Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Continuos, construcciones y propiedades

Tesis

que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

presenta

Lucero Guadalupe Contreras Hernández

bajo la dirección de

Dr. David Herrera Carrasco

Dr. Fernando Macías Romero

4 de julio de 2016

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a mis padres Paula y Ezequiel que son las personas que más amo, respeto y admiro. Así como al amor de mi vida José Luis.

Agradecimientos

Doy mi más profundo Agradecimiento:

A mis padres, Paula y Ezequiel, por apoyarme y amarme profundamente, ustedes me dieron las bases para forjar mi futuro y con sus consejos me han ayudado a tomar las decisiones correctas. Ni con las riquezas más grandes de este mundo puedo pagar lo que han y siguen haciendo por mí.

A mi novio, José Luis, gracias por todo el apoyo que me diste a lo largo de mi carrera, tú eres una pieza fundamental en este logro, no solo por dedicar parte de tu tiempo enseñándome y resolviendo mis dudas sino también por tu compañía, paciencia y amor, eres la razón de mí existir. Gracias por creer en mí.

A mi hermano, Ezequiel, por despertar mi interés en la matemática y haber leído con entusiasmo este trabajo y a mi sobrina Mariel por todo su cariño.

A mis asesores, el Dr. Fernando Macías Romero y el Dr. David Herrera Carrasco, por su confianza para poder realizar este trabajo y por permitirme colaborar a su lado en varios proyectos que contribuyeron a mi formación académica.

A los miembros del jurado, el M.C. Manuel Ibarra Contreras, por el conocimiento que dejo en mí y por el empeño y gusto con el que imparte sus cursos y por su disposición para revisar esta tesis. Al Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado y al M.C. José Gerardo Ahuatzi Reyes, por aceptar revisar esta tesis y hacerme observaciones y sugerencias para la conclusión de este trabajo.

Índice general

Introducción

La teoría de continuos surge dentro de la matemática en el área de topología, teniendo como objeto de estudio los espacios métricos, compactos y conexos. Su estudio adquirió gran importancia debido a la necesidad de un entendimiento profundo de la topología de espacios cartesianos para su aplicación en el análisis real y complejo. Uno de los primeros resultados importantes fue el Teorema de la Curva de Jordán: todo curva simple cerrada separa al plano en dos conjuntos abiertos ajenos y ambos tienen como frontera a la curva, enunciado por Jordán en 1887 y demostrado en 1905. Posteriormente la teoría de continuos tuvo distintas ramificaciones como la teoría de hiperespacios de continuos, dendritas, continuos homogéneos, continuos indescomponibles, etc.
La teoría de continuos se empezó a trabajar de manera creciente en México a partir de la década de los años ochenta, motivad por la llegada de los matemáticos polacos Janusz J. Charatonik y su hijo Wlodzimierz J. Charatonik así como la organización constante de seminarios de teoría de continuos organizados principalmente por Isabel Puga, Luis Montejano, Sergio Macías y Alejandro Illanes. Posteriormente el interés por el área se extendió a otros estados del país contando actualmente con investigadores activos en el área en las siguientes instituciones: BUAP, UAEM, UNACH, UAQ, UMSNH y UNISON.
La organización de seminarios y talleres dirigidos a estudiantes y profesores que tienen interés en el área se ha conservado hasta la fecha y fue en el IX Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios celebrado en Querétaro en el año 2014 donde surgió mi interés por profundizar más en el tema.
El objetivo de esta tesis es dar una presentación básica de la teoría de continuos y algunas propiedades de uso común en el área. En el capítulo 1 se enuncian conceptos necesarios que se utilizarán a lo largo de la tesis y se establece que el ser continuo es una propiedad topológica, lo que nos permite identificar en

primera instancia una gran variedad de continuos que surgen naturalmente en topología: arcos, esferas, celdas, etc. Se define el cubo de Hilbert y se prueba que todo continuo admite un encaje en él. En el capítulo 2, después de haber revisado algunos ejemplos de continuos, una pregunta lógica que nos podemos plantear es cómo podremos construir más a partir de colecciones dadas de continuos y qué herramientas nos permiten lograrlo. De esta forma se desarrollan las intersecciones anidadas de continuos, límites inversos y topología cociente, espacios característicos de estas construcciones son el Seudoarco, el solenoide p-ádico y el n-espacio proyectivo real respectivamente.
Por último en el capítulo 3 revisamos las siguientes propiedades de continuos: Indescomponibilidad, conexidad por trayectorias, propiedad del punto fijo, puntos de corte y homogeneidad. Se busca clasificar la mayoría de continuos enunciados que satisfacen o no estas propiedades y entre algunos teoremas clásicos enunciados y demostrados se tienen los siguientes:

- El límite inverso de continuos con funciones de enlace indescomponibles es indescomponible.

- Los continuos indescomponibles tienen una cantidad no numerable de composantes (dos puntos están en la misma composante si existe un subcontinuo propio del espacio que los contienen a ambos).

- Los continuos encadenables poseen la propiedad del punto fijo.

- Los únicos continuos que poseen exactamente dos puntos de no corte son los arcos.

Finalmente cabe señalar que se buscó que el trabajo fuera auto contenido, a partir de conceptos básicos de topología, teoría de conjuntos y espacios métricos. Salvo en algunas ocasiones donde se da alguna referencia, donde se pueda consultar la demostración.

Lucero Guadalupe Contreras Hernández

1 Conceptos básicos

En este capítulo se definen conceptos esenciales que serán utilizados constantemente en los capítulos sucesivos, en especial nos interesa recordar las propiedades de los espacios topológicos que involucran los conceptos de la métrica, la conexidad y la compacidad; así como algunas propiedades de las funciones continuas, y homeomorfismos entre espacios topológicos.

Definición 1.1. Un **conjunto preordenado** es un par ordenado $(X, \preceq)$ donde $\preceq$ es una relación binaria en X tal que:

(i) Si $a \in X$, entonces $a \preceq a$ (reflexividad),

(ii) Si $a, b, c \in X$ y $a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$ (transitividad).

Un **conjunto parcialmente ordenado** es un conjunto preordenado $(X, \preceq)$ tal que

- para cada $a, b \in X$, $a \preceq b$ y $b \preceq a$ implican $a = b$ (antisimétrica).

Un **conjunto totalmente ordenado** es un conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$ tal que

- para cada $a, b \in X$, se tiene que $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

Un **conjunto dirigido** es un conjunto preordenado $(D, \preceq)$ tal que; para todo $a, b \in D$, existe un elemento $c \in D$ tal que $a \preceq c$ y $b \preceq c$.

Ejemplo 1.2. Denotamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales y por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales.

(a) El conjunto $\mathbb{N}$ con el orden usual es un conjunto totalmente ordenado y dirigido.

(b) El conjunto $\mathbb{R}$ con el orden usual es un conjunto totalmente ordenado y dirigido.

(c) Si $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ son conjuntos dirigidos, se puede dar un orden dirigido a su producto cartesiano $A \times B$ definiendo $(a,b) \preceq (c,d)$ si y sólo si $a \preceq_A c$ y $b \preceq_B d$.

(d) Si $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ es un conjunto dirigido con el orden: $a \preceq b$ si y sólo si $|a-x| \geq |b-x|$. En este caso se suele decir que el conjunto está dirigido hacia x; además, este es un ejemplo de conjunto dirigido donde el orden no es parcial ni total.

Definición 1.3. Una **métrica** en un conjunto no vacío X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface las siguientes propiedades para cada $x, y, z \in X$

(i) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Ejemplo 1.4. La función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, definida por

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\,,$$

es una métrica para $\mathbb{R}^n$ y es conocida como la **métrica usual** de $\mathbb{R}^n$.

Si X es un conjunto y d es una métrica para X, diremos que la pareja (X,d) es un espacio métrico aunque a menudo nos referiremos al conjunto X como espacio métrico si la métrica considerada es evidente.

Dado un espacio métrico (X,d), la siguiente colección de subconjuntos resulta de gran importancia; para cada $x \in X$ y $r > 0$

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

es la **bola abierta** centrada en x de radio r.

Definición 1.5. Un subconjunto A de un espacio métrico X es **acotado** si existe $r > 0$ y un punto $x_0 \in X$ tales que $A \subset B(x_0, r)$.

Definición 1.6. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (E,d). Se dice qu $\{x_n\}$ es una **sucesión de Cauchy**, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n,m \in \mathbb{N}$, con $n,m \geq N$ entonces

$$d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

.

Definición 1.7. Un espacio métrico es **completo** si toda sucesión de Cauchy en él es convergente.

1.1. Espacios topológicos

Definición 1.8. Un **espacio topológico** es un par (X,τ) que consiste de un conjunto X y una familia τ de subconjuntos de X que cumplen las siguientes condiciones:

(i) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$,

(ii) Si $A \in \tau$ y $B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,

(iii) Si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

A τ se le llama una topología en X, a los elementos de τ se les llama **conjuntos abiertos** de X y a los complementos de conjuntos abiertos se les llama **conjuntos cerrados** de X.

Observemos que X puede poseer varias topologías.

Definición 1.9. Si τ y η son topologías para X y $\tau \subset \eta$, diremos que τ es **más gruesa** que η o que η es **más fina** que τ.

Ejemplo 1.10. Sea X un conjunto cualquiera.

(a) El conjunto de todos los subconjuntos de X, denotado por $\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subset X\}$, es una topología para X. Al espacio $(X,\mathcal{P}(X))$ se le conoce como el espacio discreto X.

(b) El conjunto $\tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología para X; a esta topología se le conoce como topología indiscreta.

Obsérvese que la topología indiscreta es la más gruesa de las topologías para X y la discreta es la más fina.

Definición 1.11. Un conjunto $\mathscr{B}$ de abiertos de un espacio topológico (X,τ) es una **base** para la topología τ si para cada $A \in \tau$ existe $\mathcal{B} \subset \mathscr{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{B}$.

Por otra parte si X es un conjunto y $\mathscr{B}$ es una colección de subconjuntos de X, diremos que $\mathscr{B}$ es una base para una topología si los elementos de $\mathscr{B}$ cumplen lo siguiente:

(i) $\bigcup \mathscr{B} = X$

(ii) Para cada par de elementos $C, D \in \mathscr{B}$ existe $\mathcal{B} \subset \mathscr{B}$ tal que $C \cap D = \bigcup \mathcal{B}$.

En este caso la topología para la cual es base $\mathscr{B}$ es justamente la formada por uniones de elementos de $\mathscr{B}$.

$$\tau_{\mathscr{B}} = \{U \subset X \,|\, \text{existe } \mathcal{B} \subset \mathscr{B} \text{ tal que } U = \bigcup \mathcal{B}\}.$$

Ejemplo 1.12. Dado un espacio métrico (X,d), se puede probar que la colección

$$\mathscr{B} = \{B(x,r) \,|\, x \in X \text{ y } r > 0\}$$

cumple las propiedades necesarias para ser base para una topología. A la topología que genera se le conoce como la **topología inducida por la métrica** d y se le denota por τ_d. Si (X,τ) es un espacio topológico y existe una métrica d tal que $\tau = \tau_d$ se dice que el espacio (X,τ) es **metrizable**. A $\mathbb{R}^n$ con la topología inducida por su métrica usual se le llama **espacio euclidiano** n dimensional.

Definición 1.13. Sea (X,τ) un espacio topológico. Una colección δ de subconjuntos de X, δ es una **subbase** para la topología τ si la colección de subconjuntos de X generada por intersecciones finitas de elementos de δ es una base para τ; es decir, si

$$\mathscr{B}_\delta = \{\mathcal{B} \subset X \mid \text{existe } A \subset \delta \text{ y } A \text{ finito tal que } \mathcal{B} = \bigcap A\}$$

es una base para τ.

En total similitud al caso de las bases podemos dar condiciones necesarias para que un conjunto genere una topología; diremos que δ es una subbase para una topología si el conjunto

$$\mathcal{B} = \{B \subset X \mid \text{existe } A \subset \delta \text{ y } A \text{ finito tal que } B = \bigcap A\}$$

es una base para una topología. La topología para la cual es subbase es la generada por las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de δ.

Ejemplo 1.14. Sea $(X,\preceq)$ un conjunto totalmente ordenado con al menos dos elementos. Definamos los rayos iniciales y finales, donde $a \in X$ como

$$(\leftarrow, a) = \{x \in X \,|\, x \prec a\} \text{ y}$$

$$(a, \rightarrow) = \{x \in X \,|\, a \prec x\} \,,$$

respectivamente. Se puede ver que $\delta = \{(\leftarrow, a) \,|\, a \in X\} \cup \{(a, \rightarrow) \,|\, a \in X\}$ es una subbase para una topología $\tau_{\preceq}$. A esta topología se le conoce como **topología inducida por el orden** y una base para ella es:

$$\mathscr{B} = \delta \cup \{(a,b) \,|\, a,b \in X\} \,,$$

donde $(a,b) = \{x \in X \,|\, a \prec x \prec b\}$.

Una observación importante es que en $\mathbb{R}$ la topología inducida por el orden usual es igual a la topología inducida por la métrica euclidiana.

Definición 1.15. Si (X,τ) es un espacio topológico y $A \subset X$ el conjunto

$$\tau_A = \{U \cap A \,|\, U \in \tau\}$$

es una topología para A llamada la **topología relativa** en A respecto a (X,τ). Si $A \subset X$, diremos que (A,τ_A) es un subespacio de (X,τ).

Definición 1.16. Sean (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto $V \subset X$, se llama **vecindad** de x si existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset V$. Denotaremos por $\mathcal{V}(x)$ al conjunto de todas las vecindades del punto x.

Definición 1.17. Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$

(i) El **interior** de A, es el máximo abierto contenido en A, es decir,

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{U \in \tau \,|\, U \subset A\}$$

(ii) La **cerradura** de A, es el mínimo cerrado que contiene a A, es decir,

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X \,|\, X \setminus F \in \tau \text{ y } A \subset F\}$$

(iii) El **conjunto derivado** de A es

$$A' = \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x) \text{ tal que } (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

Algunas propiedades de estos conjuntos que utilizaremos son las siguientes:

Teorema 1.18. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Son equivalentes:*

(i) A es abierto.

(ii) $A = \operatorname{int}(A)$.

(iii) Para todo $x \in A$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset A$.

Demostración. Observemos que A es abierto si y sólo si $A \in \{U \in \tau \mid U \subset A\}$ y esto ocurre siempre y cuando $A = \operatorname{int}(A)$. Por otra parte si, $A = \operatorname{int}(A)$, entonces para toda $x \in A$ existe $U \in \{U \in \tau \mid U \subset A\}$ tal que $x \in U$. Es decir, existe un subconjunto abierto de X contenido en A que tiene como elemento a x. Recíprocamente, si $\forall x \in A \, \exists U_x \in \tau : x \in U_x \subset A$, entonces $\forall x \in A : U_x \subset \operatorname{int}(A)$, por tanto, $A = \operatorname{int}(A)$. □

Teorema 1.19. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $F \subset X$. Son equivalentes:*

(i) F es cerrado,

(ii) $F = \overline{F}$,

(iii) $F' \subset F$.

Demostración. Si F es cerrado, entonces $F \in \{G \subset X \mid X \setminus G \in \tau \text{ y } F \subset G\}$ y, por tanto, $\bigcap\{G \subset X \mid X \setminus G \in \tau \text{ y } F \subset G\} \subset F$; además $F \subset \overline{F}$ y, por tanto, $F = \overline{F}$. Recíprocamente, si $F = \overline{F}$, entonces F es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados. Por otra parte, si F es cerrado y $x \in F' \setminus F$, entonces $x \in X \setminus F$ y, como $x \in F'$, se tiene que $((X \setminus F) \setminus \{x\}) \cap F \neq \emptyset$, lo cual es imposible. Si $F' \subset F$, entonces tomemos $x \in X \setminus F$; como $x \notin F'$, existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $(U \setminus \{x\}) \cap F = \emptyset$, es decir, $x \in U \subset X \setminus F$; por tanto $X \setminus F$ es abierto y F es cerrado. □

Definición 1.20. Sea (X, τ) un espacio topológico, $D \subset X$ se dice que D es un **conjunto denso** en X si $\overline{D} = X$.

Axiomas de Separación

Definición 1.21. Sea (X,τ) un espacio topológico. Diremos que:

(i) X es un **espacio** T_0 si, para cada par de puntos distintos x y y de X, existe un subconjunto abierto U tal que U contiene a x o contiene a y, pero no a ambos.

(ii) X es un **espacio** T_1 si, para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

(iii) X es un **espacio** T_2 o **de Hausdorff** si X satisface la siguiente condicion: para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$. Y $U \cap V = \emptyset$.

(iv) X es un **espacio** T_3 o **Regular** si satisface las siguientes condiciones:

   (1) X es un espacio T_1.

   (2) Para cualquier $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$.

(v) X es un **espacio** T_4 o **Normal** si X tiene las siguientes propiedades:

   (1) X es un espacio T_1.

   (2) Para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos F_1 y F_2 de X, existen abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $F_1 \subset A_1$ y $F_2 \subset A_2$.

Teorema 1.22. *Sea X un espacio T_1. X es regular si y sólo si, para cualquier punto $x \in X$ y cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

La demostración se encuentra en [1, p. 178], Proposición 6.3.

Teorema 1.23. *Si X es un espacio normal, entonces X es regular.*

La demostración se encuentra en [1, p. 190], Corolario 6.19.

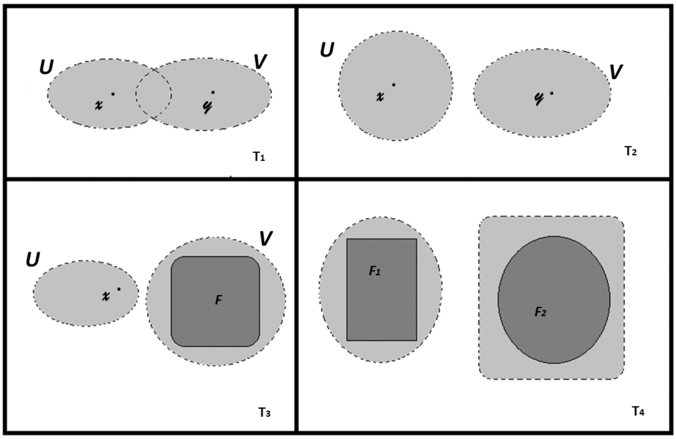

Figura 1.1: Ejemplos de axiomas de separación.

Definición 1.24. Sean (X,τ) y (Y,η) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es una función **continua** si, para todo $U \in \eta$, se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau$. Si $f : X \to Y$ es continua, biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ es continua, f es un **homeomorfismo**. En este caso diremos que X e Y son homeomorfos.

Lema 1.25. *Sea (X,τ) un espacio topológico y δ una subbase para τ entonces $f : (Y,\eta) \to (X,\tau)$ es continua si y sólo si para todo $U \in \delta$ tal que $f^-1(U) \in \tau$.*

Teorema 1.26 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces, X es normal si y sólo si, para cada par de conjuntos cerrados ajenos A y B en X, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$, si $x \in A$, y $f(x) = 1$, si $x \in B$.*

La demostración se encuentra en [1, p. 188].

Definición 1.27. Un espacio topológico (X,τ) es **disconexo** bajo la topología τ si, existen $A,B \in \tau$, tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$. El par (A,B) se llama una disconexión de X. Por otro lado, X es **conexo** si no es disconexo.

Teorema 1.28. *Sea X un espacio topológico. X es conexo si y sólo si no existe una función continua y suprayectiva de X sobre el espacio discreto $\{0,1\}$.*

Demostración.

Para probar la necesidad, supongamos que existe una función continua y suprayectiva de X sobre el espacio discreto $\{0,1\}$. Entonces, $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ son abiertos, por que f continua, disjuntos y no vaciós por que f es suprayectiva. Por tanto $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ constituyen una disconexión. Finalmente por contrarecíproca se tiene el resultado deseado.
Para probar la suficiencia, supongamos que X no es conexo, entonces existen abiertos disjuntos y no vacíos A y B tales que $A \cup B = X$. Sea f la función definida por $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$. Entonces $f : X \to \{0,1\}$ es una función continua y suprayectiva. Finalmente por contrarecíproca se tiene el resultado deseado. $\square$

Teorema 1.29. *Sea $\{A_\alpha \,|\, \alpha \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico X. Si $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Sea $Y = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Elijamos un punto $x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ y sea $f : Y \to \{0,1\}$ una función continua, donde $\{0,1\}$ tiene la topología discreta. Para todo $\alpha \in \Gamma$ f debe enviar a cada elemento de A_α al valor $f(x)$ porque $x \in A_\alpha$ y A_α es conexo. Observemos que esto ocurre para cada $\alpha \in \Gamma$ y por tanto la función f debe ser la función constante $f(x)$. Aplicando el Teorema 1.28 se concluye que Y es conexo. $\square$

Teorema 1.30. *Supongamos que A es un subespacio conexo de X y que $A \subset Y \subset \overline{A}$. Entonces, Y es un subespacio conexo de X. En particular, la cerradura de un conjunto conexo es conexo.*

Demostración. Sea $f : Y \to \{0,1\}$ una función continua, donde $\{0,1\}$ tiene la topología discreta. Como A es conexo $f|_A$ es una función no suprayectiva. Pero como A es un subconjunto denso de Y se tiene que $Y = \overline{A}$, entonces $f(Y) = f(\overline{A})$ además como f es continua se tiene que $f(Y) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, y como A es conexo, f es constante, entonces $\overline{f(A)} = f(A)$, es decir, f no es suprayectiva. Aplicando el Teorema 1.28 se sigue que Y es conexo. $\square$

Teorema 1.31. *Sean A y B subconjuntos cerrados de un espacio topológico X. Si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos.*

Demostración. Supongamos que A es disconexo. Luego, existe una función $f : A \to \{0,1\}$ continua y suprayectiva. Entonces, $f|_{A\cap B}$ debe ser constante, porque $A \cap B$ es conexo. Supongamos que $f(x) = 1$, para todo $x \in A \cap B$. Así la función $g : A \cup B \to \{0,1\}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua porque sus restricciones a los cerrados A y B son continuas y $g(x) = f(x) = 1$ para todo $x \in A \cap B$. Como, además, g es una función continua y suprayectiva al discreto $\{0,1\}$, lo cual implica que $A \cup B$ es disconexo, contradiciendo la hipótesis. Por tanto A es conexo, similarmente se prueba que B es conexo. □

Definición 1.32. Un espacio X es **conexo por trayectorias** si, para todo $x, y \in X$, existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. A tal f se le llama **trayectoria** que une a x con y.

Definición 1.33. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si, para cada par de puntos $x, y \in A$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

El siguiente es un resultado muy útil para comprobar que un espacio dado es conexo.

Teorema 1.34. *Cualquier espacio conexo por trayectorias es conexo.*
La demostración se encuentra en [1, p. 255].

Haciendo uso del Teorema 1.34 se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.35. *Todo conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo.*

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $x, y \in A$. La función $\gamma : [0,1] \to A$, dada por $\gamma(t) = tx + (1-t)y \in A$, porque A es convexo, y así γ es una trayectoria de x a y. Luego, A es conexo por trayectorias y, por el Teorema 1.34, A es conexo. □

Definición 1.36. Sea X un espacio topológico. Una **cubierta abierta** de un subconjunto A de X, es una familia de conjuntos abiertos $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ tales que $\bigcup_{i \in \Lambda} U_i = A$. Una **subcubierta abierta** de un conjunto A, es un subconjunto de una cubierta abierta cuya unión sigue siendo igual a A.

Definición 1.37. Un espacio topológico X es **compacto** si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.

Teorema 1.38. *Sea X un espacio compacto. Si $F \subset X$ es cerrado, entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ una cubierta abierta de F. Entonces, para cada U_α, existe un abierto U'_α en X tal que $U_\alpha = U'_\alpha \cap F$ ppr que son los elementos de la cubierta abiertos en F. Pero notemos que $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X y, como X es compacto existe una subcubierta finita $\{U'_{\alpha_1}, \ldots, U'_{\alpha_n}\}$ que cubre a X. Entonces, $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita para F. Por tanto, F es compacto. $\square$

Definición 1.39. Una colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la **propiedad de intersección finita** si toda subcolección finita de $\mathcal{A}$ tiene intersección no vacía.

Teorema 1.40. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si toda colección de conjuntos cerrados de X que cumple la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Demostración. Para probar la necesidad, sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita. Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, entonces

$$X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (X \setminus F_\alpha).$$

De esta forma, $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X y, como X es compacto, tiene una subcubierta finita $\{X \setminus F_1, \ldots, X \setminus F_n\}$. Así, $X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus F_i)$ y, en consecuencia,

$$\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$$

Esto es una contradicción, porque $\mathcal{F}$ posee la propiedad de intersección finita.

Para probar la suficiencia, supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X sin subcubiertas finitas, esto es, para cualquier colección finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de $\mathcal{U}$ se cumple que $\bigcup_{i=1}^n U_i \subsetneq X$. Entonces, la colección $\{X \setminus U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X que posee la propiedad de intersección finita. De este modo, por hipótesis,

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} X \setminus U_\alpha \neq \emptyset$$

equivalentemente
$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \subsetneq X$$
lo cual es una contradicción. $\square$

Recordemos el siguiente resultado que es de gran utilidad para comprobar si un conjunto es compacto en un espacio euclidiano.

Teorema 1.41 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si A es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.
Demostración de la necesidad. Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio T_2 y los conjuntos compactos en espacios Hausdorff son cerrados se sigue que A es cerrado. Para ver que A es acotado sea $\mathcal{U} = \{B(\mathbf{0},n) : n \in \mathbb{N}\}$. Se puede ver que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para A y por ser este compacto existen $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ tales que
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\mathbf{0},n_i).$$
Lo cual garantiza que $A \subset B(\mathbf{0},N)$ donde $N = \max\{n_1,\ldots,n_k\}$. Por tanto A es acotado.
Para la suficiencia. Si A es acotado, entonces existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un $r > 0$ tales que $A \subset B(x_0,r)$. Entonces, si $a = -(\|x_0\|+r)$ y $b = \|x_0\|+r$ se tiene $A \subset [a,b]^n$. Como A es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, es tambien un subconjunto cerrado del espacio $[a,b]^n$, el cual es compacto por el Teorema de Tychonoff. Luego por el Teorema 1.38 se sigue que A es compacto. $\square$

La demostración de los siguientes enunciados se encuentra en [1, p. 202 y p. 242]

Teorema 1.42. *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva*

(i) Si X es conexo, entonces Y es conexo.

(ii) Si X es compacto, entonces Y es compacto.

(iii) Si X es compacto, Y es Hausdorff y f es inyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Definición 1.43. Diremos que una propiedad $\mathfrak{P}$ es una propiedad topológica si es una propiedad invariante bajo homeomorfismos. Es decir, si X es un espacio topológico que posee la propiedad $\mathfrak{P}$ y Y es un espacio homeomorfo a X, entonces Y posee la propiedad $\mathfrak{P}$.

Corolario 1.44. *Una consecuencia inmediata del Teorema 1.42 es que la conexidad y compacidad son propiedades topológicas.*

1.2. Topologías iniciales y finales

Definición 1.45. Dados un conjunto X, una familia de espacios topológicos $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y una familia de funciones $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda\}$, definimos la **topología inicial** τ_i de X como la topología más gruesa sobre X que satisface que todas las funciones $f_\alpha : (X, \tau_i) \to Y_\alpha$ son continuas.

Más aún, podemos decir como generar esa topología:

$$\delta = \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \,|\, \alpha \in \Lambda \text{ y } U_\alpha \in Y_\alpha\}$$

es una subbase para la topología inicial de X respecto a los espacios $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y funciones $f_\alpha : X \to Y_\alpha$.

Una propiedad característica de la topología inicial que se deriva de la definición es la siguiente.

Teorema 1.46. *Sea X un espacio topológico con la topología inicial respecto a la familia de espacios $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y funciones $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Se tiene que una función $g : Z \to X$ es continua si y sólo si $f_\alpha \circ g$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_\alpha"] & Y_\alpha \\
Z \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f_\alpha \circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que g es continua. ComoX posee la topología inicial, cada f_α es continua y, por tanto, la composición $f_\alpha \circ g$ es una función continua para cada $\alpha \in \Lambda$. Recíprocamente, supongamos que $f_\alpha \circ g$ es una función continua para cada $\alpha \in \Lambda$. Sea U un abierto de X. Por el Lema 1.25. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $U = f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ para algún índice $\alpha \in \Lambda$ y algún abierto $V_\alpha \subset Y_\alpha$. De esta forma, $g^{-1}(U) = g^{-1} f_\alpha^{-1}(V_\alpha) = (f_\alpha \circ g)^{-1}(V_\alpha)$ es un conjunto abierto. Por tanto, g es continua. $\square$

La topológia producto

Definición 1.47. Consideremos una familia $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ de espacios topológicos no vacíos, con $\Lambda \neq \emptyset$. Definimos el **producto** de los espacios (X_α, τ_α) como el conjunto

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{f : \Lambda \to \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \,|\, \text{para todo } \alpha \in \Lambda \text{ tal que } f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

Notemos que es posible dotar a $\prod X_\alpha$ con la topología inicial respecto a las proyecciones naturales; es decir, respecto a las funciones $\{\pi_\beta : \beta \in \Lambda\}$, donde, para cada $\beta \in \Lambda$,

$$\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta \text{ dada por } \pi_\beta(f) = f(\beta)$$

En tal caso $\delta = \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \,|\, \alpha \in \Lambda \text{ y } U_\alpha \in \tau_\alpha\}$ es una subbase para dicha topología; más aún, el generado de este conjunto bajo intersecciones finitas

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \,|\, \exists F \subset \Lambda \text{ finito} : U_\alpha \in \tau_\alpha \text{ y } U_\alpha = X_\alpha \Leftrightarrow \alpha \notin F\}$$

es una base que genera la topología inicial, llamada **topología producto**. En caso de que $X = X_\alpha$, para toda $\alpha \in \Lambda$, el producto se escribirá simplemente como $\prod_{\alpha \in \Lambda} X$.

Dualmente a la topología inicial, podemos considerar la topología final.

Definición 1.48. Dados un conjunto X, una familia de espacios topológicos $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y una familia de funciones $\{f_\alpha : Y_\alpha \to X \,|\, \alpha \in \Lambda\}$, definimos la **topología final** τ_f de X como la topología más fina sobre X de forma que la funcion $f_\alpha : Y_\alpha \to X$ es continuas para cada $\alpha \in \Lambda$.

Más aún podemos decir como son los abiertos en este caso: $U \subset X$ es un conjunto abierto en X si y sólo si $f_\alpha^{-1}(U)$ es abierto en Y_α para algún $\alpha \in \Lambda$.

Una propiedad característica de esta topología que se deriva de la definición por una demostración similar a la del Teorema 1.46 es la siguiente.

Teorema 1.49. *Sea X es un espacio topológico con la topología final respecto a las familias de espacios $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y funciones $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Se tiene que una función $g : X \to Z$ es continua si y sólo si $g\circ f_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in \Gamma$.*

$$\begin{tikzcd}
Y_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

Definición 1.50. Dado un número κ, diremos que una propiedad topólogica $\mathfrak{P}$ es κ-productiva si, para cada familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ tal que la cardinalidad $|\Gamma| = \kappa$ y cada espacio X_α posee la propiedad $\mathfrak{P}$, el espacio producto $\prod X_\alpha$ posee la propiedad $\mathfrak{P}$. Si la propiedad $\mathfrak{P}$ es κ-productiva para todo número cardinal κ, entonces diremos simplemente que la propiedad $\mathfrak{P}$ es **productiva**.

Los siguientes teoremas serán útiles para analizar cuando el espacio producto de espacios continuos es un continuo; se pueden encontrar unas demostraciones en [12], p. 120, 161, 193.

Teorema 1.51 (Tychonoff). *Un producto no vacío de espacios topológicos es compacto si y sólo si cada espacio factor es compacto.*

Teorema 1.52. *Un espacio producto $\prod M_\alpha$ es metrizable si y sólo si cada M_α es metrizable y M_α es un conjunto singular excepto para una cantidad numerable de índices.*

Teorema 1.53. *Un producto no vacío de espacios topológicos es conexo si y sólo si cada espacio factor es conexo.*

De los Teoremas 1.51 y 1.53 se tiene que la conexidad y compacidad son propiedades productivas, mientras que la metrizabilidad es una propiedad $\aleph_0$-productiva.Pero no es κ- productiva, para cada número cardinal $\kappa > \aleph_o$.

Definición 1.54. Diremos que un subconjunto A de un espacio topológico X es **denso en ninguna parte** si $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Diremos que un subconjunto A de X es **magro** si es la unión de una cantidad numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

Finalmente, enunciamos una versión del Teorema de Categoría de Baire que será de utilidad en el capítulo 5.

Lema 1.55. *Sea X un espacio métrico completo. Si $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos abiertos, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso.*

Demostración. Veamos que para cada conjunto abierto V, $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cap V \neq \emptyset$. Como U_1 es abierto y denso. Luego, existen $x_1 \in X$ y $r_1 > 0$ tal que $B(x_1, r_1) \subset V \cap U_1$. Como U_2 es abierto y denso existen x_2 y $r_2 > 0$ tal que $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap U_2 \subset V \cap (U_1 \cap U_2)$. Aplicando esta definición recursivamente, se tiene una sucesión anidada de bolas abiertas y como el espacio X es métrico y completo la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n)$ es no vacía y, por tanto $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cap V \neq \emptyset$. □

Teorema 1.56. *Un espacio métrico completo no es magro.*

Demostración. Sea X un espacio métrico ,upongamos que X es magro. Luego $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n$es un subconjunto de X tal que $\operatorname{int}(\overline{U_n}) = \emptyset$. Sea $A_n = X \setminus \overline{U_n}$,para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos abiertos y, además,

$$\overline{A_n} = \overline{X \setminus \overline{U_n}} = X \setminus \operatorname{int}(\overline{U_n}) = X \setminus \emptyset = X.$$

Esto implica que cada A_n es denso y, por el Lema 1.55, que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Así, tomando complementos, se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \neq X$, lo cual es una contradicción. □

1.3. Ejemplos básicos de continuos

Definición 1.57. Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un **subcontinuo** es un continuo que es subconjunto de un espacio topológico. Por el término **continuo no degenerado** nos referiremos a un continuo que tiene más de un punto.

Teorema 1.58. *Sean X e Y espacios topológicos. Si X e Y son homeomorfos y X es un espacio métrico, entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sean η la topología de Y, d la métrica $d : X \times X \to [0,\infty)$ de X y τ_d la topología inducida por d. Supongamos que existe un homeomorfismo para $h : Y \to X$ entre Y y X. Sea $m : Y \times Y \to [0,\infty)$ la función definida, para cada $y_1, y_2 \in Y$, por $m(y_1,y_2) = d(h(y_1),h(y_2))$. De esta manera, se puede probar que m es métrica.
Sea η_m la topología inducida por la métrica m, Veamos que $\eta_m = \eta$.

Sea $A \in \eta$, como h^{-1} es continua $h(A) \in \tau_d$. Sea $y \in A$, entonces $h(y) \in h(A)$ y existe un $r > 0$ tal que $B^d(h(y),r) \subset h(A)$. Como $m(y_1,y_2) = d(h(y_1),h(y_2))$ se tiene que $h^{-1}(B^d(h(y),r)) = B^m(y,r)$ y $y \in B^m(y,r) \subset A$. Por tanto $A \in \eta_m$. Recíprocamente, supongamos $A \in \eta_m$. Sea $y \in A$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B^m(y,r) \subset A$. Pero $B^m(y,r) = h^{-1}(B^d(h(y),r))$ y, como h es continua, $B^m(y,r) \in \eta$. Así para cada $y \in A$ existe $U \in \eta$ tal que $y \in U \subset A$. Por tanto, $A \in \eta$. Esto garantiza que $\eta = \eta_m$ □

El Teorema 1.58 nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.59. *Si X e Y son espacios topológicos homeomorfos y X es un continuo, entonces Y es un continuo.*

Demostración. Como X es un continuo, entonces Y es distinto del vacío y por Teorema 1.58, Y es métrico. Además, por el Teorema 1.42, Y es conexo y compacto. Por lo tanto, Y es un continuo. □

1.3.1. Arcos

El siguiente es un primer ejemplo de continuo.

Ejemplo 1.60. El intervalo cerrado $[0,1]$ es un continuo. Todo espacio homeomorfo a él es un continuo y recibe el nombre de **arco**.

Demostración. Veamos que $[0,1]$ es un continuo

(a) El espacio es no vacío; más aún tiene la cardinalidad del continuo.

(b) El espacio es métrico, pues es un subespacio métrico de $\mathbb{R}$.

(c) El espacio es compacto, por el Teorema de Heine-Borel.

(d) El espacio es conexo, por ser convexo en el espacio euclidiano $\mathbb{R}$.

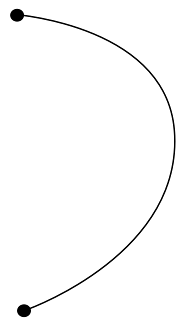

Figura 1.2: Ejemplo de arco

Finalmente, en virtud del Teorema 1.59, todo espacio homeomorfo al espacio $[0,1]$ es un continuo. $\square$

Teorema 1.61. *Si* $h:[0,1]\to[0,1]$ *es un homeomorfismo, entonces* $h(0)=0$ *y* $h(1)=1$ *, o bien* $h(0)=1$ *y* $h(1)=0$.

Demostración. Supongamos lo contrario; es decir, que $h(0)\neq 0$ o $h(1)\neq 1$ y que $h(0)\neq 1$ o $h(1)\neq 0$. Se tienen cuatro casos.

(a) Si $h(0)\neq 0$ y $h(0)\neq 1$, entonces $h(0)=a$ con $0<a<1$. Así, $h(0,1]=[0,a)\cup(a,1]$ y, entonces, $h_{(0,1]}$ es una función continua cuyo dominio es un conjunto conexo y su rango es un conjunto disconexo. Esto contradice al Teorema 1.42.

(b) Si $h(1)\neq 1$ y $h(1)\neq 0$, entonces $h(1)=a$, con $0<a<1$, y, análogamente a (a) se tiene que $h[0,1)=[0,a)\cup(a,1]$. Esto contradice al Teorema 1.42.

(c) Si $h(0)\neq 0$ y $h(1)\neq 0$, entonces $h^{-1}(0)\neq 0$ y $h^{-1}(0)\neq 1$, donde h^{-1} es un homeomorfismo. Así, por (a) se tiene una contradicción.

(d) Si $h(1)\neq 1$ y $h(0)\neq 1$, entonces $h^{-1}(1)\neq 1$ y $h^{-1}(1)\neq 0$; nuevamente, como h^{-1} es un homeomorfismo, se tiene una contradicción por (b).

$\square$

Una consecuencia inmediata de esto es que los extremos del intervalo $[0,1]$ bajo homeomorfismos no cambian.

Corolario 1.62. *Si $h,g:[0,1]\to X$ son homeomorfismos, entonces $h(0)=g(0)$ y $h(1)=g(1)$, o bien $h(0)=g(1)$ y $h(1)=g(0)$.*

Demostración. Como h y g son homeomorfismos, entonces $g^{-1}\circ h:[0,1]\to[0,1]$ es un homeomorfismo y, por el Teorema 1.61,

$$g^{-1}\circ h(0)=0 \text{ y } g^{-1}\circ h(1)=1 \quad \text{o bien} \quad g^{-1}\circ h(0)=1 \text{ y } g^{-1}\circ h(1)=0$$

Aplicando g a las igualdades, se tiene que:

$$h(0)=g(0) \quad \text{y} \quad h(1)=g(1), \quad \text{o bien} \quad h(0)=g(1) \quad \text{y} \quad h(1)=g(0)$$

□

1.3.2. La n-bola cerrada y n-esfera

Ejemplo 1.63. La n-bola cerrada $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq 1\}$ es un continuo. Todo espacio homeomorfo a una n-bola cerrada se llama una ***n*-celda**

Demostración. Veamos que la n-bola cerrada es un continuo.

(a) Es no vacía, pues $\mathbf{0}\in B^n$.

(b) Es un espacio métrico, porque se le está considerando como subespacio métrico de $\mathbb{R}^n$.

(c) Es compacta, por el Teorema de Heine-Borel.

(d) Es conexa, porque es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

□

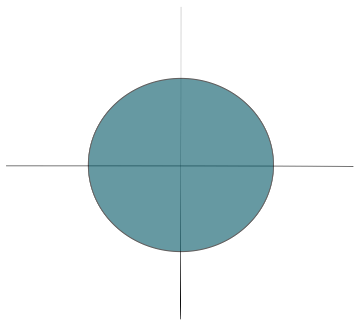

Figura 1.3: 2-bola cerrada.

Ejemplo 1.64. Para cada $n \in \mathbb{N}$, Definimos la esfera n-dimensional en $\mathbb{R}^{n+1}$ como

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

S^n es un continuo para todo $n \in \mathbb{N}$. A los espacios homeomorfos a las n-esferas también se les llamará n-**esferas**. A las 1-esfera se les llamará a cada una **curva cerrada simple**.

Demostración. Veamos que la n-esfera es un continuo

(a) Es claro que el espacio es no vacío pues el punto cuya primera coordenada es 1 y las demás coordenadas son 0 está en S^n.

(b) El espacio es métrico, porque es subespacio métrico de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) El espacio es compacto, por el Teorema de Heine-Borel.

(d) El espacio es conexo porque es la imagen de un espacio conexo ($\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$) bajo una función continua; $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ dada por $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$.

□

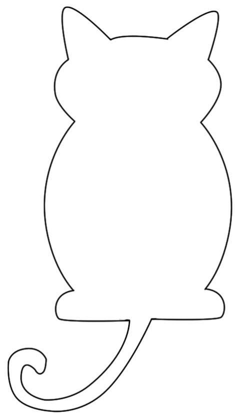

Figura 1.4: Curva cerrada simple.

1.3.3. El cubo de Hilbert

Ejemplo 1.65. Un **cubo de Hilbert** es un espacio topológico homeomorfo al producto numerable del intervalo $[0,1]$, denotado por $[0,1]^{\omega}$ bajo la topología producto. Los elementos de $[0,1]^{\omega}$ son sucesiones infinitas de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ donde $x_i \in [0,1]$ para $i \in \mathbb{N}$. Más aún, el cubo de Hilbert es metrizable por la métrica p dada por

$$p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i - y_i|.$$

Como la conexidad y la compacidad son propiedades productivas, se tiene que el cubo de Hilbert es un espacio conexo y compacto y, por tanto, es un continuo. Más aún, veremos que todo continuo se puede encajar en un cubo de Hilbert.

Definición 1.66. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to [0,1] \mid \alpha \in \Lambda\}$ una familia de funciones continuas. Diremos que la familia $\mathcal{F}$ **separa puntos de conjuntos cerrados** si para cada punto $x \in X$ y cada conjunto cerrado $A \subset X$ tal que $x \notin A$, existe una función $f_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $f_\alpha(x) > 0$ y $f_\alpha|_A = \hat{0}$.

Lema 1.67. *Sea X un espacio topológico T_1. Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ es una familia que separa puntos de conjuntos cerrados entonces la función*

$$\Delta f : X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} [0,1],$$

dada por $\Delta f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda}$, es un encaje.

Demostración. Debemos demostrar que Δf satisface las siguientes condiciones:

(i) Δf es continua;

(ii) Δf es inyectiva;

(iii) $\Delta f : X \to \Delta f(X)$ es un homeomorfismo.

(i) Sea $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda}[0,1] \to [0,1]$ la proyección en la α-ésima coordenada. Como $\pi_\alpha \Delta f = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene que Δf es una función continua. (por [[5],Teorema 2.2, p.101].
(ii) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es un espacio T_1 el conjunto $\{y\}$ es cerrado en X. Entonces, existe una función $f_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $f_\alpha(x) > 0$ y $f_\alpha(y) = 0$. Así, $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$; como $f_\alpha = \pi_\alpha \Delta f$, se sigue que $\pi_\alpha \Delta f(x) \neq \pi_\alpha \Delta f(y)$ y, por tanto, $\Delta f(x) \neq \Delta f(y)$.
(iii) Sea $U \subset X$ un conjunto abierto. Basta demostrar que $\Delta f(U)$ es abierto en $\Delta f(X)$. Veamos que, para cada $x \in U$, existe un conjunto abierto V en $\Delta f(X)$ tal que $\Delta f(x) \in V$ y $V \subset \Delta f(U)$. Dado $x \in U$, sea $f_\alpha \in \mathcal{F}$ una función tal que $f_\alpha(x) > 0$ y $f_\alpha|_{X\setminus U} = \hat{0}$. Sea π_α la α-ésima proyección. Sea

$$V = \Delta f(X) \cap \pi_\alpha^{-1}((0,1]).$$

El conjunto V es abierto en $\Delta f(X)$, pues $\pi_\alpha^{-1}((0,1])$ es abierto en $\prod_{\alpha\in\Lambda}[0,1]$. Notemos que

$$V = \{\Delta f(z) \mid z \in X \text{ y } \pi_\alpha \Delta f(z) > 0\}.$$

Como $\pi_\alpha \Delta f(x) = f_\alpha(x) > 0$ se sigue que $f(x) \in V$. Por último, si $\Delta f(z) \in V$, entonces $f_\alpha(z) > 0$ y, por ende$z \in U$. Por tanto, $\Delta f(x) \in \Delta f(U)$ y $V \subset \Delta f(U)$. □

Teorema 1.68. *Si X es un espacio normal segundo numerable, entonces existe un encaje $e : X \to [0,1]^\omega$.*

Demostración. Como X es segundo numerable, existe $\mathscr{B} = \{V_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para X. Sea A el conjunto

$$A = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, \overline{V_i} \subset V_j\}.$$

Si $(i, j) \in A$, entonces los conjuntos $\overline{V_i}$ y $X \setminus V_j$ son cerrados y ajenos. Luego, por el Lema de Urysohn 1.26, existe una función continua $f_{ij} : X \to [0, 1]$ tal que

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{V_i}, \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus V_j. \end{cases}$$

Veamos que la familia $\{f_{ij} \,|\, (i, j) \in A\}$ separa puntos de conjuntos cerrados. Sea $x \in X$ y sea $F \subset X$ un conjunto cerrado tal que $x \notin F$. Como $\mathscr{B}$ es una base para X, existe $V_j \in \mathscr{B}$ tal que $x \in V_j \subset X \setminus F$. También existe $V_i \in \mathscr{B}$ tal que $x \in V_i$ y $\overline{V_i} \subset V_j$. Así, se tiene que $f_{ij}(x) = 1$, y como $F \subset X \setminus V_j$ se tiene $f_{ij}|_F = \hat{0}$.

Aplicando el Lema 1.67, la familia $\{f_{ij} \,|\, (i, j) \in A\}$ define un encaje

$$\Delta f : X \to \prod_{(i,j)\in A} [0, 1],$$

donde el conjunto A es numerable. Si A es infinito, entonces $\prod_{(i,j)\in A}[0, 1]$ es homeomorfo al $[0, 1]^\omega$. Si A es finito, entonces $\prod_{(i,j)\in A}[0, 1] = \prod_{k=1}^{n}[0, 1] = [0, 1]^n$, para algún $n \geq 0$. Como $[0, 1]^n$ se puede considerar como un subespacio de $[0, 1]^\omega$, en cualquier caso existe un encaje $e : X \to [0, 1]^\omega$. $\square$

Corolario 1.69. *Un espacio métrico (X, d) es compacto si y sólo si es homeomorfo a un subespacio cerrado del cubo de Hilbert.*

Demostración. Supongamos que (X, d) es compacto. Luego, X es segundo numerable (por [[1], proposición 7.33, p. 228], existe un homeomorfismo f de X sobre un subespacio métrico $f(X)$ del cubo de Hilbert. Así $f(X)$ es compacto y, por consiguiente, es un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert. Recíprocamente, si (X, d) es homeomorfo a un subespacio cerrado del cubo de Hilbert, este debe ser compacto. $\square$

1.3.4. La curva seno del topólogo

Ejemplo 1.70. Consideremos el conjunto

$$W = \{(x, \operatorname{sen}(1/x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leq 1\}$$

Definimos la **curva seno del topólogo** como el espacio $\overline{W}$. Dado que $\overline{W} \subset \mathbb{R}^2$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $\overline{W}$ es métrico y, como es cerrado y acotado, por el Teorema de Heine-Borel, $\overline{W}$ es compacto. Además, W es conexo, por ser imagen continua del intervalo $(0,1]$. Así por el Teorema 1.30, $\overline{W}$ es conexo. Por tanto, $\overline{W}$ es un continuo.

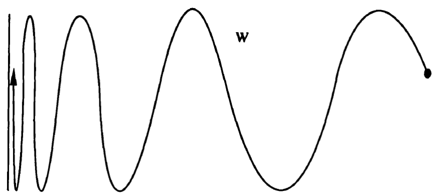

Figura 1.5: Curva seno del topólogo.

1.3.5. La circunferencia de Varsovia

Ejemplo 1.71. Consideremos el espacio formado por la curva seno del topólogo unida con un arco del punto $(0,-1)$ a $(0,-2)$, uno del punto $(0,-2)$ al $(1,-2)$ y otro de $(1,-2)$ a $(1, \operatorname{sen}(1))$. Obsérvese que este es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ y por tanto es métrico y compacto. Finalmente, en virtud del Teorema 1.29, el espacio es un continuo. A todo espacio homeomorfo a este se le conoce como circunferencia de Varsovia.

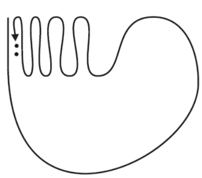

Figura 1.6: Circunferencia de Varsovia.

2 Límites inversos y topología cociente

En este capítulo se presentan dos herramientas de gran utilidad para la construcción de continuos, las intersecciones anidadas y los límites inversos. Como ejemplos de continuos generados de esta forma, se exponen el seudoarco y la curva universal de Sierpiński, los cuales poseen propiedades universales muy interesantes. También se verá que los límites inversos pueden ser llevados a intersecciones anidades y se enuncian condiciones sobre los sistemas inversos bajo las cuales su límite inverso resulta ser un continuo.

2.1. Intersecciones anidadas

Lema 2.1. *Sea $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ una colección de espacios métricos compactos con la propiedad de que $X_{n+1} \subset X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos*

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \,.$$

Si $U \subset X_1$ es abierto y $X \subset U$, entonces existe un natural N tal que $X_n \subset U$ para todo $n \geq N$.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que para cada natural $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \geq n$ tal que $X_{m_n} \not\subseteq U$, por hipótesis sigue ocurriendo que $X_{m_{n+1}} \subset X_{m_n}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{m_n}$, más aún, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{m_n} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ entonces existe un natural $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin X_p$, pero $x \in X_{m_p} \subset X_p$ y $x \in X_p$ lo cual es una contradicción. De esta forma

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{m_n} \subset U$$

Luego como $X_{m_n} \not\subseteq U$ seleccionemos un punto $x_n \in X_{m_n} \setminus U$, de esta forma tenemos una sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que por estar anidada está contenida en $X_{m_1} \setminus$

U y como $X_{m_1} \setminus U$ es un espacio métrico compacto, existe $p \in X_{m_1} \setminus U$ tal que $\{x_n\} \to p$. Luego, si existiera algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in X_{m_n}$ y $p \notin X_{m_{n+1}}$ entonces $p \in X_{m_n} \setminus X_{m_{n+1}}$ y $(X_{m_1} \setminus U) \setminus X_{m_{n+1}}$ es una vecindad de p que contiene un número finito de puntos de $\{x_n\}$ contradiciendo el hecho de que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to p$. De esta forma $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{m_n}$ y entonces $p \in U$, pero p es un elemento de $X_{m_1} \setminus U$ lo cual es una contradicción. Por tanto existe un natural N tal que $X_n \subset U$ para todo $n \geq N$. □

Corolario 2.2 (Teorema de intersección de Cantor)**.** *Bajo las condiciones del Lema anterior, si $X_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $X \neq \emptyset$, compacto y métrico.*

Demostración. Supongamos que $X = \emptyset$. Tomando $U = \emptyset$ en el Lema 2.1 se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset \emptyset$ y, por tanto $X_N = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Finalmente, como X es la intersección de conjuntos cerrados, X es cerrado y, como $X \subset X_1$ y X_1 es métrico, X es compacto y métrico. □

Teorema 2.3. *Sea $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ una colección de continuos tales que $X_{n+1} \subset X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea*

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \,.$$

Entonces, X es un continuo.

Demostración. Por el Corolario 2.2, X es un espacio no vacío, métrico y compacto. Supongamos que X no es conexo. Entonces, existen conjuntos abiertos no vacíos disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$. Como A y B son tambien cerrados (cada uno es complemento del otro) y $X_1 \supset X$ es un espacio normal, existen abiertos no vacíos ajenos U y V en X_1 tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Sea $W = U \cup B$, entonces, por el Teorema 2.1, existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset W$. Por tanto

$$X_N = (X_N \cap U) \cup (X_N \cap V).$$

Como $X \subset X_N$ y $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, se sigue que $X_N \cap U \neq \emptyset$ y $X_N \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, X_N es disconexo, lo cual es una contradicción. Por tanto, X es un continuo. □

Ejemplo 2.4. Hagamos una partición del cuadrado unitario, $S = [0,1] \times [0,1]$, en 9 cuadrados congruentes. Sea X_1 el resultado de eliminar el cuadrado interior de S, $X_1 = S \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Similarmente, sea X_2 el resultado de hacer la partición en 9 cuadrados congruentes de cada uno de los 8 cuadrados restantes, quitando el interior de cada uno, y así, recursivamente, para $X_3, \ldots$ Sea

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \, .$$

Entonces X es un continuo y es llamado la **curva universal de Sierpiński**.

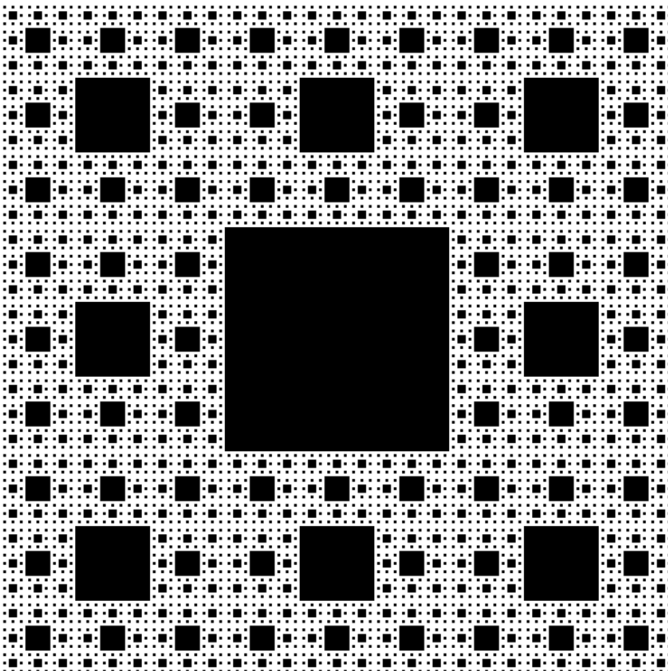

Figura 2.1: Curva universal de Sierpiński.

Definición 2.5. Una **cadena** es una colección finita de conjuntos

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\},$$

en un espacio métrico, tal que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. A los elementos de la cadena se les llama eslabones. Diremos que una cadena es una **ε-cadena** si sus eslabones tienen un diámetro menor que ε.

Para los siguientes desarrollos nos centraremos en cadenas cuyos eslabones consecutivos poseen puntos interiores en común. Es decir, $\operatorname{int} C_i \cap \operatorname{int} C_j \neq \emptyset$, si $|i-j| = 1$.

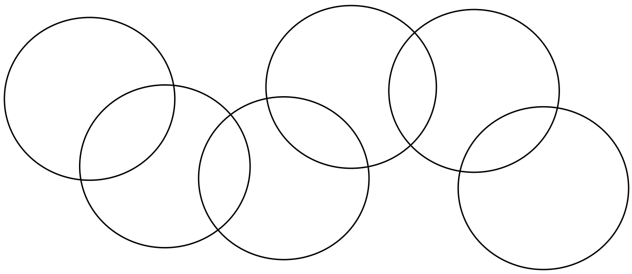

Figura 2.2: Ejemplo de cadena cuyos eslabones son discos en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.6. Consideremos dos cadenas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Diremos que la cadena $\mathcal{D}$ **refina** a la cadena $\mathcal{C}$ si cada eslabón D de la cadena $\mathcal{D}$ esta contenido en el interior de algún eslabón C de la cadena $\mathcal{C}$ tal que el eslabón D no tiene puntos en común con la frontera del eslabón C.

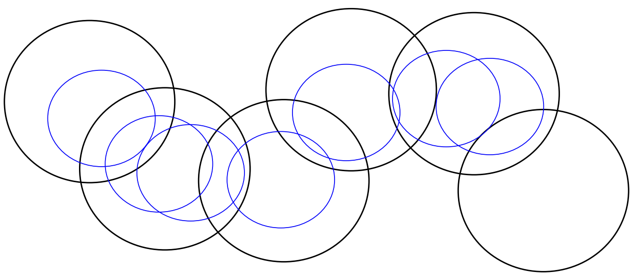

Figura 2.3: Ejemplo de refinamiento de una cadena.

Definición 2.7. Diremos que la cadena $\mathcal{D}$ es una **cadena doblada** dentro de la cadena $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{C}$ con la siguiente propiedad: para cada par de eslabones C_i y C_j de la cadena $\mathcal{C}$ tales que $i+2 < j$ y cada par de eslabones de $\mathcal{D}$, D_s y D_t de la cadena $\mathcal{D}$ tales que

$$C_i \cap D_s \neq \emptyset \neq C_j \cap D_t,$$

existen eslabones D_l y D_m en la cadena $\mathcal{D}$ con $s < m < l < t$ o $s > m > l > t$ tales que
$$D_l \subset C_{I+1} \quad \text{y} \quad D_m \subset C_{j+1}.$$

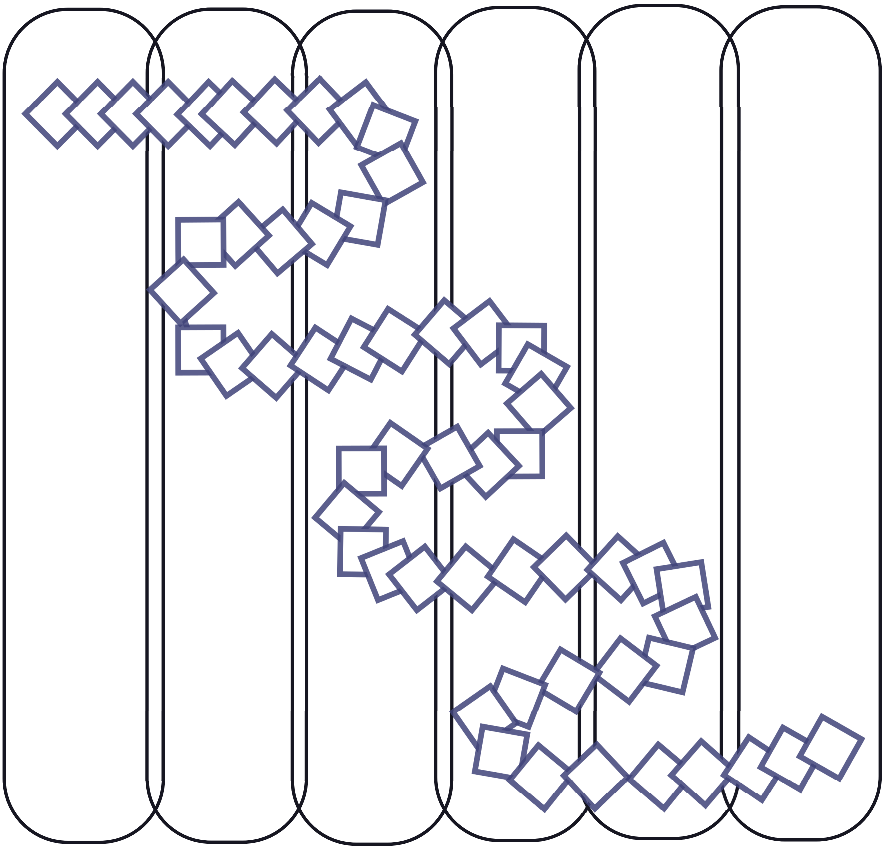

Figura 2.4: Primeros dos pasos en la construcción de un seudoarco.

Consideremos puntos a y b distintos en el plano y una sucesión infinita de cadenas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$, todas formadas por discos que satisfacen las siguientes condiciones, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) El punto a pertenece al primer eslabón y el punto b al último eslabón de la cadena $\mathcal{C}_n$.

(b) La cadena $\mathcal{C}_n$ es una $\frac{1}{n}$-cadena.

(c) La cadena $\mathcal{C}_{n+1}$ está doblada en $\mathcal{C}_n$.

Sea X_n la unión de todos los eslabones de la cadena $\mathcal{C}_n$. Observemos que X_n es un continuo. Además, $X_{n+1} \subset X_n$,para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual forma una sucesión decreciente de continuos

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots$$

y, en virtud del Lema 2.1,

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

es un continuo, llamado el **seudoarco.**

2.2. Límites inversos

Definición 2.8. Sean D un conjunto dirigido, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \,|\, \alpha \in D\}$ una colección de espacios topológicos y $\{f_{\alpha\beta} \,|\, \alpha \preceq \beta$ y $f_{\alpha\beta} : X_\beta \to X_\alpha\}$ una colección de funciones continuas tales que $f_{\alpha\alpha} = 1_{X_\alpha}$ y si $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$, entonces $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$. Entonces diremos que la terna $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ es un **sistema inverso**. A los espacios X_α los llamaremos **espacios factores** y a las funciones $f_{\alpha\beta}$ **funciones de enlace**.

Definición 2.9. Supongamos que $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ es un sistema inverso. Definimos el **límite inverso** del sistema inverso como el subconjunto del espacio producto $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$, que consiste en los puntos x tales que $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ para todo $\alpha \preceq \beta$.

Los siguientes teoremas nos ayuda a aclarar como son los límites inversos de espacios factores continuos.

En lo sucesivo, si $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ es un sistema inverso, M_β denota al conjunto

$$M_\beta = \{x \in \prod_{\alpha\in D} X_\alpha \,|\, \forall \gamma \preceq \beta \in D : x_\gamma = f_{\gamma\beta}(x_\beta)\}.$$

Teorema 2.10. *Si $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ es un sistema inverso y para cada $\alpha \in D$, X_α es un espacio Hausdorff compacto, entonces el límite inverso del sistema es un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$.*

Demostración. Probemos que para cada $\beta \in D$, M_β es un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$. Sea $x \in \prod_{\alpha\in D} X_\alpha \setminus M_\beta$, entonces existe un elemento $\gamma \in D$ tal que $\gamma \preceq \beta$ y $f_{\gamma\beta}(x_\beta) \neq x_\gamma$. Como X_γ es Hausdorff existen abiertos disjuntos U y V en X_γ tales que $f_{\gamma\beta}(x_\beta) \in U$ y $x_\gamma \in V$ y además $f_{\gamma\beta}$ es continua lo que asegura la existencia de un conjunto abierto W en X_β tal que $f_{\gamma\beta}[W] \subset U$. Sea A un conjunto abierto de $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ tal que $x \in A$, $\pi_\beta[A] = W$ y $\pi_\gamma[A] = V$. Entonces $A \cap M_\beta = \emptyset$ y por tanto M_β es cerrado.

Notemos además que si $\gamma \preceq \delta$, entonces $M_\delta \subset M_\gamma$ y como D es un conjunto dirigido la colección $\{M_\beta \mid \beta \in D\}$ posee la propiedad de intersección finita y como $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ es compacto se sigue que $\bigcap_{\beta\in D} M_\beta \neq \emptyset$ es cerrado. $\square$

Si $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ es un sistema inverso denotaremos su límite inverso por $\varprojlim_{\alpha\in D} X_\alpha$, $\varprojlim_D X_\alpha$ o $\varprojlim X_\alpha$ según el contexto.

Observación.

$$\varprojlim_D X_\alpha = \bigcap_{\beta\in D} M_\beta = \{x \in \prod_{\alpha\in D} X_\alpha \mid \forall \alpha,\beta \in D : \beta \preceq \alpha \text{ implica que } f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha\}$$

Teorema 2.11. *Sea $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ un sistema inverso. Para cada $\beta \in D$, sea $\Gamma = \{\gamma \in D \mid \gamma \npreceq \beta\} \cup \{\beta\}$, entonces $M_\beta \cong \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$.*

Demostración. Sea $\varphi : M_\beta \to \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ definida por $(\varphi(x))_\gamma = x_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Probemos que la función es biyectiva. Sean $x, y \in M_\beta$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $\forall \gamma \in \Gamma : (\varphi(x))_\gamma = (\varphi(y))_\gamma$ y por tanto $x_\gamma = y_\gamma$, también para cada $\alpha \preceq \beta : x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha$ y por tanto $\forall \alpha \in D : x_\alpha = y_\alpha$ implica que $x = y$ y φ es inyectiva.

Por otra parte, sea $x \in \prod_{\alpha\in\Gamma} x_\alpha$, entonces $z \in \prod_{\alpha\in D} x_\alpha$ definido por

$$z_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } \alpha \in \Gamma \\ f_{\alpha\beta}(x_\beta) & \text{si } \alpha \notin \Gamma \end{cases}$$

satisface que $\varphi(z) = x$ y por tanto φ es suprayectiva.

Finalmente observemos que si $\alpha \in D$ y U_α es un abierto en X_α, entonces

$$M_\beta \cap \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \begin{cases} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) & \text{si } \alpha \in \Gamma \\ \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha & \text{si } \alpha \notin \Gamma \end{cases}$$

lo cual asegura que φ es una función continua y abierta y por tanto un homeomorfismo. $\square$

Definición 2.12. Si D es un conjunto dirigido y E es un subconjunto de D, diremos que E es **cofinal** en D si para cada $\alpha \in D$ existe un $\beta \in E$ tal que $\alpha \preceq \beta$.

Definición 2.13. Supongamos que $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ es un sistema inverso. Si E es un subconjunto cofinal de D, entonces $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ es un **subsistema cofinal** de $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$.

Teorema 2.14. *Supongamos que D es un conjunto dirigido, E un subconjunto cofinal de D y $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ un sistema inverso. Entonces existe una función continua inyectiva con dominio $\varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ y rango $\varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$.*

Demostración. Sea

$$\varphi : \varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\} \to \varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$$

definida por $\varphi(x)_\alpha = x_\alpha$ para todo $\alpha \in E$. Notemos que si $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $\forall \beta \in D$ $x_\alpha = \varphi(x)_\alpha = \varphi(y)_\alpha = y_\alpha$ y para cada $\alpha \in D \setminus E$ existe un $\beta \in E$ tal que $\alpha \preceq \beta$, de esta forma $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha$ por tanto $\forall \alpha \in D : x_\alpha = y_\alpha$ implica que $x = y$ y entonces φ es inyectiva. Para probar que es suprayectiva, sea $y \in \varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ y definamos $x \in \varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ por $x_\alpha = y_\alpha$ para toda $\alpha \in E$ y para $\alpha \in D \setminus E$ sea β tal que $\alpha \preceq \beta$, entonces $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$. Además $x \in \varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ y por tanto φ es suprayectiva.

Finalmente, sea $\alpha \in E$ y U_α un abierto en X_α, como

$$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\} = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$$

(el primero en el producto sobre E y el segundo en el producto sobre D) se tiene que la función es continua como se deseaba. □

Corolario 2.15. *Sean E un subconjunto cofinal de un conjunto dirigido D y $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ un sistema inverso donde los espacios factores son Hausdorff y compactos. Entonces $\varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ y $\varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ son homeomorfos.*

Demostración. Por el Teorema 2.14 existe una función continua biyectiva con dominio $\varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ y rango $\varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$, luego por el Teorema 1.51 $\varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D\}$ es compacto, también $\varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ es Hausdorff y aplicando el Teorema 1.42 la función f es un homeomorfismo. □

Corolario 2.16. *Si* $(X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ *un sistema inverso donde cada* X_α *es un continuo y* D *tiene un subconjunto cofinal numerable, entonces* $\varprojlim_D (X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ *es un continuo.*

Demostración. Sea E un subconjunto cofinal de D. Por el Corolario 2.15 los límites $\varprojlim_D (X_\alpha, f_{\alpha\beta}, D)$ y $\varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ son homeomorfos y por el Teorema 1.59 basta verificar que $\varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ es continuo. Por la observación anterior

$$\varprojlim_D X_\alpha = \bigcap_{\beta\in D} M_\beta \quad \text{donde} \quad M_\beta = \{x \in \prod_{\alpha\in D} X_\alpha \,|\, \forall \gamma \preceq \beta \in D : x_\gamma = f_{\gamma\beta}(x_\beta)\},$$

y por el Teorema 2.11 y el hecho de que la metrizabilidad, conexidad y compacidad se preservan bajo productos numerables se sigue que cada M_β es un continuo para cada $\beta \in E$. Además si $\beta \preceq \delta$ y $x \in M_\delta$ entonces $\forall \gamma \preceq \delta \in D$: $x_\gamma = f_{\gamma\delta}(x_\delta)$ y $x_\gamma = f_{\gamma\delta}(x_\delta) = f_{\gamma\beta}(f_{\beta\delta}(x_\delta)) = f_{\gamma\delta}(x_\beta)$ de forma que $x \in M_\beta$ y entonces la sucesión $\{M_\alpha\}_{\alpha\in E}$ es una sucesión numerable anidada. Finalmente por el Teorema 2.2 $\varprojlim_E \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ es un continuo. $\square$

Teorema 2.17. *Si* $X = \varprojlim_D \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, E\}$ *y* Y *es un subespacio de* X*, entonces* $Y = \varprojlim_D \{Y_\alpha, g_{\alpha\beta}, D\}$ *donde* $Y_\alpha = \pi_\alpha(Y)$ *y* $g_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}|_{Y_\beta}$.

Demostración. Sea Y un subespacio de X, entonces

$$Y \subset \{x \in \prod_{\alpha\in D} \,|\, \forall \alpha, \beta \in D : \beta \preceq \alpha \text{ implica que } f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha\}$$

entonces de $Y \subset \prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ se tiene que $Y = \prod_{\alpha\in D} \pi_\alpha(Y)$ y como $\forall \alpha, \beta \in D$: $\beta \preceq \alpha$ implica que $f_{\alpha\beta}|_{Y_\beta}(y_\beta) = y_\alpha$ entonces haciendo $Y_\alpha = \pi_\alpha(Y)$ y $g_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}|_{Y_\beta}$ se tiene que $\forall \alpha, \beta \in D : \beta \preceq \alpha$ implica que $g_{\alpha\beta}(y_\beta) = y_\alpha$. Por tanto $Y = \varprojlim_D \{Y_\alpha, g_{\alpha\beta}, D\}$. $\square$

A continuación se expondrán algunos límites inversos y sus propiedades cuando el conjunto dirigido es el de los números naturales, en ese caso al sistema inverso se le llamará sucesión inversa y se denotará por $\{X_i, f_i\}$, donde $f_i : X_{i+1} \to X_i$ es la función $f_{i\,i+1}$. En caso de que los espacios factores sean un mismo espacio X y las funciones f_i una misma función a la sucesión inversa se le denotará simplemente por $\{X, f\}$.

Teorema 2.18. *Sean $X = \varprojlim\{X_i, f_i\}$ e $Y = \varprojlim\{Y_i, g_i\}$ límites inversos de sucesiones inversas. X es homeomorfo a Y si existe una sucesión de homeomorfismos $h_i : X_i \to Y_i$ tales que $h_i \circ f_i(x) = g_i \circ h_{i+1}(x)$ para todo $x \in X_i$ y $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $H : X \to Y$ la función definida por $(H(x))_i = h_i(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces H está bien definida pues la imagen de todo punto x de X satisface que $(H(x))_i = h_i(x_i) = h_i \circ f_i(x_{i+1}) = g_i \circ h_{i+1}(x_{i+1}) = g_i \circ (H(x))_{i+1}$. Además como cada homeomorfismo $h_i : X_i \to Y_i$ es biyectivo, y determinan las coordenadas de la función H, ésta también es biyectiva. La continuidad está garantizada porque para cada $i \in \mathbb{N}$ $\pi_i \circ H = h_i \circ \pi_i$ es una función continua. Finalmente se puede ver que $G : Y \to X$ dada por $(G(x))_i = h_i^{-1}(x_i)$ es la función inversa de H y también es continua. Por tanto X e Y son homeomorfos. $\square$

Ejemplo 2.19. Consideremos el límite inverso de la sucesión $\{X, f\}$ donde $X = S^1$ y $f : S^1 \to S^1$ está dada por $f(z) = z^2$ (multiplicación en el plano complejo). Por el corolario 2.16 se tiene que el límite inverso es un continuo. A todo continuo homoemorfo a este límite se le llamará **solenoide diádico** y se le representa por $\Sigma(2)$. Geométricamente el solenoide $\Sigma(2)$ se puede describir como la intersección de una sucesión de toros sólidos

$$T_1 \supset T_2 \supset \ldots T_n \supset T_{n+1} \supset \ldots$$

de tal forma que T_{n+1} da dos vueltas dentro de T_n sin autointersecarse.

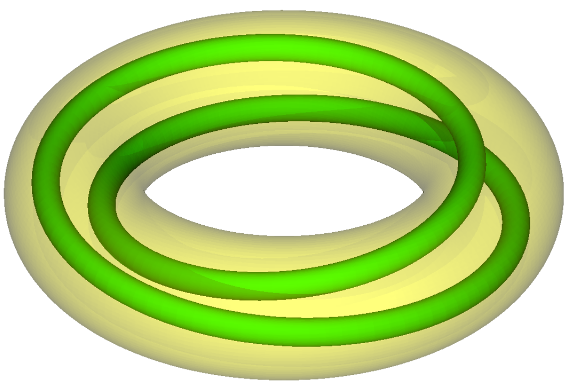

Figura 2.5: $T_1 \supset T_2$ en la construcción geometrica de $\Sigma(2)$.

Ejemplo 2.20. Generalizando el ejemplo anterior, dado $p \geq 2$, el límite inverso de la sucesión $\{X, f\}$, donde $X = S^1$ y $f(z) = z^p$ es un continuo. A todo espacio homeomorfo a él se le llama **solenoide p-ádico** y se denota por $\Sigma(p)$.

Ejemplo 2.21. Consideremos la sucesión inversa $\{[0,1], f_i\}$ donde $f_i : X_{i+1} \to X_i$ está dada por

$$f_i(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -2t+2 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, nuevamente por el corolario 2.16, el límite inverso es un continuo; a todo continuo homeomorfo a él se le conoce como el **arcoiris de Knaster**.

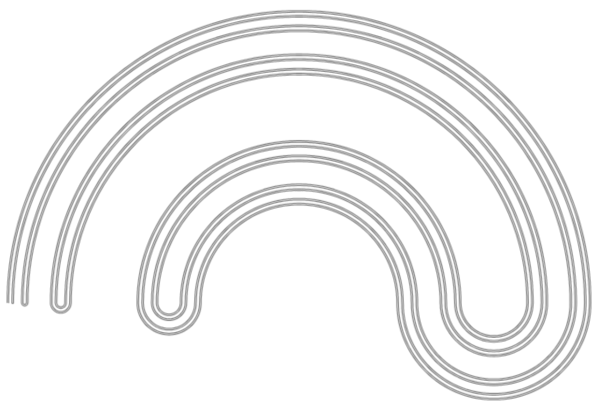

Figura 2.6: Una representación del arcoiris de Knaster.

2.3. Topología cociente

Los espacios cociente representan uno de los métodos principales para generar nuevas topologías a partir de una ya conocida. En particular, permiten crear espacios topológicos bastante interesantes y poseen, bajo ciertas restricciones, la cualidad de generar continuos si el espacio topológico inicial es uncontinuo.

La topología cociente es la topología final respecto de una función suprayectiva, podemos pensar que esta topología se genera al identificar los puntos del espacio dado que tienen la misma imagen bajo dicha función, y "pegarlos", en el sentido de que estos puntos representarán un solo punto en el nuevo espacio topológico. Esto, en particular, es equivalente a dar una partición de un espacio topológico y considerar su espacio partición como la topología cociente inducida por la proyección natural.

A continuación se dará la definición formal de esta topología.

Definición 2.22. Sea X un espacio topológico, Y un conjunto y $\pi : X \to Y$ una función suprayectiva. Definamos una topología en Y declarando a un subconjunto $U \subset Y$ abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X. Esta topología es llamada la **topología cociente**, la topología inducida por la función π_α y la denotaremos por τ_π.

Formalmente se tiene la siguiente definición de partición:

Definición 2.23. Una **partición** de un conjunto X es una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos no vacíos de X tal que, para cada $A, B \in \mathcal{D}$ se tiene que, $A \cap B = \emptyset$ y $\bigcup \mathcal{D} = X$. A la función $\pi : X \to \mathcal{D}$ que asocia a cada $x \in X$ con el único elemento en $\mathcal{D}$, que lo contiene, le llamaremos la proyección natural asociada a la partición $\mathcal{D}$.

Se sabe que toda relación de equivalencia sobre un conjunto dado X induce una partición de X.

Definición 2.24. Sea $\mathcal{D}$ una partición del espacio topológico (X, τ). Consideremos la topología $\tau_{\mathcal{D}}$, definida por $\tau_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{D} : \bigcup \mathcal{A} \in \tau\}$. Al espacio topológico $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ le llamaremos **espacio partición** de X.

Teorema 2.25. *Para una partición $\mathcal{D}$ de un espacio topológico (X, τ), $\tau_{\mathcal{D}}$ es la topología cociente inducida por la proyección natural $\pi : X \to \mathcal{D}$.*

Demostración. Sea τ_π la topología cociente inducida por la función π. Note que, para cada $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$,se tiene que $\pi^{-1}[\mathcal{A}] = \{x \in X : \pi(x) \in \mathcal{A}\} = \bigcup \mathcal{A}$, de forma que $\mathcal{A} \in \tau_\pi$ si y sólo si $\pi^{-1}[A]$ es un subconjunto abierto en X y esto ocurre si y sólo si $\bigcup\{A \subset X : A \in \mathcal{A}\} \in \tau_X$ si y sólo si $\mathcal{A} \in \tau_{\mathcal{D}}$. $\square$

2.3.1. Propiedades

Teorema 2.26. *Un conjunto $A \subset X/\sim$ es cerrado en el espacio cociente si y sólo si $\pi^{-1}(A)$ es un subconjunto cerrado de X*

Demostración. Si A es cerrado en $X/\sim$ entonces $(X/\sim) \setminus A$ es abierto y como $\pi^{-1}((X/\sim) \setminus A) = X \setminus \pi^{-1}(A)$ se sigue que $\pi^{-1}(A)$ es cerrado en X. $\square$

Teorema 2.27. *Una función f de un espacio cociente $X/\sim$ a un espacio topológico Y es continua si y sólo si la composición $f \circ \pi$ es continua.*

Demostración.
Demostración de la necesidad. Si f es continua entonces $f \circ \pi$ es continua por ser composición de funciones continuas.
Para probar la suficiencia. Si $f \circ \pi$ es continua, entonces, dado cualquier conjunto abierto $U \subset Y$, el conjunto $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ es abierto en X. Y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto en $X/\sim$. $\square$

Supongamos que tenemos dos espacios topológicos X y Y y una función continua suprayectiva f de X sobre Y. Considérese la relación de equivalencia $E(f)$ sobre el conjunto X determinada por la partición $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ de X. En las preimágenes de f. La función $f : X \to Y$ puede ser representada por la composición $\overline{f} \circ \pi$, donde $\pi : X \to X/E(f)$ es la proyección natural y $\overline{f}$ es la función del espacio cociente $X/E(f)$ sobre Y definido por $\overline{f}(f^{-1}(y)) = y$, por el Teorema 2.27 la función $\overline{f}$ es continua. Se tiene entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\
& X/E(f) \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Claramente, $\overline{f}$ es una función continua inyectiva de $X/E(f)$ sobre Y, pero generalmente no necesita ser un homeomorfismo. De hecho, si f es una función inyectiva de el espacio discreto X de cardinalidad $\aleph_1$ sobre el intervalo $\mathbb{I}$, el espacio cociente $X/E(f)$ es discreto, así que f no puede ser un homeomorfismo.

A continuación estudiaremos la clase de todas las funciones f tales que $\overline{f}$ es un homeomorfismo. Estas funciones constituyen una generalización de las funciones abiertas y de las funciones cerradas.

Definición 2.28. Una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ es una **función cociente** si es la composición de una proyección natural seguida de un homeomorfismo, es decir, si existe una relación de equivalencia $\sim$ sobre el conjunto X y un homeomorfismo $f' : X/\sim \to Y$ tal que $f = f' \circ \pi$, donde $\pi : X \to X/\sim$ es la proyección natural.

Teorema 2.29. *Sea f una función suprayectiva de un espacio topológico X a un espacio topológico Y. Las siguientes condiciones son equivalente:*

(i) f es una función cociente.

(ii) El conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en X si y sólo si U es abierto en Y.

(iii) El conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X si y sólo si F es cerrado en Y.

(iv) La función $\overline{f} : X/E(f) \to Y$ es un homeomorfismo.

Demostración.
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Supongamos que f es una función cociente. Entonces $f = f' \circ \pi$, donde $f' : X/\sim \to Y$ es un homeomorfismo y $\pi : X \to X/\sim$ es la proyección natural. Por definición de la topología cociente, el conjunto $f^{-1}(U) = \pi^{-1}(f'^{-1}(U))$ es abierto en X si y sólo si $f'^{-1}(U)$ es abierto en $X/\sim$; como f' es un homeomorfismo, esto ocurre si y sólo si U es abierto en Y.
(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Como $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$ se tiene que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X si y sólo si $f^{-1}(Y \setminus F)$ es abierto en X y, por (ii), esto ocurre si y sólo si $Y \setminus F$ es abierto en Y.
(iii) $\Rightarrow$ (iv)
Supongamos que f satisface (iii). Como la función $\overline{f} : X/E(f) \to Y$ escontinua, inyectiva y suprayectiva, es suficiente probar que, para todo cerrado $F \subset X/E(f)$, el conjunto $\overline{f}(F)$ es cerrado en Y. Pero, dado que $f^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}\overline{f}^{-1}\overline{f}(F) = \pi^{-1}(F)$ es cerrado en X, el conjunto $\overline{f}(F)$ es cerrado en Y, por (iii).
(iv) $\Rightarrow$ (i)
Es inmediata de la definición de función cociente. $\square$

Corolario 2.30. La composición de dos funciones cocientes es una función cociente.

Demostración. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones cocientes, entonces U es abierto en Z si y sólo si $g^{-1}(u)$ es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}\left(g^{-1}(u)\right)$ es abierto en X. Pero esto es: U es abierto en Z si y sólo si $(g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en X. Por tanto $g \circ f$ es una función cociente. $\square$

Teorema 2.31. *Si la composición $g \circ f$ de funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ es una función cociente, entonces $g : Y \to Z$ es una función cociente.*

Demostración. Claramente $g(Y) = Z$, porque $g \circ f(X) = Z$. Si la imagen inversa $g^{-1}(U)$ de $U \subset Z$ es abierta en Y, entonces $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en X porque f es continua, y U es abierto en Z, porque $g \circ f$ es una función cociente. $\square$

Corolario 2.32. Si para una función continua $f : X \to Y$ existe un conjunto $A \subset X$ tal que $f(A) = Y$ y la restricción $f|_A$ es cociente, entonces f es una función cociente.

Demostración. Dado que $f|_A = f \circ i_A$, es una composición de funciones continuas y es una función cociente, se tiene, por el Teorema 2.31, que f es función cociente. $\square$

Corolario 2.33. Toda función cociente inyectiva es un homeomorfismo.

Demostración. Por el Teorema 2.29 si $f : X \to Y$ es suprayectiva y cociente, U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Por tanto, si f es cociente inyectiva, entonces f es biyectiva continua y abierta y por tanto un homeomorfismo. $\square$

A continuación se caracterizan las relaciones de equivalencia para las que la función cociente es cerrada o abierta.

Teorema 2.34. *Para una relación de equivalencia $\sim$ sobre un espacio topológico X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) La proyección natural $\pi : X \to X/\sim$ es cerrada (abierta).

(ii) Para todo conjunto cerrado (abierto) $A \subset X$ la unión de todas las clases de equivalencia que intersectan a A es cerrada (abierta) en X.

(iii) Para todo conjunto abierto (cerrado) $A \subset X$ la unión de todas las clases de equivalencia que están contenidas en A es abierta (cerrada) en X.

Demostración. La equivalencia de (i) y (ii) se sigue de la proposición 2.26 y de la definición de la topología cociente, la equivalencia de (ii) y (iii) es una consecuencia inmediata de las leyes de De Morgan, pues se tiene la siguiente igualdad:

$$X \setminus \left(\bigcup \{[x] \in X/\sim \mid [x] \cap A \neq \emptyset\} \right) = \bigcap \{[x] \in X/\sim \mid [x] \subset X \setminus A\}.$$

□

Corolario 2.35. La función cociente $f : X \to Y$ es cerrada (abierta) si y sólo si el conjunto $f^{-1}f(A) \subset X$ es cerrado (abierto) para todo cerrado (abierto) $A \subset X$.

Los espacios cociente son de gran importancia en la teoría de Continuos. Sin embargon, no todos los espacios cocientes de un continuo son continuos, incluso cuando los miembros de $X/\sim$ son subconjuntos cerrados de X. Sobre esto se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 2.36. *Si un espacio de Hausdorff es una imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces es metrizable.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede encontrar en [12], pág. 166. □

Teorema 2.37. *El espacio cociente de un espacio métrico compacto X es metrizable si y sólo si el espacio cociente es Hausdorff.*

Demostración. La proyección natural $\pi : X \to X/\sim$ es suprayectiva y continua, la suficiencia se sigue del Teorema 2.36, y como todo espacio métrico es Hausdorff se cumple tambien la necesidad. □

Corolario 2.38. El espacio cociente de un continuo es un continuo si y sólo si el espacio cociente es Hausdorff.

Ejemplo 2.39. Sea $X = [-1,1]$ y sea

$$X/\sim = \{\{x,-x\} : -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\},\{1\}\}.$$

Como no existen abiertos ajenos que separen a los puntos $\{-1\}$ y $\{1\}$ entonces el espacio cociente no es Hausdorff y por tanto no es un continuo por el corolario anterior.

2.3.2. Semi-continuidad superior

Definición 2.40. Sea (X,τ) un espacio topológico. Una partición $\mathcal{D}$ de X es **semi-continua superiormente** si y sólo si, para cualesquiera $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tales que $D \subset U$, existe $V \in \tau$ con $D \subset V$ y tal que si, $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Adoptemos los siguientes términos:

Definición 2.41. Sea $\mathcal{D}$ una partición de X. Entonces, $A \subset X$ es **$\mathcal{D}$-saturado** si y sólo si existe $D \subset \mathcal{D}$ tal que $A = \bigcup D$.

Claramente, si $\pi : X \to \mathcal{D}$ es la proyección natural, cualquier $\pi^{-1}(D)$ con $D \subset \mathcal{D}$ es $\mathcal{D}$-saturado. También, $A \subset X$ es $\mathcal{D}$-saturado si y sólo si $A = \pi^{-1}[\pi(A)]$. De este modo, si V es $\mathcal{D}$-saturado y abierto en X, entonces $\pi(V)$ es abierto en D.

El siguiente teorema nos dará otras formas de tratar la semi-continuidad superior.

Teorema 2.42. *Sea (X,τ) un espacio topológico, sea $\mathcal{D}$ una partición de X, y sea $\pi : X \to \mathcal{D}$ la proyección natural. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\mathcal{D}$ es una partición semi-continua superiormente.

(2) π es una función cerrada.

(3) Si $D \in \mathcal{D}, U \in \tau$ y $D \subset U$, entonces existe $V \in \tau$ tal que $D \subset V \subset U$ y V es $\mathcal{D}$-saturado.

Demostración.
$(1) \Rightarrow (2)$
Sea F un subconjunto cerrado de X. Como $\pi(F)$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}\{[\mathcal{D} \setminus \pi(F)]\}$ es abierto, basta demostrar que $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(F)]$ es abierto. Para esto sea $u \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(F)]$, entonces $\pi(u) \in \mathcal{D} \setminus \pi(F)$ y, por tanto, $\pi(u) \subset X \setminus F$. Si $z \in \pi(u) \cap F$, entonces $\pi(z) \cap \pi(u) \neq \emptyset$, equivalentemente $\pi(z) = \pi(u)$ y, por tanto, $\pi(u) \in \pi(F)$. Como $X \setminus F \in \tau$ existe $V \in \tau$ con $\pi(u) \subset V$ tal que si $x \in V$, entonces $\pi(x) \subset X \setminus F$. Claramente, $u \in V$. También, $\pi(V) \subset X \setminus \pi(F)$, porque, si $\pi(x) \in \pi(F)$, entonces $\pi(x) = \pi(y)$ para algún $y \in F$, así que $y \in \pi(x) \cap F$ y $\pi(x) \nsubseteq X \setminus F$, implica que $x \notin V$. Por tanto, $V \subset \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(F)]$. Esto muestra

que $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(F)]$ es abierto.
$(2) \Rightarrow (3)$
Sean $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tales que $D \subset U$. Entonces, es claro que el conjunto $V = \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus (X \setminus U)]$ satisface las condiciones en 3).
$(3) \Rightarrow (1)$
Es claro de la definición de semi-continuidad superior. □

Teorema 2.43. *Cualquier partición semi-continua superiormente de un espacio métrico compacto es metrizable.*

Demostración. Por el Teorema 2.37 es suficiente demostrar que tal partición es Hausdorff.
Sea (X, τ) un espacio métrico compacto, sea $\mathcal{D}$ una partición semi-continua superior de X, y sea $\pi : X \to \mathcal{D}$ la proyección natural. Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ tal que $D_1 \neq D_2$. Como D_1 y D_2 son subconjuntos cerrados de X y X es normal, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $D_1 \subset U_1$ y $D_2 \subset U_2$. Como $\mathcal{D}$ es semi-continua superiormente, por el Teorema 2.42, existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $D_1 \subset V_1 \subset U_1, D_2 \subset V_2 \subset U_2$ y V_1, V_2 son $\mathcal{D}$-saturados.
Notemos que, como $D_1 \subset V_1, D_1 \in \pi(V_1)$. Similarmente, $D_2 \in \pi(V_2)$.Además, $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son abiertos en $\mathcal{D}$. Por otro lado como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tenemos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Entonces, como $\pi^{-1}[\pi(V_1)] = V_1$ y $\pi^{-1}[\pi(V_2)] = V_2$ se tiene que $\pi(V_2) \cap \pi(V_2) = \emptyset$. Por tanto, $(\mathcal{D}, \tau_{\mathcal{D}})$ es Hausdorff. □

Corolario 2.44. Cualquier partición semi-continua superiormente de un continuo es un continuo.

Demostración. Dado que $\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función continua, preserva la compacidad y la conexidad. Así aplicando el Teorema 2.43, se sigue que su espacio partición es un continuo. □

2.3.3. Ejemplos

El n-espacio proyectivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{D}$ la partición de S^n dada por $\mathcal{D} = \{\{x, -x\} : x \in S^n\}$. Se puede ver que $\mathcal{D}$ es una partición semi-continua superiormente. Entonces, por el Teorema 2.43, el espacio partición, denotado por P^n, es un continuo. A P^n se le llama el espacio n-proyectivo.

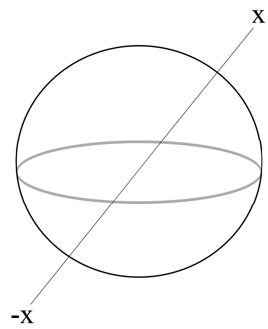

Figura 2.7: Identificaciones del 2-espacio proyectivo.

La banda de Moebius. Sea $\mathcal{D}$ la partición del cuadrado unitario $\mathbb{I} = [0,1] \times [0,1]$ cuyos elementos son.

$$\mathcal{D} = \{\{(x,0),(1-x,1)\} : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{\{(x,y)\} : x \in [0,1], 0 < y < 1\}.$$

Luego, notemos que $\mathcal{D}$ es una partición semi-continua superiormente. Entonces, por el Teorema 2.43, el espacio partición es un continuo; se conoce como la banda de Moebius y es un ejemplo de una superficie no orientada en $\mathbb{R}^3$.

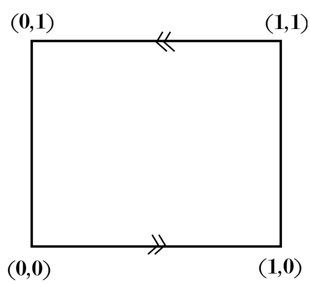

Figura 2.8: Identificaciones de la banda de Moebius

Los espacios X/A. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea A un sobconjunto cerrado no vacío de X. Sea $\mathcal{D}_A$ la partición de X dada por

$$\mathcal{D}_A = \{A\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus A\}.$$

Es inmediato que $\mathcal{D}_A$ es semi-continua superiormente. Denotamos su espacio partición como X/A.

El cono topológico. Sea $X = Y \times [0,1]$ donde X tiene la topología producto. Entonces si $A = \{(x,1) : x \in X\}$; el espacio partición X/A se conoce como cono topológico sobre Y y es denotado por $CT(Y)$. El vértice de $CT(Y)$ es el punto A, y la base de $CT(Y)$ es el conjunto $\pi(\{(x,0) : x \in X\})$. Entonces, si Y es un continuo, $CT(Y)$ es un continuo por el Teorema 2.43. En el caso que Y es un espacio métrico compacto, $CT(Y)$ es homeomorfo al cono geométricamente conocido y en esos casos se referira a $CT(Y)$ como el cono sobre Y. Cabe señalar que los conos topológicos son una gran fuente de ejemplos y contra ejemplos en la teoría de continuos. Por ejemplo el cono doble $CT(CT(Y))$ tiene la sorprendente propiedad de que es homeomorfo a $CT(Y) \times [0,1]$.

Ejemplo 2.45. En caso de que $Y = S^1$ se tiene que el cono de Y coincide justamente con la representación usual de un cono, la cual tiene como base un circulo que se colapsa a un punto.

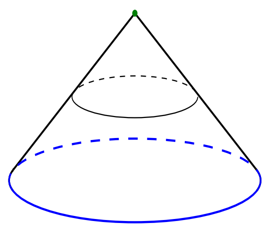

Figura 2.9: Cono topológico de S^1.

La suspensión topológica. Considerando el cono topológico $TC(X)$ con base B, el espacio partición $CT(X)/B$ es conocido como la suspensión topológica sobre X y es denotado por $ST(X)$. Se tiene que si, X es un espacio métrico compacto, entonces $ST(X)$ es un continuo.

Ejemplo 2.46. La suspensión de S^1 es homeomorfa a dos conos identificados por sus bases como se muestra en la imagen.

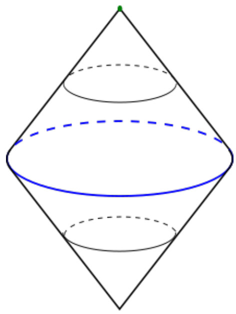

Figura 2.10: $ST(S^1)$

3 Propiedades topológicas en continuos

3.1. Continuos indescomponibles

Definición 3.1. Un continuo X es **descomponible** si existen $A, B \subset X$ subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Diremos que X es **indescomponible** si no es descomponible.

Ejemplo 3.2.

(a) El intervalo $[0,1]$ es descomponible, pues, para cada $a \in (0,1)$, se tiene que $[0,a]$ y $[a,1]$ son continuos y $[0,1] = [0,a] \cup [a,1]$.

(b) La curva cerrada simple es descomponible, pues, tomando dos puntos distintos, se tienen una descomposición de la curva cerrada simple en dos arcos distintos.

(c) La curva seno del topólogo es un continuo descomponible, pues podemos considerar los subcontinuos propios.

$$A = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \,|\, x \in (0, 1/2]\} \cup \{(0,y) \,|\, y \in [-1,1]\} \text{ y}$$

$$B = \{(x, \operatorname{sen}(1/x) \,|\, x \in [1/2, 1]\},$$

(d) El círculo de Varsovia tiene una descomposición natural como la curva seno del topólogo unida con un arco.

Definición 3.3. Una función continua $f : X \to Y$ se llamará **indescomponible** si, para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene $f(A) = Y$ o $f(B) = Y$.

Observación. Un continuo es indescomponible si y sólo si su función identidad es indescomponible.

Teorema 3.4. *Sea X un límite inverso de una sucesión inversa de funciones continuas indescomponibles. Entonces, X es indescomponible.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que existen A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Entonces, por el Teorema 2.17 $A = \varprojlim\{A_i, g_i\}$, donde $A_i = \pi_i(A)$ y $g_i = f_i|_{A_{i+1}}$. Como $A \neq X$ existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \neq X_N$ pues de lo contrario $A_i = X_i$ y $g_i = f_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$ implica que $A = X$. Más aún para cada $n > N$ se tiene que

$$f_{N+1} \circ \cdots \circ f_{n-1} : A_n \to A_N$$

lo cual implica que $A_n \neq X_n$, de lo contrario $A_N = X_N$. Similarmente para $B = \varprojlim\{B_i, h_i\}$ donde $B_i = \pi_i(B)$ y $h_i = f_i|_{B_{i+1}}$ podemos encontrar un natural M tal que $\forall m \geq M : B_m \neq X_m$. Finalmente tomando $L = \text{máx}\{M, N\}$ se tiene que A_{L+1} y B_{L+1} son subcontinuos propios de X_{L+1} con $A_{L+1} \cup B_{L+1} = X_{L+1}$ y ademas $f_L(A_{L+1}) = A_L$ y $f_L(B_{L+1}) = B_L$ lo cual contradice que las funciones son indescomponibles. □

Corolario 3.5. *El solenoide p-ádico y el arcoiris de Knaster son continuos indescomponibles.*

Demostración. Por la definición de solenoide p-ádico. (Vea ejemplo (2.20), basta comprobar que la función $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = z^p$ es indescomponible. Si A y B son dos subcontinuos de S^1 tales que $S^1 = A \cup B$ entonces A y B deben ser arcos de la circunferencia y, más aún uno de ellos, digamos A, cubre media circunferencia. Como f mapea cada p-$CT(CT(Y))$'esima parte de la circunferencia en la circunferencia entera $f(A) = S^1$, pues si $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [a, b]$ y $b - a = 2\pi/p$, entonces $z^p = e^{i\phi}$ con $\phi \in [pa, pb]$ con $pa - pb = 2\pi$. Por tanto f es indescomponible y el solenoide p-ádico es un continuo indescomponible.

Para el arcoiris de Knaster, Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -2t + 2 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Afirmamos que f es indescomponible. En efecto,si A y B son subcontinuos de I distintos de I tales que $I = A \cup B$, entonces $\frac{1}{2} \in A$ o $\frac{1}{2} \in B$. Supongamos que $\frac{1}{2} \in A$. Entonces, $[0, \frac{1}{2}] \subset A$ o $[\frac{1}{2}, 1] \subset A$, de cualquier forma: $[0,1] \subset f([0, \frac{1}{2}]) \subset$

$f(A)$. Por tanto $f(A) = [0,1]$. Similarmente si $\frac{1}{2} \in B$, entonces $f(B) = [0,1]$. Por tanto f es indescomponible y el arcoiris de Knaster es un continuo indescomponible. $\square$

Definición 3.6. Sea X un continuo y $x \in X$, La **composante** de x, denotada por C_x, es la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a x.

Teorema 3.7. *Si X es un continuo indescomponible, entonces sus composantes son disjuntas.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ y sean C_x y C_y sus respectivas composantes. Si $z \in C_x \cap C_y$, por estar z en la composante de x existe un subcontinuo propio D de X tal que $z, x \in D$ y similarmente existe un subcontinuo propio E de X tal que $z, y \in E$. Sea $w \in C_y$, entonces existe un subcontinuo propio F de X tal que $w, y \in F$. De esta forma, $E \cap F \neq \emptyset$ y, por tanto, $E \cup F$ es un subcontinuo propio de X. Nuevamente, como $z \in D \cap (E \cup F)$ se tiene que $D \cup E \cup F$ es un subcontinuo propio de X y, como $w, x \in D \cup E \cup F$, entonces $w \in C_x$. Así, $C_y \subset C_x$. Análogamente se prueba que $C_x \subset C_y$. Por tanto si las composantes son distintas, se sigue que son ajenas. $\square$

Teorema 3.8. *Un continuo es indescomponible si y sólo si cada subcontinuo propio es denso en ninguna parte en él.*

Demostración. Supongamos que X es descomponible. Entonces, existen Y y Z, subcontinuos propios de X, tales que $X = Y \cup Z$. Así $\overline{X \setminus Y} \subset Z$ y, por tanto, Y no es denso en ninguna parte.
Supongamos que X tiene un subcontinuo propio Y que no es denso en ninguna parte. Entonces, $\overline{X \setminus Y}$ es un subconjunto propio de X NO VACÍO. Entonces, $X = Y \cup \overline{X \setminus Y}$; si $\overline{X \setminus Y}$ es conexo, ésta es una descomposición de X. Si $\overline{X \setminus Y} = D \cup E$ donde D y E son subconjuntos cerrados no vacíos y ajenos de X, considerando $A = Y \cup D$ y $B = Y \cup E$ se tiene que $(A \cup B) = X$ y $(A \cap B) = Y$ son conexos y por el Teorema 1.31, A y B son conexos. En cualquier caso, se tiene una descomposición de X. $\square$

Teorema 3.9. *Las composantes de un continuo indescomponible son conjuntos magros.*

Demostración. Sea C una composante del continuo X y sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X. Sea $x \in C$ y consideremos $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\} \mid x \notin B\}$. Para $B \in \mathcal{B}'$

sea D_B la componente de $X \setminus B$ que contiene a x. Sea $C' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} D_B$. Entonces $C' \subset C$ y recíprocamente para cada $z \in C$ existe un subcontinuo propio Y de X tal que $x, z \in Y$. Tomando un elemento $B \in \mathcal{B}'$ tal que $B \subset X \setminus Y$ se tiene que $Y \subset D_B$ y entonces $z \in C'$. Por tanto $C = C'$ el cual es magro porque cada D_B es denso en ninguna parte y por el Teorema 3.8. $\square$

Corolario 3.10. *Todo continuo indescomponible tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Demostración. Sea X un continuo indescomponible, por el Teorema 3.7 las composantes de X son ajenas por pares y X, que es igual por el Teorema 3.9 a la unión de sus composantes, es igual a una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, por tanto por el Teorema 1.56, X debe poseer una cantidad no numerable de composantes. $\square$

Corolario 3.11. *Si X es un continuo indescomponible, entonces X no es conexo por trayectorias.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible y conexo por trayectorias. Dados dos puntos $x, y \in X$ existe una trayectoria $\gamma : I \to X$ de x a y. Entonces $\gamma[I] \subsetneq X$ es un subcontinuo propio de X, porque X es indescomponible y tiene como elementos a x e y. Entonces x e y pertenecen a la misma composante. Entonces X sólo tiene una composante lo que contradice el Corolario 3.10. Por tanto X no es conexo por trayectorias. $\square$

3.2. Conexidad por trayectorias

Teorema 3.12. *La curva seno del topólogo no es conexa por trayectorias*

Demostración. Veamos que no existe una función continua $f : [0,1] \to X$ donde X es la curva seno del topólogo tal que $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (1, \operatorname{sen}(1))$. Si existiera tal f, por continuidad existe un $\delta > 0$ tal que si $t \in [0, \delta)$ entonces $|f(t)| < \frac{1}{2}$. Como $[0, \delta]$ es conexo y $\pi_1 \circ f$ es una función continua se sigue que $(\pi_1 \circ f)[0,1]$ es un intervalo, más aún si $x_0 = (\pi_1 \circ f)(\delta)$, entonces $[0, x_0] \subset (\pi_1 \circ f)[0, \delta]$. Así para cada $x \in (0, x_0]$ existe $t \in [0, \delta]$ tal que $f(t) = (x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}))$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\frac{1}{x_0} + \frac{\pi}{2}}{2\pi} < n$$

entonces tomando $x = \frac{1}{2n\pi} - \frac{\pi}{2}$ se tiene que $0 < x < x_0$ y existe algún $t \in (0, \delta)$ tal que $f(t) = (x, \text{sen}(\frac{1}{x}))$ pero $\text{sen}(\frac{1}{x}) = -1$ y $|(x, -1)| \geq 1 > \frac{1}{2}$ lo cual es una contradicción. $\square$

Ejemplo 3.13.

(a) Como los espacios $[0, 1]$ y la n-bola cerrada son convexos, se tiene que son conexos por trayectorias.

(b) El arcoiris de Knaster y el solenoide p-ádico no son conexos por trayectorias por ser indescomponibles (Teorema 3.11).

3.3. Propiedad del punto fijo

Definición 3.14. Dado un espacio topológico X, diremos que una función $f : X \to X$ tiene un punto fijo si existe un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Si X satisface que toda función continua tiene un punto fijo diremos que el espacio X poseee la **propiedad del punto fijo (PPF.)**

Teorema 3.15. *La propiedad del punto fijo es una propiedad topológica.*

Demostración. Supongamos que $X \cong Y$ y X posee la propiedad del punto fijo. Sea $f : Y \to Y$ una función continua, si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo entre X e Y se tiene que $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ es una función continua, entonces existe un punto $x \in X$ tal que $(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x$, esto es $f(h(x)) = h(x)$. Por tanto Y poseee la propiedad del punto fijo. $\square$

La demostración del siguiente enunciado se encuentra en [5, p. 340 y p. 341]

Teorema 3.16 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Toda función continua $f : B^n \to B^n$ admite al menos un punto fijo.*

Teorema 3.17. *El cubo de Hilbert posee la propiedad del punto fijo*

Demostración. Sea $H = \prod_{n=1}^{\infty}[0, \frac{1}{n}]$ el cubo de Hilbert y sea $f : H \to H$ una función continua. Sea $P_n : H \to H$ la función definida por

$$(P_n(x))_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } n < i \end{cases}$$

Entonces el conjunto $H_n = P_n(H)$ es un producto de intervalos, homeomorfo a la bola cerrada unitaria en $\mathbb{R}^n$. Como la composición $P_n \circ f|_{H_n} : H_n \to H_n$ es continua, el Teorema de Brouwer asegura la existencia de un punto fijo $x_n \in H_n$. Y además

$$d(x_n, f(x_n)) = d(P_n(f(x_n)), f(x_n)) \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}}.$$

Como H es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Denotemos por x al límite de tal sucesión. Entonces

$$d(x, f(x)) = d(\text{lím}\, x_n, f(\text{lím}\, x_n)) = \text{lím}\, d(x_n, f(x_n)) = 0$$

la cual converge a 0 porque la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ es convergente y por tanto el complemento de las sumas parciales $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ tiende a 0. Lo que implica que x es un punto fijo para f. $\square$

Definición 3.18. Sea X un continuo, diremos que X es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε cadena que cubre a X y cuyos eslabones son conjuntos abiertos.

Teorema 3.19 (Del número de Lebesgue)**.** *Si X es un espacio métrico compacto, para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe un número $\delta > 0$ tal que para cada $A \subset X$ tal que* $\operatorname{diam} A < \delta$*, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$. Tal número δ se conoce como el **número de Lebesgue** para U.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es compacto $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita $U_1, \ldots, U_n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $C_i = X \setminus U_i$ y definamos la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$$

Como la función es continua sobre un conjunto compacto alcanza un mínimo $\delta > 0$. Entonces si $A \subset X$ tal que $\operatorname{diam} A < \delta$, existe $x \in X$ tal que $A \subset B(x, \delta)$ y como $f(x) \geq \delta$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $d(x, C_i) \geq \delta$ pero esto es equivalente a que $B(x, \delta) \subset U_i$ y por tanto $A \subset U_i$. $\square$

Teorema 3.20. *Sea X es un continuo encadenable y $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ es una ε cadena que cubre a X, entonces existe una ε cadena $C'' = \{C''_1, \ldots, C''_n\}$ que cubre a X tal que para cada $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ se cumple que $\overline{C''_k} \cap \overline{C''_{k+2}} = \emptyset$.*

Demostración. Haremos la construcción recursivamente.

Sea $A_1 = X \setminus \bigcup_{k=2}^{n} C_k$. Como $\bigcup_{k=2}^{n} C_k$ es un conjunto abierto, A_1 es cerrado y, como la cadena cubre a X, $A_1 \subset C_1$, entonces existe un abierto C''_1 de X tal que $A_1 \subset C''_1 \subset \overline{C''_1} \subset C_1$ y de esta forma $\{C''_1, \ldots, C_n\}$ es una ε cadena que cubre a X. Luego, si para $k < n$ se han construido los eslabones $C''_1, \ldots, C''_{k-1}$ de tal forma que $\{C''_1, \ldots, C''_{k-1}, C_k \ldots, C_n\}$ cubre a X, definimos

$$A_k = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} C''_j \cup \bigcup_{j=k+1}^{n} C_j \right)$$

y por el mismo argumento que se usó con A_1, A_k es cerrado y $A_k \subset C_k$, entonces existe un abierto C''_k en X tal que $A_k \subset C''_k \subset \overline{C''_k} \subset C_k$. De esta forma $\{C''_1, \ldots, C''_k, C_{k+1}, \ldots, C_n\}$ es una ε cadena que cubre a X. Finalmente, aplicando el proceso recursivamente, existe la ε cadena $\{C''_1, \ldots, C''_n\}$ que cubre a X y por construcción para cada $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ se tiene $\overline{C''_k} \cap \overline{C''_{k+2}} = \emptyset$. $\square$

Definición 3.21. Sea X un continuo. Diremos que $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión definitoria de cadenas** para X, si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente

i) Cada $\mathcal{C}_n$ es una $\frac{1}{2^n}$ cadena tal que $\overline{C^n_i} \cap \overline{C^n_j} \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

(ii) $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_n$ de tal forma que la cerradura de cada eslabón en $\mathcal{C}_{n+1}$ está contenida en algún eslabón de $\mathcal{C}_n$.

Teorema 3.22. *Si X es un continuo encadenable, entonces X posee una sucesión definitoria de cadenas*

Demostración. Se dará la construcción de la sucesión de forma recursiva. Como X es encadenable existe una $\frac{1}{2}$ cadena $\mathcal{D}$ y por el Teorema 3.20 existe una $\frac{1}{2}$ cadena $\mathcal{C}_1$ cuyos eslabones cumplen $\overline{C^1_i} \cap \overline{C^1_j} \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. Luego, si suponemos que tenemos las cadenas $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ que satisfacen las propiedades deseadas procedemos a construir $\mathcal{C}_n$ de la siguiente forma: Sea λ_{n+1} el número de Lebesgue de la cadena $\mathcal{C}_n$ y tomemos $\eta = \text{mín}\{\lambda_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\}$. Como X es encadenable, existe una η cadena $\mathcal{D}_{n+1}$ que cubre a X y por el Teorema 3.20 existe una η cadena $\mathcal{C}_{n+1}$ que cubre a X y cuyos eslabones satisfacen

$\overline{C_i^{n+1}} \cap \overline{C_j^{n+1}} \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. Además para cada eslabón $C \in \mathcal{C}_{n+1}$ se tiene que diam $(\overline{C})$= diam $(C) < \eta \leq \delta_{n+1}$ y por el Teorema 3.19 existe $E \in \mathcal{C}_n$ tal que $\overline{C} \subset E$ lo cual garantiza que $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_n$. Aplicando el procedimiento recursivamente se tiene una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como se deseaba. □

Teorema 3.23. *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un punto $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(f(x_\varepsilon), x_\varepsilon) < \varepsilon$, entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos un $x_n \in X$ tal que $d(f(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$. Se tiene entonces una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X y como X es compacto existe una subsucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea y el límite de tal sucesión. Entonces por la continuidad de la métrica

$$d(f(y), y) = d(\text{lím}\, f(y_n), \text{lím}\, y_n) = \text{lím}\, d(f(y_n)), y_n) = 0$$

y por tanto y es un punto fijo para f. □

Teorema 3.24. *Todo continuo encadenable posee la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean X un continuo encadenable y $f : X \to X$ una función continua. Consideremos la sucesión definitoria de cadenas $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuya existencia está garantizada por el Teorema 3.22 y veamos que X cumple las condiciones del Teorema 3.23. Sea $\varepsilon > 0$, elijamos un natural N tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Denotemos por

$$\mathcal{C}_N = \{C_1, \ldots, C_n\}$$

a la N-ésima cadena de la sucesión y definamos los siguientes subconjuntos de X:

$$U = \{x \in X \mid \text{Si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } i \leq j\}$$

$$V = \{x \in X \mid \text{Si } x \in C_i \text{ y } f(x) \in C_j \text{ entonces } i \geq j\}$$

Veamos que U es un conjunto abierto de X. Sea $x \in U$, entonces existen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in C_i$ y $f(x) \in C_j$ con $i \leq j$. Como f es continua y C_i es abierto existe algún $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset C_i$ y $f(B(x, \delta)) \subset C_j$, de donde se concluye que $B(x, \delta) \subset U$ y por tanto U es abierto. De la misma forma, invirtiendo la desigualdad entre i y j se prueba que V es abierto. Además $X = U \cup V$ y como X es conexo se sigue que $U \cap V \neq \emptyset$. Sea $x \in U \cap V$, entonces existe un

$i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x, f(x) \in C_i$ y por tanto $d(f(x), x) \le \operatorname{diam} C_i \le \frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Por tanto, en virtud del Teorema 3.23 se concluye que X tiene la propiedad del punto fijo. □

3.4. Puntos de corte

Definición 3.25. Sea X un espacio conexo T_1. Un punto $x \in X$ es un **punto de corte** de X si $X \setminus \{x\}$ no es conexo. Por el contrario si x no es un punto de corte se dirá que es un **punto de no corte**. Una **cortadura** de X es una terna $\{x, U, V\}$ donde x es un punto de corte de X y U y V forman una disconexión de $X \setminus \{x\}$.

Teorema 3.26. *Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Si $x \in X$ es un punto de corte de X, entonces $h(x)$ es punto de corte de Y.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto de corte de X y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces $X \setminus \{x\}$ no es conexo y como $X \setminus \{x\} = h^{-1}[Y \setminus \{h(x)\}]$, el conjunto $Y \setminus \{h(x)\}$ no puede ser conexo. Por tanto $h(x)$ es un punto de corte en Y. □

Teorema 3.27. *Si X es un continuo y $\{x, U, V\}$ es una cortadura de X, entonces $U \cup \{x\}$ y $V \cup \{x\}$ son continuos.*

Demostración. Probemos que $U \cup \{x\}$ es conexo. Sea $f : X \to X$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in U \cup \{x\} \\ x & \text{si } z \in V \end{cases}$$

entonces $f(X) = U \cup \{x\}$ y f es continua porque está bien definida y su restricción sobre los cerrados no disjuntos $U \cup \{x\}$ y $V \cup \{x\}$ es continua. Entonces $U \cup \{x\}$ es conexo por ser imagen continua de un espacio conexo. También $X \setminus V = U \cup \{x\}$ es cerrado y compacto. Por tanto $U \cup \{x\}$ es un continuo y por una demostración similar $V \cup \{x\}$ también lo es. □

Teorema 3.28. *Si X es un continuo y $\{p, U, V\}$ es una cortadura de X, entonces U y V tienen puntos de no corte de X.*

Demostración. Supongamos que U no tiene puntos de no corte. Entonces todo punto de U es un punto de corte de X, así para cada x, existen U_x y V_x abiertos tales que $\{x, U_x, V_x\}$ es una cortadura de X. Observemos que si U_x y V_x intersectan a $V \cup \{p\}$, entonces $U_x \cap (V \cup \{p\})$ y $V_x \cap (V \cup \{p\})$ forman una disconexión de $V \cup \{p\}$ contradiciendo el Teorema 3.27, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que los abiertos U_x están contenidos en U. También por el mismo argumento para cada $x, y \in X$ o $U_x \subset U_y$ o bien $U_y \subset U_x$ y por tanto la colección de continuos $\{U_x \cup \{x\} | x \in U\}$ está dirigida. Por el Teorema 2.2 $\bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$ es un continuo no vacío contenido en U. Sea $q \in \bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$, entonces $U_q \subset U$ y si $r \in U_q$ entonces $q \notin U_r$ lo cual implica que $q \notin U_r \cup \{r\}$ y esto contradice que $q \in \bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$. Por tanto U contiene algún punto de no corte y analogamente se prueba que V también posee algún punto de no corte. $\square$

Corolario 3.29. *Si X es un continuo con más de un punto, X tiene por lo menos dos puntos de no corte.*

Demostración. Si X no posee puntos de corte, entonces como X no es degenerado, $|X| > 1$ y posee por lo menos dos puntos de no corte. Si X posee algún punto de corte $p \in X$, sea $\{p, U, V\}$ una cortadura de X, entonces por el Teorema 3.28 U y V poseen cada uno por lo menos un punto de no corte. Así X tiene por lo menos dos puntos de no corte. $\square$

Definición 3.30. Un punto de corte $x \in X$ separa al punto a del punto b si existe una cortadura $\{x, U, V\}$ tal que $a \in U$ y $b \in V$. Denotemos por $E(a, b)$ al conjunto

$$\{a, b\} \cup \{z \in X \,|\, z \text{ separa } a \text{ de } b\}$$

Y definamos el **orden de separación** sobre $E(a, b)$ como $p \leq q$ si $p = q$ o p separa a de q. Escribiremos $p < q$ si $p \leq q$ y $p \neq q$.

Teorema 3.31. *El orden de separación es un orden total en $E(a, b)$*

Demostración. Para cada $x \in E(a, b)$ elijamos como $\{x, U_x, V_x\}$ una cortadura de X tal que $a \in U_x$ y $b \in V_x$. Si $r, s \in E(a, b) \setminus \{a, b\}$ entonces $s \in V_r$ o $s \in U_r$. En el primer caso r separa a de s y entonces $r < s$. Si $s \in U_r$, como $V_r \cup \{r\}$ es conexo y está contenido en la unión de U_s y V_s debe estar contenido en alguno de ellos y como $b \in V_r \cup \{r\}$ se debe cumplir $V_r \cup \{r\} \subset V_s$. Así $r \in V_s$ y s separa a de r y esto es $s < r$. $\square$

Teorema 3.32. *Si $E(a,b)$ tiene más de dos puntos, su topología de orden es más gruesa que su topología de subespacio.*

Demostración. Sea U un abierto en la topología de orden de $E(a,b)$, supongamos sin pérdida de generalidad que U es un elemento de la subbase para la topología de orden de $E(a,b)$ (definida en el Ejemplo 1.14). Entonces $U=(p,\rightarrow)$ o bien $U=(\leftarrow,p)$ para algún $p\in E(a,b)$. Denotemos por $\{p,U_p,V_p\}$ a una cortadura de X tal que $a\in U_p$ y $b\in V_p$.

- Si $U=(p,\rightarrow)$, veamos que $U=E(a,b)\cap V_p$. Si $x\in U$, entonces $p<x$ y p separa a de x. Si suponemos que $x\notin V_p$, entonces $V_p\cup\{p\}$ está contenido en $U_x\cup V_x$, y como $V_p\cup\{p\}$ es conexo se sigue que $V_p\cup\{p\}\subset U_x$ o $V_p\cup\{p\}\subset V_x$, como $b\in V_p$ y $b\notin U_x$ se sigue que $V_p\cup\{p\}\subset V_x$, así $p\in V_x$ y x separa a de p, esto es $x<p$ lo cual contradice que $p<x$. Por tanto $x\in V_p$ y así $x\in E(a,b)\cap V_p$. Recíprocamente, si $x\in E(a,b)\cap V_p$ entonces p separa a de x y $p<x$ implica que $x\in(p,\rightarrow)$. Por tanto $(p,\rightarrow)=E(a,b)\cap V_p$.
- Si $U=(\leftarrow,p)$, veamos que $U=E(a,b)\cap U_p$. Si $x\in U$, entonces $x<p$ y x separa a de p. Si suponemos que $x\notin U_p$, entonces $x\in V_p$ pero esto significa que p separa a de x, es decir, $p<x$ lo que contradice que $x<p$. Por tanto $x\in U_p$ y entonces $U\subset E(a,b)\cap U_p$. Recíprocamente, si $x\in E(a,b)\cap U_p$ entonces no puede ocurrir $p<x$ por que entonces $x\in(p,\rightarrow)$ implica que $x\in V_p$ por el apartado anterior, contradiciendo que U_p y V_p sean ajenos. Por tanto $(\leftarrow,p)=E(a,b)\cap U_p$.

De cualquier forma $E(a,b)\cap U_p$ y $E(a,b)\cap V_p$ son conjuntos abiertos en la topología de subespacio para $E(a,b)$. Por tanto la topología de orden en $E(a,b)$ es más gruesa que la topología de subespacio. □

Teorema 3.33. *Si X es un continuo con exactamente dos puntos de no corte, digamos a y b entonces $E(a,b)=X$ y la topología sobre X es la topología de orden.*

Demostración. Si $x\in X$ y x es distinto de a y b, entonces x es un punto de corte y para una cortadura $\{x,U_x,V_x\}$ de X se tiene por el Teorema 3.28 que U y V deben tener exactamente uno de los puntos a o b así que $x\in E(a,b)$ y por tanto $E(a,b)=X$.
Por el Teorema 3.32 la topología de orden es más gruesa que la topología dada

sobre X, supongamos entonces que U es un abierto en X y sea $x \in U$. Si x es distinto de a y b, veamos que U debe contener algún intervalo de la forma $(r,s) = \{q \in X \,|\, r < q < s\}$ que contiene al punto x. Supongamos lo contrario, entonces siempre que $x \in (r,s)$ ocurre que $(r,s) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, más aún $(r,s) \cap (X \setminus U) \subset [r,s] \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ donde $[r,s] = \{z \in X \,|\, r \leq z \leq s\}$ entonces la familia $\mathcal{F} = \{[r,s] \cap (X \setminus U) \,|\, x \in (r,s)\, r,s \in X\}$ es una familia de conjuntos cerrados porque $X \setminus [r,s] = (\leftarrow, r) \cup (s, \rightarrow)$ es un conjunto abierto por el Teorema 3.32. También $\mathcal{F}$ posee la propiedad de intersección finita; consideremos $[r_1, s_1] \cap (X \setminus U), \ldots, [r_n, s_n] \cap (X \setminus U)$ una subcolección finita de elementos de $\mathcal{F}$, entonces la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} (r_i, s_i)$ es un abierto no vacío pues es una intersección finita de abiertos y x es un elemento de cada uno de ellos, por ser abierto debe existir algún abierto básico en este caso de la forma (r,s) que contenga a x y tal que $(r,s) \subset \bigcap_{i=1}^{n} (r_i, s_i)$ pero por hipótesis $(r,s) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} (r_i, s_i) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ y entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} ([r_i, s_i] \cap (X \setminus U)) \neq \emptyset$$

Entonces $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos cerrados que posee la propiedad de intersección finita en el compacto X, lo cual implica que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Pero es claro que

$$\bigcap \{[r,s] \,|\, x \in (r,s)\} = \{x\}$$

Supongamos que $\{x\} \subsetneq \bigcap \{[r,s] \,|\, x \in (r,s)\}$, tomando $y \in X$ con $y \neq x$. Si $x < y$ sea $w \in (x,y)$, luego $x \in (a,w)$ y $y \notin [a,w] \Rightarrow y \notin \bigcap \{[r,s] \,|\, x \in (r,s)\}$. Se verifica de manera similar para el caso $y < x$.

y entonces

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{[r,s] \,|\, x \in (r,s)\} \cap (X \setminus U) = \{x\} \cap (X \setminus U) = \emptyset$$

lo cual es una contradicción. Por tanto existen $r,s \in X$ tales que $x \in (r,s) \subset U$. El mismo argumento se utiliza en caso de que $x = a$ o $x = b$ usando las familias $\{[a,r] \cap (X \setminus U)\}$ y $\{[s,b] \cap (X \setminus U)\}$ respectivamente. □

Definición 3.34. Sean X e Y espacios totalmente ordenados. Una función $f : X \to Y$ es un **isomorfismo de orden** si y sólo si f es biyectiva y $x < y$ si y sólo si $f(x) < f(y)$.

Observación. Todo isomorfismo de orden es un homeomorfismo respecto a las topologías de orden en X e Y.

Demostración. Por definición se tiene que f es una función biyectiva. Luego observemos que

$$f^{-1}(\leftarrow,x)=(\leftarrow,f^{-1}(x)) \quad \text{y} \quad f^{-1}(x,\rightarrow)=(f^{-1}(x),\rightarrow)$$

lo que prueba que f tiene como preimagen de elementos de la subbase de Y a elementos de la subbase de X. Entonces f es continua.
También se tiene que

$$f(\leftarrow,x)=(\leftarrow,f(x)) \quad \text{y} \quad f(x,\rightarrow)=(f(x),\rightarrow)$$

lo que prueba que f envía elementos de la subbase de X en elementos de la subbase de Y y por tanto f es abierta. De lo anterior se sigue que f es un homeomorfismo respecto a las topologías de orden respectivas. □

En $\mathbb{R}$ una **cortadura de Dedekind** es un par de subconjuntos de $\mathbb{Q}$, (A,B) tales que para cada $x\in A$ y $y\in B$ $x<y$ y A no tiene máximo.

Definición 3.35. El conjunto de los racionales diádicos es el conjunto

$$\mathcal{P}=\left\{\frac{k}{2^n}\,|\,n\in\mathbb{N} \text{ y } k\in\{1,\dots,2^n-1\}\right\}.$$

Observación.

(1) $\mathcal{P}$ no posee elemento máximo ni mínimo. Pues si $\frac{k}{2^n}\in\mathcal{P}$, entonces $\frac{k}{2^{n+1}}<\frac{k}{2^n}$, entonces no tiene elemento mínimo. También $\frac{k}{2^n}<\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$ y por tanto $\mathcal{P}$ no tiene máximo.

(2) Si $p,q\in\mathcal{P}$ con $p<q$, entonces para algún $r\in P$, $p<r<q$. Obsérvese que si $p,q\in\mathcal{P}$ entonces $\frac{p+q}{2}\in\mathcal{P}$ y $p<\frac{p+q}{2}<q$.

Lema 3.36. *Todo conjunto totalmente ordenado D con las propiedades*

(i) *$\mathcal{D}$ no posee elemento máximo ni mínimo.*

(ii) *Si $p,q\in\mathcal{D}$ con $p<q$, entonces para algún $r\in P$, $p<r<q$.*

es isomorfo en orden a $\mathcal{P}$.

Demostración. La demostración de este Lema se puede encontrar en [10], Teo. 27. □

Teorema 3.37. *Si X es un continuo con exactamente dos puntos de no corte, entonces X es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.*

Demostración. Sea X un continuo con dos puntos de no corte a y b. Por ser X un espacio métrico, existe un subconjunto $D \subset X$ denso numerable que no contiene a los puntos de no corte a y b. Por la propiedad de ser denso y el Teorema 3.33 que garantiza que X tiene la topología de orden en $E(a,b)$ se desprenden los siguientes hechos:

- D no posee elemento mínimo ni máximo. Si $x \in D$, entonces $[a,x)$ es un abierto en X y $(a,x) \cap D \neq \emptyset$ porque D es denso, entonces existe $y \in D$ tal que $y \in (a,x)$ y así $y < x$ por tanto no existe mínimo en D. Similarmente para cada $z \in D$ existe $w \in D$ tal que $z < w$ y por tanto D no tiene máximo.

- Dados $p,q \in D$ con $p < q$, existe un elemento r de D tal que $p < r < q$. Tomando $p,q \in D$ el conjunto (p,q) es un abierto en $E(a,b)$ y como D es denso $(p,q) \cap D \neq \emptyset$ entonces existe $r \in D$ tal que $r \in (p,q)$, es decir, $p < r < q$.

Entonces existe un isomorfismo de orden $f : D \to \mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de racionales diádicos del intervalo $(0,1)$, por el Lema 3.36. Extenderemos este isomorfismo de orden a un isomorfismo de orden $F : X \to [0,1]$. Naturalmente tomamos $F(x) = f(x)$ para todo $x \in D$, $F(a) = 0$ y $F(b) = 1$, resta definirla para los $x \in X \setminus D$ distintos de a y b: si $x \in X \setminus D$ y no es a o b entonces es punto de corte y existe una cortadura $\{x, A_x, B_x\}$ además si $x \in A_x$ y $y \in B_x$ x separa a de y y entonces $x < y$. Veamos que $f(A_x \cap D)$ y $f(B_x \cap D)$ forman una cortadura de Dedekind en $[0,1]$; como $A_x \cap D$ y $B_x \cap D$ son ajenos y la función f es biyectiva los conjuntos $f(A_x \cap D)$ y $f(B_x \cap D)$ son ajenos, calculando su unión se tiene:

$$f(A_x \cap D) \cup f(B_x \cap D) = f((A_x \cup B_x) \cap D) = f((X \setminus \{x\} \cap D)) = f(D) = \mathcal{P}$$

además, por ser f isomorfismo de orden, si $u \in f(A_x \cap D)$ y $v \in f(B_x \cap D)$ entonces $u < v$ y por tanto $f(A_x \cap D)$ y $f(B_x \cap D)$ forman una cortadura de

Dedekind de números diádicos en $[0,1]$, entonces esta cortadura determina un único elemento en $(0,1)$ que asignaremos como $F(x)$. Finalmente se tiene que $F : X \to [0,1]$ está bien definida y es un isomorfismo de orden y por tanto un homeomorfismo entre X y $[0,1]$. $\square$

Teorema 3.38. *Sea X un continuo. Si para cualesquiera dos puntos distintos $p,q \in X$, $X \setminus \{p,q\}$ es disconexo, entonces X es homeomorfo al círculo unitario.*

Demostración. Veamos que X no posee puntos de corte. Si $\{x,U_x,V_x\}$ fuera una cortadura, entonces $U_x \cup \{x\}$ y $V_x \cup \{x\}$ son continuos por el Teorema 3.27 y por el Teorema 3.28 cada uno tiene al menos un punto de no corte, supongamos que y es un punto de no corte de $U_x \cup \{x\}$ y z es un punto de no corte de $V_x \cup \{x\}$, entonces los conjuntos conexos $(U_x \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ y $(V_x \cup \{x\}) \setminus \{z\}$ se intersectan en x y de esta forma su unión $X \setminus \{y,z\}$ es conexo, contradiciendo las hipótesis del teorema. Por tanto X no tiene puntos de no corte.

Tomemos dos elementos distintos a y b de X. Entonces $X \setminus \{a,b\} = U \cup V$ donde (U,V) es una separación de X. Definamos $U^* = U \cup \{a,b\}$ y $V^* = V \cup \{a,b\}$ si probamos que U^* y V^* son arcos cada uno con puntos extremos a y b y tales que $U^* \cap V^* = \{a,b\}$ se tendrá que $X = U^* \cup V^*$ es homeomorfo al círculo unitario.

Veamos que U^* es conexo. Si suponemos lo contrario, que (S,T) es una disconexión de U^*, entonces S no puede contener a a y b simultaneamente, pues de ser así T sería abierto en U (y en X) lo cual es una contradicción porque T es cerrado en X y X es conexo. Entonces podemos suponer que $a \in S$ y $b \in T$, pero por el mismo argumento $S \setminus \{a\}$ es abierto y cerrado en el conjunto conexo $X \setminus \{a\}$ lo cual es una contradicción pues $X \setminus \{a\}$ es conexo. Similarmente se verifica que V^* debe ser conexo y por tanto U^* y V^* son conexos.

Luego notemos que ni a ni b son puntos de no corte de U^*. Pues si (S,T) fuera una disconexión de $U^* \setminus \{a\}$ se puede usar un argumento similar al anterior para mostar que T es abierto y cerrado en $X \setminus \{a\}$ lo cual es una contradicción.

Finalmente, para mostrar que U^* y V^* tienen exactamente dos puntos de no corte procederemos en dos etapas

- Supongamos que cada uno tiene un tercer punto de no corte, digamos $p \in U^*$ y $q \in V^*$ distintos de a y b, entonces los conjuntos $U^* \setminus \{p\}$ y

$V^* \setminus \{q\}$ son conexos, se intersectan y su unión es $X \setminus \{p,q\}$ un conjunto no conexo lo cual es una contradicción.

- Supongamos entonces que U^* tiene un tercer punto de no corte p. Entonces si $q \in V$ se tiene una cortadura $\{q,A,B\}$ de V^*, donde A y B son conexos, y si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $U^* \setminus \{p\}$, A y B forman una cadena de conjuntos conexos cuya unión es $X \setminus \{x,y\}$ lo cual es una contradicción.

Por tanto U^* y V^* son continuos con dos puntos de no corte a y b tales que $U^* \cap V^* = \{a,b\}$ y por tanto $X = U^* \cup V^*$ es homeomorfo al circulo unitario. $\square$

3.5. Espacios homogéneos

Definición 3.39. Un espacio topológico X es **homogéneo** si para cualesquiera dos puntos $x,y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(x) = y$.

Ejemplo 3.40.

- El continuo $[0,1]$ no es homogéneo, pues no puede existir un homeomorfismo que envíe el 0 al $\frac{1}{2}$. Es imposible porque el primero es un punto de no corte y el segundo no lo es.
- La curva seno del topólogo no es homogéneo pues el punto $(1, \operatorname{sen}(1))$ es un punto de no corte y no puede ser enviado mediante un homeomorfismo al $(\frac{1}{2}, \operatorname{sen}(\frac{1}{2}))$ que es un punto de corte.
- El círculo S^1 es homogéneo, pues dados dos puntos $x = e^{i\theta}$ y $y = e^{i\phi}$ la rotación por el ángulo $\phi - \theta$ en la dirección apropiada envía el punto x en el punto y.
- Usando la misma idea que en S^1 se tiene en general que la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ también es homogénea.

Finalmente terminamos esta sección citando algunos otros resultados sobre continuos homogéneos e indicando el primer artículo en el que se demostraron.

Teorema 3.41. *[8] El cubo de Hilbert es homogéneo.*

Teorema 3.42. *[3] El seudoarco es homogéneo.*

Teorema 3.43. *[4] El solenoide p-ádico es homogéneo.*

Conclusión

La teoría de continuos es una teoría vigente de gran crecimiento con resultados muy bellos y profundos acerca de objetos que surgen naturalmente en el estudio de la topología y que tienen repercusión en otras áreas de la matemática. Elegí exponer en este trabajo los resultados más esenciales y representativos de la teoría de continuos y me permitieron conocer algunas ideas clave a partir de las cuales se dan desarrollos posteriores. Fue una gran satisfacción personal el haber realizado este trabajo. Me gustaría profundizar más en temas de investigación actual y posiblemente hacer un posgrado sobre el área.

Bibliografía

[1] Casarrubias Segura, Fidel y Tamariz Mascarúa, Ángel, *Elementos de topología general* Aportaciones Matemáticas, textos 37 nivel medio. Sociedad Matemática Mexicana, Mexico D.F., 2012.

[2] Christenson C. O. y Voxman, W. L., *Aspects of Topology*, Pure and applied mathematics Volumen 39, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[3] Bing R.H., *A homogeneous indecomposable plane continuum*, Duke Math. J., 15 (1948),729-742.

[4] Dantzig D. van, *Ueber topologisch homogene kontinua*, Fund. Math., 15 (1930), 102-125.

[5] Dugundji,J., Topology, Allyn and Bacon Inc., Estados Unidos de América, 1978.

[6] Ingram, W. T. Inverse Limits, Aportaciones Matemáticas, Investigación 15. Sociedad Matemática Mexicana, Mexico D.F., 2000.

[7] Ingram, W. T. y Mahavier, W. S. *Inverse Limits From Continua to Chaos*, Volumen 25 de Developments in Mathematics, Springer, Nueva York, 2011.

[8] Keller, O. *Die Homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum Mathematische Annalen*, 1931, Volume 105, Number 1, Page 748

[9] Nadler, S. B. Jr., *Continuum Theory: An Introduction,* Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, Taylor & Francis, 1992.

[10] Roitman, J., *Introduction to Modern Set Theory, Volumen 8 de Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts Pure and applied mathematics*, John Wiley & Sons, Estados Unidos de América, 1990.

[11] van Mill, J., *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces,* Volumen 64 de North-Holland Mathematical Library, Elsevier, Paises Bajos, 2002.

[12] Willard, S. *General Topology*,Addison-Wesley series in mathematics, Addison-Wesley, Estados Unidos de América, 1970.

Índice