J, podemos suponer que si A es invertible, entonces $A \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$, lo cual nos facilita un poco de trabajo.*

Proposición 1.4.6. *Sea F un campo, I un conjunto, $A, B \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1) Si A es invertible, entonces A^{-1} es invertible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

2) Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración.

1) Es inmediato a partir de que $A^{-1}A = \delta_I = AA^{-1}$, pues A actua como inversa de A^{-1} y como la inversa es única se establece lo deseado.

2) Notemos que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\delta_I B = B^{-1}B = \delta_I.$$

De manera que análoga se exhibe que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \delta_I$. Por consiguiente, $B^{-1}A^{-1}$ actua como inversa de AB y por la unicidad de la inversa se concluye que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$\square$

Teorema 1.4.23. *Sea I, J conjuntos, ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales de dimensiones $|J|$ y $|I|$, respectivamente, $\beta = \{x_j\}_{j\in J}$, $\gamma = \{y_i\}_{i\in I}$ bases ordenadas de V y W, respectivamente y $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) T es isomorfismo.

2) $[T]_\beta^\gamma$ es invertible

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que T es isomorfismo y demostremos que $[T]_\beta^\gamma$ es invertible. Como T es isomorfismo, existe $T^{-1} : W \to V$ tal que $T^{-1}T = id_V$ y $TT^{-1} = id_W$. Recordemos que T^{-1} tambien es una transformación lineal, por el Teorema 1.4.17, $[T^{-1}]_\gamma^\beta \in \mathcal{M}_{J\times I}(F)$. Ahora, veamos que $[T^{-1}]_\gamma^\beta$ es la inversa de $[T]_\beta^\gamma$, para esto notemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} [T^{-1}]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma &= [T^{-1}T]_\gamma^\gamma \\ &= [id_W]_\gamma^\gamma \\ &= \delta_J. \end{aligned}$$

De manera análoga se exhibe que $[T]_\beta^\gamma [T^{-1}]_\gamma^\beta = \delta_I$. Así las cosas, tenemos que $[T^{-1}]_\gamma^\beta$ es la inversa de $[T]_\beta^\gamma$ y consecuentemente $[T]_\beta^\gamma$ es invertible.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que $[T]_\beta^\gamma$ es invertible. Luego, existe $B \in \mathcal{M}_{J\times I}(F)$ tal que satisface las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} B\,[T]_\beta^\gamma &= \delta_J \\ [T]_\beta^\gamma\, B &= \delta_I. \end{aligned} \tag{I}$$

Por el Teorema 1.4.17, existe una transformación lineal $S : W \to T$ tal que $B = [S]_\gamma^\beta$, además recordemos que $[id_V]_\beta^\beta = \delta_J$ y que $[id_W]_\gamma^\gamma = \delta_I$, de modo que las igualdades de (I) se convierten en

$$\begin{aligned} [S]_\gamma^\beta\, [T]_\beta^\gamma &= [id_V]_\beta^\beta \\ [T]_\beta^\gamma\, [S]_\gamma^\beta &= [id_W]_\gamma^\gamma \end{aligned} \tag{II}$$

pero $[S]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma = [ST]_\beta^\beta$ y $[T]_\beta^\gamma [S]_\gamma^\beta = [ST]_\gamma^\gamma$, así que sustiyendo en las igualdades de (II), se tiene

$$\begin{aligned} [ST]_\beta^\beta &= [id_V]_\beta^\beta \\ [TS]_\gamma^\gamma &= [id_W]_\gamma^\gamma. \end{aligned} \tag{III}$$

Ahora bien, $\Psi : Hom(V, V) \to \mathcal{M}_{J\times J}(F)$, dado por $\Psi(T) = [T]_\beta^\beta$, para cada $T \in Hom(V, V)$ y $\Psi' : Hom(W, W) \to \mathcal{M}_{I\times I}(F)$, dada por $\Psi'(S) = [S]_\gamma^\gamma$, para cada $S \in Hom(W, W)$ son isomorfismos por el Teorema 1.4.17, por consiguiente ambos tienen inversas. Si aplicamos Ψ^{-1} y Ψ'^{-1} a la primera y segunda igualdad de (III), respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} ST &= id_V \\ TS &= id_W. \end{aligned} \tag{IV}$$

De (IV) se establece que T es isomorfismo, lo que deseábamos demostrar. $\square$

Para finalizar esta parte, vamos a generalizar el concepto de matriz de cambio de base, antes haremos notar una observación.

Observación 1.4.9. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial, $\beta = \{x_i\}_{i\in I}$ y $\beta' = \{y_j\}_{j\in J}$ son bases ordenadas de V, como $V \cong V$, entonces $|I| = |J|$, por consiguiente existe una biyección $g : I \to J$, así que para cada $j \in J$, $y_j = y_{g(i)}$, para un único $i \in I$. De esta manera, tenemos que $\beta' = \{y_{g(i)}\}_{i\in I}$, si para cada $i \in I$ llamamos $y_{g(i)} = x'_i$, entonces $\beta' = \{x'_i\}_{i\in I}$. En palabras, todas las bases de un espacio vectorial se pueden ordenar respecto al mismo conjunto, cambiando únicamente los elementos si es necesario.*

Definición 1.4.21. *Sean F un campo, I un conjunto, $A, B \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$. Decimos que A es semejante a B, lo cual denotamos como $A \sim B$, si existe $Q \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$ invertible tal que $A = Q^{-1}BQ$.*

Proposición 1.4.7. *Sea F un campo e I un conjunto. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{I\times I}(F)$.*

Demostración.

- **(Reflexividad)**: Sea $A \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$. Es claro que δ_I es invertible y $\delta_I^{-1} = \delta_I$. Haciendo $Q = \delta_I$ tenemos que $A = Q^{-1}BQ$.
- **(Simetría)**: Sean $A \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$ y supongamos que $A \sim B$. Luego, existe $Q \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$ invertible tal que $A = Q^{-1}BQ$. Multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por Q a la izquierda y por Q^{-1} a la derecha, tenemos que $B = QAQ^{-1}$. Así, si hacemos $R = Q^{-1}$, tenemos que R es invertible y es tal que $B = R^{-1}AR$, con lo que concluimos que $B \sim A$.
- **(Transitividad)**: Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$. Supongamos que $A \sim B$ y $B \sim C$, luego existen $Q, R \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$ invertibles tales que $A = Q^{-1}BQ$ y $B = R^{-1}CR$. Entonces, tenemos las siguientes igualdades:
$$\begin{aligned} A &= Q^{-1}BQ \\ &= Q^{-1}(R^{-1}CR)Q \\ &= (Q^{-1}R^{-1})C(RQ) \\ &= (RQ)^{-1}C(RQ). \end{aligned}$$
Haciendo $S = RQ$, tenemos que S es invertible y $A = S^{-1}CS$, de ahí que $A \sim C$.

$\square$

Definición 1.4.22. *Sea F un campo, I un conjunto y $A \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)$. Definimos la clase de semejanza de A como*
$$[A]_\sim = \{B \in \mathcal{M}_{I\times I}(F) \mid A \sim B\}.$$
El conjunto de clases de semejanza lo definimos como
$$\mathcal{M}_{I\times I}(F)/\sim = \{[A]_\sim \mid A \in \mathcal{M}_{I\times I}(F)\}.$$
Recordemos que por las propiedades de las relaciones de equivalencia, $\mathcal{M}_{I\times I}(F)/\sim$ es una partición de $\mathcal{M}_{I\times I}(F)$.

Con estos conceptos que hemos introducido estamos en condiciones de definir la matriz de cambio de base.

Definición 1.4.23 (Matriz de cambio de base)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $\beta = \{x_i\}_{i\in I}$ y $\beta' = \{y_i\}_{i\in I}$ bases ordenadas de V. Definimos la matriz de cambio de base de β a β' como $[id_V]_\beta^{\beta'}$, donde $id_V : V \to V$ es la transformación lineal identidad.*

Notemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & V \arrow[d, "\Phi_{\beta'}"] \\ F^{(I)} \arrow[r, "L_{[id_V]_\beta^{\beta'}}"] & F^{(I)} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, con lo que concluimos que lo que hace la matriz de cambio de base es mandar la representación en coordenadas respecto a la base β de cualquier vector a su representación en coordenadas en la base β'.
Notemos que como $id_V = id_V id_V$, por el Teorema 1.4.21, $[id_V]_{\beta'}^{\beta}[id_V]_\beta^{\beta'} = [id_V]_\beta^\beta$ y $[id_V]_\beta^{\beta'}[id_V]_{\beta'}^{\beta} =$

$[id_V]_{\beta'}^{\beta'}$. Como $[id_V]_{\beta'}^{\beta'} = [id_V]_{\beta}^{\beta} = \delta_I$, se concluye que $\left([id_V]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [id_V]_{\beta'}^{\beta}$ y $\left([id_V]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = [id_V]_{\beta}^{\beta'}$. En palabras, la inversa de la matriz de cambio de base de β a β' es la matriz de cambio de base de β' a β y visceversa.
Finalmente, si ${}_FV$, ${}_FW$ son espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, β, β' bases ordenadas de V y γ, γ' bases ordenadas de W, como $T = id_W T id_V$, por el Teorema 1.4.21, tenemos que $[T]_{\beta}^{\gamma} = [id_W]_{\gamma'}^{\gamma}[T]_{\beta'}^{\gamma'}[id_V]_{\beta}^{\beta'}$.
Como caso particular, si $T : V \to V$ es una transformación lineal, β y β' son bases ordenadas de V, aplicando lo anterior tenemos que $[T]_{\beta}^{\beta} = [id_V]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta'}^{\beta'}[id_V]_{\beta}^{\beta'}$. Si hacemos $Q = [id_V]_{\beta}^{\beta'}$, tenemos que $[T]_{\beta}^{\beta} = Q^{-1}[T]_{\beta'}^{\beta'}Q$, por lo que $[T]_{\beta}^{\beta} \sim [T]_{\beta'}^{\beta'}$. Así las cosas, todas las representaciones matriciales de una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo son semejantes pese a que se utilicen bases diferentes.
Con lo que hicimos hemos generalizado los conceptos de matrices y representación en coordenadas para espacios de dimensión arbitraria, en espacios de dimensión finita estos conceptos tienen mucha utilidad para cuestiones de diagonalización y construcción de formas canónicas; estos conceptos son aplicables a otras áreas de las matemáticas como probabilidad, ecuaciones diferenciales, entre otras. Sin embargo, hemos mostrado que por lo menos a nivel teórico esto se puede generalizar a espacios de dimensión arbitraria. Cabe mencionar tales resultados son propiedad del autor, por lo que no se encuentran en la literatura, por lo menos en la que se expone al final de este trabajo y que fue utilizada como apoyo para realizar el mismo. Sería interesante para quiénes nos dedicamos a estas áreas encontrar su utilidad y aplicaciones, principalmente en espacios de dimensión infinita, lo que podemos dejar como una pregunta de investigación a futuro o probablemente ya haya trabajo al respecto y solo nos falte explorarlo más. Por lo pronto nos quedamos con esta pequeña introducción que se ha hecho.

Capítulo 2

Espacio cociente, producto y suma directa generalizados

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar a fondo los espacios cociente, los cuáles serán construidos a través de una relación de equivalencia en un espacio vectorial ${}_FV$ que será inducida vía un subespacio W de V. Precisamente al conjunto de clases de equivalencia de la relación mencionada, la cuál será definida más adelante, lo dotaremos de una suma y un producto por escalar para darle estructura de espacio vectorial sobre el campo F en cuestión; ese nuevo espacio será al que llamaremos espacio cociente y se denotará como V/W. Una vez hecho esto, exploraremos algunas propiedades de este nuevo espacio tales como su dimensión, sus transformaciones lineales de interés, entre otras cosas. También se expondrán tres teoremas importantes de isomorfsmo, así como un teorema de correspondencia, tales teoremas involucran fuertemente al espacio cociente.
Otra cosa que se presentará en este capítulo son los productos y sumas directas de familias de espacios vectoriales; a diferencia del capítulo anterior que presentamos el concepto de suma directa para dos subespacios, aquí se hará para familias generalizadas, incluso dejando abierta la posibilidad de que el conjunto de índices sobre el que están etiquetadas nuestras familias sea infinito. También exploraremos algunas propiedades de estos objetos y principalmente, sus propiedades universales.

2.1. Espacio cociente

2.1.1. Construcción

Definición 2.1.1. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y W un subespacio de V. Definimos la relación de congruencia módulo W en V, denotada por $\equiv_W$, de la siguiente manera: $u \equiv_W v$ si y solo si $u - v \in W$, para cada $u, v \in V$.*

Teorema 2.1.1. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y W un subespacio de V. La relación $\equiv_W$ es una relación de equivalencia en V.*

Demostración.

- **Reflexividad:** Sea $v \in V$. Como $v - v = 0$ y $0 \in W$, dado que $W \leq V$, se tiene que $v - v \in W$, es decir $v \equiv_W v$.
- **Simetría:** Sean $u, v \in V$. Supongamos que $u \equiv_W v$, luego $u - v \in W$, pero $W \leq V$, así que $-(u - v) \in W$, es decir, $v - u \in W$, de ahí que $v \equiv_W u$.
- **Transitividad:** Sean $u, v, z \in V$. Supongamos que $u \equiv_W v$ y $v \equiv_W z$, entonces $u - v \in W$ y $v - z \in W$, al ser $W \leq V$ se tiene que $(u - v) + (v - z) \in W$, esto es $u - z \in W$. De ahí que $u \equiv_W z$.

Por lo tanto, $\equiv_W$ es una relación de equivalencia en V. $\square$

Definición 2.1.2. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, W un subespacio de V y $v \in V$. Definimos la clase de equivalencia de v sobre la relación de equivalencia $\equiv_W$ como:*

$$[v]_{\equiv_W} = \{u \in V \mid u \equiv_W v\}.$$

El conjunto cociente de V bajo la relación de equivalencia $\equiv_W$ se define como:

$$\frac{V}{\equiv_W} = \{[v]_{\equiv_W} \mid v \in V\}.$$

Observación 2.1.1. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial, W es un subespacio de V y $v \in V$, tenemos las siguientes igualdades:*

$$\begin{array}{rcl} [v]_{\equiv_W} & = & \{u \in V \mid u \equiv_W v\} \\ & = & \{u \in V \mid u - v \in W\} \\ & = & \{u \in V \mid u - v = w, w \in W\} \\ & = & \{u \in V \mid u = v + w, w \in W\} \\ & = & \{v + w \mid w \in W\}. \end{array}$$

A partir de lo anterior podemos denotar $[v]_{\equiv_W} = v + W$.
De esta manera, el conjunto conciente de V sobre la relación de equivalencia $\equiv_W$ lo podemos redefinir como:

$$\frac{V}{\equiv_W} = \{v + W \mid v \in V\}$$

por lo que ésta o la definición anterior para el conjunto cociente son correctas y no debe de causar problemas la que se utilice.

Vamos a dotar a $\dfrac{V}{\equiv_W}$ de estructura de espacio vectorial sobre el campo F. Vamos a definir primero una suma en $\dfrac{V}{\equiv_W}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \dfrac{V}{\equiv_W} \times \dfrac{V}{\equiv_W} & \to & \dfrac{V}{\equiv_W} \\ & (u + W, v + W) & \mapsto & (u + v) + W \end{array}$$

vamos a ver que esta suma está bien definida, en efecto, supongamos que $u + W = u' + W$ y que $v + W = v' + W$, entonces tenemos que $u - u' \in W$ y $v - v' \in W$, pero $W \leq V$, así que $(u - u') + (v - v') \in W$, asociando y conmutando los vectores tenemos que $(u + v) - (u' + v') \in W$, esto implica que $(u + v) + W = (u' + v') + W$, es decir, $(u + W) \oplus (v + W) = (u' + W) \oplus (v' + W)$. Por lo tanto, $\oplus$ está bien definida en $\dfrac{V}{\equiv_W}$.
Ahora, introducimos el siguiente producto por escalar:

$$\begin{array}{rccc} \odot : & F \times \dfrac{V}{\equiv_W} & \to & \dfrac{V}{\equiv_W} \\ & (c, u + W) & \mapsto & cu + W \end{array}$$

debemos mostrar que este producto está bien definido; tomemos $c \in F$ y supongamos que $u + W = u' + W$, luego $u - u' \in W$, como $W \leq V$ se tiene que $c(u - u') \in W$, pero $c(u - u') = cu - cu'$, de manera que $cu - cu' \in W$, es decir $cu + W = cu' + W$, así se tiene que $c \odot (u + W) = c \odot (u' + W)$. De esta manera hemos visto que las dos operaciones que introducimos en $\frac{V}{\equiv_W}$ están bien definidas.

Observación 2.1.2. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial y W un subespacio de V, se tienen las siguientes igualdades:*

$$[0]_{\equiv_W} = 0 + W = \{0 + w \mid w \in W\} = \{w \mid w \in W\} = W.$$

Además, si $w \in W$, entonces $w - 0 \in W$, por consiguiente $[w]_{\equiv_W} = w + W = 0 + W = W = [0]_{\equiv_W}$.

Teorema 2.1.2. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y W un subespacio de V. Entonces $\left(\frac{V}{\equiv_W}, \oplus, W, F, \odot : F \times \frac{V}{\equiv_W} \to \frac{V}{\equiv_W}\right)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Veamos primero que $\left(\frac{V}{\equiv_W}, \oplus, W\right)$ es un grupo abeliano:

1) Sean $u + W, v + W, z + W \in \frac{V}{\equiv_W}$, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(u + W) \oplus ((v + W) \oplus (z + W)) &= (u + W) \oplus ((v + z) + W)\\ &= (u + (v + z)) + W\\ &= ((u + v) + z) + W\\ &= ((u + v) + W) \oplus (z + W)\\ &= ((u + W) \oplus (v + W)) \oplus (z + W)\end{aligned}$$

es decir, $(u+W) \oplus ((v+W) \oplus (z+W)) = ((u+W) \oplus (v+W)) \oplus (z+W)$. De esta manera queda establecida la asociatividad.

2) Sean $u + W, v + W \in \frac{V}{\equiv_W}$, luego se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(u + W) \oplus (v + W) &= (u + v) + W\\ &= (v + u) + W\\ &= (v + W) \oplus (u + W)\end{aligned}$$

así, tenemos que $(u + W) \oplus (v + W) = (v + W) \oplus (u + W)$. Por lo tanto, se cumple la conmutatividad.

3) Sea $v + W \in \frac{V}{\equiv_W}$, entonces:

$$\begin{aligned}(v + W) \oplus W &= (v + W) \oplus (0 + W)\\ &= (v + 0) + W\\ &= v + W\end{aligned}$$

es decir, $(v + W) \oplus W = v + W$, en consecuencia se tiene que W es el elemento neutro respecto a $\oplus$.

4) Sea $v + W \in \frac{V}{\equiv_W}$, luego como $v \in V$, entonces $-v \in V$, en consecuencia $-v + W \in \frac{V}{\equiv_W}$. Ahora, observemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(v + W) \oplus (-v + W) &= (v + (-v)) + W\\ &= 0 + W\\ &= W\end{aligned}$$

de ahí que $(v+W) \oplus (-v+W) = W$, con lo que se deduce que $-v+W$ es el inverso aditivo de $v + W$.

De esta manera hemos probado que $\left(\frac{V}{\equiv_W}, \oplus, W\right)$ es un grupo abeliano.
Ahora, vamos a demostrar que $\odot : F \times \frac{V}{\equiv_W} \to \frac{V}{\equiv_W}$ satisface las condiciones para el producto por escalar de la definición de espacio vectorial:

a) Sea $v+W \in \frac{V}{\equiv_W}$, luego, $1 \odot (v+W) = (1 \cdot v)+W = v+W$. Por lo tanto, $1 \odot (v+W) = v+W$.

b) Sean $c, d \in F$, $v + W \in \frac{V}{\equiv_W}$. Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(cd) \odot (v + W) &= ((cd)v) + W \\ &= (c(dv)) + W \\ &= c \odot (dv + W) \\ &= c \odot (d \odot (v + W)).\end{aligned}$$

De ahí se concluye que $(cd) \odot (v + W) = c \odot (d \odot (v + W))$.

c) Sean $c, d \in F$, $v + W \in \frac{V}{\equiv_W}$. Notemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(c + d) \odot (v + W) &= ((c + d)v) + W \\ &= (cv + dv) + W \\ &= (cv + W) \oplus (dv + W) \\ &= (c \odot (v + W)) \oplus (d \odot (v + W)).\end{aligned}$$

Es decir, $(c + d) \odot (v + W) = (c \odot (v + W)) \oplus (d \odot (v + W))$.

d) Sea $c \in F$, $u + W, v + W \in \frac{V}{\equiv_W}$. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}c \odot ((u + W) \oplus (v + W)) &= c \odot ((u + v) + W) \\ &= (c(u + v)) + W \\ &= (cu + cv) + W \\ &= (cu + W) \oplus (cv + W) \\ &= (c \odot (u + W)) \oplus (c \odot (v + W)).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $c \odot ((u + W) \oplus (v + W)) = (c \odot (u + W)) \oplus (c \odot (v + W))$.

Por lo tanto, $\left(\frac{V}{\equiv_W}, \oplus, W, F, \odot : F \times \frac{V}{\equiv_W} \to \frac{V}{\equiv_W}\right)$ es un espacio vectorial. $\square$

Definición 2.1.3 (Espacio cociente)**.** *Sea $_FV$ un espacio vectorial y W un subespacio de V. El espacio vectorial* $\left(\frac{V}{\equiv_W}, \oplus, W, F, \odot : F \times \frac{V}{\equiv_W} \to \frac{V}{\equiv_W}\right)$ *es llamado el* ***espacio vectorial cociente de*** V ***sobre*** W.
A partir de este momento al espacio vectorial cociente de V sobre W lo denotaremos como $\frac{V}{W}$ ó V/W; las operaciones $\oplus$ y $\odot$ serán denotadas con las notaciones usuales para la suma y producto, es decir, $(u + W) \oplus (v + W) = (u + W) + (v + W)$ y $c \odot (v + W) = c \cdot (v + W) = c(v + W)$. Es importante no confundirnos con las notaciones, pues $u + W$ es solamente una notación para la clase $[v]_{\equiv_W}$ por lo realizado en la Observación 2.1.1, por lo que dicho signo más no indica alguna operación como tal.

Ejemplo 2.1.1. *Consideremos un campo F y X un conjunto. Por el Ejemplo 1.1.1 y el Ejemplo 1.1.4 sabemos que F^X es un espacio vectorial y $F^{(X)} \leq F^X$. Entonces:*

$$F^X/F^{(X)} = \{f + F^{(X)} \mid f \in F^X\}.$$

Ahora, tomemos $f \in F^X$. Vamos a ver quien sería $f + F^{(X)}$ para que podamos hacer una interpretación. Si $g \in f + F^{(X)}$, entonces $f - g \in F^{(X)}$, con lo que $|sop(f - g)| < \infty$. Si $f - g = \overline{0}$, entonces $f(x) - g(x) = 0$, para cada $x \in X$, es decir, $f(x) = g(x)$, para cada $x \in X$. Si $f - g \neq \overline{0}$, entonces $sop(f - g) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_j \in X$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos que para $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_j) - g(x_j) \neq 0$, es decir, $f(x_j) \neq g(x_j)$. Ahora, si $y \notin sop(f - g)$, entonces $f(y) - g(y) = 0$, o sea, $f(y) = g(y)$. De esta manera concluimos que en $f + F^{(X)}$ se encuentran todas las funciones que coinciden con f en casi todos los elementos de X, salvo en un número finito de ellos, esto para cada $f \in F^X$.

2.1.2. Dimensión del espacio cociente

Teorema 2.1.3. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $W \leq V$. Entonces:*

$$dim(W) + dim(V/W) = dim(V).$$

Demostración. Sea β una base de W. Como β es l.i en W y $W \subseteq V$, entonces β es l.i en V, por el Teorema 1.2.3, existe una base β' de V tal que $\beta \subseteq \beta'$. Supongamos que $\beta' = \beta \cup \gamma$, donde $\gamma \subseteq V$, $\beta \cap \gamma = \emptyset$ y consideremos $\overline{\gamma} = \{y + W \mid y \in \gamma\}$. Vamos a mostrar que $\overline{\gamma}$ es una base de V/W:

- $\overline{\gamma}$ es l.i en V/W: Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} c_i(y_i + W)$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $y_i + W \in \overline{\gamma}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $\sum_{i=1}^{n}(c_i y_i + W) = W$, en consecuencia, $(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i) + W = W$, así $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \in W$. Como β es base de W, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = \sum_{j=1}^{m} d_j z_j$, para algún $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $d_j \in F$, $z_j \in \beta$, $j \in \{1, \dots, m\}$, pero entonces $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i - \sum_{j=1}^{m} d_j z_j = 0$, como $y_i, z_j \in \beta'$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ y β' es l.i por ser base de V, se tiene que $c_i = 0$, $d_j = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. En particular $c_i = 0$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, $\overline{\gamma}$ es l.i en V/W.

- $\overline{\gamma}$ es un generador de V/W: Sea $v + W \in V/W$, luego $v \in V$, como $\beta' = \beta \cup \gamma$ es base de V, $v = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j$, con $m, n \in \setminus\{0\}$, $c_i, d_j \in F$, $x_i \in \beta$, $y_j \in \gamma$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Así, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} v + W &= \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j\right) + W \\ &= (\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + W) + \left(\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + W\right) \end{aligned} \tag{I}$$

  Pero como $x_i \in W$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y $W \leq V$, entonces $\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + W = W$. Sustituyendo en (I), tenemos:

$$\begin{aligned} v + W &= W + \left(\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + W\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + W \\ &= \sum_{j=1}^{n}(d_j y_j + W) \end{aligned} \tag{II}$$

  como $y_j + W \in \overline{\gamma}$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $v + W \in \langle \overline{\gamma} \rangle$.

Por lo tanto, $\overline{\gamma}$ es base de V/W.
Ahora, vamos a ver que $|\overline{\gamma}| = |\gamma|$, para esto definamos:

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \gamma & \rightarrow & \overline{\gamma} \\ & y & \mapsto & y + W \end{array}$$

es claro que μ es una función suprayectiva. Vamos a ver la inyectividad, sean $y, y' \in \gamma$ y supongamos que $\mu(y) = \mu(y')$, entonces $y + W = y' + W$, así que $y - y' \in W$. Si $y - y' \neq 0$, dado que β es base de W, entonces $y - y' = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_i \in F$, $x_i \in \beta$, $i \in \{1, \dots, n\}$, así $y - y' - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$, en consecuencia $\{y, y', x_1, \dots, x_n\}$ es l.d y como $\{y, y', x_1, \dots, x_n\} \subseteq \beta'$ se tiene que β' es l.d, pero esto es absurdo ya que β' es base de V. Por lo tanto, $y - y' = 0$, esto es, $y = y'$, con lo que se establece la inyectividad de μ. Así, $\mu : \gamma \rightarrow \overline{\gamma}$ es una función biyectiva y por consiguiente $|\gamma| = |\overline{\gamma}|$. De esta manera, tenemos las siguientes igualdades respecto a la dimensión:

$$\begin{aligned} dim(W) + dim(V/W) &= |\beta| + |\overline{\gamma}| \\ &= |\beta| + |\gamma| \\ &= |\beta \cup \gamma| \\ &= |\beta'| \\ &= dim(V). \end{aligned}$$

De ahí que $dim(W) + dim(V/W) = dim(V)$. $\square$

Como se puede ver, el teorema anterior se cumple sin asumir algo respecto a la dimensión del espacio vectorial, sin embargo, vale la pena hacer la precisión de cuando trabajamos con espacios de dimensión finita y cuando trabajamos con espacios de dimensión infinita, esto se hace en la siguiente observación.

Observación 2.1.3. *Sean ${}_F V$ un espacio vectorial y W un subespacio de V. Del Teorema 2.1.3, tenemos que:*

$$dim(W) + dim(V/W) = dim(V). \tag{I}$$

- *Si V es de dimensión finita, entonces $dim(V) = n$, para algún número natural n diferente de cero. Como $W \leq V$, se tiene que $dim(W) \leq dim(V)$, por consiguiente $dim(V) - dim(W) \in \mathbb{N}$, en este caso tiene sentido despejar $dim(V/W)$ de la igualdad (I) y obtenemos la siguiente fórmula para la dimensión del espacio cociente:*

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W).$$

- *Si V es de dimensión infinita, entonces $dim(V) = \kappa$, donde κ es un cardinal infinito. Por el Axioma de elección, podemos asignar cardinales a $dim(W)$ y $dim(V/W)$, de esta manera, $dim(W) = \lambda$, $dim(V/W) = \mu$ con λ y μ cardinales; además $\lambda \leq \kappa$ ya que $W \leq V$. Como $\lambda + \mu = \kappa$, debemos tener que $\lambda = \kappa$ ó $\mu = \kappa$, pues $\kappa = \lambda + \mu = may\{\lambda, \mu\}$ (ver **Apéndice A**). Es decir, $dim(W) = \kappa$ ó $dim(V/W) = \kappa$.*

2.1.3. Teoremas de isomorfismo y aplicaciones

En este apartado, vamos a enunciar y probar tres teoremas de isomorfismo para espacios vectoriales, así como consecuencias de los mismos. Vamos a iniciar introduciendo el epimorfismo natural de un espacio vectorial en su cociente.

Proposición 2.1.1. *Sea ${}_F V$ un espacio vectorial y $W \leq V$. Entonces, la función*

$$\begin{array}{rccc} \pi_W: & V & \to & V/W \\ & v & \mapsto & v + W \end{array}$$

es un epimorfismo, además $Ker(\pi_W) = W$.

Demostración. Es claro que $\pi_W : V \to V/W$ está bien definida. Para mostrar que π_W es lineal, sean $u, v \in V$, $c \in F$. Entonces, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \pi_W(u + cv) & = & (x + cv) + W \\ & = & (u + W) + (cv + W) \\ & = & (u + W) + c(v + W) \\ & = & \pi_W(u) + c\pi_W(v) \end{array}$$

Es decir, $\pi_W(u + cv) = \pi_W(u) + c\pi_W(v)$, esto sucede para cada $u, v \in V$. Por lo tanto, $\pi_W : V \to V/W$ es una transformación lineal.
Si tomamos $v + W \in V/W$, tenemos que $v \in V$ y es tal que $v + W = \pi_W(v)$. De esta manera se tiene que π_W es suprayectiva.
Finalmente, observemos las siguientes igualdades para $Ker(\pi_W)$:

$$\begin{array}{rcl} Ker(\pi_W) & = & \{v \in V \mid \pi_W(v) = W\} \\ & = & \{v \in V \mid v + W = W\} \\ & = & \{v \in V \mid v \in W\} \\ & = & W \end{array}$$

Es decir, $Ker(\pi_W) = W$. □

Definición 2.1.4 (El epimorfismo natural)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $W \leq V$. El epimorfismo $\pi_W : V \to V/W$, definido por $\pi_W(v) = v + W$ para cada $v \in V$, es llamado **el epimorfismo natural de** V **en** V/W.*
Siempre que no haya lugar a confusión con el subespacio en cuestión, se denotará al epimorfismo natural simplemente como $\pi : V \to V/W$.

Teorema 2.1.4 (Teorema de Emmy Noether)**.** *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal y $L \leq V$ tal que $L \leq Ker(T)$. Entonces existe una única transformación lineal $\overline{T} : V/W \to W$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/L \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\overline{T}\pi = T$, donde $\pi : V \to V/L$ es el epimorfismo natural.

Demostración. Como $L \leq V$, sabemos que V/L es un espacio vectorial. Proponemos la función:

$$\begin{array}{rccc} \overline{T}: & V/L & \to & W \\ & v+L & \mapsto & T(v) \end{array}$$

Debemos mostrar que $\overline{T}$ está bien definida, en efecto, supongamos que $v + L = v' + L$, entonces $v - v' \in L$, como $L \leq ker(T)$ tenemos que $v - v' \in Ker(T)$, así $T(v - v') = 0$, por la linealidad de T se tiene que $T(v) - T(v') = 0$, esto es $T(v) = T(v')$, o sea $\overline{T}(v + L) = \overline{T}(v' + L)$. De esta manera, $\overline{T} : V/L \to W$ está bien definida.
Vamos a exhibir que $\overline{T}$ es una transformación lineal, para esto tomemos $u+L, v+L \in V/L$, $c \in F$. Luego, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \overline{T}((u+L)+c(v+L)) &= \overline{T}((u+L)+(cv+L)) \\ &= \overline{T}((u+cv)+L) \\ &= T(u+cv) \\ &= T(u)+cT(v) \\ &= \overline{T}(u+L)+c\overline{T}(v+L). \end{aligned}$$

Es decir, $\overline{T}((u+L)+c(v+L)) = \overline{T}(u+L)+c\overline{T}(v+L)$, lo cual sucede para cada $u+L, v+L \in V/L$ y $c \in F$. De esto se sigue que $\overline{T}$ es una transformación lineal.
Ahora veamos que $\overline{T}\pi = T$. Sea $v \in V$, entonces $(\overline{T}\pi)(v) = \overline{T}(\pi(v)) = \overline{T}(v + L) = T(v)$. Es decir, $(\overline{T}\pi)(v) = T(v)$, esto para cada $v \in V$. Por lo tanto, $\overline{T}\pi = T$.
Finalmente, vamos a mostrar que $\overline{T}$ es única. Supongamos que existe $\overline{U} : V/L \to W$ tal que $\overline{U}\pi = T$. Debemos mostrar que $\overline{T} = \overline{U}$, en efecto, sea $v+L \in V/L$, entonces $\overline{U}(v+L) = \overline{U}(\pi(v)) = (\overline{U}\pi)(v) = T(v) = \overline{T}(v + L)$. Es decir, $\overline{U}(v + L) = \overline{T}(v + L)$, para cada $v + L \in V/L$. Por lo tanto, $\overline{U} = \overline{T}$ y de esta manera queda establecida la unicidad. □

Teorema 2.1.5 (Primer teorema de isomorfismo)**.** *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces $V/Ker(T) \cong Im(T)$.*

Demostración. Sabemos que $Ker(T) \leq V$ y $Ker(T) \leq Ker(T)$. Por el Teorema 2.1.4, existe una única transformación lineal $\overline{T} : V/Ker(T) \to W$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/Ker(T) \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\overline{T}\pi = T$, donde $\pi : V \to V/Ker(T)$ es el epimorfismo natural. Más aún, $\overline{T}$ está definida por $\overline{T}(v + Ker(T)) = T(v)$, para cada $v + Ker(T) \in V/Ker(T)$. Vamos a ver que $\overline{T}$ es monomorfismo, sea $v + Ker(\overline{T}) \in Ker(\overline{T})$, entonces $\overline{T}(v + Ker(T)) = 0$, esto es $T(v) = 0$, de esta manera $v \in Ker(T)$, en consecuencia $v + Ker(T) = Ker(T)$. Así, $Ker(\overline{T}) = \{Ker(T)\}$ y por consiguiente $\overline{T}$ es monomorfismo. Por lo realizado en la demostración de la Proposición 1.4.2, tenemos que:

$$V/Ker(T) \cong Im(\overline{T}). \tag{I}$$

Ahora calculemos $Im(\overline{T})$, para esto observemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} Im(\overline{T}) & = & \{\overline{T}(v + Ker(T)) \mid v + Ker(T) \in V/Ker(T)\} \\ & = & \{\overline{T}(v + Ker(T)) \mid v \in V\} \\ & = & \{T(v) \mid v \in V\} \\ & = & Im(T). \end{array}$$

Es decir, $Im(\overline{T}) = Im(T)$, sustituyendo en la ecuación (I), tenemos que $V/Ker(T) \cong Im(T)$, lo que se buscaba. □

Ahora, vamos a mostrar algunas consecuencias de el teorema anterior.

Corolario 2.1.1. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ un epimorfismo. Entonces $V/Ker(T) \cong W$.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.5, $V/Ker(T) \cong Im(T)$, pero al ser T epimorfismo tenemos que $Im(T) = W$, consecuentemente $V/Ker(T) \cong W$. □

Corolario 2.1.2. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales, $T : V \to W$ una transformación lineal, $U \leq V$ y $Z \leq W$ tal que $T(U) \leq Z$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1) *Existe una única transformación lineal $\overline{T} : V/U \to W/Z$, definida por $\overline{T}(v+U) = T(v)+Z$, para cada $v + U \in V/U$.*

2) *$\overline{T} : V/U \to W/Z$ es un isomorfismo si y solo si $Z + Im(T) = W$ y $T^{-1}(Z) \leq U$.*

3) *Si $T : V \to W$ es un epimorfismo, $T(U) = Z$ y $Ker(T) \leq U$, entonces $\overline{T} : V/U \to W/Z$ es un isomorfismo.*

Demostración.

1) Observemos el siguiente diagrama:

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{\pi_Z} W/Z.$$

Cosideremos la función $\pi_Z T : V \to W/Z$, es claro que π_Z es una transformación lineal, ya que es composición de transformaciones lineales. Calculemos $Ker(\pi_Z T)$:

$$\begin{array}{rcl} Ker(\pi_Z T) & = & \{v \in V \mid (\pi_Z T)(v) = Z\} \\ & = & \{v \in V \mid \pi_Z(T(v)) = Z\} \\ & = & \{v \in V \mid T(v) + Z = Z\} \\ & = & \{v \in V \mid T(v) \in Z\} \\ & = & T^{-1}(Z). \end{array}$$

Es decir, $Ker(\pi_Z T) = T^{-1}(Z)$. Ahora, si $u \in U$, entonces $T(u) \in T(U)$, pero $T(U) \leq Z$, por lo que $T(u) \in Z$, es decir, $u \in T^{-1}(Z) = Ker(\pi_Z T)$. Así, $U \leq Ker(\pi_Z T)$, por el

Teorema 2.1.4, existe una única transformación lineal $\overline{T} : V/U \to W/Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi_Z T"] \arrow[d, "\pi_U"'] & W/Z \\
V/U \arrow[ur, "\overline{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\overline{T}\pi_U = \pi_Z T$. Ahora, veamos como está definida $\overline{T}$, tomemos $v + U \in V/U$, entonces $\overline{T}(v + U) = \overline{T}(\pi_U(v)) = (\overline{T}\pi_U)(v) = (\pi_Z T)(v) = \pi_Z(T(v)) = T(v) + Z$. Es decir, $\overline{T}(v + U) = T(v) + Z$, para cada $v + U \in V/U$.

2) Supongamos que $\overline{T} : V/U \to W/Z$ es isomorfismo. Veamos primero que $Z + Im(T) = W$, es claro que $Z + Im(T) \leq W$. Ahora, si $w \in W$, entonces $w + Z \in W/Z$, como $\overline{T} : V/U \to W/Z$ es suprayectiva, existe $v + U \in V/U$ tal que $w + Z = \overline{T}(v + U) = T(v) + Z$, es decir, $w + Z = T(v) + Z$, así $w - T(v) \in Z$, esto es $w - T(v) = z$ con $z \in Z$, así $w = T(v) + z$, con $T(v) \in Im(T)$, $z \in Z$. De esta manera, $Im(T) + Z = W$.
Sea $v \in T^{-1}(Z)$, entonces $T(v) \in Z$, entonces $\overline{T}(v + U) = T(v) + Z = Z = \overline{T}(U)$, como $\overline{T}$ es inyectiva se tiene que $v + U = U$, es decir, $v \in U$. De esta manera, $T^{-1}(Z) \leq U$.

3) Por 2), es suficiente checar que $Z + Im(T) = W$ y $T^{-1}(Z) \leq W$. Como $T : V \to W$ es suprayectiva, se tiene que $Im(T) = W$, por consiguiente $Z + Im(T) = Z + W = W$, ya que $Z \leq W$.
Ahora veamos que $T^{-1}(Z) \leq U$, en efecto, sea $v \in T^{-1}(Z)$, luego $T(v) \in Z$, así $T(v) + Z = Z = T(U)$, en consecuencia $T(v) \in T(U)$, esto es $T(v) = T(u)$, con $u \in U$, por consiguiente $T(v - u) = 0$. Entonces $v - u \in Ker(T) \leq U$, es decir, $v - u \in U$, entonces $v + U = u + U = U$, o bien, $v \in U$. Por lo tanto $T^{-1}(Z) \leq U$.

□

Una aplicación del Primer teorema de isomorfismo se da en el siguiente corolario, donde se presenta una relación de la dimensión del espacio vectorial dominio de una transformación lineal con las dimensiones del kernel y la imagen de esta última.

Corolario 2.1.3. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:*

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)).$$

Demostración. Sabemos que $Ker(T) \leq V$. Por el Teorema 2.1.3, tenemos que:

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(V/Ker(T)). \tag{I}$$

Por el Teorema 2.1.5, $V/Ker(T) \cong Im(T)$ y por el Teorema 1.4.15, $dim(V/Ker(T)) = dim(Im(T))$. Sustituyendo en (I), tenemos que $dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$. □

Al igual que siempre que hemos expuesto teoremas sobre dimensión, es importante hacer el análisis por separado para espacios de dimensión finita e infinita.

Observación 2.1.4. *Si ${}_FV$,${}_FW$ son espacios vectoriales y $T : V \to W$ es una transformación lineal, por el Corolario 2.1.3, tenemos:*

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)). \tag{I}$$

- *Si V es de dimensión finita, entonces $dim(V) = n$, para algún número natural n diferente de cero(si la dimensión es cero no tendría utilidad el análisis). Como $Ker(T) \leq V$, entonces*

$dim(Ker(T)) \leq dim(V)$, por lo que $dim(V)-dim(Ker(T)) \in \mathbb{N}$. Por esta razón tiene sentido hacer el despeje de (I) para $dim(Im(T))$, obteniendo:

$$dim(Im(T)) = dim(V) - dim(Ker(T)). \tag{II}$$

De (II), deducimos que $dim(Im(T)) \leq dim(V)$, lo que nos permite despejar también de (I) la dimensión del kernel, obteniendo:

$$dim(Ker(T)) = dim(V) - dim(Im(T)). \tag{III}$$

- *Si V es de dimensión infinita, entonces $dim(V) = \kappa$, para algún cardinal infinito κ. Como $\kappa = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$, se debe cumplir que $dim(Ker(T)) = \kappa$ ó $dim(Im(T)) = \kappa$, para que la igualdad tenga sentido(ver **Apéndice A**). Notemos que si $dim(Im(T)) = \kappa$, como $Im(T) \leq W$, entonces $dim(W) \geq \kappa$, por lo que en tal caso W también será de dimensión infinita, por lo menos κ.*

Una aplicación del Corolario 2.1.3, es el siguiente teorema, el cual es válido únicamente para espacios vectoriales de **dimensión finita**.

Teorema 2.1.6. *Sea ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales tales que $dim(V) = dim(W) = n$, donde n es un número natural diferente de cero y $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) T es monomorfismo.

2) T es epimorfismo.

3) T es isomorfismo.

4) $dim(Im(T)) = n$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que T es monomorfismo. Luego, $Ker(T) = \{0\}$, lo que implica que $dim(Ker(T)) = 0$. Por el Corolario 2.1.3, se tiene que $n = dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 0 + dim(Im(T)) = dim(Im(T))$, es decir, $dim(Im(T)) = n$, así $Im(T) \leq W$ y es tal que $dim(Im(T)) = dim(W)$, al ser W de dimensión finita, tenemos que $W = Im(T)$, por lo que T es epimorfismo.
2) $\Rightarrow$ 3): Supongamos que T es epimorfismo. Para ver que T es isomorfismo, falta ver que es monomorfismo. Como T es epimorfismo, entonces $W = Im(T)$, en consecuencia $dim(Im(T)) = dim(W) = n$. Entonces, $dim(Ker(T)) = dim(V) - dim(Im(T)) = n - n = 0$, es decir, $dim(Ker(T)) = 0$, por consiguiente $Ker(T) = \{0\}$. De esta manera, T es monomorfismo y como por hipótesis es epimorfismo, se tiene que T es isomorfismo.
3) $\Rightarrow$ 4): Como T es isomorfismo, entonces $Im(T) = W$, así $dim(Im(T)) = dim(W) = n$.
4) $\Rightarrow$ 1): Como $dim(Im(T)) = n$, por el Corolario 2.1.3, $dim(Ker(T)) = 0$, lo que implica que $Ker(T) = \{0\}$ y en consecuencia T es monomorfismo. $\square$

En el siguiente ejemplo vamos a ver que el terema anterior no es cierto para espacios vectoriales de dimensión infinita.

Ejemplo 2.1.2. *Consideremos el campo de los números reales $\mathbb{R}$ y el espacio de los polinomios $\mathbb{R}[x]$. Consideremos la función*

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

donde f' es la derivada de f. D es una transformación lineal, pues para cada $f, g \in \mathbb{R}[x]$ y $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $D(f + cg) = f' + cg' = D(f) + cD(g)$(por propiedades de la derivada). Recordemos que $\mathbb{R}[x]$ es de dimensión infinita, a saber $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Veamos que D es suparayectiva, en efecto, sea

$f \in \mathbb{R}[x]$. Si $f = \overline{0}$, tomando $g = \overline{0}$ tenemos que $D(g) = f$. Ahora, si $f \neq 0$, entonces $grd(f) = n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, así $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, con $a_j \in \mathbb{R}$, para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$ y $a_n \neq 0$. Si tomamos $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}$ tenemos que $g \in \mathbb{R}[x]$ y es tal que $D(g) = f$. Por lo tanto, D es suprayectiva y por consiguiente epimorfismo. Sin embargo, D no es monomorfismo, pues si tomamos $h(x) = 6$ tenemos que $h \in \mathbb{R}[x]$, $D(h) = \overline{0}$ pero $h \neq \overline{0}$. Así que $h \in Ker(D) \setminus \{0\}$ y en consecuencia $Ker(D) \neq \{0\}$.

Teorema 2.1.7 (Segundo teorema de isomorfismo)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $U, W \leq V$. Entonces:*

$$\frac{U+W}{W} \cong \frac{U}{U \cap W}.$$

Demostración. Es fácil ver que $U \leq U + W$ y $W \leq U + W$. De esta manera, podemos formar el cociente $\frac{U+W}{W}$. Ahora, consideremos el siguiente diagrama:

$$U \hookrightarrow U + W \xrightarrow{\pi} \frac{U+W}{W}$$

donde $\pi : U + W \to \frac{U+W}{W}$ es el epimorfismo natural. Entonces $\pi_{|U} : U \to \frac{U+W}{W}$ es una transformación lineal. Por el Teorema 2.1.5, tenemos:

$$\frac{U}{Ker(\pi_{|U})} \cong Im(\pi_{|U}). \tag{I}$$

Solo falta calcular $Ker(\pi_{|U})$ e $Im(\pi_{|U})$. Vamos a calcular primero el kernel:

$$\begin{array}{rcl} Ker(\pi_{|U}) & = & \{u \in U \mid \pi_{|U}(u) = W\} \\ & = & \{u \in U \mid \pi(u) = W\} \\ & = & \{u \in U \mid u + W = W\} \\ & = & \{u \in U \mid u \in W\} \\ & = & U \cap W. \end{array}$$

Es decir, $Ker(\pi_{|U}) = U \cap W$. Ahora procederemos a calcular $Im(\pi_{|U})$:

$$\begin{array}{rcl} Im(\pi_{|U}) & = & \{\pi_{|U}(u) \mid u \in U\} \\ & = & \{\pi(u) \mid u \in U\} \\ & = & \{u + W \mid u \in U\} \\ & = & \{(u + w) + W \mid u \in U, w \in W\} \\ & = & \frac{U+W}{W}. \end{array}$$

De esta manera, $Im(\pi_{|U}) = \frac{U+W}{W}$. Sustituyendo las igualdades para $Ker(\pi_{|U})$ e $Im(\pi_{|U})$ en la ecuación (I) se sigue que

$$\frac{U}{U \cap W} \cong \frac{U+W}{W}$$

lo que es equivalente a $\frac{U+W}{W} \cong \frac{U}{U \cap W}$, que es lo que pretendiamos. □

Teorema 2.1.8 (Tercer teorema de isomorfismo)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial, $U, W \leq V$ tales que $U \leq W$. Entonces:*

$$\frac{\frac{V}{U}}{\frac{W}{U}} \cong \frac{V}{W}.$$

Demostración. Definamos

$$\begin{array}{rccc} T: & \frac{V}{U} & \to & \frac{V}{W} \\ & v + U & \mapsto & v + W. \end{array}$$

Vamos a ver que T está bien definida. Si $v+U=v'+U$, entonces $v-v'\in U$, pero $U\leq W$, así que $v-v'\in W$, es decir, $v+W=v'+W$, o sea $T(v)=T(v')$. Por lo tanto, T está bien definida. Veamos que T es una transformación lineal, en efecto, sean $v+U, v'+U\in\frac{V}{U}$ y $c\in F$. Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} T((v+U)+c(v'+U)) & = & T((v+U)+(cv'+U)) \\ & = & T((v+cv')+U) \\ & = & (v+cv')+W \\ & = & (v+W)+(cv'+W) \\ & = & (v+W)+c(v'+W) \\ & = & T(v+U)+cT(v'+U) \end{array}$$

con lo cual queda establecida la linealidad. Ahora, si $v+W\in\frac{V}{W}$, tenemos que $v\in V$, como $U\leq V$ se tiene que $v+U\in\frac{V}{U}$ y es tal que $T(v+U)=v+W$. De esta manera tenemos que T es epimorfismo. Aplicando el Corolario 2.1.1, se sigue que

$$\frac{\frac{V}{U}}{Ker(T)}\cong\frac{V}{W}. \tag{I}$$

Ahora, solo calcularemos $Ker(T)$:

$$\begin{array}{rcl} Ker(T) & = & \{v+U\in\frac{V}{U}\mid T(v+U)=W\} \\ & = & \{v+U\in\frac{V}{U}\mid v+W=W\} \\ & = & \{v+U\in\frac{V}{U}\mid v\in W\} \\ & = & \{v+U\in\frac{V}{U}\mid v=w, w\in W\} \\ & = & \{w+U\mid w\in W\} \\ & = & \frac{W}{U}. \end{array}$$

□

De lo anterior, tenemos que $Ker(T)=\frac{W}{U}$. Al sustituir en la ecuación (I) se concluye que

$$\frac{\frac{V}{U}}{\frac{W}{U}}\cong\frac{V}{W}$$

lo que se necesitaba demostrar.

2.1.4. Teorema de correspondencia

En este apartado, vamos a dar un teorema de correspondencia, el cual nos dice que dados dos espacios vectoriales y una transformación lineal entre ellos, hay una correspondencia entre los subespacios del dominio que contienen al kernel y los subespacios del dominio que están contenidos en la imagen. También mostraremos algunas consecuencias de este hecho, por lo mientras recordaremos algunos conceptos que nos serán de utilidad para explorar otras características adicionales que tiene la correspondencia que se comentó.

Definición 2.1.5. *Sea $(A,\leq)$ un COPO. Decimos que A es una retícula si se cumple lo siguiente:*

1) *Para cada $a,b\in A$, existe el supremos del conjunto $\{a,b\}$, el cuál se denota como $a\vee b$, es decir, $a\vee b=\sup\{a,b\}$.*

2) *Para cada $a,b\in A$, existe el ínfimo del conjunto $\{a,b\}$, el cuál se denota como $a\wedge b$, es decir, $a\wedge b=\text{ínf}\{a,b\}$.*

Ejemplo 2.1.3. *Si X es un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una retícula, pues para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \vee B = A \cup B$ y $A \wedge B = A \cap B$.*

Ejemplo 2.1.4. *Si $(A, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado entonces es una retícula.*

Definición 2.1.6. *Sean $(A, \leq)$, $(B, \preceq)$ COPOS y $f : A \to B$ una función. Decimos que f es un morfismo de orden si para cada $a, b \in A$, $a \leq b$ implica $f(a) \preceq f(b)$.*
Cuando f es biyectiva y $f^{-1} : B \to A$ es también un morfismo de orden se dice que f es un isomorfismo de orden. En este caso decimos que $(A, \leq)$ y $(B, \preceq A)$ son isomorfos, lo cual denotamos como $(A, \leq) \cong (B, \preceq)$.

Definición 2.1.7. *Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ retículas. Una función $f : A \to B$ es un morfismo de retículas si para cada $a, b \in A$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.*

Ejemplo 2.1.5. *Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función inyectiva. Consideremos las retículas $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$. Entonces la función $f^* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, definida por $f^*(A) = f(A)$(la imagen directa de A bajo f) es un morfismo de retículas, pues para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$, se tiene que $f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$ y $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$.*

Definición 2.1.8. *Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ retículas y $f : A \to B$ un morfismo de retículas. Decimos que f es isomorfismo de retículas si existe un morfismo de retículas $g : B \to A$ tal que $gf = id_A$ y $fg = id_B$. En este caso se dice que las retículas $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ son isomorfas y lo denotamos como $(A, \leq) \cong (B, \preceq)$, cuando son claras las relaciones de orden en cada retícula se escribe simplemente $A \cong B$.*

Teorema 2.1.9. *Sean $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ retículas y $f : A \to B$ un morfismo de retículas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) f es isomorfismo de retículas.

2) f es biyectiva.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que f es isomorfismo de retículas. Luego, existe un morfismo de retículas $g : B \to A$ tal que $gf = id_A$ y $fg = id_B$. Así tenemos que en particular f tiene función inversa, a saber g y en consecuencia es biyectiva.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que f es biyectiva, luego existe la función inversa $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1}f = id_A$ y $ff^{-1} = id_B$. Solo falta ver que f^{-1} es un isomorfismo de retículas. En efecto, sean $x, y \in B$, como $f : A \to B$ es suprayectiva, existen $a, b \in A$ tales que $x = f(a)$ e $y = f(b)$. Entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x \wedge y) &= f^{-1}(f(a) \wedge f(b)) \\ &= f^{-1}(f(a \wedge b)) \\ &= (f^{-1}f)(a \wedge b) \\ &= a \wedge b \\ &= f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y) \end{aligned}$$

es decir, $f^{-1}(x \wedge y) = f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y)$. De manera análoga se exhibe que $f^{-1}(x \vee y) = f^{-1}(x) \vee f^{-1}(y)$, esto para cada $x, y \in B$. Por lo tanto, f es isomorfismo de retículas. $\square$

Teorema 2.1.10. *Sean $(A, \leq)$, $(B, \preceq)$ retículas y $f : A \to B$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) f es isomorfismo de orden.

2) f es isomorfismo de retículas.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que f es un isomorfismo de orden. Sean $a, b \in A$, luego se tiene que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, como f es morfismo de orden tenemos que $f(a \wedge b) \preceq f(a)$ y $f(a \wedge b) \preceq f(b)$. De esta manera $f(a \wedge b)$ es cota inferior de $\{f(a), f(b)\}$. Ahora, si $s \in B$ es cota inferior de $\{f(a), f(b)\}$, entonces $s \preceq f(a)$ y $s \preceq f(b)$, por ser f suprayectiva existe $x \in A$ tal que $s = f(x)$, así $f(x) \preceq f(a)$ y $f(x) \preceq f(b)$. Dado que $f^{-1} : B \to A$ tambien es morfismo de orden por hipótesis, se sigue que $f^{-1}(f(x)) \leq f^{-1}(f(a))$ y $f^{-1}(f(x)) \leq f^{-1}(f(b))$, lo que implica que $x \leq a$ y $x \leq b$, pero $a \wedge b$ es la mayor cota inferior de $\{a, b\}$, así que $x \leq a \wedge b$, en consecuencia $s = f(x) \preceq f(a \wedge b)$. De lo anterior concluimos que $f(a \wedge b)$ es la mayor cota inferior de $\{f(a), f(b)\}$ y por lo tanto $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Similarmente se muestra que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.
2) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que f es isomorfismo de retículas. Debemos mostrar que f es isomorfismo de orden, primero vamos a ver que f es morfismo de orden, para eso sean $a, b \in A$ y supongamos que $a \leq b$. Como $a \leq a$ y $a \leq b$, entonces $a \leq a \wedge b$, pero por definición $a \wedge b \leq a$, usando la antisimetría de $\leq$, tenemos que $a \wedge b = a$. Por ser f morfismo de retículas, tenemos que $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, pero esto implica que $f(a) \preceq f(b)$. Así las cosas, tenemos que f es morfismo de orden. Ahora bien, por lo realizado en la demostración del Teorema 2.1.9, se tiene que $f^{-1} : B \to A$ es un isomorfismo de retículas; como acabamos de demostrar que un morfismo de retículas es morfismo de orden, se tiene que f^{-1} también es morfismo de orden. $\square$

Definición 2.1.9 (Subretícula). *Sea $(A, \leq)$ una retícula y $B \subseteq A$. Decimos que B es una subretícula de A si para cada $a, b \in A$, se tiene que $a \wedge b \in B$ y $a \vee b \in B$. En este caso, $(B, \leq_{|B \times B})$ es una retícula, donde $\leq_{|B \times B} = \leq \cap (B \times B)$.*

Definición 2.1.10. *Sean $(A, \leq)$ una retícula, $a, b \in A$ con $a \leq b$. Definimos el intervalo $[a, b]$ de la siguiente manera:*

$$[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}.$$

Proposición 2.1.2. *Sean $(A, \leq)$ una retícula, $a, b \in A$ con $a \leq b$. Entonces $[a, b]$ es una subretícula de A.*

Demostración. Sean $x, y \in [a, b]$. Como $[a, b] \subseteq A$, entonces $x, y \in A$, por ser A una retícula se tiene que existen $x \wedge y = \text{ínf}\{x, y\}$ y $x \vee y = \sup\{x, y\}$. Debemos mostrar que $x \wedge y, x \vee y \in [a, b]$. Veamos que $x \wedge y \in [a, b]$. Como $a \leq x$ y $a \leq y$, se tiene que a es una cota inferior para $\{x, y\}$, pero $x \wedge y$ es la mayor cota inferior de $\{x, y\}$, de ahí que $a \leq x \wedge y$. Además, tenemos que $x \wedge y \leq x \leq b$, por transitividad $x \wedge y \leq b$. De esta manera establecemos que $a \leq x \wedge y \leq b$. Análogamente se demuestra que $a \leq x \vee y \leq b$. Por lo tanto, $[a, b]$ es una subretícula de A. $\square$

Hasta aquí hemos expuesto algunos conceptos de retículas, dicho tema corresponde a la **teoría de orden** y es un campo de estudio muy extenso. Sin embargo, únicamente se expusieron los conceptos que consideramos necesarios para aplicarlos en nuestro estudio particular de los espacios vectoriales.

Definición 2.1.11. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial. Definimos el conjunto de subespacios de V como*

$$\mathcal{S}(V) = \{H \in \mathcal{P}(V) \mid H \leq V\}.$$

Teorema 2.1.11. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial. Entonces $(\mathcal{S}(V), \subseteq)$ es una retícula.*

Demostración. Es claro que $(\mathcal{S}(V), \subseteq)$ es un COPO. Falta ver que es retícula. Sean $H, L \in \mathcal{S}(V)$. Sabemos que $H \cap L \leq V$, además $H \cap L \subseteq H$ y $H \cap L \subseteq H$. Ahora, si $T \in \mathcal{S}(V)$ y es tal que $T \subseteq H$ y $T \subseteq L$, fácilmente se sigue que $H \cap L \subseteq T$. De esta manera, $H \wedge L = H \cap L$.
Para ver que existe $\sup\{H, L\} = H \vee L$ en $\mathcal{S}(V)$, recordemos que $H \cup L$ no es un subespacio de V, a menos que $H \subseteq L$ ó $L \subseteq H$. Sin embargo, si consideramos $H + L = \langle H \cup L \rangle$, tenemos que $H \subseteq H + L$, $L \subseteq H + L$ y $H + L \leq V$. De esta manera, $H + L \in \mathcal{S}(V)$ y es cota superior de $\{H, L\}$. Ahora, sea $U \in \mathcal{S}(V)$ que satisface $H \subseteq U$ y $L \subseteq U$. Si $x \in H + L$, entonces $x = h + l$,

con $h \in H, l \in L$, luego $h, l \in U$ y como $U \leq V$ se sigue que $x \in U$. De lo anterior se concluye que $H + L \subseteq U$. Por lo tanto, $H \vee L = H + L$.

$\square$

Antes de establecer el Teorema de correspndencia, vamos a hacer notar algunas cuestiones.

Definición 2.1.12. *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Definimos las funciones*

$$\begin{array}{rccc} T^* : & \mathcal{S}(V) & \to & \mathcal{S}(W) \\ & H & \mapsto & T(H) \end{array}$$

donde $T(H) = \{T(h) \mid h \in H\}$ y

$$\begin{array}{rccc} T_* : & \mathcal{S}(W) & \to & \mathcal{S}(V) \\ & L & \mapsto & T^{-1}(L) \end{array}$$

donde $T^{-1}(L) = \{x \in V \mid T(x) \in L\}$.

En general, las funciones de la definición anterior, una no es inversa de la otra, de hecho, vamos a obtener las igualdades para las composiciones en ambos sentidos, lo cual se hace en el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, para cada $H \in \mathcal{S}(V)$, $(T_*T^*)(H) = H + Ker(T)$ y para cada $L \in \mathcal{S}(W)$, $(T^*T_*)(L) = L \cap Im(T)$.*

Demostración. Sea $H \in \mathcal{S}(V)$. Luego, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (T_*T^*)(H) & = & T_*(T^*(H)) \\ & = & T^{-1}(T(K)) \\ & = & \{x \in V \mid T(x) \in T(H)\} \\ & = & \{x \in V \mid T(x) = T(h), h \in H\} \\ & = & \{x \in V \mid T(x - h) = 0, h \in H\} \\ & = & \{x \in V \mid x - h \in Ker(T), h \in H\} \\ & = & \{x \in V \mid x - h = k, h \in H, k \in Ker(T)\} \\ & = & \{x \in V \mid x = h + k, h \in H, k \in Ker(T)\} \\ & = & \{x \in V \mid x \in H + Ker(T)\} \\ & = & H + Ker(T). \end{array}$$

Es decir, $(T_*T^*)(H) = H + Ker(T)$, para cada $H \in \mathcal{S}(V)$.
Ahora veamos la otra composición, tomemos $L \in \mathcal{S}(W)$, observense las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (T^*T_*)(L) & = & T^*(T_*(L)) \\ & = & T(T^{-1}(L)) \\ & = & \{T(x) \mid x \in T^{-1}(L)\} \\ & = & \{T(x) \mid T(x) \in L\} \\ & = & L \cap Im(T). \end{array}$$

Es decir, $(T^*T_*)(L) = Im(T) \cap L$, para cada $L \in \mathcal{S}(W)$. $\square$

A partir del lema anterior, para $H \in \mathcal{S}(V)$, $(T_*T^*)(H) = H + Ker(T)$, lo que sería igual a H únicamente cuando $Ker(T) \subseteq H$. Ahora, si $L \in \mathcal{S}(W)$, $(T^*T_*)(L) = L \cap Im(T)$, lo cual sería igual a L solamente que $L \subseteq Im(T)$. Lo anterior nos da una pista de como reestringir los dominios de las funciones T^* y T_* para lograr que una sea inversa de la otra.

Definición 2.1.13. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Definimos los intervalos*

$$[Ker(T), V] = \{H \in \mathcal{S}(V) \mid Ker(T) \subseteq H \subseteq V\}$$

y

$$[\{0\}, Im(T)] = \{L \in \mathcal{S}(W) \mid L \subseteq Im(T)\}.$$

Observación 2.1.5. *Por la Proposición 2.1.2, tenemos que $[Ker(T), V]$ es una subretícula de $\mathcal{S}(V)$ y $[\{0\}, Im(T)]$ es una subretícula de $\mathcal{S}(W)$. De esta manera, $[Ker(T), V]$ y $[\{0\}, Im(T)]$ son retículas en sí mismas.*

Con lo que hemos realizado hasta el momento, estamos en perfectas condiciones para enunciar y probar el Teorema de correspondencia.

Teorema 2.1.12 (Teorema de correspondencia)**.** *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces $[Ker(T), V] \cong [\{0\}, Im(T)]$(como retículas).*

Demostración. Por un lado, consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} T^* : & [Ker(T), V] & \to & [\{0\}, Im(T)] \\ & H & \mapsto & T(H) \end{array}$$

donde $T(H) = \{T(x) \mid x \in H\}$. Si $H \in [Ker(T), V]$, entonces $Ker(T) \subseteq H \subseteq V$, por propiedades de la imagen directa, $T(Ker(T)) \subseteq T(H) \subseteq T(V)$, esto es $\{0\} \subseteq T(H) \subseteq Im(T)$, además $T(H) \leq W$, en consecuencia $T(H) \in [\{0\}, Im(T)]$. Por lo tanto, T^* está bien definida. Por otro lado, consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} T_* : & [\{0\}, Im(T)] & \to & [Ker(T), V] \\ & L & \mapsto & T^{-1}(L) \end{array}$$

donde $T^{-1}(L) = \{x \in V \mid T(x) \in L\}$. Sea $L \in [\{0\}, Im(T)]$. Como $\{0\} \subseteq L \subseteq Im(T)$, por propiedades de la imagen inversa tenemos que $T^{-1}(\{0\}) \subseteq T^{-1}(L) \subseteq T^{-1}(Im(T))$, pero esto último equivale a $Ker(T) \subseteq T^{-1}(L) \subseteq V$, además $T^{-1}(L) \leq V$. Por consiguiente, $T^{-1}(L) \in [Ker(T), V]$, de donde se sigue que T_* está bien definida.
Ahora, veamos que T^* y T_* son inversa una de otra. En efecto, sea $H \in [Ker(T), V]$, luego, por el Lema 2.1.1, $(T_*T^*)(H) = H + Ker(T)$, pero $Ker(T) \subseteq H$, en consecuencia $(T_*T^*)(H) = H$.
Ahora, si $L \in [\{0\}, Im(T)]$, por el Lema 2.1.1, $(T^*T_*)(L) = L \cap Im(T)$ y como $L \subseteq Im(T)$, tenemos que $(T^*T_*)(L) = L$. Así las cosas, $T_*T^* = id_{[Ker(T),V]}$ y $T^*T_* = id_{[\{0\},Im(T)]}$, por consiguiente T_* es inversa de T^* y por esta razón, T^* es biyectiva.
Finalmente, para ver que T^* es isomorfismo de retículas, sean $H, J \in [Ker(T), V]$, ya sabemos que $T(H \cap J) \subseteq T(H) \cap T(J)$. Falta ver que $T(H) \cap T(J) \subseteq T(H \cap J)$, en efecto, sea $y \in T(H) \cap T(J)$, luego $y = T(h)$, $y = T(j)$, con $h \in H, j \in J$, entonces $T(h) = T(j)$, lo que equivale a que $T(h - j) = 0$, en consecuencia $h - j \in Ker(T)$. Como $Ker(T) \subseteq H$ y $Ker(T) \subseteq J$, entonces $Ker(T) \subseteq H \cap J$ y por tanto $h - j \in H \cap J$. Luego, $h - j = v$ con $v \in H \cap J$, así $h = j + v$ con $h \in H, j, v \in H \cap J$, por esta razón $h \in H \cap J$. De ahí que $y = T(h)$ con $h \in H \cap J$, lo que implica que $y \in T(H \cap J)$. De lo anterior se sigue que $T^*(H \cap J) = T^*(H) \cap T^*(J)$. Es sencillo ver que $T^*(H + J) = T^*(H) + T^*(J)$. Por lo tanto, $T^* : [Ker(T), V] \to [\{0\}, Im(T)]$ es isomorfismo de retículas, también $T_* : [\{0\}, Im(T)] \to [Ker(T), V]$ es isomorfismo de retículas. Más aún, por el Teorema 2.1.10, tanto T^* como T_* son isomorfismos de orden. $\square$

En palabras, lo que nos dice el teorema anterior es que dada una transformación lineal entre dos espacios vectoriales, hay una correspondencia biyectiva entre los subespacios del dominio que contienen al kernel y los subespacios del contradominio que que están contenidos en la imagen. Vamos a exponer algunas consecuencias del teorema mencionado.

Corolario 2.1.4. *Sean ${}_FV, {}_FW$ espacios vectoriales y $T : V \to W$ un epimorfismo. Entonces $[Ker(T), V] \cong [\{0\}, W]$ (como retículas).*

Demostración. Por el Teorema 2.1.12, $[Ker(T), V] \cong [\{0\}, Im(T)]$, pero como T es epimorfismo por hipótesis, se sigue que $Im(T) = W$, de ahí que $[Ker(T), V] \cong [\{0\}, W]$. $\square$

Corolario 2.1.5. *Sean ${}_FV$ un espacio vectorial y $W \leq V$. Entonces $[W, V] \cong [\{W\}, V/W]$(como retículas). Además, para cada $U, U' \in \mathcal{S}(V)$, se tiene que $W \leq U \leq U' \leq V$ si y solo si $U/W \leq U'/W \leq V/W$. Más aún, si $L \leq V/W$, entonces $L = U/W$ para algún $U \in [W, V]$.*

Demostración. Consideremos el epimorfismo natural $\pi : V \to V/W$, definido por $\pi(v) = v + W$, para cada $v \in V$. Por el Corolario 2.1.4, $[Ker(\pi), V] \cong [\{0_{V/W}\}, V/W]$, pero $Ker(\pi) = W$ y $0_{V/W} = W$, de ahí que $[W, V] \cong [\{W\}, V/W]$. Ahora bien, por lo realizado en la demostración del Teorema 2.1.12, $\pi^* : [W, V] \to [\{W\}, V/W]$, dado por $\pi^*(H) = \pi(H) = H/W$, para cada $H \in [W, V]$ es un isomorfismo de retículas con inversa $\pi_* : [\{W\}, V/W] \to [W, V]$, definida por $\pi_*(L) = \pi^{-1}(L)$, para cada $L \in [\{W\}, V/W]$, el cual también es isomorfismo de retículas. Por el Teorema 2.1.10, tanto π^* como π_* son isomorfismos de orden, de donde se sigue que para cada $U, U' \in [W, V]$, $W \leq U \leq U' \leq V$ si y solo si $U/W \leq U'/W \leq V/W$. Más aún, si $L \leq V/W$, por ser $\pi^* : [W, V] \to [\{W\}, V/W]$ suprayectiva, existe $U \in [W, V]$ tal que $L = \pi^*(U) = \pi(U) = U/W$. Es decir, todos los subespacios de V/W son de la forma U/W, para algún subespacio U de V que contiene a W. $\square$

2.2. Suma y producto directo generalizados

En este apartado vamos a exponer los conceptos de suma y producto directo generalizados así como sus propiedades de interés.

2.2.1. Producto directo

Sea $\{{}_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Definimos el producto cartesiano de $\{{}_FV_i\}_{i\in I}$ como

$$\prod_{i\in I} V_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} V_i \mid f \text{ es función y para cada } i \in I,\ f(i) \in V_i \right\}.$$

Si $f \in \prod_{i\in I} V_i$, entonces $f(i) = v_i$, con $v_i \in V_i$, esto para cada $i \in I$. Además, por ser f función, este $v_i \in V_i$ es único para cada $i \in I$, de modo que podemos denotar a f como el "juego de coordenadas" $(v_i)_{i\in I}$, donde $v_i \in V_i$, para cada $i \in I$, es decir $f = (v_i)_{i\in I}$, lo cual hace nuestra notación más cómoda. De esta manera podemos redefinir al producto cartesiano de nuestra familia como

$$\prod_{i\in I} V_i = \{(v_i)_{i\in I} \mid v_i \in V_i,\ \text{para cada } i \in I\}.$$

Vamos a definir una suma en $\prod_{i\in I} V_i$ como

$$\begin{array}{rccc} + : & \prod_{i\in I} V_i \times \prod_{i\in I} V_i & \to & \prod_{i\in I} V_i \\ & ((v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}) & \mapsto & (v_i + w_i)_{i\in I} \end{array}$$

la cual claramente está bien definida. Conisideremos $\overline{0} = (0_{V_i})_{i\in I}$, donde 0_{V_i} es el neutro aditivo en el espacio V_i, para cada $i \in I$. Es claro que $\overline{0} \in \prod_{i\in I} V_i$. Veamos que $\left(\prod_{i\in I} V_i, +, \overline{0}\right)$ es un grupo abeliano:

1) Sean $(v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, luego se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (v_i)_{i\in I} + ((w_i)_{i\in I} + (u_i)_{i\in I}) &= (v_i)_{i\in I} + (w_i + u_i)_{i\in I} \\ &= (v_i + (w_i + u_i))_{i\in I} \\ &= ((v_i + w_i) + u_i)_{i\in I} \\ &= (v_i + w_i)_{i\in I} + (u_i)_{i\in I} \\ &= ((v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I}) + (u_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Es decir, $(v_i)_{i\in I} + ((w_i)_{i\in I} + (u_i)_{i\in I}) = ((v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I}) + (u_i)_{i\in I}$. De aquí se sigue la asociatividad.

2) Sean $(v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} & = & (v_i + w_i)_{i\in I} \\ & = & (w_i + v_i)_{i\in I} \\ & = & (w_i)_{i\in I} + (v_i)_{i\in I}. \end{array}$$

Es decir, $(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} = (w_i)_{i\in I} + (v_i)_{i\in I}$, con lo que se establece la conmutatividad.

3) Sea $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (v_i)_{i\in I} + (0_{V_i})_{i\in I} & = & (v_i + 0_{V_i})_{i\in I} \\ & = & (v_i)_{i\in I}. \end{array}$$

Así, $(v_i)_{i\in I} + (0_{V_i})_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$ y en consecuencia $\overline{0} = (0_{V_i})_{i\in I}$ es el elemento neutro en $\prod_{i\in I} V_i$.

4) Sea $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Como $v_i \in V_i$ y V_i es un espacio vectorial, para cada $i \in I$, entonces $-v_i \in V_i$, para cada $i \in I$ y por consiguiente $(-v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Ahora, notemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (v_i)_{i\in I} + (-v_i)_{i\in I} & = & (v_i + (-v_i))_{i\in I} \\ & = & (0_{V_i})_{i\in I}. \end{array}$$

Es decir, $(v_i)_{i\in I} + (-v_i)_{i\in I} = (0_{V_i})_{i\in I}$. De esta manera, $(-v_i)_{i\in I}$ es el inverso aditivo de $(v_i)_{i\in I}$, esto para cada $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$.

Así las cosas, hemos probado que $\left(\prod_{i\in I} V_i, +, (0_{V_i})_{i\in I}\right)$ es un grupo abeliano.
Ahora, vamos a definir un producto externo en $\prod_{i\in I} V_i$ como

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & F \times \prod_{i\in I} V_i & \to & \prod_{i\in I} V_i \\ & (c, (v_i)_{i\in I}) & \mapsto & (cv_i)_{i\in I} \end{array}$$

Por simplicidad, siempre que sea claro denotaremos $c(v_i)_{i\in I}$ para referirnos a este producto externo, es decir, $c \cdot (v_i)_{i\in I} = c(v_i)_{i\in I}$, para cada $c \in F$, $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Vamos a ver que este producto externo cumple las condiciones del producto por escalar de la definición de espacio vectorial:

a) Sea $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, luego se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot (v_i)_{i\in I} & = & (1 \cdot v_i)_{i\in I} \\ & = & (v_i)_{i\in I}. \end{array}$$

Es decir, $1 \cdot (v_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$, para cada $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$.

b) Sean $c, d \in F, (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (cd)(v_i)_{i\in I} & = & ((cd)v_i)_{i\in I} \\ & = & (c(dv_i))_{i\in I} \\ & = & c(dv_i)_{i\in I} \\ & = & c(d(v_i)_{i\in I}). \end{array}$$

Es decir, $(cd)(v_i)_{i\in I} = c(d(v_i)_{i\in I})$, para cada $c, d \in F$, $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$.

c) Sean $c, d \in F$, $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Se satisface lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}(c+d)(v_i)_{i\in I} & = & ((c+d)v_i)_{i\in I} \\ & = & (cv_i + dv_i))_{i\in I} \\ & = & (cv_i)_{i\in I} + (dv_i)_{i\in I} \\ & = & c(v_i)_{i\in I} + d(v_i)_{i\in I}.\end{array}$$

Es decir, $(c+d)(v_i)_{i\in I} = c(v_i)_{i\in I} + d(v_i)_{i\in I}$, para cada $c, d \in F$, $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$.

d) Sean $c \in F$, $(v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Luego, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl}c((v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I}) & = & c(v_i + w_i)_{i\in I} \\ & = & (c(v_i + w_i))_{i\in I} \\ & = & (cv_i + cw_i))_{i\in I} \\ & = & (cv_i)_{i\in I} + (cw_i)_{i\in I} \\ & = & c(v_i)_{i\in I} + c(w_i)_{i\in I}.\end{array}$$

Es decir, $c((v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I}) = c(v_i)_{i\in I} + c(w_i)_{i\in I}$, para cada $c \in F$, $(v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$.

Así las cosas, hemos mostrado que $\left(\prod_{i\in I} V_i, +, \overline{0}, F, \cdot : F \times \prod_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} V_i\right)$ es un espacio vectorial. Este espacio vectorial tiene un nombre y lo especificamos en la siguiente definición.

Definición 2.2.1 (Producto directo)**.** *Sea $\{_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Definimos el **producto directo de la familia** $\{_FV_i\}_{i\in I}$ como el espacio vectorial $\left(\prod_{i\in I} V_i, +, \overline{0}, F, \cdot : F \times \prod_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} V_i\right)$, con las operaciones definidas como $(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} = (v_i + w_i)_{i\in I}$ y $c(v_i)_{i\in I} = (cv_i)_{i\in I}$, para cada $c \in F$, $(v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. En lo sucesivo escribiremos $\prod_{i\in I} V_i$ para referirnos al producto directo de $\{_FV_i\}_{i\in I}$ como espacio vectorial.*

Si $\{_FV_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios vectoriales, para cada $j \in I$, definimos de manera natural la función:

$$\begin{array}{rccc}\pi_j : & \prod_{i\in I} V_i & \to & V_j \\ & (v_i)_{i\in I} & \mapsto & v_j.\end{array}$$

Veamos que π_j es una transformación lineal para cada $j \in I$, en efecto, sean $c \in F$, $(v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, luego se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl}\pi_j((v_i)_{i\in I} + c(w_i)_{i\in I}) & = & \pi_j((v_i)_{i\in I} + (cw_i)_{i\in I}) \\ & = & \pi_j((v_i + cw_i)_{i\in I}) \\ & = & v_j + cw_j \\ & = & \pi_j((v_i)_{i\in I}) + c\pi_j((w_i)_{i\in I})\end{array}$$

es decir, $\pi_j((v_i)_{i\in I} + c(w_i)_{i\in I}) = \pi_j((v_i)_{i\in I}) + c\pi_j((w_i)_{i\in I})$, para cada $c \in F$, $(v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Además, si $v \in V_j$, considerando $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$ donde $v_j = v$ y $v_i = 0_{V_i}$ si $i \neq j$, entonces se tiene que $\pi_j((v_i)_{i\in I}) = v$, de ahí que π_j es epimorfismo para cada $j \in I$.

Definición 2.2.2. *Sea $\{_FV_i\}_{i\in I}$ una famlia de espacios vectoriales. Para cada $j \in I$, la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc}\pi_j : & \prod_{i\in I} V_i & \to & V_j \\ & (v_i)_{i\in I} & \mapsto & v_j.\end{array}$$

*se llama la **j-ésima proyección de** $\prod_{i\in I} V_i$ **en** V_j o simplemente la **j-ésima proyección**. $\left\{\pi_i : \prod_{i\in I} V_i \to V_i\right\}_{i\in I}$ es la familia de proyecciones en cada uno de los espacios V_i.*

Observación 2.2.1. *Si $\{_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales y $j \in I$. Entonces*

$$\begin{array}{rcl}Ker(\pi_j) & = & \left\{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \mid \pi_j((v_i)_{i\in I}) = 0_{V_j}\right\} \\ & = & \left\{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \mid v_j = 0_{V_j}\right\}.\end{array}$$

De esta manera concluimos que $Ker(\pi_j)$ está formado por los "juegos de coordenadas" que en la coordenada j-ésima tienen al cero del respectivo V_j. Por el Corolario 2.1.1, $\frac{\prod_{i\in I} V_i}{Ker(\pi_j)} \cong V_j$, para cada $j \in I$, esto es

$$\frac{\prod_{i\in I} V_i}{\left\{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \mid v_j = 0_{V_j}\right\}} \cong V_j$$

para cada $j \in I$.

Ejemplo 2.2.1. *Si F es un campo, ${}_FV$ y ${}_FW$ son espacios vectoriales, entonces $\frac{V\times W}{\{0_V\}\times W} \cong V$ y $\frac{V\times W}{V\times\{0_W\}} \cong W$.*

Teorema 2.2.1 (Propiedad universal del producto directo)**.** *Sea $\{{}_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacio vectoriales. Entonces:*

1) Para cualquier espacio vectorial ${}_FW$ y cualquier familia de transformaciones lineales $\{T_i : W \to V_i\}_{i\in I}$, existe una única transformación lineal $T : W \to \prod_{i\in I} V_i$ tal que $\pi_j T = T_j$, para cada $j \in I$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_j"'] & \prod_{i\in I} V_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ & V_j \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $j \in I$, donde π_j es la j-ésima proyección.

2) Si ${}_FU$ es un espacio vectorial y $\{\tau_i : U \to V_i\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales que satisfacen 1), entonces $U \cong \prod_{i\in I} V_i$.

Demostración.

1) Sea W un espacio vectorial y $\{T_i : W \to V_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales. Definamos

$$\begin{array}{rccl} T: & W & \to & \prod_{i\in I} V_i \\ & w & \mapsto & (T_i(w))_{i\in I}. \end{array}$$

Es claro que T está bien definida. Vamos a ver que es una transformación lineal, para esto tomemos $c \in F$, $w, w' \in W$. Se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} T(w + cw') & = & (T_i(w + cw'))_{i\in I} \\ & = & (T_i(w) + cT_i(w'))_{i\in I} \\ & = & (T_i(w))_{i\in I} + (cT_i(w'))_{i\in I} \\ & = & (T_i(w))_{i\in I} + c(T_i(w'))_{i\in I} \\ & = & T(w) + cT(w'). \end{array}$$

Es decir, $T(w + cw') = T(w) + cT(w')$ para cada $c \in F$, $w, w' \in W$, con lo que queda establecida la linealidad.
Sea $j \in I$. Veamos que $\pi_j T = T_j$, en efecto, sea $w \in W$, notemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (\pi_j T)(w) & = & \pi_j(T(w)) \\ & = & \pi_j((T_i(w))_{i\in I}) \\ & = & T_j(w). \end{array}$$

Así que $(\pi_j T)(w) = T_j(w)$ para cada $w \in W$ y en consecuencia $\pi_j T = T_j$ para cada $j \in I$.
Finalmente, veamos la unicidad de T. Supongamos que existe otra transformación lineal $S : W \to \prod_{i\in I} V_i$ tal que $\pi_j S = T_j$, para cada $j \in I$. Debemos mostrar que $S = T$, en

efecto, sea $w \in W$, luego $S(w) = (v_i)_{i\in I}$ donde $v_i \in V_i$ para cada $i \in I$. Si $i \in I$, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} v_i &= \pi_i((v_i)_{i\in I}) \\ &= \pi_i(S(w)) \\ &= (\pi_i S)(w) \\ &= T_i(w). \end{aligned}$$

Así las cosas, $v_i = T_i(w)$ para cada $i \in I$, por consiguiente $S(w) = (T_i(w))_{i\in I} = T(w)$, lo cual sucede para cada $w \in W$. Por lo tanto, $S = T$ y de esta manera queda probada la unicidad.

2) Supongamos que U es un espacio vectorial y $\{\tau_i : U \to V_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales que satisfacen 1). Luego, existe una única transformación lineal $T : U \to \prod_{i\in I} V_i$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\tau_j"'] & \prod_{i\in I} V_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ & V_j \end{tikzcd} \tag{I}$$

conmuta para cada $j \in I$ y existe una única transformación lineal $S : \prod_{i\in I} V_i \to U$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} V_i \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & U \arrow[d, "\tau_j"] \\ & V_j \end{tikzcd} \tag{II}$$

es conmutativo para cada $j \in I$. De los diagrmas (I) y (II) tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[drr, "\tau_j"'] & \prod_{i\in I} V_i \arrow[r, "S"] & U \arrow[d, "\tau_j"] \\ & & V_j \end{tikzcd} \tag{III}$$

el cual en realidad es

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "ST"] \arrow[dr, "\tau_j"'] & U \arrow[d, "\tau_j"] \\ & V_j \end{tikzcd} \tag{III}$$

que es conmutativo para cada $j \in I$, pero el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "id_U"] \arrow[dr, "\tau_j"'] & U \arrow[d, "\tau_j"] \\ & V_j \end{tikzcd} \tag{IV}$$

tambien es conmutativo para cada $j \in I$. Por la unicidad de la transformación lineal con esta propiedad que se probó en 1), se tiene que $ST = id_U$. De manera completamente análoga se prueba que $TS = id_{\prod_{i\in I} V_i}$, de donde se concluye que $T : U \to \prod_{i\in I} V_i$ es un isomorfismo y consecuentemente $U \cong \prod_{i\in I} V_i$.

□

De acuerdo al teorema anterior tenemos que si $\{_FV_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios vectoriales, entonces el par $\left(\prod_{i\in I} V_i, \{\pi_i : \prod_{i\in I} V_i \to V_i\}_{i\in I}\right)$, donde π_i es la i-ésima proyección para cada $i \in I$, es el producto de la familia $\{_FV_i\}_{i\in I}$ en la categoría $\mathbf{Vec}_F$ (ver Apéndice B), lo que nos dice que el nombre que le dimos a $\prod_{i\in I} V_i$ tiene sentido. Además, vimos que este producto es único salvo isomorfismo, por lo que si hubiera una construcción distinta a la que expusimos no hay diferencia en su estructura algebraica.

Observación 2.2.2. *Sea $\{_FV_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios vectoriales. Dado que $_F\prod_{i\in I} V_i$ es un espacio vectorial, por el Corolario 1.4.4, $\prod_{i\in I} V_i \cong F^{(X)}$, para algún conjunto X. Para ser más específicos, $\prod_{i\in I} V_i \cong F^{(\beta)}$, donde β es la base de $\prod_{i\in I} V_i$, cuya existencia está garantizada por el Teorema 1.2.2. Lo que esto nos dice es que el producto se puede reducir a un coproducto, aunque es posible que dicha base se "agrande" considerablemente.*

Observación 2.2.3. *Un caso especial del producto es cuando se tiene una familia de espacios vectoriales $\{_FV_i\}_{i\in I}$ tal que para cada $i \in I$, $_FV_i = _FV$ para un cierto espacio vectorial $_FV$. En este caso el producto directo de la familia $\{_FV_i\}_{i\in I}$ se denota simplemente por V^I, es decir, $\prod_{i\in I} V_i = \prod_{i\in I} V = V^I$. Un ejemplo conocido de este tipo de producto es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, que es el espacio de las sucesiones de números reales.*

Teorema 2.2.2. *Sean $\{_FV_i\}_{i\in I}$, $\{_FW_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales. Entonces existe una única transformación lineal $T : \prod_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} W_i$ definida por*

$$T((v_i)_{i\in I}) = (T_i(v_i))_{i\in I}$$

para cada $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$.

Demostración. Para cada $j \in I$, tenemos el diagrama

$$\prod_{i\in I} V_i \xrightarrow{\pi_j} V_j \xrightarrow{T_j} W_j$$

donde π_j es la j-ésima proyección de $\prod_{i\in I} V_i$ en V_j. Luego, $T_j\pi_j : \prod_{i\in I} V_i \to V_j$ es una transformación lineal, ya que es composición de transformaciones lineales, esto para cada $j \in I$. Así, $\{T_i\pi_i : \prod_{i\in I} V_i \to W_i\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales. Por la Propiedad universal del producto directo, existe una única transformación lineal $T : \prod_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} W_i$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} V_i \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_j\pi_j"'] & \prod_{i\in I} W_i \arrow[d, "\pi'_j"] \\
& W_j
\end{tikzcd}$$

para cada $j \in I$, es decir, $\pi'_jT = T_j\pi_j$, donde $\pi'_j : \prod_{i\in I} W_i \to W_j$ es la j-ésima proyección de $\prod_{i\in I} W_i$ en W_j, todo esto para cada $j \in I$. Solo resta ver como está definida T, tomemos $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, luego $T((v_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} W_i$, en consecuencia $T((v_i)_{i\in I}) = (w_i)_{i\in I}$, con $w_i \in W_i$ para cada $i \in I$. Ahora, para cada $k \in I$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
w_k &= \pi'_k((w_i)_{i\in I}) \\
&= \pi'_k(T((v_i)_{i\in I})) \\
&= (\pi'_kT)((v_i)_{i\in I}) \\
&= (T_k\pi_k)((v_i)_{i\in I}) \\
&= T_k(\pi_k((v_i)_{i\in I})) \\
&= T_k(v_k)
\end{aligned}$$

es decir, $w_k = T_k(v_k)$. De esta manera se concluye que $T((v_i)_{i\in I}) = (T_i(v_i))_{i\in I}$, lo que sucede para cada $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. $\square$

Definición 2.2.3. *Sean $\{_FV_i\}_{i\in I}$, $\{_FW_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales. Definimos el* ***producto directo de la familia*** *$\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$, denotado por $\prod_{i\in I} T_i$, como la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \prod_{i\in I} T_i: & \prod_{i\in I} V_i & \to & \prod_{i\in I} W_i \\ & (v_i)_{i\in I} & \mapsto & (T_i(v_i))_{i\in I}. \end{array}$$

Teorema 2.2.3. *Sean $\{_FV_i\}_{i\in I}$, $\{_FW_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales. Entonces:*

1) $Ker\left(\prod_{i\in I} T_i\right) = \prod_{i\in I} Ker(T_i)$.

2) $Im\left(\prod_{i\in I} T_i\right) = \prod_{i\in I} Im(T_i)$.

Demostración. Para aligerar un poco la notación, denotaremos $T = \prod_{i\in I} T_i$.

1) Vamos a mostrar que $Ker(T) = \prod_{i\in I} Ker(T_i)$:
$\subseteq$]: Sea $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, entonces $T((v_i)_{i\in I}) = (0_{W_i})_{i\in I}$, esto es $(T_i(v_i))_{i\in I} = (0_{W_i})$, luego $T_i(v_i) = 0_{W_i}$ para cada $i \in I$, lo cual implica que $v_i \in Ker(T_i)$ para cada $i \in I$. Así concluimos que $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Ker(T_i)$.
$\supseteq$]: Sea $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Ker(T_i)$, entonces $v_i \in Ker(T_i)$ para cada $i \in I$. Luego, $T_i(v_i) = 0_{W_i}$ para cada $i \in I$. Entonces $(T_i(v_i))_{i\in I} = (0_{W_i})_{i\in I}$, pero $(T_i(v_i))_{i\in I} = T((v_i)_{i\in I})$, de donde obtenemos que $T((v_i)_{i\in I}) = (0_{W_i})_{i\in I}$. Por lo tanto, $(v_i)_{i\in I} \in Ker(T)$.

2) Vamos a demostrar que $Im(T) = \prod_{i\in I} Im(T_i)$:
$\subseteq$]: Sea $(w_i)_{i\in I} \in Im(T)$, entonces $(w_i)_{i\in I} = T((v_i)_{i\in I})$, para algún $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$. Luego, $(w_i)_{i\in I} = (T_i(v_i))_{i\in I}$, esto equivale a que $w_i = T_i(v_i)$ para cada $i \in I$, donde $v_i \in V_i$. Por consiguiente, $w_i \in Im(T_i)$ para cada $i \in I$, esto es $(w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Im(T_i)$.
$\supseteq$]: Sea $(w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$, entonces $w_i \in Im(T_i)$ para cada $i \in I$. Luego, $w_i = T_i(v_i)$, con $v_i \in V_i$ para cada $i \in I$. Así las cosas tenemos que $(w_i)_{i\in I} = (T_i(v_i))_{i\in I} = T((v_i)_{i\in I})$. De esta manera tenemos que $(w_i)_{i\in I} = T((v_i)_{i\in I})$, donde $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$, en consecuencia $(w_i)_{i\in I} \in Im(T)$.

□

Corolario 2.2.1. *Sean $\{_FV_i\}_{i\in I}$, $\{_FW_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales. Entonces:*

1) $\prod_{i\in I} T_i$ es monomorfismo, si y solo si, T_i es monomorfismo para cada $i \in I$.

2) $\prod_{i\in I} T_i$ es epimorfismo, si y solo si, T_i es epimorfismo para cada $i \in I$.

3) $\prod_{i\in I} T_i$ es isomorfismo, si y solo si, T_i es isomorfismo para cada $i \in I$.

Demostración.

1) Para la primera implicación, supongamos que $\prod_{i\in I} T_i$ es monomorfismo, entonces $Ker\left(\prod_{i\in I} T_i\right) = \{(0_{V_i})_{i\in I}\} = \prod_{i\in I}\{0_{V_i}\}$. Por el Teorema 2.2.3, $\prod_{i\in I} Ker(T_i) = \prod_{i\in I}\{0_{V_i}\}$. Sea $i \in I$, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Ker(T_i) &= \pi_i\left(\prod_{i\in I} Ker(T_i)\right) \\ &= \pi_i\left(\prod_{i\in I}\{0_{V_i}\}\right) \\ &= \{0_{V_i}\}. \end{aligned}$$

Es decir, $Ker(T_i) = \{0_{V_i}\}$ para cada $i \in I$, lo que significa que T_i es monomorfismo para cada $i \in I$.

Ahora, si T_i es monomorfismo para cada $i \in I$, entonces $Ker(T_i) = \{0_{V_i}\}$, para cada $i \in I$. Por el Teorema 2.2.3, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} Ker\left(\prod_{i\in I} T_i\right) & = & \prod_{i\in i} Ker(T_i) \\ & = & \prod_{i\in i}\{0_{V_i}\} \\ & = & \{(0_{V_i})_{i\in I}\}. \end{array}$$

Es decir, $Ker\left(\prod_{i\in I} T_i\right) = \{(0_{V_i})_{i\in I}\}$. Por lo tanto, $\prod_{i\in I} T_i$ es monomorfismo.

2) Primero supongamos que $\prod_{i\in I} T_i$ es epimorfismo y demostremos que T_i es epimorfismo para cada $i \in I$. Como $\prod_{i\in I} T_i$ es epimorfismo, $Im\left(\prod_{i\in I} T_i\right) = \prod_{i\in I} W_i$, pero por el Teorema 2.2.3, $Im\left(\prod_{i\in I} T_i\right) = \prod_{i\in I} Im(T_i)$, de modo que para cada $i \in I$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} Im(T_i) & = & \pi_i\left(\prod_{i\in I} Im(T_i)\right) \\ & = & \pi_i\left(\prod_{i\in I} W_i\right) \\ & = & W_i. \end{array}$$

Es decir, $Im(T_i) = W_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, T_i es epimorfismo para cada $i \in I$. Ahora, supongamos que T_i es epimorfismo para cada $i \in I$. Luego, $Im(T_i) = W_i$ para cada $i \in I$. Entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} Im\left(\prod_{i\in I} T_i\right) & = & \prod_{i\in I} Im(T_i) \\ & = & \prod_{i\in I} W_i. \end{array}$$

Es decir, $Im\left(\prod_{i\in I} T_i\right) = \prod_{i\in I} W_i$ y en consecuencia $\prod_{i\in I} T_i$ es epimorfismo.

3) Inmediato a partir de 1) y 2).

□

Ejemplo 2.2.2. *Sea $\{_F V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Por el Teorema 1.2.2, para cada $i \in I$ existe $\beta_i \subseteq V_i$ tal que β_i es base de V_i, luego $V_i \cong F^{(\beta_i)}$ para cada $i \in I$. Haciendo uso del Corolario 2.2.1, se tiene que $\prod_{i\in I} V_i \cong \prod_{i\in I} F^{(\beta_i)}$.*

Ejemplo 2.2.3. *Sean F un campo, $\{_F V_i\}$ y $\{_F W_j\}_{j\in I}$ familias de espacios vectoriales tales que $dim(V_i) = n_i$ para cada $i \in I$ y $dim(W_j) = m_j$ para cada $j \in J$, donde $n_i, m_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Luego $\{_F Hom(V_i, W_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ es una familia de espacios vectoriales tales que $Hom(V_i, W_j) \cong \mathcal{M}_{m_j\times n_i}(F)$ para cada $(i, j) \in I \times J$. Aplicando el Corolario 2.2.1, se tiene que $\prod_{(i,j)\in I\times J} Hom(V_i, W_j) \cong \prod_{(i,j)\in I\times J} \mathcal{M}_{m_j\times n_i}(F)$.*

Corolario 2.2.2. *Sean $\{_F V_i\}_{i\in I}$ y $\{_F W_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales tales que $W_i \leq V_i$ para cada $i \in I$. Entonces*

$$\prod_{i\in I} W_i \leq \prod_{i\in I} V_i$$

y

$$\frac{\prod_{i\in I} V_i}{\prod_{i\in I} W_i} \cong \prod_{i\in I} \frac{V_i}{W_i}.$$

Demostración. Como para cada $i \in I$, $W_i \leq V_i$, existe $\frac{V_i}{W_i}$, para cada $i \in I$. De esta manera, para cada $i \in I$ podemos considerar el epimorfismo natural

$$\begin{array}{rccc} \pi_{V_i}^{V_i/W_i}: & V_i & \to & \frac{V_i}{W_i} \\ & v_i & \mapsto & v_i + W_i. \end{array}$$

Por el Corolario 2.2.1, la función $\prod_{i\in I}\pi_{V_i}^{V_i/W_i}:\prod_{i\in I}V_i\to\prod_{i\in I}\frac{V_i}{W_i}$ es un epimorfismo, además, como $Ker(\pi_{V_i}^{V_i/W_i})=W_i$ para cada $i\in I$, por el Teorema 2.2.3, $Ker\left(\prod_{i\in I}\pi_{V_i}^{V_i/W_i}\right)=\prod_{i\in I}W_i$. De esta manera, $\prod_{i\in I}W_i\leq\prod_{i\in I}V_i$ y aplicando el Corolario 2.1.1, tenemos que

$$\frac{\prod_{i\in I}V_i}{\prod_{i\in I}W_i}\cong\prod_{i\in I}\frac{V_i}{W_i}.$$

□

2.2.2. Suma directa

Suma directa externa

Definición 2.2.4. *Sea $\{_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales y $f\in\prod_{i\in I}V_i$. Definimos el soporte de f como*

$$sop(f)=\{i\in I\mid f(i)\neq 0_{V_i}\}.$$

Si consideramos a f como el juego de cordenadas $(v_i)_{i\in I}$, donde $v_i\in V_i$ para cada $i\in I$, definiremos el soporte de $f=(v_i)_{i\in I}$ como

$$sop(f)=sop((v_i)_{i\in I})=\{i\in I\mid v_i\neq 0_{V_i}\}.$$

Es importante mencionar que por lo que se realizó anteriormente ambas definiciones son correctas por lo que se utilizará una u otra según convenga, lo cual no debe causar problema.

Dada una familia de espacios vectoriales $\{_FV_i\}_{i\in I}$, consideremos el conjunto

$$\coprod_{i\in I}V_i=\{f\in\prod_{i\in I}V_i\mid |sop(f)|<\infty\}.$$

Es claro que $\coprod_{i\in I}V_i\subseteq\prod_{i\in I}V_i$. Veamos ahora que $\coprod_{i\in I}V_i\leq\prod_{i\in I}V_i$:

a) Sean $f,g\in\coprod_{i\in I}V_i$. Luego, $sop(f)$ y $sop(g)$ son finitos. Veamos que $sop(f+g)\subseteq sop(f)\cup sop(g)$: sea $i\in sop(f+g)$, entonces $f(i)+g(i)\neq 0_{V_i}$, en consecuencia $f(i)\neq 0_{V_i}$ ó $g(i)\neq 0_{V_i}$, esto es $i\in sop(f)$ ó $i\in sop(g)$. Por la definición de unión de conjuntos, tenemos que $i\in sop(f)\cup sop(g)$.
Dado que $sop(f+g)\subseteq sop(f)\cup sop(g)$ y $sop(f)\cup sop(g)$ es un conjunto finito, ya que es unión de conjuntos finitos, concluimos que $sop(f+g)$ es un conjunto finito. Por lo tanto, $f+g\in\coprod_{i\in I}V_i$.

b) Recordemos que $\overline{0}=(0_{V_i})_{i\in I}$ es el elemento neutro en $\prod_{i\in I}V_i$. Ahora, como $sop(\overline{0})=\emptyset$, se concluye que $sop(\overline{0}\}$ es finito, en consecuencia $\overline{0}\in\coprod_{i\in I}V_i$.

c) Sean $c\in F$ y $f\in\coprod_{i\in I}V_i$. Luego, $sop(f)$ es finito. Si $c=0$, entonces $cf=\overline{0}$, por consiguiente $sop(cf)=\emptyset$ y de esta manera $cf\in\coprod_{i\in I}V_i$. Es fácil ver que si $c\neq 0$, entonces $sop(cf)=sop(f)$. Así, de cualquier manera $sop(cf)$ es finito y por lo tanto, $cf\in\coprod_{i\in I}V_i$.

De lo anterior establecemos que $\coprod_{i\in I}V_i\leq\prod_{i\in I}V_i$ y consecuentemente $\coprod_{i\in I}V_i$ es un espacio vectorial sobre F.

Definición 2.2.5 (Suma directa externa)**.** *Sea $\{_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. El espacio vectorial $_F\coprod_{i\in I}V_i$ es llamado* ***la suma directa externa de la familia*** *$\{_FV_i\}_{i\in I}$.*

Observación 2.2.4. *Sea $\{_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Si I es un conjunto finito, entonces $\prod_{i\in I}V_i=\coprod_{i\in I}V_i$.*

Demostración. Ya sabemos que $\coprod_{i\in I} V_i \leq \prod_{i\in I} V_i$ siempre. Falta ver que $\prod_{i\in I} V_i \leq \coprod_{i\in I} V_i$, en efecto, si $f \in \prod_{i\in I} V_i$, entonces $sop(f) \subseteq I$ y como I es finito, esto nos obliga que $sop(f)$ sea finito, en consecuencia $f \in \coprod_{i\in I} V_i$. De esta manera se tiene que $\prod_{i\in I} V_i \leq \coprod_{i\in I} V_i$ y de ambas contenciones tenemos que $\prod_{i\in I} V_i = \coprod_{i\in I} V_i$. $\square$

Si tenemos una familia de espacios vectoriales $\{_F V_i\}_{i\in I}$, para $j \in I$ definimos de manera natural la función

$$\begin{array}{rccc} \iota_j : & V_j & \to & \coprod_{i\in I} V_i \\ & v & \mapsto & f_v \end{array}$$

donde $f_v : I \to \bigcup_{i\in I} V_i$ se define como $f_v(j) = v$ y $f_v(i) = 0_{V_i}$ si $i \neq j$. Veamos que ι_j es una transformación lineal, para eso tomemos $c \in F$, $v, v' \in V_j$. Es suficiente ver que $f_{v+cv'} = f_v + cf_{v'}$, en efecto, si $i \neq j$, dado que $v + cv' \in V_j$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} f_{v+cv'}(i) & = & 0_{V_i} \\ & = & 0_{V_i} + 0_{V_i} \\ & = & 0_{V_i} + c0_{V_i} \\ & = & f_v(i) + cf_{v'}(i) \\ & = & (f_v + cf_{v'})(i) \end{array}$$

Es decir, $f_{v+cv'}(i) = (f_v + cf_{v'})(i)$ cuando $i \neq j$. Ahora, para j se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} f_{v+cv'}(j) & = & v + cv' \\ & = & f_v(j) + cf_{v'}(j) \\ & = & (f_v + cf_{v'})(j). \end{array}$$

Es decir, $f_{v+cv'}(j) = (f_v + cf_{v'})(j)$. Como hemos visto que las funciones coinciden en cada $i \in I$, se tiene que $f_{v+cv'} = f_v + cf_{v'}$, esto es $\iota_j(v + cv') = \iota_j(v) + c\iota_j(v')$, lo cual sucede para cada $c \in F$, $v, v' \in V_j$. Por lo tanto, ι_j es una transformación lineal para cada $j \in I$.
Veamos que ι_j es monomorfismo, en efecto, si $v \in Ker(\iota_j)$, entonces $\iota_j(v) = (0_{V_i})_{i\in I}$, de aquí concluimos que $v = 0_{V_j}$. De esta manera, tenemos que $Ker(\iota_j) = \{0_{V_j}\}$. Por lo tanto, ι_j es monomorfismo para cada $j \in I$.

Definición 2.2.6. *Sea $\{_F V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Para cada $j \in I$, la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \iota_j : & V_j & \to & \coprod_{i\in I} V_i \\ & v & \mapsto & f_v \end{array}$$

*donde $f_v : I \to \bigcup_{i\in I} V_i$ se define como $f_v(j) = v$ y $f_v(i) = 0_{V_i}$, si $i \neq j$, es llamado **la j-ésima inclusión de V_j en $\coprod_{i\in I} V_i$ o simplemente la j-ésima inclusión**. $\{\iota_i : V_i \to \coprod_{i\in I} V_i\}_{i\in I}$ es la familia de inclusiones de cada V_i en $\coprod_{i\in I} V_i$.*

Observación 2.2.5. *Si $\{_F V_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios vectoriales y $j \in I$, dado que $\iota_j : V_j \to \coprod_{i\in I} V_i$ es monomorfismo, tenemos que $V_j \cong \iota_j(V_j)$, donde*

$$\iota_j(V_j) = \{(a_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} V_i \mid a_i = 0_{V_i} \text{ si } i \neq j\}$$

esto para cada $j \in I$. Denotaremos $\iota_j(V_j) = \overline{V_j}$ para cada $j \in I$. Reescribiendo lo anterior, tenemos que $V_j \cong \overline{V_j}$ para cada $j \in I$.

Ejemplo 2.2.4. *Sabemos que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo. Entonces $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\}$ y $\mathbb{R} \cong \{0\} \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}$ se consideran como subespacios de $\mathbb{R}^2$.*

Observación 2.2.6. *Un caso especial de la suma directa externa es cuando tenemos una familia de espacios vectoriales $\{_F V_i\}_{i\in I}$ tal que para cada $i \in I$, $_F V_i =_F V$, para un determinado espacio vectorial $_F V$. En este caso, la suma directa externa de $\{_F V_i\}_{i\in I}$ se denota como $V^{(I)}$, es decir, $\coprod_{i\in I} V_i = \coprod_{i\in I} V = V^{(I)}$. Un ejemplo muy famoso de este hecho es $F^{(X)}$, con F un campo y X un conjunto no vacío, el cual hemos utilizado en muchas ocasiones durante esta tesis.*

Observación 2.2.7. *Sea* $\{_FV_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios vectoriales y* $f \in \coprod_{i\in I} V_i$*. Entonces*

$$f = \sum_{i\in sop(f)} \iota_i(f(i)).$$

Demostración. Es claro que si $k \notin sop(f)$, la igualdad se cumple sin problema, pues de ambos lados tenemos 0_{V_k}. Ahora, si $k \in sop(f)$, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in sop(f)} \iota_i(f(i))\right)(k) &= \sum_{i\in sop(f)} \iota_i(f(i))(k)\\ &= \iota_k(f(k))(k)\\ &= f(k).\end{aligned}$$

Es decir, $\left(\sum_{i\in sop(f)} \iota_i(f(i))\right)(k) = f(k)$ cuando $k \in sop(f)$. Como hemos visto que la igualdad se da para cada $k \in I$, concluimos que $f = \sum_{i\in sop(f)} \iota_i(f(i))$. □

Vamos a dar a continuación una propiedad muy importante que tiene la suma directa externa.

Teorema 2.2.4 (Propiedad universal de la suma directa externa)**.** *Sea* $\{_FV_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios vectoriales. Entonces:*

1) *Para cualquier espacio vectorial* $_FW$ *y cualquier familia de transformaciones lineales* $\{T_i : V_i \to W\}_{i\in I}$*, existe una única transformación lineal* $T : \coprod_{i\in I} V_i \to W$ *tal que* $T\iota_j = T_j$ *para cada* $j \in I$*. Es decir, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "T_i"] \arrow[d, "\iota_j"'] & W \\ \coprod_{i\in I} V_i \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $j \in I$*, donde* ι_j *es la* j*-ésima inclusión.*

2) *Si* $_FU$ *es un espacio vectorial y* $\{\lambda_i : V_i \to U\}_{i\in I}$ *es una familia de transformaciones lineales que satisfacen* 1)*, entonces* $U \cong \coprod_{i\in I} V_i$*.*

Demostración.

1) Como para cada $f \in \coprod_{i\in I} V_i$, $sop(f)$ es finito, podemos definir la función

$$\begin{array}{rccc} T: & \coprod_{i\in I} V_i & \to & W \\ & f & \mapsto & \sum_{i\in sop(f)} T_i(f(i)) \end{array}$$

que claramente está bien definida. Vamos a ver que T es una transformación lineal, para eso tomemos $c \in F$, $f, g \in \coprod_{i\in I} V_i$. Luego, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} T(f+cg) &= \sum_{i\in sop(f+cg)} T_i((f+cg)(i))\\ &= \sum_{i\in sop(f+cg)} T_i(f(i)+cg(i))\\ &= \sum_{i\in sop(f+cg)} [T_i(f(i)) + cT_i(g(i))]\\ &= \sum_{i\in sop(f+cg)} T_i(f(i)) + c\sum_{i\in sop(f+cg)} T_i(g(i))\\ &= \sum_{i\in sop(f)} T_i(f(i)) + c\sum_{i\in sop(cg)} T_i(g(i))\\ &= \sum_{i\in sop(f)} T_i(f(i)) + c\sum_{i\in sop(g)} T_i(g(i))\\ &= T(f) + cT(g). \end{aligned}$$

Es decir, $T(f+cg) = T(f)+cT(g)$, lo cual vemos que sucede para cada $c \in F$, $f, g \in \coprod_{i\in I} V_i$. Por lo tanto, T es una transformación lineal.

Ahora, vamos a ver que $T\iota_j = T_j$, para cada $j \in I$. Sea $j \in J$, $v \in V_j$. Recordemos que $\iota_j(v) = f_v$, donde $f_v : I \to \bigcup_{i\in I} V_i$, definida como $f_v(j) = v$ y $f_v(i) = 0_{V_i}$ cuando $i \neq j$. Entonces, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(T\iota_j)(v) &= T(\iota_j(v)) \\
&= T(f_v) \\
&= \textstyle\sum_{i\in sop(f_v)} T_i(f_v(i)) \\
&= T_j(f_v(j)) \\
&= T_j(v)
\end{aligned}$$

es decir, $(T\iota_j)(v) = T_j(v)$, lo que se cumple para cada $v \in V_j$. Así las cosas, $T\iota_j = T_j$ para cada $j \in I$.
Finalmente, vamos a mostrar que T es única. Supongamos que existe otra transformación lineal $S : \coprod_{i\in I} V_i \to W$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_j \arrow[r, "T_i"] \arrow[d, "\iota_j"'] & W \\
\coprod_{i\in I} V_i \arrow[ur, "S"']
\end{tikzcd}$$

para cada $j \in I$, o sea, $S\iota_j = T_j$ para cada $j \in I$. Debemos mostrar que $S = T$, para hacerlo tomemos $f \in \coprod_{i\in I} V_i$. Por la Observación 2.2.7, tenemos que $f = \sum_{i\in sop(f)} \iota_i(f(i))$, lo que nos conduce a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
S(f) &= S\left(\textstyle\sum_{i\in sop(f)} \iota_i(f(i))\right) \\
&= \textstyle\sum_{i\in sop(f)} S(\iota_i(f(i))) \\
&= \textstyle\sum_{i\in sop(f)} (S\iota_i)(f(i)) \\
&= \textstyle\sum_{i\in sop(f)} T_i(f(i)) \\
&= T(f).
\end{aligned}$$

Es decir, $S(f) = T(f)$ para cada $f \in \coprod_{i\in I} V_i$. Por lo tanto $S = T$, de lo cual se sigue la unicidad.

2) Supongamos que ${}_FU$ es un espacio vectorial y $\{\lambda_i : V_i \to U\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales que satisfacen 1). Luego, existe una única transformación lineal $T : U \to \coprod_{i\in I} V_i$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[d, "\lambda_j"'] & \coprod_{i\in I} V_i \\
U \arrow[ur, "T"']
\end{tikzcd} \tag{I}$$

conmuta para cada $i \in I$. De igual manera, existe una única transformación lineal $S : \coprod_{i\in I} V_i \to U$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "\iota_j"'] & U \\
\coprod_{i\in I} V_i \arrow[ur, "S"']
\end{tikzcd} \tag{II}$$

es conmutativo para cada $j \in I$. Si componemos T con S, a partir de los diagramas (I) y (II), obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "\lambda_j"'] & U \\ U \arrow[ur, "ST"'] & \end{tikzcd} \tag{III}$$

el cual es conmutativo para cada $j \in J$. Pero $id_U : U \to U$ tambien está en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "\lambda_j"'] & U \\ U \arrow[ur, "id_U"'] & \end{tikzcd} \tag{IV}$$

para cada $j \in J$. Como por hipótesis la transformación lineal con esta propiedad es única, se concluye que $ST = id_U$. Similarmente se demuestra que $TS = id_{\coprod_{i\in I} V_i}$. Así las cosas, tenemos que $T : U \to \coprod_{i\in I} V_i$ es un isomorfismo y en consecuencia $U \cong \coprod_{i\in I} V_i$.

$\square$

A partir del teorema anterior tenemos que $\left(\coprod_{i\in I} V_i, \{\iota_i : V_i \to \coprod_{i\in I} V_i\}_{i\in I}\right)$ es un coproducto de la familia $\{_F V_i\}_{i\in I}$ en la categoría $\mathbf{Vec}_F$ (ver Apéndice B). Además este elemento es único salvo isomorfismo, lo cual nos da la tranquilidad de que la suma directa externa de una familia de espacios vectoriales $\{_F V_i\}_{i\in I}$ "merece" ser denotada como lo hemos hecho hasta el momento.

Teorema 2.2.5. *Sean $\{_F V_i\}_{i\in I}$, $\{W_i\}_{i\in I}$ y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineles. Entonces existe una única transformación lineal $T : \coprod_{i\in I} V_i \to \coprod_{i\in I} W_i$, definida para cada $f = (v_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} V_i$ como*

$$T(f) = \sum_{i\in sop(f)} \iota'_i(T_i(v_i))$$

donde $\iota'_i : W_i \to \coprod_{i\in I} W_i$ es la i-ésima inclusión de W_i en $\coprod_{i\in I} W_i$, para cada $i \in I$.

Demostración. Tomemos $j \in I$. Luego, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "T_j"] & W_j \arrow[r, "\iota'_j"] & \coprod_{i\in I} W_i \end{tikzcd}$$

donde ι'_j es la j-ésima inclusión de W_j en $\coprod_{i\in I} W_i$. Así, tenemos que $\iota_j T'_j : V_j \to \coprod_{i\in I} W_i$ es una transformación lineal para cada $j \in I$. $\{\iota'_i T_i : V_i \to \coprod_{i\in I} W_i\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales, por la Propiedad universal de la suma directa externa, existe una única transformación lineal $T : \coprod_{i\in I} V_i \to \coprod_{i\in I} W_i$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "\iota'_j T_j"] \arrow[d, "\iota_j"] & \coprod_{i\in I} W_i \\ \coprod_{i\in I} V_i \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $j \in I$, es decir, $T\iota_j = \iota'_j T_j$, donde ι_j es la j-ésima inclusión de V_j en $\coprod_{i\in I} V_i$ para cada $j \in I$. Ahora, veamos como se define T, tomemos $f = (v_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} V_i$. Por la Observación

2.2.7, $f = \sum_{i\in sop(f)} \iota_i(v_i)$, lo cual nos conduce a las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} T(f) & = & T\left(\sum_{i\in sop(f)} v_i\right) \\ & = & \sum_{i\in sop(f)} T(\iota_i(v_i)) \\ & = & \sum_{i\in sop(f)} (T\iota_i)(v_i) \\ & = & \sum_{i\in sop(f)} (\iota_i' T_i)(v_i) \\ & = & \sum_{i\in sop(f)} \iota_i'(T_i(v_i)) \end{array}$$

es decir, $T(f) = \sum_{i\in sop(f)} \iota_i'(T_i(v_i))$, lo que sucede para cada $f \in \coprod_{i\in I} V_i$. $\square$

Observación 2.2.8. *Si $\{_F V_i\}_{i\in I} V_i$, $\{_F W_i\}_{i\in I}$ son familias de espacios vectoriales y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales, la única transformación lineal $T : \coprod_{i\in I} V_i \to \coprod_{i\in I} W_i$ garantizada por el teorema anterior la podemos considerar como $T((v_i)_{i\in I}) = (T_i(v_i))_{i\in I}$, para cada $(v_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} V_i$, pues al sumar todas las inclusiones sobre el soporte de nuestra función, nos queda el juego de coordenadas mencionado con todas las entradas cero salvo una cantidad finita. Esto puede simplificar nuestra notación en algunas ocasiones y el significado sigue siendo exactamente el mismo.*

Definición 2.2.7. *Sean $\{_F V_i\}_{i\in I}$, $\{_F W_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales. Definimos* ***la suma directa externa de la familia*** *$\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$, denotada por $\coprod_{i\in I} T_i$, como la transformación lineal*

$$\begin{array}{cccc} \coprod_{i\in I} T_i : & \coprod_{i\in I} V_i & \to & \coprod_{i\in I} W_i \\ & f = (v_i)_{i\in I} & \mapsto & (T_i(v_i))_{i\in I} = \sum_{i\in sop(f)} T_i(v_i). \end{array}$$

Teorema 2.2.6. *Sean $\{_F V_i\}_{i\in I}$, $\{W_i\}_{i\in I}$ y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineles. Entonces:*

1) $Ker\left(\coprod_{i\in I} T_i\right) = \coprod_{i\in I} Ker(T_i)$.

2) $Im\left(\coprod_{i\in I} T_i\right) = \coprod_{i\in I} Im(T_i)$

Demostración. La prueba se realiza mutatis mutandis la realizada en el Teorema 2.2.3. $\square$

Corolario 2.2.3. *Sean $\{_F V_i\}_{i\in I}$, $\{_F W_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales y $\{T_i : V_i \to W_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales. Entonces:*

1) *$\coprod_{i\in I} T_i$ es monomorfismo, si y solo si, T_i es monomorfismo para cada $i \in I$.*

2) *$\coprod_{i\in I} T_i$ es epimorfismo, si y solo si, T_i es epimorfismo para cada $i \in I$.*

3) *$\coprod_{i\in I} T_i$ es isomorfismo, si y solo si, T_i es isomorfismo para cada $i \in I$.*

Demostración. Mutatis mutandis la demostración del Corolario 2.2.1. $\square$

Corolario 2.2.4. *Sean $\{_F V_i\}_{i\in I}$ y $\{_F W_i\}_{i\in I}$ familias de espacios vectoriales tales que $W_i \leq V_i$ para cada $i \in I$. Entonces*

$$\coprod_{i\in I} W_i \leq \coprod_{i\in I} V_i$$

y

$$\frac{\coprod_{i\in I} V_i}{\coprod_{i\in I} W_i} \cong \coprod_{i\in I} \frac{V_i}{W_i}.$$

Demostración. Mutatis mutandis la prueba del Corolario 2.2.2. $\square$

Suma directa interna

Definición 2.2.8 (Suma directa interna)**.** *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V. Decimos que V es la suma directa interna de la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ si se cumplen las siguientes condiciones:*

1) $V = \sum_{i\in I} W_i$.

2) Para cada $j \in I$, $W_j \cap \sum_{i\in I, i\neq j} W_i = \{0\}$.

En este caso denotamos $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$.

Observación 2.2.9. *No debemos confundir la suma directa externa con la interna, pues mientras en la suma directa externa podemos tener una familia de espacios vectoriales que no tienen ninguna relación entre sí, en la suma directa interna tenemos una familia de subespacios vectoriales de un espacio vectorial dado.*

Lema 2.2.1. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V tales que $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$. Para cada $J \subseteq I$, $|J| < \infty$, si $\sum_{j\in J} w_j = 0$ con $w_j \in W_j$ para cada $j \in J$, entonces $w_j = 0$ para cada $j \in J$.*

Demostración. Sea $J \subseteq I$, $|J| < \infty$ y supongamos que $\sum_{j\in J} w_j = 0$, con $w_j \in W_j$ para cada $j \in J$. Si existe $k \in J$ tal que $w_k \neq 0$, entonces $w_k = -\sum_{j\in J, j\neq k} w_j$. Así $w_k \in W_k \cap \sum_{j\in J, j\neq k} W_j \leq W_k \cap \sum_{i\in I, i\neq k} W_i = \{0\}$, es decir, $w_k = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $w_j = 0$ para cada $j \in J$.

□

Teorema 2.2.7 (Caracterización de la suma directa interna)**.** *Sean ${}_FV$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios vectoriales de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$.

2) Para cada $v \in V$, existe un único $J \subseteq I$ finito y únicos $w_j \in W_j$ para cada $j \in J$, tales que $v = \sum_{j\in J} w_j$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$ y tomemos $v \in V$. Si $v = 0$, por el Lema 2.2.1, la única representación posible de v es la de 0, donde 0 está en todos los W_i, así que tomando cualquiera de ellos y el conjunto con el respectivo índice se tiene el resultado. Si $v \neq 0$, como $V = \sum_{i\in I} W_i$, hay un conjunto finito $J \subseteq I$ tal que $v = \sum_{j\in J} w_j$, donde $w_j \in W_j$ para cada $j \in J$. Aquí podemos suponer que $w_j \neq 0$ para cada $j \in J$ y que todos los índices que se encuentran en J son distintos, pues al efectuar la suma, los elementos que están en el mismo W_j se reducen a un solo elemento y el cero mantiene la suma sin cambios. Debemos mostrar la unicidad de esta representación, para eso supongamos que hay otro conjunto finito $K \subseteq I$ tal que $v = \sum_{k\in K} w_k$, donde $w_k \in W_k$ para cada $k \in K$, suponiendo tambien que $w_k \neq 0$ para cada $k \in K$ y que todos los índices ubicados en K son diferentes, por el mismo argumento que se dió para J. Así, tenemos que $\sum_{j\in J} w_j = \sum_{k\in K} w_k$. Si existiera $j_0 \in J \setminus K$, entonces $w_{j_0} = -\sum_{j\in J, j\neq j_0} w_j + \sum_{k\in K} w_k \in W_{j_0} \cap \sum_{i\in I, i\neq j_0} W_i = \{0\}$, lo que implica que $w_{j_0} = 0$, pero esto es imposible por nuestra suposición. Lo anterior nos permite concluir que $J \subseteq K$ y utilizando un razonamiento similar se tiene que $K \subseteq J$, lo que implica que $J = K$. Ahora, si $v = \sum_{j\in J} w'_j$, con $w'_j \in W_j$ para cada $j \in J$, entonces $\sum_{j\in J} w_j = \sum_{j\in J} w'_j$, esto equivale a que $\sum_{j\in J}(w_j - w'_j) = 0$. Por el Lema 2.2.1, $w_j - w'_j = 0$ para cada $j \in J$, es decir, $w_j = w'_j$ para cada $j \in J$. Por lo tanto, $v = \sum_{j\in J} w_j$ es la única representación posible para v, donde $J \subseteq I$, $|J| < \infty$, $w_j \in W_j$ para cada $j \in J$.

2) $\Rightarrow$ 1): Por hipótesis, para cada $v \in V$, hay un único conjunto finito $J \subseteq I$ tal que $v = \sum_{j\in J} w_j$, donde $w_j \in W_j$ para cada $j \in J$. De aquí tenemos que $V = \sum_{i\in I} W_i$. Ahora, sea $j \in J$ y supongamos que $v \in W_j \cap \sum_{i\in I, i\neq j} W_i$. Así $v = \sum_{k\in K} w_k$, para algún $K \subseteq I \setminus \{j\}$, $|K| < \infty$, $w_k \in W_k$ para cada $k \in K$, esto es $v - \sum_{k\in K} w_k = 0$. Por el Lema 2.2.1, tenemos que $v = 0$. Así concluimos que $W_j \cap \sum_{i\in I, i\neq j} W_i = \{0\}$ para cada $j \in J$. Por lo tanto, $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$. □

Relación de la suma directa interna con bases y dimensión

Teorema 2.2.8. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\beta = \{x_i\}_{i\in I} \subseteq V\setminus\{0\}$. Las siguientes afirmaciones sobre β son equivalentes:*

1) β es base de V.

2) $V = \bigoplus_{i\in I}\langle x_i\rangle$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que β es base de V. Sea $v \in V$, luego existe una única combinación lineal $v = \sum_{j\in J} c_j x_j$, con $J \subseteq I$ finito, $c_j \in F$, $x_j \in \beta$ para cada $j \in J$. Si para cada $j \in J$ hacemos $y_j = c_j x_j$, tenemos que $y_j \in \langle x_j\rangle$ para cada $j \in J$ y $v = \sum_{j\in J} y_j$ es la única representación de V como suma de elementos de $\bigcup_{i\in I}\langle x_i\rangle$. Por el Teorema 2.2.7, $V = \bigoplus_{i\in I}\langle x_i\rangle$.
2) $\Rightarrow$ 1): Como $V = \bigoplus_{i\in I}\langle x_i\rangle$, por el Teorema 2.2.7, para cada $v \in V$ existe una única representación de la forma $v = \sum_{j\in J} y_j$, con $J \subseteq I$ finito, $y_j \in \langle x_j\rangle$ para cada $j \in J$. Ahora, para cada $j \in J$, se tiene que $y_j = c_j x_j$ donde $c_j \in F$. Notemos que si $c_j x_j = c'_j x_j$, entonces $(c_j - c'_j)x_j = 0$, dado que $x_j \neq 0$ concluimos que $c_j - c'_j = 0$, es decir, $c_j = c'_j$, lo cual sucede para cada $j \in J$. De esta manera, $v = \sum_{j\in J} c_j x_j$ es la única combinación lineal para v de elementos de β, de lo cual inferimos que β es base de V. $\square$

Proposición 2.2.1. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V. Si $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$, entonces $V = \sum_{i\in I} W_i$ y para cada $j,k \in I$, $j \neq k$ implica $W_j \cap W_k = \{0\}$.*

Demostración. Es claro que $V = \sum_{i\in I} W_i$. Sea $j,k \in I$ con $j \neq k$ y $v \in W_j \cap W_k$. Como $k \neq j$, tenemos que $W_k \subseteq \sum_{i\in I, i\neq j} W_i$, así que $v \in W_j \cap \sum_{i\in I,i\neq j} W_i$. Por hipótesis, $W_j \cap \sum_{i\in I,i\neq j} W_i = \{0\}$, lo cual implica que $v = 0$. $\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que si ${}_FV$ es un espacio vectorial, $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V, el hecho de que $V = \sum_{i\in I} W_i$ y para cada $i,j \in I$, $i \neq j$ implique $W_i \cap W_j = \{0\}$, no necesariamente significa que $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$.

Ejemplo 2.2.5. *Consideremos ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión 2 y $\beta = \{x, y\}$ una base de V. Por el Teorema 2.2.8, $V = \langle x\rangle \oplus \langle y\rangle$. Notemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} V &= \langle x\rangle + \langle y\rangle \\ &\leq \langle x+y\rangle + \langle x\rangle + \langle y\rangle \\ &\leq V \end{aligned}$$

de lo que concluimos que $V = \langle x+y\rangle + \langle x\rangle + \langle y\rangle$. Es claro que $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{0\}$. Ahora, si $v \in \langle x\rangle \cap \langle x+y\rangle$, entonces $v = ax = b(x+y)$ con $a,b \in F$, por consiguiente, $ax = b(x+y)$, lo que es equivalente a que $(a-b)x = by$. Si $b \neq 0$, entonces $y = [b^{-1}(a-b)]x \in \langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{0\}$, así que $[b^{-1}(a-b)]x = 0$, como $x \neq 0$ y $b^{-1} \neq 0$, se tiene que $a - b = 0$, o sea, $a = b$. Luego, tenemos que $ax = ax + ay$, lo cual equivale a $ay = 0$, dado que $y \neq 0$ por ser un básico de V, se tiene que $a = 0$, de ahí que $v = 0$. De lo anterior concluimos que $\langle x\rangle \cap \langle x+y\rangle = \{0\}$ y de forma completamente similar se exhibe que $\langle y\rangle \cap \langle x+y\rangle = \{0\}$. Sin embargo, $V \neq \langle x+y\rangle \oplus \langle x\rangle \oplus \langle y\rangle$, pues $0 = (x+y) - x - y$, con $x + y \in \langle x+y\rangle \setminus \{0\}$.

Teorema 2.2.9. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V. Si $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$, entonces $V = \sum_{i\in I} W_i$ y $dim(V) = \sum_{i\in I} dim(W_i)$.*

Demostración. Es claro que $V = \sum_{i\in I} W_i$. Falta ver que $dim(V) = \sum_{i\in I} dim(W_i)$. Como para cada $i \in I$, W_i es un espacio vectorial, entonces W_i tiene base, digamos β_i. Sean $i,j \in I$ con $i \neq j$, si $x \in \beta_i \cap \beta_j$, entonces $x \in W_i \cap W_j$, pero como $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$, por la Proposición 2.2.1, $W_i \cap W_j = \{0\}$, así que $x = 0$, pero esto es absurdo, ya que β_i y β_j son l.i. De lo anterior concluimos que para cada $i,j \in I$, si $i \neq j$, entonces $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$. Propongamos $\beta = \bigcup_{i\in I} \beta_i$. Vamos a ver que β es base de V:

- β **genera a** V: Es suficiente observar la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{array}{rcl} V & = & \sum_{i\in I} W_i \\ & = & \sum_{i\in I} \langle \beta_i \rangle \\ & = & \left\langle \bigcup_{i\in I} \langle \beta_i \rangle \right\rangle \\ & = & \left\langle \bigcup_{i\in I} \beta_i \right\rangle \\ & = & \langle \beta \rangle \end{array}$$

es decir, $V = \langle \beta \rangle$.

- β **es l.i**: Si β es l.d, existe $\gamma = \{x_i\}_{i=1}^n \subseteq \beta$, γ l.d con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Como β_{i_k} es l.d para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, no pueden estar todos los elementos de γ en un solo β_{i_k}. Vamos a ordenar los elementos que pertenecen a cada β_{i_k}, podemos suponer que $x_1 = x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{t_1,1} \in \beta_{i_1}, x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{t_2,2} \in \beta_{i_2}, \ldots, x_{1,s}, x_{2,s}, \ldots, x_{t_s,s} = x_n \in \beta_{i_s}$, donde $s \in \mathbb{N}$ con $s \leq n$. Lo anterior se puede conseguir sin ningún problema reordenando los elementos de γ en caso necesario. Por ser γ l.d, hay una combinación lineal para 0 de los vectores enlistados anteriormente con algún coeficiente distinto de cero, es decir

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{t_j} c_{i,j} x_{i,j} = 0$$

con $c_{i,j} \neq 0$, para algún $j \in \{1, \ldots, s\}$, $i \in \{1, \ldots, t_j\}$. Ahora bien, de la igualdad anterior tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{t_j} c_{i,j} x_{i,j} \\ & = & \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{t_j} c_{i,j} x_{i,j} \right) \\ & = & \sum_{j=1}^{s} w_{i_j} \end{array}$$

es decir, $\sum_{j=1}^{s} w_{i_j} = 0$, donde $w_{i_j} = \sum_{i=1}^{t_j} c_{i,j} x_{i,j} \in W_{i_j}$ para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$. Supongamos, sin perdida de generalidad que w_{i_1} contiene al coeficiente diferente de cero, luego $w_{i_1} \neq 0$, entonces $w_{i_1} = -\sum_{j=2}^{s} w_{i_j} \in W_{i_1} \cap \sum_{i\in I, i\neq i_1} W_i = \{0\}$, así que $w_{i_1} = 0$, lo cual es absurdo por nuestra suposición. De lo anterior concluimos que β es l.i.

Así las cosas, hemos probado que β es base de V. Ahora bien, observemos las siguientes igualdades respecto a la dimensión:

$$\begin{array}{rcl} dim(V) & = & |\beta| \\ & = & \left| \bigcup_{i\in I} \beta_i \right| \\ & = & \sum_{i\in I} |\beta_i| \\ & = & \sum_{i\in I} dim(W_i) \end{array}$$

Es decir, $dim(V) = \sum_{i\in I} dim(W_i)$. □

Cabe mencionar que el teorema anterior se cumple aunque I sea infinito, siempre y cuando se asuma el Axioma de elección (ver Apéndice A), como lo hemos hecho siempre en el desarrollo de esta tesis.
El recíproco se cumple solo en el caso finito dimensional, antes de dar el teorema que lo garantiza probaremos un lema auxiliar.

Lema 2.2.2. *Sea $_FV$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\{W_i\}_{i=1}^m$ una familia de subespacios de V, con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Entonces:*

$$dim\left(\sum_{i=1}^{m} W_i \right) \leq \sum_{i=1}^{m} dim(W_i).$$

Demostración. Vamos a hacer inducción sobre $m \geq 2$. Para $m = 2$, por el Teorema 1.2.9 y dado que estamos en dimensión finita, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} dim(W_1 + W_2) & = & dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) \\ & \leq & dim(W_1) + dim(W_2) \end{array}$$

es decir, $dim(W_1 + W_2) \leq dim(W_1) + dim(W_2)$. Así, la desigualdad es válida para $m = 2$.
Supongamos que la desigualdad es válida para $m - 1$, $m \geq 3$. Debemos mostrar la validez para m, para eso notemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{array}{rcl} dim\left(\sum_{i=1}^{m} W_i\right) & = & dim\left(\sum_{i=1}^{m-1} W_i + W_m\right) \\ & \leq & dim\left(\sum_{i=1}^{m-1} W_i\right) + dim(W_m) \\ & \leq & \sum_{i=1}^{m-1} dim(W_i) + dim(W_m) \\ & = & \sum_{i=1}^{m} dim(W_i) \end{array}$$

es decir, $dim\left(\sum_{i=1}^{m} W_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} dim(W_i)$. Por lo tanto, la desigualdad es válida para cada $m \geq 2$. □

Teorema 2.2.10. *Sea $_FV$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\{W_i\}_{i=1}^{m}$ una familia de subespacios de V con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Si $V = \sum_{i=1}^{m} W_i$ y $dim(V) = \sum_{i=1}^{m} dim(W_i)$, entonces $V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que $V = \sum_{i=1}^{m} W_i$. Ahora, sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, haciendo uso del Lema 2.2.2, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} dim(V) & = & dim\left(W_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right) \\ & \leq & dim(W_j) + dim\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right) \\ & \leq & dim(W_j) + \sum_{i=1, i\neq j}^{m} dim(W_i) \\ & = & \sum_{i=1}^{m} dim(W_i) \\ & = & dim(V). \end{array}$$

Así, tenemos que

$$dim(V) = dim(W_j) + dim\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right). \tag{I}$$

Por otro lado, tenemos que

$$dim(V) = dim(W_j) + dim\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right) - \dim\left(W_j \cap \sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right). \tag{II}$$

Igualando las expresiones de (I) y (II) para $dim(V)$, tenemos que

$$dim(W_j) + dim\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right) = dim(W_j) + dim\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right) - \dim\left(W_j \cap \sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right)$$

simplificando de la última igualdad, tenemos que

$$\dim\left(W_j \cap \sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i\right) = 0$$

de donde inferimos que $W_j \cap \sum_{i=1, i\neq j}^{m} W_i = \{0\}$, lo cual sucede para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto, $V = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$. □

El siguiente ejemplo nos indica que el teorema anterior no es válido para espacios de dimensión infinita.

Ejemplo 2.2.6. *Consideremos el espacio vectorial* $\mathbb{R}[x]$. *Sabemos que* $dim(\mathbb{R}[x]) = \aleph_0$. *Tenemos que* $\mathbb{R}[x] \leq \mathbb{R}[x]$ *y* $P_2(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid grd(f) \leq 2\} \leq \mathbb{R}[x]$. *Dado que* $P_2(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}[x]$, *tenemos que* $\mathbb{R}[x] = P_2(\mathbb{R}) + \mathbb{R}[x]$, *además*

$$dim(P_2(\mathbb{R})) + dim(\mathbb{R}[x]) = 3 + \aleph_0 = mayor\{3, \aleph_0\} = \aleph_0 = dim(\mathbb{R}[x]).$$

Sin embargo, $\mathbb{R}[x] \neq P_2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}[x]$, *pues* $\mathbb{R}[x] \cap P_2(\mathbb{R}) = P_2(\mathbb{R}) \neq \{\overline{0}\}$.

Relación suma directa externa-suma directa interna

Pese a que en la Observación 2.2.9, se explicó que suma directa externa y suma directa interna son cosas diferentes, vamos a ver que no hay diferencia significativa entre ambos objetos, para eso expondremos algunos resultados para finalmente concluir que ambos objetos en realidad son isomorfos.
En primera instancia veremos que una suma directa externa se puede ver como una suma directa interna, lo cual se hace en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.11. *Sea* $\{_F V_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios vectoriales. Entonces*

$$\coprod_{i\in I} V_i = \bigoplus_{i\in I} \overline{V_i}$$

donde $\overline{V_i} = \iota_i(V_i)$ *con* ι_i *la i-ésima inclusión para cada* $i \in I$.

Demostración. Veamos primero que $\coprod_{i\in I} V_i = \sum_{i\in I} \overline{V_i}$. Sea $f \in \coprod_{i\in I} V_i$, por la Observación 2.2.7, $f = \sum_{k\in sop(f)} \iota_k(f(k))$, recordamos que $sop(f)$ es finito, además, $\iota_k(f(k)) \in \overline{V_k}$ para cada $k \in sop(f)$. De esta manera concluimos que $f \in \sum_{i\in I} \overline{V_i}$.
Ahora, sea $j \in I$ y supongamos que $g \in \overline{V_j} \cap \sum_{i\in I, i\neq j} \overline{V_i}$. Luego, $g = \iota_j(v_j)$ para algún $v_j \in V_j$ y $g = \sum_{k\in K} \iota_k(v_k)$, donde $K \subseteq I \setminus \{j\}$, K es finito y $v_k \in V_k$ para cada $k \in K$. Debemos mostrar que $g = \overline{0}$, para hacerlo nos conviene particionar I como $I = (K \cup \{j\}) \cup (I \setminus (K \cup \{j\})$. Es claro que si $i \in I \setminus (K \cup \{j\})$, $g(i) = 0_{V_i}$. Ahora, para j, tenemos que

$$g(j) = \sum_{k\in K} \iota_k(v_k)(j) = 0_{V_j}$$

ya que $j \notin K$, es decir, $g(j) = 0_{V_j}$. Finalmente, si $k_0 \in K$, entonces $g(k_0) = \iota_j(v_j)(k_0) = 0_{V_{k_0}}$, es decir, $g(k_0) = 0_{V_{k_0}}$ cuando $k_0 \in K$. En resumen, hemos visto que $g(i) = 0_{V_i}$ para cada $i \in I$ y consecuentemente $g = \overline{0}$. De ahí que $\overline{V_j} \cap \sum_{i\in I, i\neq j} \overline{V_i} = \overline{0}$ para cada $j \in I$. □

Corolario 2.2.5. *Sea* $\{_F V_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios vectoriales. Entonces*

$$dim\left(\coprod_{i\in I} V_i\right) = \sum_{i\in I} dim(V_i).$$

Demostración. Sabemos que $V_i \cong \overline{V_i}$, donde $\overline{V_i} = \iota_i(V_i)$ para cada $i \in I$. Por el Teorema 1.4.15, $dim(V_i) = dim(\overline{V_i})$ para cada $i \in I$. Aplicando los Teoremas 2.2.9 y 2.2.11, así como lo que acabamos de mencionar, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} dim\left(\coprod_{i\in I} V_i\right) &= dim\left(\bigoplus_{i\in I} \overline{V_i}\right) \\ &= \sum_{i\in I} dim(\overline{V_i}) \\ &= \sum_{i\in I} dim(V_i) \end{aligned}$$

es decir,

$$dim\left(\coprod_{i\in I} V_i\right) = \sum_{i\in I} dim(V_i)$$

que es precisamente lo que se buscaba. $\square$

Notación 2.2.1. *Sea $_FV$ un espacio vectorial y $\{T_i : V \to V\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales tales que para cada $v \in V$, el conjunto $S_v = \{i \in I \mid T_i(v) \neq 0\}$ es finito. Denotamos por la suma $\sum_{i\in I} T_i$ a la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \sum_{i\in I} T_i : & V & \to & V \\ & v & \mapsto & \sum_{i\in S_v} T_i(v) \end{array}$$

que claramente está bien definida.

Ahora, estamos en condiciones de presentar una caracterización para determinar cuando un espacio vectorial es isomorfo a una suma directa externa de una familia de espacios vectoriales.

Teorema 2.2.12. *Sea $_FW$ un espacio vectorial y $\{_FV_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$W \cong \coprod_{i\in I} V_i$.*

2) *Existe una familia de monomorfismos $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ tal que $W = \bigoplus_{i\in I} \lambda_i(V_i)$.*

3) *Existe una familia de transformaciones lineales $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ tales que para cada $w \in W$, existe un único $J \subseteq I$ finito y únicos $v_j \in V_j$ para cada $j \in J$, tales que $v = \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j)$.*

4) *Existe una familia de transformaciones lineales $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ llamadas inclusiones y una familia de transformaciones lineales $\{\rho_i : W \to V_i\}_{i\in I}$ llamadas proyecciones que satisfacen las siguientes condiciones:*

   a) *Para cada $i \in I$, $\rho_i\lambda_i = id_{V_i}$*

   b) *Para cada $i, j \in I$, $\rho_i\lambda_j = \overline{0}$, si $i \neq j$.*

   c) *Para cada $w \in W$, $\rho_i(v) = 0_{V_i}$ para casi toda $i \in I$.*

   d) *$id_W = \sum_{i\in I} \lambda_i\rho_i$.*

   No está de más mencionar que la condición d) tiene sentido gracias a la condición c).

5) *Con las hipótesis de 4), tenemos que*

$$\begin{array}{rccc} T : & W & \to & \coprod_{i\in I} V_i \\ & w & \mapsto & (\rho_i(w))_{i\in I} \end{array}$$

   es un isomorfismo.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Por hipótesis existe un isomorfismo $S : \coprod_{i\in I} V_i \to W$. Consideremos la familia $\{\iota_i : V_i \to \coprod_{i\in I} V_i\}_{i\in I}$, donde ι_i es la i-ésima inclusión para cada $i \in I$. Proponemos para cada $i \in I$, $\lambda_i = S\iota_i : V_i \to W$. Es claro que λ_i es monomorfismo para cada $i \in I$, ya que es composición de monomorfismos. Así, tenemos que $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ es una familia de monomorfismos. Solo resta probar que $W = \bigoplus_{i\in I} \lambda_i(V_i)$. Veamos primero que $W = \sum_{i\in I} \lambda_i(V_i)$. Ya sabemos que $\sum_{i\in I} \lambda_i(V_i) \leq W$. Ahora sea $w \in W$, por ser S un isomorfismo, existe $f =$

$(v_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} V_i$ tal que $w = S(f)$. Por la Observación 2.2.7, $f = \sum_{i\in sop(f)} \iota_i(v_i)$, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} w & = & S(f) \\ & = & S\left(\sum_{i\in sop(f)} \iota_i(v_i)\right) \\ & = & \sum_{i\in sop(f)} S(\iota_i(v_i)) \\ & = & \sum_{i\in sop(f)} (S\iota_i)(v_i) \\ & = & \sum_{i\in sop(f)} \lambda_i(v_i) \end{array}$$

es decir, $w = \sum_{i\in sop(f)} \lambda_i(v_i)$, donde $sop(f)$ es finito y $\lambda_i(v_i) \in \lambda_i(V_i)$ para cada $i \in sop(f)$, en consecuencia $w \in \sum_{i\in I} \lambda_i(V_i)$. De esta manera se concluye que $W = \sum_{i\in I} \lambda_i(V_i)$.
Ahora, sea $j \in I$ y supongamos que $u \in \lambda_j(V_j) \cap \sum_{i\in I, i\neq j} \lambda_i(V_i)$. Luego, $u = \lambda_j(v_j)$ para algún $v_j \in V_j$ y $u = \sum_{i\in K} \lambda_i(v_i)$ para algún $K \subseteq I \setminus \{j\}$, K finito, $v_i \in V_i$ para cada $i \in K$. Entonces $\lambda_j(v_j) = \sum_{i\in K} \lambda_i(v_i)$, esto es $S(\iota_j(v_j)) = S\left(\sum_{i\in K} \iota_i(v_i)\right)$, pero como S es isomorfismo, tenemos que $\iota_j(v_j) = \sum_{i\in K} \iota_i(v_i)$, o bien, $\iota_j(v_j) - \sum_{i\in K} \iota_i(v_i) = \overline{0}$. Como $\coprod_{i\in I} V_i = \bigoplus_{i\in I} \iota_i(V_i)$, tenemos que $\iota_i(v_i) = \overline{0}$, para cada $i \in K \cup \{j\}$, esto por el Lema 2.2.1. Como ι_i es monomorfismo para cada $i \in K \cup \{j\}$, tenemos que $v_i = 0$ para cada $i \in K \cup \{j\}$, lo que nos permite concluir que $u = 0$. Por lo tanto, $W = \bigoplus_{i\in I} \lambda_i(V_i)$.
2) $\Rightarrow$ 3): Por hipótesis hay una familia de monomorfismos $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ tal que $W = \bigoplus_{i\in I} \lambda_i(V_i)$. Sea $w \in W$, por el Teorema 2.2.7, existe un único conjunto finito $J \subseteq I$ y únicos $u_j \in \lambda_j(V_j)$, tales que $w = \sum_{j\in J} u_j$. Como $u_j \in \lambda_j(V_j)$ y λ_j es monomorfismo, existe único $v_j \in V_j$ tal que $u_j = \lambda_j(v_j)$, esto para cada $j \in J$. De esta manera, tenemos que $w = \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j)$, donde $v_j \in V_j$ es único para cada $j \in J$, con lo que establecemos lo deseado.
3) $\Rightarrow$ 4): Supongamos que existe una familia de transformaciones lineales $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ tales que para cada $w \in W$, existe un único conjunto finito $J \subseteq I$ y únicos $v_j \in V_j$ para cada $j \in J$ tales que $w = \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j)$. Podemos abusar y decir que para cada $w \in W$, $w = \sum_{i\in I} \lambda_i(v_i)$, con $v_i = 0_{V_i}$ para casi toda $i \in I$. Propongamos para cada $i \in I$

$$\begin{array}{rccc} \rho_i : & W & \to & V_i \\ & \sum_{i\in I} \lambda_i(v_i) = w & \mapsto & v_i \end{array}$$

la cual claramente es una transformación lineal. De esta manera hemos construido la familia de transformaciones lineales $\{\rho_i : W \to V_i\}_{i\in I}$. Veamos que las familias $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ y $\{\rho_i : W \to V_i\}_{i\in I}$ satisfacen lo que se pide:

a) Sea $i \in I$ y tomemos $v_i \in V_i$, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (\rho_i\lambda_i)(v_i) & = & \rho_i(\lambda_i(v_i)) \\ & = & v_i \\ & = & id_{V_i}(v_i) \end{array}$$

es decir, $(\rho_i\lambda_i)(v_i) = id_{V_i}(v_i)$ para cada $v_i \in V_i$, esto ocurre para cada $i \in I$.

b) Sean $i, j \in I$ con $i \neq j$ y $v_j \in V_j$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (\rho_i\lambda_j)(v_j) & = & \rho_i(\lambda_j(v_j)) \\ & = & \rho_i(\lambda_j(v_j) + 0) \\ & = & \rho_i(\lambda_j(v_j) + \lambda_i(0_{V_i})) \\ & = & 0_{V_i} \\ & = & \overline{0}(v_j) \end{array}$$

es decir, $(\rho_i\lambda_j)(v_j) = \overline{0}(v_j)$, para cada $v_j \in V_j$. Así, tenemos que $\rho_i\lambda_j = \overline{0}$ cuando $i \neq j$.

c) Sea $w \in W$, por hipótesis existe un único conjunto finito $J \subseteq I$ y únicos $v_j \in V_j$ para cada $j \in J$, tales que $w = \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j)$. Podemos suponer que $v_j \neq 0_{V_j}$ para cada $j \in J$. Así, para cada $j \in J$, $\rho_j(w) = v_j \neq 0_{V_j}$ y si $i \in I \setminus J$, entonces $\rho_i(w) = 0_{V_i}$. Así, tenemos que $\rho_i(w)$ es diferente de cero en los indices que se encuentran en J, donde J es un conjunto finito, esto sucede para cada $w \in W$.

d) Sea $w \in W$. Por hipótesis, hay un único conjunto finito $J \subseteq I$ y únicos $v_j \in V_j$ para cada $j \in J$, tales que $w = \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j)$. Esto nos conduce a las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} id_W(w) & = & w \\ & = & \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j) \\ & = & \sum_{j\in J} \lambda_j(\rho_j(w)) \\ & = & \sum_{j\in J}(\lambda_j\rho_j)(w) \\ & = & \left(\sum_{i\in I} \lambda_i\rho_i\right)(w) \end{array}$$

es decir, $id_W(w) = \left(\sum_{i\in I} \lambda_j\rho_j\right)(w)$ para cada $w \in W$. Por lo tanto, $id_W = \sum_{i\in I} \lambda_i\rho_i$.

De lo anterior hemos conseguido lo buscado. Notemos que el hecho de que $\rho_i\lambda_i = id_{V_i}$ implica que λ_i es monomorfismo y ρ_i es epimorfismo para cada $i \in I$.
4) $\Rightarrow$ 5): Supongamos que existen familias de transformaciones lineales $\{\lambda_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ y $\{\rho_i : W \to V_i\}_{i\in I}$ que satisfacen a), b), c) y d). Sea $w \in W$, por hipótesis $w = id_W(w) = \left(\sum_{i\in I} \lambda_i\rho_i\right)(w)$, entonces hay un conjunto finito $J \subseteq I$ tal que $w = \sum_{j\in J} \lambda_j(\rho_j(w))$, si hacemos $v_j = \rho_j(v_j) \in V_j$ para cada $j \in J$, tenemos que $w = \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j)$, además es fácil ver que este conjunto finito es único así como los v_j. Veamos que la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & W & \to & \coprod_{i\in I} V_i \\ & w & \mapsto & (\rho_i(w))_{i\in I} \end{array}$$

es isomorfismo. Propongamos la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} S: & \coprod_{i\in I} V_i & \to & W \\ & f = (v_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in sop(f)} \lambda_i(v_i). \end{array}$$

Necesitamos ver que las transformaciones lineales definidas anteriormente son inversas entre sí. Sea $w \in W$, entonces $w = \sum_{j\in J} \lambda_j(v_j)$, para un único conjunto finito $J \subseteq I$ con únicos $0_{V_j} \neq v_j \in V_j$ para cada $j \in J$. Luego se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (ST)(w) & = & S(T(w)) \\ & = & S((\rho_i(w))_{i\in I}) \\ & = & \sum_{j\in J} \lambda_j(\rho_j(w)) \\ & = & \sum_{j\in J}(\lambda_j\rho_j)(w) \\ & = & \left(\sum_{i\in I} \lambda_i\rho_i\right)(w) \\ & = & id_W(w) \end{array}$$

es decir, $(ST)(w) = id_W(w)$ para cada $w \in W$. De ahí que $ST = id_W$. Ahora tomemos $f = (v_i)_{i\in I}$, luego se cumple lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (TS)(f) & = & (TS)((v_i)_{i\in I}) \\ & = & T(S((v_i)_{i\in I})) \\ & = & T\left(\sum_{i\in sop(f)} \lambda_i(v_i)\right) \\ & = & \left(\rho_i\left(\sum_{i\in sop(f)} \lambda_i(v_i)\right)\right)_{i\in I} \\ & = & (v_i)_{i\in I} \\ & = & f \end{array}$$

es decir, $(TS)(f) = id_{\coprod_{i\in I} V_i}(f)$. Así, se tiene que $TS = id_{\coprod_{i\in I} V_i}$. Por consiguiente, T es isomorfismo.
5) $\Rightarrow$ 1): Es inmediato. $\square$

Corolario 2.2.6. *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V. Si $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$, entonces $V \cong \coprod_{i\in I} W_i$.*

Demostración. Consideremos para cada $i \in I$, la transformación lineal inclusión que denotaremos como $\mu_i : W_i \hookrightarrow V$, definida por $\mu_i(w_i) = w_i$, para cada $w_i \in W_i$. Así, tenemos la familia de transformaciones lineales inyectivas $\{\mu_i : W_i \to V\}_{i\in I}$, además $\mu_i(W_i) = W_i$ para cada $i \in I$. Entonces, $V = \bigoplus_{i\in I} W_i = \bigoplus_{i\in I} \mu_i(W_i)$. Por el Teorema 2.2.12, $V \cong \coprod_{i\in I} W_i$. $\square$

Con el corolario anterior, hemos visto que la suma directa interna y la suma directa externa son isomorfas, lo que nos dice que son indistinguibles algebraicamente. A partir de este momento denotaremos $\bigoplus_{i\in I} V_i$ para referirnos a cualquiera de ellas, siempre indicando claramente si son espacios vectoriales sin relación entre sí o si se trata de subespacios de algún espacio vectorial dado, que es lo que haría la diferencia.

Ejemplo 2.2.7. *Utilizando la herramienta de las sumas directas podemos dar una demostración alternativa del Corolario 1.4.4. Si ${}_FV$ es un espacio vectorial, tiene una base, digamos β. Por el Teorema 2.2.8, $V = \bigoplus_{x\in\beta}\langle x\rangle$. Además, como $dim(F) = dim(\langle x\rangle) = 1$, por el Teorema 1.4.15, $\langle x\rangle \cong F$ para cada $x \in \beta$, aplicando el Corolario 2.2.3, $\coprod_{x\in\beta}\langle x\rangle \cong \coprod_{x\in\beta} F$. Todo esto junto con el Corolario 2.2.6, nos conduce a lo siguiente:*

$$\begin{aligned} V &= \bigoplus_{x\in\beta}\langle x\rangle \\ &\cong \coprod_{x\in\beta}\langle x\rangle \\ &= F^{(\beta)} \end{aligned}$$

es decir, $V \cong F^{(\beta)}$.

Capítulo 3

Funtores Hom y Tensor en espacios vectoriales

En este tercer y último capítulo de esta tesis, vamos a abordar los funtores Hom y Tensor en la categoría de espacios vectoriales, lo cual es nuestro tema principal de este trabajo. Vamos a exponer el Hom y Tensor, que si bien sabemos o sospechamos que como objetos son espacios vectoriales, aquí mostraremos formalmente este hecho y principalmente, encapsularemos las propiedades para la categoría de espacio vectorial tomando en cuenta al mismo tiempo sus objetos como sus morfismos, que en este caso son las ya conocidas transformaciones lineales. Expondremos al espacio dual como un caso particular del funtor Hom, así como algunas de sus propiedades de interés. Exploraremos el comportamiento de estos funtores respecto a las sumas y productos directos de los espacios vectoriales. Finalmente, mostraremos que estos funtores son adjuntos entre sí, lo que nos indicará que en realidad estos funtores están íntimamente relacionados, en pocas palabras, es muy fácil pasar de uno a otro sin gran dificultad.

3.1. Hom

3.1.1. Resultados previos

Recordemos que si F es un campo, ${}_FV$ y ${}_FW$ son espacios vectoriales, entonces

$$Hom(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Notación 3.1.1. *Durante este capítulo, dado que estamos dando a los espacios vectoriales un enfoque categórico, si F es un campo y ${}_FV$ es un espacio vectorial, denotaremos ${}_FV \in Obj(\boldsymbol{Vec_F})$, incluso siempre que no haya lugar a confusión con el campo y en que nos estamos refiriendo a los objetos de la categoría $\boldsymbol{Vec_F}$, denotaremos simplemente $V \in \boldsymbol{Vec_F}$.*

Proposición 3.1.1. *Sea F un campo. Si $V, W \in \boldsymbol{Vec_F}$, entonces:*

1) $Hom(V, W) \in \boldsymbol{Vec_F}$.

2) *Si $V', W' \in \boldsymbol{Vec_F}$, entonces:*

   a) $U(T + S) = UT + US$ *para cada* $U \in Hom(W, W')$, $T, S \in Hom(V, W)$.

   b) $(T + S)U = TU + SU$ *para cada* $U \in Hom(V', V)$, $T, S \in Hom(V, W)$.

   c) $U(cT) = (cU)T = c(UT)$, *para cada* $c \in F$, $U \in Hom(W, W')$, $T \in Hom(V, W)$.

Demostración.

1) En el Teorema 1.4.3, se mostró que $Hom(V, W)$ es un espacio vectorial, definiendo la suma

$$\begin{array}{rccc} + : & Hom(V,W) \times Hom(V,W) & \to & Hom(V,W) \\ & (T,S) & \mapsto & T+S \end{array}$$

con $(T+S)(v) = T(v) + S(v)$ para cada $v \in V$ y el producto por escalar

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & F \times Hom(V,W) & \to & Hom(V,W) \\ & (c,T) & \mapsto & cT \end{array}$$

donde $(cT)(v) = cT(v)$ para cada $v \in V$.

2) Sean $V', W' \in \mathbf{Vec}_F$.

   a) Sean $U \in Hom(W, W')$, $T, S \in Hom(V, W)$ y tomemos $v \in V$. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (U(T+S))(v) & = & U((T+S)(v)) \\ & = & U(T(v) + S(v)) \\ & = & U(T(v)) + U(S(v)) \\ & = & (UT)(v) + (US)(v) \end{array}$$

   es decir, $(U(T+S))(v) = (UT)(v) + (US)(v)$, lo cual ocurre para cada $v \in V$.

   b) Sean $U \in Hom(V', V)$, $T, S \in Hom(V, W)$ y tomemos $v' \in V'$. Se cumplen lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} ((T+S)U)(v') & = & (T+S)(U(v')) \\ & = & T(U(v')) + S(U(v')) \\ & = & (TU)(v') + (SU)(v') \end{array}$$

   es decir, $((T+S)U)(v') = (TU)(v') + (SU)(v')$ para cada $v' \in V'$.

   c) Sean $c \in F$, $U \in Hom(W, W')$, $T \in Hom(V, W)$ y consideremos $v \in V$ un elemento arbitrario. Luego, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (U(cT))(v) & = & U((cT)(v)) \\ & = & U(cT(v)) \\ & = & cU(T(v)) \\ & = & c(UT)(v) \end{array}$$

   es decir, $(U(cT))(v) = ((cU)T = (v) = c(UT)(v)$, de donde obtenemos lo deseado.

□

Observación 3.1.1. *Si F es un campo, para cada $V, W \in \boldsymbol{Vec}_F$ sabemos que $\boldsymbol{Vec}_F(V, W)$ está conformado por las transformaciones lineales, que es precisamente lo que nosotros definimos como $Hom(V, W)$, por lo denotaremos $\boldsymbol{Vec}_F(V, W)$ por $Hom(V, W)$, es decir:*

$$\boldsymbol{Vec}_F(V, W) = Hom(V, W).$$

Definición 3.1.1. *Sea F un campo. Un funtor $G : \boldsymbol{Vec}_F \to \boldsymbol{Vec}_F$ (covariante o contravariante) es aditivo si para cada $V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$ y para cada $T, S \in Hom(V, W)$, se cumple que $G(T + S) = G(T) + G(S)$.*

Teorema 3.1.1. *Sea F un campo y $G : \boldsymbol{Vec}_F \to \boldsymbol{Vec}_F$ un funtor aditivo covariante o contravariante. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $G(\overline{0}) = \overline{0}$*, donde* $\overline{0} : V \to W$ *es la transformación lineal cero.*

2) $G(\{0\}) = \{0\}$.

Demostración.

1) Sean $V, W \in \mathbf{Vec}_F$. Como $Hom(V, W)$ y $Hom(G(V), G(W))$ son espacios vectoriales sobre F, en particular son grupos abelianos. Definamos

$$\begin{array}{rccc} G_{V,W}: & Hom(V,W) & \to & Hom(G(V),G(W)) \\ & T & \mapsto & G(T) \end{array}$$

por hipótesis para cada $T, S \in Hom(V, W)$ se cumple que $G_{V,W}(T + S) = G_{V,W}(T) + G_{V,W}(S)$, por lo que $G_{V,W}$ es un morfismo de grupos abelianos. Como $\overline{0} : V \to W$ es el elemento neutro en $Hom(V, W)$ respecto a la suma, entonces $G_{V,W}(\overline{0}) = \overline{0}$, es decir, $G(\overline{0}) = \overline{0}$.

2) Tomemos $V \in \mathbf{Vec}_F$. Veamos que $id_V = \overline{0}$ si y solo si $V = \{0\}$: supongamos primero que $id_V = 0$, luego para cada $v \in V$, $v = id_V(v) = \overline{0}(v) = 0$, es decir, $v = 0$ para cada $v \in V$, en consecuencia $V = \{0\}$. Si $V = \{0\}$ es claro que $id_V = \overline{0}$.
Notemos ahora las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} id_{G(\{0\})} & = & G(id_{\{0\}}) \\ & = & G(\overline{0}) \\ & = & \overline{0} \end{array}$$

es decir, $id_{G(\{0\})} = \overline{0}$. Por la afirmación probada anteriormente tenemos que $G(\{0\}) = \{0\}$.

□

Teorema 3.1.2. *Sea* F *un campo,* $G : \boldsymbol{Vec}_F \to \boldsymbol{Vec}_F$ *un funtor (covariante o contravariante),* $V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$*. Si* $V \cong W$*, entonces* $G(V) \cong G(W)$*.*

Demostración. Supongamos que $V \cong W$, entonces existe un isomorfismo $T \in Hom(V, W)$. Por definición de isomorfismo, existe $S \in Hom(W, V)$ tal que $ST = id_V$ y $TS = id_W$.

- Si G es covariante, entonces $G(T) \in Hom(G(V), G(W))$ y $G(S) \in Hom(G(W), G(V))$. Ahora bien, se cumple que:
$$\begin{array}{rcl} id_{G(V)} & = & G(id_V) \\ & = & G(ST) \\ & = & G(S)G(T) \end{array}$$
y
$$\begin{array}{rcl} id_{G(W)} & = & G(id_W) \\ & = & G(TS) \\ & = & G(T)G(S) \end{array}$$
es decir, $G(S)G(T) = id_{G(V)}$ y $G(T)G(S) = id_{G(W)}$. En consecuencia $G(T) \in Hom(G(V), G(W))$ es un isomorfismo, de donde se concluye que $G(V) \cong G(W)$.

- Si G es contravariante, entonces $G(T) \in Hom(G(W), G(V))$ y $G(S) \in Hom(G(V), G(W))$. Además, tenemos que
$$\begin{array}{rcl} id_{G(V)} & = & G(id_V) \\ & = & G(ST) \\ & = & G(T)G(S) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} id_{G(W)} & = & G(id_W) \\ & = & G(TS) \\ & = & G(S)G(T) \end{array}$$

es decir, $G(T)G(S) = id_{G(V)}$ y $G(S)G(T) = id_{G(W)}$, por lo que $G(S) \in Hom(G(V), G(W))$ es isomorfismo y consecuentemente, $G(V) \cong G(W)$.

$\square$

3.1.2. Hom covariante y contravariante

Teorema 3.1.3. *Sea F un campo y $V \in$ **Vec**$_F$. Entonces la asignación*

$$Hom(V, \_) : \quad \mathbf{Vec}_F \quad \rightarrow \quad \mathbf{Vec}_F$$

definida en objetos como

$$\begin{array}{rccc} Hom(V, \_) : & Obj(\mathbf{Vec}_F) & \rightarrow & Obj(\mathbf{Vec}_F) \\ & W & \mapsto & Hom(V, W) \end{array}$$

y en morfismos como

$$\begin{array}{rccc} Hom(V, \_) : & Hom(W, W') & \rightarrow & Hom(Hom(V, W), Hom(V, W')) \\ & T & \mapsto & Hom(V, T) = T_\star \end{array}$$

donde $T_\star$ se define por

$$\begin{array}{rccc} T_\star : & Hom(V, W) & \rightarrow & Hom(V, W') \\ & S & \mapsto & TS \end{array}$$

*para cada $W, W' \in Obj($**Vec**$_F)$, es un funtor aditivo covariante.*

Demostración. Por el Teorema 1.4.3, para cada $W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ se tiene que $Hom(V, W) \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, por lo que la asignación está bien definida en objetos.
Ahora, sean $W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(W, W')$. Veamos que $T_* : Hom(V, W) \to Hom(V, W')$ es una transformación lineal. Sean $c \in F, S, S' \in Hom(V, W)$. Entonces, usando la Proposición 3.1.1, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} T_*(S + cS') & = & T(S + cS') \\ & = & TS + T(cS') \\ & = & TS + c(TS') \\ & = & T_*(S) + cT_*(S) \end{array}$$

es decir, $T_*(S + cS') = T_*(S) + cT_*(S)$ para cada $c \in F, S, S' \in Hom(V, W)$. Por lo tanto, T_* es una transformación lineal y de esta manera mostramos que la asignación en morfismos es correcta. Nos falta ver esta asignación satisface la definición de funtor covariante, lo cual hacemos a continuación:

1) Sean $W, W', W'' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(W, W')$, $S \in Hom(W', W'')$, entonces $ST \in Hom(W, W'')$. Debemos mostrar que $(ST)_\star = S_\star T_\star$. Es claro que ambas funciones comparten el mismo dominio, a saber $Hom(V, W)$. Ahora, si $U \in Hom(V, W)$, por definición de nuestra asignación tenemos que $(ST)_\star(U) = (ST)U$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (S_\star T_\star)(U) & = & S_\star(T_\star(U)) \\ & = & S_\star(TU) \\ & = & S(TU) \end{array}$$

es decir, $(S_\star T_\star)(U) = S(TU)$. Aplicando la asociatividad de la composición tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (ST)_\star(U) & = & (ST)U \\ & = & S(TU) \\ & = & (S_\star T_\star)(U) \end{array}$$

es decir, $(ST)_\star(U) = (S_\star T_\star)(U)$, lo cual ocurre para cada $U \in Hom(V,W)$, de ahí que $(ST)_\star = S_\star T_\star$, o sea, $Hom(V,ST) = Hom(V,S)Hom(V,T)$.

2) Sea $W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Debemos ver que $(id_W)_\star = id_{Hom(V,W)}$, en efecto, si $U \in Hom(V,W)$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (id_W)_\star(U) & = & id_W U \\ & = & U \\ & = & id_{Hom(V,W)}(U) \end{array}$$

de ahí que $(id_W)_\star = id_{Hom(V,W)}$, o sea, $Hom(V, id_W) = id_{Hom(V,W)}$.

Hasta aquí hemos visto que $Hom(V,\_)$ es un funtor covariante. Finalmente, si $W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T, S \in Hom(W,W')$, entonces $Hom(V, T+S) = (T+S)_\star$, pero si aplicamos la Proposición 3.1.1, para cada $U \in Hom(V,W)$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (T+S)_\star(U) & = & (T+S)U \\ & = & TU + SU \\ & = & T_\star(U) + S_\star(U) \end{array}$$

de donde concluimos que $(T+S)_\star = T_\star + S_\star$, es decir, $Hom(V, T+S) = Hom(V,T) + Hom(V,S)$. Por lo tanto, $Hom(V,\_)$ es un funtor aditivo covariante. □

Sabemos que si F es un campo, F es un espacio vectorial sobre sí mismo, además tiene dimensión 1, pues $\{1_F\}$ es una base para F. Si V es cualquier espacio vectorial sobre F, podríamos preguntarnos: ¿habrá alguna relación entre V y $Hom(F,V)$? Resulta que la respuesta es si, el siguiente teorema nos lo explica detalladamente con un enfoque categórico.

Teorema 3.1.4. *Sea F un campo. Entonces el funtor $Hom(F,\_) : \boldsymbol{Vec}_F \to \boldsymbol{Vec}_F$ es naturalmente isomorfo al funtor identidad $\boldsymbol{Id} : \boldsymbol{Vec}_F \to \boldsymbol{Vec}_F$.*

Demostración. Sea $V \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \psi : & Hom(F,V) & \to & V \\ & T & \mapsto & T(1_F) \end{array}$$

Es claro que ψ está bien definida. Vamos a ver que es una transformación lineal, para eso tomemos $c \in F$, $T, S \in Hom(F,V)$. Entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \psi(T+cS) & = & (T+cS)(1_F) \\ & = & T(1_F) + (cS)(1_F) \\ & = & T(1_F) + cS(1_F) \\ & = & \psi(T) + c\psi(S) \end{array}$$

es decir, $\psi(T+cS) = \psi(T) + c\psi(S)$ para cada $c \in F, S, T \in Hom(F,V)$. En consecuencia ψ es una transformación lineal.
Para ver que es monomorfismo, tomemos $T \in Ker(\psi)$, entonces $\psi(T) = 0$, esto es, $T(1_F) = 0$, así que T se anula en la base de F, en consecuencia $T = \overline{0}$.
Ahora, veamos que ψ es epimorfismo: sea $v \in F$, definamos

$$\begin{array}{rccc} f_v : & \{1_F\} & \to & V \\ & 1_F & \mapsto & v \end{array}$$

por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T_v : F \to V$ tal que $T_v(1_F) = v$. Así, tenemos que $\psi(T_v) = v$, con $T_v \in Hom(F, V)$.
Hasta el momento hemos probado que ψ es un isomorfismo, falta ver que es natural. Para mostrarlo, tomemos $W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y $T \in Hom(V, W)$. Debemos mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom(F,V) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "T_\star"'] & V \arrow[d, "T"] \\
Hom(F,W) \arrow[r, "\psi'"] & W
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, para eso tomemos $S \in Hom(F, V)$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} (T\psi)(S) &= T(\psi(S)) \\ &= T(S(1_F)) \end{aligned} \tag{I}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} (\psi' T_\star)(S) &= \psi'(T_\star(S)) \\ &= \psi'(TS) \\ &= (TS)(1_F) \\ &= T(S(1_F)) \end{aligned} \tag{II}$$

Al hacer la comparación de las igualdades de (I) y (II), concluimos que $(T\psi)(S) = (\psi' T_\star)(S)$ y dado que S fue tomado de forma arbitraria, tenemos que $T\psi = \psi' T_\star$, lo que se necesitaba. $\square$

Corolario 3.1.1. *Sea F un campo y $V \in$ **Vec**$_F$. Entonces $dim(V) = dim(Hom(F, V))$.*

Demostración. Por el teorema anterior, $V \cong Hom(V, F)$. Por el Teorema fundamental del álgebra lineal, se tiene que $dim(V) = dim(Hom(F, V))$. $\square$

Ejemplo 3.1.1. *Si F es un campo, tenemos que $F \cong Hom(F, F)$, entonces $dim(Hom(F, F)) = dim(F) = 1$.*

Veamos ahora que el Hom covariante se porta muy bien respecto a monomorfismos y epimorfismos, lo cual se expone en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.5. *Sea F un campo, $V \in$ **Vec**$_F$.*

1) *Para cada $W, W' \in$ **Vec**$_F$, si $T : W \to W'$ es monomorfismo, entonces $T_* : Hom(V, W) \to Hom(V, W')$ es monomorfismo.*

2) *Para cada $W, W' \in$ **Vec**$_F$, si $T : W \to W'$ es epimorfismo, entonces $T_* : Hom(V, W) \to Hom(V, W')$ es epimorfismo.*

Demostración.

1) Seaan $W, W' \in \mathbf{Vec}_F$ y supongamos que $T : W \to W'$ es monomorfismo. Vamos a mostrar que $T_* : Hom(V, W) \to Hom(V, W')$ es monomorfismo. Sea $\phi \in Ker(T_*)$, luego $T_*(\phi) = T\phi = \overline{0}$. Debemos ver que $\phi = \overline{0}$. Notemos que $T\phi = \overline{0} = \overline{0}\phi$, pero al ser T monomorfismo es cancelable por la izquierda, así que $\phi = \overline{0}$. Por lo tanto $Ker(T_*) = \{\overline{0}\}$ y así se sigue que T_* es monomorfismo.

2) Sean $W, W' \in \mathbf{Vec}_F$ y supongamos que $T : W \to W'$ es epimorfismo. Debemos demostrar que $T_* : Hom(V, W) \to Hom(V, W')$ es epimorfismo. Sea $\psi \in Hom(V, W')$, como $T : W \to$

W' es epimorfismo, por el Teorema 1.4.9, existe $S : W' \to W$ tal que $TS = id_{W'}$. Así, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \psi & = & id_{W'}\psi \\ & = & (TS)\psi \\ & = & T(S\psi) \\ & = & T_*(S\psi) \end{array}$$

es decir, $\psi = T_*(S\psi)$, con $S\psi \in Hom(V, W)$, de donde se sigue la suprayectividad de T_*.

□

Teorema 3.1.6. *Sea F un campo y $W \in \boldsymbol{Vec}_F$. Entonces la asignación*

$$Hom(\_, W) : \quad \boldsymbol{Vec}_F \quad \to \quad \boldsymbol{Vec}_F$$

definida en objetos como

$$\begin{array}{rccc} Hom(\_, W) : & Obj(\boldsymbol{Vec}_F) & \to & Obj(\boldsymbol{Vec}_F) \\ & V & \mapsto & Hom(V, W) \end{array}$$

y en morfismos como

$$\begin{array}{rccc} Hom(\_, W) : & Hom(V, V') & \to & Hom(Hom(V', W), Hom(V, W)) \\ & T & \mapsto & Hom(T, W) = T^\star \end{array}$$

donde $T^\star$ se define como

$$\begin{array}{rccc} T^\star : & Hom(V', W) & \to & Hom(V, W) \\ & S & \mapsto & ST \end{array}$$

para cada $V, V' \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$, es un funtor aditivo contravariante.

Demostración. De acuerdo al Teorema 1.4.3, para cada $V \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $Hom(V, W) \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, de ahí que nuestra asignación está bien definida en objetos.
Tomemos ahora $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(V, V')$. Debemos mostrar que $T^\star : Hom(V', W) \to Hom(V, W)$ es una transformación lineal. Sean $c \in F, S, S' \in Hom(V', W)$. De acuerdo a la Proposición 3.1.1, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} T^\star(S + cS') & = & (S + cS')T \\ & = & ST + (cS')T \\ & = & ST + c(S'T) \\ & = & T^\star(S) + cT^\star(S) \end{array}$$

es decir, $T^\star(S + cS') = T^\star(S) + cT^\star(S)$ para cada $c \in F, S, S' \in Hom(V', W)$. De esta manera se sigue que $T^\star$ es una transformación lineal y en consecuencia nuestra asignación en morfismos es válida.
Vamos a ver que esta asignación satisface la definición de funtor contravariante:

1) Sean $V, V', V'' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Tomemos $T \in Hom(V, V')$, $S \in Hom(V, V'')$, entonces $ST \in Hom(V, V'')$. Necesitamos demostrar que $(ST)^\star = T^\star S^\star$. Notemos que tanto $(ST)^\star$ como $T^\star S^\star$ tienen como dominio a $Hom(V'', W)$, lo único que nos falta es ver que coinciden en cada elemento de su dominio común, en efecto, tomemos $U \in Hom(V'', W)$, por un lado tenemos que $(ST)^\star(U) = U(ST)$, lo cual es debido a la definición de $(ST)^\star$. Por otro lado, para $T^\star S\star$ tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (T^\star S^\star)(U) & = & T^\star(S^\star(U)) \\ & = & T^\star(US) \\ & = & (US)T \end{array}$$

lo cual, al utilizar la asociatividad de la composición de funciones nos conduce a lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}(ST)^{\star}(U) & = & U(ST)\\ & = & (US)T\\ & = & (T^{\star}S^{\star})(U)\end{array}$$

es decir, $(ST)^{\star}(U) = (T^{\star}S^{\star})(U)$, lo cual ocurre para cada $U \in Hom(V'', W)$. Por consiguiente, $(ST)^{\star} = T^{\star}S^{\star}$, o bien, $Hom(ST, W) = Hom(T, W)Hom(S, W)$.

2) Tomemos $V \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Debemos exhibir que $(id_V)^{\star} = id_{Hom(V,W)}$, en efecto, sea $U \in Hom(V, W)$, luego tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}(id_V)^{\star}(U) & = & Uid_V\\ & = & U\\ & = & id_{Hom(V,W)}(U)\end{array}$$

es decir, $(id_V)^{\star}(U) = id_{Hom(V,W)}(U)$, lo cual sucede para cada $U \in Hom(V, W)$. Por lo tanto, $(id_V)^{\star} = id_{Hom(V,W)}$, o sea, $Hom(id_V, W) = id_{Hom(V,W)}$.

Con lo anterior hemos probado que $Hom(\_, W) : \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$ es un funtor contravariante. Finalmente, vamos a mostrar que se cumple la aditividad, en efecto, sea $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T, S \in Hom(V, V')$. Aplicando la Proposición 3.1.1, tenemos que para cada $U \in Hom(V', W)$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}(T+S)^{\star}(U) & = & U(T+S)\\ & = & UT+US\\ & = & T^{\star}(U)+S^{\star}(U)\end{array}$$

es decir, $(T+S)^{\star}(U) = T^{\star}(U) + S^{\star}(U)$ para cada $U \in Hom(V, V')$, así que $(T+S)^{\star} = T^{\star} + S^{\star}$, o bien, $Hom(T+S, W) = Hom(T, W) + Hom(S, W)$. □

A diferencia del Hom covariante, el Hom contravariante no se comporta tan bondadoso con los monomorfismos y epimorfismos, a continuación se presentan un par de ejemplos.

Ejemplo 3.1.2. *Consideremos el campo $\mathbb{Z}_2$, el cual es un espacio vectorial sobre sí mismo, $V \in$ $\boldsymbol{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ de dimensión 2 con base $\beta = \{v_1, v_2\}$ y consideremos $W = \langle v_1\rangle \leq V$. Consideremos el morfismo inclusión $\iota : W \to V$, el cual sabemos que es monomorfismo. Vamos a ver que $\iota^{\star} : Hom(V, \mathbb{Z}_2) \to Hom(W, \mathbb{Z}_2)$ no es monomorfismo. Cosideremos la función*

$$\begin{array}{rccc} g: & \beta & \to & \mathbb{Z}_2\\ & v_1 & \mapsto & 0\\ & v_2 & \mapsto & 1.\end{array}$$

Aplicando la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $T : V \to \mathbb{Z}_2$ tal que $T_{|\beta} = g$. Como $(T\iota)(v_1) = 0$ y $\{v_1\}$ es base de W, entonces $T\iota = \overline{0}$, o sea $\iota^{\star}(T) = \overline{0}$, es decir, $T \in Ker(\iota^{\star})$. Sin embargo, $T(v_2) = 1 \neq 0$, en consecuencia $T \neq \overline{0}$. Por lo tanto, $Ker(\iota^{\star}) \neq \{\overline{0}\}$, con lo que se sigue que $\iota^{\star}$ no es monomorfismo.

Ejemplo 3.1.3. *Consideremos el campo $\mathbb{Z}_2$ y sea $V \in \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ de dimensión 2 con base $\beta = \{v_1, v_2\}$ y tomemos $W = \langle v_1\rangle \leq V$. Vamos a considerar el epimorfismo natural*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & V & \to & V/W\\ & v & \mapsto & v+W.\end{array}$$

Recordemos que $\overline{\beta} = \{v_2 + W\}$ es base de V/W. Lo que vamos a demostrar es que $\pi^{\star}$: $Hom(V/W, \mathbb{Z}_2) \to Hom(V, \mathbb{Z}_2) \to$ no es epimorfismo. Consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} h: & \beta & \to & \mathbb{Z}_2\\ & v_1 & \mapsto & 1\\ & v_2 & \mapsto & 0.\end{array}$$

Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $\phi : V \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\phi_{|\beta} = h$. Vamos a ver que $\phi \notin Im(\pi^\star)$. Tomemos $\alpha \in Hom(V/W, \mathbb{Z}_2)$, luego α tiene dos posibilidades, $\alpha = \overline{0}$ ó $\alpha(v_2 + W) = 1$, pues al ser transformación lineal, es suficiente saber como está definida en el básico $v_2 + W$. Si $\alpha = \overline{0}$, entonces $\pi^\star(\alpha) = \alpha\pi = \overline{0}\pi = \overline{0}$, mientras que $\phi \neq \overline{0}$, ya que $\phi(v_1) = 1 \neq 0$, en consecuencia, $\pi^\star(\alpha) \neq \phi$. Ahora, si $\alpha(v_2 + W) = 1$, entonces $\alpha\pi(v_2) = 1$, mientras que $\phi(v_2) = 0$, consecuentemente $\pi^\star(\alpha) \neq \phi$. Así las cosas, hemos visto que $\phi \notin Im(\pi^\star)$, de donde se concluye que $\pi^\star$ no es epimorfismo.

Comportamiento con productos y sumas directas

Una vez que hemos construido nuestros funtores *Hom* covariante y contravariante, resulta interesante investigar acerca de su comportamiento respecto a los productos y sumas directas.

Teorema 3.1.7. *Sea F un campo, $V \in \boldsymbol{Vec}_F$ y $\{_F W_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Entonces:*

1) *Existe un isomorfismo entre $Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right)$ y $\prod_{i\in I} Hom(V, W_i)$, el cuál está definido por*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right) & \to & \prod_{i\in I} Hom(V, W_i) \\ & T & \mapsto & (\pi_i T)_{i\in I} \end{array}$$

donde $\pi_i : \prod_{i\in I} W_i \to W_i$ es la i-ésima proyección para cada $i \in I$.

2) *El isomorfismo definido en 1) es natural en el siguiente sentido: si $\{_F Z_j\}_{j\in J}$ es una familia de espacios vectoriales y existe $i_0 \in I$ tal que para cada $j \in J$, existe una transformación lineal $T_{i_0 j} : W_{i_0} \to Z_j$, entonces existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right) \arrow[r, "T_\star"] \arrow[d, "\psi"'] & Hom\left(V, \prod_{j\in J} Z_j\right) \arrow[d, "\psi'"] \\ \prod_{i\in I} Hom(V, W_i) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \prod_{j\in J} Hom(V, Z_j) \end{tikzcd}$$

donde T y $\widetilde{T}$ se definen como

$$\begin{array}{rccc} T : & \prod_{i\in I} W_i & \to & \prod_{j\in J} Z_j \\ & (w_i)_{i\in I} & \mapsto & (T_{i_0 j}(w_{i_0}))_{j\in J} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{T} : & \prod_{i\in I} Hom(V, W_i) & \to & \prod_{j\in J} Hom(V, Z_j) \\ & (S_i)_{i\in I} & \mapsto & (T_{i_0 j} S_{i_0})_{j\in J}. \end{array}$$

Demostración.

1) Vamos a empezar por construir ψ. Como para cada $i \in I$, $\pi_i : \prod_{i\in I} W_i \to W_i$ es una transformación lineal, entonces $\pi_{i\star} : Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right) \to Hom(V, W_i)$ es una tranformación lineal para cada $i \in I$. Así las cosas, $\left\{\pi_{i\star} : Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right) \to Hom(V, W_i)\right\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales. Por la Propiedad universal del producto directo, existe una única transformación lineal $\psi : Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right) \to \prod_{i\in I} Hom(V, W_i)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_{i\star}"'] & \prod_{i\in I} Hom(V, W_i) \arrow[d, "\Pi_i"] \\ & Hom(V, W_i) \end{tikzcd}$$

para cada $i \in I$. Solo nos falta ver la regla de correspondencia de ψ. Tomemos $S \in Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right)$, luego $\psi(S) \in \prod_{i\in I} Hom(V, W_i)$, esto es, $\psi(S) = (S_i)_{i\in I}$, donde $S_i \in Hom(V, W_i)$ para cada $i \in I$. Ahora bien, para cada $i \in I$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} S_i & = & \Pi_i((S_i)_{i\in I}) \\ & = & \Pi_i(\psi(S)) \\ & = & (\Pi_i\psi)(S) \\ & = & \pi_{i\star}(S) \\ & = & \pi_i S \end{array}$$

es decir, $S_i = \pi_i S$ para cada $i \in I$. En consecuencia, $\psi(S) = (\pi_i S)_{i\in I}$, lo cual ocurre para cada $S \in Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right)$, dado que S se tomó de forma arbitraria.
Veamos ahora que ψ es monomorfismo, para eso tomemos $T \in Ker(\psi)$. Luego $\psi(T) = (\overline{0}_i)_{i\in I} = (\pi_i T)_{i\in I}$, esto es, $\pi_i T = \overline{0}_i$ para cada $i \in I$. Debemos ver que $T = \overline{0}$, sea $v \in V$, entonces $T(v) \in \prod_{i\in I} W_i$, o sea, $T(v) = (w_i)_{i\in I}$ donde $w_i \in W_i$ para cada $i \in I$. Así, para cada $i \in I$, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} w_i & = & \pi_i((w_i)_{i\in I}) \\ & = & \pi_i(T(v)) \\ & = & (\pi_i T)(v) \\ & = & \overline{0}_i(v) \\ & = & 0_{W_i} \end{array}$$

es decir, $w_i = 0_{W_i}$ para cada $i \in I$, esto es, $T(v) = (0_{W_i})_{i\in I}$ para cada $v \in V$. Por lo tanto, $T = \overline{0}$.
Finalmente vamos a exhibir que ψ es epimorfismo. Sea $f \in \prod_{i\in I} Hom(V, W_i)$, luego $f = (T_i)_{i\in I}$, donde para cada $i \in I$, $T_i \in Hom(V, W_i)$. Así, $\{T_i : V \to W_i\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales, por la Propiedad universal del producto directo, existe una única transformación lineal $U : V \to \prod_{i\in I} W_i$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_j"'] & \prod_{i\in I} W_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ & V_j \end{tikzcd}$$

para cada $j \in I$, es decir, $\pi_j U = T_j$ para cada $j \in I$. De esta manera, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \psi(U) & = & (\pi_i U)_{i\in I} \\ & = & (T_i)_{i\in I} \\ & = & f \end{array}$$

es decir, $\psi(U) = f$, con $U \in Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right)$.
Por lo tanto, ψ es isomorfismo.

2) Supongamos que $\{_F Z_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios vectoriales y que existe $i_0 \in I$ tal que para cada $j \in J$, existe una transformación lineal $T_{i_0 j} : W_{i_0} \to Z_j$. Vamos a construir primero T. Por hipótesis, $\{T_{i_0 j} : W_{i_0} \to Z_j\}_{j\in J}$ es una familia de transformaciones lineales, aplicando la Propiedad universal del producto directo, existe una única transformación lineal $\eta : W_{i_0} \to \prod_{j\in J} Z_j$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} W_{i_0} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "T_{i_0 k}"'] & \prod_{j\in J} Z_j \arrow[d, "\pi'_j"] \\ & Z_j \end{tikzcd}$$

para cada $j \in J$. Esto nos induce el diagrama

$$\prod_{i\in I} W_i \xrightarrow{\pi_{i_0}} W_{i_0} \xrightarrow{\eta} \prod_{j\in J} Z_j$$

consecuentemente, $T = \eta\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} W_i \to \prod_{j\in J} Z_j$ es una transformación lineal al ser composición de transformaciones lineales. Si tomamos un elemento arbitrario $(w_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} T((w_i)_{i\in I}) &=& (\eta\pi_{i_0})((w_i)_{i\in I}) \\ &=& \eta(\pi_{i_0}((w_i)_{i\in I})) \\ &=& \eta(w_{i_0}) \end{array}$$

es decir, $T((w_i)_{i\in I}) = \eta(w_{i_0})$. Como $\eta(w_{i_0}) \in \prod_{j\in J} Z_j$, entonces $\eta(w_{i_0}) = (z_j)_{j\in J}$, donde $z_j \in Z_j$ para cada $j \in J$. Luego, para cada $j \in J$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} z_j &=& \pi'_j((z_j)_{j\in J}) \\ &=& \pi'_j(\eta(w_{i_0})) \\ &=& (\pi'_j\eta)(w_{i_0}) \\ &=& T_{i_0j}(w_{i_0}) \end{array}$$

es decir, $z_j = T_{i_0j}(w_{i_0})$, para cada $j \in J$, en consecuencia, $\eta(w_{i_0}) = (T_{i_0j}(w_{i_0}))_{j\in J}$, o sea, $T((w_i)_{i\in I}) = (T_{i_0j}(w_{i_0}))_{j\in J}$. De está manera hemos construido T y por consiguiente $T_\star$.
Ahora procederemos a construir $\widetilde{T}$. Notemos el siguiente diagrama:

$$\prod_{i\in I} Hom(V, W_i) \xrightarrow{\Pi_{i_0}} Hom(V, W_{i_0}) \xrightarrow{\eta_\star} Hom\left(V, \prod_{j\in J} W_j\right) \xrightarrow{\psi'} \prod_{j\in J} Hom(V, W_j)$$

de donde deducimos que $\widetilde{T} = \psi'\eta_*\Pi_{i_0} : \prod_{i\in I} Hom(V, W_i) \to \prod_{j\in J} Hom(V, W_j)$ es una transformación lineal, ya que es composición de transformaciones lineales. Nos falta ver como está definida $\widetilde{T}$, tomemos $(S_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(V, W_i)$ un elemento arbitrario. Se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T}((S_i)_{i\in I}) &=& (\psi'\eta_*\Pi_{i_0})((S_i)_{i\in I}) \\ &=& (\psi'\eta_*)(\Pi_{i_0}((S_i)_{i\in I})) \\ &=& (\psi'\eta_*)(S_{i_0}) \\ &=& \psi'(\eta_*(S_{i_0})) \\ &=& \psi'(\eta S_{i_0}) \\ &=& (\pi'_j(\eta S_{i_0}))_{j\in J} \\ &=& ((\pi'_j\eta)S_{i_0})_{j\in J} \\ &=& (T_{i_0j}S_{i_0})_{j\in J} \end{array}$$

es decir, $\widetilde{T}((S_i)_{i\in I}) = (T_{i_0j}S_{i_0})_{j\in J}$, para cada $(S_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(V, W_i)$, con lo cual queda construida $\widetilde{T}$.
Finalmente, vamos a demostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right) \arrow[r, "T_\star"] \arrow[d, "\psi"'] & Hom\left(V, \prod_{j\in J} Z_j\right) \arrow[d, "\psi'"] \\ \prod_{i\in I} Hom(V, W_i) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \prod_{j\in J} Hom(V, Z_j) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, para eso tomemos $U \in Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right)$. Por un lado, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} (\psi' T_\star)(U) & = & \psi'(T_\star(U)) \\ & = & \psi'(TU) \\ & = & (\pi'_j(TU))_{j\in J} \\ & = & (\pi'_j((\eta\pi_{i_0})U))_{j\in J} \\ & = & ((\pi'_j\eta)\pi_{i_0}U)_{j\in J} \\ & = & (T_{i_0 j}\pi_{i_0}U)_{j\in J} \end{array} \tag{I}$$

por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} (\widetilde{T}\psi)(U) & = & \widetilde{T}(\psi(U)) \\ & = & \widetilde{T}((\pi_i U)_{i\in I}) \\ & = & (T_{i_0 j}(\pi_{i_0}U))_{j\in J} \\ & = & (T_{i_0 j}\pi_{i_0}U)_{j\in J} \end{array} \tag{II}$$

si comparamos las igualdades de (I) y (II), tenemos que $(\psi' T_\star)(U) = (\widetilde{T}\psi)(U)$, lo cual ocurre para cada $U \in Hom\left(V, \prod_{i\in I} W_i\right)$. Por lo tanto, $\psi' T_\star = \widetilde{T}\psi$, lo que deseábamos.

$\square$

Ahora veamos el comportamiento del Hom contravariante con sumas directas.

Teorema 3.1.8. *Sea F un campo, $W \in \textbf{Vec}_F$ y $\{_F V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Entonces:*

1) Existe un isomorfismo entre $Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right)$ y $\prod_{i\in I} Hom(V_i, W)$, el cuál está definido como

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) & \to & \prod_{i\in I} Hom(V, W_i) \\ & T & \mapsto & (T\iota_i)_{i\in I} \end{array}$$

donde $\iota_i : V_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i$ es la i-ésima inclusión para cada $i \in I$.

2) El isomorfismo dado en 1) es natural en el siguiente sentido: si $\{_F U_j\}_{j\in J}$ es una familia de espacios vectoriales y existe $i_0 \in I$ tal que para cada $j \in J$, existe una transformación lineal $S_{ji_0} : U_j \to V_{i_0}$, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) \arrow[r, "S^\star"] \arrow[d, "\phi"] & Hom\left(\bigoplus_{j\in J} U_j, W\right) \arrow[d, "\phi'"] \\ \prod_{i\in I} Hom(V_i, W) \arrow[r, "\widehat{S}"] & \prod_{j\in J} Hom(U_j, W) \end{tikzcd}$$

donde S y $\widehat{S}$ están definidas como

$$\begin{array}{rccc} S: & \bigoplus_{j\in J} U_j & \to & \bigoplus_{i\in I} V_i \\ & f = (u_j)_{j\in J} & \mapsto & \sum_{j\in sop(f)} (\iota_{i_0} S_{ji_0})(u_j) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \widehat{S}: & \prod_{i\in I} Hom(V_i, W) & \to & \prod_{j\in J} Hom(U_j, W) \\ & (T_i)_{i\in I} & \mapsto & (T_{i_0} S_{ji_0})_{j\in J}. \end{array}$$

Demostración.

1) Como para cada $i \in I$, $\iota_i : V_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i$ es una transformación lineal, entonces, para cada $i \in I$, $\iota_i^\star : Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) \to Hom(V_i, W)$ es una transformación lineal. Luego, $\left\{\iota_i^\star : Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) \to Hom(V_i, W)\right\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales. Por la Propiedad universal del producto directo, existe una única transformación lineal $\phi : Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) \to \prod_{i\in I} Hom(V_i, W)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\iota_i^\star"'] & \prod_{i\in I} Hom(V_i, W) \arrow[d, "\Pi_i"] \\ & Hom(V_i, W) \end{tikzcd}$$

para cada $i \in I$. Falta ver como está definida ϕ, tomemos $T \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right)$. Luego, $\phi(T) \in \prod_{i\in I} Hom(V_i, W)$, esto es, $\phi(T) = (T_i)_{i\in I}$, con $T_i \in Hom(V_i, W)$ para cada $i \in I$. Ahora, para cada $i \in I$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_i &= \Pi_i((T_i)_{i\in I}) \\ &= \Pi_i(\phi(T)) \\ &= (\Pi_i \phi)(T) \\ &= \iota_i^\star(T) \\ &= T\iota_i \end{aligned}$$

es decir, $T_i = T\iota_i$ para cada $i \in I$, en consecuencia, $\phi(T) = (T\iota_i)_{i\in I}$ para cada $T \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right)$.
Veamos que ϕ es monomorfismo, sea $T \in Ker(\phi)$, entonces $\phi(T) = (\overline{0}_i)_{i\in I}$, es decir, $(T\iota_i)_{i\in I} = (\overline{0}_i)_{i\in I}$. Luego, $T\iota_i = \overline{0}_i$ para cada $i \in I$. Debemos demostrar que $T = \overline{0}$. Si $T \neq \overline{0}$, entonces existe $f = (v_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$ tal que $T(f) \neq 0$. Recordemos que $f = \sum_{i\in sop(f)} \iota_i(v_i)$, por lo que concluimos que existe $i_0 \in sop(f)$ tal que $T(\iota_{i_0}(v_{i_0})) \neq 0$, o sea que $T\iota_{i_0} \neq \overline{0}$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $T = \overline{0}$.
Finalmente, veamos que ϕ es epimorfismo. Sea $g = (S_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(V_i, W)$, luego $S_i \in Hom(V_i, W)$ para cada $i \in I$. Así, $\{S_i : V_i \to W\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales, por la Propiedad universal de la suma directa externa, existe una única transformación lineal $S : \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "S_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & W \\ \bigoplus_{i\in I} V_i \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

para cada $i \in I$. Luego, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g &= (S_i)_{i\in I} \\ &= (S\iota_i)_{i\in I} \\ &= \phi(S) \end{aligned}$$

es decir, $g = \phi(S)$ con $S \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right)$, de donde se sigue la suprayectividad de ϕ.

2) Supongamos que $\{_F U_j\}_{j\in J}$ es una familia de espacios vectoriales tal que existe $i_0 \in I$ tal que para cada $j \in J$, tenemos una transformación lineal $S_{ji_0} : U_j \to V_{i_0}$. Vamos a iniciar por construir nuestra S. Notemos que $\{S_{ji_0} : U_j \to V_{i_0}\}_{j\in J}$ es una familia de transformaciones lineales, por la Propiedad universal de la suma directa externa, existe una

única transformación lineal $\rho : \bigoplus_{j\in J} U_j \to V_{i_0}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} U_j \arrow[r, "S_{ji_0}"] \arrow[d, "\iota'_j"'] & V_{i_0} \\ \bigoplus_{j\in J} U_j \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

para cada $j \in J$. Lo anterior nos induce el diagrama

$$\bigoplus_{j\in J} U_j \xrightarrow{\rho} V_{i_0} \xrightarrow{\iota_{i_0}} \bigoplus_{i\in I} V_i$$

por lo que $S = \iota_{i_0}\rho : \bigoplus_{j\in J} U_j \to \bigoplus_{i\in I} V_i$ es una transformación lineal al ser composición de transformaciones lineales. Ahora veamos como queda explícitamente definida S. Tomemos $f = (u_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} U_j$, luego $(u_j)_{j\in J} = \sum_{j\in sop(f)} \iota'_j(u_j)$, lo cual nos conduce a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} S(f) &= S((u_j)_{j\in J}) \\ &= S\left(\sum_{j\in sop(f)} \iota'_j(u_j)\right) \\ &= \sum_{j\in sop(f)} S(\iota'_j(u_j)) \\ &= \sum_{j\in sop(f)} (\iota_{i_0}\rho)(\iota'_j(u_j)) \\ &= \sum_{j\in sop(f)} \iota_{i_0}((\rho\iota'_j)(u_j)) \\ &= \sum_{j\in sop(f)} \iota_{i_0}(S_{ji_0}(u_j)) \\ &= \sum_{j\in sop(f)} (\iota_{i_0}S_{ji_0})(u_j) \end{aligned}$$

es decir, $S(f) = \sum_{j\in sop(f)} (\iota_{i_0}S_{ji_0})(u_j)$, para cada $f = (u_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} U_j$, que es precisamente la transformación lineal que buscábamamos.
Ahora procedamos a construir $\widehat{S}$, para eso observemos el siguiente diagrama:

$$\prod_{i\in I} Hom(V_i, W) \xrightarrow{\Pi_{i_0}} Hom(V_{i_0}, W) \xrightarrow{\rho^\star} Hom\left(\bigoplus_{j\in J} U_j, W\right) \xrightarrow{\phi'} \prod_{j\in J} Hom(U_j, W)$$

por lo que $\widehat{S} = \phi'\rho^\star\Pi_{i_0} : \prod_{i\in I} Hom(V_i, W) \to \prod_{j\in J} Hom(U_j, W)$ es una transformación lineal al ser composición de transformaciones lineales. Veamos la regla de asociación de $\widehat{S}$, para eso tomemos $(T_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(V_i, W)$, se siguen las siguiente igualdades:

$$\begin{aligned} \widehat{S}((T_i)_{i\in I}) &= (\phi'\rho^\star\Pi_{i_0})((T_i)_{i\in I}) \\ &= (\phi'\rho^\star)(\Pi_{i_0}((T_i)_{i\in I})) \\ &= (\phi'\rho^\star)(T_{i_0}) \\ &= \phi'(\rho^\star(T_{i_0})) \\ &= \phi'(T_{i_0}\rho) \\ &= ((T_{i_0}\rho)\iota_j)_{j\in J} \\ &= (T_{i_0}(\rho\iota_j))_{j\in J} \\ &= (T_{i_0}S_{ji_0})_{j\in J} \end{aligned}$$

es decir, $\widehat{S}((T_i)_{i\in I}) = (T_{i_0}S_{ji_0})_{j\in J}$, lo cual sucede para cada $(T_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom(V, W_i)$.
De esta manera queda construida nuestra $\widehat{S}$.
Por último, vamos a ver que se cumple la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) \arrow[r, "S^\star"] \arrow[d, "\phi"'] & Hom\left(\bigoplus_{j\in J} U_j, W\right) \arrow[d, "\phi'"] \\ \prod_{i\in I} Hom(V_i, W) \arrow[r, "\widehat{S}"] & \prod_{j\in J} Hom(U_j, W) \end{tikzcd}$$

para eso tomemos $T \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right)$. Por un lado,

$$\begin{array}{rcl} (\phi' S^\star)(T) & = & \phi'(S^\star(T)) \\ & = & \phi'(TS) \\ & = & ((TS)\iota'_j)_{j\in J} \\ & = & ((T(\iota_{i_0}\rho))\iota'_j)_{j\in J} \\ & = & (T\iota_{i_0}(\rho\iota'_j))_{j\in J} \\ & = & (T\iota_{i_0}S_{ji_0})_{j\in J}. \end{array} \tag{I}$$

Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} (\widehat{S}\phi)(T) & = & \widehat{S}(\phi(T)) \\ & = & \widehat{S}(T\iota_i)_{i\in I} \\ & = & (T\iota_{i_0}S_{ji_0})_{j\in J}. \end{array} \tag{II}$$

Si comparamos las igualdades de (I) y (II), tenemos que $(\phi' S^\star)(T) = (\widehat{S}\phi)(T)$, lo cual ocurre para cada $T \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right)$, de donde concluimos lo deseado.

□

Los isomorfismos de los Teoremas 3.1.7 y 3.1.8, se portan muy bien si nos restringimos a sumas directas de familias finitas de espacios vectoriales, esto se especifica en el siguiente corolario.

Corolario 3.1.2. *Sea F un campo, $V, W \in$ $\boldsymbol{Vec}_F$, $\{_F V_i\}_{i=1}^n$ y $\{_F W_j\}_{j=1}^m$ familias finitas de espacios vectoriales. Entonces:*

1) $Hom\left(V, \bigoplus_{j=1}^m W_j\right) \cong \bigoplus_{j=1}^m Hom(V, W_i)$.

2) $Hom\left(\bigoplus_{i=1}^n V_i, W\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n Hom(V_i, W)$.

Demostración. Recordemos que como nuestras familias de espacios vectoriales son finitas, entonces $\bigoplus_{i=1}^n V_i = \prod_{i=1}^n V_i$, $\bigoplus_{i=1}^n Hom(V_i, W) = \prod_{i=1}^n Hom(V_i, W)$, $\bigoplus_{j=1}^m W_j = \prod_{j=1}^m W_j$ y $\bigoplus_{j=1}^m Hom(V, W_j) = \prod_{j=1}^m Hom(V, W_j)$. Ahora, procederemos a probar 1) y 2):

1) Por el Teorema 3.1.7, ocurre lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} Hom\left(V, \bigoplus_{j=1}^m W_j\right) & = & Hom\left(V, \prod_{j=1}^m W_j\right) \\ & \cong & \prod_{j=1}^m Hom(V, W_j) \\ & = & \bigoplus_{j=1}^m Hom(V, W_j) \end{array}$$

es decir, $Hom\left(V, \bigoplus_{j=1}^m W_j\right) \cong \bigoplus_{j=1}^m Hom(V, W_j)$.

2) Haciendo uso del Teorema 3.1.8, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} Hom\left(\bigoplus_{i=1}^n V_i, W\right) & \cong & \prod_{i=1}^m Hom\left(V_i, W\right) \\ & = & \bigoplus_{i=1}^n Hom(V_i, W) \end{array}$$

es decir, $Hom\left(\bigoplus_{i=1}^n V_i, W\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n Hom(V, W_j)$.

□

Sin embargo, en familias infinitas el isomorfismo del Teorema 3.1.8, no envía necesariamente sumas directas en sumas directas, el siguiente ejemplo da testimonio de este hecho.

Ejemplo 3.1.4. *Sea F un campo, $W \in \boldsymbol{Vec}_F$, κ un cardinal infinito y $\{{}_FV_i\}_{i\in\kappa}$ una familia de espacios vectoriales. Consideremos una familia de transformaciones lineales $\{T_i : V_i \to W\}_{i\in\kappa}$ tal que para cada $i \in \kappa$, $T_i \neq \overline{0}_i$. Por la Propiedad de la suma directa externa, existe una única transformación lineal $T : \bigoplus_{i\in\kappa} V_i \to W$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "T_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & W \\ \bigoplus_{i\in\kappa} V_i \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

para cada $i \in \kappa$. Entonces, tenemos que $\phi(T) = (T_i)_{i\in\kappa}$, donde $T_i \neq \overline{0}_i$ para cada $i \in \kappa$, por lo que $sop(\phi(T)) = \kappa$ y en consecuencia $\phi(T) \notin \bigoplus_{i\in\kappa} V_i$.

Como una aplicación de la teoría que hemos presentado acerca de los funtores Hom, en el siguiente ejemplo vamos a dar una demostración alternativa del Teorema 1.4.17, restringiendonos al caso finito dimensional.

Ejemplo 3.1.5. *Sea F un campo, $V, W \in \boldsymbol{Vec}_F$ tales que $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, donde $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Consideremos bases $\beta = \{x_j\}_{j=1}^n$ y $\gamma = \{y_i\}_{i=1}^m$ de V y W, respectivamente. Por el Teorema 2.2.8, $V = \bigoplus_{j=1}^n \langle x_j\rangle$ y $W = \bigoplus_{i=1}^m \langle y_i\rangle$. Notemos que para cada $i \in \{1,\dots,m\}$ y para cada $j \in \{1,\dots,n\}$ se tiene que $dim(\langle y_i\rangle) = 1$ y $dim(\langle x_j\rangle) = 1$, por lo que $\langle y_i\rangle \cong F$ y $\langle x_j\rangle \cong F$. Si aplicamos los Teoremas 3.1.2, 3.1.4 y el Corolario 3.1.2, se tienen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} Hom(V,W) &= Hom\left(\bigoplus_{j=1}^n \langle x_j\rangle, \bigoplus_{i=1}^m \langle y_i\rangle\right) \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^n Hom\left(\langle x_j\rangle, \bigoplus_{i=1}^m \langle y_i\rangle\right) \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^n Hom\left(F, \bigoplus_{i=1}^m \langle y_i\rangle\right) \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^n \bigoplus_{i=1}^m \langle y_i\rangle \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^n \bigoplus_{i=1}^m F \\ &= \bigoplus_{j=1}^n F^m \\ &= (F^m)^n \\ &\cong F^{mn} \\ &\cong \mathcal{M}_{m\times n}(F) \end{aligned}$$

es decir, $Hom(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(F)$.
Notemos que aunque esta demostración es más corta que la presentada en el Teorema 1.4.17, su desventaja es que no nos dá explicitamente el isomorfismo, el cual muchas veces es necesario. Sin embargo, ambas demostraciones son válidas y podemos utilizar una u otra según el propósito que busquemos.

3.1.3. El caso particular de los funtores dual y bidual

En este apartado haremos ver a los funtores dual y bidual como un caso particular del funtor Hom contravariante.

El funtor dual

Por los resultados que hemos probado hasta el momento, tenemos que si F es un campo, es un espacio vectorial sobre sí mismo, por lo que si ${}_FV$ es un espacio vectorial, entonces $Hom(V,F)$ es un espacio vectorial. Este espacio tiene un nombre muy particular, lo cual definimos a continuación.

Definición 3.1.2 (Espacio dual)**.** *Sea F un campo y ${}_FV$ un espacio vectorial. Definimos el* ***espacio dual de*** *V, el cual denotamos por $V^\star$, de la siguiente manera:*

$$V^\star = Hom(V,F) = \{T \in F^V \mid T \text{ es transformación lineal}\}.$$

Los elementos de $V^\star$ se suelen llamar ***funcionales lineales****.*

Si F es un campo, es un espacio vectorial sobre sí mismo, si definimos la asignación $()^\star$: $\mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$, dada en objetos por:

$$\begin{array}{cccc} ()^\star : & Obj(\mathbf{Vec}_F) & \to & Obj(\mathbf{Vec}_F) \\ & V & \mapsto & V^\star = Hom(V,F) \end{array}$$

y en morfismos por

$$\begin{array}{cccc} ()^\star : & Hom(V,V') & \to & Hom(Hom(V',F),Hom(V,F)) \\ & T & \mapsto & T^\star \end{array}$$

donde $T^\star$ la definimos por

$$\begin{array}{cccc} T^\star : & Hom(V',F) & \to & Hom(V,F) \\ & S & \mapsto & ST \end{array}$$

para cada $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, notemos que es un caso particular de la asignación dada en el Teorema 3.1.6, por lo que $()^\star$ es un funtor aditivo contravariante.
A partir del Teorema 3.1.8, podemos determinar fácilmente un espacio isomorfo para el espacio dual.

Teorema 3.1.9. *Sea F un campo y $V \in$ **Vec**$_F$ de dimensión κ, donde κ es un cardinal (finito o infinito). Entonces $V^\star \cong F^\kappa$.*

Demostración. Como V tiene dimensión κ, podemos elegir una base ordenada $\beta = \{x_i\}_{i\in\kappa}$. Luego $V = \bigoplus_{i\in\kappa}\langle x_i\rangle$. Si aplicamos el Teorema 3.1.8, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} V^\star & = & Hom(V,F) \\ & = & Hom\left(\bigoplus_{i\in\kappa}\langle x_i\rangle, F\right) \\ & \cong & \prod_{i\in\kappa} Hom(\langle x_i\rangle, F) \\ & \cong & \prod_{i\in\kappa} Hom(F,F) \\ & \cong & \prod_{i\in\kappa} F \\ & = & F^\kappa \end{array}$$

es decir, $V^\star \cong F^\kappa$, lo que buscábamos. □

Del teorema anterior concluimos que $dim(V) \leq dim(V^\star)$, ya que $V \cong F^{(\kappa)} \leq F^\kappa \cong V^\star$, donde κ es el cardinal asociado a la dimensión de V.

Observación 3.1.2. *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $V \cong V^\star$, ya que en este caso, $F^\kappa = F^{(\kappa)}$, pues aquí κ es un número natural y por tanto es finito.*

En el caso de dimensión infinita, no es cierto que $V \cong V^\star$. Para más detalles sobre esto se puede consultar [1].

El funtor bidual

Si tenemos un campo F y un espacio vectorial ${}_FV$, tenemos que $Hom(V,F)$ es un espacio vectorial sobre F, el cual es el espacio dual de V del que hablamos anteriormente. Si este hecho lo aplicamos ahora para $V^\star$, tenemos que $Hom(V^\star,F)$ es nuevamente un espacio vectorial. Resulta que este nuevo espacio vectorial tiene un nombre muy famoso, lo cual describimos a continuación.

Definición 3.1.3 (Espacio bidual)**.** *Sea F un campo y ${}_FV$ un espacio vectorial. Definimos el* ***espacio bidual de*** *V, como el espacio $Hom(V^\star,F) = Hom(Hom(V,F),F)$, el cual denotamos por $V^{\star\star}$, es decir, $V^{\star\star} = Hom(V^\star,F) = Hom(Hom(V,F),F)$.*

Con este nuevo espacio que acabamos de definir, al igual que en el caso del espacio dual, también podemos inducir un funtor de la categoría $\mathbf{Vec}_F$ en sí misma, lo cual se hace a continuación. Consideremos un campo F y la asignación $()^{\star\star} : \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$, definida en objetos como

$$\begin{array}{rccc} ()^{\star\star}: & Obj(\mathbf{Vec}_F) & \to & Obj(\mathbf{Vec}_F) \\ & V & \mapsto & V^{\star\star} \end{array}$$

que claramente está bien definida por lo comentado anteriormente. En morfimos, definimos la asignación como

$$\begin{array}{rccc} ()^{\star\star}: & Hom(V,V') & \to & Hom(V^{\star\star},V'^{\star\star}) \\ & T & \mapsto & T^{\star\star} \end{array}$$

donde $T^{\star\star}$ está dada por

$$\begin{array}{rccc} T^{\star\star}: & V^{\star\star} & \to & V'^{\star\star} \\ & S & \mapsto & ST^{*} \end{array}$$

para cada $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Vamos a ver que esta asignación es un funtor aditivo covariante. Por la definición de espacio bidual, es claro que la asignación es correcta en objetos. Ahora, sean $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(V, V')$. Si $S \in V^{\star\star}$, entonces $S \in Hom(V^{\star}, F)$ y sabemos que $T^{\star} \in Hom(V'^{\star}, V^{\star})$, en consecuencia $ST^{\star} \in Hom(V'^{\star}, F)$, es decir, $T^{\star\star}(S) \in Hom(V^{\star\star}, V'^{\star\star})$. Lo anterior muestra que la asignación dada también está bien definida en morfismos. Ahora, vamos a ver que esta asignación satisface las propiedades de funtor covariante:

1) Sean $V, V', V'' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(V, V')$, $S \in Hom(V', V'')$. Por propiedades de las transformaciones lineales tenemos que $ST \in Hom(V, V'')$, en consecuencia, $(ST)^{\star\star} \in Hom(V^{\star\star}, V''^{\star\star})$. Por otro lado, tenemos que $T^{\star\star} \in Hom(V^{\star\star}, V'^{\star\star})$ y $S^{\star\star} \in Hom(V'^{\star\star}, V''^{\star\star})$, así que $S^{\star\star}T^{\star\star} \in Hom(V^{\star\star}, V''^{\star\star})$. Así las cosas, hemos visto que $(ST)^{\star\star}$ y $S^{\star\star}T^{\star\star}$ tienen el mismo dominio, a saber, $V^{\star\star}$. Nos falta ver que coinciden en cada elemento de dicho dominio común, para mostrarlo tomemos $\phi \in V^{\star\star}$, luego se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (ST)^{\star\star}(\phi) &= \phi(ST)^{\star} \\ &= \phi(T^{\star}S^{\star}) \\ &= (\phi T^{\star})S^{\star} \\ &= S^{\star\star}(\phi T^{\star}) \\ &= (S^{\star\star}T^{\star\star})(\phi) \end{aligned}$$

es decir, $(ST)^{\star\star}(\phi) = (S^{\star\star}T^{\star\star})(\phi)$, lo cual ocurre para cada $\phi \in V^{\star\star}$. Por lo tanto, $(ST)^{\star\star} = S^{\star\star}T^{\star\star}$.

2) Sea $V \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Debemos mostrar que $id_V^{\star\star} = id_{V^{\star\star}}$. Como $id_V \in Hom(V, V)$, entonces $id_V^{\star\star} \in Hom(V^{\star\star}, V^{\star\star})$, tambien se tiene que $id_{V^{\star\star}} \in Hom(V^{\star\star}, V^{\star\star})$. Solo nos falta ver que ambas funciones coinciden en $V^{\star\star}$, tomemos $\phi \in V^{\star\star}$. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} id_V^{\star\star}(\phi) &= \phi id_V^{\star} \\ &= \phi id_{V^{\star}} \\ &= \phi \\ &= id_{V^{\star\star}}(\phi) \end{aligned}$$

es decir, $id_V^{\star\star}(\phi) = id_{V^{\star\star}}(\phi)$, lo que sucede para cada $\phi \in V^{\star\star}$. Por lo tanto, $id_V^{\star\star} = id_{V^{\star\star}}$.

De lo anterior queda probado que $()^{\star\star}$ es un funtor covariante. Veamos que además es aditivo, para eso tomemos $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T, S \in Hom(V, V')$, luego, $T + S \in Hom(V, V')$ y consecuentemente, $(T + S)^{\star\star} \in Hom(V^{\star\star}, V'^{\star\star})$. De igual forma, tenemos que $T^{\star\star}, S^{\star\star} \in Hom(V^{\star\star}, V'^{\star\star})$.

Ahora, para cada $\phi \in V^{\star\star}$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (T+S)^{\star\star}(\phi) & = & \phi(T+S)^{\star} \\ & = & \phi(T^{\star}+S^{\star}) \\ & = & \phi T^{\star} + \phi S^{\star} \\ & = & T^{\star\star}(\phi) + S^{\star\star}(\phi) \end{array}$$

de donde se concluye que $(T+S)^{\star\star} = T^{\star\star}(\phi) + S^{\star\star}(\phi)$.
A partir de lo anterior, hemos visto que el espacio bidual nos permite inducir un funtor aditivo covariante, a diferencia del dual que vimos que es contravariante. Una cuestión interesante sobre este funtor es que podemos definir un monomorfismo entre un espacio vectorial y su espacio bidual, además dicho monomorfismo es natural. Este hecho se expone con detalle en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.10. *Sea F un campo y $V \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$. Entonces:*

1) *La función*

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & V & \to & V^{\star\star} \\ & v & \mapsto & \lambda_v \end{array}$$

donde λ_v se define por

$$\begin{array}{rccc} \lambda_v: & V^{\star} & \to & F \\ & f & \mapsto & f(v) \end{array}$$

es un monomorfismo.

2) *El monomorfismo definido en 1) es natural en el siguiente sentido: Para cada $V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$ y $T \in Hom(V,W)$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\lambda"'] & W \arrow[d, "\lambda'"] \\ V^{\star\star} \arrow[r, "T^{\star\star}"] & W^{\star\star} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración.

1) Sean $c \in F, v, v' \in V$, luego, $\lambda(v+cv') = \lambda_{v+cv'}$. Ahora, para cada $f \in V^{\star}$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_{v+cv'}(f) & = & f(v+cv') \\ & = & f(v) + cf(v') \\ & = & \lambda_v(f) + c\lambda_{v'}(f) \\ & = & (\lambda_v + c\lambda_{v'})(f) \end{array}$$

es decir, $\lambda_{v+cv'}(f) = (\lambda_v + c\lambda_{v'})(f)$, esto para cada $f \in V$. Por lo tanto, $\lambda(v+cv') = \lambda(v) + c\lambda(v')$, para cada $c \in F, v, v' \in V$, con lo cual queda probada la linealidad de λ.
Para ver que λ es monomorfismo, tomemos $v \in Ker(\lambda)$, luego $\lambda_v = \overline{0}$, esto es, $f(v) = 0$, para cada $f \in V^{\star}$. Si $v \neq 0$, tenemos que $\{v\}$ es l.i en V, entonces existe una base β de V tal que $v \in \beta$. Definamos la función

$$\begin{array}{rccc} h: & V & \to & F \\ & v & \mapsto & 1 \\ & v \neq u & \mapsto & 0. \end{array}$$

Por la Propiedad universal de las bases, existe una única transformación lineal $\mu : V \to F$ tal que $\mu_{|\beta} = h$. Así, tenemos que $\mu \in V^{\star}$ y satisface que $\mu(v) = 1 \neq 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $v = 0$ y de esta manera se sigue que λ es monomorfismo.

2) Sean $V, W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y $T \in Hom(V, W)$. Debemos mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\lambda"'] & W \arrow[d, "\lambda'"] \\ V^{\star\star} \arrow[r, "T^{\star\star}"] & W^{\star\star} \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Para eso, tomemos $v \in V$. Por un lado,

$$\begin{array}{rcl} (\lambda' T)(v) & = & \lambda'(T(v)) \\ & = & \lambda'_{T(v)} \end{array} \tag{I}$$

por otro lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (T^{\star\star}\lambda)(v) & = & T^{\star\star}(\lambda(v)) \\ & = & T^{\star\star}(\lambda_v) \\ & = & \lambda_v T^{\star} \end{array}$$

es decir, $(T^{\star\star}\lambda)(v) = \lambda_v T^{\star}$. Pero notemos que para cada $f \in V^{\star}$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (\lambda_v T^{\star})(f) & = & \lambda_v(T^{\star}(f)) \\ & = & \lambda_v(fT) \\ & = & (fT)(v) \\ & = & f(T(v)) \\ & = & \lambda'_{T(v)}(f) \end{array}$$

de donde concluimos que $\lambda_v T^{\star} = \lambda'_{T(v)}$. Por las igualdades que tenemos en I), se concluye que $\lambda' T = T^{\star\star}\lambda$, lo que estábamos buscando.

□

Es importante mencionar que si F es un campo y V es un espacio vectorial de dimensión infinita, el morfismo λ definido en el teorema anterior no puede ser isomorfismo, ya que en tal caso $dim(V^{\star\star}) > dim(V^{\star}) > dim(V)$, es decir, $dim(V^{\star\star}) > dim(V)$. Sin embargo, al restringirnos a espacios de dimensión finita la situación cambia.

Corolario 3.1.3. *Si F es un campo y V es un espacio de dimensión finita, entonces $\lambda : V \to V^{\star\star}$, definido como en el teorema anterior, es un isomorfismo natural.*

Demostración. Como V es de dimensión finita, entonces $dim(V) = dim(V^{\star}) = dim(V^{\star\star})$, es decir, $dim(V) = dim(V^{\star\star})$. Luego, $\lambda : V \to V^{\star\star}$ es un monomorfismo entre espacios vectoriales de dimensión finita, además con la misma dimensión. De acuerdo al Teorema 2.1.6, λ es isomorfismo y es natural por el Teorema 3.1.10. □

En sentido categórico, podemos notar lo siguiente. Sea F un campo y consideremos $Fin(\mathbf{Vec}_F)$, donde

$$Obj(Fin(\mathbf{Vec}_F)) = \{V \in \mathbf{Vec}_F \mid dim(V) < \infty\}.$$

Es claro que $Obj(Fin(\mathbf{Vec}_F)) \subseteq Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y para cada $V, W \in Obj(Fin(\mathbf{Vec}_F))$, $Fin(\mathbf{Vec}_F)(V, W) \subseteq \mathbf{Vec}_F(V, W)$. Así las cosas, $Fin(\mathbf{Vec}_F)$ es una subcategoría de $\mathbf{Vec}_F$ y por derecho propio, una categoría. De acuerdo al Corolario 3.1.3, podemos concluir que el funtor bidual es naturalmente isomorfo al funtor identidad en la categoría $Fin(\mathbf{Vec}_F)$.

3.2. Tensor

En esta sección, vamos a exponer el producto tensorial de dos espacios vectoriales sobre un campo F dado y discutiremos el hecho de que con este nuevo objeto, podemos inducir un funtor de la categoría $\mathbf{Vec}_F$ en sí misma, encapsulando así las propiedades tanto para objetos como para morfismos. Antes de proceder con eso, se expondrá un poco sobre las formas bilineales.

3.2.1. Funciones bilineales

Definición 3.2.1. *Sea F un campo, $V, W, Z \in \mathbf{Vec}_F$. Una función $f : V \times W \to Z$ es llamada* ***bilineal****, si para cada $c \in F$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, se tiene que:*

1) $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v', w)$*(Aditividad respecto al primer argumento).*

2) $f(v, w + w') = f(v, w) + f(v, w')$*(Aditividad respecto al segundo argumento).*

3) $f(cv, w) = f(v, cw) = cf(v, w)$*(Homogeneidad en ambos argumentos).*

Cuando $Z = F$, se dice que f es una ***forma bilineal****.*

Ejemplo 3.2.1 (El producto por escalar usual)**.** *Sean F un campo y $V \in \mathbf{Vec}_F$. La función*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & F \times V & \to & V \\ & (c, v) & \mapsto & cv \end{array}$$

es una función bilineal, en efecto, tomemos $c, d \in F, v, v' \in V$. Entonces, por las propiedades del producto por escalar, tenemos lo siguiente:

1) *(Aditividad respecto al primer argumento):*

$$\begin{array}{rcl} \mu(c + d, v) & = & (c + d)v \\ & = & cv + dv \\ & = & \mu(c, v) + \mu(d, v) \end{array}$$

es decir, $\mu(c + d, v) = \mu(c, v) + \mu(d, v)$.

2) *(Aditividad respecto al primer argumento):*

$$\begin{array}{rcl} \mu(c, v + v') & = & c(v + v') \\ & = & cv + cv' \\ & = & \mu(c, v) + \mu(c, v') \end{array}$$

es decir, $\mu(c, v + v') = \mu(c, v) + \mu(c, v')$.

3) *(Homogeneidad en ambos argumentos): Por un lado,*

$$\begin{array}{rcl} \mu(cd, v) & = & (cd)v \\ & = & c(dv) \\ & = & c\mu(d, v) \end{array}$$

es decir, $\mu(cd, v) = c\mu(d, v)$. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} \mu(d, cv) & = & d(cv) \\ & = & (dc)v \\ & = & (cd)v \\ & = & c(dv) \\ & = & c\mu(d, v) \end{array}$$

es decir, $\mu(d, cv) = c\mu(d, v)$.

Así las cosas, el producto por escalar se puede ver como una función bilineal de $F \times V$ en V.

Ejemplo 3.2.2 (La evaluación de una transformación lineal)**.** *Sea F un campo, $V, W \in \boldsymbol{Vec}_F$. Sabemos que $Hom(V, W) \in \boldsymbol{Vec}_F$. Definamos la función*

$$\begin{array}{rccc} Ev: & V \times Hom(V,W) & \to & W \\ & (v,T) & \mapsto & T(v). \end{array}$$

Vamos a ver que $e: V \times W \to W$ es una función bilineal, para eso tomemos $c \in F$, $v, v' \in V$, $T, S \in Hom(V, W)$. Entonces se cumple lo siguiente:

1) (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{array}{rcl} Ev(v+v',T) & = & T(v+v') \\ & = & T(v)+T(v') \\ & = & Ev(v,T)+Ev(v',T) \end{array}$$

es decir, $Ev(v+v',T) = Ev(v,T)+Ev(v',T)$.

2) (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{array}{rcl} Ev(v,T+S) & = & (T+S)(v) \\ & = & T(v)+S(v) \\ & = & Ev(v,T)+Ev(v,S) \end{array}$$

es decir, $Ev(v,T+S) = Ev(v,T)+Ev(v,S)$.

3) (Homogeneidad en ambos argumentos): Por un lado,

$$\begin{array}{rcl} Ev(cv,T) & = & T(cv) \\ & = & cT(v) \\ & = & cEv(T,v) \end{array}$$

es decir, $Ev(cv,T) = cEv(T,v)$. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} Ev(v,cT) & = & (cT)(v) \\ & = & cT(v) \\ & = & cEv(v,T) \end{array}$$

es decir, $Ev(v,cT) = cEv(v,T)$.

De lo anterior se sigue que $Ev: V \times W \to W$ es una función bilineal.
Considerando el espaacio dual de V, $V^* = Hom(V,F)$, tenemos que $Ev: V \times V^* \to F$, definida como antes, es una forma bilineal.

Ejemplo 3.2.3 (La opuesta de una función bilineal)**.** *Sea F un campo, $V, W, Z \in \boldsymbol{Vec}_F$ y $f: V \times W \to Z$ una función bilineal. Es claro que la función*

$$\begin{array}{rccc} f^{op}: & W \times V & \to & Z \\ & (w,v) & \mapsto & f(v,w) \end{array}$$

*es bilineal. f^{op} es llamada **la función bilineal opuesta de** f.*

Consideremos F un campo, $V, W, Z \in \mathbf{Vec}_F$. Consideremos el conjunto

$$Bil(V \times W, Z) = \{f \in Z^{V \times W} \mid f \text{ es bilineal}\}.$$

Es claro que $Bil(V \times W, Z) \subseteq Z^{V \times W}$ y recordemos que $Z^{V \times W}$ es un espacio vectorial. Veamos que $Bil(V \times W, Z) \leq Z^{V \times W}$:

a) Sean $f, g \in Bil(V \times W, Z)$. Debemos mostrar que $f+g \in Bil(V \times W, Z)$, para eso tomemos $c \in F, v, v' \in V, w, w' \in W$ y veamos que $f+g$ satisface la definición de función bilineal:

1) (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{aligned}(f+g)(v+v',w) &= f(v+v',w)+g(v+v',w)\\ &= (f(v,w)+f(v',w))+(g(v,w)+g(v',w))\\ &= (f(v,w)+g(v,w))+(f(v',w)+g(v',w))\\ &= (f+g)(v,w)+(f+g)(v',w)\end{aligned}$$

es decir, $(f+g)(v+v',w) = (f+g)(v,w)+(f+g)(v',w)$.

2) (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{aligned}(f+g)(v,w+w') &= f(v,w+w')+g(v,w+w')\\ &= (f(v,w)+f(v,w'))+(g(v,w)+g(v,w'))\\ &= (f(v,w)+g(v,w))+(f(v,w)+g(v,w'))\\ &= (f+g)(v,w)+(f+g)(v,w')\end{aligned}$$

es decir, $(f+g)(v,w+w') = (f+g)(v,w)+(f+g)(v,w')$.

3) (Homogeneidad en ambos argumentos): Por un lado, observemos que

$$\begin{aligned}(f+g)(cv,w) &= f(cv,w)+g(cv,w)\\ &= cf(v,w)+cg(v,w)\\ &= c(f(v,w)+g(v,w))\\ &= c(f+g)(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $(f+g)(cv,w) = c(f+g)(v,w)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}(f+g)(v,cw) &= f(v,cw)+g(v,cw)\\ &= cf(v,w)+cg(v,w)\\ &= c(f(v,w)+g(v,w))\\ &= c(f+g)(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $(f+g)(v,cw) = c(f+g)(v,w)$.

De lo anterior, se sigue que $f+g \in Bil(V \times W, Z)$.

b) Es claro que

$$\begin{aligned}\overline{0}: \quad V \times W &\rightarrow Z\\ (v,w) &\mapsto 0\end{aligned}$$

es una función bilineal, lo que implica que $\overline{0} \in Bil(V \times W, Z)$.

c) Sean $\alpha \in F$ y $f \in Bil(V \times W, Z)$. Se debe mostrar que $\alpha f \in Bil(V \times W, Z)$, para hacerlo tomemos $c \in F$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$. Vamos a verificar que αf satisface la bilinealidad:

1) (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{aligned}(\alpha f)(v+v',w) &= \alpha f(v+v',w)\\ &= \alpha(f(v,w)+f(v',w))\\ &= \alpha f(v,w)+\alpha f(v',w)\\ &= (\alpha f)(v,w)+(\alpha f)(v',w)\end{aligned}$$

es decir, $(\alpha f)(v+v',w) = (\alpha f)(v,w)+(\alpha f)(v',w)$.

2) (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{aligned}(\alpha f)(v, w+w') &= \alpha f(v, w+w')\\ &= \alpha(f(v,w)+f(v,w'))\\ &= \alpha f(v,w)+\alpha f(v,w')\\ &= (\alpha f)(v,w)+(\alpha f)(v,w')\end{aligned}$$

es decir, $(\alpha f)(v, w+w') = (\alpha f)(v,w)+(\alpha f)(v,w')$.

3) (Homogeneidad en ambos argumentos): Para el primer argumento, tenemos:

$$\begin{aligned}(\alpha f)(cv, w) &= \alpha f(cv,w)\\ &= \alpha(cf(v,w))\\ &= (\alpha c)f(v,w)\\ &= (c\alpha)f(v,w)\\ &= c(\alpha f(v,w))\\ &= c(\alpha f)(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $(\alpha f)(cv,w) = c(\alpha f)(v,w)$. Ahora, para el segundo argumento, se tiene:

$$\begin{aligned}(\alpha f)(v, cw) &= \alpha f(v,cw)\\ &= \alpha(cf(v,w))\\ &= (\alpha c)f(v,w)\\ &= (c\alpha)f(v,w)\\ &= c(\alpha f(v,w))\\ &= c(\alpha f)(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $(\alpha f)(v,cw) = c(\alpha f)(v,cw)$.

De lo anterior, hemos mostrado que $\alpha f \in Bil(V\times W, Z)$.

Así las cosas, hemos mostrado que $Bil(V\times W,Z) \leq Z^{V\times W}$ y por derecho propio, $Bil(V\times W, Z)$ es un espacio vectorial sobre el campo F, esto sucede para cualesquiera $V, W, Z \in \mathbf{Vec}_F$.

Algunas propiedades de las funciones bilineales

Proposición 3.2.1. *Sean F un campo, $V, W, Z \in \boldsymbol{Vec}_F$. Entonces*

$$\begin{array}{rccc} Op: & Bil(V\times W, Z) & \to & Bil(W\times V, Z)\\ & f & \mapsto & f^{op}\end{array}$$

donde $f^{op}: W\times V \to Z$ es como en el Ejemplo 3.2.3, es un isomorfismo.

Demostración. Por el Ejemplo 3.2.3, tenemos que Op está bien definida. Veamos que es una transformación lineal, para eso, tomemos $c\in F$, $f, g \in Bil(V\times W, Z)$, entonces $Op(f+cg) = (f+cg)^{op}$. Ahora, tomando $w\in W, v\in V$ y evaluando $(f+cg)^{op}$ en (w,v), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}(f+cg)^{op}(w,v) &= (f+cg)(v,w)\\ &= f(v,w)+cg(v,w)\\ &= f^{op}(w,v)+cg^{op}(w,v)\end{aligned}$$

es decir, $(f+cg)^{op}(w,v) = f^{op}(w,v)+cg^{op}(w,v)$. Dado que $w\in W, v\in V$ fueron tomados de manera arbitraria, se tiene que $(f+cg)^{op} = f^{op}+cg^{op}$, o sea, $Op(f+cg) = op(f)+cOp(g)$, mostrando de esta manera la linealidad de Op.
Para ver que Op es un monomorfismo, tomemos $f \in Ker(Op)$, entonces $Op(f) = \overline{0}$, esto es, $f^{op}(w,v) = 0$ para cada $w\in W, v\in V$. Así, tenemos que $f(v,w) = 0$, para cada $v\in V, w\in W$.

Esto es mostrar que $f = \overline{0}$ y de esta manera queda probado que $Ker(Op) = \{\overline{0}\}$.
Finalmente, mostremos que Op es epimorfismo. Consideremos $h \in Bil(W \times V, Z)$, definiendo

$$\begin{array}{rccc} g: & V \times W & \to & Z \\ & (v,w) & \mapsto & h(w,v) \end{array}$$

tenemos claramente que $g^{op} \in Bil(W \times V, Z)$ y para cada $w \in W, v \in V$, se cumple que $g^{op}(w,v) = g(v,w) = h(w,v)$, es decir, $g^{op}(w,v) = h(w,v)$, mostrando así que $g^{op} = h$ y consecuentemente, $h = Op(g)$.
Por lo tanto, Op es isomorfismo y consecuentemente, $Bil(V \times W, Z) \cong Bil(W \times V, Z)$. □

Una situación curiosa con las funciones bilineales es que a diferencia de las funciones lineales, la imagen no siempre es un subespacio del contradominio, para corroborarlo observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.4. *Consideremos el campo de los números reales y la función*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & y_1y_2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Es claro que f es una función bilineal. Ahora, notemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in Im(f)$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in Im(f).$$

Sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin Im(f),$$

pues si existieran $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, tales que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & y_1y_2 \end{pmatrix}$, entonces ocurriría que $x_1x_2 = 0$, $x_1y_2 = 1$, $x_2y_1 = 1$ e $y_1y_2 = 0$, de donde se tendría que $1 = 0$, lo cual es absurdo.

Al igual que en el caso de las transformaciones lineales se tiene una propiedad universal de las bases, también se tiene una propiedad universal para las bases en las funciones bilineales.

Teorema 3.2.1 (Propiedad universal de las bases para funciones bilineales)**.** *Sea F un campo, $V, W \in$ **Vec**$_F$, con bases $\beta = \{x_i\}_{i\in I}$ y $\gamma = \{y_j\}_{j\in J}$, respectivamente. Para cada $Z \in$ **Vec**$_F$ y cualquier función $f_0 : \beta \times \gamma \to Z$, existe una única función bilineal $f : V \times W \to Z$ tal que $f_{|\beta\times\gamma} = f_0$. Utilizando diagramas, se dice que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \beta \times \gamma \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & Z \\ V \times W \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Sea $Z \in \mathbf{Vec}_F$ y $\alpha : \beta \times \gamma \to Z$ una función. Sabemos que para cada $v \in V$, existe una única combinación lineal $v = \sum_{i\in I} a_i x_i$, donde $a_i \in F$, $x_i \in \beta$ y los a_i son todos cero salvo una cantidad finita de ellos. De igual manera, para cada $w \in W$, existe una única combinación lineal $w = \sum_{j\in J} b_j y_j$, con $b_j \in F$, $y_j \in \gamma$ y los b_j todos cero, excepto un número finito de ellos. Esto nos motiva a definir la función

$$\begin{array}{cccc} f: & V\times W & \to & Z \\ & (v,w) = \left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) & \mapsto & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j f_0(x_i,y_j) \end{array}$$

que claramente está bien definida. Vamos a mostrar que f es una función bilineal, para eso tomemos $c \in F$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, entonces $v = \sum_{i\in I} a_i x_i$, $v' = \sum_{i\in I} a'_i x_i$, $w = \sum_{j\in J} b_j y_j$ y $w' = \sum_{j\in J} b'_j y_j$, con únicos $a_i, a'_i, b_j, b'_j \in F$, $x_i \in \beta$, $y_j \in \gamma$, los coeficientes a_i, a'_i, b_i, b'_i todos cero salvo un número finito de ellos. Veamos que se satisface la definición de función bilineal:

1) (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{array}{rcl} f(v+v',w) & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i + \sum_{i\in I} a'_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & f\left(\sum_{i\in I}(a_i + a'_i) x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(a_i + a'_i) b_j f_0(x_i,y_j) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(a_i b_j f_0(x_i,y_j) + a'_i b_j f_0(x_i,y_j)) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j f_0(x_i,y_j) + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a'_i b_j f_0(x_i,y_j) \\ & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) + f\left(\sum_{i\in I} a'_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & f(v,w) + f(v',w) \end{array}$$

es decir, $f(v+v',w) = f(v,w) + f(v',w)$.

2) (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{array}{rcl} f(v,w+w') & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j + \sum_{j\in J} b'_j y_j\right) \\ & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J}(b_j + b'_j) y_j\right) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i (b_j + b'_j) f_0(x_i,y_j) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(a_i b_j f_0(x_i,y_j) + a_i b'_j f_0(x_i,y_j)) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j f_0(x_i,y_j) + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b'_j f_0(x_i,y_j) \\ & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) + f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b'_j y_j\right) \\ & = & f(v,w) + f(v,w') \end{array}$$

es decir, $f(v,w+w') = f(v,w) + f(v,w')$.

3) (Homogeneidad en ambos argumentos): Por un lado,

$$\begin{array}{rcl} f(cv,w) & = & f\left(c\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & f\left(\sum_{i\in I}(ca_i) x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(ca_i) b_j f_0(x_i,y_j) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c(a_i b_j f_0(x_i,y_j)) \\ & = & c\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j f_0(x_i,y_j) \\ & = & cf\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & cf(v,w) \end{array}$$

es decir, $f(cv, w) = cf(v, w)$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} f(v, cw) & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, c\sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} (cb_j) y_j\right) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i (cb_j) f_0(x_i, y_j) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c(a_i b_j f_0(x_i, y_j)) \\ & = & c\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j f_0(x_i, y_j) \\ & = & cf\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & cf(v, w) \end{array}$$

es decir, $f(v, cw) = cf(v, w)$. Por lo tanto, $f(cv, w) = f(v, cw) = cf(v, w)$.

De lo anterior, hemos probado que la función f que definimos es una función bilineal. Es claro que para cada $i \in I$, $j \in J$, se tiene que $f(x_i, y_j) = f_0(x_i, y_j)$, por lo que $f_{|\beta\times\gamma} = f_0$.
Finalmente, vamos a demostrar la unicidad. Supongamos que existe una función bilineal $g : V \times W \to Z$, tal que $g_{|\beta\times\gamma} = f_0$. Debemos mostrar que $g = f$, para eso tomemos $v \in V, w \in W$, como β y γ son bases de V y W, repectivamente, $v = \sum_{i\in I} a_i x_i$, $w = \sum_{j\in J} b_j y_j$, con $x_i \in \beta$, $y_j \in \gamma$, $a_i, b_j \in F$ todos cero salvo una cantidad finita. Entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} g(v, w) & = & g\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & \sum_{i\in I} a_i f\left(x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j g(x_i, y_j) \\ & = & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j f_0(x_i, y_j) \\ & = & f\left(\sum_{i\in I} a_i x_i, \sum_{j\in J} b_j y_j\right) \\ & = & f(v, w) \end{array}$$

es decir, $g(v, w) = f(v, w)$, lo cual sucece para cada $v \in V$ y $w \in W$. Por lo tanto, $g = f$. □

A diferencia de la Propiedad universal de las bases para transformaciones lineales, en el caso de las funciones bilineales, es más práctico definir directamente la función bilineal en todo el espacio vectorial que definir primero una función en el producto cartesiano de las bases y luego extenderla a una bilineal.
En el siguiente teorema vamos a mostrar que el espacio de las funciones bilineales es posible reducirlo isomorficamente a un espacio de transformaciones lineales.

Teorema 3.2.2. *Sea F un campo, $V, W, Z \in$ $\mathbf{Vec}_F$. Entonces,*

$$Bil(V \times W, Z) \cong Hom(V, Hom(W, Z)).$$

Demostración. En esta ocasión, haremos la demostración proponiendo dos transformaciones lineales, una de $Bil(V\times W, Y)$ en $Hom(V, Hom(W, Y))$ y otra de $Hom(V, Hom(W, Y))$ en $Bil(V\times W, Y)$ y mostrando que una es inversa de la otra, pues en tal caso ambas son isomorfismos y basta considerar cualquiera de ellas para mostrar lo deseado, pues recordemos que la relación de isomorfismo es de equivalencia en $\mathbf{Vec}_F$.
Definamos primero la función

$$\begin{array}{rccc} \phi : & Bil(V \times W, Z) & \to & Hom(V, Hom(W, Z)) \\ & f & \mapsto & \phi(f) \end{array}$$

donde $\phi(f)$ se define como

$$\begin{array}{rccc} \phi(f) : & V & \to & Hom(W, Z) \\ & v & \mapsto & \phi(f)(v) \end{array}$$

y a su vez, $\phi(f)(v)$ se define por

$$\begin{array}{rccc} \phi(f)(v): & W & \to & Z \\ & w & \mapsto & f(v,w) \end{array}.$$

Tomemos $f \in Bil(V \times W, Z)$ y $v \in V$. Para cada $c \in F, w, w' \in W$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \phi(f)(v)(w+cw') & = & f(v, w+cw') \\ & = & f(v,w) + cf(v,w') \\ & = & \phi(f)(v)(w) + c\phi(f)(v)(w') \end{array}$$

es decir, $\phi(f)(v)(w+cw') = f(v,w+cw') = \phi(f)(v)(w) + c\phi(f)(v)(w')$, de donde se concluye que $\phi(f)(v) \in Hom(W,Z)$. Ahora, tomando $c \in F, v, v' \in V$, tenemos que para cada $w \in W$,

$$\begin{array}{rcl} \phi(f)(v+cv')(w) & = & f(v+cv', w) \\ & = & f(v,w) + cf(v',w) \\ & = & \phi(f)(v)(w) + c\phi(f)(v')(w) \end{array}$$

es decir, $\phi(f)(v+cv')(w) = \phi(f)(v)(w) + c\phi(f)(v')(w)$. Como esto último ocurre para cada $w \in W$, tenemos que $\phi(f)(v) + c\phi(f)(v')$, lo cual implica que $\phi(f) \in Hom(V, Hom(W,Z))$. Así las cosas, hemos mostrado que ϕ está bien definida. Ahora, vamos a ver que es lineal, para esto tomemos $c \in F$, $f, g \in Bil(V \times W, Z)$, entonces para cada $v \in V$ y $w \in W$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \phi(f+cg)(v)(w) & = & (f+cg)(v,w) \\ & = & f(v,w) + cg(v,w) \\ & = & \phi(f)(v)(w) + c\phi(g)(v)(w) \end{array}$$

es decir, $\phi(f+cg)(v)(w) = \phi(f)(v)(w) + c\phi(g)(v)(w)$, lo cual ocurre para cada $v \in V$ y $w \in W$. En consecuencia, tenemos que $\phi(f+cg) = \phi(f) + c\phi(g)$. Por lo tanto, $\phi : Bil(V \times W, Z) \to Hom(V, Hom(W,Z))$ es una transformación lineal.
Ahora, propongamos la función

$$\begin{array}{rccc} \psi: & Hom(V, Hom(W,Z)) & \to & Bil(V \times W, Z) \\ & T & \mapsto & \psi(T) \end{array}$$

donde $\psi(T)$ se define por

$$\begin{array}{rccc} \psi(T): & V \times W & \to & Z \\ & (v,w) & \mapsto & T(v)(w). \end{array}$$

Vamos a ver primero que ψ está bien definida, tomemos para eso $T \in Hom(V, Hom(W,Z))$. Vamos a ver que efectivamente $\psi(T) \in Bil(V \times W, Z)$, consideremos $c \in F$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, luego:

1) (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{array}{rcl} \psi(T)(v+v', w) & = & T(v+v')(w) \\ & = & T(v)(w) + T(v')(w) \\ & = & \psi(T)(v,w) + \psi(T)(v',w) \end{array}$$

es decir, $\psi(T)(v+v',w) = \psi(T)(v,w) + \psi(T)(v',w)$.

2) (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{array}{rcl} \psi(T)(v, w+w') & = & T(v)(w+w') \\ & = & T(v)(w) + T(v)(w') \\ & = & \psi(T)(v,w) + \psi(T)(v,w') \end{array}$$

es decir, $\psi(T)(v,w+w') = \psi(T)(v,w) + \psi(T)(v,w')$.

3) (Homogeneidad en ambos argumentos): Para el primer argumento, tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(T)(cv,w) &= T(cv)(w)\\ &= cT(v)(w)\\ &= c\psi(T)(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $\psi(T)(cv,w) = c\psi(T)(v,w)$. Ahora, para el segundo argumento, se tiene que

$$\begin{aligned}\psi(T)(v,cw) &= T(v)(cw)\\ &= cT(v)(w)\\ &= c\psi(T)(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $\psi(T)(v,cw) = c\psi(T)(v,w)$. Por lo tanto, $\psi(T)(cv,w) = \psi(T)(v,cw) = c\psi(T)(v,w)$.

Así las cosas, hemos mostrado que $\psi(T) \in Bil(V\times W,Z)$ y consecuentemente, nuestra función está bien definida.
Vamos a mostrar ahora que ψ es lineal, para eso tomemos $c \in F$, $T,S \in Hom(V,Hom(W,Z))$. Luego, para cada $v \in V$, $w \in W$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\psi(T+cS)(v,w) &= (T+cS)(v)(w)\\ &= T(v)(w)+cS(v)(w)\\ &= \psi(T)(v,w)+c\psi(T)(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $\psi(T+cS)(v,w) = \psi(T)(v,w) + c\psi(T)(v,w)$, esto para cada $v \in V$ y $w \in W$, de donde concluimos que $\psi(T+cS) = \psi(T)+c\psi(S)$. De esta manera hemos probado que $\psi : Hom(V,Hom(W,Z)) \to Bil(V\times W,Z)$ es una transformación lineal.
Finalmente, vamos a mostrar que las transformaciones lineales propuestas anteriormente son inversas entre sí. Veamos primero que $\psi\phi = id_{Bil(V\times W,Z)}$. Para hacerlo, tomemos $f \in Bil(V\times W,Z)$, tomando $v \in V$, $w \in W$ y evaluando $\psi\phi(f)$ en (v,w), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}((\psi\phi)(f))(v,w) &= (\psi(\phi(f)))(v,w)\\ &= \phi(f)(v)(w)\\ &= f(v,w)\end{aligned}$$

es decir, $((\psi\phi)(f))(v,w) = f(v,w)$, lo cual ocurre para cada $v \in V$ y $w \in W$, lo que nos permite concluir que $(\psi\phi)(f) = f$, esto sucede para cada $f \in Bil(V\times W,Z)$, por consiguiente $\psi\phi = id_{Bil(V\times W,Z)}$.
Ahora, vamos a mostrar que $\phi\psi = id_{Hom(V,Hom(W,Z))}$, para hacerlo tomemos $T \in Hom(V,Hom(W,Z))$. Luego, para cada $v \in V$, $w \in W$, se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}((\phi\psi)(T))(v)(w) &= (\phi(\psi(T)))(v)(w)\\ &= \psi(T)(v,w)\\ &= T(v)(w)\end{aligned}$$

es decir, $((\phi\psi)(T))(v)(w) = T(v)(w)$, para cada $v \in V$ y $w \in W$. Así las cosas, tenemos que $(\phi\psi)(T) = T$, en consecuencia, $\phi\psi = id_{Hom(V,Hom(W,Z))}$.
De lo anterior, tenemos que $\phi : Bil(V\times W,Z) \to Hom(V,Hom(W,Z))$ es isomorfismo y por consiguiente, $Bil(V\times W,Z) \cong Hom(V,Hom(W,Z))$, que era lo que deseábamos. $\square$

El teorema anterior se puede decir que es un preámbulo al teorema que será a nuestra opinión, el teorema principal de esta tesis, el cual se refiere a la adjunción entre el funtor Hom y el funtor Tensor, sin embargo, para proceder a enunciar y demostrar tal teorema, primero necesitamos exponer la teoría correspondiente al producto tensorial.

3.2.2. Producto tensorial

Antes de proceder a dar la definición de producto tensorial, vamos a ver que a la colección de funciones bilineales que tienen como dominio al producto cartesiano de dos espacios vectoriales sobre el mismo campo, le podemos dar una estructura categorica.
Tomemos F un campo, $V, W \in \mathbf{Vec}_F$ dos objetos fijos. Podemos construir una nueva categoría, la cual denotaremos por $\mathbf{Bil}(V \times W)_F$ y está descrita de la siguiente manera:

1) La clase de objetos está dada por

$$Obj(\mathbf{Bil}(V \times W)_F) = \{f \in Bil(V \times W, Z) \mid Z \in Obj(\mathbf{Vec}_F)\}.$$

2) Para cada $f, g \in Obj(\mathbf{Bil}(V \times W)_F)$, tenemos que $f \in Bil(V \times W, Y)$ y $g \in Bil(V \times W, Y)$, para algunos $Y, Z \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Entonces definimos a las flechas como

$$\mathbf{Bil}(V \times W)_F(f, g) = \{T \in Hom(Y, Z) \mid Tf = g\}.$$

Usando diagramas, podemos decir que $T \in \mathbf{Bil}(V \times W)_F(f, g)$, si y solo si, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

3) Para cada $f, g, h \in Obj(\mathbf{Bil}(V \times W)_F)$, consideramos la operación

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathbf{Bil}(V \times W)_F(f,g) \times \mathbf{Bil}(V \times W)_F(g,h) & \to & \mathbf{Bil}(V \times W)_F(f,h) \\ & (T, S) & \mapsto & S \circ T = ST \end{array}$$

como la composición usual de funciones.

Vamos a ver que estos elementos satisfacen los axiomas que debe cumplir una categoría.(Ver Apéndice B).

a) Es claro que para cada $f, g, h, k \in Obj(\mathbf{Bil}(V \times W)_F)$, se cumple que $\mathbf{Bil}(V \times W)_F(f, g) = \mathbf{Bil}(V \times W)_F(h, k)$, si y solo si, $f = h$ y $g = k$.

b) Es suficiente mostrar que la operación propuesta está bien definida, pues ya sabemos que la composición de funciones es asociativa, en particular la composición de transformaciones lineales.
Sean $f, g, h \in Obj(\mathbf{Bil}(V \times W)_F)$, luego, $f \in Bil(V \times W, X)$, $g \in Bil(V \times W, Y)$ y $h \in Bil(V \times W, Z)$, para algunos $X, Y, Z \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Ahora tomemos $T \in \mathbf{Bil}(V \times W)_F(f, g)$ y $S \in \mathbf{Bil}(V \times W)_F(g, h)$. Entonces $T \in Hom(X, Y)$, $S \in Hom(Y, Z)$ y son tales que $Tf = g$ y $Sg = h$. Luego, por propiedades de las transformaciones lineales, tenemos que $ST \in Hom(X, Z)$ y cumple que $(ST)f = S(Tf) = Sg = h$, en consecuencia, $ST \in \mathbf{Bil}(V \times W)_F(f, h)$. De esta manera se muestra que la composición propuesta es correcta.

c) Sea $f \in Obj(\mathbf{Bil}(V \times W)_F$. Luego $f \in Bil(V \times W, X)$, para algún $X \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Es claro que $id_X \in Hom(X, X)$ y es tal que $id_X f = f$, en consecuencia $id_X \in \mathbf{Bil}(V \times W)_F(f, f)$. Ahora, es claro que si $g \in Obj(\mathbf{Bil}(V \times W)_F)$, $T \in \mathbf{Bil}(V \times W)_F(f, g)$ y $S \in Hom(g, f)$, entonces $id_X S = S$ y $T id_X = T$.

Con lo anterior, hemos construido la categoría $\mathbf{Bil}(V \times W)_F$, cuyos objetos los las funciones bilineales con dominio $V \times W$ y cuyas flechas son las descritas anteriormente.

Construcción del producto tensorial

Recordemos que cuando existe el objeto inicial en una categoría, es único salvo isomorfismo (ver Apéndice B). Esto nos motiva a definir el producto tensorial de dos espacios vectoriales utilizando la categoría construida anteriormente.

Definición 3.2.2 (Producto tensorial)**.** *Sea F un campo, $V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$. El par (Y, h) , donde $Y \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$ y $h \in Bil(V \times W, Y)$, es el **producto tensorial** de V con W, si h es el **objeto inicial** en la categoría $\boldsymbol{Bil}(V \times W)_F$, es decir, para cada $g \in Obj(\boldsymbol{Bil}(V \times W)_F)$, existe una única $T \in \boldsymbol{Bil}(V \times W)_F(h, g)$. Explícitamente, (Y, h) es el producto tensorial de V con W, si para cada $Z \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$ y $g \in Bil(V \times W, Z)$, existe una única transformación lineal $T \in Hom(Y, Z)$, que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $Th = g$. Esta última propiedad también se conoce como la Propiedad universal del producto tensorial.

Notación 3.2.1. *Si F es un campo, $V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$ y (Y, h) es el producto tensorial de V con W, dado que este elemento es único salvo isomorfismo, lo denotaremos por $(V \otimes W, h)$. Más aún, en lo sucesivo para referirnos al producto tensorial de V con W, escribiremos simplemente $V \otimes W$, omitiendo la función bilineal asociada $h : V \times W \to V \otimes W$, siempre que no se requiera.*

Observación 3.2.1. *Notemos que si F es un campo, $V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$, como consecuencia de la definición de producto tensorial, se tiene que $V \otimes W \in \boldsymbol{Vec}_F$.*

El hecho de que el producto tensorial es único salvo isomorfismo, nos permite concluir que la construcción que se realice del mismo es válida, pues cualquier otra es algebraicamente equivalente y posiblemente solo cambie la representación. Lo que queremos hacer es lo siguiente: dado un campo F, queremos inducir un funtor

$$\_\_ \otimes \_\_ : \mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$$

donde $\mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F$ es la categoría producto de $\mathbf{Vec}_F$ consigo misma. Dicho funtor debemos poder definirlo en objetos y en morfismos.
Para poder realizar lo planteado, primero necesitamos ver que dados dos espacios vectoriales sobre un campo dado, siempre existe su producto tensorial, lo cual se expone en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3 (Existencia del producto tensorial)**.** *Sea F un campo, $V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$. Entonces, existe $V \otimes W$.*

Demostración. Dado que V y W son espacios vectoriales sobre F, tenemos que $V \times W \neq \emptyset$. Al ser $V \times W$ un conjunto no vacío, sabemos que $F^{(V \times W)} \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y tiene base de cardinalidad $|V \times W|$. Siendo más explícitos, consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} \delta : & V \times W & \to & F^{(V \times W)} \\ & (v, w) & \mapsto & \delta(v, w) = \delta_{v,w} \end{array}$$

donde para cada $(v, w) \in V \times W$,

$$\begin{array}{rccc} \delta_{v,w} : & V \times W & \to & F \\ & (v, w) & \mapsto & 1 \\ & (v, w) \neq (v', w') & \mapsto & 0. \end{array}$$

Recordemos que por las propiedades respecto a las bases, expuestas en el Capítulo 1, $\beta = \{\delta_{v,w}\}_{(v,w)\in V\times W} \subseteq F^{(V\times W)}$ es una base de $F^{(V\times W)}$. Consideremos $X \subseteq F^{(V\times W)}$, dado por

$$X = \{\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}, \delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}, \delta_{cv,w} - c\delta_{v,w}, \delta_{v,cw} - c\delta_{v,w} \mid v, v' \in V, w, w' \in W, c \in F\}.$$

Luego, tenemos que $U = \langle X\rangle \leq F^{(V\times W)}$, en consecuencia, podemos formar el espacio cociente $F^{(V\times W)}/U$. Con las consideraciones anteriores, tenemos el diagrama

$$V \times W \xrightarrow{\delta} F^{(V\times W)} \xrightarrow{\pi} F^{(V\times W)}/U$$

donde

$$\begin{array}{rccc} \pi: & F^{(V\times W)} & \to & F^{(V\times W)}/U \\ & f & \mapsto & f + U \end{array}$$

es el epimorfismo natural. De lo anterior, podemos considerar la función

$$\begin{array}{rccc} g = \pi\delta: & V \times W & \to & F^{(V\times W)}/U \\ & (v, w) & \mapsto & \delta_{v,w} + U. \end{array}$$

Veamos que g es una función bilineal, para hacerlo tomemos $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $c \in F$ y veamos que se satisface la bilinealidad:

1) (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{array}{rcl} g(v + v', w) & = & \delta_{v+v',w} + U \\ & = & (\delta_{v+v',w} + U) + (\overline{0} + U) \\ & = & (\delta_{v+v',w} + U) + ((-\delta_{v,w} - \delta_{v',w} + \delta_{v,w} + \delta_{v',w}) + U) \\ & = & ((\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}) + U) + ((\delta_{v,w} + \delta_{v',w}) + U) \\ & = & (0 + U) + ((\delta_{v,w} + \delta_{v',w}) + U) \\ & = & (\delta_{v,w} + \delta_{v',w}) + U \\ & = & (\delta_{v,w} + U) + (\delta_{v',w} + U) \\ & = & g(v, w) + g(v', w) \end{array}$$

es decir, $g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w)$.

2) (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{array}{rcl} g(v, w + w') & = & \delta_{v,w+w'} + U \\ & = & (\delta_{v,w+w'} + U) + (\overline{0} + U) \\ & = & (\delta_{v,w+w'} + U) + ((-\delta_{v,w} - \delta_{v,w'} + \delta_{v,w} + \delta_{v,w'}) + U) \\ & = & ((\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}) + U) + ((\delta_{v,w} + \delta_{v,w'}) + U) \\ & = & (0 + U) + ((\delta_{v,w} + \delta_{v,w'}) + U) \\ & = & (\delta_{v,w} + \delta_{v,w'}) + U \\ & = & (\delta_{v,w} + U) + (\delta_{v,w'} + U) \\ & = & g(v, w) + g(v, w') \end{array}$$

es decir, $g(v, w + w') = g(v, w) + g(v, w')$.

3) (Homogeneidad en ambos argumentos): Por un lado,

$$\begin{array}{rcl} g(cv, w) & = & \delta_{cv,w} + U \\ & = & (\delta_{cv,w} + U) + (\overline{0} + U) \\ & = & (\delta_{cv,w} + U) + ((-c\delta_{v,w} + c\delta_{v,w}) + U) \\ & = & ((\delta_{cv,w} - c\delta_{v,w}) + U) + (c\delta_{v,w} + U) \\ & = & (0 + U) + (c\delta_{v,w} + U) \\ & = & c\delta_{v,w} + U \\ & = & c(\delta_{v,w} + U) \\ & = & cg(v, w) \end{array}$$

es decir, $g(cv,w) = cg(v,w)$. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} g(v,cw) & = & \delta_{v,cw} + U \\ & = & (\delta_{v,cw} + U) + (\overline{0} + U) \\ & = & (\delta_{v,cw} + U) + ((-c\delta_{v,w} + c\delta_{v,w}) + U) \\ & = & ((\delta_{v,cw} - c\delta_{v,w}) + U) + (c\delta_{v,w} + U) \\ & = & (0 + U) + (c\delta_{v,w} + U) \\ & = & c\delta_{v,w} + U \\ & = & c(\delta_{v,w} + U) \\ & = & cg(v,w) \end{array}$$

es decir, $g(v,cw) = cg(v,w)$. De lo anterior, se tiene que $g(cv,w) = g(v,cw) = cg(v,w)$.

Así las cosas, hemos probado que $g : V \times W \to F^{(V\times W)}/U$ es una función bilineal. Entonces, nosotros proponemos $(V \otimes W, h) = (F^{(V\times W)}/U, g)$. Para establecer que lo anterior es cierto, debemos probar que $(F^{(V\times W)}/U, g)$ satisface la Propiedad universal del producto tensorial. Tomemos $Z \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y $f \in Bil(V\times W, Z)$. Se debe probar que existe una única $T \in Hom(F^{(V\times W)}/U, Z)$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \\ F^{(V\times W)}/U \arrow[ur, dashed, "T"'] & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo, es decir, $Tg = f$. Entonces, nuestro objetivo es construir la transformación lineal $T : F^{(V\times W)}/U \to Z$ que cumpla la propiedad deseada. Considerando las funciones f y δ, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & Z \\ F^{(V\times W)} & \end{tikzcd}$$

de modo que si aplicamos la Propiedad universal de las bases, existe una única $S \in Hom(F^{(V\times W)}, Z)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & Z \\ F^{(V\times W)} \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $S\delta = f$. Notemos que para cada $(v,w) \in V \times W$, se tiene que $S(\delta_{v,w}) = (S\delta)(v,w) = f(v,w)$.
Ahora, nuestro objetivo es obtener una tranformación lineal $\overline{S} : F^{(V\times W)}/U \dashrightarrow Z$, lo que nos hace pensar en aplicar el Teorema de Emmy Noether, para poder hacerlo, debemos mostrar que $U \leq Ker(S)$, pero dado que U es un espacio definido por generadores, es suficiente mostrar que cada uno de los mismos pertenece a $Ker(S)$, lo cual hacemos a continuación:

a) Para $\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}$, con $v, v' \in V, w \in W$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} S(\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}) & = & S(\delta_{v+v',w}) - S(\delta_{v,w}) - S(\delta_{v',w}) \\ & = & (S\delta)(v+v',w) - (S\delta)(v,w) - (S\delta)(v',w) \\ & = & f(v+v',w) - f(v,w) - f(v',w) \\ & = & 0 \end{array}$$

es decir, $S(\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}) = 0$, lo que implica que $\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w} \in Ker(S)$, para cada $v, v' \in V, w \in W$.

b) Para $\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}$, donde $v \in V, w, w' \in W$, se tiene que:

$$\begin{aligned} S(\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}) &= S(\delta_{v,w+w'}) - S(\delta_{v,w}) - S(\delta_{v,w'}) \\ &= (S\delta)(v, w+w') - (S\delta)(v,w) - (S\delta)(v,w') \\ &= f(v, w+w') - f(v,w) - f(v,w') \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, $S(\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}) = 0$, lo que muestra que $\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'} \in Ker(S)$, esto sucede para cada $v \in V, w, w' \in W$.

c) Para $\delta_{cv,w} - c\delta_{v,w}$, con $v \in V, w \in W, c \in F$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} S(\delta_{cv,w} - c\delta_{v,w}) &= S(\delta_{cv,w}) - S(c\delta_{v,w}) \\ &= S(\delta_{cv,w}) - cS(\delta_{v,w}) \\ &= (S\delta)(cv, w) - c(S\delta)(v,w) \\ &= f(cv, w) - cf(v,w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, $S(\delta_{cv,w} - c\delta_{v,w}) = 0$. Lo anterior exhibe que $\delta_{cv,w} - c\delta_{v,w} \in Ker(S)$, esto ocurre para cada $v \in V, w \in W, c \in F$.

d) Para $\delta_{v,cw} - c\delta_{v,w}$, con $v \in V, w \in W, c \in F$, se tiene que:

$$\begin{aligned} S(\delta_{v,cw} - c\delta_{v,w}) &= S(\delta_{v,cw}) - S(c\delta_{v,w}) \\ &= S(\delta_{v,cw}) - cS(\delta_{v,w}) \\ &= (S\delta)(v, cw) - c(S\delta)(v,w) \\ &= f(v, cw) - cf(v,w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, $S(\delta_{v,cw} - c\delta_{v,w}) = 0$, lo que implica que $\delta_{v,cw} - c\delta_{v,w} \in Ker(S)$, lo cual ocurre para cada $v \in V, w \in W, c \in F$.

De lo anterior, hemos visto que todos los generadores de U pertenecen a $Ker(S)$ y consecuentemente, se concluye que $U \leq Ker(S)$. Por el Teorema de Emmy Noether, existe una única $\overline{S} \in Hom(F^{(V\times W)}/U, Z)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} F^{(V\times W)} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ F^{(V\times W)}/U \arrow[ur, "\overline{S}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\overline{S}\pi = S$, donde $\pi : F^{(V\times W)} \to F^{(V\times W)}/U$ es el epimorfismo natural. Hagamos $T = \overline{S}$ y mostremos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \\ F^{(V\times W)}/U \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, mostremos que $Tg = f$. En efecto, por la manera en que tenemos definidas nuestras funciones, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Tg &= \overline{S}g \\ &= \overline{S}(\pi\delta) \\ &= (\overline{S}\pi)\delta \\ &= S\delta \\ &= f \end{aligned}$$

es decir, $Tg = f$, lo cual deseábamos.
Finalmente, vamos a mostrar la unicidad de la transformación lineal T, para eso, supongamos que existe $L \in Hom(F^{(V\times W)}/U, Z)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Z \\ F^{(V\times W)}/U \arrow[ur, "L"'] & \end{tikzcd}$$

□

es decir, $Lg = f$. Debemos demostrar que $L = T$. Notemos que como $Lg = f$, $Tg = f$ y $g = \pi\delta$, por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} Tg &= \overline{S}(\pi\delta) \\ &= (\overline{S}\pi)\delta \\ &= S\delta \\ &= f \end{aligned}$$

es decir, $Tg = f$. Por otro lado, se cumple que

$$\begin{aligned} (L\pi)\delta &= L(\pi\delta) \\ &= Lg \\ &= f \end{aligned}$$

es decir, $(L\pi)\delta = f$. En consecuencia, tenemos que los diagramas

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & Z \\ F^{(V\times W)} \arrow[ur, "\overline{S}\pi"'] & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & Z \\ F^{(V\times W)} \arrow[ur, "L\pi"'] & \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Aplicando la Propiedad universal de las bases, se tiene que $L\pi = \overline{S}\pi$, pero π es epimorfismo, en particular, π es una función suprayectiva, así que es cancelable por la derecha, en consecuencia, $L = \overline{S}$, o sea, $L = T$, lo cual queriamos probar.

Notación 3.2.2. *A partir de este momento, si F es un campo, $V, W \in$ **Vec**$_F$ y $(V \otimes W, h)$ es el producto tensorial de V con W, para cada $v \in V$, $w \in W$, al elemento $h(v, w) \in V \otimes W$, se denotará por $v \otimes w$, es decir, $h(v, w) = v \otimes w$. Leeremos $v \otimes w$ como "v **tensor** w" ó "v **tensado con** w".*

Observación 3.2.2. *Si F es un campo, $V, W \in$ **Vec**$_F$ y $(V \otimes W, h)$ es el producto tensorial de V con W, como una consecuencia inmediata de la definición de producto tensorial, se siguen las siguientes propiedades, para cada $v, v' \in V, w, w' \in W$ y $c \in F$:*

1) $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$.

2) $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$.

3) $c(v \otimes w) = (cv) \otimes w = v \otimes (cw)$.

4) $v \otimes 0_W = 0_{V\otimes W} = 0_V \otimes w$, esto porque h es una función bilineal y en consecuencia, es lineal en ambos argumentos.

Otra consecuencia importante de la construcción que presentamos del producto tensorial es que si $x \in V \otimes W$, entonces $x = \sum_{j\in J} c_j(v_j \otimes w_j)$, para algún conjunto finito J, $c_j \in F$, $v_j \in V$, $w_j \in W$, para cada $j \in J$, pues recordemos que $V \otimes W$ está generado por $V \times W$. Notemos que esta representación no es única, pues por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & v \otimes (w + w') - v \otimes w - v \otimes w' \\ 0 & = & (v + v') \otimes w - v \otimes w - v' \otimes w \\ 0 & = & c(v \otimes w) - (cv) \otimes w = c(v \otimes w) - v \otimes (cw) = (cv) \otimes w - v \otimes (cw) \end{array}$$

*para cualesquiera $c \in F$, $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ que se elijan. De lo anterior concluimos que si $Z \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$, **no** es correcto querer definir una transformación lineal $T : V \otimes W \to Z$ en los generadores $v\otimes w$, pues un vector en $V \otimes W$ puede tener varias representaciones en dichos generadores y por lo tanto la transformación lineal puede tener varios valores en Z, lo cual claramente no es válido, simplemente por la definición de función. Si quisieramos definir directamente tal transformación lineal, necesitariamos primero mostrar que $T(U) = \{0\}$, donde $U \leq F^{(V\times W)}$ es como en la demostración del Teorema 3.2.3, para así convencernos de que está bien definida, pero esto dificultaría el trabajo de una manera considerable. Entonces, la manera más "sencilla" de definir una transformación lineal $T : V \otimes W \to Z$, es definir primero una función bilineal $f : V \times W \to Z$ y a ésta, aplicarle la Propiedad universal del producto tensorial. Este es el camino que nosotros utiizaremos siempre que requieramos la construcción de tal transformación lineal. Una vez que se den a conocer más propiedades del producto tensorial, trataremos de encontrar una base para $V \otimes W$.*

Con lo que hemos hecho hasta el momento, hemos probado que siempre existe el producto tensorial de cualesquiera dos espacios vectoriales sobre un campo dado. Para tener definido completamente nuestro funtor $\_\otimes\_$, necesitamos construir el producto tensorial para transformaciones lineales, lo cual se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4. *Sea F un campo, $V, V', W, W' \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$, $T \in Hom(V, W)$ y $S \in Hom(V', W')$. Entonces, existe una única transformación lineal $T \otimes S : V \otimes W \to V' \otimes W'$, tal que $(T \otimes S)(v \otimes w) = T(v) \otimes T(w)$, para cada $v \in V$, $w \in W$.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.3, $V \otimes W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y $V' \otimes W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Además, para cada $v \in V, w \in W$, se tiene que $T(v) \in V'$ y $S(w) \in W'$, por consiguiente, $T(v) \otimes T(w) \in V' \otimes W'$. Definamos la función

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times W & \to & V' \otimes W' \\ & (v, w) & \mapsto & T(v) \otimes T(w). \end{array}$$

Veamos que f es una función bilineal, para eso tomemos $v, v' \in V, w, w' \in W$, $c \in F$ y apliquemos las propedades de la Observación 3.2.2, para mostrar la bilinealidad de f:

1) (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{array}{rcl} f(v + v', w) & = & T(v + v') \otimes T(w) \\ & = & (T(v) + T(v')) \otimes T(w) \\ & = & T(v) \otimes T(w) + T(v') \otimes T(w) \\ & = & f(v, w) + f(v', w) \end{array}$$

es decir, $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v', w)$.

2) (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{array}{rcl} f(v, w + w') & = & T(v) \otimes T(w + w') \\ & = & T(v) \otimes (T(w) + T(w')) \\ & = & T(v) \otimes T(w) + T(v) \otimes T(w') \\ & = & f(v, w) + f(v, w') \end{array}$$

es decir, $f(v, w + w') = f(v, w) + f(v, w')$.

3) (Homogeneidad en ambos argumentos): Por un lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} f(cv, w) & = & T(cv) \otimes T(w) \\ & = & (cT(v)) \otimes T(w) \\ & = & c(T(v) \otimes T(w)) \\ & = & cf(v, w) \end{array}$$

es decir, $f(cv, w) = cf(v, w)$. Por otro lado, se satisface que

$$\begin{array}{rcl} f(v, cw) & = & T(v) \otimes T(cw) \\ & = & T(v) \otimes (cT(w)) \\ & = & c(T(v) \otimes T(w)) \\ & = & cf(v, w) \end{array}$$

es decir, $f(v, cw) = cf(v, w)$. Juntando las igualdades probadas anteriormente, tenemos que $f(cv, w) = f(v, cw) = cf(v, w)$, con lo cual se tiene los deseado.

Así las cosas, hemos probado que $f : V \times W \to V' \otimes W'$ es una función bilineal, por Propiedad universal del producto tensorial, existe una única tranformación lineal, $T \otimes S : V \otimes W \to V' \otimes W'$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V' \otimes W' \\ V \otimes W \arrow[ur, "T\otimes S"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $(T \otimes S)h = f$, donde $h : V \times W \to V \otimes W$ es la función bilineal asociada a $V \otimes W$. Así, para cada $v \in V$, $w \in W$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (T \otimes S)(v \otimes w) & = & (T \otimes S)(h(v, w)) \\ & = & ((T \otimes S)h)(v, w) \\ & = & f(v, w) \\ & = & T(v) \otimes T(w) \end{array}$$

es decir, $(T \otimes S)(v \otimes w) = T(v) \otimes T(w)$, que era lo que se buscaba. $\square$

Con lo que hemos hecho hasta el momento, dado un campo F, podemos definir la asignación

$$\_\_ \otimes \_\_ : \quad \mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F \quad \to \quad \mathbf{Vec}_F$$

en objetos como

$$\begin{array}{rccc} \_\_ \otimes \_\_ : & Obj(\mathbf{Vec}_F) \times Obj(\mathbf{Vec}_F) & \to & Obj(\mathbf{Vec}_F) \\ & (V, W) & \mapsto & V \otimes W. \end{array}$$

Con respecto a los morfismos, vale la pena recordar que por los resultados expuestos en Capítulo 2, respecto al producto directo de espacios vectoriales, si $V, V', W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(V, V')$, $S \in Hom(W, W')$, el producto de T con S, denotado por $T \times S$, es la única transformación lineal, definida por

$$\begin{array}{rccc} T \times S : & V \times W & \to & V' \times W' \\ & (v, w) & \mapsto & (T(v), S(w)). \end{array}$$

También, recordemos que como estamos en la categoría producto $\mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F$ (ver Ejemplo B.1.6 del Apéndice B), para cada $(V, W), (V', W') \in Obj(\mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F)$, se tiene que $Hom((V,W),(V',W')) = Hom(V,V') \times Hom(W,W')$. Más aún, para cada $(V,W),(V',W'),(V'',W'') \in Obj(\mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F)$, se tiene que si $(T,S) \in Hom((V,W),(V',W'))$ y $(T',S') \in Hom((V',W'),(V'',W''))$, entonces, $(T',S')(T,S) = (T'T, S'S)$. Usando estos argumentos, vamos a mostrar que el funtor $\_\otimes\_ : \mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$ es covariante, para eso se requerirá el siguiente lema.

Lema 3.2.1. *Sea F un campo, $V, V', V'', W, W', W'' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(V,V'), T' \in Hom(V',V''), S \in Hom(W,W')$ y $S' \in Hom(W',W'')$. Entonces,*

$$(T' \otimes S')(T \otimes S) = T'T \otimes S'S.$$

Demostración. Consideremos $h : V \times W \to V \otimes W$, $h' : V' \times W' \to V' \otimes W'$ y $h'' : V'' \times W'' \to V'' \otimes W''$ las funciones bilineales asociadas a $V \otimes W$, $V' \otimes W'$ y $V'' \otimes W''$, respectivamente. De acuerdo a lo comentado antes de enunciar este lema y al Teorema 3.2.4, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "T\times S"'] \arrow[dr, "f"] & V \otimes W \arrow[d, "T\otimes S"] \\
V' \times W' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "T'\times S'"'] \arrow[dr, "f'"] & V' \otimes W' \arrow[d, "T'\otimes S"] \\
V'' \times W'' \arrow[r, "h''"] & V'' \otimes W''
\end{tikzcd} \tag{I}$$

donde f y f' son funciones bilineales, definidas por

$$\begin{array}{rccc}
f: & V \times W & \to & V' \times W' \\
 & (v,w) & \mapsto & T(v) \otimes S(w)
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc}
f': & V' \times W' & \to & V'' \times W'' \\
 & (v',w') & \mapsto & T'(v') \otimes S'(w')
\end{array}$$

respectivamente. Por otro lado, dado que $T'T \in Hom(V,V'')$ y $S'S \in Hom(W,W'')$, de la demostración del Teorema 3.2.4, tenemos que para la función bilineal

$$\begin{array}{rccc}
f'': & V \times W & \to & V'' \otimes W'' \\
 & (v,w) & \mapsto & (T'T)(v) \otimes (S'S)(w)
\end{array}$$

existe una única transformación lineal, $(T'T) \otimes (S'S) : V \otimes W \to V'' \otimes W''$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "h"'] & V'' \otimes W'' \\
V \otimes W \arrow[ur, "(T'T)\otimes(S'S)"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $((T'T) \otimes (S'S))h = f''$. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "h"'] & V'' \otimes W'' \\
V \otimes W \arrow[ur, "(T'\otimes S')(T\otimes S)"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, en efecto, de acuerdo a la información que nos proporciona el diagrama (I), tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} ((T'\otimes S')(T\otimes S))h & = & (T'\otimes S')((T\otimes S)h) \\ & = & (T'\otimes S')f \\ & = & (T'\otimes S')(h'(T\times S)) \\ & = & ((T'\otimes S')h)(T\times S) \\ & = & f'(T\times S) \\ & = & (h''(T'\times S'))(T\times S) \\ & = & h''(T'\times S')(T\times S) \end{array}$$

es decir, $((T'\otimes S')(T\otimes S))h = h''(T'\times S')(T\times S)$. Tomando $(v,w)\in V\times W$ cualquiera y evaluando en la última igualdad, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} ((T'\otimes S')(T\otimes S)h)(v,w) & = & (h''(T'\times S')(T\times S))(v,w) \\ & = & (h''(T'\times S'))((T\times S)(v,w)) \\ & = & (h''(T'\times S'))(T(v),S(w)) \\ & = & h''((T'\times S')(T(v),S(w))) \\ & = & h''(T'(T(v)),S'(S(w))) \\ & = & (T'(T(v)))\otimes(S'(S(w))) \\ & = & (T'T)(v)\otimes(S'S)(w) \\ & = & f''(v,w) \end{array}$$

es decir, $((T'\otimes S')(T\otimes S)h)(v,w) = f''(v,w)$, lo cual ocurre para cada $v\in V$, $w\in W$. Así las cosas, hemos mostrado que los diagramas

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "h"'] & V''\otimes W'' \\ V\otimes W \arrow[ur, "(T'T)\otimes(S'S)"'] & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "h"'] & V''\otimes W'' \\ V\otimes W \arrow[ur, "(T'\otimes S')(T\otimes S)"'] & \end{tikzcd}$$

son conmutativos, pero por la Propiedad universal del producto tensorial, se cumple que $(T'\otimes S')(T\otimes S) = (T'T)\otimes(S'S)$, lo cual queríamos demostrar. $\square$

Ahora sí, estamos en condiciones de definir el funtor covariante que mencionamos anteriormente, eso lo estableceremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.5. *Sea F un campo. Entonces la asignación*

$$\_\otimes\_ : \boldsymbol{Vec_F}\times\boldsymbol{Vec_F}\to\boldsymbol{Vec_F}$$

definida en objetos como

$$\begin{array}{rccc} \_\otimes\_ : & Obj(\boldsymbol{Vec_F})\times Obj(\boldsymbol{Vec_F}) & \to & Obj(\boldsymbol{Vec_F}) \\ & (V,W) & \mapsto & V\otimes W \end{array}$$

y en morfismos como

$$\begin{array}{rccc} \_\otimes\_ : & Hom((V,W),(V',W')) & \to & Hom(V\otimes V',W\otimes W') \\ & (T,S) & \mapsto & T\otimes S \end{array}$$

para cada $(V,W),(V',W')\in Obj(\boldsymbol{Vec_F}\times\boldsymbol{Vec_F})$, es un funtor covariante.

Demostración. Por los Teoremas 3.2.3 y 3.2.4, la asignación está bien definida tanto en objetos como en morfismos. Solo nos falta ver que es covariante, lo cual hacemos a continuación:

1) Sean $(V,W),(V',W'),(V'',W'') \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y sean $(T,S) \in Hom((V,W),(V',W')),(T',S') \in Hom((V',W'),(V'',W''))$. De acuerdo al Lema 3.2.1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \_\otimes\_((T',S')(T,S)) &= \_\otimes\_((T'T,S'S)) \\ &= (T'T)\otimes(S'S) \\ &= (T'\otimes S')(T\otimes S) \\ &= \_\otimes\_(T',S')\_\otimes\_(T,S) \end{aligned}$$

   es decir, $\_\otimes\_((T',S')(T,S)) = \_\otimes\_(T',S')\_\otimes\_(T,S)$.

2) Sea $(V,W) \in Obj(\mathbf{Vec}_F \times \mathbf{Vec}_F)$, luego $id_{(V,W)} = (id_V, id_W) \in Hom((V,W),(V,W))$. Por definición de nuestra asignación, $\_\otimes\_(id_{(V,W)}) = \_\otimes\_((id_V,id_W)) = id_V \otimes id_W$. Por el Teorema 3.2.4, es claro que $id_V \otimes id_W \in Hom(V\otimes W, V\otimes W)$. Si tomamos un generador cualquiera $v\otimes w$ de $V\otimes W$, se tiene que

$$\begin{aligned} (id_V\otimes id_W)(v\otimes w) &= id_V(v)\otimes id_W(w) \\ &= v\otimes w \\ &= id_{V\otimes W}(v\otimes w) \end{aligned}$$

   es decir, $(id_V \otimes id_W)(v\otimes w) = id_{V\otimes W}(v\otimes w)$. De esta manera queda establecido que $\_\otimes\_(id_{(V,W)}) = id_{V\otimes W}$, lo que deseábamos.

$\square$

Observación 3.2.3. *Si F es un campo, el funtor $\_\otimes\_ : \boldsymbol{Vec}_F \times \boldsymbol{Vec}_F \to \boldsymbol{Vec}_F$ en general no es aditivo, pues si $(V,W),(V',W') \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F \times \boldsymbol{Vec}_F)$, $(T,S),(T',S') \in Hom((V,W),(V',W'))$, para cualquier generador $v\otimes w$ de $V\otimes W$, se tiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned} ((T+T')\otimes(S+S'))(v\otimes w) &= (T+T')(v)\otimes(S+S')(w) \\ &= (T(v)+T'(v))\otimes(S(w)+S'(w)) \\ &= T(v)\otimes(S(w)+S'(w)) + T'(v)\otimes(S(w)+S'(w)) \\ &= T(v)\otimes S(w) + T(v)\otimes S'(w) + T'(v)\otimes S(w) + T'(v)\otimes S'(v) \end{aligned}$$

es decir, $((T+T')\otimes(S+S'))(v\otimes w) = T(v)\otimes S(w)+T(v)\otimes S'(w)+T'(v)\otimes S(w)+T'(v)\otimes S'(v)$. Esto último nos indica que $((T+T')\otimes(S+S'))(v\otimes w) = T(v)\otimes S(w) + T'(v)\otimes S'(w)$ ocurre cuando $T(v)\otimes S'(w) = T'(v)\otimes S(w) = 0$, lo cual es claro que no siempre se cumple.

Antes de continuar exponiendo resultados acerca del producto tensorial, vamos a dar unos ejemplos donde podemos aplicar la teoría que hemos presentado hasta el momento.

Ejemplo 3.2.5. *Sean F un campo, $V,W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$. Tomemos $\phi \in V^\star = Hom(V,F)$ y $\psi \in W^\star = Hom(W,F)$. Es claro que*

$$\begin{array}{rccc} f: & V\times W & \to & F \\ & (v,w) & \mapsto & \phi(v)\psi(w) \end{array}$$

es una función bilineal. Por la Propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal, $T : V\otimes W \to F$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & F \\ V\otimes W \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $Th = f$, donde $h : V \times W \to V \otimes W$ es la función bilineal asociada a $V \otimes W$. Notemos que si $u \in V \otimes W$, entonces $u = \sum_{j\in J} c_j(v_j \otimes w_j)$, para algún conjunto finito J. Entonces, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} T(u) & = & T\left(\sum_{j\in J} c_j(v_j \otimes w_j)\right) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j T(v_j \otimes w_j) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j T(h(v_j \times w_j)) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j Th(v_j \times w_j) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j f(v_j \times w_j) \\ & = & \sum_{j\in J} c_j \phi(v_j)\psi(w_j) \end{array}$$

es decir, $T(u) = \sum_{j\in J} c_j\phi(v_j)\psi(w_j)$. Observemos que $T \in (V \otimes W)^\star = Hom(V \otimes W, F)$. En palabras, a partir de dos funcionales, uno en $V^\star$ y otro en $W^\star$, construimos un funcional en $(V \otimes W)^\star$.

Ejemplo 3.2.6. *Sea F un campo y sean $m, n, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Es fácil ver que la función*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{M}_{m\times n}(F) \times \mathcal{M}_{p\times q}(F) & \to & \mathcal{M}_{mp\times nq}(F) \\ & (A, B) & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \end{array}$$

es bilineal, en consecuencia, existe una única transformación lineal, $T : \mathcal{M}_{m\times n}(F) \otimes \mathcal{M}_{p\times q}(F) \to \mathcal{M}_{mp\times nq}(F)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{m\times n}(F) \times \mathcal{M}_{p\times q}(F) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{M}_{mp\times nq}(F) \\ \mathcal{M}_{m\times n}(F) \otimes \mathcal{M}_{p\times q}(F) \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

*es decir, $Th = g$, donde $h : \mathcal{M}_{m\times n}(F) \times \mathcal{M}_{p\times q}(F) \to \mathcal{M}_{m\times n}(F) \otimes \mathcal{M}_{p\times q}(F)$, es la función bilineal asociada a $\mathcal{M}_{m\times n}(F) \otimes \mathcal{M}_{p\times q}(F)$. Para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F), B \in \mathcal{M}_{p\times q}(F)$, el elemento $T(A \otimes B) = f(A, B)$, es conocido como **el producto de Kronecker**.*
Ahora, sabemos que las trasposiciones de matrices

$$\begin{array}{rccc} T_1: & \mathcal{M}_{m\times n}(F) & \to & \mathcal{M}_{n\times m}(F) \\ & A & \mapsto & A^T \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} T_2: & \mathcal{M}_{p\times q}(F) & \to & \mathcal{M}_{q\times p}(F) \\ & A & \mapsto & A^T \end{array}$$

son transformaciones lineales, por el Teorema 3.2.4, existe una única transformación lineal, $T_1 \otimes T_2 : \mathcal{M}_{m\times n}(F) \otimes \mathcal{M}_{p\times q}(F) \to \mathcal{M}_{n\times m}(F) \otimes \mathcal{M}_{q\times p}(F)$, tal que $(T_1 \otimes T_2)(A \otimes B) = T_1(A) \otimes T_2(B) = A^T \otimes B^T$, para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(F)$. De aquí podemos concluir que para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(F)$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(F)$, se tiene que $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Continuando con la exposición de las propiedades del producto tensorial visto como un funtor, en la Observación 3.2.3, se comentó que el funtor del Teorema 3.2.5, como tal no es aditivo, sin embargo, fijando alguno de los argumentos, es posible inducir dos funtores covariantes que si son aditivos, eso se expone con detalle en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.6. *Sea F en un campo, $U, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$. Entonces:*

1) La asignación

$$U \otimes \_\_ : \textbf{\textit{Vec}}_F \to \textbf{\textit{Vec}}_F$$

definida en objetos como

$$\begin{array}{rccc} U \otimes \_\_ : & Obj(\textbf{\textit{Vec}}_F) & \to & Obj(\textbf{\textit{Vec}}_F) \\ & V & \mapsto & U \otimes V \end{array}$$

y en morfismos como

$$\begin{array}{rccc} U \otimes \_\_ : & Hom(V, V') & \to & Hom(U \otimes V, U \otimes V') \\ & T & \mapsto & id_U \otimes T \end{array}$$

para cada $V, V' \in Obj(\textbf{\textit{Vec}}_F)$, es un funtor aditivo covariante.

2) La asignación

$$\_\_ \otimes W : \textbf{\textit{Vec}}_F \to \textbf{\textit{Vec}}_F$$

definida en objetos como

$$\begin{array}{rccc} \_\_ \otimes W : & Obj(\textbf{\textit{Vec}}_F) & \to & Obj(\textbf{\textit{Vec}}_F) \\ & W & \mapsto & V \otimes W \end{array}$$

y en morfismos como

$$\begin{array}{rccc} \_\_ \otimes W : & Hom(V, V') & \to & Hom(V \otimes W, V' \otimes W) \\ & T & \mapsto & T \otimes id_W \end{array}$$

para cada $V, V' \in Obj(\textbf{\textit{Vec}}_F)$, es un funtor aditivo covariante.

Demostración.

1) Por el Teorema 3.2.5, tenemos que la asignación está bien definida tanto en objetos como en morfismos y es un funtor covariante. Solo nos falta probar que es aditivo, para hacerlo, tomemos $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T, T' \in Hom(V, V')$, Entonces, para cualquier generador $u \otimes v \in U \otimes V$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (1_U \otimes (T + T'))(u \otimes v) & = & 1_U(u) \otimes ((T + T')(v)) \\ & = & u \otimes (T(v) + T'(v)) \\ & = & u \otimes T(v) + u \otimes T'(v) \\ & = & id_U(u) \otimes T(v) + id_U(u) \otimes T'(v) \\ & = & (id_U \otimes T)(u \otimes v) + (id_U \otimes T')(u \otimes v) \end{array}$$

es decir, $(1_U \otimes (T + T'))(u \otimes v) = (id_U \otimes T)(u \otimes v) + (id_U \otimes T')(u \otimes v)$. En consecuencia, $id_U \otimes (T + T') = id_U \otimes T + id_U \otimes T'$, o sea, $(\_\_ \otimes W)(T + T') = (\_\_ \otimes W)(T) + (\_\_ \otimes W)(T')$, de donde se sigue la aditividad.

2) Al igual que en el caso 1), por el Teorema 3.2.5, la asignación está bien definida tanto en objetos como en morfismos y es un funtor covariante. Hay que mostrar la aditividad, para eso tomemos $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T, T' \in Hom(V, V')$. Luego, para cualquier generador $v \otimes w \in V \otimes W$, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} ((T + T') \otimes id_W)(v \otimes w) & = & ((T + T')(v)) \otimes id_W(w) \\ & = & ((T(v) + T'(v)) \otimes w \\ & = & T(v) \otimes w + T'(v) \otimes w \\ & = & T(v) \otimes id_W(w) + T'(v) \otimes id_W(w) \\ & = & (T \otimes id_W)(v \otimes w) + (T' \otimes id_W)(v \otimes w) \end{array}$$

es decir, $((T + T') \otimes id_W)(v \otimes w) = (T \otimes id_W)(v \otimes w) + (T' \otimes id_W)(v \otimes w)$. Por consiguiente, $(T + T') \otimes id_W = T \otimes id_W + T' \otimes id_W$, o sea, $(\_\_ \otimes W)(T + T') = (\_\_ \otimes W)(T) + (\_\_ \otimes W)(T')$. De esta manera, queda establecida la aditividad.

□

Así las cosas, teniendo construido el funtor de la categoría producto, que vimos que no cumple la aditividad, podemos inducir dos funtores que si cumplen la aditividad, además ambos covariantes; algo un poco diferente al funtor Hom, que es contravariante en el primer argumento y covariante en el segundo.
En el siguiente corolario, se expresa una forma fácil de ver cuando el producto tensorial de dos transformaciones lineales es un isomorfismo.

Corolario 3.2.1. *Sea F un campo, $V, V', W, W' \in Obj(\boldsymbol{Vec_F})$, $T \in Hom(V, V')$ y $S \in Hom(W, W')$. Si T y S son isomorfismos, entonces, $T \otimes S \in Hom(V \otimes W, V' \otimes W')$ es isomorfismo.*

Demostración. Como $T : V \to V'$ es isomorfismo, por el Teorema 3.1.2, $T \otimes id_W : V \otimes W \to V' \otimes W$ es isomorfismo. De igual manera, como $S : W \to W'$ es isomorfismo, se tiene que $id_{V'} \otimes S : V' \otimes W \to V' \otimes W'$ es isomorfismo. En consecuencia, $(id_{V'} \otimes S)(T \otimes id_W) : V \otimes W \to V' \otimes W'$ es isomorfismo, ya que es composición de isomorfismos, pero por el Lema 3.2.1, se tiene que $(id_{V'} \otimes S)(T \otimes id_W) = T \otimes S$, así que $T \otimes S : V \otimes W \to V' \otimes W'$ es isomorfismo. □

Algo curioso respecto con los funtores anteriores es que respetan monomorfismos y epimorfismos, aplicados en cualquiera de los argumentos, esto se explica en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.7. *Sean F un campo, $V, V', W, W' \in Obj(\boldsymbol{Vec_F})$. Entonces:*

1)
- *Si $T \in Hom(V, V')$ es monomorfismo, entonces $T \otimes id_W \in Hom(V \otimes W, V' \otimes W)$ es monomorfismo.*
- *Si $S \in Hom(W, W')$ es monomorfismo, entonces $id_V \otimes S \in Hom(V \otimes W, V \otimes W')$ es monomorfismo.*

2)
- *Si $T \in Hom(V, V')$ es epimorfismo, entonces $T \otimes id_W \in Hom(V \otimes W, V' \otimes W)$ es epimorfismo.*
- *Si $S \in Hom(W, W')$ es epimorfismo, entonces $id_V \otimes S \in Hom(V \otimes W, V \otimes W')$ es epimorfismo.*

Demostración.

1)
- Supongamos que $T \in Hom(V, V')$ es monomorfismo, en consecuencia, por el Teorema 1.4.5, existe $T' \in Hom(V', V)$ tal que $T'T = id_V$. Ahora, sabemos por el Teorema 3.2.6, se tiene que $T \otimes id_W \in Hom(V \otimes W, V' \otimes W)$ y $T' \in Hom(V' \otimes W, V \otimes W)$. Ahora, haciendo uso del Lema 3.2.1, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (T' \otimes id_W)(T \otimes id_W) &= (T'T) \otimes (id_W id_W) \\ &= id_V \otimes id_W \\ &= id_{V \otimes W} \end{aligned}$$

  es decir, $(T' \otimes id_W)(T \otimes id_W) = id_{V \otimes W}$. De esta manera, por el Teorema 1.4.5, se sigue lo deseado.
- Mutatis mutandis la prueba del caso anterior.

2)
- Supongamos que $T \in Hom(V, V')$ es epimorfismo, luego, por el Teorema 1.4.9, existe $T' \in Hom(V', V)$, tal que $TT' = id_{V'}$. Tenemos que $T \otimes id_W \in Hom(V \otimes W, V' \otimes W)$ y $T' \otimes id_W \in Hom(V' \otimes W, V \otimes W)$ y por el Lema 3.2.1, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (T \otimes id_W)(T' \otimes id_W) &= (TT') \otimes (id_W id_W) \\ &= id_{V'} \otimes id_W \\ &= id_{V' \otimes W} \end{aligned}$$

  es decir, $(T \otimes id_W)(T' \otimes id_W) = id_{V' \otimes W}$. A consecuencia del Teorema 1.4.9, hemos probado lo deseado.

- Mutatis mutandis la prueba del caso anterior.

$\square$

Corolario 3.2.2. *Sea F un campo, $V, V', W, W' \in Obj(\textbf{Vec}_F)$. Entonces:*

1) *Si $T \in Hom(V, V')$ y $S \in Hom(W, W')$ son monomorfismos, entonces $T \otimes S \in Hom(V \otimes W, V' \otimes W')$ es monomorfismo.*

2) *Si $T \in Hom(V, V')$ y $S \in Hom(W, W')$ son epimorfismos, entonces $T \otimes S \in Hom(V \otimes W, V' \otimes W')$ es epimorfismos.*

Demostración. Mutatis mutandis la demostración del Corolario 3.2.1. $\square$

Más propiedades del producto tensorial

Usando los resultados que tenemos hasta el momento, vamos a seguir probando propiedades del producto tensorial.
Cuando expusimos la teoría correspondiente al funtor Hom, vimos que si F es un campo y $V \in Obj(\textbf{Vec}_F)$, entonces $Hom(F, V) \cong V$, además, tal isomorfismo es natural. La pregunta es: ¿ocurrirá lo mismo con el Tensor? El siguiente teorema tiene la respuesta.

Teorema 3.2.8. *Sea F un campo. Entonces:*

1) *Para cada $V \in Obj(\textbf{Vec}_F)$, existe un isomorfismo, $\psi_V : F \otimes V \to V$, tal que $\psi_V(c \otimes v) = cv$, para cada $c \in F$, $v \in V$.*

2) *El isomorfismo dado en 1), es natural en el siguiente sentido: si $V, V' \in Obj(\textbf{Vec}_F)$ y $T \in Hom(V, V')$, entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} F \otimes V \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, "id_F \otimes T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ F \otimes V' \arrow[r, "\psi_{V'}"] & V' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $T\psi_V = \psi_{V'}(id_F \otimes T)$.

Demostración.

1) Sea $V \in Obj(\textbf{Vec}_F)$. Por el Ejemplo 3.2.1, tenemos que

$$\begin{array}{rccc} f: & F \times V & \to & V \\ & (c, v) & \mapsto & cv \end{array}$$

es una función bilineal. Por la Propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal, $\psi_V : F \otimes V \to V$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \times V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V \\ F \otimes V \arrow[ur, "\psi_V"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\psi_V h = f$, donde $h : F \times V \to F \otimes V$ es la función bilineal asociada a $F \otimes V$. Notemos que para cada $c \in F, v \in V$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \psi_V(c \otimes v) & = & \psi_V(h(c, v)) \\ & = & (\psi_V h)(c, v) \\ & = & f(c, v) \\ & = & cv \end{array}$$

es decir, $\psi_V(c \otimes v) = cv$. Con esto tenemos que ψ_V es la transformación lineal que cumple lo que se propone, nos falta ver que es isomorfismo, lo cual se probará construyendo una transformación lineal inversa para ψ_V. Definamos la función

$$\begin{array}{rccc} \alpha_V: & V & \to & F \otimes V \\ & v & \mapsto & 1_F \otimes v \end{array}$$

y veamos que es una transformación lineal, para eso tomemos $c \in F$, $v, v' \in V$. Entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_V(v + cv') & = & 1_F \otimes (v + cv') \\ & = & 1_F \otimes v + 1_F \otimes (cv') \\ & = & 1_F \otimes v + c(1_F \otimes v') \\ & = & \alpha_V(v) + c\alpha_V(v') \end{array}$$

es decir, $\alpha_V(v + cv') = \alpha_V(v) + c\alpha_V(v')$, lo cual sucede para cada $c \in F$, $v, v' \in V$. De ahí se sigue que α_V es una transformación lineal.
Ahora, por un lado, si $c \in F, v \in V$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (\alpha_V\psi_V)(c \otimes v) & = & \alpha_V(\psi_V(c \otimes v)) \\ & = & \alpha_V(cv) \\ & = & 1_F \otimes (cv) \\ & = & c \otimes v \\ & = & id_{F\otimes V}(c \otimes v) \end{array}$$

es decir, $(\alpha_V\psi_V)(c \otimes v) = id_{F\otimes V}(c \otimes v)$, lo cual sucede para cada $c \in F, v \in V$. Dado que los elementos de la forma $c \otimes v$, con $c \in F$, $v \in V$, son los generadores de $F \otimes V$, id_F y $\alpha_V\psi_V$ son transformaciones lineales, se sigue que $\alpha_V\psi_V = id_{F\otimes V}$. Por otro lado, si $v \in V$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (\psi_V\alpha_V)(v) & = & \psi_V(\alpha_V(v)) \\ & = & \psi_V(1_F \otimes v) \\ & = & 1_F \cdot v \\ & = & v \\ & = & id_V(v) \end{array}$$

es decir, $(\psi_V\alpha_V)(v) = id_V(v)$, lo cual ocurre para cada $v \in V$, por consiguiente, $\psi_V\alpha_V = id_V$. Así las cosas, hemos mostrado que α_V es la transformación lineal inversa de ψ_V, con lo cual queda mostrado que ψ_V es un isomorfismo.

2) Sean $V, V' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y $T \in Hom(V, V')$. Debemos mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \otimes V \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, "id_F\otimes T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ F \otimes V' \arrow[r, "\psi_{V'}"] & V' \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Sean $c \in F, v \in V$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (T\psi_V)(c \otimes v) & = & T(\psi_V(c \otimes v)) \\ & = & T(cv) \\ & = & cT(v) \end{array}$$

es decir, $(T\psi_V)(c \otimes v) = cT(v)$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (\psi_{V'}(id_F \otimes T))(c \otimes v) & = & \psi_{V'}((id_F \otimes T)(c \otimes V)) \\ & = & \psi_{V'}(id_F(c) \otimes T(v)) \\ & = & \psi_{V'}(c \otimes T(v)) \\ & = & cT(v) \end{array}$$

es decir, $(\psi_{V'}(id_F \otimes T))(c \otimes v) = cT(v)$. De lo anterior se sigue que $T\psi_V = \psi_{V'}(id_F \otimes T)$, lo que se quería demostrar.

$\square$

De lo anterior se ha mostrado que los funtores $\mathbf{Id} : \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$ y $F \otimes \_ : \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$, son naturalmente isomorfos.

Corolario 3.2.3. *Sea F un campo y $V \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Entonces, $dim(F \otimes V) = dim(V)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.8, se tiene que $F \otimes V \cong V$ y por el Teorema fundamental del álgebra lineal, se sigue que $dim(V) = dim(F \otimes V)$. $\square$

Por la forma en que está construido nuestro producto tensorial, es claro que si F es un campo, $U, V, W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, entonces $V \otimes W \neq W \otimes V$ y $U \otimes (V \otimes W) \neq (U \otimes V) \otimes W$, pues está construido a partir de un producto cartesiano. Sin embargo, hay una relación fuerte entre los espacios mencionados, eso se expone en los dos teoremas siguientes.

Teorema 3.2.9 (Conmutatividad del producto tensorial)**.** *Sea F un campo. Entonces:*

1) *Para cada $V, W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, existe un isomorfismo, $\eta_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$, tal que $\eta(v \otimes w) = w \otimes v$, para cada $v \in V, w \in W$.*

2) *El isomorfismo dado en 1), es natural en el siguiente sentido: si $V, V', W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(V, V')$ y $S \in Hom(W, W')$, entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "\eta_{V,W}"] \arrow[d, "T\otimes S"'] & W \otimes V \arrow[d, "S\otimes T"] \\ V' \otimes W' \arrow[r, "\eta_{V',W'}"] & W' \otimes V' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $(S \otimes T)\eta_{V,W} = \eta_{V',W'}(T \otimes S)$.

Demostración.

1) Sean $V, W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Consideremos los productos tensoriales $(V \otimes W, h)$ y $(W \otimes V, h')$, donde h y h' son sus respectivas funciones bilineales asociadas. Definamos primero la función

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times W & \to & W \otimes V \\ & (v, w) & \mapsto & w \otimes v. \end{array}$$

Veamos que f es una función bilineal, para eso tomemos $c \in F, v, v' \in V, w, w' \in W$. Luego, tenemos lo siguiente:

- (Aditividad respecto al primer argumento):

$$\begin{array}{rcl} f(v + v', w) & = & w \otimes (v + v') \\ & = & w \otimes v + w \otimes v' \\ & = & f(v, w) + f(v', w) \end{array}$$

es decir, $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v', w)$.

- (Aditividad respecto al segundo argumento):

$$\begin{array}{rcl} f(v, w + w') & = & (w + w') \otimes v \\ & = & w \otimes v + w' \otimes v \\ & = & f(v, w) + f(v, w') \end{array}$$

es decir, $f(v, w + w') = f(v, w) + f(v, w')$.

- (Homogeneidad en ambos argumentos): Por un lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} f(cv,w) & = & w \otimes (cv) \\ & = & c(w \otimes v) \\ & = & cf(v,w) \end{array}$$

es decir, $f(cv,w) = cf(v,w)$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} f(v,cw) & = & (cw) \otimes v \\ & = & c(w \otimes v) \\ & = & cf(v,w) \end{array}$$

es decir, $f(v,cw) = cf(v,w)$. Al comparar las igualdades anteriores, se sigue que $f(cv,w) = f(v,cw) = cf(v,w)$.

Así las cosas, hemos mostrado que $f : V \times W \to W \otimes V$ es una función bilineal, por la Propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal, $\eta_{V,W} \in Hom(V \otimes W, W \otimes V)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & W \otimes V \\ V \otimes W \arrow[ur, "\eta_{V,W}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\eta_{V,W} h = f$. De esta manera, se tiene que para cada $v \in V$, $w \in W$,

$$\begin{array}{rcl} \eta_{V,W}(v \otimes w) & = & \eta_{V,W}(h(v,w)) \\ & = & (\eta_{V,W} h)(v,w) \\ & = & f(v,w) \\ & = & w \otimes v \end{array}$$

es decir, $\eta_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$. Así, tenemos que $\eta_{V,W}$ es una transformación lineal con la propiedad que se propone en el enunciado del teorema, solo nos falta ver que es isomorfismo, lo cual mostraremos construyendo una transformación lineal inversa para $\eta_{V,W}$. Definamos la función

$$\begin{array}{rrcl} f' : & W \times V & \to & V \otimes W \\ & (w,v) & \mapsto & v \otimes w. \end{array}$$

Haciendo un proceso similar al realizado para mostrar la bilinealidad de f, se establece la blilinealidad de f'. Por la propiedad universal del producto tensorial, existe una única $\rho_{W,V} \in Hom(W \otimes V, V \otimes W)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \times V \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & V \otimes W \\ W \otimes V \arrow[ur, "\rho_{W,V}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\rho_{W,V} h' = f'$. De esta manera, se tiene que $\rho_{W,V}(w \otimes v) = v \otimes w$, para cada $w \in W, v \in V$. Vamos a mostrar que $\rho_{W,V}$ es inversa de $\eta_{V,W}$. Por un lado, tenemos que para cada $v \in V, w \in W$,

$$\begin{array}{rcl} (\rho_{W,V}\eta_{V,W})(v \otimes w) & = & \rho_{W,V}(\eta_{V,W}(v \otimes w)) \\ & = & \rho_{W,V}(w \otimes v) \\ & = & v \otimes w \\ & = & id_{V \otimes W}(v \otimes w) \end{array}$$

es decir, $(\rho_{W,V}\eta_{V,W})(v \otimes w) = id_{V\otimes W}(v \otimes w)$. Como la igualdad anterior se da en los generadores de $V \otimes W$, se sigue que $\rho_{W,V}\eta_{V,W} = id_{V\otimes W}$. Por otro lado, para cada $w \in W, v \in V$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}(\eta_{V,W}\rho_{W,V})(w \otimes v) & = & \eta_{W,V}(\rho_{V,W}(v \otimes w)) \\ & = & \eta_{W,V}(v \otimes w) \\ & = & w \otimes v \\ & = & id_{W\otimes V}(w \otimes v)\end{array}$$

es decir, $(\eta_{V,W}\rho_{W,V})(w\otimes v) = id_{W\otimes V}(w\otimes v)$. Dado que la igualdad se da en los generadores de $W\otimes V$, se concluye que $\eta_{V,W}\rho_{W,V} = id_{W\otimes V}$. De lo anterior, se establece que $\rho_{W,V} = \eta^{-1}_{V,W}$ y consecuentemente, $\eta_{V,W}$ es isomorfismo.

2) Sean $V, V', W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(V, V')$ y $S \in Hom(W, W')$. Debemos mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "\eta_{V,W}"] \arrow[d, "T\otimes S"'] & W \otimes V \arrow[d, "S\otimes T"] \\ V' \otimes W' \arrow[r, "\eta_{V',W'}"] & W' \otimes V' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, se debe mostrar que $(S \otimes T)\eta_{V,W} = \eta_{V',W'}(T \otimes S)$. Basta ver la igualdad en los generadores de $V \otimes W$. Tomemos $v \in V, w \in W$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl}((S \otimes T)\eta_{V,W})(v \otimes w) & = & (S \otimes T)(\eta_{V,W}(v \otimes w)) \\ & = & (S \otimes T)(w \otimes v) \\ & = & S(w) \otimes T(w)\end{array}$$

es decir, $((S \otimes T)\eta_{V,W})(v \otimes w) = S(w) \otimes T(w)$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}(\eta_{V',W'}(T \otimes S))(v \otimes w) & = & \eta_{V',W'}((T \otimes S)(v \otimes w)) \\ & = & \eta_{V',W'}(T(v) \otimes S(w)) \\ & = & S(w) \otimes T(v)\end{array}$$

es decir, $(\eta_{V',W'}(T \otimes S))(v \otimes w) = S(w) \otimes T(v)$. Comparando las igualdades anteriores, se tiene lo deseado.

□

Corolario 3.2.4. *Sea F un campo. Entonces, para cada $V \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, se tiene que $F \otimes V \cong V \cong V \otimes F$.*

Demostración. Por el teorema anterior, se tiene que $V \otimes F \cong F \otimes V$ y por el Teorema 3.2.8, $F \otimes V \cong V$. Por la transitividad de la relación de isomorfismo, se sigue lo deseado. □

Teorema 3.2.10 (Asociatividad del producto tensorial)**.** *Sea F un campo. Entonces:*

1) *Para cada $U, V, W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, existe un isomorfismo, $\theta_{U,V,W} : U\otimes(V\otimes W) \to (U\otimes V)\otimes W$, tal que para cada $u \in U$, $v \in V$ y $w \in W$, se cumple que $\theta_{U,V,W}(u\otimes(v\otimes w)) = (u\otimes v)\otimes w$.*

2) *El isomorfismo dado en 1), es natural en el siguiente sentido: para cada $U, U', V, V', W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, si $T \in Hom(U, U')$, $S \in Hom(V, V')$ y $R \in Hom(W, W')$, entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "\theta_{V,W,Z}"] \arrow[d, "T\otimes(S\otimes R)"'] & (U \otimes V) \otimes W \arrow[d, "(T\otimes S)\otimes R"] \\ U' \otimes (V' \otimes W') \arrow[r, "\theta_{V',W',Z'}"] & (U' \otimes V') \otimes W' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $(T \otimes (S \otimes R))\theta_{V,W,Z} = \theta_{V',W',Z'}(T \otimes (S \otimes R))$.

Demostración.

1) Sean $U, V, W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y consideremos los productos tensoriales $(U \otimes (V \otimes W), h)$ y $(h', (U \otimes V) \otimes W)$, donde h y h' son sus respectivas funciones bilineales asociadas. Para cada $u \in U$, definamos la función

$$\begin{array}{rccc} T_u: & V & \to & U \otimes V \\ & v & \mapsto & u \otimes v. \end{array}$$

Tomemos $u \in U$ y veamos que $T_u \in Hom(U, U \otimes V)$, para eso tomemos $c \in F$, $v, v' \in V$. Luego, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} T_u(v + cv') & = & u \otimes (v + cv') \\ & = & u \otimes v + u \otimes (cv') \\ & = & u \otimes v + c(u \otimes v') \\ & = & T_u(v) + cT_u(v') \end{array}$$

es decir, $T_u(v + cv') = T_u(v) + cT_u(v')$, lo cual sucede para cada $c \in F$, $v, v' \in V$, en consecuencia, $T_u \in Hom(U, U \otimes V)$, esto para cada $u \in U$. Consideremos el funtor $\_\_ \otimes W : \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$, del Teorema 3.2.6. Luego, se tiene que para cada $u \in U$, $(\_\_ \otimes W)(T_u) = T_u \otimes id_W$, consecuentemente, se tiene que $T_u \otimes id_W \in Hom(V \otimes W, (U \otimes V) \otimes W)$, lo cual sucede para cada $u \in U$. Lo anterior nos permite definir la función

$$\begin{array}{rccc} f: & U \times (V \otimes W) & \to & (U \otimes V) \otimes W \\ & (u, v \otimes w) & \mapsto & (T_u \otimes id_W)(v \otimes w). \end{array}$$

Notemos que para cada $u \in U, v \in V, w \in W$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} f(u, v \otimes w) & = & (T_u \otimes id_W)(v \otimes w) \\ & = & T_u(v) \otimes id_W(w) \\ & = & (u \otimes v) \otimes w \end{array}$$

es decir, $f(u, v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. Ahora veamos que f es bilineal, lo cual hacemos a continuación:

- (Aditividad respecto al primer argumento): Sean $u_1, u_2 \in U, v \otimes w \in V \otimes W$. Observemos que

$$\begin{array}{rcl} T_{u_1+u_2}(v) & = & (u_1 + u_2) \otimes v \\ & = & u_1 \otimes v + u_2 \otimes v \\ & = & T_{u_1}(v) + T_{u_2}(v) \end{array}$$

  es decir, $T_{u_1+u_2}(v) = T_{u_1}(v) + T_{u_2}(v)$. Como esto ocurre para cada $v \in V$, tenemos que $T_{u_1+u_2} = T_{u_1} + T_{u_2}$. Usando lo anterior y la aditividad del funtor $\_\_ \otimes W$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} f(u_1 + u_2, v \otimes w) & = & (T_{u_1+u_2} \otimes id_W)(v \otimes w) \\ & = & ((T_{u_1} + T_{u_2}) \otimes id_W)(v \otimes w) \\ & = & (T_{u_1} \otimes id_W + T_{u_2} \otimes id_W)(v \otimes w) \\ & = & (T_{u_1} \otimes id_W)(v \otimes w) + (T_{u_2} \otimes id_W)(v \otimes w) \\ & = & f(u_1, v \otimes w) + f(u_2, v \otimes w) \end{array}$$

  es decir, $f(u_1 + u_2, v \otimes w) = f(u_1, v \otimes w) + f(u_2, v \otimes w)$.

- (Aditividad respecto al segundo argumento): Sean $u \in U, v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \in V \otimes W$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} f(u, v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2) & = & (T_u \otimes id_W)(v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2) \\ & = & (T_u \otimes id_W)(v_1 \otimes w_1) + (T_u \otimes id_W)(v_2 \otimes w_2) \\ & = & f(u, v_1 \otimes w_2) + f(u, v_2 \otimes w_2) \end{array}$$

  es decir, $f(u, v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2) = f(u, v_1 \otimes w_2) + f(u, v_2 \otimes w_2)$.

- (Homogeneidad en ambos argumentos): Sean $c \in F, u \in U, v \otimes w \in V \otimes W$. Veamos primero la homogeneidad en el primer argumento, lo cual se hace a continuación:

$$\begin{array}{rcl} f(cu, v \otimes w) & = & ((cu) \otimes v) \otimes w \\ & = & (c(u \otimes v)) \otimes w \\ & = & c((u \otimes v) \otimes w) \\ & = & cf(u, v \otimes w) \end{array}$$

es decir, $f(cu, v \otimes w) = cf(u, v \otimes w)$. Ahora, respecto al segundo argumento, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} f(u, c(v \otimes w)) & = & (T_u \otimes id_W)(c(v \otimes w)) \\ & = & c((T_u \otimes id_W)(v \otimes w)) \\ & = & cf(u, v \otimes w) \end{array}$$

es decir, $f(u, c(v \otimes w)) = cf(u, v \otimes w)$.

Así las cosas, hemos visto que f es una función bilineal, por la Propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal, $\theta_{U,V,W} : U \otimes (V \otimes W) \to (U \otimes V) \otimes W$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times (V \otimes W) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & (U \otimes V) \otimes W \\ U \otimes (V \otimes W) \arrow[ur, "\theta_{U,V,W}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\theta_{U,V,W} h = f$. Notemos que para cada $u \in U, v \in V, w \in W$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \theta_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) & = & \theta_{U,V,W}(h(u, v \otimes w)) \\ & = & (\theta_{U,V,W} h)(u, v \otimes w) \\ & = & f(u, v \otimes w) \\ & = & (u \otimes v) \otimes w \end{array}$$

es decir, $\theta_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w$, de donde se sigue que $\theta_{U,V,W}$ es una transformación lineal con la propiedad deseada.
Nos falta mostrar que es isomorfismo, lo cual haremos construyendo una transformación lineal inversa para $\theta_{U,V,W}$. Para hacerlo, definamos ahora para cada $w \in W$, la función

$$\begin{array}{rccl} S_w : & V & \mapsto & V \otimes W \\ & v & \mapsto & v \otimes w. \end{array}$$

Mostremos que para cada $w \in W$, $S_w \in Hom(V, V \otimes U)$, para eso tomemos $c \in F$, $v, v' \in V$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} S_w(v + cv') & = & (v + cv') \otimes w \\ & = & v \otimes w + (cv') \otimes w \\ & = & v \otimes w + c(v' \otimes w) \\ & = & S_w(v) + cS_w(v') \end{array}$$

es decir, $S_w(v + cv') = S_w(v) + cS_w(v')$. De donde se sigue la linealidad de S_w, para cada $w \in W$. Considerando el funtor $U \otimes \_ : \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$, tenemos que $(U \otimes \_)(S_w) = id_U \otimes S_w \in Hom(U \otimes V, U \otimes (V \otimes W))$, para cada $w \in W$, esto nos permite definir la función

$$\begin{array}{rccc} g : & (U \otimes V) \otimes W & \to & U \otimes (V \otimes W) \\ & (u \otimes v, w) & \mapsto & (id_U \otimes S_w)(u \otimes v). \end{array}$$

Notemos que para cada $u \in U, v \in V, w \in W$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} g(u \otimes v, w) & = & (id_U \otimes S_w)(u \otimes v) \\ & = & id_U(u) \otimes S_w(u \otimes v) \\ & = & u \otimes (v \otimes w) \end{array}$$

es decir, $g(u \otimes v, w) = u \otimes (v \otimes w)$. Haciendo un razonamiento totalmente similar al implementado para probar que la función f es bilineal, se muestra la bilinealidad de g. Por la Propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal, $\gamma_{U,V,W} \in Hom((U \otimes V) \otimes W, U \otimes (V \otimes W))$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} (U \otimes V) \times W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h'"'] & U \otimes (V \otimes W) \\ (U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, "\gamma_{U,V,W}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\gamma_{U,V,W} h' = g$. Nos queda mostrar que $\gamma_{U,V,W}$ es la inversa de $\theta_{U,V,W}$, lo cual haremos mostrando ambas composiciones. Por un lado, para cada generador $u \otimes (v \otimes w) \in U \otimes (V \otimes W)$, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (\gamma_{U,V,W}\theta_{U,V,W})(u \otimes (v \otimes w)) & = & \gamma_{U,V,W}(\theta_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w))) \\ & = & \gamma_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) \\ & = & u \otimes (v \otimes w) \\ & = & id_{U \otimes (V \otimes W)}(u \otimes (v \otimes w)) \end{array}$$

es decir, $(\gamma_{U,V,W}\theta_{U,V,W})(u \otimes (v \otimes w)) = id_{U \otimes (V \otimes W)}(u \otimes (v \otimes w))$, de donde se sigue que $\gamma_{U,V,W}\theta_{U,V,W} = id_{U \otimes (V \otimes W)}$. Por otro lado, para cada generador $(u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (\theta_{U,V,W}\gamma_{U,V,W})((u \otimes v) \otimes w) & = & \theta_{U,V,W}(\gamma_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w)) \\ & = & \theta_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) \\ & = & (u \otimes v) \otimes w \\ & = & id_{(U \otimes V) \otimes W}((u \otimes v) \otimes w) \end{array}$$

es decir, $(\theta_{U,V,W}\gamma_{U,V,W})((u \otimes v) \otimes w) = id_{(U \otimes V) \otimes W}((u \otimes v) \otimes w)$, de donde obtenemos que $\theta_{U,V,W}\gamma_{U,V,W} = id_{(U \otimes V) \otimes W}$, en consecuencia, $\gamma_{U,V,W}$ es inversa de $\theta_{U,V,W}$ y por consiguiente, $\theta_{U,V,W}$ es isomorfismo.

2) Sean $U, U', V, V', W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(U, U')$, $S \in Hom(V, V')$ y $R \in Hom(W, W')$. Debemos mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "\theta_{V,W,Z}"] \arrow[d, "T \otimes (S \otimes R)"'] & (U \otimes V) \otimes W \arrow[d, "(T \otimes S) \otimes R"] \\ U' \otimes (V' \otimes W') \arrow[r, "\theta_{V',W',Z'}"] & (U' \otimes V') \otimes W' \end{tikzcd}$$

es conmutativo, o sea, debemos mostrar que $((T \otimes S) \otimes R)\theta_{V,W,Z} = \theta_{V',W',Z'}(T \otimes (S \otimes R))$. Como de costumbre, se mostrará evaluando ambas igualdades en un generador arbitrario de $U \otimes (V \otimes W)$ y comparando. Tomemos un generador cualquiera $u \otimes (v \otimes w) \in U \otimes (V \otimes W)$. Por un lado, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} ((T \otimes S) \otimes R)\theta_{V,W,Z})(u \otimes (v \otimes w)) & = & ((T \otimes S) \otimes R)(\theta_{V,W,Z}(u \otimes (v \otimes w))) \\ & = & ((T \otimes S) \otimes R)((u \otimes v) \otimes w) \\ & = & ((T \otimes S)(u \otimes v)) \otimes R(w) \\ & = & (T(u) \otimes S(v)) \otimes R(w) \end{array}$$

es decir, $((T \otimes S) \otimes R)\theta_{V,W,Z})(u \otimes (v \otimes w)) = (T(u) \otimes S(v)) \otimes R(w)$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}(\theta_{V',W',Z'}(T \otimes (S \otimes R)))(u \otimes (v \otimes w)) & = & \theta_{V',W',Z'}((T \otimes (S \otimes R))(u \otimes (v \otimes w))) \\ & = & \theta_{V',W',Z'}(T(u) \otimes ((S \otimes R)(v \otimes w))) \\ & = & \theta_{V',W',Z'}(T(u) \otimes (S(v) \otimes R(w))) \\ & = & (T(u) \otimes S(v)) \otimes R(w)\end{array}$$

es decir, $(\theta_{V',W',Z'}(T \otimes (S \otimes R)))(u \otimes (v \otimes w)) = (T(u) \otimes S(v)) \otimes R(w)$. Al comparar las igualdades de ambas composiciones, se tiene lo que se buscaba.

□

Comportamiento del tensor de las sumas directas

Teorema 3.2.11. *Sean F un campo, $V \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$ y $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre F. Entonces:*

1) Existe un isomorfismo

$$\sigma : \quad V \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right) \quad \to \quad \bigoplus_{i\in I}(V \otimes W_i)$$

definido en generadores por

$$\sigma(v \otimes (w_i)_{i\in I}) = (v \otimes w_i)_{i\in I}.$$

2) El isomorfismo dado en 1), es natural en el siguiente sentido: si $\{Z_i\}_{i\in I}$ es otra familia de espacios vectoriales sobre F y $\{T_i : W_i \to Z_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones lineales, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right) \arrow[r, "id_V \otimes T"] \arrow[d, "\sigma"'] & V \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} Z_i\right) \arrow[d, "\sigma'"] \\ \bigoplus_{i\in I}(V \otimes W_i) \arrow[r, "\widehat{T}"] & \bigoplus_{i\in I}(V \otimes Z_i) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $\sigma'(id_V \otimes T) = \widehat{T}\sigma$, donde $T = \bigoplus_{i\in I} T_i$ y $\widehat{T} = \bigoplus_{i\in I}(id_V \otimes T_i)$.

Demostración.

1) Definamos la función

$$\begin{array}{rccc} f: & V \otimes \bigoplus_{i\in I} W_i & \to & \bigoplus_{i\in I}(V \otimes W_i) \\ & (v, (w_i)_{i\in I}) & \mapsto & (v \otimes w_i)_{i\in I}. \end{array}$$

Notemos que f está bien definida, pues si $(w_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} W_i$, entonces $w_i = 0_{W_i}$, para casi toda $i \in I$, en consecuencia, $v \otimes w_i = 0_{V\otimes W_i}$, para casi toda $i \in I$, lo que implica que $(v \otimes w_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}(V \otimes W_i)$. Ahora veamos que f es bilineal:

- (Aditividad respecto al primer argumento): Sean $v, v' \in V$, $(w_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} W_i$. Luego, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} f(v + v', (w_i)_{i\in I}) & = & ((v + v') \otimes w_i)_{i\in I} \\ & = & (v \otimes w_i + v' \otimes w_i)_{i\in I} \\ & = & (v \otimes w_i)_{i\in I} + (v' \otimes w_i)_{i\in I} \\ & = & f(v, (w_i)_{i\in I}) + f(v', (w_i)_{i\in I}) \end{array}$$

  es decir, $f(v + v', (w_i)_{i\in I}) = f(v, (w_i)_{i\in I}) + f(v', (w_i)_{i\in I})$.

- (Aditividad respecto al segundo argumento): Sean $v \in V$, $(w_i)_{i\in I}, (w_i')_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} W_i$. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} f(v,(w_i)_{i\in I} + (w_i')_{i\in I}) & = & f(v,(w_i + w_i')_{i\in I}) \\ & = & (v\otimes (w_i + w_i'))_{i\in I} \\ & = & (v\otimes w_i + v\otimes w_i')_{i\in I} \\ & = & (v\otimes w_i)_{i\in I} + (v\otimes w_i')_{i\in I} \\ & = & f(v,(w_i)_{i\in I}) + f(v,(w_i')_{i\in I}) \end{array}$$

  es decir, $f(v,(w_i)_{i\in I} + (w_i')_{i\in I}) = f(v,(w_i)_{i\in I}) + f(v,(w_i')_{i\in I})$.
- (Homogeneidad en ambos argumentos): Sean $c \in F$, $v \in V$ y $(w_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} W_i$. Por un lado, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f(cv,(w_i)_{i\in I}) & = & ((cv)\otimes w_i)_{i\in I} \\ & = & (c(v\otimes w_i))_{i\in I} \\ & = & c(v\otimes w_i)_{i\in I} \\ & = & cf(v,(w_i)_{i\in I}) \end{array}$$

  es decir, $f(cv,(w_i)_{i\in I}) = cf(v,(w_i)_{i\in I})$, de donde se sigue la homogeneidad en el primer argumento. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} f(v,c(w_i)_{i\in I}) & = & f(v,(cw_i)_{i\in I}) \\ & = & (v\otimes (cw_i))_{i\in I} \\ & = & (c(v\otimes w_i))_{i\in I} \\ & = & c(v\otimes w_i)_{i\in I} \\ & = & cf(v,(w_i)_{i\in I}) \end{array}$$

  es decir, $f(v,c(w_i)_{i\in I}) = cf(v,(w_i)_{i\in I})$ y así se establece la homogeneidad en el segundo argumento.

Al ser f una función bilineal, por la Propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal, $\sigma \in Hom\left(V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right), \bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i)\right)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V\times\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i) \\ V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right) \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\sigma h = f$, donde $h : V\times\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right) \to V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)$ es la función bilineal asociada a $V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)$. Notemos que para cada $v\in V$, $(w_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} W_i$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \sigma(v\otimes (w_i)_{i\in I}) & = & \sigma(h(v,(w_i)_{i\in I})) \\ & = & (\sigma h)(v,(w_i)_{i\in I}) \\ & = & f(v,(w_i)_{i\in I}) \\ & = & (v\otimes w_i)_{i\in I} \end{array}$$

es decir, $\sigma(v\otimes (w_i)_{i\in I}) = (v\otimes w_i)_{i\in I}$. Así, tenemos que σ es una transformación lineal con la propiedad deseada, falta ver que es isomorfismo, para eso vamos, a construir una transformación lineal inversa para σ. Consideremos para cada $k\in I$, la k-ésima inclusión

$$\begin{array}{rrcl} \iota_k : & W_i & \to & \bigoplus_{i\in I} W_i \\ & w_k & \mapsto & (x_i)_{i\in I} \end{array}$$

donde $x_k = w_k$ y $x_i = 0_{W_k}$, si $i\neq k$. Al aplicar el funtor $V\otimes\_\_ : \mathbf{Vec}_F \to \mathbf{Vec}_F$ a cada ι_k, tenemos que $(V\otimes\_\_)(\iota_k) = id_V\otimes\iota_k \in Hom\left(V\otimes W_k, V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)\right)$. Luego, tenemos que

$\{id_V \otimes \iota_i : V \otimes W_i \to V \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)\}_{i\in I}$ es una familia de transformaciones lineales, por la Propiedad universal de la suma directa externa, existe una única transformación lineal, $\tau \in Hom\left(\bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i), V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)\right)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V\otimes W_k \arrow[r, "id_V\otimes\iota_k"] \arrow[d, "\iota'_k"'] & V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right) \\ \bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i) \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\tau\iota'_k = id_V\otimes\iota_k$, para cada $k\in I$. Notemos que para cada $(v\otimes w_i)_{i\in I}\in\bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i)$, se cumple que

$$\begin{array}{rcl} \tau((v\otimes w_i)_{i\in I}) & = & \tau\left(\sum_{i\in I}\iota'_i(v\otimes w_i)\right) \\ & = & \sum_{i\in I}\tau(\iota'_i(v\otimes w_i)) \\ & = & \sum_{i\in I}(\tau\iota'_i)(v\otimes w_i) \\ & = & \sum_{i\in I}(id_V\otimes\iota_i)(v\otimes w_i) \\ & = & \sum_{i\in I}(v\otimes\iota_i(w_i)) \\ & = & v\otimes\left(\sum_{i\in I}\iota_i(w_i)\right) \\ & = & v\otimes(w_i)_{i\in I} \end{array}$$

es decir, $\tau((v\otimes w_i)_{i\in I}) = v\otimes(w_i)_{i\in I}$. Usando lo anterior vamos a mostrar que τ es la transformación lineal inversa de σ, lo cual se hará evaluando ambas composiciones en generadores arbitrarios de los respectivos productos tensoriales. Tomemos primero un generador $v\otimes(w_i)_{i\in I}\in V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)$. Entonces, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (\tau\sigma)(v\otimes(w_i)_{i\in I}) & = & \tau(\sigma(v\otimes(w_i)_{i\in I})) \\ & = & \tau(\sigma(v\otimes(w_i)_{i\in I})) \\ & = & \tau((v\otimes w_i)_{i\in I}) \\ & = & v\otimes(w_i)_{i\in I} \\ & = & id_{V\otimes(\bigoplus_{i\in I} W_i)}(v\otimes(w_i)_{i\in I}) \end{array}$$

es decir, $(\tau\sigma)(v\otimes(w_i)_{i\in I}) = id_{V\otimes(\bigoplus_{i\in I} W_i)}(v\otimes(w_i)_{i\in I})$. Así, se sigue que $\tau\sigma = id_{V\otimes(\bigoplus_{i\in I} W_i)}$. Ahora, si tomamos $(v\otimes w_i)_{i\in I}\in\bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i)$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (\sigma\tau)((v\otimes w_i)_{i\in I}) & = & \sigma(\tau((v\otimes w_i)_{i\in I}) \\ & = & \sigma(v\otimes(w_i)_{i\in I}) \\ & = & (v\otimes w_i)_{i\in I} \\ & = & id_{\bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i)}((v\otimes w_i)_{i\in I}) \end{array}$$

es decir, $(\sigma\tau)((v\otimes w_i)_{i\in I}) = id_{\bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i)}((v\otimes w_i)_{i\in I})$, de donde se tiene que $\sigma\tau = id_{\bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i)}$. De lo anterior, se tiene que τ es la transformación lineal inversa de σ y en consecuencia, σ es ismorfismo.

2) Ahora, tomemos otra familia de espacios vectoriales sobre F $\{Z_i\}_{i\in I}$ y una familia de transformaciones lineales $\{T_i : W_i\to Z_i\}_{i\in I}$. Se debe mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right) \arrow[r, "id_V\otimes T"] \arrow[d, "\sigma"'] & V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} Z_i\right) \arrow[d, "\sigma'"] \\ \bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i) \arrow[r, "\widehat{T}"] & \bigoplus_{i\in I}(V\otimes Z_i) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $T = \bigoplus_{i\in I} T_i$ y $\widehat{T} = \bigoplus_{i\in I}(id_V\otimes T_i)_{i\in I}$. Esto se probará evaluando ambas composiciones en un generador cualquiera de $V\otimes\left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)$. Pues tomemos un generador $v \otimes (w_i)_{i\in I} \in V \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} W_i\right)$. Por un lado, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}(\sigma'(id_V \otimes T))(v \otimes (w_i)_{i\in I}) & = & \sigma'((id_V \otimes T)(v \otimes (w_i)_{i\in I})) \\ & = & \sigma'(v \otimes (T_i(w_i))_{i\in I}) \\ & = & (v \otimes T_i(w_i))_{i\in I}\end{array}$$

es decir, $(\sigma'(id_V \otimes T))(v \otimes (w_i)_{i\in I}) = (v \otimes T_i(w_i))_{i\in I}$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl}(\widehat{T}\sigma)(v \otimes (w_i)_{i\in I}) & = & \widehat{T}(\sigma(v \otimes (w_i)_{i\in I})) \\ & = & \widehat{T}((v \otimes w_i)_{i\in I}) \\ & = & (id_V(v) \otimes T_i(w_i))_{i\in I} \\ & = & (v \otimes T_i(w_i))_{i\in I}\end{array}$$

es decir, $(\widehat{T}\sigma)(v \otimes (w_i)_{i\in I}) = (v \otimes T_i(w_i))_{i\in I}$. Comparando ambas composiciones, se sigue que $\sigma'(id_V \otimes T) = \widehat{T}\sigma$, lo que deseábamos probar.

□

Corolario 3.2.5. *Sea F un campo, $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia en $Obj(\textbf{Vec}_F)$ y $W \in Obj(\textbf{Vec}_F)$. Entonces,*

$$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W \cong \bigoplus_{i\in I}(V_i \otimes W).$$

Demostración. Usando los isomorfismos de los Teoremas 3.2.9, 3.2.11 y la transitividad de la relación de isomorfismo, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W & = & \cong W \otimes \left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \\ & \cong & \bigoplus_{i\in I}(W \otimes V_i) \\ & \cong & \bigoplus_{i\in I}(V_i \otimes W_i)\end{array}$$

es decir, $\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W \cong \bigoplus_{i\in I}(V_i \otimes W_i)$, lo que se deseaba. □

Una aplicación del teorema y corolario anterior, es encontrar una base para el producto tensorial y por consiguiente, su dimensión. Con estos resultados, se encuentra tal base de una manera muy fácil, a diferencia de la manera tradicional en que se hace.

Teorema 3.2.12. *Sea F un campo, $V, W \in Obj(\textbf{Vec}_F)$ con bases $\{v_i\}_{i\in I}$ y $\{w_j\}_{j\in J}$, respectivamente. Entonces, $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es una base de $V \otimes W$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.8, tenemos que $V = \bigoplus_{i\in I}\langle v_i\rangle$ y $W = \bigoplus_{j\in J}\langle w_j\rangle$. Ahora, aplicando el Teorema 3.2.11, el Corolario 3.2.5 y la transitividad de la relación de isomorfismo en la clase $Obj(\mathbf{Vec}_F)$, se tiene la siguiente cadena de isomorfismos:

$$\begin{array}{rcl}V \otimes W & = & \left(\bigoplus_{i\in I}\langle v_i\rangle\right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in J}\langle w_j\rangle\right) \\ & \cong & \bigoplus_{i\in I}\langle v_i\rangle \otimes \left(\bigoplus_{j\in J}\langle w_j\rangle\right) \\ & \cong & \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{j\in J}\langle v_i\rangle \otimes \langle w_j\rangle \\ & \cong & \bigoplus_{(i,j)\in I\times J}\langle v_i\rangle \otimes \langle w_j\rangle \\ & \cong & \bigoplus_{(i,j)\in I\times J}\langle v_i \otimes w_j\rangle\end{array}$$

es decir, $V \otimes W \cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J}\langle v_i \otimes w_j\rangle$. De aquí se sigue que $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es base de $V \otimes W$. □

Observación 3.2.4. *Como una consecuencia inmediata del teorema anterior, se tiene que si F es un campo, $V, W \in Obj(\textbf{Vec}_F)$, entonces $dim(V \otimes W) = dim(V)dim(W)$ (usando aritmética cardinal en el caso de dimensión infinita). En particular, si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $dim(V \otimes W) = nm$.*

Ejemplo 3.2.7. *Sea F un campo y $V \in Obj(\textbf{Vec}_F)$ tal que $dim(V) = 2$. Consideremos $\beta = \{v_1, v_2\}$ una base de V. Por la observación anterior, $dim(V \otimes V) = 4$ y $\gamma = \{v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2\}$ es una base para $V \otimes V$. Al propósito, en $V \otimes V$, el elemento $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ no es posible escribirlo como un generador $u \otimes v$, con $u, v \in V$. Si esto sucede, tenemos que $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 = u \otimes v$, para algunos $u, v \in V$. Como β es base de V, se tiene que $u = c_1 v_1 + c_2 v_2$ y $v = d_1 v_1 + d_2 v_2$, para únicos $c_1, d_1, c_2, d_2 \in F$, luego, se tienen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 &= u \otimes v \\ &= (c_1 v_1 + c_2 v_2) \otimes (d_1 v_1 + d_2 v_2) \\ &= (c_1 v_1) \otimes (d_1 v_1) + (c_1 v_1) \otimes (d_2 v_2) + (c_2 v_2) \otimes (d_1 v_1) + (c_2 v_2) \otimes (d_2 v_2) \\ &= (c_1 d_1) v_1 \otimes v_1 + (c_1 d_2) v_1 \otimes v_2 + (c_2 d_1) v_2 \otimes v_1 + (c_2 d_2) v_2 \otimes v_2 \end{aligned}$$

es decir, $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 = (c_1 d_1) v_1 \otimes v_1 + (c_1 d_2) v_1 \otimes v_2 + (c_2 d_1) v_2 \otimes v_1 + (c_2 d_2) v_2 \otimes v_2$. Comparando coeficientes, tenemos que $c_1 d_1 = c_2 d_2 = 0$ y $c_1 d_2 = c_2 d_1 = 1$, de donde se concluye que $1 = 0$, lo cual es absurdo, ya que F es campo. Por lo tanto, $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ no se puede escribir como un generador.

3.2.3. La adjunción entre Hom y Tensor

Para concluir esta tesis, vamos a probar el teorema de adjunción entre los funtores Hom y Tensor, así como algunas consecuencias que se deducen fácilmente de este hecho.

Teorema 3.2.13 (Adjunción entre Hom y Tensor)**.** *Sea F un campo y $V \in Obj(\textbf{Vec}_F)$. Entonces, $(\_\_ \otimes V) \dashv Hom(V, \_\_)$, esto es, para cada $U, W \in Obj(\textbf{Vec}_F)$, existe un isomorfismo natural*

$$\Phi_{U,V,W} : Hom(U \otimes V, W) \to Hom(U, Hom(V, W)).$$

Demostración. Sean $V, W \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{U,V,W} : & Hom(U \otimes V, W) & \to & Hom(U, Hom(V, W)) \\ & T & \mapsto & \Phi_{U,V,W}(T) \end{array}$$

donde $\Phi_{U,V,W}(T)$ lo definimos por

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{U,V,W}(T) : & U & \to & Hom(V, W) \\ & u & \mapsto & \Phi_{U,V,W}(T)(u) \end{array}$$

y a su vez, definimos a $\Phi_{U,V,W}(T)(u)$ por

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{U,V,W}(T)(u) : & V & \to & W \\ & v & \mapsto & T(u \otimes v). \end{array}$$

Es claro que $\Phi_{U,V,W}$ está bien definida. Vamos a ver ahora que $\Phi_{U,V,W}$ es una transformación lineal, para eso tomemos $c \in F$, $T, S \in Hom(U \otimes V, W)$. Luego, para cada $u \in U$ y para cada $v \in V$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Phi_{U,V,W}(T + cS)(u)(v) &= (T + cS)(u \otimes v) \\ &= T(u \otimes v) + (cS)(u \otimes v) \\ &= T(u \otimes v) + cS(u \otimes v) \\ &= \Phi_{U,V,W}(T)(u)(v) + c\Phi_{U,V,W}(S)(u)(v) \end{aligned}$$

es decir, $\Phi_{U,V,W}(T + cS)(u)(v) = \Phi_{U,V,W}(T)(u)(v) + c\Phi_{U,V,W}(S)(u)(v)$, esto para cada $u \in U$ y $v \in V$. En consecuencia, $\Phi_{U,V,W}(T + cS) = \Phi_{U,V,W}(T) + c\Phi_{U,V,W}(S)$, lo cual sucede para cada $c \in F$, $T, S \in Hom(U \otimes V, W)$, con lo que queda probada la linealidad.
Ahora, veamos que $\Phi_{U,V,W}$ es monomorfismo, para eso tomemos $T \in Ker(\Phi_{U,V,W})$. Luego,

$\Phi_{U,V,W}(T) = \overline{0}$, en consecuencia, $T(u \otimes v) = 0$, para cada $u \in U$, $v \in V$. Así, si $y \in U \otimes V$, entonces $y = \sum_{i \in I} c_i(v_i \otimes w_i)$, con $c_i \in F$, para cada $i \in I$, donde I es algún conjunto finito. Por consiguiente, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} T(y) & = & T\left(\sum_{i \in I} c_i(v_i \otimes w_i)\right) \\ & = & \sum_{i \in I} c_i T(v_i \otimes w_i) \\ & = & 0 \end{array}$$

es decir, $T(y) = 0$. Dado que esto ocurre para cada $y \in U \otimes V$, se tiene que $T = \overline{0}$. De ahí que $Ker(\Phi_{U,V,W}) = \{\overline{0}\}$.
Veamos ahora que $\Phi_{U,V,W}$ es suprayectiva. Tomemos $\theta \in Hom(U, Hom(V, W))$. Por lo realizado en la demostración del Teorema 3.2.2, tenemos que la función

$$\begin{array}{rccc} g: & U \otimes V & \to & W \\ & (u, v) & \mapsto & \theta(u)(v). \end{array}$$

es bilineal. Aplicando la Propiedad universal del producto tensorial, existe una única transformación lineal, $T \in Hom(U \otimes V, W)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & W \\ U \otimes V \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $Th = g$, donde $h : V \times W \to V \otimes W$ es la función bilineal asociada a $V \otimes W$. Entonces, para cada generador $u \otimes v \in U \otimes V$, se cumple que

$$\begin{array}{rcl} T(u \otimes v) & = & T(h(u, v)) \\ & = & (Th)(u, v) \\ & = & g(u, v) \\ & = & \theta(u)(v) \end{array}$$

es decir, $T(u \otimes v) = \theta(u)(v)$. En consecuencia, $\Phi_{U,V,W}(T)(u)(v) = \theta(u)(v)$, para cada $u \in U$ y $v \in V$. Así, se tiene que $\Phi_{U,V,W}(T) = \theta$ y de esta forma se establece la suprayectividad de $\Phi_{U,V,W}$. Como $\Phi_{U,V,W}$ es monomorfismo y epimorfismo, se tiene que es isomorfismo.
Para ver la naturalidad, tomemos $U, U', W, W' \in Obj(\mathbf{Vec}_F)$, $T \in Hom(U', U)$ y $S \in Hom(W, W')$. Debemos mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom(U \otimes V, W) \arrow[r, "\Phi_{U,V,W}"] \arrow[d, "S\_(T \otimes id_V)"] & Hom(U, Hom(V, W)) \arrow[d, "S_\star\_T"] \\ Hom(U' \otimes V, W') \arrow[r, "\Phi_{U',V,W'}"] & Hom(U', Hom(V, W')) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $(S\_(T \otimes id_V))(\eta) = S\eta(T \otimes id_V)$, para cada $\eta \in Hom(U \otimes V, W)$ y $(S_\star\_T)(\theta) = S_\star \theta T$, para cada $\theta \in Hom(U, Hom(V, W))$. Tomemos $\eta \in Hom(U \otimes V, W)$. Entonces, por un lado tenemos que

$$\begin{array}{rcl} ((S_\star\_T)\Phi_{U,V,W})(\eta) & = & (S_\star\_T)(\Phi_{U,V,W}(\eta)) \\ & = & S_\star \Phi_{U,V,W}(\eta) T \end{array}$$

es decir, $(S_\star\_T)\Phi_{U,V,W})(\eta) = S_\star \Phi_{U,V,W}(\eta) T$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (\Phi_{U',V,W'}(S\_(T \otimes id_V)))(\eta) & = & \Phi_{U',V,W'}((S\_(T \otimes id_V))(\eta)) \\ & = & \Phi_{U',V,W'}(S\eta(T \otimes id_V)) \end{array}$$

es decir, $(\Phi_{U',V,W'}(S\_(T\otimes id_V)))(\eta) = \Phi_{U',V,W'}(S\eta(T\otimes id_V))$. Ahora bien, tomemos $u'\in U'$ y $v\in V$, luego, por una parte, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} [S_\star\Phi_{U,V,W}(\eta)T](u')(v) & = & [(S_\star\Phi_{U,V,W}(\eta)T)(u')](v) \\ & = & [(S_\star\Phi_{U,V,W}(\eta))(T(u'))](v) \\ & = & [S_\star(\Phi_{U,V,W}(\eta)(T(u')))](v) \\ & = & [S\Phi_{U,V,W}(\eta)(T(u'))](v) \\ & = & S(\Phi_{U,V,W}(\eta)(T(u'))(v)) \\ & = & S(\eta(T(u')\otimes v)) \end{array}$$

es decir, $[S_\star\Phi_{U,V,W}(\eta)T](u')(v) = S(\eta(T(u')\otimes v))$. Por otra parte, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{U',V,W'}(S\eta(T\otimes id_V))(u')(v) & = & (S\eta(T\otimes id_V))(u'\otimes v) \\ & = & (S\eta)(T(u')\otimes v) \\ & = & S(\eta(T(u')\otimes v)) \end{array}$$

es decir, $\Phi_{U',V,W'}(S\eta(T\otimes id_V))(u')(v) = S(\eta(T(u')\otimes v))$. Así las cosas, hemos visto que $[S_\star\Phi_{U,V,W}(\eta)T](u')(v) = \Phi_{U',V,W'}(S\eta(T\otimes id_V))(u')(v)$ y como esto sucede para cada $u'\in U'$ y $v\in V$, se tiene que $S_\star\Phi_{U,V,W}(\eta)T = \Phi_{U',V,W'}(S\eta(T\otimes id_V))$, pero esto muestra que $((S_\star\_T)\Phi_{U,V,W})(\eta) = (\Phi_{U',V,W'}(S\_(T\otimes id_V)))(\eta)$, lo cual ocurre para cada $\eta\in Hom(U\otimes V,W)$, en consecuencia, $(S_\star\_T)\Phi_{U,V,W} = \Phi_{U',V,W'}(S\_(T\otimes id_V))$, que es precisamente lo que estábamos buscando. $\square$

Ejemplo 3.2.8. *Consideremos F un campo, V y W espacios vectoriales sobre el campo F. Recordemos que $V^\star = Hom(V,F)$ y $W^\star = Hom(W,F)$, entonces, usando el teorema anterior se tiene que*

$$\begin{array}{rcl} (V\otimes W)^\star & = & Hom(V\otimes W,F) \\ & \cong & Hom(V,Hom(W,F)) \\ & = & Hom(V,W^\star) \end{array}$$

es decir, $(V\otimes W)^\star \cong Hom(V,W^\star)$. En palabras, el espacio dual de $V\otimes W$, es isomorfo de manera natural al espacio de las transformaciones lineales cuyo dominio es V y cuyo contradominio es el espacio dual de W.

Ejemplo 3.2.9. *Sea F un campo, $U,W\in Obj(\mathbf{Vec}_F)$ y $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia en $Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Luego, usando el teorema anterior y el Teorema 3.1.8, tenemos lo siguiente:*

$$\begin{array}{rcl} Hom\left(U\otimes\left(\bigoplus_{i\in I}V_i\right),W\right) & \cong & Hom\left(U,Hom\left(\bigoplus_{i\in I}V_i,W\right)\right) \\ & \cong & Hom\left(U,\prod_{i\in I}Hom(V_i,W)\right) \\ & \cong & \prod_{i\in I}Hom(U,Hom(V_i,W)) \end{array}$$

es decir, $Hom\left(U\otimes\left(\bigoplus_{i\in I}V_i\right),W\right)\cong\prod_{i\in I}Hom(U,Hom(V_i,W))$. Cuando I es un conjunto finito, se tiene que $Hom\left(U\otimes\left(\bigoplus_{i\in I}V_i\right),W\right)\cong\bigoplus_{i\in I}Hom(U,Hom(V_i,W))$.

Corolario 3.2.6. *Sea F un campo, $U,V,W\in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Entonces,*

$$Bil(U\times V,W)\cong Hom(U\otimes V,W).$$

Demostración. Por el Teorema 3.2.2, tenemos que $Bil(U\times V,W)\cong Hom(U,Hom(V,W))$ y por el Teorema 3.2.13, $Hom(U\otimes V,W)$. Aplicando la transitividad de la relación de isomorfismo en $Obj(\mathbf{Vec}_F)$, tenemos que $Bil(U\times V,W)\cong Hom(U\otimes V,W)$. $\square$

Ejemplo 3.2.10. *Sea F un campo, $V,W\in Obj(\mathbf{Vec}_F)$. Por el corolario anterior, tenemos que $Bil(V\times W,F)\cong Hom(V\otimes W,F)$, pero $Hom(V\otimes W,F) = (V\otimes W)^\star$, por lo que $Bil(V\times W,F)\cong (V\otimes W)^\star$. En palabras, el espacio de las formas bilineales de $V\times W$ es isomorfo al espacio dual de $V\otimes W$.*

Corolario 3.2.7. *Sea F un campo, $U, V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$. Entonces, $dim(Hom(U \otimes V, W)) = dim(Hom(U, Hom(V, W))$.*

Demostración. Es inmediato a partir del Teorema 3.2.13 y el Teorema fundamental del álgebra lineal. $\square$

Ejemplo 3.2.11. *Sea F un campo, $U, V, W \in Obj(\boldsymbol{Vec}_F)$ con dimensiones n, m y p, respectivamenta, donde $n, m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Luego, tenemos que $dim(U \otimes V) = dim(U)dim(W) = nm$. Entonces tenemos que $Hom(U \otimes V, W) \cong \mathcal{M}_{(nm)\times p}(F)$. Pero por el Teorema 3.2.13, se tiene que $Hom(U \otimes V, W) \cong Hom(U, Hom(V, W))$, además $dim(Hom(V, W)) = mp$, por lo que $Hom(U, Hom(V, W)) \cong \mathcal{M}_{n\times(mp)}(F)$. De esta manera, se concluye que $Hom(U \otimes V, W) \cong \mathcal{M}_{(nm)\times p}(F)$ y $Hom(U \otimes V, W) \cong \mathcal{M}_{n\times(mp)}(F)$, lo que nos permite usar uno u otro espacio, según nos convenga.*

Conclusiones

Podemos considerar a los espacios vectoriales sobre cierto campo F como una categoría, a la que nosostros le llamamos $\mathbf{Vec}_F$, la cual consta de los espacios vectoriales como objetos y las transformaciones lineales entre ellos como las flechas o morfismos. Viendo a los espacios vectoriales desde este punto de vista, podemos definir funtores de ésta a cualquier otra categoría. Nosotros expusimos dos funtores de la categoría $\mathbf{Vec}_F$ es sí misma, estos son, el funtor Hom, tanto covariante como contravariante y el funtor *Tensor*. Estos funtores nos permiten construir objetos más complejos porque desde luego, no es lo mismo un espacio vectorial simple, que las transformaciones lineales que tienen como dominio o contradominio a cierto espacio vectorial, que es lo que se obtiene con el funtor Hom en objetos; no es lo mismo una transformación lineal entre dos espacios vectoriales, que composiciones de transformaciones lineales, lo cual se obtiene con los morfismos entre los objetos que se construyen con el funtor Hom. Ahora, si hablamos del *Tensor*, obtenemos objetos todavía más complejos, pues en este caso hay de por medio una función bilineal asociada, ¿o no?. Sin embargo, lo interesante de estos funtores en la categoría de espacios vectoriales es que los nuevos objetos, pese a que como se dijo: son más complejos, se quedan dentro de la misma categoría, situación que no sucede en otras categorías, por ejemplo en la categoría $R-\mathbf{Mod}$, que son objetos parecidos a los espacios vectoriales pero el conjunto de escalares es un anillo; aunque en esta tesis no se expuso nada al respecto, no se descarta una investigación a futuro sobre el tema y se pueden consultar más detalles acerca del mismo en [4] y [6]. Regresando al caso de los espacios vectoriales, los funtores que mencionamos nos permiten obtener propiedades de una manera más sencilla sobre estos nuevos objetos, comparado con la que manera en que normalmente se hace, estas propiedades son respecto a las bases, la dimensión, entre otras cuestiones de interés.

Apéndice A

Conjuntos

A.1. Axiomas de la teoría de conjuntos

A.1.1. Axiomas principales

Axioma A.1.1 (De existencia)**.** *Existe un conjunto que no tiene elementos.*
Este conjunto es único, se conoce como el conjunto vacío y se denota por $\emptyset$.

Axioma A.1.2 (De extensión)**.** *Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos.*

Axioma A.1.3 (De especificación)**.** *Si $p(x)$ es una propiedad y A es un conjunto, podemos formar el conjunto:*

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

Este conjunto es único y se conoce como el conjunto de los elementos de A que tienen la propiedad p.

Axioma A.1.4 (Del par)**.** *Si A y B son conjuntos, podemos formar el conjunto $\{A, B\}$.*

Axioma A.1.5 (De la unión)**.** *Para cualquier conjunto A, existe un conjunto B tal que $x \in B$ si y solo si $x \in X$ para algún $X \in A$.*
Este conjunto es único y se conoce como la unión de A y se denota por $\bigcup A$, es decir, $B = \bigcup A$.

Axioma A.1.6 (De regularidad)**.** *En cada conjunto no vacío A, existe $u \in A$ tal que u y A no tienen elementos en común, es decir, para cualquier x, si $x \in A$, entonces $x \notin u$.*

Axioma A.1.7 (De las partes)**.** *Para cualquier conjunto X, existe el conjunto de los subconjuntos de X.*
Este conjunto se conoce como el conjunto potencia de X y se denota por $\mathcal{P}(X)$.

Axioma A.1.8 (Del infinito)**.** *Existe un conjunto infinito.*

A.1.2. Axioma de elección

El Axioma de elección es de gran importancia dentro de la teoría de conjuntos y se aplica en diversas áreas de las matemáticas, antes de enunciarlo procederemos a definir el concepto de Función de elección o selectora.

Definición A.1.1 (Función de elección)**.** *Sea A un conjunto. Una función de elección o selectora es una función $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tal que para cada $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, $f(X) \in X$.*

Ejemplo A.1.1. *Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c\}$, luego, la función definida por:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} & \to & X \\ & \{a\} & \mapsto & a \\ & \{b\} & \mapsto & b \\ & \{c\} & \mapsto & c \\ & \{a,b\} & \mapsto & a \\ & \{a,c\} & \mapsto & a \\ & \{b,c\} & \mapsto & c \\ & \{a,b,c\} & \mapsto & a \end{array}$$

es una función de elección.

Axioma A.1.9 (De elección)**.** *Todo conjunto no vació tiene una función de elección.*

El siguiente teorema nos presenta una serie de afirmaciones equivalentes al Axioma de Elección.

Teorema A.1.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *Axioma de elección.*

2) *Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, es decir, para cada $A, B \in \mathcal{A}$, si $A \neq B$, entonces $A \cap B = \emptyset$, entonces existe un conjunto B tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \cap B$ tiene un solo elemento.*

3) *Toda función suprayectiva tiene una inversa derecha.*

4) *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indexada de conjuntos tal que $A_i \neq \emptyset$, para cada $i \in I$ y para cada $i, j \in I$, si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces existe $B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $B \cap A_i$ tiene un único elemento, para cada $i \in I$.*

5) *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indexada de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que para cada $i \in I$, $f(i) \in A_i$.*

6) *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indexada de conjuntos no vacíos, entonces $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

7) *Si $F : X \to \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$ es una función, entonces existe una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$, para cada $x \in X$.*

La demostración detallada del teorema anterior se puede consultar en [3]. A continuación se enuncian algunos teoremas dentro de las matemáticas que utilizan el Axioma de Elección para que tengan sentido, pues de otra manera sería imposible su existencia.

Teorema A.1.2 (Lema de Zorn)**.** *Todo COPO no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, tiene al menos un elemento máximo.*

Teorema A.1.3 (Existencia de bases en espacios vectoriales)**.** *Todo espacio vectorial tiene base.*

La demostración del teorema anterior se encuentra en el Capítulo 1 de esta tesis.

Teorema A.1.4 (Teorema de Krull)**.** *Todo anillo con uno distinto de cero tiene al menos un ideal máximo.*

Teorema A.1.5 (Equivalencia de continuidad por sucesiones)**.** *Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es contínua en un punto $x_0 \in (a, b)$ si y solo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en (a, b) tal que $x_n \longrightarrow x_0$ se tiene que $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.*

Teorema A.1.6. *Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ no medibles según Lesbegue.*

Teorema A.1.7 (Teorema de Nielson-Scheir)**.** *Todo subgrupo de un grupo libre es un grupo libre.*

Teorema A.1.8. *Todo campo tiene única clausura algebraica salvo isomorfismos.*

Para información más detallada sobre las propiedades comentadas anteriormente y otras más de la Teoría de Conjuntos se puede consultar [3].

A.2. Ordinales

A.2.1. Conceptos preliminares

Definición A.2.1. *Sea A un conjunto y $\leq$ una relación en A. Decimos que $\leq$ es una relación de orden parcial si es:*

- ***Reflexiva:*** *Para cada $a \in A$, $a \leq a$.*
- ***Antisimétrica:*** *Para cada $a, b \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.*
- ***Transitiva:*** *Para cada $a, b, c \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.*

En este caso se dice que el par $(A, \leq)$ es un Conjunto Parcialmente Ordenado, lo cual se abrevia como COPO.

Ejemplo A.2.1. *Si X es un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un COPO.*

Definición A.2.2. *Sea $(A, \leq)$ un COPO y $B \subseteq A$.*

1) *Un elemento $u \in A$ es una cota superior para B si para cada $b \in B$, $b \leq u$.*
   Denotamos $U(B) = \{u \in A \mid u \text{ es cota superior de } B\}$.
2) *Un elemento $l \in A$ es una cota inferior de B si para cada $b \in B$, $l \leq b$.*
   Denotamos $L(B) = \{l \in A \mid l \text{ es cota inferior de } B\}$.
3) *Un elemento $M \in B$ es mayor de B si para cada $b \in B$, $b \leq M$.*
4) *Un elemento $m \in B$ es menor de B si para cada $b \in B$, $m \leq b$.*
5) *Un elemento $s \in A$ es supremo de B si es menor de $U(B)$.*
6) *Un elemento $i \in A$ es ínfimo de B si es mayor de $L(B)$.*

Observación A.2.1. *Si $(A, \leq)$ es un COPO y $B \subseteq A$, debido a la antisimetría de $\leq$, es fácil ver que si existe el supremo de B ó ínfimo de B, éste es único, por lo que lo denotamos por sup(B) ó $\inf(B)$, según el caso.*
De igual forma, cuando existe el mayor o menor de B, éste es único, por lo cuál se denota por mayor(B) ó menor(B), según el caso.

Definición A.2.3. *Sea $(A, \leq)$ un COPO.*

1) *Un elemento $x \in A$ es máximo si no existe $y \in A$ tal que $x \leq y$ y $x \neq y$.*
   Otra manera de decir que x es máximo en A es: si $x \leq y$ e $y \in A$, entonces $x = y$.
2) *Un elemento $z \in A$ es mínimo si no existe $w \in A$ tal que $w \leq z$ y $z \neq w$.*
   Otra manera de decir que z es mínimo en A es: si $w \leq z$ y $w \in A$, entonces $z = w$.

Definición A.2.4. *Sea $(A, \leq)$ un COPO no vacío y $x, y \in A$. Decimos que x e y son comparables si $x \leq y$ ó $y \leq x$.*

Definición A.2.5. *Sea $(A, \leq)$ un COPO. Decimos que A es linealmente ordenado si cualesquiera dos elementos en A son comparables.*

Ejemplo A.2.2. $(\mathbb{R}, \leq)$*, donde $\leq$ es el orden usual en los reales es un conjunto linealmente ordenado.*

Definición A.2.6. *Si $(A, \leq)$ es un COPO y $C \subseteq A$, decimos que C es una cadena de A si $(C, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado.*

Un teorema importante que relaciona estos últimos conceptos es el Lema de Zorn, el cuál enunciamos a continuación.

Teorema A.2.1 (Lema de Zorn)**.** *Todo COPO no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, tiene al menos un elemento máximo.*

Definición A.2.7 (Buen orden)**.** *Sea $(A, \leq)$ un conjunto linealemente ordenado. Decimos que $\leq$ es un buen orden en A si cada $B \subseteq A$, con $B \neq \emptyset$ tiene un elemento menor.*
En este caso al par $(A, \leq)$ le llamaremos conjunto bien ordenado y por comodidad, siempre que no haya lugar a confusión al orden inducido se dirá simplemente que A es un conjunto bien ordenado.

Ejemplo A.2.3. $(\mathbb{N}, \leq)$ *es un conjunto bien ordenado.*

Ejemplo A.2.4. *El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ no está bien ordenado, ya que $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_- \neq \emptyset$ pero no tiene un elemento menor.*

Definición A.2.8 (Conjunto transitivo)**.** *Un conjunto X es transitivo si $Z \in Y \in X$ implica que $Z \in X$.*

Proposición A.2.1. *Sea X un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) X es transitivo.

2) Si $Y \in X$ entonces $Y \subseteq X$.

A.2.2. Introducción a los números ordinales

El objetivo de introducir los números cardinales es generalizar el método conjuntista utilizado para la construcción de los números naturales, en el cuál, un objeto es un número natural si es un conjunto transitivo, bien ordenado por la relación de pertenencia restringida y cualquier subconjunto no vacío tiene un elemento máximo con respecto a este orden. En este caso, si n es un número natural se tiene que $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Si denotamos

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\},$$

podemos pensar que ω es el primer "número" más grande que cualquier número natural. Llegando a este límite, la operación de sucesor puede ser utilizada para generar "números" posteriores a ω de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl c l}
S(\omega) & = & \omega \cup \{\omega\} & = & \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega\} \\
S(S(\omega)) & = & S(\omega) \cup \{S(\omega)\} & = & \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, S(\omega)\} \\
\vdots & & & & \\
etc. & & & &
\end{array}$$

Si denotamos $S(\omega) = \omega + 1$, tenemos:

$$\begin{array}{rcl c l}
S(\omega) & = & \omega + 1 & & \\
S(S(\omega)) & = & (\omega + 1) + 1 & = & \omega + 2 \\
\vdots & & & & \\
etc. & & & &
\end{array}$$

Ahora, tenemos una sucesión $0, 1, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega+n, \ldots$, para todo número natural n.
Un número más grande que todo $\omega+n$ podemos considerarlo como el conjunto de todos los números más pequeños:

$$\omega \cdot 2 \quad = \quad \omega + \omega \quad = \quad \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega+n, \ldots\}$$

continuando con este proceso hasta n tenemos:

$$\omega \cdot n = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \ldots, \omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot (n-1), \omega \cdot (n-1) + 1, \ldots\}$$

con lo cual podemos llegar hasta:

$$\omega \cdot \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \ldots, \omega \cdot n, \ldots, \omega \cdot (n+1), \ldots\}.$$

Los conjuntos generados por este razonamiento cumplen casi todas las propiedades necesarias para la definición de número natural. Son transitivos y están linealmente ordenados por $\in$, esto es, $x \in y$ implica que $x \subseteq y$. Ahora, si $x, y \in z$, entonces tenemos que:

$$x < y \text{ si y solo si } x \in_z y$$

es un orden lineal.

A.2.3. Conceptos de números ordinales

Con la pequeña introducción dada anteriormente estamos en condiciones de dar la definición de número ordinal.

Definición A.2.9 (Número ordinal)**.** *Sea x un conjunto. Diremos que x es un número ordinal si:*

1) x es transitivo.

2) x está bien ordenado por $\in_x$.

Los números ordinales suelen ser denotados por las primeras letras minúsculas del alfabeto griego, tales como α, β, γ, etc.
La siguiente proposición nos garantiza la existencia de números ordinales que no son naturales.

Proposición A.2.2. *Los números naturales son números ordinales y hay un número ordinal que no es un número natural, a saber ω.*

Definición A.2.10. *El conjunto ω dado por la proposición anterior se conoce como $\mathbb{N}$, que es precisamente el conjunto de los números naturales.*

A continuación se da una proposición que nos encamina a definir un sucesor de un número ordinal.

Proposición A.2.3. *Si α es un número ordinal, entonces $\alpha \cup \{\alpha\}$ también es un número ordinal.*

Definición A.2.11. *Sea α un número ordinal. El sucesor de α se define por $\alpha \cup \{\alpha\}$. Este elemento es denota por $S(\alpha)$ ó $\alpha + 1$, es decir:*

$$S(\alpha) = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Definición A.2.12. *Un número ordinal α es llamado ordinal sucesor si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$.*
Cuando α no es un ordinal sucesor se dice que es un ordinal límite.

Ejemplo A.2.5. *$\emptyset$ es un ordinal límite, ya que no es sucesor de ningún ordinal.*

Ejemplo A.2.6. *Cualquier número natural diferente de cero siempre es un ordinal sucesor, pues siempre es sucesor de algún ordinal, a saber un número natural.*

Ejemplo A.2.7. *Los números ω, $\omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot \omega$ son ordinales límite.*

Los siguientes lemas nos encaminan a ordenar a los ordinales.

Lema A.2.1. *Cualquier elemento de un número ordinal es un número ordinal.*

Lema A.2.2. *Si α es un número ordinal, entonces $\alpha \notin \alpha$. Si α y β son dos números ordinales, no se puede cumplir simultáneamente que $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$.*

Lema A.2.3. *Si α y β son ordinales tales que $\alpha \subseteq \beta$, entonces $\alpha \in \beta$.*

Definición A.2.13. *Para α y β ordinales, definimos $\alpha < \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$.*

Es fácil notar que este orden extiende el orden dado en la construcción de los números naturales. El siguiente teorema nos garantiza que el orden $\leq$, dado por $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$ ó $\alpha = \beta$, con α y β ordinales es un buen orden.

Teorema A.2.2. *Sean α, β y γ números ordinales. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$ entonces $\alpha < \gamma$.*

2) *$\alpha < \beta$ y $\beta < \alpha$ no se pueden cumplir de manera simultánea.*

3) *Se satisface una de las siguientes afirmaciones:*

    a) *$\alpha < \beta$.*
    b) *$\alpha = \beta$.*
    c) *$\beta < \alpha$.*

4) *Si X es un conjunto de números ordinales, entonces $(X, \leq)$, con $\leq$ definido como antes es un conjunto bien ordenado.*

5) *Para cualquier conjunto X de números ordinales, hay un ordinal α tal que $\alpha \notin X$. Esto nos dice que no existe el conjunto de números ordinales, por lo que la colección de los números ordinales es una clase propia.*

Definición A.2.14. *Si X es un conjunto de ordinales, entonces definimos:*

$$supX = \bigcup X.$$

Sabemos que hay un convenio con respecto a las clases que nos permite extender los conceptos de los conjuntos a éstas, tales como relaciones, funciones, órdenes, etc.
De acuerdo a lo anterior podemos introducir la siguiente definición.

Definición A.2.15. *Si $\mathcal{C}$ es una clase de número ordinales, definimos:*

$$\sup \mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}$$

y

$$\text{ínf}\, \mathcal{C} = \bigcap \mathcal{C}.$$

Es fácil ver que $\sup \mathcal{C}$ e $\text{ínf}\, \mathcal{C}$ son ordinales.
El siguiente teorema nos dice quiénes son los ordinales finitos.

Teorema A.2.3. *Los números naturales son exactamente los números ordinales finitos.*

Observación A.2.2. *Si **Ord** es la clase de los ordinales y α es un ordinal, de acuerdo al Teorema A.2.2 podemos a expresar a α de la siguiente manera:*

$$\alpha = \{\beta \mid \beta \in \textbf{\textit{Ord}} \text{ y } \beta < \alpha\}.$$

Si vemos a α como un conjunto de ordinales, cuando α es un ordinal sucesor, digamos que $\alpha = \beta + 1$ con β un ordinal se tiene que α tiene elemento mayor, a saber β.
Cuando α es un ordinal límite no tiene un elemento mayor, en este caso $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$.

A continuación se dan algunos ejemplos de ordinales sucesores y límite que de acuerdo a nuestro criterio son de mucha importancia dentro de las matemáticas.

1) $0 = \emptyset$ no es un ordinal límite ya que no es sucesor de ningún ordinal.

2) Los números naturales diferentes de cero, por ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& \{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \\ 2 &=& \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\} \\ &\vdots& \\ n &=& \{0, 1, \ldots, n-1\} \end{array}$$

son ordinales sucesores.

3) ω es un ordinal límite.

Asumiendo el Axioma de elección, enunciado en la sección anterior podemos afirmar la siguiente proposición.

Proposición A.2.4. *Todo conjunto es equipotente a algún número ordinal.*

A continuación enunciaremos el Principio de inducción transfinita, que no es otra cosa que una generalización del Principio de inducción matemática usado para los números naturales.

Teorema A.2.4. *Sea $p(x)$ una propiedad que satisface las siguientes condiciones:*

1) $p(0)$ es verdadera.

2) $p(\alpha)$ implica $p(\alpha+1)$ para todos los ordinales α.

3) Para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$, si $p(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$, entonces $p(\alpha)$ se cumple.

Entonces $p(\alpha)$ es verdadero para todos los ordinales α.

Al igual que el caso del Principio de inducción matemática, podemos generalizar el Principio de recursion utilizado en los números naturales.

Teorema A.2.5 (Principio de recursión transfinita)**.** *Sea Ω un ordinal, A un conjunto, $S = \bigcup_{\alpha<\Omega} A^\alpha$ el conjunto de las sucesiones transfinitas de todos los elementos en A de longitud menor que Ω y $g : S \to A$ una función. Entonces existe una única función $f : \Omega \to A$ tal que:*

$$f(\alpha) = g(f_{|\alpha}) \text{ para todo } \alpha < \Omega.$$

No se escriben las demostraciones de los teoremas expuestos anteriormente puesto que no es el objetivo de esta tesis, sin embargo, si se desean conocer tales demostraciones así como propiedades más a fondo sobre los números ordinales se puede consultar [3].

A.3. Cardinalidad

A.3.1. Conceptos preeliminares

Definición A.3.1 (Equipotencia)**.** *Sean A y B conjuntos. Decimos que A y B son equipotentes si existe una función biyectiva $f : A \to B$. En este caso denotamos $|A| = |B|$.*

Ejemplo A.3.1. *Si a, b, c, d son números reales con $a < b$ y $c < d$ entonces los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ son equipotentes, pues la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & [a,b] & \to & [c,d] \\ & x & \mapsto & \frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-ad}{b-a} \end{array}$$

es biyectiva.

Definición A.3.2. *Sean A y B conjuntos. Decimos que A se sumerge en B si existe una función inyectiva $f : A \to B$. Lo anterior se denota como $|A| \leq |B|$.*

Antes de continuar vamos a recordar algunos conceptos de funciones que son necesarios para establecer algunas precisiones.

Definición A.3.3 (Composición de funciones)**.** *Sean A, B, C conjuntos, $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. La composición de f con g es la función $g \circ f : A \to C$, definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, para cada $a \in A$.*

Notación A.3.1. *Si A, B, C son conjuntos, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, denotaremos a la composición $g \circ f : A \to C$ como gf, es decir, $g \circ f = gf$.*

Definición A.3.4. *Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función.*

1) Decimos que A es cancelable por la izquierda si para cada conjunto X y para cualesquiera funciones $g, h : X \to A$, $fg = fh$, implica $g = h$.

2) Decimos que A es cancelable por la izquierda si para cada conjunto X y para cualesquiera funciones $g, h : B \to X$, $gf = hf$, implica $g = h$.

3) Decimos que f es cancelable si es cancelable por la izquierda y por la derecha.

Teorema A.3.1. *Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Entonces:*

1) f es inyectiva si y solo si es cancelable por la izquierda.

2) f es suprayectiva si y solo si es cancelable por la derecha.

3) f es biyectiva si y solo si es cancelable.

La demostración de este teorema se puede consultar en [1].

Teorema A.3.2. *Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Entonces:*

1) f es inyectiva si y solo si existe una función $g : B \to A$ tal que $gf = id_A$. Dicha función g es llamada inversa izquierda de f.

2) f es suprayectiva si y solo si existe una función $g : B \to A$ tal que $fg = id_B$. Dicha función g es llamada inversa derecha de f.

3) f es biyetiva si y solo si existe una función $g : B \to A$ tal que $gf = id_A$ y $fg = id_B$. Esta función además es única, por lo que es llamada la función inversa de f y se denota por f^{-1}, es decir, $g = f^{-1}$.

Observación A.3.1. *Si A, B son conjuntos y $f : A \to B$ es una función suprayectiva, por el Teorema A.3.2, existe una función $g : B \to A$ tal que $fg = id_B$. Así, se tiene que f es un inverso izquierdo para g, por el Teorema A.3.2, $g : B \to A$ es inyectiva y en consecuencia $|B| \leq |A|$.*
De igual forma, si $f : A \to B$ es una función inyectiva, entonces por el Teorema A.3.2 existe una función $g : B \to A$ tal que $gf = id_A$. Note que f es inverso derecho de g, de donde concluimos que g es suprayectiva.

Notación A.3.2. *Si A y B son conjuntos, para indicar la unión ajena de A con B se escribirá $A \mathring{\cup} B$, esto significa que $A \cap B = \emptyset$.*

Definición A.3.5. *Sean A y B conjuntos. Decimos que $|A| < |B|$ cuando existe una función inyectiva $f : A \to B$ pero no existe una función suprayectiva de A a B.*

Ejemplo A.3.2. *Si A es un conjunto entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ya que*

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathcal{P}(A) \\ & x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

es una función inyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$ pero no existe una función suprayectiva de A en $\mathcal{P}(A)$.

A.3.2. Cardinalidad

Definición A.3.6 (Número cardinal)**.** *Sea α un número ordinal. Decimos que α es un número cardinal si no es equipotente con ninguno de sus elementos.*

Observación A.3.2. *Asumiendo el Axioma de Elección, como se hizo al elaborar este trabajo, a cualquier conjunto A le podemos asignar un número cardinal $|A|$, con lo que diremos que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si y solo si son equipotentes.*
Los números cardinales los denotamos con letras del alfabeto griego, tales como $\kappa, \lambda, \ldots, \phi, \chi, \psi, \omega$.

Lema A.3.1. *Si A, A_1 y B son conjuntos tales que $A_1 \subseteq B \subseteq A$ y $|A_1| = |A|$, entonces $|B| = |A|$.*

La demostración del lema anterior se puede consultar en [3].
El siguiente teorema nos ofrece una forma relativamente fácil de saber cuando las cardinalidades de dos conjuntos coinciden.

Teorema A.3.3 (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein)**.** *Sean A y B conjuntos, si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

La demostración se puede consultar en [3]. En palabras, lo que nos dice el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein es que si tenemos conjuntos A y B, existe una función inyectiva $f : A \to B$ y otra función inyectiva $g : B \to A$, se garantiza la existencia de una función biyectiva $h : A \to B$.

Proposición A.3.1. *En la clase de conjuntos, el orden $A \leq B$ si y solo si $|A| \leq |B|$ es un orden lineal, siempre que se asuma el Axioma de elección.*

Definición A.3.7 (Conjunto finito)**.** *Sea A un conjunto. Decimos que A es finito si existe un número natural n tal que $|A| = |n|$.*
Cuando A no es un conjunto finito decimos que es infinito.

Observación A.3.3. *Podemos asegurar que los únicos cardinales finitos son los números naturales.*

Ejemplo A.3.3. *El conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto finito, ya que $|\emptyset| = 0$.*

Teorema A.3.4. *Si A es un conjunto infinito, entonces $|X| > n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Definición A.3.8 (Conjunto numerable)**.**

1) *Un conjunto A es numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$.*

2) *Un conjunto A es a lo más numerable si $|A| \leq |\mathbb{N}|$.*

3) *Cuando un conjunto A no es numerable se dice que es no numerable.*

Ejemplo A.3.4.

1) *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos numerables, se tiene que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto numerable.*

2) *$\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable.*

3) *Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.*
De aquí se deduce que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Ejemplo A.3.5. *Los conjunto $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ no son conjuntos numerables.*

Los detalles de las afirmaciones anteriores se pueden consultar en [3].

A.3.3. Aritmética cardinal

En este apartado vamos a introducir una forma de operar los números cardinales, de manera similar a los sistemas numéricos conocidos.

A.3.4. Suma de cardinales

Definición A.3.9 (Suma de cardinales)**.** *Sean A, B conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, con $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$, defiimos la suma de κ y λ de la siguiente manera:*

$$\kappa + \lambda = |A \cup B|.$$

En general, si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos ajenos por pares, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $|A_i| = \kappa_i$, para cada $i \in I$, definimos la suma de $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ como:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|.$$

Es importante mencionar que si tenemos una familia infinita de conjuntos es vital asumir el Axioma de elección.

Teorema A.3.5. *Sea λ es un cardinal infinito, κ_α un cardinal no nulo para cada $\alpha < \lambda$ y $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Entonces:*

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \kappa.$$

Corolario A.3.1. *Si κ_i son números cardinales y $|I| \leq \sup\{\kappa_i \mid i \in I\}$, entonces:*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sup\{\kappa_i \mid i \in I\}.$$

La demostraciones se pueden consultar en [3].

A.3.5. Producto de cardinales

Definición A.3.10. *Sean A, B conjuntos tales que $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$. Definimos el producto de κ con λ del siguiente modo:*

$$\kappa \cdot \lambda = |A \times B|.$$

En general, si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos tales que $|A_i| = \kappa_i$, para cada $i \in I$, definimos el producto de $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ como:

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \left|\prod_{i\in I} A_i\right|.$$

Teorema A.3.6. *Si λ es un cardinal infinito, $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una sucesión no decreciente de cardinales no nulos y $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, entonces:*

$$\prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \kappa^\lambda.$$

El siguiente teorema nos presenta una relación entre las sumas y los productos de cardinales.

Teorema A.3.7. *Si para cada $i \in I$, κ_i y λ_i son números cardinales tales que $\kappa_i < \lambda_i$, entonces:*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Observación A.3.4. *Del teorema anterior se deduce que si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < 2^\kappa$, dicha desigualdad se conoce como* ***El Teorema de Cantor****.*

Las demostraciones de los resultados expuestos se pueden consultar en [3].

A.3.6. Potencia de cardinales

Definición A.3.11 (Potencia de cardinales)**.** *Sean A, B conjutos con $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$. Definimos:*

$$\kappa^\lambda = \left|A^B\right|$$

donde

$$A^B = \{f : B \to A \mid f \text{ es función}\}.$$

A.3.7. Propiedades de los cardinales

Teorema A.3.8. *Sean κ, λ, μ y ϕ cardinales. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.
2. $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$.
3. $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
4. $\kappa(\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$.
5. $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
6. $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.
7. $\kappa + 0 = \kappa$.
8. *Si* $\kappa + 1 = \lambda + 1$, *entonces* $\kappa = \lambda$.
9. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
10. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
11. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.
12. $\kappa^0 = 1$.
13. $\kappa^1 = \kappa$, *si* $\kappa > 0$.
14. $1^\kappa = 1$.
15. $0^\kappa = 0$, *si* $\kappa > 0$.
16. $\kappa \leq \kappa + \lambda$.
17. *Si* $\kappa \leq \lambda$ *y* $\mu \leq \phi$, *entonces* $\kappa + \mu \leq \lambda + \phi$.
18. $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda$, *si* $\lambda > 0$.
19. *Si* $\kappa \leq \lambda$ *y* $\mu \leq \phi$, *entonces* $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \phi$.
20. $\kappa \leq \kappa^\lambda$, *si* $\lambda > 0$.
21. $\lambda \leq \kappa^\lambda$, *si* $\kappa > 1$.
22. *Si* $\kappa \leq \lambda$ *y* $\mu \leq \phi$, *entonces* $\kappa^\mu \leq \lambda^\phi$.
23. $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

Para más detalles se puede consultar [3].

Teorema A.3.9. *Si A es un conjunto y $|A| = \kappa$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$.*

A.3.8. El continuo

Antes de proceder a dar los detalles sobre el continuo recordemos el siguiente teorema.

Teorema A.3.10 (Diagonal de Cantor)**.** *$\mathbb{R}$ no es numerable.*

De acuerdo al teorema anterior se deduce que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, para seguir formalizando los detalles veamos la siguiente proposición.

Proposición A.3.2. *El Axioma de elección implica que la relación $|A| = |B|$ en la clase de los conjuntos es una relación de equivalencia.*

La proposición anterior nos permite afirmar que $\mathbb{N}$ representa a todos los conjuntos numerables, así al número cardinal asociado a $|\mathbb{N}|$ lo denotaremos por $\aleph_0$.
A partir de lo comentado previamente tenemos que

$$n < \aleph_0$$

para cualquier número natural y además

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \\ \aleph_0 \cdot \aleph_0 &= \aleph_0. \end{aligned}$$

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es llamado linea real o continuo, a continuación tenemos algo sobre su cardinalidad.

Teorema A.3.11. *El número cardinal del continuo es $2^{\aleph_0}$.*

Dado que hay funciones biyectivas de cualquier intervalo abierto a los reales se concluye que cualquier intervalo abierto (a, b) tiene la misma cardinalidad del continuo.
Los intervalos cerrados $[a, b]$ de números reales o son a lo más numerables o tienen cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

Afirmación A.3.1 (Hipótesis del continuo)**.** *No existe un cardinal κ tal que:*

$$\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}.$$

La afirmación anterior nos garantiza que no hay conjuntos infinitos de números reales de cardinalidad distinta de $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$.

Observación A.3.5.

$$2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

La igualdad anterior se deduce del Terorema de Cantor-Schoeder-Bernstein y de la igualdad $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

A partir de lo anterior podemos deducir algunos resultados importantes sobre cardinalidad.

Proposición A.3.3. *El conjunto de los números complejos tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Proposición A.3.4. *El conjunto de todas las sucesiones de números naturales tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Proposición A.3.5. *El conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Proposición A.3.6. *El conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Proposición A.3.7. *Si A es un subconjunto numerable de números reales, entonces $|\mathbb{R} \setminus A| = 2^{\aleph_0}$.*

Observación A.3.6. *Como $\mathbb{Q}$ es numerable, de la proposición anterior se tiene que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Los detalles de los resultados expuestos así como sus demostraciones se pueden consultar en [3].

A.3.9. Alephs

En este apartado vamos a generalizar el concepto de los Alephs, introducido anteriormente para el caso del conjunto de los números naturales.

Definición A.3.12. *Un número ordinal* α *es inicial si no es equipotente a algún ordinal* $\beta < \alpha$.

Ejemplo A.3.6.

1) *Los números naturales son ordinales iniciales.*

2) *El ordinal* ω *es inicial pues no es equipotente a ningún número natural.*

3) $\omega + 1$ *no es un ordinal inicial.*

Teorema A.3.12. *Todo conjunto bien ordenado es equipotente a un único ordinal inicial.*

Corolario A.3.2. *El Axioma de elección implica que todo conjunto es equipotente a un único ordinal inicial.*

A partir del corolario anterior podemos definir con mayor precisión el concepto de cardinal.

Definición A.3.13. *Si* A *es un conjunto, el cardinal* $|A|$ *es el único ordinal inicial equipotente a* A.
En particular, $|A| = \omega$ *para cualquier conjunto numerable y* $|A| = n$*, para cualquier conjunto finito de* n *elementos. Esto coincide con los conceptos expuestos anteriormente.*

Definición A.3.14. *Para cualquier conjunto* A*, el mínimo número ordinal que no es equipotente a algún subconjunto de* A *se llama* ***El número de Hartog de*** A *y se denota por* $h(A)$.

Observación A.3.7. *Asumiendo el Axioma de elección se tiene que el número de Hartog existe para cualquier conjunto* A.

Lema A.3.2. *Para cualquier conjunto* A*,* $h(A)$ *es un ordinal inicial.*

Las demostraciones de los resultados enunciados anteriormente se pueden consultar en [3].
Con lo expuesto hasta el momento estamos en perfectas condiciones para definir por Recursión Transfinita una escala para nuestros ordinales iniciales.

Definición A.3.15. *Definimos los ordinales iniciales de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcll} \omega_0 & = & \omega & \\ \omega_{\alpha+1} & = & h(\omega_\alpha) & \text{para todo ordinal } \alpha \\ \omega_\alpha & = & \sup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\} & \text{si } \alpha \neq 0 \text{ es un ordinal límite.} \end{array}$$

Teorema A.3.13.

1) *Para cada ordinal* α*,* ω_α *es un ordinal inicial infinito.*

2) *Si* Ω *es un ordinal inicial infinito, entonces* $\Omega = \omega_\alpha$*, para algún ordinal* α.

La demostración se puede consultar en [3].

Observación A.3.8. *A partir del Axioma de elección y del teorema anterior concluimos que cualquier conjunto infinito es equipotente a* ω_α*, para algún ordinal* α*. Además, los ordinales iniciales son los cardinales de los conjuntos infinitos, estos números se llaman* ***Alephs*** *y se denotan como* $\aleph_\alpha$*, para cada ordinal* α*. Es decir, la notación* $\aleph_\alpha$ *se utilizará cuando nos refiramos a cardinales.*
Notemos que el orden de los cardinales coincide con el orden de los ordinales, es decir, si α *y* β *son ordinales y* $\alpha < \beta$ *entonces* $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
Más aún, los números cardinales son los representantes de las clases de equivalencia de conjuntos de la misma cardinalidad (en la clase de conjuntos).

Anteriormente vimos que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ y $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, además, si n es un número natural, entonces $n + \aleph_0 = \aleph_0$. Vamos a generalizar estas operaciones por medio de los resultados que se exponen a continuación.

Teorema A.3.14. *Para cada ordinal α, $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.*

Corolario A.3.3. *Para cualesquiera ordinales α y β, tales que $\alpha \leq \beta$, $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$. Además, si n es un número natural se tiene que $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.*

Corolario A.3.4. *Para cualesquiera ordinales α y β tales que $\alpha \leq \beta$, se tiene que $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\beta$. Además, si n es un número natural, entonces $n + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.*

La demostración de los resultados anteriores se puede consultar en [3].

Observación A.3.9. *A partir de los resultados anteriores se deduce que si κ y λ son cardinales y alguno de ellos es infinito, entonces:*

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = mayor\{\kappa, \lambda\}.$$

Definición A.3.16. *Si A es un conjunto infinito y κ es un cardinal tal que $\kappa \leq |A|$, definimos:*

1) El conjunto de todos los subconjuntos de A de cardinalidad κ como:

$$[A]^\kappa = \{X \subseteq A \mid |X| = \kappa\}.$$

2) El conjunto de todos los subconjuntos de A de cardinalidad menor que κ como:

$$[A]^{<\kappa} = \{X \subseteq A \mid |X| < \kappa\}.$$

Teorema A.3.15. *Si A es un conjunto infinito, entonces:*

$$\left|[A]^{<\kappa}\right| = |A|.$$

A continuación se presentan más propiedades de interés para las operaciones con cardinalidades.

Teorema A.3.16. *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, donde I es un conjunto de índices tal que $|I| = \kappa$. Si $|A_i| \leq \lambda$, para cada $i \in I$, entonces:*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \kappa \cdot \lambda.$$

Teorema A.3.17. *Para cualquier familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ se tiene que:*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \sum_{i\in I} |A_i| = \sup\{|A_i| \mid i \in I\}.$$

Teorema A.3.18. *Sea $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ una familia de cardinales, entonces, para cualquier número cardinal μ se tiene que:*

$$\mu \cdot \sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \mu \cdot \kappa_i.$$

Teorema A.3.19. *Sea $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ una familia de cardinales no nulos, tales que $|I|$ es un cardinal infinito o κ_i es un cardinal infinito, para algún $i \in I$, entonces:*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |I| \cdot \sup\{\kappa_i \mid i \in I\}.$$

Para más detalles consultar [3].

Apéndice B

Categorías

B.1. Definición y ejemplos

Definición B.1.1 (Categoría)**.** *Una categoría $\mathcal{C}$ consta de los siguientes elementos:*

1) Una clase de objetos $Obj\,(\mathcal{C})$.

2) Un conjunto $\mathcal{C}(A,B)$, para cada $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$.

3) Una operación

$$\circ : \quad \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \quad \to \quad \mathcal{C}(A,C)$$

para cada $A, B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$.

los cuales están sujetos a los siguientes axiomas:

a) $\mathcal{C}(A,B) = \mathcal{C}(C,D)$ si y solo si $A = C$ y $B = D$, para cada $A, B, C, D \in Obj\,(\mathcal{C})$.

b) Si $f \in \mathcal{C}(A,B), g \in \mathcal{C}(B,C), h \in \mathcal{C}(C,D)$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para cada $A, B, C, D \in Obj\,(\mathcal{C})$.

c) Para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$, existe $id_A \in \mathcal{C}(A,A)$ tal que para cada $B \in Obj\,(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(A,B), g \in \mathcal{C}(B,A)$, se tiene que $f \circ id_A = f$ y $id_A \circ g = g$.

Para cada $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$, los elementos de $\mathcal{C}(A,B)$ se llaman ***flechas o morfismos****. Si $f \in \mathcal{C}(A,B)$, denotamos $f : A \to B$ ó $A \xrightarrow{f} B$.*
La operación $\circ : \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \to \mathcal{C}(A,C)$, definida en 3), es llamada composición de morfismos y se denotará por gf, es decir, si $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$, con $A, B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$, entonces $g \circ f = gf$.
El morfismo $id_A \in \mathcal{C}(A,A)$ definido en c) es llamado el ***morfismo identidad en*** *A.*

Ejemplo B.1.1. ***Set*** *denotará la categoría de los conjuntos, en la cual los objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones usuales entre conjuntos.*

Ejemplo B.1.2. ***Top*** *denota la categoría de espacios topológicos, donde los objetos son los espacios topologícos y los morfismos son las funciones contínuas entre ellos.*

Ejemplo B.1.3. ***Vec***$_F$ *es la categoría de espacios vectoriales sobre un campo fijo F, donde los objetos son los espacios vectoriales sobre el campo F mientras que los morfismos son las transformaciones lineales entre ellos.*

Ejemplo B.1.4. *Consideremos un COPO* $(A, \leq)$*. Definimos la categoría* $\mathcal{C}_A$*, definiendo sus objetos como:*

$$Obj\,(\mathcal{C}_A) = \{X \mid X \in A\}$$

y sus flechas de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}_A(X,Y) \quad = \quad \begin{cases} \{(X,Y)\} & si\ X \leq Y \\ \emptyset & otro\ caso \end{cases}$$

para cada $X, Y \in Obj\,(\mathcal{C}_A)$*.*

Ejemplo B.1.5 (Categoría opuesta)**.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría. La* ***categoría opuesta****, denotada por* $\mathcal{C}^{op}$*, define sus objetos como:*

$$Obj\,(\mathcal{C}^{op}) = Obj\,(\mathcal{C})$$

y sus morfismos como:

$$\mathcal{C}^{op}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$$

para cada $A, B \in \mathcal{C}^{op}$*.*

Ejemplo B.1.6 (Categoría producto)**.** *Sean* $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *categorías. La* ***categoría producto****, denotada por* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$*, consiste de los objetos:*

$$Obj\,(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \{(A,B) \mid A \in Obj\,(\mathcal{C})\,, B \in Obj\,(\mathcal{D})\}$$

y los morfismos:

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})\,((A_1,B_1),(A_2,B_2)) = \mathcal{C}(A_1,A_2) \times \mathcal{D}(B_1,B_2)$$

para cada $A_1, A_2 \in Obj\,(\mathcal{C})$*,* $B_1, B_2 \in Obj\,(\mathcal{D})$*. En este caso, para cada* $(A_1,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_3) \in Obj\,(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$*, la composición se define como*

$$\begin{array}{rccc} \circ: & (\mathcal{C}\times\mathcal{D})((A_1,B_1),(A_2,B_2)) \times (\mathcal{C}\times\mathcal{D})((A_2,B_2),(A_3,B_3)) & \to & (\mathcal{C}\times\mathcal{D})((A_1,B_1),(A_3,B_3)) \\ & ((T_1,S_1),(T_2,S_2)) & \mapsto & (T_2 \circ_{\mathcal{C}} T_1, S_2 \circ_{\mathcal{D}} S_1) \end{array}$$

donde $\circ_{\mathcal{C}}$ *y* $\circ_{\mathcal{D}}$ *son las composiciones en* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$*, respectivamente.*

B.2. Tipos de morfismos

Definición B.2.1 (Monomorfismo)**.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría,* $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ *y* $f \in \mathcal{C}(A,B)$*. Decimos que* f *es monomorfismo si para cada* $C \in Obj\,(\mathcal{C})$ *y para cada* $g, h \in \mathcal{C}(C,A)$*, si* $fg = fh$*, entonces* $g = h$*.*

Ejemplo B.2.1. *En la categoría* ***Set*** *los monomorfismos son las funciones inyectivas.*

Ejemplo B.2.2. *En la categoría* $\boldsymbol{Vec}_F$ *los monomorfismos son las transformaciones lineales inyectivas.*

Definición B.2.2 (Epimorfismo)**.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría,* $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ *y* $f \in \mathcal{C}(A,B)$*. Decimos que* f *es epimorfismo si para cada* $C \in Obj\,(\mathcal{C})$ *y para cada* $g, h \in \mathcal{C}(B,C)$*, si* $gf = hf$*, entonces* $g = h$*.*

Ejemplo B.2.3. *En la categoría* ***Set*** *los epimorfismos son las funciones suprayectivas.*

Ejemplo B.2.4. *En la categoría* ***Grp****(grupos) los epimorfismos son los homomorfismos de grupos suprayectivos.*

Definición B.2.3 (Isomorfismo)**.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría,* $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ *y* $f \in \mathcal{C}(A,B)$*.* f *es un isomorfismo si existe* $g \in \mathcal{C}(B,A)$ *tal que* $gf = id_A$ *y* $fg = id_B$*.*
En este caso se dice que los objeto A *y* B *son isomorfos y se denota* $A \cong B$*.*

Ejemplo B.2.5. *En la categoría **Set**, los isomorfismos son las funciones biyectivas entre conjuntos.*

Ejemplo B.2.6. *En la categoría **Top**, los isomorfismos son los homeomorfismos entre los espacios topológicos.*

Definición B.2.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $A \in Obj\,(\mathcal{C})$. Si $f \in \mathcal{C}(A, A)$, entonces f es llamado endomorfismo y si es isomorfismo le llamamos automorfismo.*

Vamos a mostrar algunas propiedades de los morfismos.

Proposición B.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $f : A \to B$ un morfismo. Entonces, f es un isomorfismo si y solo si existe un único morfismo $g : B \to A$ tal que $gf = id_A$ y $fg = id_B$.*

Proposición B.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $f : A \to B$ un morfismo. Si f es isomorfismo, entonces es monomorfismo y epimorfismo.*

En el siguiente ejemplo vamos a ver que en general el recíproco de la Proposición B.2.2 no es cierto.

Ejemplo B.2.7. *Consideremos la categoría **CRing**, que es la categoría de anillos conmutativos. Consideremos a los objetos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y el morfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, definido por $f(n) = \frac{n}{1}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Veamos que f es monomorfismo, sean $R \in Obj(\textbf{CRing})$ y morfismos $h, k : R \to \mathbb{Z}$ tales que $fh = fk$. Veamos que $h = k$, sea $r \in R$, luego $(fh)(r) = (fk)(r)$, esto es $f(h(r)) = f(k(r))$, o sea $\frac{h(r)}{1} = \frac{k(r)}{1}$, es decir, $h(r) = k(r)$, como esto sucede para cada $r \in R$, se tiene que $h = k$. Por lo tanto, f es monomorfismo.*
Ahora veamos que f es epimorfismo, para esto sea $S \in Obj(\textbf{CRing})$ y morfismos $s, t : \mathbb{Q} \to S$ tales que $sf = tf$, por lo que $s(n) = t(n)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Debemos mostrar que $s = t$, en efecto, sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} s\left(\frac{a}{b}\right) & = & s\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \\ & = & s(a)s\left(\frac{1}{b}\right) \\ & = & t(a)s\left(\frac{1}{b}\right) \\ & = & t\left(\frac{a}{b}b\right)s\left(\frac{1}{b}\right) \\ & = & t\left(\frac{a}{b}\right)t(b)s\left(\frac{1}{b}\right) \\ & = & t\left(\frac{a}{b}\right)s(b)s\left(\frac{1}{b}\right) \\ & = & t\left(\frac{a}{b}\right). \end{array}$$

De ahí que $s = t$. Por lo tanto, f es epimorfismo. Así las cosas, hemos mostrado que f es monomorfismo y epimorfismo, sin embargo, no es isomorfismo puesto que no puede tener inversa ya que f no es una función biyectiva.

Teorema B.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos.*

1) *Si f y g son monomorfismos, entonces $gf : A \to C$ es monomorfismo.*

2) *Si f y g son epimorfismos, entonces $gf : A \to C$ es epimorfismo.*

3) *Si f y g son isomorfismos, entonces $gf : A \to C$ es isomorfismo.*

El siguiente teorema establece relaciones entre la composición de morfismos y los morfismos que se componen.

Teorema B.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos.*

1) *Si gf es monomorfismo, entonces f es monomorfismo.*

2) *Si gf es epimorfismo, entonces g es epimorfismo.*

B.3. Tipos de objetos

Definición B.3.1 (Objeto inicial)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in Obj\,(\mathcal{C})$. Decimos que A es un objeto inicial en $\mathcal{C}$ si para cada $B \in Obj\,(\mathcal{C})$, existe un único morfismo $f : A \to B$.*

Ejemplo B.3.1. *El conjunto vacío $\emptyset$ es un objeto inicial en **Set**, pues para cada conjunto B, existe una única función $f : \emptyset \to A$, a saber, la función vacía.*

Definición B.3.2 (Objeto final)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in Obj\,(\mathcal{C})$. Decimos que A es un objeto final en $\mathcal{C}$, si para cada $B \in Obj\,(\mathcal{C})$, existe un único morfismo $f : B \to A$.*

Ejemplo B.3.2. *En la categoría **Set**, el conjunto $\{a\}$, donde a es un elemento, es un objeto final, pues para cada conjunto B, existe una única función $f : B \to \{a\}$, a saber, la función $\overline{a} : B \to \{a\}$, definida por $\overline{a}(b) = a$, para cada $b \in B$.*

Teorema B.3.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$. Si A es un objeto inicial y B es un objeto final, entonces existe un único isomorfismo $f : A \to B$.*

Teorema B.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Los objetos iniciales y finales en $\mathcal{C}$, cuando existen son únicos salvo isomorfismo. Es decir, si $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ son objetos iniciales, entonces $A \cong B$. Análogamente, si $C, D \in Obj(\mathcal{C})$ son objetos finales, entonces $C \cong D$.*

B.4. Subcategorías

Definición B.4.1 (Subcategoría)**.** *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Decimos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{D}$ si:*

1) $Obj\,(\mathcal{C}) \subseteq Obj\,(\mathcal{D})$. (Recordemos el convenio que nos permite extender la relaciones de conjuntos a las clases).

2) Para cada $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}(A, B) \subseteq \mathcal{D}(A, B)$.

3) La composición de cualesquiera dos morfismos en $\mathcal{C}$ es la misma que su composición en $\mathcal{D}$.

4) La identidad id_A en $\mathcal{C}$, es la misma que en $\mathcal{D}$, para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$.

Cuando $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{D}(A, B)$, para cada $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ se dice que $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{D}$.

Ejemplo B.4.1. *La categoría **CRing** es una subcategoría de **Ring**.*

Ejemplo B.4.2. *La categoría **Ab** es una subcategoría de **Grp**.*

B.5. Construcciones universales

Definición B.5.1 (Producto)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$, $A \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i \in I}$ una familia de morfismos. Decimos que el par $(A, \{\pi_i : A \to A_i\}_{i \in I})$ es un producto de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{C}$, si para cada $B \in Obj\,(\mathcal{C})$ y cada familia de morfismos $\{f_i : B \to A_i\}_{i \in I}$, existe un único morfismo $g : B \to A$ tal que para cada $j \in I$, $\pi_j g = f_j$. En otras palabras, para cada $j \in I$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "g"'] & A_j \\ A \arrow[ur, "\pi_j"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Teorema B.5.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $(A, \{\pi_i : A \to A_i\}_{i\in I})$ y $(A', \{\pi'_i : A' \to A_i\}_{i\in I})$ son productos de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$, entonces $A \cong A'$.*

La demostración se puede consultar en [7].
En palabras, lo que el teorema anterior nos dice es que si existe el producto de una familia de objetos en una categoría, éste es único salvo isomorfismos.

Notación B.5.1. *Si $(A, \{\pi_i : A \to A_i\}_{i\in I})$ es un producto en una categoría $\mathcal{C}$, denotamos a A por $\prod_{i\in I} A_i$, es decir:*

$$A = \prod_{i\in I} A_i.$$

Ejemplo B.5.1. *Consideremos la categoría **Set**. Consideremos una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$, $A = \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f \text{ es función y para cada } i \in I, f(i) \in A_i\right\}$. Es claro que $A \in Obj\,(\textbf{Set})$. Además, si $f \in A$, como para cada $i \in I$, $f(i) \in A_i$, entonces, para cada $i \in I$, $f(i) = a_i$, con $a_i \in A_i$, así, podemos caracterizar a f como el "juego de coordenadas" $(a_i)_{i\in I}$, donde $a_i \in A_i$, para cada $i \in I$, de esta manera podemos reescribir a A como $A = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in A_i, \text{ para cada } i \in I\}$. Consideremos la familia de funciones $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i\in I}$, donde para cada $i \in I$, π_i se define como $\pi_i((a_i)_{i\in I}) = a_i$, para cada $(a_i)_{i\in I} \in A$. Vamos a ver que $(A, \{\pi_i : A \to A_i\}_{i\in I})$ es el producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en **Set**. Tomemos un conjunto B y una familia de funciones $\{f_i : B \to A_i\}_{i\in I}$. Debemos mostrar que existe una única función $g : B \to A$, tal que para cada $j \in I$, $\pi_j g = f_j$. Proponemos:*

$$\begin{array}{cccc} g: & B & \to & A \\ & b & \mapsto & (f_i(b))_{i\in I} \end{array}$$

que claramente es una función bien definida. Sea $j \in I$, $b \in B$, entonces $(\pi_j g)(b) = \pi_j(g(b)) = \pi_j((f_i(b))_{i\in I}) = f_j(b)$. Por lo tanto, $\pi_j g = f_j$, para cada $j \in I$.
Finalmente veamos la unicidad de g, supongamos que existe otra función $h : B \to A$ tal que para cada $j \in I$, $\pi_j h = f_j$. Debemos mostrar que $h = g$, en efecto, sea $b \in B$, luego $h(b) \in A$, así que $h(b) = (a_i)_{i\in I}$, donde $a_i \in A_i$, para cada $i \in I$. Ahora, para $j \in I$, tenemos que $a_j = (\pi_j)((a_i)_{i\in I}) = (\pi_j)(h(b)) = (\pi_j h)(b) = f_j(b)$, por lo que $a_j = f_j(b)$, para cada $j \in I$, en consecuencia, $h(b) = (f_i(b))_{i\in I} = g(b)$. Por lo tanto, $(A, \{\pi_i : A \to A_i\}_{i\in I})$ es el producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$, de ahí que

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f \text{ es función y para cada } i \in I, f(i) \in A_i\right\}$$

lo que usualmente conocemos en teoría de conjuntos.

Definición B.5.2 (Coproducto)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$, $A \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $\{\iota_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ una familia de morfismos. Decimos que el par $(A, \{\iota_i : A_i \to A\}_{i\in I})$ es un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{C}$, si para cada $B \in Obj\,(\mathcal{C})$ y cada familia de morfismos $\{f_i : A_i \to B\}$, existe un único morfismo $g : A \to B$ tal que para cada $j \in I$, $g\iota_j = f_j$, es decir, para cada $j \in I$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\iota_j"'] & B \\ A \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Teorema B.5.2. *Sea **C** una categoría. Si $(A, \{\iota_i : A_i \to A\}_{i\in I})$ y $(A', \{\iota'_i : A_i \to A\}_{i\in I})$ son coproductos de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{C}$, entonces $A \cong A'$.*

El teorema anterior nos dice en palabras que al igual que en el caso del producto, el coproducto de una familia de objetos de una categoría es único salvo isomorfismos.
En ocasiones se denota al coproducto de una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$ en una categoría $\mathcal{C}$ como $\amalg_{i\in I} A_i$, sin embargo, no es una notación uniforme, ya que depende mucho de la categoría donde estamos trabajando, por ejemplo, en las categorías **Ab**, **Vec**$_F$, **R-Mod** los coproductos son las sumas directas de familias de estos objetos y se denotan como $\bigoplus_{i\in I} A_i$. En el Capítulo 2 de esta tesis se formalizan los detalles sobre las sumas directas para el caso particular de la categoría de espacios vectoriales, pues es la estructura con la que trabajamos durante el desarrollo de este trabajo.

B.6. Funtores

Definición B.6.1 (Funtor covariante)**.** *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación $F : Obj\,(\mathcal{C}) \to Obj\,(\mathcal{D})$ y $F : \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B))$, sujeta a los siguientes axiomas:*

1) Para cada $A, B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$, $F(gf) = F(g)F(f)$.

2) Para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$, $F(id_A) = id_{F(A)}$.

Ejemplo B.6.1. *Consideremos $T : \boldsymbol{Ab} \to \boldsymbol{Set}$, definido en objetos como:*

$$\begin{array}{rccc} T: & Obj\,(\boldsymbol{Ab}) & \to & Obj\,(\boldsymbol{Set}) \\ & G & \mapsto & T(G) \end{array}$$

donde $T(G)$ es el conjunto subyacente del grupo abeliano G, es decir, debilitamos la estructura del grupo abeliano G a solamente la estructura de conjunto y en morfismos como:

$$\begin{array}{rccc} T: & \boldsymbol{Ab}(G,H) & \to & \boldsymbol{Set}(T(G),T(H)) \\ & f & \mapsto & T(f) \end{array}$$

donde $T(f) : T(G) \to T(H)$ es la función entre los conjuntos subyacentes $T(G)$ y $T(H)$, esto para cada $G, H \in Obj\,(\boldsymbol{Ab})$. Es facil ver que T es un funtor covariante.

Ejemplo B.6.2 (Funtor $Hom(A, \_)$)**.** *Consideremos una categoría $\mathcal{C}$, $A \in Obj\,(\mathcal{C})$. Definimos $Hom(A, \_) : \mathcal{C} \to \boldsymbol{Set}$ en objetos como*

$$\begin{array}{rccc} Hom(A,\_): & Obj\,(\mathcal{C}) & \to & Obj\,(\boldsymbol{Set}) \\ & B & \mapsto & \mathcal{C}(A,B) \end{array}$$

donde es claro a partir de la definición de categoría que $Hom(A,B)$ es un conjunto para cada $B \in Obj\,(\mathcal{C})$, por lo que la asignación está bien definida en objetos. La asignación en morfismos se hace de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} Hom(A,\_): & \mathcal{C}(B,C) & \to & \boldsymbol{Set}\,(Hom(A,B), Hom(A,C)) \\ & f & \mapsto & Hom(A,f) \end{array}$$

donde $Hom(A,f)$ se define como

$$\begin{array}{rccc} Hom(A,f): & Hom(A,B) & \to & Hom(A,C) \\ & g & \mapsto & fg \end{array}$$

lo anterior para cada $B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$. Se ve fácilmente que $Hom(A, \_)$ es un funtor covariante.

Definición B.6.2 (Funtor contravariante)**.** *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación $F : Obj\,(\mathcal{C}) \to Obj\,(\mathcal{D})$ y $F : \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(B), F(A))$, sujeta a los siguientes axiomas:*

1) Para cada $A, B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$, $F(gf) = F(f)F(g)$.

2) Para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$, $F(id_A) = id_{F(A)}$.

Ejemplo B.6.3 (Funtor $Hom(\_, B)$)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $B \in Obj\,(\mathcal{C})$. Se define $Hom(\_, B) : \mathcal{C} \to \boldsymbol{Set}$ en objetos como*

$$\begin{array}{rccl} Hom(\_, B) : & Obj\,(\mathcal{C}) & \to & Obj\,(\boldsymbol{Set}) \\ & C & \mapsto & \mathcal{C}(C, B) \end{array}$$

y en morfismos como

$$\begin{array}{rccl} Hom(\_, B) : & \mathcal{C}(C, D) & \to & \boldsymbol{Set}(Hom(D,B), Hom(C,B)) \\ & f & \mapsto & Hom(f, B) \end{array}$$

donde $Hom(f, B)$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccl} Hom(f, B) : & Hom(D, B) & \to & Hom(C, B) \\ & g & \mapsto & gf. \end{array}$$

Entonces, $Hom(\_, B)$ es un funtor contravariante.

B.7. Transformaciones naturales

Definición B.7.1 (Transformación natural)**.** *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. $\tau : F \to G$ es una transformación natural si:*

1) Para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$, existe un morfismo $\tau_A : F(A) \to G(A)$ en $\mathcal{D}$.

2) Para cada $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ y para cada morfismo $f : A \to B$, $G(f)\tau_A = \tau_B F(f)$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En este caso se dice que $\tau_A : F(A) \to G(A)$ es un morfismo natural en A. Se suele denotar a la transformación natural τ como $\{\tau_A\}_{A \in Obj(\mathcal{C})}$.

Observación B.7.1. *Podemos definir la composición de transformaciones naturales en el siguiente sentido:*
Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores, $\tau : F \to G$ y $\sigma : G \to H$ transformaciones naturales. La composición de σ con τ la definimos como $\sigma\tau : F \to H$, dada por $(\sigma\tau)_A = \sigma_A \tau_A$, para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$. Veamos que efectivamente $\sigma\tau$ es una transformación natural, para eso sean $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $f : A \to B$ un morfismo. Debemos tener que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "(\sigma\tau)_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "(\sigma\tau)_B"] & H(B) \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero tal diagrama lo podemos escribir como

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \arrow[r, "\sigma_B"] & H(B)
\end{tikzcd}$$

de manera que tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl}
H(f)(\sigma\tau)_A & = & H(f)(\sigma_A\tau_A) \\
 & = & (H(f)\sigma_A)\tau_A \\
 & = & (\sigma_B G(f))\tau_A \\
 & = & \sigma_B(G(f)\tau_A) \\
 & = & \sigma_B(\tau_B F(f)) \\
 & = & (\sigma_B\tau_B)F(f) \\
 & = & (\sigma\tau)_B F(f)
\end{array}$$

es decir, $H(f)(\sigma\tau)_A = (\sigma\tau)_B F(f)$, en consecuencia, $\sigma\tau : F \to H$ es una transformación natural.

Definición B.7.2 (Isomorfismo natural)**.** *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores y $\tau : F \to G$ una transformación natural. Decimos que τ es un isomorfismo natural si para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$, $\tau_A : F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo. En este caso se dice que los funtores F y G son naturalmente isomorfos.*

Definición B.7.3 (Isomorfismo de categorías)**.** *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que F es un isomorfismo de categorías si existe un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $GF, Id_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ son naturalmente isomorfos y tambien $FG, Id_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ son naturalmente isomorfos.*

B.8. Funtores adjuntos

Definición B.8.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Decimos que G es adjunto derecho de F y que F es adjunto izquierdo de G si para cada $A \in Obj\,(\mathcal{C})$ y $B \in Obj\,(\mathcal{D})$, existe un isomorfismo $\Phi_{A,B} : \mathcal{D}(F(A), B) \to \mathcal{C}(A, G(B))$, que es natural tanto en C como en D, esto es, para cada morfismo $f : A' \to A$ en $\mathcal{C}$ y para cada morfismo $g : B \to B'$ en $\mathcal{D}$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(A), B) \arrow[r, "\Phi_{A,B}"] \arrow[d, "g_F(f)"] & \mathcal{C}(A, G(B)) \arrow[d, "G(g)_f"] \\
\mathcal{D}(F(A'), B') \arrow[r, "\Phi_{A',B'}"] & \mathcal{C}(A', G(B'))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $G(g)\_f\Phi_{A,B} = \Phi_{A',B'}g\_F(f)$, donde $(g\_F(f))(\alpha) = g\alpha F(f)$, para cada morfismo $\alpha : F(A) \to B$ en $\mathcal{D}$ y $(G(g)\_f)(\beta) = G(g)\beta f$, para cada morfismo $\beta : A \to G(B)$ en $\mathcal{C}$. En este caso denotamos $F \dashv G$.

Bibliografía

[1] Alejandro Bravo Mojica, Hugo Rincón Mejía, Cesar Rincón Orta. (2006). *Álgebra superior*, Primera edición. México: Facultad de ciencias, UNAM.

[2] Hugo Alberto Rincón Mejía. (2006). *Álgebra lineal*, Segunda edición. México: Facultad de ciencias, UNAM.

[3] Fernando Hernández Hernández. (2003). *Teoría de conjuntos, una introducción*, Segunda edición. México: Sociedad matemática mexicana.

[4] Joseph J. Rotman. (2008). *An introduction to homological algebra*, Second edition. New York, USA: Springer.

[5] Br. Ojeda A. Juan N. (2011). *Estudio comparativo entre espacios vectoriales de dimensión finita e infinita*. Tesis de licenciatura. Venezuela: Universidad de Carabobo.

[6] Emilio Lluis Puebla. (2005). *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica*. México: Sociedad matemática mexicana.

[7] Thomas W. Hungerford. (1974). *Álgebra*. USA: Springer.

[8] Jonathan S. Golan. (2007). *The linear algebra a beginning graduate student ought to know*, Second edition. USA: Springer.