



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

## Propiedades de tipo compacidad de espacio de funciones

### TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

**ALFREDO SÁNCHEZ JIMÉNEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. OLEG OKUNEV**

PUEBLA, PUE., DICIEMBRE DE 2019



**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el(la) C:

**ALFREDO SÁNCHEZ JIMÉNEZ**

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 21 de noviembre de 2019, con la tesis titulada:

***"PROPIEDADES DE TIPO COMPACIDAD DE ESPACIOS DE  
FUNCIONES"***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z, a 25 de noviembre de 2019

**DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO**  
**COORDINADORA DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



DRA PDS:intrv

# Dedicatoria

---

Esta tesis esta dedicada a mi amada esposa y mis padres quienes constantemente me han apoyado en cada momento de mi vida, además de creer incondicionalmente siempre en mí.

Alfredo Sánchez Jiménez  
FCFM-BUAP  
Puebla, Puebla. 2019

# Agradecimientos

---

## **A Dios...**

Por la oportunidad que me dio de conocer y contribuir en esta rama de la ciencia; por la capacidad que puso en mi para apropiarme de estos importantes conocimientos matemáticos, lo cual permitió culminar con éxito el doctorado; y por haber guardado y guiado mis pasos día con día en el transcurso de mi caminar.

“Tuya es, oh Jehová, la magnificencia y el poder, la gloria, la victoria y el honor; porque todas las cosas que están en los cielos y en la tierra son tuyas. Tuyo, oh Jehová, es el reino, y tú eres excelsa sobre todos. Las riquezas y la gloria proceden de ti, y tú dominas sobre todo; en tu mano está la fuerza y el poder, y en tu mano el hacer grande y dar poder a todos.

1 Crónicas 29:11-12”

## **A mi amada esposa...**

A la QFB. Noelia Pulido López que siempre me ha motivado y apoyado incondicionalmente, y a su familia que me han brindado su hermoso cariño desde que obtuve amistad con ellos.

## **A mis Padres y Hermanos...**

A ustedes que continuamente me ayudaron a crecer y a ser lo que hoy soy. Aunque estuve lejos de ustedes nunca me dejaron de mostrar todo su apoyo y confianza. Por ser simplemente lo mejor que me pudo haber pasado. ¡Sí a ustedes! hoy dedico uno de mis logros mas anhelados.

## **A mis Amigos...**

Por el apoyo recibido durante la carrera, la confianza brindada en los momentos difíciles y especiales; por lo cual no existen palabras que expresen lo que han significado en el transcurso de mis estudios. Mis más sinceros y profundos agradecimientos.

**A mi Asesor...**

¡Con mucho cariño y admiración al Dr. Oleg Okunev!

A él que con mucha dedicación me brindó parte de sus conocimientos para poder realizar la tesis.

A él que me dió la oportunidad de trabajar a su lado en el desarrollo de este proyecto.

Agradezco de manera muy especial a Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para la realización de mis estudios de doctorado.

Alfredo Sánchez Jiménez  
FCFM-BUAP  
Puebla, Puebla. 2019

# Introducción

---

Todos los espacios en esta tesis son considerados de Tychonoff (es decir, Hausdorff completamente regulares). Se considera las terminologías y notaciones como en [3]. En particular, el símbolo  $\omega$  denota el conjunto de todos los enteros no negativos y  $\omega_1$  es el primer ordinal no numerable. Cada ordinal  $\alpha$  será considerado como espacio topológico equipado con la topología del orden.

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, denotamos por  $C_p(X, Y)$  al espacio de todas las funciones continuas de  $X$  a  $Y$  equipado con la *topología de la convergencia puntual* (ver [2] para un estudio más detallado de la teoría de espacios de funciones equipadas con esta topología). En este trabajo solo nos concentraremos con los casos  $Y = \mathbb{I} = [0, 1]$  y  $Y = \mathbb{R}$ . El espacio  $C_p(X, \mathbb{R})$  es denotado por  $C_p(X)$ .

O. Okunev en [5], demostro que si  $X$  es un espacio fuertemente cero-dimensional con  $C_p(X)$  de Lindelöf, entonces el espacio  $C_p(X)^\omega$  es de Lindelöf. En un intento de generalizar este resultado a espacios cero-dimensionales, la siguiente pregunta fué realizada (en problema 20 en [5])

¿Si existe un espacio cero-dimensional, no fuertemente cero-dimensional tal que  $C_p(X)$  es de Lindelöf?

Asi, el objetivo de este trabajo es dar respuesta **afirmativa** a esta pregunta, desde un principio en nuestra investigación y atendiendo lo que en una platica en el Brazilian Conference on General Topology and Set Theory - STW 2013, P. Nyikos menciona que es bien conocido que el ejemplo de Dowker es un espacio cero-dimensional y no fuertemente cero-dimensional. Por lo que este espacio nos resulto atractivo para investigar, si su  $C_p(X)$  es de Lindelöf; actualmente aun no podemos responder eso. Sin embargo, al estar estudiando el ejemplo de Dowker conseguimos hacer una modificación de este y así poder demostrar el siguiente Teorema.

**Teorema 0.1.** Existe un espacio normal, cero-dimensional y no fuertemente cero-dimensional  $X$  tal que  $C_p(X)$  es de Lindelöf.

Este Teorema resume nuestro trabajo de investigación y nos permite dar respuesta afirmativa al problema planteado. Dado que el resultado de la investigación es de gran importancia en el área de los espacios de funciones. Se realizó un artículo titulado “ A zero-dimensional not strongly zero-dimensional  $X$  with Lindelöf  $C_p(X)$ ,” el cual fue aceptado para su publicación en la revista *European J. Math.*

Este trabajo de investigación se encuentra dividido en tres capítulos, donde en el capítulo I se proporcionan y desarrollan algunas definiciones y resultados que serán de utilidad para la comprensión de los siguientes capítulos. En el capítulo II se dedica a la modificación del ejemplo de Dowker, mostrando algunos resultados que este presenta. En particular, que cumple ser un espacio cero-dimensional y no fuertemente cero-dimensional. Finalmente, en el capítulo III estudiamos algunos resultados importantes para concluir que el espacio  $C_p(X)$  es de Lindelöf, donde  $X$  es nuestro espacio de estudio.

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacio Cero-dimensional . . . . .	3
1.2. El espacio $\omega_1$ . . . . .	4
1.3. Topología de la Convergencia puntual . . . . .	5
<b>2. Modificación de Ejemplo de Dowker</b>	<b>8</b>
2.1. Modificación del Ejemplo de Dowker . . . . .	8
2.2. El Espacio $X$ es cero-dimensional . . . . .	10
2.3. El Espacio $X$ es normal . . . . .	12
2.4. El Espacio $X$ no es fuertemente cero-dimensional . . . . .	18
<b>3. <math>C_p(X)</math> es de Lindelöf</b>	<b>20</b>
<b>Conclusión</b>	<b>36</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>

---

# Capítulo 1

## Preliminares

---

En este capítulo se proporcionan y desarrollan algunas definiciones y resultados que serán de utilidad para la comprensión de los siguientes capítulos, es así, como abordamos solo una pequeña parte de los espacios cero-dimensionales, el primer ordinal no numerable y la topología de la convergencia puntual.

**Definición 1.1.** Dos conjuntos  $A$  y  $B$  en un espacio topológico  $X$  son llamados *completamente separados* si existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  para  $x \in A$  y  $f(x) = 1$  para  $x \in B$ .

**Definición 1.2.** Un conjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  es llamado *funcionalmente cerrado* si  $A = f^{-1}(0)$  para alguna función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$ .

Un subconjunto  $B \subseteq X$  es *funcionalmente abierto* si existe un subconjunto  $A \subseteq X$  funcionalmente cerrado tal que  $B = X \setminus A$ .

**Teorema 1.3.** Todo espacio segundo numerable regular es normal.

*Demostración.* Ver Teorema 1.5.16 en [3]. □

**Proposición 1.4.** Sea un espacio topológico  $X$  y un subespacio  $M$  de  $X$ . El conjunto  $A \subseteq M$  es cerrado en  $M$  si y solo si  $A = F \cap M$ , donde  $F$  es cerrado en  $X$ . Además,  $\overline{A}^M = \overline{A}^X \cap M$ .

*Demostración.* Ver Proposición 2.1.1 en [3]. □

**Proposición 1.5.** Si un espacio topológico que puede ser representado como la unión de una familia  $\{X_s : s \in S\}$  de subconjuntos abierto ajenos por pares, entonces  $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ .

*Demostración.* Ver Proposición 2.2.4 en [3]. □

**Corolario 1.6.** Sea un conjunto abierto  $U$  en un espacio topológico  $X$ . Si una familia  $\{F_s : s \in S\}$  de subconjuntos cerrados de  $X$  conteniendo al menos un conjunto compacto (en particular, si  $X$  es compacto) y si  $\bigcap_{s \in S} F_s \subseteq U$ , entonces existe un conjunto finito  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq S$  tal que  $\bigcap_{i=1}^k F_{s_i} \subseteq U$ .

*Demostración.* Ver Corolario 3.1.5 en [3]. □

**Teorema 1.7.** Si  $A$  es un subespacio compacto de un espacio regular  $X$ , entonces para cada conjunto cerrado  $B$  ajeno de  $A$  existen conjuntos abiertos  $U, V \subseteq X$  tal que  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

*Demostración.* Ver Teorema 3.1.6 en [3]. □

**Teorema 1.8.** Todo espacio compacto es normal.

*Demostración.* Ver Teorema 3.1.9 en [3]. □

**Corolario 1.9.** Cada par de conjuntos cerrados disjuntos en un espacio normal  $X$  tienen cerradura disjunta en  $\beta X$

*Demostración.* Ver Corolario 3.6.4 en [3]. □

**Corolario 1.10.** Para cada espacio de Tychonoff  $X$  y un espacio  $T$  tal que  $X \subseteq T \subseteq \beta X$  tenemos que  $\beta T = \beta X$ .

*Demostración.* Ver Corolario 3.6.9 en [3]. □

**Teorema 1.11.** Un espacio compacto  $Y$  es metrizable si y solo si  $Y$  es segundo numerable.

*Demostración.* Ver Teorema 4.2.8 en [3]. □

**Teorema 1.12.** Toda función continua real-valuada definida en un espacio numerablemente compacto es acotada.

*Demostración.* Ver Teorema 3.10.6 en [3]. □

**Proposición 1.13.** Sea una familia de espacios topológicos  $\{X_s\}_{s \in S}$ . Si  $S = \bigcup_{t \in T} S_t$ , donde  $S_t \cap S_{t'} = \emptyset$  para  $t \neq t'$ . Entonces los espacios  $\prod_{s \in S} X_s$  y  $\prod_{t \in T} (\prod_{s \in S_t} X_s)$  son homeomorfos, es decir, el producto cartesiano es asociativo.

*Demostración.* Ver Proposición 2.3.7 en [3]. □

**Proposición 1.14.** Sea una familia de espacios topológicos  $\{X_s\}_{s \in S}$  y una función inyectiva  $f$  de  $S$  sobre si mismo. Entonces los espacios  $\prod_{s \in S} X_s$  y  $\prod_{s \in S} X_{f(s)}$  son homeomorfos, es decir, el producto cartesiano es conmutativo.

*Demostración.* Ver Proposición 2.3.8 en [3]. □

## 1.1. Espacio Cero-dimensional

**Definición 1.15.** Un espacio topológico  $X$  es llamado hereditariamente conexo si  $X$  no contiene subconjuntos conexos de cardinalidad mayor que 1.

**Definición 1.16.** Un espacio topológico  $X$  no vacío y  $T_1$  es llamado cero-dimensional si tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados a la vez.

Claramente, todo espacio cero-dimensional es un espacio de Tychonoff. Una cubierta de un espacio topológico que consiste de conjuntos funcionalmente abiertos (cerrados) será llamada una cubierta *funcionalmente abierta(cerrada)*.

**Definición 1.17.** Un espacio topológico es llamado fuertemente cero-dimensional si es un espacio no vacío Tychonoff y cada cubierta finita funcionalmente abierta  $\{U_i\}_{i=1}^k$  de el espacio  $X$  tiene un refinamiento abierto finito  $\{V_i\}_{i=1}^m$  tal que  $V_i \cap V_j = \emptyset$  siempre que  $i \neq j$ .

Acontinuación, mencionamos algunos resultados importantes de los espacios cero-dimensionales y fuertemente cero-dimensionales.

**Teorema 1.18.** Todo espacio cero-dimensional es hereditariamente desconexo.

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.1 en [3]. □

**Teorema 1.19.** Un espacio no vacío de Tychonoff  $X$  es fuertemente cero-dimensional si y solo si para cada par de conjuntos  $A$  y  $B$  completamente separados de  $X$  existe un conjunto clopen  $U \subseteq X$  tal que  $A \subseteq U \subseteq X \setminus B$ .

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.4 en [3]. □

**Teorema 1.20.** Todo espacio fuertemente cero-dimensional es cero-dimensional.

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.6 en [3]. □

**Teorema 1.21.** Todo espacio cero-dimensional y Lindelöf es fuertemente cero-dimensional.

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.7 en [3]. □

**Teorema 1.22.** Si un espacio topológico es cero-dimensional, entonces todo subespacio no vacío de  $X$  es también cero-dimensional.

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.11 en [3]. □

**Teorema 1.23.** La compactación de Čech-Stone  $\beta X$  de un espacio Tychonoff  $X$  es fuertemente cero-dimensional si y sólo si el espacio  $X$  es fuertemente cero-dimensional.

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.12 en [3].  $\square$

**Teorema 1.24.** La suma  $\bigoplus_{s \in S} X_s$ , donde  $S \neq \emptyset$  y  $X_s \neq \emptyset$  para  $s \in S$  es cero-dimensional si y sólo si  $X_s$  es cero-dimensional para  $s \in S$ .

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.13 en [3].  $\square$

**Teorema 1.25.** El producto cartesiano  $\prod_{s \in S} X_s$ , donde  $S \neq \emptyset$  y  $X_s \neq \emptyset$  para  $s \in S$  es cero-dimensional si y sólo si  $X_s$  es cero-dimensional para  $s \in S$ .

*Demostración.* Ver Teorema 6.2.14 en [3].  $\square$

## 1.2. El espacio $\omega_1$

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos ordinales, denotamos los intervalos  $[\alpha, \beta) = \{\gamma : \alpha \leq \gamma < \beta\}$  y  $[\alpha, \beta] = \{\gamma : \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$ . La familia de todos los intervalos  $(\gamma, \alpha]$  con  $\gamma \in \omega_1 \cup \{-1\}$  y  $\gamma < \alpha$  constituye una base para el ordinal  $\alpha$  en  $\tau(\omega_1)$  (extendemos el orden en  $\omega_1$  a  $\omega_1 \cup \{-1\}$ ).

Definimos el primer ordinal no numerable como  $\omega_1 = [0, \omega_1)$  dotado con la topología del orden. similarmente,  $\omega_1 + 1 = [0, \omega_1]$  equipado con la topología del orden es el primer ordinal compacto no numerable.

**Definición 1.26.** Sea un ordinal  $\beta \in \omega_1 + 1$ , diremos que el ordinal  $\beta$  es:

- *sucesor* si existe un ordinal  $\alpha \in \omega_1 + 1$  tal que  $\beta = \alpha + 1$ .
- *límite* si para cada  $\alpha \in \omega_1 + 1$  con  $\alpha < \beta$ , existe un ordinal  $\gamma \in \omega_1 + 1$  tal que  $\alpha < \gamma < \beta$ .

**Teorema 1.27.** El espacio  $\omega_1 + 1$  es cero-dimensional.

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \omega_1 + 1$ , consideremos los siguientes casos.

**Caso I:** Si  $\alpha$  es un ordinal sucesor. Tomamos la colección  $\mathcal{B}_1(\alpha) = \{\{\alpha\}\}$  que es una base local de  $\alpha$ , donde el conjunto  $\{\alpha\}$  es abierto y cerrado en  $\omega_1 + 1$ .

**Caso II:** Si  $\alpha$  es un ordinal límite. Para cada ordinal  $\beta \in \omega_1 + 1$  con  $\beta < \alpha$ , entonces consideremos el conjunto

$$V_{\alpha\beta} = (\beta, \alpha + 1) = [\beta + 1, \alpha]$$

claramente,  $V_{\alpha\beta}$  es abierto y cerrado en  $\omega_1 + 1$  tal que  $\alpha \in V_{\alpha\beta}$ . Tomando la colección  $\mathcal{B}_2(\alpha) = \{V_{\alpha\beta} : \beta \in \omega_1 + 1 \text{ y } \beta < \alpha\}$  que es una base local del ordinal  $\alpha$ .

Finalmente, consideramos la familia

$$\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_1(\alpha) : \alpha \text{ es sucesor}\} \cup \bigcup \{\mathcal{B}_2(\beta) : \beta \text{ es límite}\}$$

la cual es una base de conjuntos abiertos y cerrados del espacio  $\omega_1 + 1$ , es decir, el espacio  $\omega_1 + 1$  es cero-dimensional.  $\square$

**Teorema 1.28.** Todo subconjunto numerable de  $[0, \omega_1)$  está acotado superiormente.

*Demostración.* Ver Ejemplo 3.10.16 en [3].  $\square$

**Corolario 1.29.** Todo subconjunto numerable de  $[0, \omega_1)$  tiene supremo.

*Demostración.* Ver Ejemplo 3.10.16 en [3].  $\square$

**Proposición 1.30.** El espacio  $\omega_1$  es numerablemente compacto.

*Demostración.* Ver Ejemplo 3.10.16 en [3].  $\square$

### 1.3. Topología de la Convergencia puntual

Dados los espacios topológicos  $X$  y  $Y$ , sobre el conjunto  $Y^X$  de todas las funciones de  $X$  en  $Y$ ; podemos considerar la **topología producto** o **topología de Tychonoff** que se caracteriza como la mínima topología que hace continua a cualquier proyección  $\pi_x : Y^X \rightarrow Y$ , para cada  $x \in X$ . En particular, consideraremos el siguiente subconjunto de  $Y^X$

$$C(X, Y) = \{f \in Y^X : f \text{ es continua}\}$$

equipado con la topología heredada de  $Y^X$ , a la cual se le suele llamar la **topología de la convergencia puntual**; en general, denotaremos por  $C_p(X, Y)$  a los espacios así obtenidos, pero en el caso en el que  $Y = \mathbb{R}$  escribiremos simplemente  $C_p(X)$  en vez de  $C_p(X, \mathbb{R})$ .

Dado un espacio un espacio topológico  $Z$  es conveniente tener una descripción precisa de una base para su topología; en el caso de los espacios topológicos  $C_p(X, Y)$  esto se logra considerando bases para la topología del espacio contradominio  $Y$ .

Para cada subconjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $X$  y cada colección finita de abiertos básicos  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  en  $Y$ ; denotaremos por

$$\tilde{O}(x_1, \dots, x_n; B_1, \dots, B_n) = \{f \in Y^X : f(x_i) \in B_i \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Notemos que

$$\tilde{O}(x_1, x_2, \dots, x_n; B_1, B_2, \dots, B_n) = \pi_{x_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{x_2}^{-1}(B_2) \cap \dots \cap \pi_{x_n}^{-1}(B_n).$$

Como es sabido, la familia de todos los conjuntos de este tipo es una base para la topología producto en  $Y^X$ . Por lo tanto, la familia de todos los conjuntos

$$O(x_1, \dots, x_n; B_1, \dots, B_n) = \tilde{O}(x_1, \dots, x_n; B_1, \dots, B_n) \cap C(X, Y),$$

es una base para la topología de  $C_p(X, Y)$ . En resumen tenemos el siguiente resultado

**Proposición 1.31.** Sea  $\beta$  una base de la topología de  $Y$ ,  $\beta_Y(y)$  una base local de vecindades abiertas, para cada  $y \in Y$ . Entonces

- La familia

$$\{\tilde{O}(x_1, x_2, \dots, x_n; B_1, B_2, \dots, B_n) : n \in \omega, x_i \in X, B_i \in \beta\},$$

es una base para la topología producto en  $Y^X$ ; de donde la familia

$$\{O(x_1, x_2, \dots, x_n; B_1, B_2, \dots, B_n) : n \in \omega, x_i \in X, B_i \in \beta\},$$

es una base para la topología en  $C_p(X)$ .

- Para cada  $f \in Y^X$ , la familia de todos los conjuntos de la forma

$$\tilde{O}(x_1, \dots, x_n; B_1, \dots, B_n) = \{g \in Y^X : g(x_i) \in B_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

en donde  $n \in \omega$ ,  $x_i \in X$  y  $B_i \in \beta$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ ; es una base local de  $f$  en  $Y^X$ ; de donde, si  $f \in C_p(X)$  los conjuntos

$$O(x_1, \dots, x_n; B_1, \dots, B_n) = \{g \in C_p(X) : g(x_i) \in B_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

constituyen una base local de  $f$  en  $C_p(X)$ .

*Demostración.* Ver Sección 2.6 en [3]. □

En el caso particular en que  $Y$  es un espacio metrizable, es conveniente tomar como base locales en  $Y$  a las colecciones de  $\epsilon$ -**bolas** abiertas. Por lo tanto, cuando  $Y$  es un espacio metrizable, si  $f \in Y^X$  los conjuntos

$$\tilde{O}(f; x_1, \dots, x_n; \epsilon) = \{g \in Y^X : d(f(x_i), g(x_i)) < \epsilon, i = 1, 2, \dots, n\},$$

forman una base local de  $f$  en  $Y^X$  (donde,  $d$  es un métrica que define la topología de  $Y$ ). Al considerar intersecciones de este tipo de conjuntos de  $Y^X$  con el conjunto  $C(X, Y)$  nuevamente generamos bases locales en  $C_p(X, Y)$ .

---

Capítulo 2

# Modificación de Ejemplo de Dowker

---

En este capítulo se construirá el espacio de estudio, el cual se usará para dar respuesta al problema planteado en la introducción. Así, mismo se demostrará que dicho espacio es un espacio normal, cero-dimensional y no fuertemente cero-dimensional.

## 2.1. Modificación del Ejemplo de Dowker

Para una mayor información del Ejemplo de Dowker puede consultar el Ejemplo 6.2.20 en [3].

Sean  $\mathbb{I} = [0, 1]$  el intervalo cerrado en la línea real  $\mathbb{R}$ . A continuación, se introduce la definición de conjuntos holding, término que se ha usado en [4].

**Definición 2.1.** Un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{I}$  diremos que es **holding** si todo subconjunto de  $\mathbb{I} \setminus A$  que es cerrado es a lo más numerable.

Es fácil verificar que si los subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{I}$  tales que  $A$  es holding y  $A \subseteq B$ , entonces  $B$  es un conjunto holding.

**Proposición 2.2.** Si un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{I}$  es holding entonces  $A$  es denso en  $\mathbb{I}$ .

*Demostración.* Sean  $A \subseteq \mathbb{I}$  un conjunto holding y un conjunto abierto no vacío  $U$  en  $\mathbb{I}$ , demostraremos que  $A \cap U \neq \emptyset$ ; supongamos lo contrario, es decir, que  $A \cap U = \emptyset$ , así  $U \subseteq \mathbb{I} \setminus A$ . Ahora, sea  $x$  un punto en  $U$ ; usando que el espacio  $\mathbb{I}$  es regular, existe un conjunto abierto  $V$  en  $\mathbb{I}$  tal que

$$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U \subseteq \mathbb{I} \setminus A$$

Como  $A$  es un conjunto holding se tiene que el conjunto cerrado no vacío  $\bar{V}$  es a lo más numerable, lo cual es una contradicción; ya que todo conjunto cerrado en  $\mathbb{I}$  que contiene un conjunto abierto no vacío es no numerable.  $\square$

El intervalo  $\mathbb{I}$  tiene una familia de cardinalidad  $\mathfrak{c}$  de conjuntos ajenos holding (ver Teorema 1.5 en [4]). Así, podemos encontrar una  $\omega_1$ -sucesión

$$\{Q_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$$

de conjuntos ajenos holding tal que  $\mathbb{I} = \bigcup\{Q_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ .

Para cada  $\alpha \in \omega_1$  consideremos el conjunto

$$S_\alpha = \bigcup\{Q_\beta : \beta \leq \alpha\}, \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal sucesor}$$

o bien,

$$S_\alpha = \bigcup\{Q_\beta : \beta < \alpha\}, \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite}$$

A continuación, definimos a nuestro espacio de estudio (con el cual responderemos al problema planteado).

Sea el espacio  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$  con la topología producto y consideremos el siguiente subespacio

$$X = \bigcup\{\{\alpha\} \times S_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$$

También, consideremos los siguientes subespacios de  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$

1.  $X^* = X \cup (\{\omega_1\} \times \mathbb{I})$ .
2. Para cada  $\alpha \in \omega_1$ ,  $X_\alpha = \bigcup\{\{\beta\} \times S_\beta : \beta \leq \alpha\}$ .
3. Se cumple que  $X_\alpha \subseteq X \subseteq X^*$ , para cada  $\alpha \in \omega_1$ .

**Proposición 2.3.** El espacio  $X$  es denso en  $X^*$ .

*Demostración.* Sea un punto  $(\omega_1, r) \in X^* \setminus X = \{\omega_1\} \times \mathbb{I}$  con  $0 < r < 1$  (pues cuando  $r=0$  o  $r=1$  se hace algo similar), tomemos un conjunto abierto básico  $U = (\alpha, \omega_1] \times (r - \epsilon, r + \epsilon)$  del punto  $(\omega_1, r)$  en  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$ , para algún  $\alpha \in \omega_1$ . Luego, el conjunto  $V = U \cap X^*$  es una vecindad abierta del punto  $(\omega_1, r)$  en  $X^*$ , como el ordinal  $\alpha < \omega_1$ , existe un ordinal  $\beta$  tal que  $\alpha < \beta < \omega_1$ , aplicando la Proposición 2.2 el conjunto  $Q_\beta$  es denso en  $\mathbb{I}$ , es decir, existe un punto  $x \in Q_\beta \cap (r - \epsilon, r + \epsilon)$ ; por construcción del espacio  $X$  se tiene que el punto  $(\beta, x) \in X \cap V$ , es decir,  $V \cap X \neq \emptyset$ . Por lo tanto, se sigue que  $X$  es denso en  $X^*$ .  $\square$

En una forma similar a la prueba anterior se prueba el siguiente resultado.

**Proposición 2.4.** Los subespacios  $X$  y  $X^*$  son densos en  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$ .

Para cada  $r \in \mathbb{I}$ , denotamos por:

$$X_r = X \cap ([0, \omega_1) \times \{r\}).$$

**Corolario 2.5.** sean  $r \in \mathbb{I}$  y  $\alpha \in \omega_1$  tal que  $r \in Q_\alpha$ . Entonces se cumple

$X_r = [\alpha, \omega_1) \times \{r\}$ , si  $\alpha$  es un ordinal sucesor.  
o bien,

$X_r = [\alpha + 1, \omega_1) \times \{r\}$ , si  $\alpha$  es un ordinal límite.

**Proposición 2.6.** Para cada  $r \in \mathbb{I}$ , el conjunto  $X_r$  es numerablemente compacto.

*Demostración.* Sean  $r \in \mathbb{I}$ , como  $\mathbb{I} = \cup\{Q_\beta : \beta \in \omega_1\}$ , existe  $\alpha \in \omega_1$  tal que  $r \in Q_\alpha$ . Notemos que el conjunto  $X_r$  es homeomorfo a  $[\alpha, \omega_1)$  y por la Proposición 1.30, se concluye que  $X_r$  es numerablemente compacto.  $\square$

**Proposición 2.7.**  $\bigcap_{\alpha < \omega_1} (X^* \setminus X_\alpha) = \{\omega_1\} \times \mathbb{I}$ .

*Demostración.* Como se cumple que  $\{\omega_1\} \times \mathbb{I} \subseteq (X^* \setminus X_\alpha)$  para cada  $\alpha < \omega_1$ , entonces

$$\{\omega_1\} \times \mathbb{I} \subseteq \bigcap_{\alpha < \omega_1} (X^* \setminus X_\alpha). \quad (2.1)$$

Por otra parte, sea  $(\alpha, x) \in \bigcap_{\alpha < \omega_1} (X^* \setminus X_\alpha)$  notemos que si  $\alpha < \omega_1$ , entonces  $(\alpha, x) \in X_\alpha$ , es decir,  $(\alpha, x) \notin X^* \setminus X_\alpha$  lo cual no es posible. Así, sólo puede pasar que  $\alpha = \omega_1$ ;  $(\alpha, x) \in \{\omega_1\} \times \mathbb{I}$ , entonces

$$\bigcap_{\alpha < \omega_1} (X^* \setminus X_\alpha) \subseteq \{\omega_1\} \times \mathbb{I}. \quad (2.2)$$

Por lo tanto, de 2.1 y 2.2 se prueba la igualdad.  $\square$

## 2.2. El Espacio $X$ es cero-dimensional

**Proposición 2.8.** Para cada  $\alpha \in \omega_1$ , el subespacio  $S_\alpha$  de  $\mathbb{I}$  es cero-dimensional.

*Demostración.* Sean  $\alpha \in \omega_1$  y  $S_\alpha$  el subespacio en  $\mathbb{I}$ . Tomemos un punto  $x \in S_\alpha$  tal que  $0 < x < 1$ , entonces existe un conjunto abierto básico en  $\mathbb{I}$  de la forma  $U = (a, b)$  un intervalo tal que  $x \in U$  y  $a < x < b$ . Ahora, consideremos los intervalos abiertos en  $\mathbb{I}$

$$V_1 = (a, x) \text{ y } V_2 = (x, b)$$

Ahora, para  $\beta = \alpha + 1$  el conjunto holding  $Q_\beta$  es ajeno del conjunto  $S_\alpha$  y por ser  $Q_\beta$  denso en  $\mathbb{I}$ , existen puntos

$$p \in Q_\beta \cap V_1 \text{ y } q \in Q_\beta \cap V_2$$

tales que los puntos  $p, q \notin S_\alpha$  y  $p < x < q$ . Así, considerando el conjunto

$$V_{abx} = (p, q) \cap S_\alpha = [p, q] \cap S_\alpha$$

donde los conjuntos  $(p, q)$  y  $[p, q]$  son intervalos abiertos y cerrados, respectivamente, en  $\mathbb{I}$ . Claramente, el conjunto  $V_{abx}$  es cerrado y abierto en  $S_\alpha$  tal que  $x \in V_{abx}$ . Por lo que la colección  $\beta(x) = \{V_{abx} : a, b \in \mathbb{I} \text{ con } a < x < b\}$  es una base local de  $x$  de conjuntos abiertos y cerrados del subespacio  $S_\alpha$ , los casos cuando  $x = 0$  y  $x = 1$  se puede encontrar una base local de conjuntos tanto abiertos como cerrados, procediendo similarmente al caso que  $0 < x < 1$ . Luego, la colección

$$\beta = \bigcup \{\beta(x) : x \in S_\alpha\}$$

es una base de conjuntos abiertos y cerrados del subespacio  $S_\alpha$ . Por lo tanto, el subespacio  $S_\alpha$  es cero-dimensional.  $\square$

**Corolario 2.9.** Para cada  $\alpha \in \omega_1$  se cumple lo siguiente

- $X_\alpha = X \cap ([0, \alpha] \times \mathbb{I})$  es un conjunto abierto y cerrado en  $X$ .
- $X_\alpha = X^* \cap ([0, \alpha] \times \mathbb{I})$  es un conjunto abierto y cerrado en  $X^*$ .

*Demostración.* Para cada  $\alpha \in \omega_1$ , el conjunto  $[0, \alpha] = [0, \alpha + 1)$  es abierto y cerrado en  $[0, \omega_1]$ . Luego, el conjunto  $[0, \alpha] \times \mathbb{I} = [0, \alpha + 1) \times \mathbb{I}$  es abierto y cerrado en el espacio  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$ , esto justifica el siguiente resultado.  $\square$

Como el primer ordinal no numerable  $[0, \omega_1]$  dotado con la topología del orden es compacto y cero-dimensional. Para cada  $\alpha \in \omega_1$  y aplicando el Teorema 1.22 el subespacio  $[0, \alpha]$  es cero-dimensional.

**Corolario 2.10.** Para cada  $\alpha \in \omega_1$ , el subespacio  $X_\alpha$  es cero-dimensional.

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \omega_1$ , por el Teorema 1.25 y la Proposición 2.8 el subespacio  $[0, \alpha] \times S_\alpha$  es cero-dimensional y aplicando el Teorema 1.22 el subespacio  $X_\alpha \subseteq [0, \alpha] \times S_\alpha$ , tenemos que el espacio  $X_\alpha$  es cero-dimensional.  $\square$

**Teorema 2.11.** El espacio  $X$  es cero-dimensional.

*Demostración.* Sean el punto  $(\alpha, x) \in X$  y una vecindad abierta  $W$  del punto  $(\alpha, x)$  en  $X$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $W$  es de la forma

$$W = ((\lambda_1, \lambda_2) \times V_x) \cap X$$

donde,  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \omega_1]$  tal que  $\lambda_1 < \alpha < \lambda_2$  y  $V_x$  es abierto en  $\mathbb{I}$  con  $x \in V_x$ .

Ahora, si el ordinal  $\alpha$  es sucesor tomamos  $U_1 = \{\alpha\}$  o bien si  $\alpha$  es límite tomamos  $U_1 = (\lambda_1, \alpha+1)$  en ambos casos,  $U_1$  es un conjunto abierto y cerrado en  $[0, \omega_1]$ . En el otro caso, para  $x \in V_x \cap S_\alpha$  aplicando la Proposición 2.8, existe un conjunto abierto y cerrado  $U_2$  en  $S_\alpha$  tal que  $x \in U_2 \subseteq V_x \cap S_\alpha$ , además existen conjuntos abierto  $B$  y cerrado  $F$  en  $\mathbb{I}$  tales que  $B \cap S_\alpha = U_2 = F \cap S_\alpha$ . Las siguientes igualdades son fácil de verificar:

$$V_{\alpha x} = (U_1 \times U_2) \cap X = (U_1 \times (B \cap S_\alpha)) \cap X = (U_1 \times B) \cap X \quad (2.3)$$

$$V_{\alpha x} = (U_1 \times U_2) \cap X = (U_1 \times (F \cap S_\alpha)) \cap X = (U_1 \times F) \cap X \quad (2.4)$$

De las ecuaciones 2.3 y 2.4 el conjunto  $V_{\alpha x}$  es abierto y cerrado en  $X$  tal que  $(\alpha, x) \in V_{\alpha x} \subseteq W$ . Por lo tanto, el subespacio  $X$  es cero-dimensional.  $\square$

### 2.3. El Espacio $X$ es normal

**Proposición 2.12.** Para cada  $\alpha \in \omega_1$ , el subespacio  $X_\alpha$  es metrizable.

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \omega_1$ , como el producto cartesiano  $[0, \alpha] \times \mathbb{I}$  es un subespacio segundo numerable y compacto de  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$ , aplicando el Teorema 1.11 se tiene que el subespacio  $[0, \alpha] \times \mathbb{I}$  es metrizable, así el subespacio  $X_\alpha \subseteq [0, \alpha] \times \mathbb{I}$ , también es metrizable.  $\square$

**Proposición 2.13.** Para cada  $\alpha \in \omega_1$ , el subespacio  $X_\alpha$  es normal.

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \omega_1$ , como el producto cartesiano  $[0, \alpha] \times \mathbb{I}$  es un subespacio segundo numerable y regular tal que  $X_\alpha \subseteq [0, \alpha] \times \mathbb{I}$ , entonces el subespacio  $X_\alpha$  es segundo numerable y regular; aplicando el Teorema 1.3 se concluye que el subespacio  $X_\alpha$  es normal.  $\square$

**Proposición 2.14.** Sean  $A, B$  un par de conjuntos cerrados disjuntos en  $X^*$  y  $U, V$  un par de conjuntos abiertos ajenos en  $X^*$  tales que  $A \cap (X^* \setminus X) \subseteq U$  y  $B \cap (X^* \setminus X) \subseteq V$ . Entonces existe un ordinal  $\beta < \omega_1$  tal que  $A \cap (X^* \setminus X_\beta) \subseteq U$  y  $B \cap (X^* \setminus X_\beta) \subseteq V$ .

*Demostración.* Consideremos el espacio  $Y = [0, \omega_1] \times \mathbb{I}$ ,  $A_1 = A \cap (X^* \setminus X)$  y  $B_1 = B \cap (X^* \setminus X)$ . Luego, tomemos los conjuntos  $\overline{A}^Y$  y  $\overline{B}^Y$  las cerraduras de los conjuntos  $A$  y  $B$  en el espacio  $Y$ .

**Afirmación 2.15.**  $\overline{A}^Y \cap (\{\omega_1\} \times \mathbb{I}) = A_1$ .

En efecto, Como  $A$  es cerrado en  $X^*$ , existe un conjunto cerrado  $F$  en  $Y$  tal que  $A = F \cap X^*$ ; además, por la Proposición 2.4 se cumple lo siguiente:

$$\overline{A}^Y = \overline{F \cap X^*}^Y \subseteq \overline{F}^Y \cap \overline{X^*}^Y = F \cap Y = F. \quad (2.5)$$

Así, sea  $(\omega_1, x) \in \overline{A}^Y \cap (\{\omega_1\} \times \mathbb{I})$ , es decir,  $(\omega_1, x) \in \overline{A}^Y$  y  $(\omega_1, x) \in \{\omega_1\} \times \mathbb{I} \subseteq X^*$ , por la ecuación 2.5 el punto  $(\omega_1, x) \in F$ ; luego  $(\omega_1, x) \in F \cap X^* = A$ , entonces  $(\omega_1, x) \in A_1$ . Por otra parte, es claro que  $A \subseteq \overline{A}^Y$ , entonces  $A_1 \subseteq \overline{A}^Y \cap (\{\omega_1\} \times \mathbb{I})$ . Por lo tanto, la igualdad de la afirmación se cumple.

Para cada  $\alpha < \omega_1$ , consideremos el conjunto  $A_\alpha = \overline{A}^Y \cap (X^* \setminus X_\alpha)$  y consideremos  $\overline{A}_\alpha^Y$  la cerradura del conjunto  $A_\alpha$  en  $Y$ .

**Afirmación 2.16.**  $\bigcap_{\alpha < \omega_1} \overline{A}_\alpha^Y = A_1$ .

En efecto, sea el punto  $(\omega_1, x) \in A_1$  por la afirmación 2.15 se tiene que  $(\omega_1, x) \in \overline{A}^Y \cap (\{\omega_1\} \times \mathbb{I})$ , como cada  $\alpha < \omega_1$  se cumple que  $\{\omega_1\} \times \mathbb{I} \subseteq X^* \setminus X_\alpha$ , luego

$$(\omega_1, x) \in \overline{A}^Y \cap (X^* \setminus X_\alpha) = A_\alpha \subseteq \overline{A}_\alpha^Y$$

Es decir,

$$(\omega_1, x) \in \bigcap_{\alpha < \omega_1} \overline{A}_\alpha^Y$$

Recíprocamente, para cada  $\alpha < \omega_1$  se cumple

$$\overline{A}^Y \cap (X^* \setminus X_\alpha) \subseteq \overline{\overline{A}^Y \cap (X^* \setminus X_\alpha)}^Y = \overline{A}_\alpha^Y$$

luego,

$$\bigcap_{\alpha < \omega_1} \overline{A}^Y \cap (X^* \setminus X_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha < \omega_1} \overline{A}_\alpha^Y. \quad (2.6)$$

ahora, aplicando la Proposición 2.7 tenemos que

$$\bigcap_{\alpha < \omega_1} \bar{A}^Y \cap (X^* \setminus X_\alpha) = \bar{A}^Y \cap \left( \bigcap_{\alpha < \omega_1} (X^* \setminus X_\alpha) \right) = \bar{A}^Y \cap (\{\omega_1\} \times \mathbb{I}) = A_1. \quad (2.7)$$

Por las ecuaciones 2.6 y 2.7 tenemos que  $A_1 \subseteq \bigcap_{\alpha < \omega_1} \bar{A}_\alpha^Y$ . Por lo tanto, la afirmación está probada.

Se tiene que los conjuntos  $A_1$  y  $B_1$  son cerrados ajenos en  $X^*$  y están contenidos en el subespacio compacto  $\{\omega_1\} \times \mathbb{I}$  de  $X^*$ . Así, los conjuntos  $A_1$  y  $B_1$  son compactos en  $X^*$ , aplicando el Teorema 1.7 existen conjuntos abiertos  $U_1, V_1 \subseteq X^*$  tales que

$$A_1 \subseteq U_1, B_1 \subseteq V_1 \text{ y } U_1 \cap V_1 = \emptyset. \quad (2.8)$$

Dado que tenemos  $A_1 \subseteq U_1$  y el conjunto  $U_1$  es abierto en  $X^*$ , existe un conjunto abierto  $W_1$  en  $Y$  tal que

$$A_1 \subseteq U_1 = W_1 \cap X^* \subseteq W_1. \quad (2.9)$$

Usando 2.17, 2.9 y el Corolario 1.6 existe una colección finita  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq [0, \omega_1]$  tal que

$$\bigcap_{i=1}^k \bar{A}_{\alpha_i}^Y \subseteq W_1. \quad (2.10)$$

Tomemos  $\beta_1 = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ , como para cada  $\alpha_i < \beta_1$ ;  $X^* \setminus X_{\beta_1} \subseteq X^* \setminus X_{\alpha_i}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Así, se cumple lo siguiente

$$A \cap (X^* \setminus X_\alpha) \subseteq \bar{A}^Y \cap (X^* \setminus X_\alpha) \subseteq \bigcap_{i=1}^k \bar{A}_{\alpha_i}^Y \subseteq W_1. \quad (2.11)$$

Luego, de 2.11 tenemos

$$A_1 = A \cap (X^* \setminus X) \subseteq A \cap (X^* \setminus X_{\beta_1}) \subseteq W_1 \cap X^* = U_1. \quad (2.12)$$

Repitiendo estos pasos para el conjunto  $B_1 = B \cap (X^* \setminus X)$ , existen un ordinal  $\beta_2 < \omega_1$  y un conjunto abierto  $W_2$  en  $Y$  tal que

$$B_1 = B \cap (X^* \setminus X) \subseteq B \cap (X^* \setminus X_{\beta_2}) \subseteq W_2 \cap X^* = V_1. \quad (2.13)$$

Usando la ecuación 2.12, 2.13 y tomando  $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$  se cumple lo siguiente

$$A_1 = A \cap (X^* \setminus X_\beta) \subseteq U_1 \text{ y } B_1 = B \cap (X^* \setminus X_\beta) \subseteq V_1. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, la prueba es completada.  $\square$

**Teorema 2.17.** El espacio  $X^*$  es normal.

*Demostración.* Sean un par de conjunto cerrados ajenos  $A$  y  $B$  en  $X^*$ . Consideremos los conjuntos

$$A_1 = A \cap (X^* \setminus X) = A \cap (\{\omega_1\} \times \mathbb{I}). \quad (2.15)$$

$$B_1 = B \cap (X^* \setminus X) = B \cap (\{\omega_1\} \times \mathbb{I}). \quad (2.16)$$

Se tiene que los conjuntos  $A_1$  y  $B_1$  son cerrados ajenos en  $X^*$  y están contenidos en el subespacio compacto  $\{\omega_1\} \times \mathbb{I}$  de  $X^*$ . Así, los conjuntos  $A_1$  y  $B_1$  son compactos en  $X^*$ , aplicando el Teorema 1.7 existen conjuntos abiertos  $U_1, V_1 \subseteq X^*$  tales que

$$A_1 \subseteq U_1, B_1 \subseteq V_1 \text{ y } U_1 \cap V_1 = \emptyset. \quad (2.17)$$

Aplicando la Proposición 2.14 existe un ordinal  $\alpha < \omega_1$  tal que

$$A \cap (X^* \setminus X_\alpha) \subseteq U_1 \text{ y } B \cap (X^* \setminus X_\alpha) \subseteq V_1. \quad (2.18)$$

Como los conjuntos  $A$  y  $B$  son cerrados en  $X^*$  existen conjuntos cerrados  $F_1$  y  $F_2$  en  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$  tales que  $A = F_1 \cap X^*$  y  $B = F_2 \cap X^*$ . Luego, es claro que

$$A = (A \cap (X^* \setminus X_\alpha)) \cup (F_1 \cap X_\alpha) \text{ y } B = (B \cap (X^* \setminus X_\alpha)) \cup (F_2 \cap X_\alpha). \quad (2.19)$$

Donde los conjuntos  $F_1 \cap X_\alpha$  y  $F_2 \cap X_\alpha$  son cerrados en  $X_\alpha$ , por la Proposición 2.13  $X_\alpha$  es normal, entonces existen conjuntos abiertos  $U_2$  y  $V_2$  en  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$  tales que

$$F_1 \cap X_\alpha \subseteq U_2 \cap X_\alpha, F_2 \cap X_\alpha \subseteq V_2 \cap X_\alpha \quad (2.20)$$

$$\text{y } (\subseteq U_2 \cap X_\alpha) \cap (\subseteq V_2 \cap X_\alpha) = \emptyset. \quad (2.21)$$

Por el Corolario 2.9  $X_\alpha$  es abierto y cerrado en  $X^*$ .

Finalmente, consideremos los siguientes conjuntos abiertos en  $X^*$

$$U = (U_1 \cap (X^* \setminus X_\alpha)) \cup (U_2 \cap X_\alpha) \text{ y } V = (V_1 \cap (X^* \setminus X_\alpha)) \cup (V_2 \cap X_\alpha).$$

De las ecuaciones 2.18, 2.19, 2.20 y 2.21 se tiene que

$$A \subseteq U, B \subseteq V \text{ y } U \cap V = \emptyset$$

Por lo tanto,  $X^*$  es normal. □

**Proposición 2.18.** Sean  $A$  y  $B$  un par de conjuntos cerrados ajenos en  $X$ . Entonces los conjuntos  $A$  y  $B$  tienen cerradura ajena en  $X^*$ .

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  un par de conjuntos cerrados ajenos en  $X$ . Supongamos que  $\overline{A}^{X^*} \cap \overline{B}^{X^*} \neq \emptyset$ ; se tienen los siguientes casos:

**Caso I:** Si existe un punto  $(\omega_1, x) \in \overline{A}^{X^*} \cap \overline{B}^{X^*}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $0 < x < 1$  (pues cuando  $x = 0$  o  $x = 1$  se hace de manera similar).

Como  $x \in \mathbb{I}$  y la familia de conjuntos holding ajenos por pares  $\{Q_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  construidos al inicio de éste capítulo es una cubierta de  $\mathbb{I}$ , entonces existe  $\alpha < \omega_1$  tal que  $x \in Q_\alpha$ . Como  $0 < x < 1$  por la propiedad Arquimediana existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < x - \frac{1}{N} < x < x + \frac{1}{N} < 1$ . A continuación, por inducción construimos las siguientes sucesiones:

*Para  $n = 1$ .*

Consideremos el conjunto abierto  $U_1 = [(\alpha, \omega_1] \times (x - \frac{1}{N+1}, x + \frac{1}{N+1})] \cap X^*$  tal que el punto  $(\omega_1, x) \in U_1$ ; como  $(\omega_1, x) \in \overline{A}^{X^*}$  entonces  $A \cap U_1 \neq \emptyset$ . Luego, Existen  $\alpha_1 \in (\alpha, \omega_1]$  y  $x_1 \in (x - \frac{1}{N+1}, x + \frac{1}{N+1})$  tales que el punto  $(\alpha_1, x_1) \in A$  y  $|x - x_1| < \frac{1}{N+1}$ .

Ahora, consideremos el conjunto abierto  $V_1 = [(\alpha_1, \omega_1] \times (x - \frac{1}{N+1}, x + \frac{1}{N+1})] \cap X^*$  tal que el punto  $(\omega_1, x) \in V_1$ ; como  $(\omega_1, x) \in \overline{B}^{X^*}$  entonces  $B \cap V_1 \neq \emptyset$ . Luego, Existen  $\beta_1 \in (\alpha_1, \omega_1]$  y  $y_1 \in (x - \frac{1}{N+1}, x + \frac{1}{N+1})$  tales que el punto  $(\beta_1, x_1) \in B$  y  $|x - y_1| < \frac{1}{N+1}$ .

*Para  $n = 2$ .*

Consideremos el conjunto abierto  $U_2 = [(\beta_1, \omega_1] \times (x - \frac{1}{N+2}, x + \frac{1}{N+2})] \cap X^*$  tal que el punto  $(\omega_1, x) \in U_2$ ; como  $(\omega_1, x) \in \overline{A}^{X^*}$  entonces  $A \cap U_2 \neq \emptyset$ . Luego, Existen  $\alpha_2 \in (\beta_1, \omega_1]$  y  $x_2 \in (x - \frac{1}{N+2}, x + \frac{1}{N+2})$  tales que el punto  $(\alpha_2, x_2) \in A$  y  $|x - x_2| < \frac{1}{N+2}$ .

Ahora, consideremos el conjunto abierto  $V_2 = [(\alpha_2, \omega_1] \times (x - \frac{1}{N+2}, x + \frac{1}{N+2})] \cap X^*$  tal que el punto  $(\omega_1, x) \in V_2$ ; como  $(\omega_1, x) \in \overline{B}^{X^*}$  entonces  $B \cap V_2 \neq \emptyset$ . Luego, Existen  $\beta_2 \in (\alpha_2, \omega_1]$  y  $y_2 \in (x - \frac{1}{N+2}, x + \frac{1}{N+2})$  tales que el punto  $(\beta_2, x_2) \in B$  y  $|x - y_2| < \frac{1}{N+2}$ .

Repetiendo este proceso sucesivamente, podemos construir las sucesiones  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  en el espacio  $[0, \omega_1]$  y  $x_1, x_2, x_3, \dots; y_1, y_2, y_3, \dots$  en el espacio  $\mathbb{I}$  tales que

1.  $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$
2.  $|x - x_i| < \frac{1}{N+i}$  y  $|x - y_i| < \frac{1}{N+i}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$
3.  $(\alpha_i, x_i) \in A$  y  $(\beta_i, y_i) \in B$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$

Por el Corolario 1.29 se tiene que  $\lambda = \sup\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} = \sup\{\beta_i : i \in \mathbb{N}\}$  tal que  $\lambda < \omega_1$ ,  $\alpha_i < \lambda$  y  $\beta_i < \lambda$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$

**Afirmación 2.19.** El punto  $(\lambda, x) \in A \cap B$ .

En efecto, sean  $\gamma < \lambda$  y  $\epsilon > 0$  tal que el intervalo  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \mathbb{I}$ , sin pérdida de generalidad podemos considerar el conjunto abierto básico

$$W_1 = (\gamma, \lambda + 1) \times (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

en el espacio  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$  tal que  $(\lambda, x) \in W_1$ .

Como  $\gamma < \lambda$  y  $\lambda$  es el supremo, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma < \alpha_k < \lambda$ ; y dado que  $\epsilon > 0$  por la propiedad Arquimediana existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x - \epsilon < x - \frac{1}{N+2} < x < x + \frac{1}{N+2} < x + \epsilon$ . Tomando  $M = \max\{k, m\}$  se cumple

- a)  $\gamma < \alpha_M \beta_M < \lambda$ .
- b)  $x_M, y_M \in (x - \frac{1}{N+M}, x + \frac{1}{N+M})$ .
- c)  $(\alpha_M, x_M) \in A$  y  $(\beta_M, y_M) \in B$ .

Tomando  $W = W_1 \cap X$  es un conjunto abierto básico en  $X$  con  $(\lambda, x) \in W$ , luego  $(\alpha_M, x_M) \in A \cap W$  y  $(\beta_M, y_M) \in B \cap W$ , es decir

$$A \cap W \neq \emptyset \text{ y } B \cap W \neq \emptyset$$

Como lo anterior se cumple siempre que tomemos cualquier conjunto abierto  $U$  en  $X$  con  $(\lambda, x) \in U$ . Entonces se tiene que  $(\lambda, x) \in \overline{A}^X = A$  y  $(\lambda, x) \in \overline{B}^X = B$ , es decir,  $A \cap B \neq \emptyset$  pero esto contradice nuestra hipótesis.

**Caso II:** Si existe un punto  $(\alpha, x) \in \overline{A}^{X^*} \cap \overline{B}^{X^*}$  con  $\alpha < \omega_1$ .

Si  $\alpha \neq 0$ , consideremos un ordinal  $\beta < \omega_1$  con  $\beta < \alpha$  y  $\epsilon > 0$  tal que  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \mathbb{I}$ ; tomamos el conjunto abierto básico  $U = (\beta, \alpha + 1) \times (x - \epsilon, x + \epsilon)$  en  $[0, \omega_1] \times \mathbb{I}$  tal que  $(\alpha, x) \in U$  (En otro caso, si  $\alpha = 0$ , basta tomar  $U = [0, 1) \times (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ). Entonces el conjunto  $W = U \cap X^*$  es abierto en  $X^*$ . Como el punto  $(\alpha, x) \in \overline{A}^{X^*} \cap \overline{B}^{X^*}$  entonces

$$A \cap W \neq \emptyset \text{ y } B \cap W \neq \emptyset.$$

Podemos notar que  $U \cap X = U \cap X^*$  por lo que  $W$  también es abierto en  $X$ . Dado que el conjunto abierto básico  $W$  de  $(\alpha, x)$  en  $X$  es arbitrario, podemos concluir que  $(\alpha, x) \in \overline{A}^X = A$  y  $(\alpha, x) \in \overline{B}^X = B$ , es decir,  $A \cap B \neq \emptyset$ , lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por lo tanto, hemos demostrado que  $\overline{A}^{X^*} \cap \overline{B}^{X^*} = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 2.20.** El espacio  $X$  es normal.

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  un par de conjuntos cerrados disjuntos en  $X$ , por la Proposición 2.18 tenemos que  $\overline{A}^{X^*} \cap \overline{B}^{X^*} = \emptyset$  y por el Corolario 1.9 se tiene que

$$\overline{A}^{\beta X^*} \cap \overline{B}^{\beta X^*} = \emptyset. \quad (2.22)$$

Notemos que  $X \subseteq X^* \subseteq [0, \omega_1] \times \mathbb{I} \subseteq \beta X$  como subespacios, aplicando el Corolario 1.10 tenemos que  $\beta X = \beta X^*$ . Por lo que la ecuación 2.22 se puede ver como

$$\overline{A}^{\beta X} \cap \overline{B}^{\beta X} = \emptyset.$$

Como  $\beta X$  es compacto por el Teorema 1.8 el espacio  $\beta X$  es normal, entonces existen conjuntos abiertos  $U_1$  y  $V_1$  en  $\beta X$  tales que

$$\overline{A}^{\beta X} \subseteq U_1, \overline{B}^{\beta X} \subseteq V_1 \text{ y } U_1 \cap V_1 = \emptyset.$$

Por último, consideremos los conjuntos abiertos ajenos  $U = U_1 \cap X$  y  $V = V_1 \cap X$  en  $X$ , aplicando la Proposición 1.4 se tiene que

$$A = \overline{A}^X = \overline{A}^{\beta X} \cap X \subseteq U_1 \cap X = U.$$

$$B = \overline{B}^X = \overline{B}^{\beta X} \cap X \subseteq V_1 \cap X = V.$$

Por lo tanto, el espacio  $X$  es normal.  $\square$

## 2.4. El Espacio $X$ no es fuertemente cero-dimensional

**Teorema 2.21.** El espacio  $X$  no es fuertemente cero-dimensional.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es fuertemente cero-dimensional y sean  $x, y \in Q_0$  con  $x \neq y$ ; consideremos los siguientes conjuntos cerrados en  $X$

$$F_1 = [0, \omega_1] \times \{x\} = ([0, \omega_1] \times \{x\}) \cap X.$$

$$F_2 = [0, \omega_1) \times \{y\} = ([0, \omega_1] \times \{y\}) \cap X.$$

Como  $X$  es normal y aplicando el Lema de Urysohn se tiene que los conjuntos  $F_1$  y  $F_2$  son completamente separados; aplicando el Teorema 1.19 existe un conjunto abierto y cerrado  $U$  en  $X$  tal que

$$F_1 \subseteq U \subseteq X \setminus F_2.$$

o bien

$$F_1 \subseteq U \text{ y } F_2 \subseteq X \setminus U.$$

Como los conjuntos  $U$  y  $X \setminus U$  son cerrados disjuntos en  $X$ , por la Proposición 2.18 tenemos que

$$\overline{U}^{X^*} \cap \overline{X \setminus U}^{X^*} = \emptyset. \quad (2.23)$$

Luego,  $\overline{U}^{X^*} \cup \overline{X \setminus U}^{X^*} = \overline{U \cup X \setminus U}^{X^*} = \overline{X}^{X^*}$ , por la Proposición 2.3  $X$  es denso en  $X^*$ ; así

$$\overline{U}^{X^*} \cup \overline{X \setminus U}^{X^*} = X^*. \quad (2.24)$$

Por las ecuaciones 2.23 y 2.24 se concluye que los conjuntos  $\overline{U}^{X^*}$  y  $\overline{X \setminus U}^{X^*}$  son abiertos en  $X^*$  tales que  $(\omega_1, x) \in \overline{U}^{X^*}$  y  $(\omega_1, y) \in \overline{X \setminus U}^{X^*}$ . Así, los conjuntos

$$V = (\{\omega_1\} \times \mathbb{I}) \cap \overline{U}^{X^*} \text{ y } W = (\{\omega_1\} \times \mathbb{I}) \cap \overline{X \setminus U}^{X^*}.$$

son abiertos no vacíos en el subespacio  $\{\omega_1\} \times \mathbb{I}$  tales que

$$\{\omega_1\} \times \mathbb{I} = V \cup W \text{ y } V \cap W = \emptyset.$$

Por lo que el subespacio  $\{\omega_1\} \times \mathbb{I}$  es desconexo, pero esto es una contradicción; ya que el subespacio  $\{\omega_1\} \times \mathbb{I}$  es homeomorfo al subespacio  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, el espacio  $X$  no es fuertemente cero-dimensional.

□

---

## Capítulo 3

# $C_p(X)$ es de Lindelöf

---

Finalmente, en este capítulo estudiamos algunos resultados importantes para concluir que el espacio  $C_p(X)$  es de Lindelöf, donde  $X$  es nuestro espacio de estudio. Empezamos con las siguientes definiciones y resultados.

El espacio  $\lambda D(\omega_1)$  es el conjunto  $\omega_1 \cup \{\infty\}$  (con  $\infty \notin \omega_1$ ) equipado con la topología  $\tau$ , donde  $U \in \tau$  si y solo si  $\infty \notin U$  o  $|X \setminus U| \leq \omega$ . El espacio  $\lambda D(\omega_1)$  también se ha usado en [1].

Es fácil verificar que el espacio  $\lambda D(\omega_1)$  es de Hausdorff, con un único punto aislado  $\infty$  y es normal. Además, es un espacio de Lindelöf.

**Proposición 3.1.** El espacio  $[0, \omega_1)$  es homeomorfo a un subespacio de  $C_p(\lambda D(\omega_1))$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \omega_1$  y consideremos la función  $f : \lambda D(\omega_1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_\alpha(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta \in \omega_1 \text{ y } \beta < \alpha \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir,  $f_\alpha(\beta) = 0$  si  $\beta \in [0, \alpha)$ ; como el conjunto  $[0, \beta)$  es abierto y cerrado en  $\lambda D(\omega_1)$ , entonces la función  $f_\alpha$  es continua. Así, el conjunto  $Y = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  es un subespacio de  $C_p(\lambda D(\omega_1))$ . Ahora, verifiquemos que  $Y$  es homeomorfo al espacio  $[0, \omega_1)$ .

Consideremos  $H : Y \rightarrow [0, \omega_1)$  definida por  $H(f_\alpha) = \alpha$ . Notemos que  $H$  está bien definida, ya que si tomamos  $\alpha, \beta \in \omega$  con  $\alpha \neq \beta$ , entonces  $f_\alpha \neq f_\beta$ . Así,

$$H(f_\alpha) = \alpha \neq \beta = H(f_\beta)$$

De lo anterior, tenemos que la función  $H$  es biyectiva. Probaremos que la función  $H$  es abierta; tomemos  $\alpha \in \omega$  y  $f_\alpha \in C_p(\lambda D(\omega_1))$ , consideramos el

conjunto abierto en  $C_p(\lambda D(\omega_1))$  que es vecindad  $f_\alpha$

$$O(f_\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, U_1, U_2, \dots, U_n)$$

donde, sin pérdida de generalidad los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están en  $\omega_1$ ; los conjuntos  $U_i$  es abierto en  $\mathbb{R}$  tales que  $f_\alpha(x_i) \in U_i$ , para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Luego, sean  $C_1 = \{x_i : x_i < \alpha\}$  y  $C_2 = \{x_i : x_i < \alpha\}$ , entonces se tienen los siguientes casos:

**Caso I:** Si  $C_1 \neq \emptyset$  y  $C_2 \neq \emptyset$ . Sean  $A = \max C_1$  y  $B = \min C_2$ . Entonces

$$O(f_\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, U_1, U_2, \dots, U_n) = \{f_\beta : \beta \in (A, B)\} = V$$

Así,  $H(V) = (A, B)$  es abierto en  $[0, \omega_1)$ .

**Caso II:** Si  $C_1 \neq \emptyset$  y  $C_2 = \emptyset$ . Sean  $A = \max C_1$ , entonces

$$O(f_\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, U_1, U_2, \dots, U_n) = \{f_\beta : \beta \in (A, \omega_1)\} = V$$

Así,  $H(V) = (A, \omega_1)$  es abierto en  $[0, \omega_1)$ .

**Caso III:** Si  $C_1 = \emptyset$  y  $C_2 \neq \emptyset$ . Sean  $B = \min C_2$ , entonces

$$O(f_\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, U_1, U_2, \dots, U_n) = \{f_\beta : \beta \in [0, B)\} = V$$

Así,  $H(V) = [0, B)$  es abierto en  $[0, \omega_1)$ .

En ambos casos se tiene que la función  $H$  manda conjuntos abiertos a abiertos. Por la Proposición 1.4.18 en [3] se concluye que la función  $H$  es un homeomorfismo. □

**Definición 3.2.** Ahora, consideremos  $\mathcal{P}$  la clase de todas las imágenes continuas de subespacios cerrados de los productos de la forma  $\lambda D(\omega_1)^\omega \times K \times M$ , donde  $K$  es un espacio compacto y  $M$  es un espacio segundo numerable.

**Corolario 3.3.** Todos los espacios segundo numerable están en la clase  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Sea un espacio segundo numerable  $T$ , y considere el espacio compacto  $\mathbb{I}$ , entonces la función proyección  $\Pi_T : \lambda D(\omega_1)^\omega \times \mathbb{I} \times T \rightarrow T$ , claramente,  $T$  es la imagen continua del espacio cerrado  $\lambda D(\omega_1)^\omega \times \mathbb{I} \times T$ . Por lo que el espacio  $T$  está en la clase  $\mathcal{P}$ . □

Siguiendo la misma idea de la demostración del corolario anterior, se prueba el siguiente resultado.

**Corolario 3.4.** Todos los espacios compactos están en la clase  $\mathcal{P}$ .

**Proposición 3.5.** La clase  $\mathcal{P}$  es cerrada con respecto a imágenes continuas.

*Demostración.* Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y una función continua sobreyectiva  $g : X \rightarrow Y$ . Supongamos que el espacio  $X \in \mathcal{P}$ , entonces existen un espacio compacto  $K$  y un espacio segundo numerable  $M$  tal que para algún subespacio cerrado  $D$  de  $T = \lambda D(\omega_1)^\omega \times K \times M$  existe una función continua sobreyectiva  $f : D \rightarrow X$ . Así, la función  $h = g \circ f : D \rightarrow Y$  es continua sobreyectiva. Por lo que, el espacio  $Y$  está en la clase  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Proposición 3.6.** La clase  $\mathcal{P}$  es cerrada con respecto a subespacios cerrados.

*Demostración.* Sea  $A$  un espacio tal que  $A \in \mathcal{P}$  y  $B$  un subespacio cerrado de  $A$ . Como  $A \in \mathcal{P}$ . Existen un espacio compacto  $K$  y un espacio segundo numerable  $M$  tal que para algún subespacio cerrado  $D$  de  $T = \lambda D(\omega_1)^\omega \times K \times M$  existe una función continua sobreyectiva  $f : D \rightarrow A$ ; como  $B$  es cerrado en  $A$  entonces  $f^{-1}(B)$  es cerrado en  $D$  y por ser  $D$  cerrado entonces  $f^{-1}(B)$  es cerrado en  $T$ . Luego,  $f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \rightarrow B$  es continua sobreyectiva. Por lo tanto,  $B$  está en la clase  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Proposición 3.7.** La clase  $\mathcal{P}$  es cerrada con respecto a productos numerables.

*Demostración.* Para cada  $n \in \omega$ , sea  $X_n$  un elemento de la clase  $\mathcal{P}$ . Entonces existen subespacios cerrados  $A_n$  de  $T_n = \lambda D(\omega_1)^\omega \times K_n \times M_n$ , donde  $K_n$  es compacto y  $M_n$  es segundo numerable; además, una función continua  $f_n : T_n \rightarrow X_n$  tales que  $f_n(A_n) = X_n$ .

Notemos que por las Proposiciones 1.13 y 1.14 se tiene que el producto cartesiano de espacios topológicos es asociativo y conmutativo. Por lo que se cumple:

$$\prod_{n \in \omega} T_n \cong (\lambda D(\omega_1)^\omega)^\omega \times \prod_{n \in \omega} K_n \times \prod_{n \in \omega} M_n$$

Sean  $K = \prod_{n \in \omega} K_n$  y  $M = \prod_{n \in \omega} M_n$ ; aplicando la ley exponencial del producto cartesiano de espacios topológicos (ver pag. 110, sección 2.6 en [3]) se tiene que

$$(\lambda D(\omega_1)^\omega)^\omega \cong \lambda D(\omega_1)^\omega$$

Así,

$$(\lambda D(\omega_1)^\omega)^\omega \times K \times M \cong \lambda D(\omega_1)^\omega \times K \times M = T$$

Observemos que el conjunto  $F = \prod_{n \in \omega} A_n$  es cerrado en  $\prod_{n \in \omega} T_n$ , entonces es cerrado en  $T$ . Finalmente, tomemos la función  $f : T \longrightarrow \prod_{n \in \omega} X_n$  donde  $f = (f_n)_{n \in \omega}$  que es continua y cumple

$$f(F) = \prod_{n \in \omega} X_n.$$

Por lo tanto,  $\prod_{n \in \omega} X_n$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Proposición 3.8.** La clase  $\mathcal{P}$  es cerrada con respecto a uniones numerables.

*Demostración.* Sea una familia  $\{X_n : n \in \omega\}$  de espacios tales que  $X_n$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ , para cada  $n \in \omega$ . Consideremos  $X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$  probaremos que  $X$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ .

Para cada  $n \in \omega$  tenemos una función de encaje  $j_n : X_n \longrightarrow X$ . Sea  $Y = \prod_{n \in \omega} X_n$  por la Proposición 3.7, el espacio  $Y$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ . Por otro lado, el espacio discreto  $\omega$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ , ya que es segundo numerable. Así, por la Proposición 3.7 el espacio  $Y \times \omega$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ . Luego, definimos la función continua  $f : Y \times \omega \longrightarrow X$  como  $f(y, n) = i_n(P_n(y))$ , donde  $P_n : Y \longrightarrow X_n$  es la función proyección  $n$ -ésima. Por lo que  $f(Y \times \omega) = X$ .  $\square$

**Proposición 3.9.** La clase  $\mathcal{P}$  es cerrada con respecto a intersecciones numerables.

*Demostración.* Sea una familia  $\{X_n : n \in \omega\}$  de espacios tales que  $X_n$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ , para cada  $n \in \omega$ . Consideremos  $X = \bigcap_{n \in \omega} X_n$  probaremos que  $X$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ .

Notemos que si  $X = \emptyset$ , entonces  $X$  es segundo numerable y por el Corolario 3.3,  $X$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ . Ahora, supongamos que  $X \neq \emptyset$ , entonces consideremos  $\Delta = \{(x, x, \dots) : x \in \bigcap_{n \in \omega} X_n\}$  la diagonal del producto cartesiano  $\prod_{n \in \omega} X_n$ . Consideremos el mapeo  $f : \bigcap_{n \in \omega} X_n \longrightarrow \Delta$  dado por  $f(x) = (x, x, \dots)$ . Claramente  $f$  es un homeomorfismo.

Notemos que el conjunto  $\Delta$  es cerrado en el producto cartesiano  $\prod_{n \in \omega} X_n$ ; el cual esta en la clase  $\mathcal{P}$  por la Proposición 3.7 y por la Proposición 3.6 el espacio  $\Delta$  esta también en la clase  $\mathcal{P}$ . Luego, por la Proposición 3.5 el espacio  $\bigcap_{n \in \omega} X_n$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ .  $\square$

Como se probó en [1] el producto de  $\lambda D(\omega_1)^\omega$  con espacios segundos numerables es de Lindelöf. Así, el producto  $\lambda D(\omega_1)^\omega \times K \times M$  es de Lindelöf

para cada espacio compacto  $K$  y cada espacio segundo numerable  $M$ . Por lo tanto, todos los espacios en la clase  $\mathcal{P}$  son de Lindelöf.

La finalidad con los siguientes resultados será probar que el espacio  $C_p(X)$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ , donde  $X$  es nuestro espacio de estudio definido al inicio del capítulo 2.

Comenzamos con probar que el espacio  $C_p(X, \mathbb{I})$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ . Como el espacio  $\mathbb{I}$  es segundo numerable, existe una base numerable  $\beta = \{U_k : k \in \omega\}$  para  $\mathbb{I}$ .

Sea  $X$  nuestro espacio de estudio, recordemos que para cada  $r \in \mathbb{I}$ , si  $r \in Q_\alpha$ , entonces por el corolario 2.5 se tiene que,  $X_r = [\alpha, \omega_1) \times \{r\}$ , si  $\alpha = 0$  o  $\alpha$  es un ordinal sucesor, o bien,  $X_r = [\alpha + 1, \omega_1) \times \{r\}$ , si  $\alpha$  es un ordinal límite. Por lo tanto, el espacio  $X_r$  es homeomorfo a un subespacio cerrado del espacio  $[0, \omega_1)$ .

**Proposición 3.10.** Sean  $\alpha \in \omega_1$ ,  $r \in Q_\alpha$  y un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $X_r \subseteq U$ . Entonces existe un  $n \in \omega$  tal que  $X_r \subseteq [\alpha, \omega_1) \times U_n \subseteq U$ , si  $\alpha = 0$  o  $\alpha$  es un ordinal sucesor, o bien,  $X_r \subseteq [\alpha + 1, \omega_1) \times U_n \subseteq U$ , si  $\alpha$  es un ordinal límite.

*Demostración.* Supongamos que  $\alpha$  es un ordinal sucesor. Para cada punto  $(\beta, r) \in X_r$  elegimos una vecindad de la forma  $X \cap (V_\beta \times U_{k_\beta})$  contenida en  $U$ , donde  $V_\beta$  es un conjunto abierto en  $[0, \omega_1)$  y  $\beta \in V_\beta$ . Para cada  $i \in \omega$  tal que  $r \in U_i$  consideremos

$$W_i = X \cap \bigcup \{V_\beta \times U_{k_\beta} : k_\beta = i\}.$$

Entonces  $\{W_i : i \in \omega, r \in U_i\}$  es una familia numerable de conjuntos abiertos en  $X$  que cubre a  $X_r$ . Como el espacio  $X_r$  es homeomorfo al subespacio cerrado  $[\alpha, \omega_1)$  de  $[0, \omega_1)$ ,  $X_r$  es numerablemente compacto, así podemos elegir una subfamilia finita  $\{W_{k_1}, \dots, W_{k_l}\}$  que cubre a  $X_r$ . Luego, existe  $n \in \omega$  tal que  $r \in U_n \subseteq U_{k_1} \cap \dots \cap U_{k_l}$ . Por lo tanto,  $X_r \subseteq [\alpha, \omega_1) \times U_n \subseteq U$ .

Finalmente, si suponemos que  $\alpha$  es un ordinal límite; la prueba es similar al caso anterior.  $\square$

Pongamos

$$\Xi = \left\{ (b, d) \in \omega^\omega \times \mathbb{I}^\omega : Q_0 \subset \bigcup \{U_{b(n)}; n \in \omega\}, \right. \\ \left. \text{and } \{d(n) : n \in \omega\} \cup \bigcup \{U_{b(n)} : n \in \omega\} = \mathbb{I} \right\}.$$

El espacio  $\Xi$  is second-countable, entonces  $\Xi$  está en la clase  $\mathcal{P}$ .

Para cada  $m \in \omega \setminus \{0\}$  consideremos el conjunto

$$T_m = \left\{ f \in \mathbb{I}^X : \text{existen } (b, d) \in \Xi, g \in C_p([0, \omega_1])^\omega, e \in \omega^\omega \text{ y } \right. \\ \left. h \in C_p([0, \omega_1])^\omega \text{ tal que para cada } n \in \omega \text{ y cada } \right. \\ \left. (\alpha, r) \in ([0, \omega_1] \times U_{b(n)}) \cap X, |f(\alpha, r) - g(n)(\alpha)| \leq \frac{1}{m}, \right. \\ \left. d(n) \in U_{e(n)} \text{ y } |f(\alpha, r) - h(n)(\alpha)| \leq \frac{1}{m} \text{ para cada } \right. \\ \left. (\alpha, r) \in ([0, \omega_1] \times U_{e(n)}) \cap X \text{ tal que } (\alpha, d(n)) \in X_{d(n)} \right\}$$

Luego, tomemos

$$T = \bigcap \{T_m : m \in \omega \setminus \{0\}\}.$$

**Proposición 3.11.**  $T = C_p(X, \mathbb{I})$ .

*Demostración.* Primero verifiquemos que  $C_p(X, \mathbb{I}) \subseteq T$ . Sean  $f \in C_p(X, \mathbb{I})$ ,  $m \in \omega \setminus \{0\}$ ; para cada  $q \in Q_0$  consideremos las siguientes funciones

$C_q : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$  dada por  $C_q(r) = q$ , es continua.

$Id : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$  dada por  $Id(\alpha) = \alpha$ , es continua.

$F_q : [0, \omega_1] \times \mathbb{I} \longrightarrow [0, \omega_1] \times \mathbb{I}$  dada por  $F_q(\alpha, r) = (Id(\alpha), C_q(r)) = (\alpha, q)$ , es continua.

Luego, consideremos  $H_q = F_q|_X$  la cual es continua.

También, tomemos  $g_q : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{I}$  dada por  $g_q(\alpha) = f(\alpha, q)$ , es continua; ya que  $g_q = f \circ H_q \circ P$ , donde la función  $P : [0, \omega_1] \longrightarrow [0, \omega_1] \times \{q\}$  dada por  $P(\alpha) = (\alpha, q)$  es un homeomorfismo.

**Afirmación 3.12.** la función  $j_q : X \longrightarrow [-1, 1]$  dada por  $j_q(\alpha, r) = f(\alpha, r) - g_q(\alpha)$  es continua

$j_q : X \longrightarrow [-1, 1]$  dada por  $j_q(\alpha, r) = (f - f \circ H_q)(\alpha, r)$  por construcción la función  $j_q$  es continua. Además, notemos que se cumple lo siguiente

$$j_q(\alpha, r) = (f - f \circ H_q)(\alpha, r) = f(\alpha, r) - f(H_q(\alpha, r)) = f(\alpha, r) - f(\alpha, q) = f(\alpha, r) - g_q(\alpha).$$

Observemos que la función continua  $j_q$  restringida al conjunto  $[0, \omega_1] \times \{q\} = X_q$  es 0, entonces el conjunto  $j_q^{-1}(\frac{-1}{m}, \frac{1}{m})$  es una vecindad abierta de

$X_q$  en  $X$  y por la Proposición 3.10 existe un  $U_q \in \beta$  tal que

$$X_q \subseteq [0, \omega_1) \times U_q \subseteq j_q^{-1}\left(\frac{-1}{m}, \frac{1}{m}\right) \subseteq j_q^{-1}\left[\frac{-1}{m}, \frac{1}{m}\right].$$

Como  $\beta$  es una base numerable del espacio  $\mathbb{I}$ , podemos encontrar un  $b \in \omega^\omega$  tal que  $\{U_q : q \in Q_0\} = \{U_{b(n)} : n \in \omega\}$ ; tomemos como  $g(n)$  una función  $g_q$  tal que  $q \in U_{b(n)}$ , para cada  $n \in \omega$ .

Sea  $K = \mathbb{I} \setminus \bigcup\{U_q : q \in Q_0\}$ ; como el conjunto  $Q_0$  es holding, entonces el conjunto  $\bigcup\{U_q : q \in Q_0\}$  también lo es, ya que  $Q_0 \subseteq \bigcup\{U_q : q \in Q_0\}$ ; dado que el conjunto  $K$  es cerrado en  $\mathbb{I}$ , entonces es a lo más numerable. Así, podemos encontrar un  $d \in \mathbb{I}_\omega$  tal que  $(b, d) \in \Xi$ .

Para cada  $n \in \omega$ , sea  $\beta_n < \omega_1$  tal que  $d(n) \in Q_{\beta_n}$  y tomemos la función  $F_{d(n)} : [0, \omega_1) \times \mathbb{I} \rightarrow [0, \omega_1) \times \mathbb{I}$  dada por  $F_{d(n)}(\alpha, r) = (\alpha, d(n))$ , es continua.

Luego, consideremos  $H_{d(n)} = F_{d(n)}|_X$  la cual es continua. También, tomemos  $h_n : \omega_1 \rightarrow \mathbb{I}$  dada por  $h_n(\alpha) = f(\alpha, d(n))$ , es continua. Así, sea  $h \in C_p([0, \omega_1)^\omega)$  tal que  $h(n) = h_n$ , para cada  $n \in \omega$ . Luego, definimos la función

$j_{d(n)} : X \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $j_{d(n)}(\alpha, r) = (f - f \circ H_{d(n)})(\alpha, r)$  por construcción la función  $j_{d(n)}$  es continua. Además, notemos que se cumple lo siguiente

$$j_{d(n)}(\alpha, r) = (f - f \circ H_{g(n)})(\alpha, r) = f(\alpha, r) - f(H_{d(n)}(\alpha, r)) = f(\alpha, r) - f(\alpha, d(n)) = f(\alpha, r) - h_n(\alpha).$$

Observemos que la función continua  $j_{d(n)}$  restringida al conjunto  $[\beta_n, \omega_1) \times \{d(n)\} = X_{d(n)}$  es 0, entonces el conjunto  $j_{d(n)}^{-1}\left(\frac{-1}{m}, \frac{1}{m}\right)$  es una vecindad abierta de  $X_{d(n)}$  en  $X$  y por la Proposición 3.10 existe un  $e(n) \in \omega$  tal que

$$X_{d(n)} \subseteq [\beta_n, \omega_1) \times U_{e(n)} \subseteq j_{d(n)}^{-1}\left(\frac{-1}{m}, \frac{1}{m}\right) \subseteq j_{d(n)}^{-1}\left[\frac{-1}{m}, \frac{1}{m}\right].$$

Así, tenemos que  $(b, d) \in \Xi$ ,  $g \in C_p([0, \omega_1)^\omega)$ ,  $e \in \omega^\omega$  y  $h \in C_p([0, \omega_1)^\omega)$  y cumplen las condiciones de la definición del conjunto  $T_m$ , es decir,  $f \in T_m$ . Como  $m \in \omega \setminus \{0\}$  fue arbitrario entonces

$$f \in \bigcap\{T_m : m \in \omega \setminus \{0\}\} = T.$$

Ahora, demostraremos que  $T \subseteq C_p(X, \mathbb{I})$ . Sea  $f \in T$ ; entonces  $f \in T_m$  para cada  $m \in \omega \setminus \{0\}$ .

Sean  $m \in \omega \setminus \{0\}$  y un punto  $(\alpha, r) \in X$ ; como  $f \in T_m$  existen  $(b, d) \in \Xi$ ,  $g \in C_p([0, \omega_1])^\omega$ ,  $e \in \omega^\omega$  y  $h \in C_p([0, \omega_1])^\omega$ , entonces se tiene lo siguiente

**Caso I:** Si  $r \in U_{b(n)}$  para algún  $n \in \omega$ . Entonces  
 $|f(\beta, s) - g(n)(\beta)| < \frac{1}{m}$ , para cada  $(\beta, s) \in ([0, \omega_1] \times U_{b(n)}) \cap X$ .

Como la función  $g(n)$  es continua, en particular para  $\epsilon = \frac{1}{m}$  y el punto  $\alpha$  existe un conjunto abierto  $V$  en  $[0, \omega_1)$  con  $\alpha \in V$  tal que  
 $|g(n)(\gamma) - g(n)(\alpha)| < \frac{1}{m}$ , para cada  $\gamma \in V$ .

Entonces

$$\begin{aligned} |f(\beta, s) - f(\alpha, r)| &\leq |f(\beta, s) - g(n)(\beta)| + |g(n)(\beta) - g(n)(\alpha)| + |f(\alpha, r) - g(n)(\alpha)| \\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{3}{m} \end{aligned}$$

para cada  $(\beta, s) \in (V \times U_{b(n)}) \cap X$ .

**Caso II:** Si  $r \notin \bigcup \{U_{b(n)} : n \in \omega\}$ , entonces  $r = d(k)$  para algún  $k \in \omega$ .

Entonces  $r \in U_{e(k)}$  y como  $f \in T_m$  se cumple que  
 $|f(\beta, s) - h(n)(\beta)| < \frac{1}{m}$ , para cada  $(\beta, s) \in ([0, \omega_1] \times U_{e(n)}) \cap X$  tal que  
 $(\alpha, d(k)) \in X_{d(k)}$ .

Notemos que si para cada  $(\beta, s) \in ([0, \omega_1] \times U_{e(n)}) \cap X$  tal que  $(\alpha, d(k)) \in X_{d(k)}$  es equivalente que para cada  $(\beta, s) \in ([\delta, \omega_1] \times U_{e(n)}) \cap X$ , donde  $\delta = \gamma$  ó  $\delta = \gamma + 1$ , si  $\gamma$  es un ordinal sucesor o  $\gamma$  es un ordinal límite, respectivamente, tal que  $r \in Q_\gamma$ .

Aplicando la Proposición 2.5 se tiene que el conjunto  $([\delta, \omega_1] \times U_{e(n)}) \cap X$  es abierto en  $X$ .

Como la función  $h(n)$  es continua, en particular para  $\epsilon = \frac{1}{m}$  y el punto  $\alpha$  existe un conjunto abierto  $V$  en  $[0, \omega_1)$  con  $\alpha \in V$  tal que  
 $|h(n)(\gamma) - h(n)(\alpha)| < \frac{1}{m}$ , para cada  $\gamma \in V$ .

Entonces

$$\begin{aligned} |f(\beta, s) - f(\alpha, r)| &\leq |f(\beta, s) - h(n)(\beta)| + |h(n)(\beta) - h(n)(\alpha)| + |f(\alpha, r) - h(n)(\alpha)| \\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{3}{m} \end{aligned}$$

para cada  $(\beta, s) \in (V \cap [\delta, \omega_1)) \times U_{e(k)} \cap X$ .

Por lo tanto, para cada  $m \in \omega \setminus \{0\}$  y cada  $x \in X$ ; cualquiera que sea el caso existe una vecindad abierta  $W$  de  $x$  en  $X$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{3}{m} \text{ para cada } y \in W,$$

se sigue que  $f$  es continua en cada punto  $x$  de  $X$ . Así,  $f \in C_p(X, \mathbb{I})$ .  $\square$

Denotemos por

$$\Gamma = \mathbb{I}^X \times \Xi \times C_p([0, \omega_1))^\omega \times \omega^\omega \times C_p([0, \omega_1))^\omega.$$

**Proposición 3.13.** Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $T_m$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Sea  $m \in \omega \setminus \{0\}$  y consideremos el subconjunto de  $\Gamma$  como

$$\begin{aligned} Z_m = \{ &(f, b, d, g, e, h) \in \Gamma : \text{para cada } n \in \omega \text{ y cada } (\alpha, r) \in (U_{b(n)} \times \\ &[0, \omega_1)) \cap X, |f(\alpha, r) - g(n)(\alpha)| \leq 1/m, d(n) \in U_{e(n)}, \text{ y} \\ &|f(\alpha, r) - h(n)(\alpha)| \leq 1/m \text{ para toda } (\alpha, r) \in [0, \omega_1) \times U_{e(n)} \cap X \\ &\text{tal que } (\alpha, d(n)) \in X_{d(n)} \} \end{aligned}$$

Probaremos que  $Z_m$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ . Notemos que  $Z_m = Z'_m \cap Z''_m \cap Z'''_m$ , donde

$$Z'_m = \{(f, b, d, g, e, h) \in \Gamma : \text{para cada } n \in \omega \text{ y cada } (\alpha, r) \in ([0, \omega_1) \times U_{b(n)} \cap X, |f(\alpha, r) - g(n)(\alpha)| \leq 1/m)\},$$

$$Z''_m = \{(f, b, d, g, e, h) \in \Gamma : \text{para cada } n \in \omega, |f(\alpha, r) - h(n)(\alpha)| \leq 1/m \text{ para toda } (\alpha, r) \in ([0, \omega_1) \times U_{e(n)} \cap X \text{ tal que } (\alpha, d(n)) \in X_{d(n)}\}.$$

$$Z'''_m = \{(f, b, d, g, e, h) \in \Gamma : \text{para cada } n \in \omega, d(n) \in U_{e(n)}\}.$$

Ahora, verifiquemos que los conjuntos  $Z'_m$ ,  $Z''_m$  y  $Z'''_m$  son cerrados en  $\Gamma$ .

Sea  $(f^0, b^0, d^0, g^0, e^0, h^0) \in \Gamma \setminus Z'_m$ . entonces existe algún  $n_0 \in \omega$  y un punto  $(\alpha_0, r_0)$  de  $([0, \omega_1 \times U_{b^0(n_0)}) \cap X$  tal que  $|f^0(\alpha_0, r_0) - g^0_{b(n_0)}(\alpha_0)| > 1/m$ . Pongamos

$$W = \{(f, b, d, g, e, h) \in \Gamma : b(n_0) = b^0(n_0) \text{ y } |f(\alpha_0, r_0) - g^0(n_0)(\alpha_0)| > 1/m\}.$$

**Afirmación 3.14.**  $W$  es un conjunto abierto en  $\Gamma$

En efecto, si consideramos la función  $H_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $H_1(f, b, d, g, e, h) = f(\alpha_0, r_0)$ , notemos que  $H_1$  es una función continua; ya que si tomamos la función proyección

$\Pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{I}^X$  definida por  $\Pi_1(f, b, d, g, e, h) = f$  es continua, y la función  $\widehat{(\alpha_0, r_0)} : \mathbb{I}^X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\widehat{(\alpha_0, r_0)}(t) = t(\alpha_0, r_0)$  es continua, por lo que

$$\begin{aligned} (\widehat{(\alpha_0, r_0)} \circ \Pi_1)(f, b, d, g, e, h) &= \widehat{(\alpha_0, r_0)}(\Pi_1(f, b, d, g, e, h)) \\ &= \widehat{(\alpha_0, r_0)}(f) \\ &= f(\alpha_0, r_0) \\ &= H_1(f, b, d, g, e, h) \end{aligned}$$

Por otra parte, sea  $H_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $H_2(f, b, d, g, e, h) = g(n_0)(\alpha_0)$ , observemos que la función  $H_2$  es continua. En efecto, basta tomar la función proyección  $\Pi_4 : \Gamma \rightarrow C_p(\tau(\omega_1))^\omega$  dada por  $\Pi_4(f, b, d, g, e, h) = g$  que es continua, similarmente la función proyección  $\Pi_{n_0} : \Gamma \rightarrow C_p(\tau(\omega_1))$  dada por  $\Pi_{n_0}((t(n))_{n \in \omega}) = t(n_0)$  es continua. También, consideremos la función  $\widehat{\alpha_0} : C(\tau(\omega_1), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\widehat{\alpha_0}(S) = S(\alpha_0)$ . Así

$$\begin{aligned} (\widehat{\alpha_0} \circ \Pi_{n_0} \circ \Pi_4)(f, b, d, g, e, h) &= \widehat{\alpha_0}(\Pi_{n_0}(\Pi_4(f, b, d, g, e, h))) \\ &= \widehat{\alpha_0}(\Pi_{n_0}(g)) \\ &= \widehat{\alpha_0}(g(n_0)) \\ &= g(n_0)(\alpha_0) \\ &= H_2(f, b, d, g, e, h) \end{aligned}$$

A continuación, tomemos la función  $D : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$D(f, b, d, g, e, h) = H_1(f, b, d, g, e, h) - H_2(f, b, d, g, e, h)$$

por construcción  $D$  es continua. Por lo que el conjunto  $U = D^{-1}((-\infty, -\frac{1}{m}) \cup (\frac{1}{m}, \infty))$  es abierto en  $\Gamma$  y si consideramos el conjunto abierto en  $\omega^\omega$ ,  $V^* = \prod_{n \in \omega} V_n$ , donde  $V_n = \omega$  si  $n \neq n_0$  y  $V_n = \{b^0(n_0)\}$  si  $n = n_0$ . Así, el conjunto

$$V = \mathbb{I}^X \times V^* \times \mathbb{I}^\omega \times C_p(\tau(\omega_1))^\omega \times \omega^\omega \times C_p(\tau(\omega_1))^\omega$$

es abierto en  $\Gamma$ . Finalmente, por construcción se puede observar que

$$W = U \cap V$$

Así, el conjunto  $W$  es abierto en  $\Gamma$ , contiene el punto  $(f^0, b^0, d^0, g^0, e^0, h^0)$  y es claro que  $W \cap Z'_m = \emptyset$ . Por lo que el conjunto  $Z'_m$  es cerrado en  $\Gamma$ .

Ahora, supongamos que  $(f^0, b^0, d^0, g^0, e^0, h^0) \in \Gamma \setminus Z''_m$ . Entonces existe algún  $n_0 \in \omega$ , y existen puntos  $(\alpha_0, d^0(n_0)) \in X$  y un  $r_0 \in \mathbb{I}$  tales que  $(\alpha_0, r_0) \in X \cap ([0, \omega_1) \times U_{e^0(n_0)})$  y  $|f^0(\alpha_0, r_0) - h^0(\alpha_0)| > \frac{1}{m}$ . Entonces

$$W = \{(f, b, d, g, e, h) \in \Gamma : e(n_0) = e^0(n_0) \text{ y } |f(\alpha_0, r_0) - h(n_0)(\alpha_0)| > 1/m\}.$$

Usando la misma estrategia de la afirmación anterior, se puede verificar que el conjunto  $W$  es abierto en  $\Gamma$ , que contiene al punto  $(f^0, b^0, d^0, g^0, e^0, h^0)$  y es claro que  $W \cap Z''_m = \emptyset$ . Por lo que el conjunto  $Z''_m$  es cerrado en  $\Gamma$ .

Finalmente, supongamos que  $(f^0, b^0, d^0, g^0, e^0, h^0) \in \Gamma \setminus Z'''_m$ . Entonces para algún  $n_0 \in \omega$ ,  $d^0(n_0) \notin U_{e^0(n_0)}$ . Tomemos

$$W = \{(f, b, d, g, e, h) \in \Gamma : e(n_0) = e^0(n_0) \text{ y } d(n_0) \notin U_{e^0(n_0)}\}.$$

Notemos que  $W = U \cap V$ , donde podemos notar que

$$U = \mathbb{I}^X \times \Xi \times C_p([0, \omega_1])^\omega \times A \times C_p([0, \omega_1])^\omega.$$

Donde,  $A = \prod_{n \in \omega} A_n$ , donde  $A_n = \omega$ , si  $n \neq n_0$  y  $A_n = \{e^0(n_0)\}$ , si  $n = n_0$ .

Por otra parte, como  $d^0(n_0) \notin U_{e^0(n_0)}$  y el espacio  $\mathbb{I}$  es regular, existe un  $k \in \omega$  tal que

$$d^0(n_0) \notin \overline{U_k} \subseteq U_{e^0(n_0)}$$

es decir,

$$d^0(n_0) \in V_0 = \mathbb{I} \setminus \overline{U_k}.$$

Sea

$$V = \mathbb{I}^X \times (\omega \times B) \times C_p([0, \omega_1])^\omega \times A \times C_p([0, \omega_1])^\omega.$$

Donde,  $B = \prod_{n \in \omega} B_n$ , donde  $B_n = \omega$ , si  $n \neq n_0$  y  $B_n = V_0$ , si  $n = n_0$ .

Entonces  $W$  es abierto en  $\Gamma$ , conteniendo a  $(f^0, b^0, d^0, g^0, e^0, h^0)$ , y es disjunto de  $Z_m'''$ . Por lo que  $Z_m'''$  es cerrado en  $\Gamma$ .

De lo anterior se sigue que  $Z_m = Z_m' \cap Z_m'' \cap Z_m'''$  es cerrado en  $\Gamma$ .

El espacio  $C_p([0, \omega_1])$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$  (en efecto, del Teorema 1.16 en [5] y que  $\tau(\omega_1)$  es homeomorfo a un subespacio de  $C_p(\lambda D(\omega_1))$  (ver Proposición 3.1) y como el espacio  $[0, \omega_1]$  es casi compacto, así existe una uniformidad compatible en  $[0, \omega_1]$  y cada función continua en  $[0, \omega_1]$  es uniformemente continua). Por lo tanto, el producto  $\Gamma$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ . Como el espacio  $T_m$  es la imagen del conjunto  $Z_m$  bajo la proyección  $\Pi_1 : \mathbb{I}^X \times \Xi \times C_p([0, \omega_1])^\omega \times \omega^\omega \times C_p([0, \omega_1])^\omega \longrightarrow \mathbb{I}^X$ ; aplicando la Proposición 3.5 se sigue que  $T_m$  está en la clase  $\mathcal{P}$ .  $\square$

De las Proposiciones 3.11 y 3.13, la igualdad  $T = \bigcap \{T_m : m \in \omega \setminus \{0\}\}$  y que la clase  $\mathcal{P}$  es cerrada bajo intersecciones numerables, se sigue el siguiente resultado.

**Proposición 3.15.**  $C_p(X, \mathbb{I})$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ .

Como el espacio  $C_p(X, \mathbb{I})$  esta en la clase  $\mathcal{P}$ , entonces el espacio  $C_p(X, \mathbb{I})$  de Lindelöf, ya que todos los espacios de la clase  $\mathcal{P}$  son de Lindelöf.

Sea  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  la compactación de dos puntos de la linea real homeomorfo al espacio  $[0, 1]$ . Consideremos a  $\overline{\mathbb{R}}$  con el orden usual y asumimos que  $-\infty < r < \infty$  para cada  $r \in \mathbb{R}$  y particularmente extendemos la sustracción por  $\infty - a = a - (-\infty) = \infty$  para cada  $a \in \mathbb{R}$ . Por la Proposición 3.15 el espacio  $C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ .

Recordemos nuevamente el conjunto

$$\Xi = \left\{ (b, d) \in \omega^\omega \times \mathbb{I}^\omega : Q_0 \subset \bigcup \{U_{b(n)}; n \in \omega\}, \right. \\ \left. \text{and } \{d(n) : n \in \omega\} \cup \bigcup \{U_{b(n)} : n \in \omega\} = \mathbb{I} \right\}.$$

Tomemos

$$M = \left\{ f \in \overline{\mathbb{R}}^X : \text{existe un } (b, d) \in \Xi, g \in C_p([0, \omega_1])^\omega \text{ y un } c \in \omega^\omega \text{ tal que} \right. \\ \left. |f(\alpha, r) - g(n)(\alpha)| \leq 1 \text{ para cada } (\alpha, r) \in X \text{ con } r \in U_{b(n)} \text{ y} \right. \\ \left. (X_{d(n)}) \subseteq [-c(n), c(n)] \text{ para cada } n \in \omega \right\}$$

**Proposición 3.16.** Sea el conjunto  $M$  definido anteriormente. Entonces  $M \subseteq \mathbb{R}^X$ .

*Demostración.* Sea  $f \in M$ , notemos que para cada punto  $x = (\alpha, r)$  de  $X$  se cumple lo siguiente:

**Caso I:** si el punto  $x$  esta en  $[0, \omega_1) \times \overline{U_{b(m)}}$ , para algún  $m \in \omega$ . Entonces por definición de  $M$ , se tiene que  $f(x) \in [g(m)(\alpha) - 1, g(m)(\alpha) + 1]$ , donde  $g(m) \in C_p([0, \omega_1))$ . Así,  $g(m)(\alpha) \in \mathbb{R}$ .

**Caso II:** si el punto  $x$  esta en  $X_{d(m)}$ , para algún  $m \in \omega$ . Entonces por definición de  $M$  se cumple que  $f(x) \in [-c(m), c(m)]$ .  
En ambos casos se tiene que  $f(x) \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $M \subseteq \mathbb{R}^X$ .  $\square$

**Proposición 3.17.**  $C_p(X) = M \cap C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$ .

*Demostración.* La inclusión  $M \cap C_p(X, \overline{\mathbb{R}}) \subseteq C_p(X)$  se sigue de que  $M \subseteq \mathbb{R}^X$ . Para probar la otra inclusión; supongamos que  $f \in C_p(X)$ . Para cada  $q \in Q_0$  y  $\alpha \in \omega_1$  consideremos la función  $g_q : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g_q(\alpha) = f(\alpha, q)$ ; luego de la afirmación 3.12, la función  $j_q : X \rightarrow [-1, 1]$  definida por  $j_q(\alpha, r) = f(\alpha, r) - g_q(\alpha)$  es continua. Por lo que el conjunto  $B_q = j_q^{-1}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  es abierto en  $X$  tal que

$$X_q = [0, \omega_1) \times \{q\} \subseteq B_q$$

Aplicando la Proposición 3.10, existe  $U_q \in \beta$  tal que  $q \in U_q$  y

$$X_q \subseteq [0, \omega_1) \times U_q \subseteq B_q.$$

Además, se cumple que si  $r \in U_q$  entonces  $(\alpha, r) \in B_q$  para cada  $\alpha \in \omega_1$ , es decir  $j_q(\alpha, r) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subseteq [-1, 1]$ .

Luego, la colección  $\{U_q : q \in Q_0\}$  puede escribirse como  $\{U_{b(n)} : n \in \omega\}$ , para algún  $b \in \omega^\omega$ ; para cada  $n \in \omega$  elegimos un  $q \in Q_0$  tal que  $U_{b(n)} = U_q$  y ponemos  $g(n) = g_q$ . Notemos que  $Q_0 \subseteq \bigcup\{U_{b(n)} : n \in \omega\}$  y como el conjunto  $Q_0$  es holding, el complemento de  $\bigcup\{U_{b(n)} : n \in \omega\}$  es cerrado y a lo más numerable, así podemos encontrar una sucesión  $d$  en  $\mathbb{I}^\omega$  tal que

$$\{d(n) : n \in \omega\} = \mathbb{I} \setminus \bigcup\{U_{b(n)} : n \in \omega\}$$

Por lo que  $(b, d) \in \Xi$ . Por la Proposición 2.6, para cada  $n \in \omega$  el conjunto  $X_{d(n)}$  es numerablemente compacto; entonces por el Teorema 1.12 se sigue que el conjunto  $f(X_{d(n)})$  es acotado, así existe  $c(n) \in \omega$  tal que

$$f(X_{d(n)}) \subseteq [-c(n), c(n)]$$

Luego,  $c \in \omega^\omega$ . De lo anterior se concluye que  $f \in M$  y como  $f \in C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$ , entonces  $f \in M \cap C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$ . Por lo tanto, se cumple la igualdad

$$C_p(X) = M \cap C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$$

□

**Proposición 3.18.** El conjunto  $M$  está en la clase  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Consideremos

$$N = \left\{ (f, b, d, g, c) \in \overline{\mathbb{R}}^X \times \Xi \times C_p([0, \omega_1]) \times \mathbb{I}^\omega : \begin{array}{l} |f(\alpha, r) - g(n)(\alpha)| \leq 1 \\ \text{para cada } (\alpha, r) \in X \text{ con } r \in U_{b(n)} \text{ y } f(X_{d(n)}) \subseteq [-c(n), c(n)] \\ \text{para cada } n \in \omega \end{array} \right\}$$

Verifiquemos que el conjunto  $N$  es cerrado en  $\Lambda = \overline{\mathbb{R}}^X \times \Xi \times C_p([0, \omega_1]) \times \mathbb{I}^\omega$ . Supongamos que  $(f^0, b^0, d^0, g^0, c^0)$  es un punto en  $\Lambda \setminus N$ , entonces existe un  $n_0 \in \omega$  que cumple los siguientes casos:

**Caso I:**  $|f^0(\alpha_0, r_0) - g_{b^0}^0(n_0)(\alpha_0)| > 1$ , para algún  $r_0 \in U_{b^0(n_0)}$  y  $\alpha_0 \in \omega_1$ . Entonces el conjunto

$$W = \{(f, b, d, g, c) \in \Lambda : b(n_0) = b^0(n_0) \text{ y } |f(\alpha_0, r_0) - g_{b^0}^0(n_0)(\alpha_0)| > 1\}$$

es abierto en  $\Lambda$ . En efecto, por la afirmación 3.12, la función  $F : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(f, b, d, g, c) = f(\alpha_0, r_0) - g_{b^0}^0(n_0)(\alpha_0)$  es continua. Así, el conjunto

$$B_0 = F^{-1}((-\infty, -1) \cup (1, \infty))$$

es abierto en  $\Lambda$  y contiene el punto  $(f^0, b^0, d^0, g^0, c^0)$ . Además, considerando el conjunto  $A_1 = \prod_{n \in \omega} V_n$ , donde  $V_n = \omega$  si  $n \neq n_0$  y  $V_n = \{b^0(n_0)\}$  si  $n = n_0$ ; es abierto en  $\omega^\omega$ , entonces el conjunto  $A = A_0 \times \mathbb{I}^\omega$  es abierto en  $\Xi$  y se cumple

$$W = B_0 \cap (C_p(X, \overline{\mathbb{R}}) \times A \times C_p([0, \omega_1]) \times \omega^\omega)$$

Así,  $W$  es un conjunto abierto en  $\Lambda$ , contiene el punto  $(f^0, b^0, d^0, g^0, c^0)$  y cumple que  $W \cap N = \emptyset$ .

**Caso II:**  $|f^0(x_0)| > c^0(n_0)$  para algún  $(\alpha_0, d^0(n_0)) \in X_{d(n_0)}$ . Entonces el conjunto

$$W = \{(f, b, d, g, c) \in \Lambda : c(n_0) = c^0(n_0) \text{ y } |f(\alpha_0, d^0(n_0))| > c(n_0)\}$$

es abierto en  $\Lambda$ . Ya que si consideramos la función  $G : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G(f, b, d, g, c) = f(\alpha_0, r_0)$  es continua. Entonces el conjunto

$$B_0 = G^{-1}((-\infty, -c^0(n_0)) \cup (c^0(n_0), \infty))$$

es abierto en  $\Lambda$  y contiene el punto  $(f^0, b^0, d^0, g^0, c^0)$ . Por otro lado, consideremos el conjunto abierto  $A_0 = \prod_{n \in \omega} V_n$ , donde  $V_n = \omega$  si  $n \neq n_0$  y  $V_n = \{c^0(n_0)\}$  si  $n = n_0$ ; en  $\omega^\omega$ , así se cumple que

$$W = B_0 \cap (C_p(X, \overline{\mathbb{R}}) \times \Xi \times C_p([0, \omega_1]) \times A_0)$$

es un conjunto abierto en  $\Lambda$ , contiene el punto  $(f^0, b^0, d^0, g^0, c^0)$  y cumple que  $W \cap N = \emptyset$ .

En ambos casos podemos construir un conjunto abierto que contiene a  $(f^0, b^0, d^0, g^0, c^0)$  y es disjunto de  $N$ . Por lo tanto,  $N$  es cerrado en  $\lambda$ .

Como los espacios,  $\Xi$ ,  $\omega^\omega$  y  $\mathbb{I}^\omega$  son espacios segundo numerable, entonces están en la clase  $\mathcal{P}$ . Además, el espacio  $C_p([0, \omega_1])$  y  $C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$  también están en la clase  $\mathcal{P}$ . Así, por la Proposición 3.7 se sigue que el espacio  $\Lambda$  pertenece a la clase  $\mathcal{P}$ .

Finalmente, consideremos la función proyección

$$\Pi_1 : \Lambda \rightarrow C_p(X, \overline{\mathbb{R}}) \text{ dada por } \Pi_1(f, b, d, g, c) = f$$

es continua. Como el conjunto  $N \subseteq \Lambda$ , entonces la función  $H = \Pi_1|_N$  es continua y satisface que

$$H(N) = M.$$

Aplicando la Proposición 3.6, el conjunto  $N$  está en la clase  $\mathcal{P}$  y por la Proposición 3.5 se concluye que el conjunto  $M$  está en la clase  $\mathcal{P}$ . □

**Teorema 3.19.** El espacio  $C_p(X)$  está en la clase  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Por la Proposición 3.15 y 3.18 los espacios  $C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$  y  $M$  pertenecen a la clase  $\mathcal{P}$ ; y por la Proposición 3.17 se tiene que  $C_p(X) = M \cap C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$ , luego aplicando que la clase  $\mathcal{P}$  es cerrada bajo intersecciones numerables, entonces  $C_p(X)$  está en la clase  $\mathcal{P}$ . □

Como anteriormente mencionamos, todos los espacios en la clase  $\mathcal{P}$  son de Lindelöf. Por lo tanto, del Teorema anterior se concluye que el espacio  $C_p(X)$  es de Lindelöf.

Finalmente, hemos demostrado que nuestro espacio de estudio  $X$  es normal, cero-dimensional y no fuertemente cero-dimensional con  $C_p(X)$  de Lindelöf.

# Conclusión

---

El estudio de las funciones continuas con la topología de la convergencia puntual es una línea de investigación que aún está activa; en particular, nos enfocamos en la parte de propiedades de tipo compacidad en espacios de funciones continuas.

La modificación que hemos realizado al ejemplo de Dowker, el cual presentamos en el capítulo II es contundente; para responder la pregunta: ¿Si existe un espacio cero-dimensional, no fuertemente cero-dimensional tal que  $C_p(X)$  es de Lindelöf? nuestro ejemplo de estudio  $X$  responde a esta pregunta que **si**, pues por los Teoremas 2.11 y 2.20  $X$  es normal y cero-dimensional, por el Teorema 2.21  $X$  no es fuertemente cero-dimensional y por el Teorema 3.19  $C_p(X)$  de Lindelöf.

Sin embargo, aún no sabemos las respuestas de las siguientes preguntas: Sea  $X$  el ejemplo original de Dowker

- ¿Es  $C_p(X)$  de Lindelöf?
- ¿Estará  $C_p(X)$  en la clase  $\mathcal{P}$ ?

# Bibliografía

---

- [1] K. Alster, R. Pol, “On function spaces of compact subspaces of  $\Sigma$ -products of the real line”, *Fund. Math.*, 107, 135–143 (1980).
- [2] A. V. Arhangel’skiĭ, “Topological Function Spaces”, *Math. and its Applications* **78**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London (1992).
- [3] R. Engelking, “General Topology”, *Sigma Series in Pure Mathematics* 6, Verlag Helderman (1989).
- [4] O. Okunev, K. Tamano, “Lindelöf powers and products of function spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:9 (1996), 2905-2916.
- [5] O. Okunev, “The Lindelöf number of  $C_p(X) \times C_p(X)$  for strongly zero-dimensional  $X$ ”, *CEJM*, 9(5), 978–983 (2011).
- [6] O. Okunev, A. Sánchez Jiménez, “ A zero-dimensional not strongly zero-dimensional  $X$  with Lindelöf  $C_p(X)$ ,” publicado en *European J. Math.* (aceptado el 10 de noviembre de 2019), DOI: 10.1007/s40879-019-00386-9.

# Índice alfabético

---

- $C_p(X)$  es de Lindelöf, 33
- $C_p(X, \mathbb{I})$  es de Lindelöf, 30
- $S_\alpha$  es cero-dimensional, 9
- $X$  es cero-dimensional, 11
- $X$  es normal, 17
- $X$  no es fuertemente cero-dimensional, 17
- $X^*$  es normal, 14
- $X_\alpha$  es cero-dimensional, 11
- $X_\alpha$  es normal, 11
- $\beta$  es base numerable de  $\mathbb{I}$ , 23
- $\mathcal{P}$  es cerrada en imágenes continuas, 21
- $\mathcal{P}$  es cerrada en intersecciones numerables, 22
- $\mathcal{P}$  es cerrada en productos numerables, 21
- $\mathcal{P}$  es cerrada en uniones numerables, 22
- $\mathcal{P}$  es cerrada en subespacios cerrados, 21
- Abiertos básicos en  $C_p(X)$ , 6
- Cero-dimensional, 3
- Clase  $\mathcal{P}$ , 20
- Completamente separados, 1
- Espacio  $\lambda D(\omega_1)$ , 19
- Espacio  $X^*$ , 8
- Espacio  $X_\alpha$ , 8
- Espacio  $X_r$ , 9
- Espacio de estudio, 8
- Fuertemente cero-dimensional, 3
- Funcionalmente cerrado, 1
- hereditariamente desconexo, 3
- Holdering, 7
- Ordinal límite, 4
- Ordinal sucesor, 4
- Primer ordinal no numerable, 4
- Topología de la convergencia puntual, 5