BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Una representación integral para la inversa de Drazin

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

Lic. Missael Meza Muñoz

Director de tesis:

Dr. Gabriel Kantún Montiel

Puebla, Pue., Septiembre de 2020.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

MISSAEL MEZA MUÑOZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 7 de agosto de 2020, con la tesis titulada:

Una representación integral para la inversa de Drazin

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 9 de septiembre de 2020

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicado a mi familia.

Agradecimientos

Quiero dar gracias a Dios por haberme dejado llegar hasta aquí, También agradezco a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida y sobre todo por sus sabios consejos que me han ayudado a tomar mejores decisiones en la vida. A mi asesor Dr. Gabriel Kantún Montiel, quien me permitió trabajar con él para la realización de este trabajo, estoy agradecido por la gran atención, disposición y conocimientos que me brindó durante la maestría, también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (Conacyt) por el apoyo brindado. Quiero agradecer también a mis sinodales Dr. Djordjević Slavisa, Dr. Francisco Javier Mendoza Torres y Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna por haber aceptado ser parte de esto.

Introducción

La teoría de inversas generalizadas tiene sus raíces en el contexto de los llamados problemas lineales mal planteados de ecuaciones diferenciales, como se menciona en [12]; éstos incluyen problemas donde se especifica demasiada o muy poca información. En el contexto del análisis, el concepto de inversa generalizada se originó en el estudio de ciertas ecuaciones integrales. De hecho, Fredholm resolvió la ecuación integral que hoy lleva su nombre empleando algo que él llamó pseudo-inversa [6]. Durante las últimas dos décadas muchos autores han propuesto e investigado varios tipos de inversas generalizadas para matrices, [8] para operadores definidos sobre espacios de Hilbert o más generalmente, inversas generalizadas para elementos en álgebras de Banach. En particular, se han considerado clases de inversas generalizadas que satisfacen algunas de las cuatro propiedades de la inversa de Moore-Penrose [16], así como varias modificaciones de los mismos. También, se han estudiado ampliamente inversas generalizadas de operadores lineales singulares, así como las nociones de inversión generalizada de elementos en diversas estructuras algebraicas y topológicas. En la actualidad la teoría es elegante, las aplicaciones son diversas y algunos aspectos computacionales sobresalientes aún esperan mejores métodos.

En el año 1920 en [15] Moore introdujo un concepto de inversa generalizada y posteriormente con el trabajo de Penrose en el año 1955 este concepto tuvo más interés. Como las condiciones que debe satisfacerla inversa de Penrose son equivalentes a las de la inversa de Moore, ahora hablamos de la inversa Moore-Penrose. La definición de Penrose es para matrices, pero se puede poner en términos de operadores lineales acotados de rango cerrado, la definición es la siguiente: dado un operador lineal acotado A de rango cerrado sobre un espacio de Hilbert, existe un único operador B que satisface las siguientes cuatro ecuaciones:

1. $ABA = A$,

2. $BAB = B$,

3. $(AB)^* = AB$,

4. $(BA)^* = BA$.

donde A^* denota el adjunto de A. En este caso decimos que B es la inversa Moore-Penrose de A. Esta inversa es reflexiva en el sentido de que si B es inversa generalizada para A, entonces A es inversa generalizada para B.

Después del trabajo de Penrose, aparecieron miles de artículos sobre inversas generalizadas, la mayoría de los cuales trataba con matrices sobre los campos real y complejo, lo cual era suficiente para la mayoría de las aplicaciones. Sin embargo, algunas ramas de la matemática, como las crecientes matemáticas discretas, requieren el estudio de las inversas generalizadas en marcos algebraicos más generales, como son campos y anillos.

En esta tesis trataremos principalmente con la inversa de Drazin [5]. Sea A un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert, si existen un operador B y un entero k que satisfacen:

1. $AB = BA$,

2. $B = BAB$,

3. $B^kXB = B^k$,

decimos que B es la inversa generalizada de Drazin para A. La inversa Drazin es única, si existe, y al menor k que satisface la condición 3 se le llama el índice Drazin de A.

Aunque la inversa Drazin no es reflexiva, es muy útil en la teoría y en el cálculo de matrices, así como en varias aplicaciones de matrices debido a que posee una propiedad espectral muy buena: los valores propios distintos de cero de la inversa Drazin son los recíprocos de los valores propios distintos de cero de la matriz dada. Más aún, un operador posee inversa Drazin si y sólo si el cero es un punto aislado en su espectro. En esta tesis estudiamos otras condiciones para la existencia de la inversa de Drazin.

Si bien es cierto que existen diversos estudios sobre inversas generalizadas, muy pocos tratan acerca de sus representaciones integrales [17], menos en el contexto de operadores lineales acotados definidos sobre espacios de Banach complejos.

Los costos computacionales para el cálculo de las inversas generalizadas pueden ser altos. Así, es importante hallar procesos de aproximación que permitan aplicaciones prácticas. Las representaciones integrales de las inversas generalizadas pueden ayudar a aproximarlas de manera asequible.

Esta tesis utiliza el cálculo operacional, pues éste hace uso de representaciones integrales de las potenicas de operadores lineales acotados, estaremos interesados en la construcción de la inversa Drazin utilizando dichas representaciones. Por lo tanto, nos planteamos el problema de construir una representación integral para la inversa Drazin usando el cálculo operacional. La cantidad y calidad de los artículos publicados recientemente aseguran la relevancia de la tesis.

Índice general

Capítulo 1

Funciones analíticas vectoriales

Gran parte de la teoría de integración de Riemann se puede desarrollar en espacios de Banach arbitrarios. En este capítulo se exponen resultados análogos a los del análisis complejo para funciones definidas en subconjuntos del plano complejo y que toman valores en un espacio de Banach, a las que nos referiremos simplemente como funciones vectoriales. Esta teoría será fundamental para desarrollar el cálculo operacional, lo que haremos en el siguiente capítulo. En la última sección del capítulo se aplica esta teoría al espacio de Banach de los operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach.

La teoría de funciones de variable compleja trata principalmente sobre funciones analíticas. Así, para desarrollar una teoría análoga para el caso de funciones vectoriales necesitamos primero definir las funciones analíticas.

Definición 1.1. *Sea Y un espacio de Banach complejo, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $F : \Omega \longrightarrow Y$ una función. Decimos que F es diferenciable en z_0 si*

$$F'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

existe. A $F'(z_0)$ le llamamos la derivada de F en z_0.

Si para cada $z_0 \in \Omega, F'(z_0)$ existe, decimos que F es analítica en Ω.

Se puede demostrar que si una función de este tipo es diferenciable en un punto, entonces todas las derivadas de orden superior en ese punto también existen.

El siguiente resultado es análogo al que se tiene en cálculo diferencial de una variable real.

Proposición 1.1. *Sea Y un espacio de Banach complejo, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $F : \Omega \longrightarrow Y$ una función. Si F es diferenciable en $z_0 \in \Omega$, entonces F es continua en z_0.*

Demostración. Como

$$\lim_{z\to z_0}(F(z) - F(z_0)) = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}\cdot(z - z_0)\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}\right]\cdot \lim_{z\to z_0}(z - z_0) = F'(z_0)\cdot 0 = 0.$$

Así,

$$\lim_{z\to z_0}(F(z) - F(z_0)) = 0.$$

Por lo tanto, F es continua en z_0. □

Sean X, Y espacios normados, en general con $L[X, Y]$ denotamos el espacio de operadores lineales de X en Y, con $B[X, Y]$ denotamos al espacio de operadores lineales acotados de X en Y, si $X = Y$ solo escribiremos $L[X]$ y $B[X]$ en ambos casos. Los espacios $X^* = B[X, \mathbb{C}]$ y $Y^* = B[Y, \mathbb{C}]$, se llaman los espacios conjugados de X y Y respectivamente.

Teorema 1.1. *Sean X un espacio normado, $x^* \in X^*$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow X$ una función analítica entonces la función $\phi(\lambda) := x^*(\varphi(\lambda))$ es analítica, de hecho, $\phi'(\mu) = x^*(\varphi'(\mu))$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $\mu \in \Omega$, notemos que si $x^* = 0$, $\phi(\lambda) = 0$ la cual es analítica, si $x^* \neq 0$, se tiene que,

$$\frac{\phi(\lambda) - \phi(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{x^*(\varphi(\lambda)) - x^*(\varphi(\mu))}{\lambda - \mu} = x^*\left(\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu}\right) \quad (1.1)$$

Como φ es analítica en μ, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|\lambda - \mu| < \delta, \text{ entonces } \left|\left|\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu} - \varphi'(\mu)\right|\right| < \frac{\epsilon}{||x^*||}. \quad (1.2)$$

Así, usando (1.1) y (1.2), si $|\lambda - \mu| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{\phi(\lambda) - \phi(\mu)}{\lambda - \mu} - x^*(\varphi'(\mu))\right| = \left|x^*\left(\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu}\right) - x^*(\varphi'(\mu))\right| =$$

$$\left|x^*\left(\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu} - \varphi'(\mu)\right)\right| \leq ||x^*|| \cdot \left|\left|\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu} - \varphi'(\mu)\right|\right| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\phi'(\mu) = x^*(\varphi'(\mu))$. □

1.1. Integral de contorno vectorial

La integración de contorno es un método para evaluar ciertas integrales sobre caminos en el plano complejo. Primero empezamos con una definición de curva que coincide con la noción intuitiva, pero que incluye una parametrización por una función continua en un intervalo cerrado.

Definición 1.2. *Una curva en $\mathbb{C}$ es una función continua $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

En el plano complejo $\mathbb{C}$ existen muchos tipos de curvas así que mostramos una clasificación de ellas, para esto recordemos que una partición P de un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto finito de puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ de $[a, b]$ tales que

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Con $\mathbb{P}([a, b])$ denotamos el conjunto de particiones de $[a, b]$ y como es usual, la norma de $P \in \mathbb{P}([a, b])$ se define como

$$||P|| = \text{máx}\{t_i - t_{i-1} | i = 1, \ldots, n\}.$$

Definición 1.3. *Sea $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva.*

- *γ se llama cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

- *Una curva cerrada γ se llama simple si cumple que para cualesquiera $t_1, t_2 \in [a,b], t_1 < t_2$ y $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, se tiene que $t_1 = a$ y $t_2 = b$.*

- *γ se llama rectificable si*

$$\sup A < \infty,$$

donde

$$A = \{\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| | \{a = t_0, ..., t_n = b\} \in \mathbb{P}([a,b])\}.$$

Ejemplos:

1. La curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $\gamma(t) = t + it^2$, es rectificable.
   Sea $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = 1\} \in \mathbb{P}([0,1])$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} \left|(t_j + it_j^2) - (t_{j-1} + it_{j-1}^2)\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left|t_j - t_{j-1} + i(t_j^2 - t_{j-1}^2)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(|t_j - t_{j-1}| + \left|t_j^2 - t_{j-1}^2\right|\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (|t_j - t_{j-1}| + |t_j - t_{j-1}| \, |t_j + t_{j-1}|) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})(1 + t_{j-1} + t_j).$$

   Como $0 \leq t_{j-1} < t_j \leq 1$, entonces $1 + t_{j-1} + t_j \leq 3$, también $\sum_{i=j}^{n}(t_j - t_{j-1}) = 1$, de aquí que

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq 3.$$

2. La curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, donde $x(t) = t$ y $y(t) = \begin{cases} t\cos\dfrac{1}{t} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 \quad \text{si} & t = 0. \end{cases}$

no es rectificable.
Consideremos la partición

$$P_n = \{\ 0,\ \frac{1}{(n-1)\pi},\ \frac{1}{(n-2)\pi},\ \ldots,\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{\pi},\ 1\} \in \mathbb{P}([0,1]).$$

Los puntos de la poligonal que corresponden a la partición P_n son

$$M_0 = 0,\ M_1 = \frac{1}{(n-1)\pi} + i\left(\frac{1}{(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right),$$

$$M_2 = \frac{1}{(n-2)\pi} + i\left(\frac{1}{(n-2)\pi}\cos(n-2)\pi\right), ...,$$

$$M_{n-2} = \frac{1}{2\pi} + i\left(\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\right),$$

$$M_{n-1} = \frac{1}{\pi} + i\left(\frac{1}{\pi}\cos\pi\right),\ M_n = 1 + i\cos 1.$$

La suma de las distancias de los segmentos de la poligonal es

$$\begin{aligned} s(P_n) &= |M_0M_1| + |M_1M_2| + \cdots + |M_{n-2}M_{n-1}| + |M_{n-1}M_n| \\ &= \left|\frac{1}{(n-1)\pi} + i\frac{1}{(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right| \\ &+ \left|\frac{1}{(n-2)\pi} - \frac{1}{(n-1)\pi} + i\left(\frac{\cos(n-2)\pi}{(n-2)\pi} - \frac{\cos(n-1)\pi}{(n-1)\pi}\right)\right| \\ &+ \cdots + \left|1 - \frac{1}{\pi} + i\left(\cos 1 - \frac{1}{\pi}\cos\pi\right)\right|. \end{aligned}$$

Eliminando el primer y último término de la suma anterior,

$$\begin{aligned} s(P_n) &\geq \sum_{k=1}^{n-2}\left|\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi} + i\left(\frac{1}{k\pi}\cos k\pi - \frac{\cos(k+1)\pi}{(k+1)\pi}\right)\right| \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-2}\left|\frac{1}{k\pi}\cos k\pi - \frac{1}{(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi\right| \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi} \right| = \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k+1)\pi} \right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} s(P_n) \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

lo que nos muestra que la curva Γ no es rectificable.

De manera intuitiva queda claro que cada curva simple tiene un interior y un exterior. Sin embargo, la demostración de este hecho no es trivial y se debe a Jordan.

No daremos la demostración del Teorema de la curva de Jordan, solo lo mencionamos con el objetivo de definir el interior y exterior de una curva.

Teorema 1.2 (Teorema de la curva de Jordan)**.** *Si $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada simple, entonces $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ tiene dos componentes conexas, una acotada y otra no acotada.*

A la parte acotada se le llama el interior de γ y se denota por $int(\gamma)$, a la parte no acotada se le llama el exterior de γ, se denota por $ext(\gamma)$.

Definición 1.4. *Una curva cerrada, simple y rectificable $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice orientada positivamente si $int(\gamma)$ se encuentra a la izquierda cuando se traza la curva.*

La idea de la definición anterior es que una curva está orientada positivamente, cuando trazamos la curva en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Con base en lo anterior definiremos lo que significa que una función definida en un intervalo cerrado con valores en un espacio de Banach, sea integrable con respecto a una curva.

Definición 1.5. *Sean Y un espacio de Banach, $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva rectificable y $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y$ una función, decimos que f es integrable si existe $I \in Y$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cada partición $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\} \in \mathbb{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta$ y cada $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ se cumple que*

$$\left|\left| \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) - I \right|\right|_Y < \epsilon.$$

Se puede ver fácilmente que cuando tal elemento $I \in Y$ exista, este es único, en este caso, I se denota como $\int_a^b f(t)d\gamma(t)$.

Observación: Notemos que la definición de la integral es análoga a la de la integral de Riemann-Stieltjes para el caso real, solo que en este caso la integral es un elemento en un espacio de Banach.

Definición 1.6. *Sea $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva rectificable en $\mathbb{C}$, si $F : \gamma([a,b]) \longrightarrow Y$ es continua, definimos*

$$\int_\gamma F(z)dz := \int_a^b F(\gamma(t))d\gamma(t).$$

En la definición 1.6, cuando la curva γ es rectificable y F es continua, se puede demostrar que siempre existe

$$\int_\gamma F(z)dz.$$

1.2. Teorema de Cauchy

El Teorema de Cauchy es uno de los más importantes en la teoría de Variable Compleja, en esta sección vemos como este teorema se extiende a funciones definidas en ciertos subconjuntos de $\mathbb{C}$ con valores en espacios de Banach.

Definición 1.7. *Un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se llama dominio, si Ω es abierto y conexo.*

Algunas ideas para hacer esta extensión se toman del caso complejo, una de estas ideas es la homotopía de curvas.

Definición 1.8. *Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ dos curvas cerradas rectificables en un dominio Ω, decimos que γ_0 es homotópica a γ_1 si existe una función continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ tal que*

$$\Gamma(s,0) = \gamma_0(s), \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), 0 \leq s \leq 1$$

y

$$\Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), 0 \leq t \leq 1.$$

Otros subconjuntos especiales de $\mathbb{C}$ son los llamados simplemente conexos, la idea intuitiva de estos conjuntos es que no tienen hoyos.

Definición 1.9. *Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se llama simplemente conexo, si toda curva cerrada γ en Ω es homotópica a una curva constante en Ω.*

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, denotamos el segmento de linea de z_1 a z_2 como $[z_1, z_2] = \{tz_2 + (1-t)z_1 | t \in [0,1]\}$.

Definición 1.10. *Un polígono de a en b es un conjunto*

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} [z_k, w_k],$$

donde $a = z_1$, $w_n = b$ y $w_k = z_{k+1}$ para $1 \leq k \leq n-1$.

También escribimos

$$P = [a, z_1, \ldots, z_n, b].$$

Con el siguiente lema, empezamos el camino para obtener el Teorema de Cauchy en este contexto más general.

Lema 1.1. *Supongamos que Y es un espacio de Banach, $f : B(z_0, r) \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow Y$ es una función analítica en $B(z_0, r)$ y que γ es una curva cerrada rectificable en $B(z_0, r)$, entonces*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Con el Lema anterior es posible demostrar lo que algunos autores llaman Teorema de Deformación.

Teorema 1.3. *Sean γ_0, γ_1 curvas cerradas rectificables en un dominio Ω que son homotópicas, Y un espacio de Banach y $F : \Omega \longrightarrow Y$ una función analítica en Ω, entonces*

$$\int_{\gamma_0} F(z) dz = \int_{\gamma_1} F(z) dz.$$

Demostración. Sabemos que existe $\Gamma : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \Omega$ continua tal que

$$\Gamma(s,0) = \gamma_0(s), \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), 0 \leq s \leq 1$$

y

$$\Gamma(0,t) = \Gamma(1,t), 0 \leq t \leq 1.$$

Como Γ es uniformemente continua, para $r := d(\Gamma([0,1] \times [0,1]), \mathbb{C}\backslash\Omega) > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|(s,t) - (s',t')| < \delta$, entonces $|\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < r$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{\delta} < n$. Sean

$$z_{jk} = \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), 0 \leq j,k \leq n$$

y

$$J_{jk} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], 0 \leq j,k \leq n-1.$$

Como $diam(J_{jk}) = \frac{\sqrt{2}}{n}$, entonces $\Gamma(J_{jk}) \subseteq B(z_{jk}, r)$. Consideremos el poligono cerrado

$$P_{jk} = [z_{jk}, z_{j+1k}, z_{j+1k+1}, z_{jk+1}, z_{jk}],$$

como $B(z_{jk}, r)$ es un conjunto convexo, se tiene que $P_{jk} \subseteq B(z_{jk}, r)$.

Además P_{jk} es una curva cerrada rectificable en $B(z_{jk}, r)$, entonces por el Lema 1.1 se tiene que

$$\int_{P_{jk}} F(z)dz = 0. \tag{1.3}$$

Sea el poligono cerrado $Q_k = [z_{0k}, z_{1k}, \ldots, z_{nk}]$, veamos que

$$\int_{\gamma_0} F(z)dz = \int_{Q_0} F(z)dz = ... = \int_{Q_n} F(z)dz = \int_{\gamma_1} F(z)dz.$$

Consideremos $\sigma_j(t) = \gamma_0(t), \frac{j}{n} \leq t \leq \frac{j+1}{n}$, entonces la curva $\sigma_j + [z_{j+10}, z_{j0}]$ es una curva cerrada rectificable en $B(z_{j0}, r) \subseteq \Omega$. Por lo tanto, por el lema 1.1 se tiene que

$$\int_{\sigma_j + [z_{j+10}, z_{j0}]} F(z)dz = 0,$$

es decir,

$$\int_{\sigma_j} F(z)dz = -\int_{[z_{j+10},z_{j0}]} F(z)dz = \int_{-[z_{j+10},z_{j0}]} F(z)dz$$
$$= \int_{[z_{j0},z_{j+10}]} F(z)dz.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma_0} F(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma_j} F(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{[z_{j0},z_{j+10}]} F(z)dz$$
$$= \int_{Q_0} F(z)dz.$$

Análogamente se cumple que

$$\int_{\gamma_1} F(z)dz = \int_{Q_n} F(z)dz.$$

De (1.3), se tiene que

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{P_{jk}} F(z)dz, \tag{1.4}$$

además notemos que

$$\int_{P_{jk}} F(z)dz$$

contiene como sumando a la integral

$$\int_{[z_{j+1,k},z_{j+1,k+1}]} F(z)dz = -\int_{[z_{j+1,k+1},z_{j+1,k}]} F(z)dz,$$

que es parte de

$$\int_{P_{j+1,k}} F(z)dz.$$

También, $z_{0,k} = \Gamma(0, \frac{k}{n}) = \Gamma(1, \frac{k}{n}) = z_{1,k}$, así $[z_{0,k+1}, z_{0,k}] = -[z_{1,k}, z_{1,k+1}]$, teniendo esto en consideración en (1.4), se tiene que

$$0 = \int_{Q_k} F(z)dz - \int_{Q_{k+1}} F(z)dz,$$

entonces

$$\int_{Q_k} F(z)dz = \int_{Q_{k+1}} F(z)dz.$$

□

Con el Teorema de Deformación, el Teorema de Cauchy se demuestra de forma sencilla.

Teorema 1.4 ([2])**.** *[de Cauchy] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio. Si Ω es simplemente conexo y $F : \Omega \longrightarrow Y$ es analítica en Ω, entonces*

$$\int_{\Gamma} F(z)dz = 0,$$

para cada curva simple, cerrada y rectificable Γ en Ω.

Demostración. Sea Γ una curva cerrada y rectificable en Ω, por hipótesis se tiene que Γ es homotópica a una curva constante α en Ω, por el Teorema 1.3 se tiene que

$$\int_{\Gamma} F(z)dz = \int_{\alpha} F(z)dz = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma} F(z)dz = 0.$$

□

1.3. Fórmula integral de Cauchy y Teorema de Liouville

La fórmula integral de Cauchy y el Teorema de Liouville son teoremas clásicos de la teoría de Variable Compleja. En este trabajo se usarán para demostrar que cierto operador es la inversa de Drazin de un operador dado.

Teorema 1.5 ([2])**.** *[Fórmula integral de Cauchy] Sea $F : \Omega \longrightarrow Y$ una función analítica en un dominio simplemente conexo Ω y Γ una curva cerrada, simple, rectificable y orientada positivamente en Ω. Entonces para cada $z_0 \in int(\Gamma)$ se tiene que*

$$F^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

El Teorema de Liouville nos será de utilidad en el capítulo 2, cuando demostremos que el espectro de cualquier elemento en un álgebra normada es no vacío.

Teorema 1.6 ([2])**.** *[de Liouville] Si* $F : \mathbb{C} \longrightarrow Y$ *es analítica y acotada, entonces* F *es constante.*

Para mayor información acerca de los Teoremas 1.5 y 1.6 ver [2].

1.4. Espacio de operadores lineales acotados definidos sobre un espacio de Banach

En general, es posible considerar el espacio de operadores lineales acotados definidos sobre un espacio normado X, para nuestros propósitos supondremos que X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$. Con $B(X)$ denotamos el espacio de operadores lineales acotados sobre X, con la norma usual dada por

$$||T|| := \sup_{||x|| \leq 1} ||T(x)||.$$

Proposición 1.2 ([2])**.** *Sean* $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *una curva rectificable y* $F : \Gamma([a, b]) \longrightarrow B(X)$ *una función continua. Sea* $x \in X$ *y* $F_x : \Gamma([a, b]) \longrightarrow X$ *definida como* $F_x(z) = F(z)x$*. Entonces*

1. F_x *es continua.*
2. $\left(\int_\Gamma F(z)dz\right) x = \int_\Gamma F_x(z)dz = \int_\Gamma F(z)xdz.$

Demostración. 1. Si $x = 0$, entonces $F_x = 0$, así F_x es continua. Ahora si $x \in X$ es tal que $x \neq 0$, como F es continua en z_0, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|z - z_0| < \delta, \text{ entonces } ||F(z) - F(z_0)|| < \frac{\epsilon}{||x||}.$$

Si $|z - z_0| < \delta$, entonces

$$||F_x(z) - F_x(z_0)|| = ||F(z)x - F(z_0)x||$$

$$= ||(F(z) - F(z_0)x|| \leq ||F(z) - F(z_0)|| \cdot ||x|| < \epsilon.$$

Por lo tanto, F_x es una función continua.

2. Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $P = \{a = t_0, ..., t_n = b\} \in \mathbb{P}([a, b])$ con $||P|| < \delta_1$ y $w_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F(z)dz\right|\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

También, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $P = \{a = t_0, ..., t_n = b\} \in \mathbb{P}([a, b])$ con $||P|| < \delta_2$ y $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} F_x(\Gamma(r_i))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F_x(z)dz\right|\right| < \frac{\epsilon}{2},$$

es decir,

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(r_i))(x)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F(z)xdz\right|\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, $P = \{a = t_0, ..., t_n = b\} \in \mathbb{P}([a, b])$ con $||P|| < \delta$ y $w_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces

$$\left|\left|\left(\int_\Gamma F(z)dz\right)(x) - \int_\Gamma F_x(z)dz\right|\right| \leq$$

$$\left|\left|\left(\int_\Gamma F(z)dz\right)(x) - \sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1}))\right|\right| +$$

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F(z)xdz\right|\right|$$

$$= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \left(\int_\Gamma F(z)dz\right)(x)\right|\right| +$$

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F(z)xdz\right|\right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\left(\int_\Gamma F(z)dz\right) x = \int_\Gamma F_x(z)dz.$$

□

El siguiente teorema muestra cómo componer un operador lineal acotado con otro que se represente como una integral de contorno.

Teorema 1.7 ([2])**.** *Sean* $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *una curva rectificable,* $F : \Gamma([a,b]) \longrightarrow B(X)$ *una función continua y* $T \in B(X)$*. Entonces*

$$T(\int_\Gamma F(z)dz) = \int_\Gamma T(F(z))dz.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, y $x_0 \in X$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $P \in \mathbb{P}([a,b])$

$$\text{si } ||P|| < \delta_1, \text{ entonces}$$

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} T(F(\Gamma(w_i)))(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma T(F(z))\right|\right| < \epsilon.$$

También, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $P \in \mathbb{P}([a,b])$, si $||P|| < \delta_2$, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(x_0)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F(z)x_0dz\right|\right| < \epsilon||x_0||.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y $P \in \mathbb{P}([a,b])$ con $||P|| < \delta$, entonces por la linealidad y continuidad de T, tenemos que

$$\left|\left|T\left(\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(x_0)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F(z)x_0dz\right)\right|\right| =$$

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} T(F(\Gamma(w_i)))(x_0)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - T(\int_\Gamma F(z)(x_0)dz)\right|\right|$$

$$\leq ||T||\cdot\left|\left|\sum_{i=1}^{n} F(\Gamma(w_i))(x_0)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - \int_\Gamma F(z)x_0dz\right|\right| < ||T||\cdot||x_0||\epsilon.$$

Entonces

$$\left|\left|T(\int_\Gamma F(z)dz)(x_0) - (\int_\Gamma T(F(z))dz)(x_0)\right|\right| \leq$$

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} T(F(\Gamma(w_i)))(x_0)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - (\int_{\Gamma} T(F(z))dz)(x_0)\right|\right|$$

$$+\left|\left|\sum_{i=1}^{n} T(F(\Gamma(w_i)))(x_0)(\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})) - T(\int_{\Gamma} F(z)x_0dz)\right|\right|$$

$$< (1 + ||T|| \cdot ||x_0||)\epsilon.$$

Con lo que queda demostrado el resultado. □

Capítulo 2

Álgebras de Banach

2.1. Álgebras de Banach

Las álgebras son estructuras algebraicas muy importantes por sí mismas, en esta sección mencionamos varios teoremas y conceptos relacionados con éstas.

Definición 2.1. *Un álgebra es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{C}$, que es también un anillo con respecto a una segunda operación binaria $* : A \times A \longrightarrow A$ llamada producto, cuyo valor en el par ordenado (x, y) denotado por xy es tal que:*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \text{ para cada } x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Si existe $1 \in A$, $1 \neq 0$, tal que $x1 = 1x = x$ para cada $x \in A$, decimos que A es un álgebra con identidad y 1 se llama la identidad de A.

Si la operación $*$ es conmutativa, decimos que A es un álgebra conmutativa.

Un ejemplo de un álgebra sobre $\mathbb{C}$ es el de operadores lineales $\mathbb{L}(X)$, que van de un espacio lineal X sobre $\mathbb{C}$ en sí mismo, donde las operaciones de suma y multiplicación por un escalar hacen de $\mathbb{L}(X)$ un anillo, la operación producto es la composición de funciones.
Dado que en un álgebra se tiene una operación de multiplicación, podemos pensar en inversos multiplicativos bajo esta operación, pero en tal caso debemos tener alguna elemento unitario.

Definición 2.2. *Sea A un álgebra con identidad* 1.

- *Un elemento $x \in A$ tiene inverso izquierdo si existe $y \in A$ tal que $yx = 1$.*
- *Un elemento $x \in A$ tiene inverso derecho si existe $y \in A$ tal que $xy = 1$.*
- *Un elemento $x \in A$ tiene inverso, si existe $y \in A$ llamado el inverso de x tal que $xy = yx = 1$, en este caso decimos que x es invertible. El conjunto de elementos invertibles de A se denota como $InvA$.*

Si bien las álgebras son importantes, no son suficientes para los propósitos de este trabajo, en su lugar consideraremos álgebras normadas.

Definición 2.3. *Un espacio normado $(A, ||.||)$ sobre $\mathbb{C}$ se llama álgebra normada si:*

- *A es un álgebra.*
- *$||xy|| \leq ||x||||y||$ para cada $x, y \in A$.*

Como ejemplo de álgebra normada tenemos a $B(X)$ el espacio de operadores lineales acotados, definidos en un espacio normado X sobre $\mathbb{C}$ en sí mismo, donde si $T \in B(X)$,

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||T(x)||. \tag{2.1}$$

Así como se habla de espacios de Banach, también hablamos de álgebras de Banach.

Definición 2.4. *Un álgebra normada A se llama álgebra de Banach si el espacio normado $(A, ||.||)$ es un espacio de Banach.*

Si X es un espacio de Banach, en este caso se tiene que $B(X)$ es un álgebra de Banach con la norma (2.1).

Notemos que en este caso $B(X)$ tiene el operador identidad, que además actúa como elemento unidad respecto a su operación producto, es decir, la composición, las álgebras con esta propiedad reciben un nombre especial.

Definición 2.5. *Un álgebra de Banach A se llama unital si*

- *Existe* $1 \in A$ *tal que* $x1 = 1x = x$ *para cada* $x \in A$.
- $||1|| = 1$.

Si A no tiene una identidad multiplicativa, es posible encajarla isométricamente en el álgebra de Banach $A \times \mathbb{C}$ mediante el isomorfismo isométrico $f : A \longrightarrow A \times C$ definido como $f(x) = (x, 0)$, con las siguientes operaciones:

para cualesquiera $(x, \alpha), (y, \beta) \in A \times \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(x, \alpha) + (y, \beta) := (x + y, \alpha + \beta),$$

$$\lambda(x, \alpha) := (\lambda x, \lambda\alpha),$$

$$(x, \alpha)(y, \beta) := (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)$$

y consideramos la norma

$$||(x, \alpha)|| := ||x|| + |\alpha|.$$

En este caso la identidad en $A \times \mathbb{C}$ es $(x, \alpha) = (0, 1)$ y nos referimos a $A \times \mathbb{C}$ como el álgebra obtenida de A por adjunción de una identidad.

Si ahora en lugar de tomar solo un espacio normado X sobre $\mathbb{C}$, consideramos que además X es de Banach, entonces $B(X)$ será un espacio de Banach con la norma (2.1).

Con esta definición podemos decir que, si X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, entonces $B(X)$ es un álgebra de Banach.

2.2. Cuasi-regularidad

La llamada operación bolita es una operación muy útil en el estudio de anillos y álgebras sin identidad, la operación bolita

$$\circ : A \times A \longrightarrow A$$

se define como

$$\circ(x, y) = x \circ y := x + y - xy.$$

Con esta operación asi definida se verifica que $(A, \circ)$ es un monoide, donde el neutro de la operación es $0 \in A$.

Análogamente a los inversos multiplicativos en un álgebra de Banach con identidad, se tiene la siguiente:

Definición 2.6. *Sea A un álgebra. Decimos que $x \in A$*

- *es cuasi-regular derecho si existe $y \in A$ tal que $x \circ y = 0$.*
- *es cuasi-regular izquierdo si existe $y \in A$ tal que $y \circ x = 0$.*
- *es cuasi-regular si existe $y \in A$ tal que $x \circ y = y \circ x = 0$.*

Proposición 2.1. *Sea A un álgebra. Entonces*

1. *Un elemento $x \in A$ es cuasi-regular si y solo si x es cuasi-regular derecho y cuasi-regular izquierdo.*
2. *Si $x \in A$ es cuasi-regular, entonces existe un único $y \in A$ tal que $x \circ y = y \circ x = 0$.*

Demostración. 1. $\longrightarrow$] Si x es cuasi-regular, entonces existe $y \in A$ tal que $x \circ y = y \circ x = 0$, entonces x es cuasi-regular derecho y cuasi-regular izquierdo.

$\longleftarrow$] Si x es cuasi-regular derecho y cuasi-regular izquierdo, exiten $y_1, y_2 \in A$ tales que

$$x \circ y_1 = 0 \text{ y } y_2 \circ x = 0,$$

veamos que $y_1 = y_2$,

$$y_1 = 0 \circ y_1 = (y_2 \circ x) \circ y_1 = y_2 \circ (x \circ y_1) = y_2 \circ 0 = y_2.$$

Por lo tanto, x es cuasi-regular.

2. Si $x \in A$ es cuasi-regular, entonces existe $y \in A$ tal que $x \circ y = y \circ x = 0$, veamos la unicidad de este elemento. Supongamos que existe $w \in A$ tal que $x \circ w = w \circ x = 0$, entonces

$$y = 0 \circ y = (w \circ x) \circ y = w \circ (x \circ y) = w \circ 0 = w,$$

así $y = w$. Por lo tanto, el elemento es único. $\square$

Al elemento único tal que $x \circ y = y \circ x = 0$, lo vamos a denotar como x'. Es fácil ver que, si x es cuasi-regular, entonces x' es cuasi-regular y $(x')' = x$. También, denotaremos con Q al conjunto de elementos de A que son cuasi-regulares, Q_l el conjunto de elementos cuasi-regulares izquierdos y Q_r el conjunto de elementos cuasi-regulares derechos.

Proposición 2.2 ([4]). *Sea A un álgebra de Banach y $x \in A$.*

1. *Si $||x|| < 1$, entonces $x \in Q$.*
2. *Los conjuntos Q, Q_l y Q_r son conjuntos abiertos.*

Demostración. 1. Supongamos que $||x|| < 1$, como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $||x^n|| \leq ||x||^n < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ||x||^n < \infty$ y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x^n|| < \infty.$$

Como A es un espacio de Banach se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ es convergente.}$$

Así, $y := -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ esta bien definido y además se cumple que

$$x \circ y = x + y - xy = x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n - x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n) = x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n + x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)$$

$$= x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = x - \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

$$= x - x - \sum_{n=2}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 0$$

y también

$$y \circ x = y + x - yx = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n + x - (-\sum_{n=1}^{\infty} x^n)x = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n + x + (\sum_{n=1}^{\infty} x^n)x$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} x^n + x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = -x - \sum_{n=2}^{\infty} x^n + x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = 0.$$

Así,

$$x \circ y = y \circ x = 0.$$

Por lo tanto, $x \in Q$.

2. Basta demostrar que Q_l y Q_r son conjuntos abiertos en A, ya que $Q = Q_r \cap Q_l$. Veamos que Q_r es abierto. Sea $x \in Q_r$, entonces existe $y \in A$ tal que $x \circ y = 0$, notemos que para cada $z \in A$ se cumple que

$$z \circ y = (z - x + x) \circ y = z - x + x + y - (z - x + x)y$$

$$= (z-x)+x+y-(z-x)y-xy = (z-x)-(z-x)y+(x+y-xy)$$

$$= (z - x) - (z - x)y + x \circ y = z - x - (z - x)y.$$

De aquí que,

$$||z\circ y|| = ||z-x-(z-x)y|| \leq ||z-x||+||(z-x)y|| \leq ||z-x||+||z-x||||y||$$

$$= ||z - x||(1 + ||y||) < 1 \text{ si } ||z - x|| < \frac{1}{1 + ||y||},$$

es decir, $z \circ y \in Q$ si $||z - x|| < \frac{1}{1+||y||}$. Así,

$$z \circ [y \circ (z \circ y)'] = (z \circ y) \circ (z \circ y)' = 0$$

y así $z \in Q$, por lo que Q_r es abierto.
Veamos que Q_l es abierto.

Sea $x \in Q_l$, entonces existe $y \in A$ tal que $y \circ x = 0$, notemos que para cada $z \in A$ se cumple que

$$y \circ z = y \circ (z - x + x) = y + z - x + x - y(z - x + x)$$

$$= (z-x)+y+x-y(z-x)-yx = (z-x)-y(z-x)+(y+x-yx)$$

$$= (z - x) - y(z - x) + y \circ x = z - x - y(z - x).$$

Entonces

$$||y\circ z|| = ||z-x-y(z-x)|| \leq ||z-x||+||y(z-x)|| \leq ||z-x||+||y||||z-x||$$

$$= ||z - x||(1 + ||y||) < 1 \text{ si } ||z - x|| < \frac{1}{1 + ||y||},$$

es decir, $y \circ z \in Q$ si $||z - x|| < \frac{1}{1+||y||}$. Así,

$$[(y \circ z)' \circ y] \circ z = (y \circ z)' \circ (y \circ z) = 0,$$

por lo que $z \in Q_l$. Por lo tanto, Q_l es abierto. $\square$

Teorema 2.1 ([4])**.** *Sea A un álgebra normada. La función $\phi : Q \longrightarrow Q$ definida como $\phi(x) = x'$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Como para cada $x \in Q$, $\phi(\phi(x)) = \phi(x') = (x')' = x$, se tiene que $\phi(\phi(x)) = x$, así $\phi = \phi^{-1}$, así ϕ es biyectiva, por lo que, es suficiente demostrar que ϕ es continua, es decir, hay que ver que si $a \in Q$, entonces $\lim_{b\to a} \phi(b) = \phi(a)$.
Notemos que

$$\phi(a) - \phi(b) = a' - b' = a' \circ 0 - 0 \circ b' = a \circ (b \circ b') - (a' \circ a) \circ b'$$

$$= (a' \circ b) \circ b' - (a' \circ a) \circ b' = (a' + b - a'b) \circ b' - (a' + a - a'a) \circ b'$$

$$= a'+b-a'b+b'-(a'+b-a'b)b'-[(a'+a-a'a+b')-(a'+a-a'a)b']$$

$$= a'+b-a'b+b'-a'b'-bb'+a'bb'-a'-a+a'a-b'+a'b'+ab'-a'ab'$$

$$= (b-a) - a'(b-a) - (b-a)b' + a'(b-a)b'.$$

Así,

$$\phi(a) - \phi(b) = (b-a) - a'(b-a) - (b-a)b' + a'(b-a)b'. \quad (2.2)$$

De 2.2 se tiene que

$$||\phi(a) - \phi(b)|| = ||(b-a) - a'(b-a) - (b-a)b' + a'(b-a)b|| \leq$$

$$||b-a|| + ||a'(b-a)|| + ||(b-a)b'|| + ||a'(b-a)b'|| \leq$$

$$||b-a|| + ||a'||||b-a|| + ||b-a||||b'|| + ||a'||||b-a||||b'|| =$$

$$||b-a||(1 + ||a'|| + ||b'|| + ||a'||||b'||).$$

Así,

$$||\phi(a) - \phi(b)|| \leq ||b-a||(1 + ||a'|| + ||b'|| + ||a'||||b'||) \quad (2.3)$$

Como $||b'|| - ||a'|| \leq ||\phi(b) - \phi(a)||$, entonces $||b'|| \leq ||a'|| + ||\phi(b) - \phi(a)||$, entonces de (2.3) se tiene que

$$||\phi(b)-\phi(a)|| \leq ||b-a||(1+2||a'||+||b'-a'||+||a'||^2+||a'||||b'-a'||)$$

$$= ||b-a||((||a'||+1)^2 + ||b'-a'||(1+||a'||))$$

$$= ||b-a||(||a'||+1)^2 + ||b-a||||b'-a'||(1+||a'||),$$

entonces

$$||b' - a'|| - ||b - a||||b' - a'||(1 + ||a'||) \leq ||b - a||(1 + ||a'||)^2,$$

de aquí que

$$||b' - a'||(1 - ||b - a||(1 + ||a'||)) \leq ||b - a||(1 + ||a'||)^2.$$

Por lo tanto, si

$$||h|| < \frac{1}{1 + ||a'||},$$

entonces

$$||\phi(b) - \phi(a)|| \leq \frac{||b - a||(1 + ||a'||)^2)}{1 - ||b - a||(1 + ||a'||)},$$

de aquí que si $b \longrightarrow a$, se tiene que $\phi(b) \longrightarrow \phi(a)$. Por lo tanto, ϕ es un homeomorfismo. □

Análogamente al Teorema 2.1, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2 ([4]). *Sea A un álgebra de Banach con identidad* 1. *La función $\phi : InvA \longrightarrow InvA$ definida como*

$$\phi(x) = x^{-1}$$

es un homeomorfismo.

Para una demostración, ver [4].

Proposición 2.3. *Sea A un álgebra con identidad $1 \in A$, $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces $\lambda 1 - x$ es invertible en A, si y sólo si $\lambda^{-1}x$ es cuasi-regular.*

Demostración. $\longrightarrow$] Supongamos que $\lambda 1 - x$ es invertible en A, definimos

$$w := -x(\lambda 1 - x)^{-1} \in A,$$

entonces se cumple que

$$\lambda^{-1}x \circ w = \lambda^{-1}x \circ -x(\lambda 1 - x)^{-1} = 0$$

y

$$w \circ \lambda^{-1}x = -x(\lambda 1 - x)^{-1} \circ \lambda^{-1}x = 0.$$

Por lo tanto, $\lambda^{-1}x$ es cuasi-regular.

$\longleftarrow$] Supongamos que $\lambda^{-1}x$ es cuasi-regular, entonces existe $y \in A$ tal que

$$\lambda^{-1}x \circ y = y \circ \lambda^{-1}x = 0.$$

Se tiene que,

$$(\lambda 1 - x)\frac{1}{\lambda}(1-y) = \lambda(1-\lambda^{-1}x)\frac{1}{\lambda}(1-y)$$

$$= (1-\lambda^{-1}x)(1-y) = 1 - \lambda^{-1}x \circ y = 1$$

y

$$\frac{1}{\lambda}(1-y)(\lambda 1 - x) = \frac{1}{\lambda}(1-y)\lambda(1-\lambda^{-1}x)$$

$$= (1-y)(1-\lambda^{-1}x) = 1 - y \circ \lambda^{-1}x.$$

Por lo tanto,

$$(\lambda 1 - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(1-y).$$

Así, $(\lambda 1 - x)^{-1}$ existe en A.

$\square$

2.3. El dual de un operador lineal acotado en un espacio de Banach

Definición 2.7. *Definimos el adjunto de $T \in B[X,Y]$, como el operador $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ definido como sigue, para cada $y^* \in Y^*$ y $x \in X$,*

$$T^*(y^*)(x) := y^*(T(x)).$$

Proposición 2.4. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in B[X,Y]$, entonces*

1. $T^* \in L[Y^*, X^*]$,
2. $T^* \in B[Y^*, X^*]$,
3. $||T|| = ||T^*||$.

Demostración. 1. Sean $y_1^*, y_2^* \in Y^*$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} T^*(\alpha y_1^* + y_2^*)(x) &= (\alpha y_1^* + y_2^*)(T(x)) = \alpha y_1^*(T(x)) + y_2^*(T(x)) \\ &= \alpha T^*(y_1^*)(x) + T^*(y_2^*)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T^*(\alpha y_1^* + y_2^*) = \alpha T^*(y_1^*)(x) + T^*(y_2^*),$$

así $T^* \in L[Y, X]$.

2. $||T^*(y^*)|| = \sup_{||x||=1} |T^*(y^*)(x)| = \sup_{||x||=1} |y^*(T(x))| \leq \sup_{||x||=1} ||y^*||||T(x)|| = ||y^*|| \sup_{||x||=1} ||T(x)|| = ||y^*||||T||$. Por lo tanto, $T^* \in B[Y^*, X^*]$ y $||T^*|| \leq ||T||$.

3.

$$||T^*|| = \sup_{||y^*||=1} ||T^*(y^*)|| = \sup_{||y^*||=1} (\sup_{||x||=1} |T^*(y^*)(x)|)$$

$$= \sup_{||x||=1} (\sup_{||y^*||=1} |y^*(T(x))|) = \sup_{||x||=1} ||T(x)|| = ||T||.$$

Por lo tanto, $||T|| = ||T^*||$. □

Teorema 2.3 ([4])**.** *Sean A un álgebra normada y $x \in A$, consideremos*

$$D(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda x \text{ es cuasi-regular } \}.$$

Entonces la función $\varphi : int(D(x)) \longrightarrow A$ definida como $\varphi(\lambda) = (\lambda x)'$ es analítica.

Demostración. Sea $\mu \in int(D(x))$, entonces

$$\varphi(\lambda) - \varphi(\mu) = (\lambda x)' - (\mu x)' =$$

$$(\mu x - \lambda x) - (\lambda x)'(\mu x - \lambda x) - (\mu x - \lambda x)(\mu x)' + (\lambda x)'(\mu x - \lambda x)(\mu x)'$$
$$= (\mu - \lambda)(-x + (\lambda x)'x + x(\mu x)' - (\lambda x)'x(\mu x)')$$

De aquí que,

$$\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)}{\lambda - \mu} = -x + (\lambda x)'x + x(\mu x)' - (\lambda x)'x(\mu x)'.$$

Usando el Teorema 2.1, se tiene que φ es analítica. □

Teorema 2.4 ([4]). *Sean A un álgebra normada y $x^* \in A^*$, entonces la función $\phi(\lambda) := x^*(\varphi(\lambda))$ es analítica, donde ϕ es como en el Teorema 2.3.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 1.1. □

Definición 2.8. *Sea A un álgebra con identidad $1 \in A$ y $x \in A$. El conjunto resolvente de x es*

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - x \in InvA\}.$$

El espectro de x denotado por $\sigma(x)$ es $\mathbb{C} \setminus \rho(x)$.

Teorema 2.5 ([4]). *Sea A un álgebra normada con 1. Entonces para cada $x \in A$, $\sigma(x) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x \in A$, si $\sigma(x) = \emptyset$, entonces $\lambda 1 - x$ es invertible para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, en particular si $\lambda = 0$, se obtiene que x es invertible, así $x \neq 0$. Notemos que para cada $\lambda \neq 0$, se tiene que

$$(1 - \lambda x)(1 - (\lambda x)') = 1 - (\lambda x) \circ (\lambda x)' = 1 \text{ y } (1 - (\lambda x)')(1 - \lambda x)$$

$$= 1 - (\lambda x)' \circ (\lambda x) = 1.$$

De aquí que,

$$(1 - \lambda x)(1 - (\lambda x)') = (1 - (\lambda x)')(1 - \lambda x) = 1, \; \textit{para cada } \lambda \neq 0.$$

Así,

$$\lambda(\lambda^{-1}1 - x)(1 - (\lambda x)') = (1 - (\lambda x)'\lambda(\lambda^{-1}1 - x) = 1.$$

Por lo que,

$$1 - (\lambda x)' = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}1 - x)^{-1}.$$

Por el Teorema 2.2, se tiene que

$$\lambda^{-1}(\lambda^{-1}1 - x)^{-1} \longrightarrow 0 \text{ si } \lambda \longrightarrow \infty,$$

es decir,

$$(\lambda x)' \longrightarrow 1 \; si \; \lambda \longrightarrow \infty.$$

De aquí que,

$$g(\lambda) = ||(\lambda x)'|| = ||\varphi(\lambda)|| \text{ es acotada.}$$

Por otro lado, si $x^* \in A,^*$ entonces sabemos que la función $\phi(\lambda) = x^*((\lambda x)')$ es una función entera, además ϕ es una función acotada, ya que

$$|\phi(\lambda)| = |x^*((\lambda x)')| \leq ||x^*||||(\lambda x)'|| = ||x^*||||g(\lambda)||. \tag{2.4}$$

Por el Teorema 1.6 se tiene que la función ϕ es constante y de (2.4) se tiene que $\phi(0) = 0$, entonces $\phi(0) = x^*(\varphi(1)) = x^*(x') = 0$, para cada $x^* \in A,^*$ entonces $x' = 0$, por lo tanto, $x = 0$, lo cual es una contradicción, ya que $x \neq 0$. Por lo tanto, $\sigma(x) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 2.6 ([4]). *Si A es un álgebra de Banach y $x \in A$, entonces $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C}$ es compacto.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $||x|| < |a|$, entonces $||a^{-1}x|| < 1$, entonces por la Proposición 2.6, se tiene que $a^{-1}x$ es cuasi-regular, pero por la Proposición 2.3 se tiene que $a \in R(x)$, por lo que $a \notin \sigma(x)$. Por lo tanto, $\{a \in \mathbb{C} | ||x|| < |a|\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, es decir, $\sigma(x) \subseteq \{a \in \mathbb{C} | |a| \leq ||x||\}$. Por lo tanto, $\sigma(x)$ es un conjunto acotado. Veamos que $\sigma(x)$ es un conjunto cerrado, es decir, que $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es un conjunto abierto.
Sea $y \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, entonces $y - x \in G$ y como G es abierto entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(y - x, r) \subseteq G,$$

es decir,

$$\text{si } |z - (y - x)| < r, \text{ entonces } z \in G. \tag{2.5}$$

Veamos que, $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C} \setminus B(y, r)$.

Sea $w \in \sigma(x)$, entonces $w - x$ no es regular, es decir, $w - x \notin G$, entonces de (2.5) se tiene que $r \leq |w - x - (y - x)|| = |w - y|$, así $r \leq |w - y|$. Por lo tanto, $w \in \mathbb{C} \setminus B(y, r)$, es decir, $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C} \setminus B(y, r)$.
Así, $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es un conjunto abierto, es decir, $\sigma(x)$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $\sigma(x)$ es un conjunto compacto. $\square$

2.4. Conjuntos espectrales

En lo que sigue, suponemos que X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$.

Definición 2.9. *Sea $T \in B(X)$. Un conjunto $\Lambda \subseteq \sigma(T)$ se llama un conjunto espectral para T si tanto Λ como $\sigma(T)\setminus\Lambda$ son cerrados en $\mathbb{C}$.*

Proposición 2.5 ([2])**.** *Sea $T \in B(X)$. Entonces*

1. *$\Lambda \subseteq \sigma(T)$ es un conjunto espectral para T si y solo si Λ es cerrado y abierto en la topología relativa de $\sigma(T)$.*

2. *$\{\lambda\} \subseteq \sigma(T)$ es un conjunto espectral para T si y solo si λ es un punto aislado de $\sigma(T)$.*

Demostración. 1. $\longrightarrow]$ Como $\Lambda \subseteq \sigma(T)$, entonces $\Lambda = \sigma(T) \cap \Lambda$ y ya que Λ es cerrado se tiene que Λ es cerrado en $\sigma(T)$. También, $\sigma(T) \setminus \Lambda$ es cerrado, entonces $\mathbb{C} \setminus (\sigma(T) \setminus \Lambda)$ es abierto y

$$\sigma(T) \cap [\mathbb{C} \setminus (\sigma(T) \setminus \Lambda)] = \Lambda,$$

se tiene que Λ es abierto en $\sigma(T)$.
$\longleftarrow]$ Si Λ es cerrado y abierto en $\sigma(T)$, entonces existen $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $V \subseteq \mathbb{C}$ cerrado tal que

$$\Lambda = \sigma(T) \cap U \tag{2.6}$$

$$\Lambda = \sigma(T) \cap V \tag{2.7}$$

De (2.7) se tiene que Λ es cerrado en $\mathbb{C}$, ya que Λ es intersección de dos conjuntos cerrados, también $\sigma(T) \setminus \Lambda$ es un conjunto cerrado, ya que por (2.6) y $\mathbb{C} \setminus (\sigma(T) \setminus \Lambda) = (\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) \cup U$, que es abierto al ser unión de dos conjuntos abiertos, $\sigma(T) \setminus \Lambda$ es cerrado, por lo tanto, Λ es un conjunto espectral para T.

2. $\longrightarrow]$ Si $\{\lambda\}$ es un conjunto espectral para el operador T se tiene que $\{\lambda\}$ y $\sigma(T) \setminus \{\lambda\}$ son conjuntos cerrados, entonces $\mathbb{C} \setminus (\sigma(T) \setminus \{\lambda\})$ es abierto en $\mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(T) \setminus \{\lambda\})$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\lambda, \epsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus (\sigma(T) \setminus \{\lambda\})$ y además se tiene que $\sigma(T) \cap B(\lambda, \epsilon) = \{\lambda\}$, así λ es un punto aislado de $\sigma(T)$.

$\longleftarrow]$ Como λ es un punto aislado de $\sigma(T)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\lambda, \epsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$, de aquí que $\{\lambda\}$ es un abierto en $\sigma(T)$ y como cada singular es cerrado en $\sigma(T)$ se tiene que $\{\lambda\}$ es un conjunto espectral para T. $\square$

Ahora algunas definiciones que nos serán útiles en el tratamiento de integrales.

Definición 2.10.
- *Un dominio elemental de Cauchy es un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado tal que su frontera es la unión de un número finito de curvas de Jordan que no se intersectan.*
- *Un dominio de Cauchy es una unión finita de dominios elementales de Cauchy que tienen clausuras disjuntas.*

Teorema 2.7 ([2]). *Si $E \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, E un conjunto compacto y Ω abierto, entonces existe un dominio de Cauchy D tal que $E \subseteq D \subseteq Cl(D) \subseteq \Omega$, donde $Cl(D)$ es la clausura del conjunto D.*

Demostración. Sea $\delta := dist(E, \mathbb{C}\backslash\Omega)$, como E es compacto y $\mathbb{C}\backslash\Omega$ cerrado se tiene que $\delta > 0$, también para cada $l, j \in \mathbb{Z}$ definimos $z_{l,j} := \frac{(l+ij)\delta}{3}$ y consideremos $B_{l,j} := B(z_{l,j}, \frac{2\delta}{3})$. Como $\mathbb{C} = \displaystyle\bigcup_{l,j\in\mathbb{Z}} B_{l,j}$ y E es compacto, existen $k = 1, \ldots n$ tales que $E \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_{l_k,j_k}$ y $B_{l_k,j_k} \cap E \neq \emptyset$, para cada $k = 1, \ldots, n$ definimos $D := \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_{l_k,j_k}$, se tiene que $E \subseteq D$, veamos que $Cl(D) \subseteq \Omega$. Sea $z \in Cl(D)$, entonces existe $w \in D$ tal que $|z-w| < \frac{\delta}{3}$, como $w \in D$, existe $k = 1, \ldots, n$ tal que $w \in B_{l_k,j_k}$, es decir, $|w - z_{l_k,j_k}| < \frac{2\delta}{3}$, entonces

$$|z - z_{l_k,j_k}| \leq |z - w| + |w - z_{l_k,j_k}| < \delta,$$

así $z \notin \mathbb{C} \setminus \Omega$, por lo que $z \in \Omega$. Por lo tanto, $Cl(D) \subseteq \Omega$.

También se tiene que $Fr(D) \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} Fr(B_{l_k,j_k})$, además la frontera de D dentro de cada cuadrado de la cuadrícula definida por los centros z_{l_k,j_k}, $k = 1, \ldots, n$ se compone de un arco de círculo o de dos arcos de círculos que tienen un punto final común o un par disjunto de estos dos arcos. Por lo tanto, cada componente conexa de D es un dominio elemental de Cauchy, así D es un dominio de Cauchy. □

En la Definición 2.10, no se dice nada acerca de la orientación de las curvas de Jordan involucradas, si se consideran con orientación positiva, se tiene la siguiente terminología.

Definición 2.11. *Sea D un dominio de Cauchy. Si cada curva de Jordan involucrada en la frontera de D es orientada de tal forma que los puntos de D se encuentren a la izquierda cuando se traza la curva, entonces la frontera orientada C, se llama contorno de Cauchy.*

Definición 2.12.

- *El interior de un contorno de Cauchy C determinado por un dominio de Cauchy D se define como $int(C) := D$.*
- *El exterior de un contorno de Cauchy C determinado por un dominio de Cauchy D se define como $ext(C) := \mathbb{C}\backslash(D \cup C)$.*

Definición 2.13. *Sea C un contorno de Cauchy. Si $E, \widetilde{E} \subseteq \mathbb{C}$ son tales que $E \subseteq int(C)$ y $\widetilde{E} \subseteq ext(C)$, decimos que C separa E de $\widetilde{E}$.*

Corolario 2.1. *Sean $E, \widetilde{E} \subseteq \mathbb{C}$, E compacto y $\widetilde{E}$ cerrado. Si $E \cap \widetilde{E} = \emptyset$, entonces existe un contorno de Cauchy C que separa E de $\widetilde{E}$. Más aún, existe un contorno de Cauchy que separa $E \cup C$ de $\widetilde{E}$ y existe un contorno de Cauchy que separa E de $\widetilde{E} \cup C$.*

Demostración. Como $E \cap \widetilde{E} = \emptyset$, entonces $E \subseteq \mathbb{C}\backslash\widetilde{E}$, por el Teorema (2.7) se tiene que existe un dominio de Cauchy D tal que $E \subseteq D \subseteq Cl(D) \subseteq \mathbb{C}\backslash\widetilde{E}$, de aquí que $Cl(D) \cap \widetilde{E} = \emptyset$. Sea $C := Fr(D)$ orientada, entonces $E \subseteq int(C)$ y $\widetilde{E} \subseteq \mathbb{C}\backslash(D \cup C) = ext(C)$, así C es un contorno de Cauchy que separa E de $\widetilde{E}$. Como $E \cup C$ es compacto y $(E \cup C) \cap \widetilde{E} = \emptyset$, reemplazando E por $E \cup C$ en el argumento anterior, obtenemos un contorno de Cauchy que separa $E \cup C$ de $\widetilde{E}$. También, como $\widetilde{E} \cup C$ es cerrado y $E \cap (\widetilde{E} \cup C) = \emptyset$, reemplazamos $\widetilde{E}$ por $\widetilde{E} \cup C$, obtenemos un contorno de Cauchy que separa E de $\widetilde{E} \cup C$. □

Notemos que por el Corolario 2.1, para cada conjunto espectral Λ, existe un contorno de Cauchy que separa Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$. Si Λ es un conjunto espectral para T, el conjunto de todos los contornos de Cauchy que separan Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$ se denota como $C(T, \Lambda)$.

2.5. Cálculo operacional

En lo que sigue, usaremos el cálculo operacional para obtener una representación integral de las potencias de un operador lineal acotado, esta representación nos será útil cuando tratemos con la inversa de Drazin.

Notemos que dado $T \in B(X)$ se tiene que,

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} | (z - T) \in InvB(X)\},$$

así es posible definir $R : \rho(T) \longrightarrow B(X)$ definida como

$$R(z) := (zI - T)^{-1}. \tag{2.8}$$

La función (2.8) se llama función resolvente de T.

Lema 2.1 ([14])**.** *Sea $T \in B(X)$. Si $|z| > \limsup ||T^n||^{\frac{1}{n}}$, entonces*

$$(z - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} T^{n-1},$$

donde la convergencia es en la norma de $B(X)$.

Demostración. Existe $\delta < 1$ tal que

$$||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq \delta |z|, \text{ para cada } n \geq k.$$

Definimos $B := z^{-1}T$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||B^n|| = \sum_{n=0}^{\infty} ||z^{-n}T^n|| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{||T^n||}{|z|^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < \infty. \tag{2.9}$$

También se cumple que

$$I - B^n = (I - B) \sum_{k=0}^{n-1} B^k = \sum_{k=0}^{n-1} B^k (I - B), \text{ donde } B^0 = I.$$

De 2.9 se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n-1} B^k \longrightarrow (I - B)^{-1},$$

ya que

$$||B^n|| = ||(I - B^n) - I|| \longrightarrow 0 \ si \ n \to \infty.$$

Como $z - T = z(I - B)$, se tiene que

$$(z - T)^{-1} = z^{-1}(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}T^k = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}T^{k-1}.$$

□

Teorema 2.8 ([14])**.** *Sean $T \in B(X)$ y C cualquier círculo con centro en el origen con radio mayor a $||T||$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$T^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^n(z - T)^{-1}dz, \tag{2.10}$$

donde la curva se traza orientada positivamente.

Demostración. Por el lema 2.1 se tiene que

$$\int_C z^n(z - T)^{-1}dz = \int_C z^n \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}T^{k-1}dz$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} T^{k-1}\int_C z^{n-k}dz = 2\pi i T^n,$$

ya que

$$\int_C z^{n-k}dz = \begin{cases} 0 & n - k \neq -1 \\ 2\pi i & n - k = -1, \end{cases}$$

de aquí que

$$T^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^n(z - T)^{-1}dz, \tag{2.11}$$

□

Se puede demostrar la independencia de la trayectoria siempre y cuando los integrandos sean analíticos, de la misma forma que en variable compleja. Como la función resolvente $R(z) = (z-T)^{-1}$ es analítica en $\rho(T)$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.9 ([14])**.** *Sea C cualquier curva cerrada que contenga a $\sigma(T)$ en su interior, entonces se cumple la igualdad (2.10).*

Definición 2.14. *Dado $T \in B(X)$, se define el radio espectral de T como*

$$r_\sigma(T) := \inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

El radio espectral de un operador lineal acotado es de utilidad en muchos resultados, antes necesitamos el siguiente:

Lema 2.2 ([14])**.** *Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lambda^n \in \sigma(T^n)$.*

Demostración. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^n \in r(T^n)$, definimos

$$B := T^{n-1} + \lambda T^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1},$$

se tiene que

$$(\lambda - T)B(\lambda^n - T^n)^{-1} = B(\lambda^n - T^n)(\lambda - T) = I,$$

donde I es el operador identidad, así $\lambda \in \rho(T)$, lo cuál es una contradicción, ya que $\lambda \in \sigma(T)$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lambda^n \in \sigma(T^n)$. $\square$

Observaciones:

1. Del Teorema 2.6, si $|\lambda| > ||T||$, entonces $\lambda \in \rho(T)$.

2. Del Lema 2.2, si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^n \in \sigma(T^n)$, de aquí que

$$|\lambda^n| \leq ||T^n||, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

ya que si existiera $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda^n| > ||T^n||$, entonces del Lema 2.2 se tiene que $\lambda^n \in \rho(T^n)$, lo cual no es posible. De aquí que (3.2) se sostiene para cada $n \in \mathbb{N}$, así,

$$|\lambda| \leq ||T^n||^{\frac{1}{n}}, \lambda \in \sigma(T), n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que,

$$|\lambda| \leq r_\sigma(T) \text{ para cada } \lambda \in \sigma(T).$$

Por lo tanto,

$$\max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| \leq r_\sigma(T). \tag{2.13}$$

El siguiente teorema nos da formas equivalentes de escribir el radio espectral de un operador, algunos conocen a este teorema como fórmula del radio espectral.

Teorema 2.10 ([14])**.** *Dado $T \in B(X)$, se tiene que*

1. $r_\sigma(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

2. $\lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = r_\sigma(T)$.

Demostración. Sea $m = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ y $\epsilon > 0$, sea C un círculo con centro en el origen de radio $a = m + \epsilon$, entonces de (2.10) podemos escribir

$$T^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^n (z-T)^{-1} dz.$$

Notemos que,

$$||T^n|| = \frac{1}{2\pi i} \sup_{||x|| \leq 1} \left|\left| \int_C z^n (z-T)^{-1}(x) dz \right|\right|,$$

como

$$||z^n (z-T)^{-1}(x)|| \leq |z^n| \cdot ||(z-T)^{-1}|| \cdot ||x|| \leq |z|^n M \leq a^n M,$$

donde $||x|| \leq 1$ y $M = \max_{z \in C} ||(z-T)^{-1}||$, el cual existe ya que $(z-T)^{-1}$ es continua en C.

De aquí que,

$$||T^n|| \leq \frac{a^n M}{2\pi} 2\pi a = a^{n+1} M.$$

Por lo tanto,

$$||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq a a^{\frac{1}{n}} M^{\frac{1}{n}},$$

así

$$r_\sigma(T) = \inf_{n \in \mathbb{N}} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq \liminf ||T^n||^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \limsup ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq m \leq r_\sigma(T),$$

donde la última desigualdad ya se vio en 2.13.

□

Teorema 2.11 ([14]). *Si $|z| > r_\sigma(T)$, entonces*

$$(z - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} T^{n-1},$$

donde la convergencia es en la norma de $B(X)$.

Demostración. Se sigue del Teorema 2.10 y el Lema 2.1. □

Lema 2.3 (Lema de convergencia). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R. Entonces*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ converge absolutamente para todo z con $|z| < R$.*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ diverge para cada z con $|z| > R$.*

Sea $b > r_\sigma(T)$ y $f(z)$ una función con valores en $\mathbb{C}$, analítica en $|z| < b$. Expresemos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, |z| < b.$$

Definimos

$$f(T) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k. \tag{2.14}$$

$f(T)$ esta bien definido, ya que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot ||T^k|| < \infty. \tag{2.15}$$

Se cumple (2.15), ya que si $c \in \mathbb{R}$ es cualquiera tal que $r_\sigma(T) < c < b$, entonces para $\epsilon = c - r_\sigma(T) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } n \geq N, \text{ entonces } \left| ||T^n||^{\frac{1}{n}} - r_\sigma(T) \right| < \epsilon.$$

De aquí que,

$$\text{si } n \geq N, \text{ entonces } ||T^n||^{\frac{1}{n}} < c.$$

Y por el Lema de convergencia se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| c^k < \infty.$$

Entonces por el Teorema (2.9) se tiene que

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_C z^k (z-T)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C z^k (z-T)^{-1} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k (z-T)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(z-T)^{-1} dz, \quad (2.16)$$

donde C es cualquier círculo con centro en el origen de radio r, donde $r_\sigma(T) < r < b$.

Teorema 2.12 ([14]). *Si $f(z)$ es analítica en una vecindad de $\sigma(T)$, entonces*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

Demostración. Lo que hay que demostrar es que,

$$\mu \in \sigma(f(T)) \leftrightarrow \mu = f(\lambda), \text{ para algún } \lambda \in \sigma(T).$$

$\longrightarrow$] Por contrarrecíproca.
Si $f(\lambda) \neq \mu$ para cada $\lambda \in \sigma(T)$, entonces la función $f(z) - \mu$ es analítica en una vecindad de $\sigma(T)$ y $f(z) - \mu \neq 0$ en esa vecindad. Por lo tanto, $f(T) - \mu$ tiene una inversa en $B(X)$.

$\longleftarrow$] Si $\mu = f(\lambda)$ para algún $\lambda \in \sigma(T)$, entonces la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-\mu}{z-\lambda} & z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & z = \lambda \end{cases}$$

es analítica en una vecindad de $\sigma(T)$ y $g(z)(z-\lambda) = f(z) - \mu$, así

$$g(T)(T-\lambda) = (T-\lambda)g(T) = f(T) - \mu.$$

Si $\mu \in \varphi(f(T))$, entonces

$$h(T)(T-\lambda) = (T-\lambda)h(T) = I,$$

donde $h(T) = g(T)(f(T)-\mu)^{-1}$. De aquí que $\lambda \in \varphi(T)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mu \in \sigma(f(T))$. $\square$

El siguiente Teorema implica que la función resolvente es analítica.

Teorema 2.13 ([14])**.** *Si $\lambda, \mu \in \rho(T)$, entonces*

$$(\lambda - T)^{-1} - (\mu - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-1}. \tag{2.17}$$

Mas aún, si $|\lambda - \mu| \cdot ||(\mu - T)^{-1}|| < 1$, entonces

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n-1}(\mu - T)^{-n} \tag{2.18}$$

y la serie converge en $B(X)$.

Demostración. Sea $x \in X$, definimos $u = (\lambda - T)^{-1}(x)$, de aquí que $(\lambda - T)u = x$ y

$$(\mu - T)u = x + (\mu - \lambda)u. \tag{2.19}$$

Aplicando $(\mu - T)^{-1}$ a (2.19), se tiene que

$$u = (\mu - T)^{-1}(x) + (\mu - \lambda)(\mu - T)^{-1}u.$$

Sustituyendo por u y notando que

$$(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-1} = (\mu - T)^{-1}(\lambda - T)^{-1},$$

obtenemos (2.17).

De (2.17) se tiene que

$$(\lambda - T)^{-1} = (\mu - T)^{-1} + (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-1}$$

$$= (\mu - T)^{-1} + (\mu - \lambda)[(\mu - T)^{-1} + (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-1}](\mu - T)^{-1}$$

$$= (\mu - T)^{-1} + (\mu - \lambda)(\mu - T^2) + (\mu - \lambda)^2(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-2}.$$

Continuando de esta forma se tiene que

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{k} (\mu - \lambda)^{n-1}(\mu - T)^{-n} + (\mu - \lambda)^n(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-n}.$$

Como

$$||(\mu - \lambda)^n(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-n}|| \leq |\lambda - \mu|^n \cdot ||(\lambda - T)^{-1}|| \cdot ||(\mu - T)^{-1}||^n,$$

el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 si n tiende a ∞. Entonces se obtiene que

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n-1} (\mu - T)^{-n}.$$

Notemos que la serie (2.18), converge en $B(X)$, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu - \lambda|^n ||(\mu - T)^{-1}||^n < \infty$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n-1} (\mu - T)^{-n} = \frac{1}{|\mu - \lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu - \lambda|^n ||(\mu - T)^{-1}||^n < \infty.$$

□

La igualdad (2.17) se conoce como Identidad del Resolvente.

Proposición 2.6 ([2]). *Sea $T \in B(X)$. La función resolvente $R : \rho(T) \longrightarrow B(X)$, definida como $R(z) = (z - T)^{-1}$ es analítica en $\rho(T)$, para cada $z_0 \in \rho(T)$, se tiene que*

$$R'(z_0) = -R(z_0)^2.$$

Demostración. Sea $z_0 \in \rho(T)$, del Teorema 2.13 de la ecuación (2.18) se tiene que si

$$|z - z_0| \cdot ||R(z_0)|| < 1, \text{ entonces } R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_0 - z)^{n-1} R(z_0)^n,$$

de aquí que

$$R(z) - R(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} (z_0 - z)^n R(z_0)^n. \tag{2.20}$$

Por lo que, si $|z - z_0| \cdot ||R(z_0)|| < 1$, entonces por la Identidad del Resolvente y la igualdad (2.20),

$$\left|\left| \frac{R(z) - R(z_0)}{z - z_0} + R(z_0)^2 \right|\right| = || - R(z)R(z_0) + R(z_0)^2||$$

$$= || - R(z_0)R(z) + R(z_0)^2|| = || - R(z_0)(R(z) - R(z_0))||$$

$$= ||R(z_0)(R(z) - R(z_0))|| = \left|\left| R(z_0) \sum_{n=2}^{\infty} (z_0 - z)^{n-1} R(z_0)^n \right|\right| =$$

$$\left|\left| R(z_0)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (z_0 - z)^n R(z_0)^n \right|\right| \leq ||R(z_0)||^2 \cdot \left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} (z_0 - z)^n R(z_0)^n \right|\right| \leq$$

$$||R(z_0)||^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |z - z_0|^n \cdot ||R(z_0)^n|| \leq ||R(z_0)||^2 \sum_{n=1}^{\infty} (|z - z_0| \cdot ||R(z_0)||)^n$$

$$= \frac{||R(z_0)||^3 \cdot |z - z_0|}{1 - |z - z_0| \cdot ||R(z_0)||}$$

la última igualdad ocurre por la serie geométrica.

De aquí se tiene que R es analítica en z_0. □

En lo que sigue, definiremos un tipo especial de transformación.

Definición 2.15. *Sean X un espacio lineal y $P : X \longrightarrow X$ una transformación lineal. Decimos que P es una proyección si*

$$P^2 = P.$$

Por la Proposición 2.6 se tiene que la función resolvente $R(z)$ es analítica en $\rho(T)$, entonces por la Proposición 1.1 se tiene que $R(z)$ es continua en $\rho(T)$, así para cada $C \in C(T, \Lambda)$ se tiene que

$$\int_C R(z)dz$$

tiene sentido.

Definición 2.16. *Para un conjunto espectral Λ, $T \in B(X)$ y $C \in C(T, \Lambda)$, definimos*

$$P(T, \Lambda) := -\frac{1}{2\pi i} \int_C R(z)dz,$$

$P(T, \Lambda)$ se llama proyección espectral asociada con T y Λ. También, $R(P(T, \Lambda))$ se llama subespacio espectral asociado con T y Λ.

Como cualquier $\tilde{C} \in C(T, \Lambda)$ es homotópico a C en $\rho(T)$, el operador lineal acotado $P(T, \Lambda)$ no depende de la elección de $C \in C(T, \Lambda)$.

En la Definición 2.16 hemos usado la palabra proyección, esto es así de acuerdo con la Definición 2.15.

Proposición 2.7. *Para un conjunto espectral Λ para $T \in B(X)$ y $C \in C(T, \Lambda)$, se tiene que*

$$P(T, \Lambda) := -\frac{1}{2\pi i} \int_C R(z) dz,$$

es una proyección.

Para una demostración de este hecho, ver [2].

Capítulo 3

La inversa Drazin

3.1. Inversas generalizadas

El concepto de inversa generalizada se ha estudiado en estructuras algebráicas como anillos y álgebras, así como a casos más particulares de estos, como lo son las matrices sobre algún campo y el espacio de operadores lineales acotados, nosotros estaremos enfocados en los operadores lineales acotados.

Definición 3.1.

- *Sean* X, Y *espacios de Banach y* $A \in B[X,Y]$, *si existe* $B \in B[Y,X]$ *tal que* $ABA = A$, *decimos que* B *es una inversa generalizada interna de* A, *el operador* A *es regular interno.*
  Si $A \neq 0$, *decimos que* A *es una inversa generalizada externa de* B, *en este caso* B *es regular externa.*
- *Un operador* $D \in B[Y,X]$ *es una inversa generalizada reflexiva de* A *si* D *es una inversa generalizada interna y externa de* A.

3.2. Inversa de Drazin

Estamos interesados en una inversa generalizada externa llamada inversa de Drazin, la cuál definimos a continuación.

Definición 3.2. *Sean* X *un espacio de Banach y* $T \in B(X)$, *decimos que un operador* $U \in B(X)$ *es la inversa de Drazin de* T

si

$$UTU = U, UT = TU \text{ y } T^{n+1}U = T^n, \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Al mínimo de tales $n \in \mathbb{N}$, se le llama el índice de Drazin de T, se denota como $ind_D(T)$.

3.3. Algunas propiedades de la inversa de Drazin

Ahora veremos algunas propiedades de las inversas generalizadas, no demostraremos todas las propiedades mencionadas, ya que no es el objetivo principal de esta tesis, pero las mencionamos para resaltar la importancia del concepto, pondremos especial atención a la inversa de Drazin.

Teorema 3.1. *Sea $T \in B(X)$. Si T tiene inversa de Drazin, ésta es única.*

Para una demostración de este hecho ver [5]. Si la inversa de Drazin de T existe, ésta se denota por T^D y T se dice Drazin invertible.

En general la inversa de Drazin no es reflexiva, pero se tiene la siguiente:

Proposición 3.1. *Sea $T \in B(X)$. Si $ind_D(T) = 1$, entonces T^D es reflexiva.*

Demostración. Por hipótesis,

$$T^2T^D = T \text{ y } T^DT = TT^D. \tag{3.1}$$

Usando (3.1), se tiene que

$$TT^DT = T^2T^D = T,$$

por lo que,

$$TT^DT = T.$$

Por lo tanto, T^D es reflexiva. □

Necesitamos la siguiente definición para el siguiente resultado.

Definición 3.3. *Sean Y, Z subespacios cerrados de X. Decimos que el par (Y, Z) es una descomposición de X si*

$$X = Y \oplus Z.$$

Cuando $X = Y \oplus Z$, para cada $x \in X$, existen únicos $x_1 \in Y$, $x_2 \in Z$ tales que $x = x_1 + x_2$.

Con esto en mente, no es difícil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *La función $P : X \longrightarrow X$ definida como $P(x) = x_1$ es una proyección.*

Como $R(P) = Y$ y $N(P) = Z$, decimos que P se proyecta sobre Y a lo largo de Z.

Lema 3.1. *Sea $T \in B(X)$. Un operador $U \in B(X)$ es inversa generalizada reflexiva de T, si y sólo si $X = R(T) \oplus N(T)$.*

Demostración. [$\longleftarrow$ Supongamos que, $X = R(T) \oplus N(T)$, consideremos la proyección P, que se proyecta sobre $R(T)$ a lo largo de $N(T)$. Definimos $Q := T|_{R(T)}$, como $N(Q) = \{0\}$, $R(Q) = R(T)$, se tiene que Q es biyectiva, además $Q \in B(X)$, por el Teorema del mapeo inverso, se tiene que existe $Q^{-1} \in B(R(T))$. Definimos $S := Q^{-1}P$, se tiene que

$$TST = T \ y \ STS = S,$$

con

$$ST = TS.$$

$\longrightarrow$] Supongamos que,

$$TST = T, STS = S \ y \ TS = ST.$$

Notemos que, TS es una proyección, ya que

$$(TS)^2 = TSTS = TS,$$

de aquí que

$$X = R(TS) \oplus N(TS),$$

además se puede ver que $R(TS) = R(T)$ y $N(TS) = N(T)$. Por lo tanto,

$$X = R(T) \oplus N(T).$$

$\square$

Teorema 3.2. *Sea $T \in B(X)$ con inversa generalizada reflexiva $S \in B(X)$ tal que $TS = ST$. Entonces $\rho(T) \setminus \{0\} = \{\frac{1}{\lambda} | \lambda \in \rho(S) \setminus \{0\}\}$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \rho(T) \setminus \{0\}$, por el Teorema 3.1 se tiene que

$$X = R(T) \oplus N(T),$$

también

$$(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T) = I,$$

donde $I : X \longrightarrow X$ es el operador identidad, de aquí que

$$TS = T(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)S = -\lambda T(\lambda I - T)^{-1}(\frac{1}{\lambda}TS - S) \quad (3.2)$$

Como para cada $x \in R(T)$, $TS(x) = x$ se tiene de (3.2) que,

$$-(\lambda I - T)^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - S)(x) = x \quad (3.3)$$

También, para cada $x \in N(T) = N(S)$, de (3.2) se tiene que,

$$(\frac{1}{\lambda}I - S)(x) = \frac{1}{\lambda}x,$$

es decir,

$$\lambda(\frac{1}{\lambda}I - S)(x) = x \quad (3.4)$$

Notemos que, como $ST = TS$ s tiene que $R(S) = R(T)$ y $N(S) = N(T)$, además

$$(\frac{1}{\lambda}I - S)R(T) \subseteq R(S) = R(T)$$

y

$$(\frac{1}{\lambda}I - S)N(T) \subseteq N(S) = N(T).$$

Del Teorema del mapeo inverso, (3.3) y (3.4), se tiene que, existen $(\frac{1}{\lambda}I - S)^{-1} \in B(R(T))$ y $(\frac{1}{\lambda}I - S)^{-1} \in B(N(T))$ para cada $\lambda \in \rho(T) \setminus \{0\}$.

De aquí que, $\frac{1}{\lambda} \in \rho(S) \setminus \{0\}$.

Para la otra contención se reemplaza S por T y T por S. $\square$

Lema 3.2. *Sea $T \in B(X)$ con inversa de Drazin T^D. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$,*

1. $T(T^D)^k = (T^D)^k T$
2. $T^K T^D = T^D T^k$

Demostración. Usando un argumento de inducción matemática se obtiene el resultado. □

Con el Teorema 3.2 se establece el siguiente:

Teorema 3.3. *Sea $T \in B(X)$ con inversa de Drazin T^D tal que $ind_D(T) = k$. Entonces $(T^D)^k$ es una inversa generalizada refle- xiva de T^k y $T^k(T^D)^k = (T^D)^k T^k$.*

Demostración. Con el Lema 3.2 y un argumento de inducción se verifica que $T^k(T^D)^k = (T^D)^k T^k$, también como $ind_D(T) = k$, se tiene que

$$(T^D)^k T^k (T^D)^k = (T^D)^{2k} T^k = [(T^D)^2 T]^k = (T^D T T^D)^k = (T^D)^k.$$

Para ver que,

$$T^k (T^D)^k T^k = T^k,$$

podemos dar un argumento de inducción sobre el $ind_D(T)$. □

Por último enunciamos el siguiente Teorema sin demostración, pero con propiedades importantes.

Teorema 3.4. *Sea $T \in B(X)$ Drazin invertible con $ind_D(T) = d \geq 1$, entonces*

1. $P(T, \{0\}) = I - TT^D$
2. $N(T^d) = N(T^D) = R(P(T, \{0\})$
3. $R(T^D) = N(P(T, \{0\}) = R(T^d)$
4. *T^D es Drazin invertible, $ind_D(T^D) = 1$, de hecho $(T^D)^D = TT^D T$.*

3.4. Ejemplo de un operador lineal acotado con inversa Drazin

Ahora veremos unos ejemplos de la inversa de Drazin para operadores lineales acotados.

Recordemos que $(l^1, ||.||)$ es un espacio de Banach, donde

$$l^1 := \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} | \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$$

y

$$||\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}|| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Ejemplo: Sea $a = \{\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ con $x_1 = 0$ y $0 < \epsilon \leq |a_n| \leq M$ para algunos $\epsilon, M > 0$. Para $x = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l^1$ definimos $D_a : l^1 \longrightarrow l^1$ como

$$D_a(x) := \{y_k x_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Consideremos $b = \{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\beta_k = 0$ si $k = 1$ y $\beta_k = y_k^{-1}$ si $k \geq 2$. Veamos que, $(D_a)^D = D_b$.

- Se cumple que $D_a D_b = D_b D_a$, ya que $ab = ba$.
- $D_b D_a D_b = D_{ab^2} = D_b$, por lo tanto,

$$D_b d_a D_b = D_b.$$

- $D_a^5 D_b = D_a^4$.

Por lo tanto,

$$(D_a)^D = D_b.$$

3.5. Ascenso y descenso

Sea X un espacio lineal y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal, definimos

$$T^0 = I, T^1 = T \ y \ T^n = T^{n-1} \text{ o } T, n \geq 2,$$

donde $I : X \longrightarrow X$ es el operador identidad.
Se define el núcleo de T como $N(T) = \{x \in X | T(x) = 0\}$ y el rango de T como $R(T) = \{T(x) | x \in X\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$R(T^{n+1}) \subseteq R(T^n) \text{ y } N(T^n) \subseteq N(T^{n+1}).$$

Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n) = R(T^{n+1})$, decimos que T tiene descenso finito, en este caso

$$d(T) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} | R(T^n) = R(T^{n+1})\}.$$

Si no existe tal $n \in \mathbb{N}$ se escribe $d(T) = \infty$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N(T^n) = N(T^{n+1})$, decimos que T tiene ascenso finito, en este caso

$$a(T) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} | N(T^n) = N(T^{n+1})\}.$$

Si no existe tal $n \in \mathbb{N}$ se escribe $a(T) = \infty$.

Proposición 3.3 ([4]). *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal definido sobre un espacio lineal X.*

- *Si $d(T) = n < \infty$, entonces $R(T^n) = R(T^{n+k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*
- *Si $a(T) = n < \infty$, entonces $N(T^n) = N(T^{n+k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Hagamos la demostración por inducción.
Si $k = 1$, por definición de $d(V)$ se tiene que $R(T^n) = R(T^{n+1})$. Supongamos que,

$$\text{si } d(T) = n < \infty, \text{ entonces } R(T^n) = R(T^{n+k}) \text{ (H.I.)}.$$

$R(T^{n+k+1}) = V(R(T^{n+k})) = V(R(T^n)) = R(T^{n+1}) = R(T^n)$, por (H.I.) y ya que $d(T) = n < \infty$.

Si $k = 1$, por definición de $a(T)$ se tiene que $N(T^n) = N(T^{n+1})$. Supongamos que

$$\text{si } a(T) = n < \infty, \text{ entonces } N(T^n) = N(T^{n+k}) \text{ (H.I.)}.$$

$$N(T^{n+k+1}) = \{x \in X | T(x) \in N(T^{n+k})\} =$$
$$\{x \in X | T(x) \in N(T^n)\} = N(T^{n+1}) = N(T^n),$$

por (H.I.) y porque $a(T) = n < \infty$. Por lo tanto, se tiene el resultado. $\square$

Lema 3.3 ([4]). *Si* $d(T) = 0$ *y* $a(T) < \infty$, *entonces* $a(T) = 0$.

Demostración. Supongamos que $a(T) > 0$, entonces existe $x_1 \in X \setminus \{0\}$, tal que $x_1 \in N(T)$. Como $d(T) = 0$, entonces

$$X = R(T^0) = R(T^n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

así para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que T^n es sobreyectiva, como $X = R(T)$, existe $x_2 \in X$ tal que $T(x_2) = x_1$, también existe $x_3 \in X$ tal que $T(x_3) = 0$, de aquí que $T^3(x_3) = 0$ y $T^2(x_3) = x_1$, continuando de esta forma, construimos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

$$T(x_{n+1}) = x_n, n \geq 1, T^n(x_{n+1}) = x_1 \text{ y } T^{n+1}(x_{n+1}) = 0,$$

entonces $x_{n+1} \in N(T^{n+1}) \setminus N(T^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción, ya que $a(T) < \infty$. Por lo tanto, $a(T) = 0$. □

Lema 3.4 ([4]). *Si* $a(T) < \infty$ *y* $d(T) < \infty$, *entonces* $a(T) = d(T)$.

Demostración. Si $d(T) < \infty$, podemos considerar el espacio lineal $Z = R(T^j)$, para cada $j \geq d(T)$. Consideremos $T|_Z : Z \longrightarrow Z$, ya que $(T|_Z)(Z) = T(R(T^j)) = R(T^{j+1}) = R(T^j) = Z$, así $d(T|_Z) = 0$, y también $a(T|_Z) < \infty$, entonces por el Lema 3.1 se tiene que $a(T|_Z) = 0$, entonces $T|_Z$ es un isomorfismo lineal. Sea $d = d(T)$, siempre se cumple que $N(T^d) \subseteq N(T^{d+1})$, veamos que $N(T^{d+1}) \subseteq N(T^d)$. Sea $x \in N(T^{d+1})$ y consideremos $y = T^d(x)$, entonces $T(y) = T^{d+1}(x) = 0$, como $y \in Z$, entonces $y = 0$, entonces $0 = T^d(x)$, entonces $x \in N(T^d)$. Por lo tanto, $N(T^{d+1}) \subseteq N(T^d)$, por lo tanto, $N(T^{d+1}) = N(T^d)$. Por lo tanto, $a(T) \leq d(T)$. Veamos que $d(T) \leq a(T)$.
Podemos suponer que $1 \leq d(T)$, ya que si $d(T) = 0$, entonces por el Lema 3.1, ya se tendría la igualdad. Por lo tanto, existe $y \in R(T^{d-1}) \setminus R(T^d)$, entonces $y = T^{d-1}(x)$ para algún $x \in X$. Sea $z = T(y) = T^d(x)$, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $(T|_Z)^n : Z \longrightarrow Z$ son isomorfismos lineales, así existe $w \in Z$ tal que $T^d(w) = z$, consideremos $u = x - w$, entonces $T^d(u) = T^d(x - w) = T^d(x) - T^d(w) = z - z = 0$. Además $T^{d-1}(u) = T^{d-1}(x-w) = T^{d-1}(x) - T^{d-1}(w) = y - T^{d-1}(w)$, pero $T^{d-1}(w) \in T^{d-1}(R(T^d)) = R(T^{2d-1}) \subseteq R(T^d)$, entonces $T^{d-1}(u) \neq 0$, ya que si $T^{d-1} = 0$, entonces $y = T^{d-1}(w) \in R(T^d)$, pero $y \notin R(T^d)$, entonces $u \in N(T^d) \setminus N(T^{d-1})$. Por lo tanto, $d(T) \leq a(T)$. Por lo tanto, $a(T) = d(T)$. □

Lema 3.5 ([4]). *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Supongamos que N es una variedad lineal cerrada de Y tal que $R(T) \oplus N$ es cerrado, entonces $R(T)$ es cerrado.*

Demostración. Definimos el operador $T_0 : \frac{X}{N(T)} \times N \longrightarrow Y$ como

$$T_0(x + N(T), n) := T(x) + n.$$

Se tiene que T_0 esta bien definida, ya que $x+N(T) = y+N(T) \iff x - y \in N(T) \iff T(x-y) = 0 \iff T(x) - T(y) = 0 \iff T(x) = T(y) \iff T(x) + n = T(y) + n \iff T_0(x + N(T), n) = T_0(y + N(T), n)$. Veamos que T_0 es una función continua.

$$||T_0(x + N(T), n)||_Y = ||T(X) + n||_Y \leq ||T(x)||_Y + ||n||_Y$$

$$= ||(x + N(T), n)||,$$

así T_0 es una función continua. También se tiene que $R(T_0) = R(T) \oplus N$ y además como $N(T_0) = \{(N(T), 0)\}$, se tiene que T_0 es inyectiva. Por lo que, $T_0 \in B(\frac{X}{N(T)} \times N, R(T) \oplus N)$ y como $R(T) \oplus N$ es cerrado, entonces $R(T) \oplus N$ es de Banach y por el Teorema del mapeo inverso, existe $T_0^{-1} \in B(R(T) \oplus N, \frac{X}{N(T)} \times N)$. De aquí que, T_0 es acotada por abajo, entonces existe $K > 0$ tal que $||T_0(x + N(T), n)|| \geq K||(x + N(T), n)||$, para cada $(x + N(T), n) \in \frac{X}{N(T)} \times N$, es decir, $||T(x) + n|| \geq K||x + N(T)||$, para cada $(x + N(T), n) \in \frac{X}{N(T)} \times N$, en particular, si $n = 0$, se tiene que

$$||T(x)|| \geq K||x + N(T)||,$$

es decir, la función $\tilde{T_0} : \frac{X}{N(T)} \times \{0\} \longrightarrow Y$ definida como $\tilde{T_0}(x + N(T), 0) := T(x)$ es acotada por abajo, como $R(\tilde{T_0}) = R(T)$ y como $\frac{X}{N(T)} \times \{0\}$ es de Banach se tiene que existe

$$\tilde{T_0}^{-1} \in B(R(T), \frac{X}{N(T)} \times \{0\}).$$

Por lo tanto, $R(T)$ es cerrado. □

Teorema 3.5 ([4]). *Sea $T \in B(X)$. Si $d = a(T) = d(T) < \infty$, entonces*

1. $X = R(T^d) \oplus N(T^d)$.

2. *Los subespacios* $R(T^d)$ *y* $N(T^d)$ *son cerrados y* T*-invariantes.*

3. $T|_{R(T^d)}$ *es invertible y* $T|_{N(T^d)}$ *es nilpotente.*

4. $\lambda = 0$ *es un punto aislado de* $\sigma(T)$.

5. $\lambda = 0$ *es un polo de* $R(z)$ *de orden* d.

6. $R(P(T,\{0\})) = N(T^d)$ *y* $N(P(T,\{0\})) = R(T^d)$.

Reciprocamente, si $\lambda = 0$ *es un polo de* $R(z)$ *de orden* d, *entonces* $a(T) = d(T) = d$.

Demostración. 1. Veamos que $R(T^d) \cap N(T^d) = \{0\}$.
Sea $x \in R(T^d) \cap N(T^d)$, entonces $x = T^d(y)$ para algún $y \in X$ y $T^d(x) = 0$, así $T^{2d}(y) = T^d(T^d(x)) = T^d(0) = 0$, por lo que $y \in N(T^{2d}) = N(T^d)$, entonces $T^d(y) = 0$, así $x = 0$. Por lo tanto, $R(T^d) \cap N(T^d) = \{0\}$.
Ahora veamos que, $T(R(T^d) \subseteq R(T^d)$ y $T(N(T^d)) \subseteq N(T^d)$. Sea $x \in T(R(T^d))$, entonces existe $y \in R(T^d)$ tal que

$$x = T(y) = T(T^d(z)) = T^{d+1}(z),$$

para algún $z \in X$ tal que $T^d(z) = y$. Por lo tanto, $x \in R(T^{d+1}) = R(T^d)$.
Sea $x \in T(N(T^d))$, entonces existe $y \in N(T^d)$ tal que $x = T(y)$, como $y \in N(T^d)$ se tiene que $T^d(y) = 0$, así

$$T^d(x) = T^d(T(y)) = T(T^d(y)) = T(0) = 0.$$

Por lo tanto, $x \in N(T^d)$.

Sea $W = T|_{R(T^d)}$, por lo anterior tenemos que $R(W) = R(T^d)$, así podemos considerar

$$W : R(T^d) \longrightarrow R(T^d).$$

Por lo tanto, dado $x \in X$, existe $x_1 \in R(T^d)$ tal que $T^d(x) = W(x_1)$, es decir, $T^d(x) = T^d(x_1)$, si definimos $x_2 = x - x_1$ se tiene que $x_2 \in N(T^d)$, ya que $T^d(x_2) = 0$, además $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in R(T^d)$ y $x_2 \in N(T^d)$. Por lo tanto, $X = R(T^d) \oplus N(T^d)$. $\square$

Teorema 3.6. *Sea $T \in B(X)$. T es invertible Drazin si y solo si $a(T)$ y $d(T)$ son finitos. Más aun, si $ind_D(T) = n$, entonces $a(T) = d(T) = n$.*

Demostración. $\longrightarrow$] Supongamos que T es invertible Drazin, entonces $T^n = T^{n+1}T^D$, entonces $R(T^n) = R(T^{n+1}T^D) \subseteq R(T^{n+1}) \subseteq R(T^n)$. Por lo tanto, $R(T^n) = R(T^{n+1})$.

También se tiene que, $N(T^n) \subseteq N(T^{n+1}) \subseteq N(T^n) = N(T^{n+1}T^D) = N(T^DT^{n+1})$. Por lo tanto, $N(T^n) = N(T^{n+1})$.

$\longleftarrow$] Si $a(T), d(T) < \infty$, entonces por el Teorema 3.1 se tiene que
$$X = R(T^p) \oplus N(T^p),$$
donde $p = a(T) = d(T)$. En general, el operador T tiene la siguiente descomposición, donde A_1 es invertible y A_2 es nilpotente,
$$T = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix},$$
notemos que $A_3 = 0$, ya que si $x \in N(T^p), T^p(x) = 0$, entonces $A_3(T^p(x)) = 0$. También $A_4 = 0$, ya que si $y \in R(T^p)$, entonces $y = T^p(x)$ para algún $x \in X$, entonces $A_4(y) = T^{p+1}(x) \in R(T^{p+1}) = R(T^p) \cap N(T^p) = \{0\}$. Así,
$$T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix},$$
Veamos que,
$$T^D = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix}.$$
En efecto,
$$TT^D = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$
$$T^DT = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Por lo tanto,
$$TT^D = T^DT.$$

$$T^DTT^D = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^D$$

Por lo tanto,

$$T^DTT^D = T^D.$$

$$T^{p+1}T^D = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^{p+1} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{p+1} & 0 \\ 0 & A_2^{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^p & 0 \\ 0 & A_2^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^p.$$

Por lo tanto, T es Drazin invertible y

$$T^D = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(T^p) \\ N(T^p) \end{pmatrix}.$$

□

Capítulo 4

Una representación integral

En la literatura existen representaciones integrales de inversas generalizadas como la inversa de Moore-Penrose. Por ejemplo, Groetsch dio la siguiente representación integral de la inversa de Moore-Penrose de un operador lineal acotado $T : H_1 \longrightarrow H_2$ con rango cerrado, definido sobre espacios de Hilbert:

$$T^{\dagger} = \int_0^{\infty} e^{-T^*Tt} T^* dt.$$

También Koliha y Wei dan la siguiente representación en álgebras de Banach para la inversa de Drazin, sea A un álgebra de Banach, $a \in A$ un elemento Drazin invertible con $ind_D(a) = k \geq 1, k < \infty$, tal que $\{0\} \neq \sigma(a^{m+1}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0\}$, para algún $m \geq k$, donde $Re(z)$ es la parte real de $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$a^D = \int_0^{\infty} exp(-a^{m+1}t) a^m dt.$$

Ahora daremos una representación integral de la inversa de Drazin de un operador $T \in B(X)$, donde X es un espacio de Banach. Esta representación no será como las integrales impropias mostradas anteriormente, en su lugar será una integral de contorno en el sentido que hemos definido en los capítulos anteriores.

4.1. Inversa de Drazin

En la Definición 1.6, hemos definido el significado de

$$\int_\gamma F(z)dz, \tag{4.1}$$

donde γ es una curva rectificable en $\mathbb{C}$ y F es una función continua con valores en un espacio de Banach. También es posible darle un significado a (4.1) cuando γ es un contorno de Cauchy, en este caso tenemos varias curvas involucradas en el contorno considerado, usando ideas análogas al caso de la Variable Compleja, unimos estas curvas por rectas, esto nos da una nueva curva, al usar las propiedades de la integral, las integrales que consideran las rectas se anulan y así solo integramos sobre nuestro contorno original, así nuestra integral se resume a considerar integrales sobre cada una de las curvas involucradas, esto se considera así en el resultado principal de esta tesis.

Teorema 4.1. *Sean X un espacio de Banach, $T \in B(X)$, 0 un polo de $R(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}$ de orden p, entonces*

$$T^D = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)d\lambda,$$

donde $d(\lambda) = \lambda^{-1}$ y Γ es un contorno de Cauchy que separa a 0 de $\sigma(T) \setminus \{0\}$.

Demostración. Como 0 es un polo de orden p de la función $R(\lambda)$, por el Teorema 3.5 tenemos que $a(T) = d(T) = p < \infty$. Entonces, por el Teorema 3.6 tenemos que T es Drazin invertible con $ind_D(T) = p$.

Sabemos del cálculo funcional que podemos representar a T como

$$T = \frac{1}{2\pi i}\int_C wR(w)dw,$$

donde C es una curva tal que $\sigma(T) \subseteq int(C)$. Usaremos la Proposición 1.2 y el Teorema 1.7. Primero notemos que

$$TR(\lambda) = R(\lambda)T,$$

como

$$T(\lambda I - T) = (\lambda I - T)T,$$
$$T = (\lambda I - T)T(\lambda I - T)^{-1},$$
$$(\lambda I - T)^{-1}T = T(\lambda I - T)^{-1},$$

por lo tanto

$$TR(\lambda) = R(\lambda)T.$$

i) Veamos que $TT^D = T^D T$.

$$TT^D = \frac{1}{2\pi i}T\left(\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)d\lambda\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(d(\lambda)R(\lambda))d\lambda.$$

Como $T(d(\lambda)R(\lambda)) = d(\lambda)T(R(\lambda))$ y $TR(\lambda) = R(\lambda)T$, se tiene que

$$TT^D = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)Td\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)d\lambda\right)T = T^D T.$$

Por lo tanto, $TT^D = T^D T$.
ii)Veamos que, $T^D TT^D = T^D$.

$$T^D TT^D = T^D\left(\frac{1}{2\pi i}T\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)d\lambda\right) = T^D\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T(d(\lambda)R(\lambda))d\lambda$$

$$= T^D\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma\left[\int_C wR(w)dw\right](d(\lambda)R(\lambda))d\lambda$$

$$= T^D\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma\left[\int_C wR(W)(d(\lambda)R(\lambda))dw\right]d\lambda$$

$$= T^D\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma\left[\int_C wd(\lambda)R(w)R(\lambda)dw\right]d\lambda$$

$$= T^D\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_\Gamma\left[\int_C wd(\lambda)\left(\frac{R(w)-R(\lambda)}{w-\lambda}\right)dw\right]d\lambda,$$

esto último por la identidad del resolvente.

$$= T^D\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\left[\int_\Gamma\left[d(\lambda)\int_C\frac{wR(w)}{w-\lambda}dw - d(\lambda)R(\lambda)\int_C\frac{w}{w-\lambda}dw\right]d\lambda\right]$$

$$= T^D \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[d(\lambda) \int_C \frac{wR(w)}{w-\lambda} dw\right] d\lambda,$$

ya que por el Teorema de Cauchy,

$$\int_C \frac{w}{w-\lambda} dw = 0.$$

Usando la fórmula integral de Cauchy, se tiene que,

$$\lambda R(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{wR(w)}{w-\lambda} dw, \text{ es decir, } \int_C \frac{wR(w)}{w-\lambda} dw = \lambda R(\lambda) 2\pi i.$$

Así,

$$T^D T T^D = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 T^D \int_\Gamma d(\lambda)\lambda R(\lambda) 2\pi i d\lambda = \frac{1}{2\pi i} T^D \int_\Gamma \lambda d(\lambda) R(\lambda) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma T^D (\lambda d(\lambda) R(\lambda)) d\lambda = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_{\Gamma'} d(\lambda') R(\lambda') d\lambda'\right] (\lambda d(\lambda) R(\lambda)) d\lambda,$$

donde Γ' es un contorno de Cauchy que separa a 0 de $\sigma(T) \setminus \{0\}$.

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_{\Gamma'} d(\lambda') R(\lambda') (\lambda d(\lambda) R(\lambda)) d\lambda'\right] d\lambda =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_{\Gamma'} \lambda d(\lambda') d(\lambda) R(\lambda) R(\lambda') d\lambda'\right] d\lambda$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_{\Gamma'} d(\lambda') \lambda d(\lambda) \left(\frac{R(\lambda) - R(\lambda')}{\lambda - \lambda'}\right) d\lambda'\right] d\lambda,$$

por la identidad del resolvente.

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_\Gamma \left[\int_{\Gamma'} \frac{d(\lambda')\lambda d(\lambda) R(\lambda)}{\lambda - \lambda'} d\lambda' - \int_{\Gamma'} \frac{d(\lambda')\lambda d(\lambda) R(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda'\right] d\lambda\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_\Gamma \lambda d(\lambda) R(\lambda) \left[\int_{\Gamma'} \frac{d(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda'\right] d\lambda - \int_\Gamma \left[\int_{\Gamma'} \frac{\lambda d(\lambda) d(\lambda') R(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda'\right] d\lambda\right].$$

Por la fórmula integral de Cauchy se tiene que,

$$\int_{\Gamma'} \frac{d(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda' = 2\pi i d(\lambda),$$

también haciendo un cambio de variable en la segunda integral se tiene que,

$$T^DTT^D = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \lambda d^2(\lambda)R(\lambda)2\pi i d\lambda - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'} d(\lambda')R(\lambda') \left[\int_\Gamma \frac{d\lambda}{\lambda-\lambda'}\right] d\lambda'$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)d\lambda = T^D, \text{ ya que } \lambda d^2(\lambda) = d(\lambda).$$

Por lo tanto, $T^DTT^D = T^D$.

iii)Veamos que, $T^{n+1}T^D = T^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ por el cálculo operacional se tiene que

$$T^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C w^n R(w)dw.$$

$$T^{p+1}T^D = T^{p+1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}T^{p+1}\int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma T^{p+1}(d(\lambda)R(\lambda))d\lambda$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_C w^{p+1}R(w)(d(\lambda)R(\lambda))dw\right] d\lambda$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_C d(\lambda)w^{p+1}R(w)R(\lambda)dw\right] d\lambda$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_C d(\lambda)w^{p+1}\left(\frac{R(w)-R(\lambda)}{w-\lambda}\right) dw\right] d\lambda,$$

por la identidad del resolvente.

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \left[\int_C \frac{d(\lambda)w^{p+1}R(w)}{w-\lambda}dw - \int_C \frac{d(\lambda)w^{p+1}R(\lambda)}{w-\lambda}dw\right] d\lambda$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\int_\Gamma d(\lambda)\int_C \left[\frac{w^{p+1}R(w)}{w-\lambda}dw\right] d\lambda - \int_\Gamma d(\lambda)R(\lambda)\left[\int_C \frac{w^{p+1}}{w-\lambda}dw\right] d\lambda\right].$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma d(\lambda)\left[\int_C \frac{w^{p+1}R(w)}{w-\lambda}dw\right] d\lambda,$$

ya que por el Teorema de Cauchy

$$\int_C \frac{w^{p+1}}{w-\lambda}dw = 0.$$

Si $F(w) = w^{p+1}R(w)$, por la fórmula integral de Cauchy se tiene que,

$$\lambda^{p+1}R(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w^{p+1}R(w)}{w-\lambda}dw,$$

de aquí que

$$\int_C \frac{w^{p+1}R(w)}{w-\lambda} = \lambda^{p+1}R(\lambda)2\pi i.$$

$$\begin{aligned} T^{p+1}T^D &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma d(\lambda)\lambda^{p+1}R(\lambda)2\pi i d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^p R(\lambda)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C w^p R(w)dw = T^p, \end{aligned}$$

ya que Γ y C son curvas en el resolvente tales que $\sigma(T) \subseteq int(\Gamma)$ e $\sigma(T) \subseteq int(C)$. Por lo tanto, $T^{p+1}T^D = T^p$.
Así, T^D es la inversa de Drazin de T. □

Cabe mencionar que haciendo uso de la representación integral de la inversa de Drazin se puede demostrar lo siguiente: para $y, w \in X$,

$$T^D(y) = w \text{ si y solo si } T(w) = P(y) - y \text{ y } P(w) = 0, \qquad (4.2)$$

donde P es la proyección espectral asociada al conjunto espectral $\{0\}$.

Uno de los objetivos del análisis espectral es calcular eigenvalores de un operador. Para un conjunto de eigenvalores Λ de un operador $T \in L(X)$, se quiere encontrar el máximo subespacio $T-$invariante tal que T restringido a ese subespacio tenga a Λ como conjunto de eigenvalores. En la mayoría de los casos los eigenvalores y los correspondientes subespacios invariantes maximales del operador T no se pueden calcular de forma precisa, así es necesario hallar aproximaciones de estos últimos.

Conclusión

Hemos estudiado condiciones para la existencia de la inversa Drazin, además de cumplir nuestro objetivo de obtener una representación integral de esta inversa. La representación integral de Drazin dada en esta tesis es una integral de contorno, esta nos permite calcular iteraciones sucesivas de ciertos esquemas de refinamiento, la ecuación (4.2) nos da un método para hacer esto, aunque no desarrollaremos este tema en esta tesis, es bueno saber que las representaciones integrales tienen diversas e interesantes aplicaciones, en algunos artículos como en [8], esta representación resultó ser una herramienta útil en la teoría de ecuaciones diferenciales singulares, donde se aplicó para derivar condiciones para la convergencia asintótica de soluciones tanto en el establecimiento de matrices [9], como de semigrupos de operadores [10], [11]. Si bien es cierto que hemos obtenido una representación integral a la inversa de Drazin, donde la integral es una integral de contorno, para un trabajo futuro nos podemos preguntar si podemos obtener una representación integral de la inversa de Drazin en álgebras de Banach, donde la integral utilizada no sea una integral impropia, sino una integral de contorno, definida de una manera apropiada, también ver de que forma nos ayuda esta representación para facilitar cáluculos y el estudio de ciertas propiedades.

Bibliografía

[1] Adi Ben-Israel,Thomas N.E.G. (2000) *Generalized inverses, theory and its applications*, second edition, Canadian Mathematical Society.

[2] Alain L. , Mario A. , Balmohan V. (2001) *Spectral computations for bounded operators*, Applied Mathematics CHAPMAN & HALL.

[3] Aleksandar S. Cvetkovíc, Gradimir V. Milovanovic (2011) *On Drazin inverse of operator matrices*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 375 (331-335).

[4] Bertram Yood, S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Volume 9.

[5] Drazin, M.P. (1958) ,*Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly 65, 506–514.

[6] Fredholm, I. (1903), , *Sur une classe dequations fonctionnelles*, Acta Math., 27, 365-390.

[7] Hurwitz, W.A. (1912) *On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation*, Trans.Amer.Math.Soc., 13, 405-418.

[8] Koliha, J.J. (1996) *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Math. J. 38, 367-381.

[9] Koliha, J.J., I. Straskraba (1999) *Power bounded and exponentially bounded matrices*, Appl. Math. Praha 44, 289-308.

[10] KOLIHA, J.J., T.D. TRAN (2001) *The Drazin inverse for closed linear operators*, J. Operat. Theory 46, in press.

[11] KOLIHA, J.J. (1999) *The Drazin and Moore-Penrose inverse in* $C^{*}-algebras, Math.Proc.R.IrishAcad.A99, 17-27.$

[12] M. ZUHAIR NASHED (1973) *Generalized inverses and applications*, first edition, Academic Press, New York.

[13] S. MARTIN *Principles of Functional Analysis*, second edition Graduate Studies in Mathematics Volume 36.

[14] MARTIN S. (2002) *Principles of functional analysis*, second edition, graduate studies in mathematics, vol. 36 American Mathematical Society.

[15] MOORE, E.H. (1920) , *On the reciprocal of the general algebraic matrix* Bull. Amer. Math. Soc. 26, 394-395.

[16] PENROSE, R. (1955) , *A generalized inverse for matrices* Proc.Cambridge Philos. Soc. 51, 406-413.

[17] SHOWALTER, D. , *Representation and computation of the pseudoinverse* Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 584-586.

[18] T. H. HILDEBRANDT (1953) *Integration in abstract spaces*, American Mathematical Society, Vol. 59 No.2, 111-139.