



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



Facultad de Ciencias de la Computación

Simulador de un sistema de potenciales de barrera
múltiples con matrices mal balanceadas

Tesis para obtener el título de

Ingeniería en Ciencias de la Computación

Presenta

Mari Carmen Tobon Diaz

Asesor M.C. Miguel Angel Vargas
Lomelí

Agradecimientos

Mi agradecimiento es para mi familia que siempre me ha apoyado en todas mis decisiones, para mis papás (Alejandra Díaz García y Antonio Tobon Nolazco) por estar conmigo y por ayudarme a lograr mis sueños, a mi hermana (María Dolores Tobon Díaz) por ayudarme a hacer las pases conmigo y con mi tesis para poder disfrutar el proceso y olvidar todo lo difícil que se torno, para mis profesores por lo mucho que me han enseñado, realmente ha sido una experiencia magnífica haber estado en esta facultad y haber conocido esta hermosa carrera, realmente me costó mucho al principio pero el esfuerzo y dedicación siempre dan resultados, a mi asesor Mtr. Miguel Angel Vargas Lomeli por todo lo que aprendí tanto cuando fue mi profesor en todas sus clases como en la misma tesis, con sus ejemplos ejercicios y lo mucho que me ayudó en la realización de esta tesis.

A todos mis amigos por todo su apoyo.

A Jared por todo tu apoyo recibido y creer siempre en mí.

Para mi amigo Erick y Zarate realmente sin ustedes no hubiera conocido la carrera nunca olvidaré eso.

Agradezco también a unas canciones muy bellas que escuche en mis momentos más difíciles "Pedalea" de Los Claxons, "Bacalar" de Siddhartha, "Follow you" de Imagine Dragons, "Hold on" de Justin Bieber.

Aunque no ha sido fácil el proceso y realmente nunca imaginé estar en este momento porque la forma que encontré esta hermosa carrera fue muy distinta a la que se espera y me ha costado mucho llegar hasta este momento siento que cada día, me esforzaba tanto pero a pesar de todo nunca me rendía y seguía; hasta que llegó un punto en el que empecé a entenderle mejor a todo con mucho esfuerzo y mucha dedicación, se que no me equivoque al elegir esta hermosa carrera, y pues se que van a ver más momentos importantes pero literalmente nunca olvidaré lo mucho que significo todo el proceso de realización, por todo lo que sentí en el trayecto, así que muchas gracias a todos ustedes que creyeron en mí y estuvieron conmigo en los momentos más difíciles.

Índice general

Agradecimientos	2
Introducción Tesis	7
1. Conceptos básicos	8
1.1. Introducción	8
1.2. Reseña Histórica	8
1.3. Teoría de Schrödinger de la mecánica cuántica	9
1.4. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.	10
1.5. Cuantización de la energía en la teoría Schrödinger	11
1.6. Potenciales de barrera.	13
2. Método de la matriz de Transferencia(MMT)	16
2.1. Introducción	16
2.2. Método de la matriz de Transferencia	16
2.3. Método de la matriz de Transferencia para matrices mal balanceadas MMT	18
2.4. Algoritmo MMT para hallar la transmisividad en un sistema de matrices mal balanceadas	29
2.5. Análisis MTMM como método numérico	34
3. Marco Metodológico	35
3.1. Metodología del Sistema Multi-barreras para matrices mal balanceadas	35
3.2. Implementación	35
3.3. Infraestructura	36
3.4. Software	36
4. Diseño e implementación del Sistema Multi-barreras para matrices mal Balanceadas	39
4.1. Diseño del sistema	42
4.2. Vistas del sistema	43
4.3. Análisis del algoritmo del MMT utilizando senos y cosenos, para hallar la transmisividad y reflexividad de un sistema multibarreras	44
4.4. Análisis numérico MMT para senos y cosenos	45
4.5. Análisis del MMTM para el caso de una barrera	46
4.6. Análisis del MMTM para el caso múltiples barreras	49
5. Pruebas y Resultados	52
5.1. Introducción	52
5.2. Realización de Pruebas	52
5.2.1. Prueba 1: T en una barrera	52
5.2.2. Prueba 2: T en dos barreras iguales	56
5.2.3. Prueba 3: T en dos barreras diferentes	59
5.2.4. Prueba 4: Intercambiamos las barreras de la prueba 3 hallamos T	61
5.2.5. Prueba 5: T en 20 barreras	62

5.2.6. Prueba 6: Sistema multi-barreras en forma de campana de Gauss	64
5.2.7. Prueba 7: Sistema multibarreras en forma de parábola	67
6. Conclusiones	70
A. Identidades Trigonómicas	71
A.1. Identidades par e impar	71
A.2. Identidades de producto a suma	71
A.3. Identidades Pitagóricas	71
A.4. Fórmula de Euler	72
B. Manual de Usuario del Sistema MMT	73
B.1. Requerimientos	73
B.2. Área de Trabajo	73
B.3. Menú Archivo	74
B.4. Menú Edición	74
B.5. Menú Barrera	74
B.6. Menú Ayuda	75
C. Código fuente para hallar la transmisividad para una barrera	76
D. Código fuente para obtener la T para MMT con mult. barreras y valores de energía	78
Bibliografía	82

Índice de figuras

1.1. Diagrama de relación entre E y $V(x)$	12
1.2. Diagrama de las regiones de energía	13
2.1. Modelo de múltiples potenciales de barrera	18
3.1. Diagrama General del modelo del Sistema Multi-Barreras para matrices mal balanceas	36
4.1. Diagrama de flujo Sistema Multi-Barrera para múltiples valores de energía.	39
4.2. Diagrama de flujo Matriz de transferencia para matrices mal balanceadas Parte 1.	40
4.3. Diagrama de flujo Matriz de transferencia para matrices mal balanceadas Parte 2.	41
4.4. Diagrama de flujo que obtiene las matrices en términos de senos y cosenos para la MMTM.	42
4.5. Vista de entrada Sistema Multi-Barrera para matrices mal balanceadas	43
4.6. Vista de Transmisividad y reflexividad para matrices mal balanceadas	44
4.7. Potencial de barrera análisis numérico	47
4.8. Gráfica de T del potencial de una barrera	48
4.9. Potencial de 60 barreras análisis numérico	49
4.10. Gráfica de T del potencial de 60 barreras	50
5.1. Gráfica del sistema Multi-barrera para una barrera	53
5.2. Captura de la entrada de datos en el sistema Multi-barrera	53
5.3. Cuando un usuario presiona el botón de Transmisividad	54
5.4. Gráfica de transmisividad Prueba 1	55
5.5. Ventana de Gráficas de Transmisividad y Reflexividad (transmisividad) P1	56
5.6. Ventana de Gráficas de Transmisividad y Reflexividad (reflexividad) P1	56
5.7. Gráfica de dos barreras iguales Prueba 2	57
5.8. Gráfica de dos barreras iguales Prueba 2	57
5.9. Gráfica de T para dos barreras iguales Prueba 2	58
5.10. Gráfica de Reflectividad para dos barreras iguales Prueba 2	58
5.11. Gráfica de dos barreras iguales Prueba 2	59
5.12. Gráfica de dos barreras diferentes Prueba 3	59
5.13. Gráfica de T para dos barreras iguales Prueba 2	60
5.14. Gráfica de Reflectividad para dos barreras diferentes Prueba 3	60
5.15. Gráfica de intercambio de barreras de la prueba 3	61
5.16. Entrada de datos de dos barreras diferentes intercambiadas de la prueba 3	61
5.17. Gráfica de T de la prueba 4 es la misma que la prueba 3	62
5.18. Potencial de 20 barreras	62
5.19. Gráfica de T prueba 5	63
5.20. Gráfica de R prueba 5	64
5.21. Potencial de barreras prueba 6	64
5.22. Entrada de datos prueba 6	65
5.23. Gráfica de T prueba 6	66
5.24. Gráfica de Reflectividad de la prueba 6	66

5.25. Potencial de barreras prueba 6	67
5.26. Gráfica de barrera prueba 7	67
5.27. Gráfica de T prueba 7	68
5.28. Gráfica de reflexividad prueba 7	68

Introducción

El principal motivo de esta tesis es mostrar como utilizando las ecuaciones de Schrödinger obtenemos el **método de la matriz de transferencia para múltiples barreras** basándonos en un trabajo anterior [VargasL, 2014]; el cual tenía como base realizar un simulador que encuentra los coeficientes de transmisión de partículas que colisionan en un sistema de barreras con forma rectangular de cualquier tamaño.

El proyecto anterior fue programado en Delphi, el corazón del algoritmo fue el Método de Matriz de Transferencia, que nos proporciona las soluciones de la ecuación de Schrödinger para potenciales de barrera rectangulares, dicha solución está en términos de funciones exponenciales y en varios experimentos nos genera matrices mal balanceadas, por esta misma razón en los cálculos se generan errores numéricos.

La solución que propongo a este problema es cambiar las funciones exponenciales en términos de senos y cosenos para manejar de una mejor manera los errores numéricos, dichas conversiones fueron probadas en el artículo [Crankshaw, s.f], la solución se programará en Matlab al igual que la interfaz y las gráficas especialmente la que representa el modelo multi-barrera se programará en Python 3.0, y dará la facilidad al usuario de ingresar sus propios sistemas multi-barreras para múltiples ejercicios; con los trabajos previos de barreras rectangulares de ancho mínimo que se pueden aproximar para comprobar si así da mejores resultados en algunos casos de error en overflow y underflow.

Por lo cuál se utilizará la siguiente metodología de estudio:

- Estudiar los conceptos básicos de la ecuación de Schrödinger empezando con las propiedades de la materia hasta llegar a las ecuaciones que se utilizarán.
- Estudiar el método de la matriz de transferencia.
- Desarrollar el método modificado para tratar las matrices mal balanceadas cambiando de funciones exponenciales a términos de senos y cosenos para calcular la transmisión y reflexión de la partícula para una dimensión.
- Implementar un algoritmo para la solución del sistema multi-barreras para matrices mal balanceadas.
- Desarrollar un software que dado el modelo de multi-barreras para matrices mal balanceadas se pueda obtener la transmisividad y reflexividad de dicho método.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Introducción

A través de este capítulo hablaremos de los conceptos básicos como la ecuación de Schrödinger, donde empezó a surgir la teoría para las partículas y a que nos referimos cuando hablamos de las propiedades de la materia, también veremos sobre las diferencias de la mecánica clásica y la mecánica cuántica referente a como se trataban las partículas antes y sobre la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y como la utilizaremos para obtener las ecuaciones que nos ayudan a calcular los potenciales de barreras y que se deben tener estas ecuaciones para que las soluciones puedan ser aceptables en esta ecuación, como todo esto nos va a llevar poco a poco a ir construyendo la matriz de transferencia que veremos en el segundo capítulo.

1.2. Reseña Histórica

La mecánica cuántica plantea una teoría para las partículas fundamentales de la materia, a través de la ecuación de Schrödinger se unifica el comportamiento corpuscular y ondulatorio de la materia.

En 1924, Louis de Broglie sugirió que una partícula de materia (por ejemplo un electrón) tiene asociada una onda que gobierna su movimiento. Aquí surge el hecho de que la materia tiene propiedades corpusculares como la masa (m), carga (q), momentum ($p = mv$). Él afirmó que la distancia entre dos ondas sucesivas es inversamente proporcional al momento lineal. Proponiendo la relación de De Broglie onda asociada al electrón. La relación de De Broglie demuestra que en cuanto mayor sea el momento lineal de la partícula, menor será la longitud de onda de su función de onda [Castañeta, 2015]. De acuerdo con la hipótesis de De Broglie, la energía total E de una partícula se relaciona con la frecuencia ν de la onda asociada a su movimiento por medio de la ecuación

$$E = h\nu$$

y el impulso de la partícula se relaciona con la longitud de onda λ de la onda asociada por la ecuación

$$p = h/\lambda$$

Los conceptos corpusculares energía E e impulso P , se relacionan con los conceptos ondulatorios frecuencia ν y longitud de onda λ a través de la constante de Planck h . A la ecuación se le denomina *relación de De Broglie*

$$\lambda = h/p$$

que predice la *longitud de onda de De Broglie* de una onda de materia asociada con el movimiento de una partícula material de impulso p .

En la física clásica, la energía es transportada por partículas o por ondas. Se construyeron dos modelos: un modelo ondulatorio y un modelo corpuscular. Así se explicó la propagación del sonido en base al modelo ondulatorio y la presión de los gases en base al modelo corpuscular. El físico actual sabe que, a un ente dado debe aplicarle ambos

modelos. Neils Bohr resumió esta situación con su *principio de complementariedad* [Eisberg, 1992].

En 1864, Maxwell junto este cúmulo de datos formulando su brillante teoría. Así, proporcionó una explicación de la propagación ondulatoria de la luz que estaba acorde con lo que entonces se conocía tanto de la óptica geométrica como de la óptica física.

En principios del siglo XX, las teorías de la relatividad de Einstein y la teoría cuántica de Bohr dieron un nuevo enfoque y exigen que rechacemos unas ideas profundamente enraizadas sobre el espacio, el tiempo y la noción intuitiva sobre la continuidad en la naturaleza, revisar [Beiser, 1998].

La diferencia entre la mecánica newtoniana y la mecánica cuántica reside en lo que ellas describen. La mecánica newtoniana estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio tridimensional. La mecánica cuántica proporciona el estudio del movimiento de los objetos y cuerpos a pequeña escala como átomos y partículas, en el sentido de que los valores predichos por magnitudes observables concuerdan con los valores medidos.

La mecánica cuántica se basa en la búsqueda de probabilidades, trata igualmente de las relaciones entre magnitudes observables, pero el principio de incertidumbre altera radicalmente la definición de “magnitud observable” en el campo atómico. De acuerdo con el principio de incertidumbre, la posición y el momentum de una partícula no se pueden medir simultáneamente con precisión, mientras que en la mecánica newtoniana se supone que ambos tienen un valor definido y verificable en cada instante.

La teoría de Schrödinger es una generalización que incluye a la teoría de Newton, de la misma manera que la teoría de Einstein de la relatividad es una generalización que incluye a la teoría de Newton.

La ecuación de Schrödinger, es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica [Eisberg, 1992]. La solución más común es de una **ecuación diferencial** que nos permite resolver un conjunto de barreras y evaluar la transmisión y reflexión de partículas para un modelo cuántico de colisión. Debido a que no siempre se pueden conseguir soluciones analíticas, surge la necesidad de resolverlo por métodos numéricos y con la utilización de computadoras mediante la programación.

En 1927, Schrödinger propuso la función de onda para explicar el movimiento de partículas subatómicas. Su idea era describir cualquier partícula con propiedades de onda mediante una ecuación matemática denominada **función de onda** [Calculisto, s.f].

Esta ecuación que establece la forma de la función de onda $\Psi(x, y)$ si decimos la fuerza que actúa sobre la partícula asociada especificando la energía potencial que corresponde a dicha fuerza.

En la función de onda podemos observar varias características de la ecuación.

- Las soluciones de la ecuación dependen de los números cuánticos de la partícula.
- La ecuación integra las energías potencial y cinética que definen el comportamiento de la onda.
- Ψ^2 es la probabilidad de encontrar un electrón en una región dada, como se muestra en el Principio de Eisberg. Para una explicación a detalle revisar en [Eisberg, 1992].

Los postulados de la ecuación de onda de Schrödinger.

Cada partícula se describe por medio de una onda plana descrita por una función denotada por $\Psi(x, y, z, t)$; esta función y sus derivadas parciales son continuas, finitas y de valores simples.

1.3. Teoría de Schrödinger de la mecánica cuántica

La teoría de Schrödinger de la mecánica cuántica especifica las leyes del movimiento ondulatorio que obedecen las partículas. Esto se hace especificando la ecuación que controla el comportamiento de la función de onda y especificando también la conexión entre el comportamiento de la función de onda y el comportamiento de la partícula. El postulado de De Broglie constituye un paso fundamental en el desarrollo de la teoría de Schrödinger; el postulado dice que el movimiento de una partícula está gobernado por la propagación de una onda asociada, también

predice que la longitud de onda es esencialmente constante pero no dice cómo se propaga está.

La ecuación de onda además de ser normalizada, esta debe de tener un solo valor, ya que la probabilidad debe tener un valor único en el tiempo y un lugar determinado. También debe de obedecer que **ella y sus derivadas parciales deben ser continuas** en cualquier lugar. En la figura 1.1 se muestra la *ecuación de onda general*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

que tiene una onda cuya cantidad variable es y , que se propaga en la dirección de x , con velocidad v y un tiempo t .

Todas las soluciones de la ecuación de onda deben ser de la forma

$$y = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

donde F es cualquier función que puede ser diferenciada. En este caso usamos la constante de dirección $+x$ donde la soluciones se representan de la forma $F(t - x/v)$. Este equivale a la solución general de la ecuación (1.1) con un Amplitud constante A y de frecuencia angular w constante en la dirección $+x$

$$y = Ae^{-iw(t-x/v)} \quad (1.2)$$

En la fórmula anterior, y es una cantidad compleja, con parte real e imaginaria. Como

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta,$$

Al sustituir en la ec. 1.2 nos queda de la forma

$$y = A\cos w\left(t - \frac{x}{v}\right) - iA\operatorname{sen} w\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (1.3)$$

1.4. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

La ecuación de Schrödinger es la ley fundamental de la mecánica cuántica no relativista, teoría física que se ocupa de aquellos fenómenos que acontecen a escalas microscópicas del orden de la constante de Planck.

Las soluciones que realmente existen, siempre que *la energía potencial no dependa explícitamente del tiempo t* , de modo que la función se pueda escribir $V(x)$. Puesto que en la mecánica cuántica, casi todos los sistemas tienen energías potenciales de esta forma.

La separación de variables nos conduce a la conclusión que la función $\Psi(x)$, que especifica la dependencia espacial de la función de onda $\Psi(x, t) = \Psi(x)\Psi(t)$ es una solución a la ecuación diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (1.4)$$

denominada *la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*. Esta ecuación es más simple que la ecuación de Schrödinger para la misma energía potencial debido a que sólo contiene una variable independiente de x y por lo tanto es una ecuación diferencial ordinaria.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo más simple es aquella donde $V(x) = \text{constante}$. Una partícula que se mueve bajo la acción de tal potencial es una partícula libre ya que la fuerza que actúa sobre ella es $F = -dV(x)/dx = 0$. Esto es cierto sin importar el valor de la constante, entonces no se pierde la generalidad de escoger arbitrariamente la constante que aparece siempre en la definición de una energía potencial, de tal forma que se obtenga

$$V(x) = 0 \quad (1.5)$$

. Se sabe que en mecánica clásica una partícula libre debe estar en reposo o en movimiento con impulso constante p . Para encontrar, el comportamiento predicho por la mecánica cuántica para una partícula libre, se resuelve la

ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (1.4), haciendo $V(x) = 0$. Con esta forma para el potencial la ecuación es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x) \quad (1.6)$$

Las soluciones son las **eigenfunciones** y las funciones de onda $\Psi(x, y)$, son, de acuerdo a [Eisberg, 1992] (5.44)

$$\Psi(x, t) = \Psi(x)e^{-iEt/\hbar} \quad (1.7)$$

donde $\Psi(x)$ es una solución de la ecuación(1.4). Los **eigenvalores E son iguales a la energía total de la partícula**. Para cualquier valor de $E \geq 0$ existirá una solución aceptable de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

1.5. Cuantización de la energía en la teoría Schrödinger

La cuantización de la energía nos habla sobre como obtener soluciones cualitativas; esto nos ayudará para que en la siguiente sección podamos entender más sobre las soluciones cuantitativas para un ejemplo en el que se utilizarán.

Se comenzará con los argumentos, escribiendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo como

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]\Psi. \quad (1.8)$$

Las propiedades de esta ecuación diferencial dependen de la forma de la función energía potencial $V(x) = 0$, lo cual es así ya que $V(x)$ determina la fuerza que actúa sobre la partícula cuyo comportamiento describe las soluciones a la ecuación diferencial.

Esta ecuación diferencial contiene la energía total E en una situación crucial, se deberá escoger un valor: la energía E que es constante, la cual incidirá a la barrera con (energía) potencial $V(x)$. Según el valor de E se evaluará en la ecuación (1.8) para determinar los coeficientes de transmisividad de acuerdo a los valores particulares de las soluciones de Ψ , que nos indicarán las probabilidades de que una partícula (onda incidente) traspase una barrera con energía potencial $V(x)$.

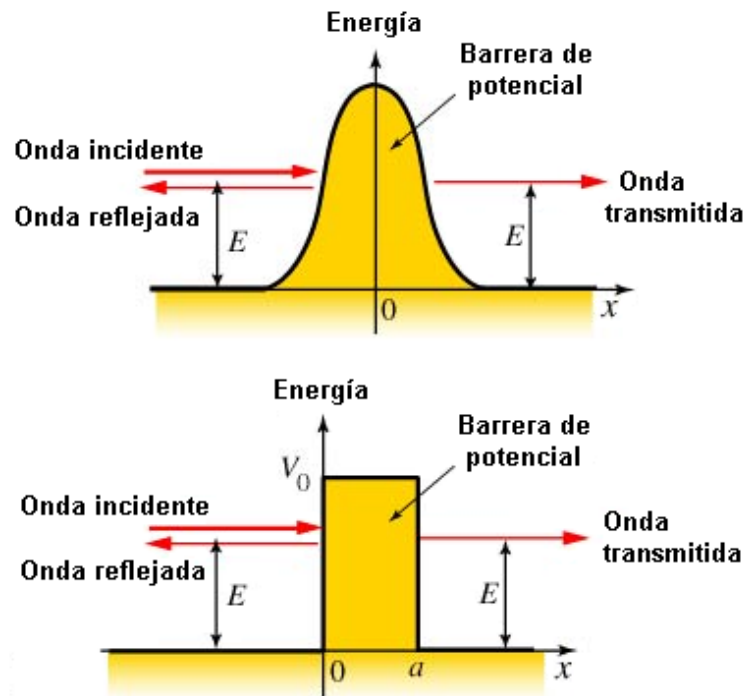


Figura 1.1: Diagrama de relación entre E y V(x)

La energía total se determina por la altura de la barrera, un caso más cercano a la realidad de la física es cuando las barreras de potencial tienen ascenso y una caída "suaves" (sin discontinuidades); en este diagrama podemos ver como una barrera de potencial, cuya anchura va disminuyendo gradualmente a medida que vamos hacia arriba en la escala energética hasta que está se reduce sin discontinuidades a cero en la cresta de la barrera de potencial para una explicación más a detalle revisar [Martinez, 2009].

Considérese la ecuación diferencial para un oscilador armónico simple clásico

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Cx}{m}$$

En este caso x es la variable dependiente y t es la variable independiente. La ecuación diferencial establece una relación entre x y su segunda derivada, si se especifica el valor de x y de su primera derivada dx/dt para algún valor de t, entonces el comportamiento particular de x está determinado para todos los valores de t.

Por lo tanto, es posible utilizar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, para la V(x) y la E escogidas, para determinar el comportamiento de Ψ para toda x en términos de los valores de Ψ y de $d\Psi/dx$ supuestos para alguna x en particular.

Solamente es posible encontrar *soluciones aceptables* a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para ciertos valores de la energía total E. Para que una solución sea aceptable, se requiere que una eigenfunción $\Psi(x)$ y su derivada $d\Psi(x)/dx$ tengan las siguientes propiedades:

$\Psi(x)$ debe ser finita	$d\Psi(x)/dx$ debe de ser finita
$\Psi(x)$ debe ser monoevaluada	$d\Psi(x)/dx$ debe de ser monoevaluada
$\Psi(x)$ debe ser continua	$d\Psi(x)/dx$ debe de ser continua

Estos requisitos se imponen para asegurar que la **eigenfunción** sea una función matemáticamente bien comportada con objeto de que las cantidades que se puedan evaluar a partir de la **eigenfunción** sean también bien

comportadas.

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$$

A estas energías se les llama *eigenvalores* del potencial $V(x)$; un potencial tiene un conjunto particular de eigenvalores. Los eigenvalores resultan distribuidos de manera continua en la energía más allá de cierto valor de ésta, esto solo sucede cuando $V(x)$ no es una función acotada.

Correspondiendo a cada eigenvalor hay una eigenfunción

$$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x), \dots, \Psi_n(x), \dots$$

que es una solución a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el potencial $V(x)$.

Cada función de onda es una solución a la ecuación Schrödinger para el potencial $V(x)$. El índice n , que toma valores enteros sucesivos y que se utiliza para designar a un eigenvalor particular, su eigenfunción correspondiente y la función de onda, se denomina *número cuántico*. Si el sistema está descrito por la función de onda $\Psi_n(x, t)$, se dice que está en el *estado cuántico* n . Cada una de las funciones de onda $\Psi_n(x, t)$ es una solución particular a la ecuación de Schrödinger para el potencial $V(x)$. Ya que esta ecuación es lineal en la función de onda, cualquier combinación lineal de estas funciones también sea solución como nos lo dice el principio de superposición [Salort, 2016].

1.6. Potenciales de barrera.

En esta sección hablaremos sobre el movimiento de una partícula, y como está es capaz de atravesar una barrera potencial. Es un concepto teórico que marca el límite entre las diferentes regiones de energía producidas por la interacción entre fuerzas.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V_0 & \text{para } 0 < x < a \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$$

Según la *mecánica clásica* una partícula de energía total E , menor que V_0 no será capaz de atravesar la barrera y rebotará pero en sentido contrario. En el caso contrario, sí la energía de la partícula E es mayor que V_0 será capaz de atravesar la barrera; existe cierta probabilidad de que la partícula sea transmitida a través de la barrera a la región $x > a$.

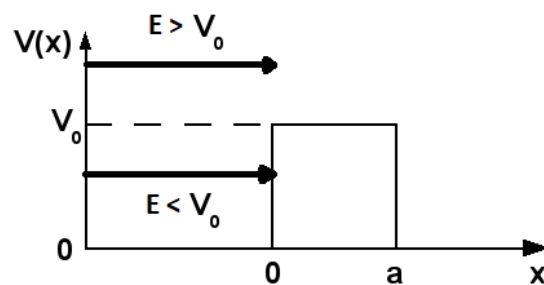


Figura 1.2: Diagrama de las regiones de energía

En el siguiente diagrama podemos ver las 3 zonas en que la barrera se divide, en cada región el potencial de la barrera es constante, esto significa que es cuasi-libre. Si existe una partícula con una energía E , que proviene de la región $x < 0$, está incide la barrera, si tiene una probabilidad a uno será reflejada si $E < V_0$ y una probabilidad de traspasar la barrera si $E > V_0$.

El **efecto túnel** a través de una barrera cuya altura excede su energía total, una partícula se comporta como una onda. Entonces, se puede observar como la partícula atraviesa una región clásicamente excluida con un ancho limitado.

En una barrera potencial deben existir soluciones aceptables a la ecuación de Schrödinger independiente del

tiempo para todos los valores de energía total $E \geq 0$. Para resolver el comportamiento establecido por la mecánica cuántica, resolveremos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo; Para $V(x, t) = 0$ esta ecuación tiene la forma de la ecuación (1.6).

Una solución de la ecuación diferencial (1.6) se describe como

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

donde A y B puede ser cualquier constante y $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. En este caso las soluciones generales son:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Ae^{ik_I x} + Be^{-ik_I x} & x < 0 \\ \psi(x) &= Ce^{ik_I x} + De^{-ik_I x} & x > a \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde A, B, C, D son cualquier constante y $k_I = \sqrt{2mE}/\hbar$.

La segunda región $0 < x < a$, si $E < V_0$:

$$\psi(x) = Fe^{-k_{II}x} + Ge^{k_{II}x} \quad 0 < x < a \quad (1.10)$$

donde F, G son cualquier constante y $k_{II} = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$,
y si $E > V_0$ es:

$$\psi(x) = Fe^{ik_{III}x} + Ge^{-ik_{III}x} \quad 0 < x < a \quad (1.11)$$

donde F, G son cualquier constante y $k_{III} = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Para una explicación a detalle de cada ecuación revisar en [Vargas, 2005] capítulo 1 sección 1.7.

Como ya se tienen las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el potencial de la barrera, el siguiente paso es hallar la transmisividad T de la barrera. Si la partícula incide desde la izquierda sobre la barrera; en el sentido positivo del eje x suponemos que

$$D = 0,$$

esto nos dice que sólo puede existir una onda transmitida en la región $x > a$. Ya que en cualquiera de los casos de las ecuaciones (1.10) y (1.11), la x se puede volver finita o puede haber discontinuidad en $x = a$ lo que producirá reflexión.

Caso en donde $E < V_0$

Al juntar $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en los puntos $x = 0$ y $x = a$ se obtendrán las siguientes ecuaciones en donde tomamos $D = 0$:

$$\begin{aligned} A + B &= F + G, \\ A - B &= \frac{-k_I}{ik_{II}}(F - G), \\ e^{iak_I} C &= e^{-ak_{II}} F + e^{ak_{II}} G, \\ e^{iak_I} C &= \frac{-k_I}{ik_{II}}(e^{-ak_{II}} F - e^{ak_{II}} G) \end{aligned}$$

lo que nos hace tener un sistema de cuatro ecuaciones, las cuales contienen A, B, C, F, G como constantes cualesquiera. Estas ecuaciones se utilizarán para evaluar B, C, F, G en términos de A. El valor de A determina la amplitud de la eigenfunción y se puede dejar de forma arbitraria. El resultado más interesante de los cálculos es la razón T (transmisividad), del flujo de probabilidad transmitido a través de la barrera a la región $x > a$, al flujo de probabilidad incidente sobre la barrera.

De acuerdo con el valor para obtener la transmisividad es

$$T = \left[1 + \frac{\sinh^2 \left\{ \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} (1 - E/V_0)} \right\}}{(4E/V_0)(1 - E/V_0)} \right]^{-1} \quad E < V_0$$

En el caso de que el seno hiperbólico sea mayor que 1, nos encontramos frente a la predicción de que una partícula de masa m y energía total E , la partícula que incide sobre una barrera de altura $V_0 > E$, posee una cierta probabilidad de traspasar a la barrera y aparecer del otro lado. A este fenómeno se le llama *penetración de la barrera*.

Caso en donde $E > V_0$

En este caso la eigenfunción es oscilatoria en las tres regiones, la longitud de onda es mayor en la región de la barrera, $0 < x < a$. Al evaluar las ecuaciones con las constantes B, C, F y G mediante la aplicación de las condiciones de continuidad sobre $x = 0$ y $x = a$, nos conducen a la siguiente fórmula de transmisión:

$$T = \left[1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \left\{ \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} (E/V_0 - 1)} \right\}}{(4E/V_0)(E/V_0 - 1)} \right]^{-1} \quad E > V_0$$

La penetración de la barrera es cuando existe cierta probabilidad de que una partícula traspase la barrera, esto sucede cuando la energía potencial V_0 es mayor que la energía de la partícula; un ejemplo está en la ecuación independiente del tiempo que gobierna la propagación de ondas en una cuerda [Toledano, 2016].

Capítulo 2

Método de la matriz de Transferencia (MMT)

2.1. Introducción

En el capítulo anterior empezamos a hablar sobre las barreras potenciales. Entre los puntos más importantes encontramos las ecuaciones de éstas y así mismo hablamos sobre el efecto túnel que es cuando una partícula es capaz de atravesar la barrera y que esto solo sucede cuando en la barrera existen soluciones aceptables para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en todos los valores de energía total $E \geq 0$, igualmente vimos el caso de que está solo fuera un barrera. En este capítulo con las ecuaciones obtenidas resolvemos la ecuación de Schrödinger para múltiples barreras, y dado que hacer estos cálculos a mano son muy difíciles entonces que mejor forma que con ayuda de una computadora poder tener un sistema que nos ayude a realizarlos pero para esto se necesita un método. Nosotros ocuparemos **el método de la Matriz de transferencia**, éste es el resultado de una investigación reciente en mecánica cuántica el cuál tiene un antecedente computacional que vamos a presentar en esta sección. Por lo cual en la presente sección se explicará su construcción y se planteará su solución.

2.2. Método de la matriz de Transferencia

En esta sección, utilizaremos la ecuación de Schrödinger para resolver un sistema multi-barreras. En el capítulo anterior hablamos sobre lo que es un potencial de barrera y como se obtienen las ecuaciones para obtener la transmisividad y la reflexividad para una barrera, en este queremos generalizar para obtener múltiples potenciales de barreras y su transmisividad mediante este método. Nos basaremos en las ecuaciones obtenidas en el siguiente capítulo.

Por lo tanto, como lo mencionamos anteriormente si una partícula con energía total E proviene de la región $x < x_1$ está tiene una probabilidad igual a uno de poder ser reflejada si $E < V_0$. Pero esto no es igual en la mecánica cuántica; además que también queremos la posibilidad de que la partícula pueda ser transmitida, en este caso se tiene que hallar una *función de onda* $\Psi(x, t)$ que se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo que se muestra a continuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (2.1)$$

y que tiene como solución $\Psi(x)$. Para este potencial en la ecuación de Schrödinger para toda $E \geq 0$ existen $\Psi(x)$ y $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ donde sus soluciones deben ser finitas y continuas. La ecuación (2.1) se separa en tres ecuaciones para cada una de las regiones: $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$ y $x > x_2$. Donde para la primera y tercera región tomaremos el potencial $V(x) = 0$ y para la segunda $V(x) = V_0$. Resolviendo la ecuación de Schrödinger para cada región, tenemos las siguientes soluciones:

$$\Psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad x < x_1, \quad (2.2)$$

$$\Psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad x_1 < x < x_2, \quad (2.3)$$

$$\Psi_3(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x} \quad x > x_2; \quad (2.4)$$

donde A, B, C, D, F y G son constantes cualesquiera, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{h}$ y $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{h}$. Se asume a $h = 1$ entonces las constantes k_1 y k_2 quedan como $k_1 = \sqrt{2mE}$ y $k_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}$. La continuidad en $\Psi(x)$ implica que se deben igualar las soluciones (2.2) con (2.3) y (2.3) con (2.4), es decir:

$$\Psi_1(x_1) = \Psi_2(x_1), \quad (2.5)$$

$$\Psi_2(x_2) = \Psi_3(x_2); \quad (2.6)$$

asimismo para seguir con la continuidad en las derivadas se requiere:

$$\Psi_1'(x_1) = \Psi_2'(x_1), \quad (2.7)$$

$$\Psi_2'(x_2) = \Psi_3'(x_2). \quad (2.8)$$

Con las ecuaciones (2.5) y (2.7) formamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^{ik_1x_1}A + e^{-ik_1x_1}B &= e^{ik_2x_1}C + e^{-ik_2x_1}D, \\ e^{ik_1x_1}A - e^{-ik_1x_1}B &= \frac{k_2}{k_1}e^{ik_2x_1}C - \frac{k_2}{k_1}e^{-ik_2x_1}D, \end{aligned}$$

lo que podemos denotar de la siguiente manera:

$$\widetilde{m}_1(k_1, x_1) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{m}_2(k_1, k_2, x_1) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

y de las ecuaciones (2.6) y (2.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{ik_2x_2}C + e^{-ik_2x_2}D &= e^{ik_1x_2}F + e^{-ik_1x_2}G, \\ e^{ik_2x_2}C - e^{-ik_2x_2}D &= \frac{k_1}{k_2}e^{ik_1x_2}F - \frac{k_1}{k_2}e^{-ik_1x_2}G \end{aligned}$$

y lo denotamos por:

$$\widetilde{m}_3(k_2, x_2) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \widetilde{m}_4(k_1, k_2, x_2) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

donde obtenemos \widetilde{m}_1 , \widetilde{m}_2 , \widetilde{m}_3 , y \widetilde{m}_4 son matrices de 2x2 por las ecuaciones de continuidad. De la ecuación (2.9) y (2.10)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{m}_1^{-1} \widetilde{m}_2 \widetilde{m}_3^{-1} \widetilde{m}_4 \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde el resultado del producto de matrices lo representaremos por \widetilde{M} , entonces:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{M}(k_1, k_2, x_1, x_2) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

donde $\widetilde{M}(k_1, k_2, x_1, x_2) = (a_{11}a_{12} : a_{21}a_{22})_{2 \times 2}$, es decir, la ec. (2.12) la podemos ver como:

$$\begin{aligned} A &= a_{11}F + a_{12}G \\ B &= a_{21}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, vamos a tomar el valor de $A = 1$ para la partícula incidente así se garantiza que se pueda llegar por la izquierda, y $G = 0$ debido a que cuando la partícula traspase la barrera no va incidir por la derecha. Por lo tanto las incógnitas son F y B, entonces el sistema de ecuaciones queda como

$$\begin{aligned} 1 &= a_{11}F \\ B &= a_{21}F \end{aligned}$$

por lo que las soluciones son:

$$F = \frac{1}{a_{11}} \quad y \quad B = \frac{a_{21}}{a_{11}}.$$

La transmisividad T está definida como el flujo total de partículas transmitidas (son las que atraviesan la barrera potencial moviéndose hacia la derecha) y se definen como $T = FF^*$ donde F^* es el complemento de F y la reflexividad es cuando las partículas rebotan al no traspasar la barrera potencial y se representa por $R = BB^*$ y B^* es el complemento de B , donde $T + R = 1$ debido a que T y R son probabilidades, por lo que la partícula se transmite o refleja pero nunca desaparece.

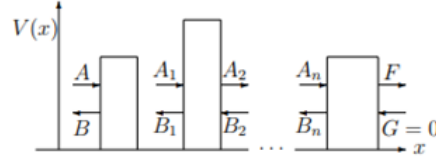


Figura 2.1: Modelo de múltiples potenciales de barrera

En este caso, tomaremos el modelo anterior de potenciales que se muestra en la figura 2.1. Si la partícula sale de la primera barrera, está incide con la segunda barrera esto nos lleva a que existe una posibilidad de que la partícula haya sido reflejada por la segunda barrera, entonces no podemos hacer a $B_1 = 0$; lo mismo sucede cada B_i , esto nos lleva a que solamente la última barrera se iguale a $G = 0$. De acuerdo con la ecuación (2.12) se representa la primera barrera de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{M}_0 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}; \quad (2.13)$$

entonces las demás barreras quedarían

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \widetilde{M}_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}; \quad (2.14)$$

⋮

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \widetilde{M}_n \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Sustituyendo hacia atrás (A_i), se obtiene

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{M}_0 \widetilde{M}_1 \widetilde{M}_2 \dots \widetilde{M}_n \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}; \quad (2.16)$$

al producto de las matrices \widetilde{M}_i , lo representaremos por \widetilde{M}_T , entonces la ecuación anterior quedará:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{M}_T \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

por lo tanto está es la forma de la ecuación(2.12) y como vimos anteriormente ya obtuvimos los valores de F y B para hallar la transmisividad T y reflexividad R de un sistema multi-barreras.

2.3. Método de la matriz de Transferencia para matrices mal balanceadas MMT

En la sección anterior definimos el método de la matriz de Transferencia, el cual en trabajos como [Vargas, 2005] y [VargasM, 2005] llegaban a tener errores numéricos que no le permitían realizar los cálculos de forma correcta

para ciertos intervalos en experimentos más complejos o como [Contreras, 2009] que iniciaba a revisar este método con senos y cosenos hiperbólicos para una matriz de dos barreras, dado que las matrices de transferencia centrales quedaban mal balanceadas (valores muy pequeños junto con valores muy grandes en la misma matriz), propongo que para poder evitar los errores numéricos en estas matrices, modifiquemos la ecuación solución (2.3) en la región $x_1 < x < x_2$ por la fórmula de Euler la cuál específica

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x. \quad (2.18)$$

Esto es, se modificará la ecuación (2.19) para cambiarla en términos de la ecuación 2.18,

$$\Psi_2(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x} \quad x_1 < x < x_2 \quad (2.19)$$

quedando de la siguiente forma

$$C(\cos(k_2 x) + i \operatorname{sen}(k_2 x)) + D(\cos(-k_2 x) + i \operatorname{sen}(-k_2 x)). \quad (2.20)$$

Entonces tendremos las nuevas soluciones para cada región :

$$\Psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad x < x_1, \quad (2.21)$$

$$\Psi_2(x) = C(\cos(k_2 x) + i \operatorname{sen}(k_2 x)) + D(\cos(-k_2 x) + i \operatorname{sen}(-k_2 x)) \quad x_1 < x < x_2, \quad (2.22)$$

$$\Psi_3(x) = F e^{ik_1 x} + G e^{-ik_1 x} \quad x > x_2. \quad (2.23)$$

Como en la sección anterior tomaremos A, B, C, D, F y G, como constantes cualesquiera, seguiremos tomando el mismo valor para las constantes k_1 y k_2 . Entonces sustituimos las fórmulas originales de la matriz de transferencia y las pasamos a la fórmula de Euler vista anteriormente.

Al sustituir con la identidad de Euler las ecuaciones (2.5) y (2.7) formamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} e^{ik_1 x_1} A + e^{-ik_1 x_1} B &= C(\cos(k_2 x_1) + i \operatorname{sen}(k_2 x_1)) + D(\cos(-k_2 x_1) + i \operatorname{sen}(-k_2 x_1)), \\ e^{ik_1 x_1} A - e^{-ik_1 x_1} B &= C\left(\frac{k_2}{k_1} * i * \operatorname{sen}(k_2 x_1) + \frac{k_2}{k_1} * \cos(k_2 x_1)\right) + D\left(\frac{k_2}{k_1} * \cos(k_2 x_1) - \frac{k_2}{k_1} * i * \operatorname{sen}(k_2 x_1)\right), \end{aligned}$$

Para resolver de una mejor manera se simplificara utilizando las funciones pares e impares en la Ψ'_2 , también se aplicará la regla de la conmutividad para la suma, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\Psi'_2 = C\left(\frac{k_2}{k_1} * \cos(k_2 x_1) + \frac{k_2}{k_1} * i * \operatorname{sen}(k_2 x_1)\right) - D\left(\frac{k_2}{k_1} * \cos(-k_2 x_1) - \frac{k_2}{k_1} * i * \operatorname{sen}(-k_2 x_1)\right)$$

Por lo tanto la ecuación (2.7) quedaría de la siguiente forma:

$$e^{ik_1 x_1} A - e^{-ik_1 x_1} B = C\left(\frac{k_2}{k_1} * \cos(k_2 x_1) + \frac{k_2}{k_1} * i * \operatorname{sen}(k_2 x_1)\right) - D\left(\frac{k_2}{k_1} * \cos(-k_2 x_1) - \frac{k_2}{k_1} * i * \operatorname{sen}(-k_2 x_1)\right),$$

lo que podemos denotar de la siguiente manera:

$$\widetilde{m}_1(k_1, x_1) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{m}_2(k_1, k_2, x_1) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

y al sustituir en las ecuaciones (2.6) y (2.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} C(\cos(k_2 x_2) + i * \operatorname{sen}(k_2 x_2)) + D(\cos(-k_2 x_2) + i * \operatorname{sen}(-k_2 x_2)) &= e^{ik_1 x_2} F + e^{-ik_1 x_2} G, \\ C(\cos(k_2 x_2) + i * \operatorname{sen}(k_2 x_2)) - D(\cos(-k_2 x_2) - i * \operatorname{sen}(-k_2 x_2)) &= \frac{k_1}{k_2} e^{ik_1 x_2} F - \frac{k_1}{k_2} e^{-ik_1 x_2} G \end{aligned}$$

y lo denotamos por:

$$\widetilde{m}_3(k_2, x_2) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \widetilde{m}_4(k_1, k_2, x_2) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

como podemos ver multiplicamos las matrices y se ve de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \widetilde{m}_1^{-1} \widetilde{m}_2 \widetilde{m}_3^{-1} \widetilde{m}_4 \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

La matriz m_3 queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2) & \cos(-k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2) \\ \cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2) & -\cos(-k_2 x_2) - i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2) \end{bmatrix}$$

Para reducir cálculos y evitar los errores numéricos realizaremos el cálculo de la inversa de la matriz \widetilde{m}_3 de forma algebraica quedando de la siguiente manera: Primero obtenemos el determinante $m_{311} \cdot m_{322} - m_{321} \cdot m_{312}$ esto es igual a:

$$\begin{aligned} & \cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2)(-\cos(-k_2 x_2) - i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2)) - \cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2)(\cos(-k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2)) \\ &= \cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2)(-\cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2)) - \cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2)(\cos(k_2 x_2) - i \cdot \text{sen}(k_2 x_2)) \\ &= -\cos^2(k_2 x_2) + \cos(k_2 x_2) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2 x_2) - i \cdot \text{sen}(k_2 x_2) \cdot \cos(k_2 x_2) + i^2 \text{sen}^2(k_2 x_2) - \\ & \quad (\cos^2(k_2 x_2) - \cos(k_2 x_2) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2) \cdot \cos(k_2 x_2) - i^2 \cdot \text{sen}^2(k_2 x_2)) \\ &= (-\cos^2(k_2 x_2) + i^2 \cdot \text{sen}^2(k_2 x_2)) - (\cos^2(k_2 x_2) - i^2 \cdot \text{sen}^2(k_2 x_2)) \\ &= (-\cos^2(k_2 x_2) - 1 \cdot \text{sen}^2(k_2 x_2)) - (\cos^2(k_2 x_2) - (-1) \cdot \text{sen}^2(k_2 x_2)) \\ &= (-\cos^2(k_2 x_2) - \text{sen}^2(k_2 x_2)) - (\cos^2(k_2 x_2) + \text{sen}^2(k_2 x_2)) \\ & \quad \det A = (-\cos^2(k_2 x_2) + \text{sen}^2(k_2 x_2)) - 1 = (-1) - 1 = -2 \end{aligned}$$

La matriz inversa es igual $A^{-1} = (\text{Adj}(A)^T / \det A)$ entonces al aplicar la fórmula anterior y nos queda la siguiente matriz \widetilde{m}_3^{-1}

$$\begin{bmatrix} (\cos(-k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2))/2 & (\cos(-k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2))/2 \\ (\cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2))/2 & (\cos(k_2 x_2) - i \cdot \text{sen}(k_2 x_2))/-2 \end{bmatrix}$$

Para mejorar los resultados de la matriz de transferencia en el programa y reducir aún más los errores numéricos, multiplicaremos las 2 matrices centrales $\widetilde{m}_2 \cdot \widetilde{m}_3^{-1}$ en términos de senos y cosenos

$$\begin{bmatrix} \cos(k_2 x_1) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_1) & \cos(-k_2 x_1) + i \cdot \text{sen}(-k_2 x_1) \\ kd_1 \cdot \cos(k_2 x_1) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2 x_1) & -kd_1 \cdot \cos(-k_2 x_1) - kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(-k_2 x_1) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} (\cos(-k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2))/2 & (\cos(-k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2 x_2))/2 \\ (\cos(k_2 x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2 x_2))/2 & (\cos(k_2 x_2) - i \cdot \text{sen}(k_2 x_2))/-2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el primer elemento de la matriz al multiplicar \widetilde{m}_2 por la inversa de \widetilde{m}_3 :

$$\begin{aligned}
 \widetilde{m}_2 \cdot \widetilde{m}_3^{-1}[1, 1] &= \cos(k_2x_1) + i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot ((\cos(-k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2x_2))/2) + \cos(-k_2x_1) + i \cdot \text{sen}(-k_2x_1) \cdot ((\cos(k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2x_2))/2) \\
 &= \cos(k_2x_1) + i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \left(\frac{\cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) + \cos(k_2x_1) - i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \left(\frac{\cos(k_2x_2)}{2} + \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) \\
 &= \cos(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} - \cos(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} - i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \cos(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} + \cos(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \\
 &\quad - i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} - i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \\
 &= \frac{\cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{\cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{\cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} + \frac{\cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} \\
 &\quad - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2}
 \end{aligned}$$

Sustituimos k_2x_1 por la variable a y k_2x_2 por la variable b también sustituimos los productos $\cos(a) \cdot \text{sen}(b)$ o las diferentes combinaciones por las identidades de producto a suma que podemos ver en el apéndice A.2.

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} &= \frac{\cos(a)\cos(b)}{2} = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{4} = \frac{\cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} = \frac{-i\cos(a)\text{sen}(b)}{2} = \frac{-i(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b))}{2} \\
 &= \frac{-i(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b))}{4} = \frac{-i \cdot \text{sen}(a+b) + i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} &= \frac{i \cdot \text{sen}(a)\cos(b)}{2} = \frac{i(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b))}{2} = \frac{i \cdot \text{sen}(a+b) + i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 \frac{-i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} &= \frac{-i^2\text{sen}(a)\text{sen}(b)}{2} = \frac{-(-1)\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{4} \\
 \frac{\cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} &= \frac{\cos(a)\cos(b)}{2} = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{4} \\
 \frac{\cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} &= \frac{i \cdot \cos(a)\text{sen}(b)}{2} = \frac{i(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b))}{2} = \frac{i \cdot \text{sen}(a+b) - i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 \frac{-i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} &= -\frac{i \cdot \text{sen}(a)\cos(b)}{2} = \frac{-i(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b))}{2} = \frac{-i \cdot \text{sen}(a+b) - i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 \frac{-i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} &= \frac{-i^2 \cdot \text{sen}(a)\text{sen}(b)}{2} = \frac{-(-1) \cdot \cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{4}
 \end{aligned}$$

Eliminamos los elementos que sean iguales pero positivos y negativos por lo cuál solo nos quedan puros $\cos(a-b)/4$ entonces al realizar la suma tendríamos $4 \cdot \cos(a-b)/4$ y dividiendo eliminamos el 4 por lo tanto quedaría $\cos(a-b)$ y regresamos las variables de a y b por k_2x_1, k_2x_2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 &\quad - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} \\
 &= \frac{\cos(a+b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} + \\
 &\quad \frac{\cos(a-b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} \\
 &= \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} = \frac{4\cos(a-b)}{4} \\
 &\quad \widetilde{\mathbf{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathbf{m}}_3^{-1} [1, 1] = \cos(a-b) = \cos(k_2x_1 - k_2x_2)
 \end{aligned}$$

Obtenemos el segundo elemento de la matriz al multiplicar \widetilde{m}_2 por la inversa de \widetilde{m}_3 :

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_2 \cdot \widetilde{m}_3^{-1}[1, 2] &= \cos(k_2x_1) + i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot ((\cos(-k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2x_2))/2) + \cos(-k_2x_1) + i \cdot \text{sen}(-k_2x_1) \cdot ((\cos(k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2x_2))/-2) \\ &= \cos(k_2x_1) + i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot (\cos(k_2x_2) - i \cdot \text{sen}(k_2x_2))/2 + \cos(k_2x_1) - i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot (\cos(k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2x_2))/-2 \\ &= \cos(k_2x_1) + i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \left(\frac{\cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) + \cos(k_2x_1) - i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \left(\frac{-\cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) \\ &= \frac{\cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{\cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i^2 \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} - \frac{\cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{\cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} + \\ &\quad \frac{i^2 \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2}\end{aligned}$$

Sustituimos k_2x_1 por la variable a y k_2x_2 por la variable b también sustituimos los productos $\cos(a) \cdot \text{sen}(b)$ o las diferentes combinaciones por las *identidades de producto a suma que podemos ver en el apéndice A.2.*

$$\begin{aligned}a &= k_2x_1, b = k_2x_2 \\ \frac{\cos(a)\cos(b)}{2} &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\frac{2}{1}} = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{4} \\ \frac{-\cos(a) \cdot i \cdot \text{sen}(b)}{2} &= \frac{-i \cdot \cos(a)\text{sen}(b)}{2} = \frac{-i(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{1}} = \frac{-i \cdot \text{sen}(a+b) + i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{i \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(b)}{2} &= \frac{i(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{1}} = \frac{i \cdot \text{sen}(a+b) + i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{-i^2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} &= \frac{-(-1)\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\frac{2}{1}} = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{4} \\ \frac{-\cos(a) \cdot \cos(b)}{2} &= \frac{-(\cos(a+b) + \cos(a-b))}{\frac{2}{1}} = \frac{-\cos(a+b) - \cos(a-b)}{4} \\ \frac{-\cos(a) \cdot i \cdot \text{sen}(b)}{2} &= \frac{-i \cdot \cos(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{-i(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{1}} = \frac{-i \cdot \text{sen}(a+b) + i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{i \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(b)}{2} &= \frac{i(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{1}} = \frac{i \cdot \text{sen}(a+b) + i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{i^2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} &= \frac{(-1)\text{sen}(a)\text{sen}(b)}{2} = \frac{-\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{-(\cos(a-b) - \cos(a+b))}{\frac{2}{1}} = \frac{-\cos(a-b) + \cos(a+b)}{4}\end{aligned}$$

Eliminamos los elementos que sean iguales pero positivos y negativos por lo cuál solo nos quedan puros $i \cdot \text{sen}(a-b)/4$ entonces al realizar la

suma tendríamos $4 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)/4$ y dividiendo eliminamos el 4 por lo tanto quedaría $i \cdot \text{sen}(a-b)$ y regresamos las variables de a y b por k_2x_1, k_2x_2 .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} - \frac{\cos(a-b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \\
 &\quad \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} - \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{\cos(a+b)}{4} \\
 &= \frac{\cos(a+b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} - \frac{\cos(a+b)}{4} - \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{\cos(a+b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{\cos(a-b)}{4} - \\
 &\quad \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} - \frac{\cos(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 &= \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} = \frac{4 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 &\quad \widetilde{\mathbf{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathbf{m}}_3^{-1}[1,2] = i \cdot \text{sen}(a-b) = i \cdot \text{sen}(k_2x_1 - k_2x_2)
 \end{aligned}$$

Obtenemos el tercer elemento de la matriz al multiplicar \widetilde{m}_2 por la inversa de \widetilde{m}_3 :

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_2 \cdot \widetilde{m}_3^{-1}[2,1] &= kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot (\cos(-k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2x_2))/2 + (-kd_1 \cdot \cos(-k_2x_1) - kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(-k_2x_1)) \cdot (\cos(k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2x_2))/2 \\ &= kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \left(\frac{\cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) - kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \left(\frac{\cos(k_2x_2)}{2} + \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) \\ &= \frac{kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} - \frac{kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} \\ &\quad - \frac{kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2}\end{aligned}$$

Sustituimos k_2x_1 por la variable a y k_2x_2 por la variable b también sustituimos los productos $\cos(a) \cdot \text{sen}(b)$ o las diferentes combinaciones por las identidades de producto a suma que podemos ver en el apéndice A.2.

$$\begin{aligned}\frac{kd_1 \cos(a) \cdot \cos(b)}{2} &= \frac{kd_1 (\cos(a+b) + \cos(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b) + kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a) \cdot i \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{-kd_1 \cdot i (\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{i}} \\ &= \frac{-kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(b)}{2} &= \frac{kd_1 \cdot i (\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{-kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a) \cdot i \cdot \text{sen}(b)}{2} &= \frac{-kd_1 \cdot i^2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{-kd_1 (-1) \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{kd_1 \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b) - kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} \\ \frac{-kd_1 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b)}{2} &= \frac{-kd_1 (\cos(a+b) + \cos(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{-kd_1 \cdot \cos(a+b) - kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} \\ \frac{-kd_1 \cdot \cos(a) \cdot i \cdot \text{sen}(b)}{2} &= \frac{-kd_1 \cdot i \cdot \cos(a) \text{sen}(b)}{2} = \frac{-kd_1 \cdot i (\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{-kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(b)}{2} &= \frac{kd_1 \cdot i (\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\ \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a) \cdot i \cdot \text{sen}(b)}{2} &= \frac{kd_1 \cdot i^2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{-kd_1 \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}{2} = \frac{-kd_1 (\cos(a-b) - \cos(a+b))}{\frac{2}{i}} = \frac{-kd_1 \cdot \cos(a-b) + kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4}\end{aligned}$$

Eliminamos los elementos que sean iguales pero positivos y negativos por lo cuál solo nos quedan puros $kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)/4$ entonces al realizar la suma tendríamos $4 \cdot kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)/4$ y dividiendo eliminamos el 4 por lo tanto quedaría $kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)$ y regresamos las variables de a y b por k_2x_1, k_2x_2 .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} \\
 &\quad - \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} \\
 &= \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} \\
 &\quad + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} \\
 &= \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} = \frac{4 \cdot kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} \\
 &\quad \widetilde{m}_2 \cdot \widetilde{m}_3^{-1}[2,1] = \mathbf{kd}_1 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{sen}(a-b) = \mathbf{kd}_1 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{sen}(k_2x_1 - k_2x_2)
 \end{aligned}$$

Obtenemos el cuarto elemento de la matriz al multiplicar \widetilde{m}_2 por la inversa de \widetilde{m}_3 :

$$\begin{aligned}
 \widetilde{m}_2 \cdot \widetilde{m}_3^{-1}[2,2] &= kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot (\cos(-k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(-k_2x_2))/2 + (-kd_1 \cdot \cos(-k_2x_1) - kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(-k_2x_1)) \cdot (\cos(k_2x_2) + i \cdot \text{sen}(k_2x_2))/-2 \\
 &= kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \left(\frac{\cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) + (-kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1)) \cdot \left(-\frac{\cos(k_2x_2)}{2} - \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \right) \\
 &= kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} - kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} - kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} \\
 &\quad + kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} - kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{\cos(k_2x_2)}{2} - kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \frac{i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} \\
 &= \frac{kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} + \frac{kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} + \\
 &\quad \frac{kd_1 \cdot i \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1) \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_2)}{2}
 \end{aligned}$$

Sustituimos k_2x_1 por la variable a y k_2x_2 por la variable b también sustituimos los productos $\cos(a) \cdot \text{sen}(b)$ o las diferentes combinaciones por las *identidades de producto a suma que podemos ver en el apéndice A.2.*

$$a = k_2x_1, b = k_2x_2$$

$$\frac{kd_1 \cdot \cos(k_2x_1) \cdot \cos(k_2x_2)}{2} = \frac{kd_1(\cos(a+b) + \cos(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b) + kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4}$$

$$\frac{-kd_1 \cdot i \cdot \cos(a) \cdot \sin(b)}{2} = \frac{-kd_1 \cdot i(\sin(a+b) - \sin(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{-kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b) + kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4}$$

$$\frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a) \cdot \cos(b)}{2} = \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b) + \sin(a-b)}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b) + kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4}$$

$$\frac{-kd_1 \cdot i \cdot \sin(a) \cdot i \cdot \sin(b)}{2} = \frac{-kd_1 \cdot i^2 \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)}{2} = \frac{-kd_1(-1) \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)}{2} = \frac{kd_1(\cos(a-b) - \cos(a+b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b) - kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4}$$

$$\frac{kd_1 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b)}{2} = \frac{kd_1(\cos(a+b) + \cos(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b) + kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4}$$

$$\frac{kd_1 \cdot i \cdot \cos(a) \cdot \sin(b)}{2} = \frac{kd_1 \cdot i \cdot (\sin(a+b) - \sin(a-b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b) - kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4}$$

$$\frac{-kd_1 \cdot i \cdot \sin(a) \cdot \cos(b)}{2} = \frac{-kd_1 \cdot i(\sin(a+b) + \sin(a-b))}{4} = \frac{-kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b) - kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4}$$

$$\frac{-kd_1 \cdot i^2 \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)}{2} = \frac{-kd_1(-1) \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)}{2} = \frac{kd_1 \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)}{2} = \frac{kd_1(\cos(a-b) - \cos(a+b))}{\frac{2}{i}} = \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b) - kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4}$$

Eliminamos los elementos que sean iguales pero positivos y negativos por lo cuál solo nos quedan puros $kd_1 \cdot \cos(a-b)/4$ entonces al realizar la suma tendríamos $4 \cdot kd_1 \cdot \cos(a-b)/4$ y dividiendo eliminamos el 4 por lo tanto quedaría $kd_1 \cdot \cos(a-b)$ y regresamos las variables de a y b por k_2x_1 , k_2x_2 .

$$= \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4}$$

$$+ \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \sin(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a+b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot \cos(a+b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \\
&\quad \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} - \frac{kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} \\
&= \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} + \frac{kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4} = \frac{4 \cdot kd_1 \cdot \cos(a-b)}{4}
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathbf{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathbf{m}}_3^{-1}[2, 2] = \mathbf{k}d_1 \cdot \cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{k}d_1 \cdot \cos(\mathbf{k}_2x_1 - \mathbf{k}_2x_2)$$

Al hacer la multiplicación de matrices $\widetilde{\mathbf{m}}_2 \cdot \widetilde{\mathbf{m}}_3^{-1}$ obtenemos la siguiente matriz que reduce los cálculos numéricos en el método de la matriz de transferencia:

$$\begin{bmatrix} \cos(k_2x_1 - k_2x_2) & i \cdot \text{sen}(k_2x_1 - k_2x_2) \\ kd_1 \cdot i \cdot \text{sen}(k_2x_1 - k_2x_2) & kd_1 \cdot \cos(k_2x_1 - k_2x_2) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Entonces al obtener la siguiente matriz obtendremos el producto de las matrices siguiendo con el método de la matriz de transferencia como se ve en la ecuación (2.17), esto nos ayudará a mejorar cálculos en el programa y así evitar los errores numéricos y obtener mejores resultados, por lo que se continuará con el mismo procedimiento desde aquí, lo que no cambia la forma en que se obtienen la transmisividad y reflexividad. Donde la transmisividad $T = FF^*$ y la reflexividad es representada por $R = BB^*$.

2.4. Algoritmo de la MMT para hallar la transmisividad de un sistema multi-barreras para matrices mal balanceadas

En esta sección explicaremos el algoritmo de la matriz de Transferencia para matrices mal balanceadas para hallar las gráficas de transmisividad.

Entrada: nb (número de barreras), anc_i donde $1 \leq i \leq n$ (ancho de la barrera), V_i donde $1 \leq i \leq n$ (Potencial de la barrera), d_i donde $1 \leq i \leq n$ (distancia de una barrera a otra), E_i (energía inicial de la partícula), E_f (energía final de la partícula) y m (masa de la partícula).

Salida: Vector para representar la gráfica de Transmisividad T.

1. Encontramos el número de discontinuidades en el sistema para almacenarlas en X(j):

```
Ndisc=2*nb
X(1)=0
j=2
k=1
```

Mientras (j < Ndisc) hacer:

- $X(j) = X(j - 1) + anc_i(k)$
- $X(j + 1) = X(j) + d_i(k)$
- $j = j + 2$
- $k = k + 1$

$X(j) = X(j - 1) + anc_i(k)$ Último hueco

2. Método de la Matriz de Transferencia para matrices Mal Balanceadas

Se comienza declarando una matriz (MatrizDeSoluciones) con las siguientes incógnitas $\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}$, matriz que contienen matrices de 2×2 .

- disc=1
barrera=1
h=1
- Para k=2 hasta nb + 1 hacer:
 - Si $(E_i = 0 \wedge E - Vi(barrera) \neq 0)$ entonces
 - MDeSoluciones=obtieneMi(X(disc),X(disc + 1),Vi(barrera),E,m,h)
 - disc = disc + 2
 - barrera = barrera + 1
- Si nb > 1 entonces:
 - ProductoMatrices(MDSoluciones[2],MDSoluciones[3],(devuelve)MT)
- Sino
 - $MT = MDSoluciones[2]$
- Si nb > 2 entonces:
 - Para k = 4 hasta nb + 1 entonces:
 - ProductoMatrices(MT,MDSoluciones[k],(devuelve)MT)

3. Entonces se resuelve el sistema de ecuaciones donde $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = MT \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$ y $MT = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, por lo que:

$$F = \frac{1}{a_{11}}$$

4. Después con los resultados de F obtenemos la transmisividad $T = F * F^*$

Algoritmo ObtieneMi (Versión 1)

Está es la primera versión del algoritmo con las soluciones de las matrices de forma exponencial.

Entrada: x_1, x_2, v, E, m , y h

Salida: M (matriz Mi)

Se utilizarán matrices de 2X2: M1, M2, M3, M4.

1. $k_1 = \frac{\sqrt{2 * m * E}}{h}, k_2 = \frac{\sqrt{2 * m * (E - v)}}{h}$
2. $M1[1][1] = e^{ik_1 x_1}$
 $M1[1][2] = e^{-ik_1 x_1}$
 $M1[2][1] = e^{ik_1 x_1}$
 $M1[2][2] = -e^{-ik_1 x_1}$
3. $M2[1][1] = e^{ik_2 x_1}$
 $M2[1][2] = e^{-ik_2 x_1}$
 $M2[2][1] = \frac{k_2}{k_1} * e^{ik_2 x_1}$
 $M2[2][2] = -\frac{k_2}{k_1} * e^{-ik_2 x_1}$
4. $M3[1][1] = e^{ik_2 x_2}$
 $M3[1][2] = e^{-ik_2 x_2}$
 $M3[2][1] = e^{ik_2 x_2}$
 $M3[2][2] = -e^{-ik_2 x_2}$
5. $M4[1][1] = e^{ik_1 x_2}$
 $M4[1][2] = e^{-ik_1 x_2}$
 $M4[2][1] = \frac{k_1}{k_2} * e^{ik_1 x_2}$
 $M4[2][2] = -\frac{k_1}{k_2} * e^{-ik_1 x_2}$
6. Obtenemos las inversas de M1 y M3
 $ObtieneInversa(M1, (devuelve)M1I)$
 $ObtieneInversa(M3, (devuelve)M3I)$
7. Realizamos el producto de matrices mediante la función de multiplicación de matrices que tiene MATLAB, en este lenguaje se pueden multiplicar directamente las matrices.

$$M = M1I * M2 * M3I * M4$$

8. Salida: M

Algoritmo ObtieneMi (Versión 2)

En la segunda versión para la mejora de resultados pasaremos las matrices centrales M2 y M3 de exponenciales a senos y cosenos por medio de la fórmula de Euler anteriormente vista en los cálculos.

Entrada: x_1, x_2, v, E, m , y h

Salida: M (matriz Mi)

Se utilizarán matrices de 2X2: M1, M2, M3, M4.

1. $k_1 = \frac{\sqrt{2*m*E}}{h}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2*m*(E-v)}}{h}$, $kd_1 = \frac{k_2}{k_1}$
2. $M1[1][1] = e^{ik_1x_1}$
 $M1[1][2] = e^{-ik_1x_1}$
 $M1[2][1] = e^{ik_1x_1}$
 $M1[2][2] = -e^{-ik_1x_1}$
3. $M2[1][1] = \cos(k_2x_1) + i * \text{sen}(k_2x_1)$
 $M2[1][2] = \cos(-k_2x_1) + i * \text{sen}(-k_2x_1)$
 $M2[2][1] = kd_1 * \cos(k_2x_1) + kd_1 * i * \text{sen}(k_2x_1)$
 $M2[2][2] = -kd_1 * \cos(-k_2x_1) - kd_1 * i * \text{sen}(-k_2x_1)$
4. $M3[1][1] = \cos(k_2x_2) + i * \text{sen}(k_2x_2)$
 $M3[1][2] = \cos(-k_2x_2) + i * \text{sen}(-k_2x_2)$
 $M3[2][1] = \cos(k_2x_2) + i * \text{sen}(k_2x_2)$
 $M3[2][2] = -\cos(-k_2x_2) - i * \text{sen}(-k_2x_2)$
5. $M4[1][1] = e^{ik_1x_2}$
 $M4[1][2] = e^{-ik_1x_2}$
 $M4[2][1] = \frac{k_1}{k_2} * e^{ik_1x_2}$
 $M4[2][2] = -\frac{k_1}{k_2} * e^{-ik_1x_2}$
6. Obtenemos las inversas de M1 y M3
ObtieneInversa(M1, (devuelve)M1I)
ObtieneInversa(M3, (devuelve)M3I)
7. Realizamos el producto de matrices mediante la función de multiplicación MATLAB.

$$M = M1I * M2 * M3I * M4$$

8. Salida: M

Algoritmo ObtieneMi (Versión 3)

En la tercera versión para reducir los errores numéricos en el programa se obtiene la inversa de M3 de senos y cosenos numéricamente de la versión 2.

Entrada: x_1, x_2, v, E, m , y h

Salida: M (matriz Mi)

Se utilizarán matrices de 2X2: M1, M2, M3i, M4.

1. $k_1 = \frac{\sqrt{2*m*E}}{h}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2*m*(E-v)}}{h}$, $kd_1 = \frac{k_2}{k_1}$
2. $M1[1][1] = e^{ik_1x_1}$
 $M1[1][2] = e^{-ik_1x_1}$
 $M1[2][1] = e^{ik_1x_1}$
 $M1[2][2] = -e^{-ik_1x_1}$
3. $M2[1][1] = \cos(k_2x_1) + i * \text{sen}(k_2x_1)$
 $M2[1][2] = \cos(-k_2x_1) + i * \text{sen}(-k_2x_1)$
 $M2[2][1] = kd_1 * \cos(k_2x_1) + kd_1 * i * \text{sen}(k_2x_1)$
 $M2[2][2] = -kd_1 * \cos(-k_2x_1) - kd_1 * i * \text{sen}(-k_2x_1)$

4. Obtenemos la inversa de la matriz M_3 numéricamente de la versión anterior(2).

$$M3I[1][1] = (\cos(-k_2 x_2) + i * \text{sen}(-k_2 x_2))/2$$

$$M3I[1][2] = (\cos(-k_2 x_2) + i * \text{sen}(-k_2 x_2))/2$$

$$M3I[2][1] = (\cos(k_2 x_2) + i * \text{sen}(k_2 x_2))/2$$

$$M3I[2][2] = (\cos(k_2 x_2) + i * \text{sen}(k_2 x_2))/-2$$

5. $M4[1][1] = e^{ik_1 x_2}$

$$M4[1][2] = e^{-ik_1 x_2}$$

$$M4[2][1] = \frac{k_1}{k_2} * e^{ik_1 x_2}$$

$$M4[2][2] = -\frac{k_1}{k_2} * e^{-ik_1 x_2}$$

6. Obtenemos la inversa de M1

ObtieneInversa(M1, (devuelve)M1I)

7. Realizamos el producto de matrices mediante la función de multiplicación MATLAB.

$$M = M1I * M2 * M3I * M4$$

8. Salida: M

Algoritmo ObtieneMi (Versión 4)

En la última versión para evitar que al calcular las matrices en el programa se vayan hasta infinito, decidimos reducir más los cálculos realizados en el ordenador por lo que se multiplicaron las matrices M_2 y M_{3-1} obtenidas en la versión 3 de este algoritmo y el resultado se muestra a continuación:

Entrada: x_1, x_2, v, E, m , y h

Salida: M (matriz Mi)

Se utilizarán matrices de 2×2 : M1, M2M3i, M4.

- $k_1 = \frac{\sqrt{2 * m * E}}{h}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2 * m * (E - v)}}{h}$, $kd_1 = \frac{k_2}{k_1}$
- $M1[1][1] = e^{ik_1 x_1}$
 $M1[1][2] = e^{-ik_1 x_1}$
 $M1[2][1] = e^{ik_1 x_1}$
 $M1[2][2] = -e^{-ik_1 x_1}$
- Al realizar la multiplicación de m_2 y m_3^{-1} se obtiene la matriz de la ecuación (2.26)
 $M2M3I[1][1] = \cos(k_2 x_1 - k_2 x_2)$
 $M2M3I[1][2] = i * \text{sen}(k_2 x_1 - k_2 x_2)$
 $M2M3I[2][1] = kd_1 * i * \text{sen}(k_2 x_1 - k_2 x_2)$
 $M2M3I[2][2] = kd_1 * (\cos(k_2 x_1 - k_2 x_2))$
- $M4[1][1] = e^{ik_1 x_2}$
 $M4[1][2] = e^{-ik_1 x_2}$
 $M4[2][1] = \frac{k_1}{k_2} * e^{ik_1 x_2}$
 $M4[2][2] = -\frac{k_1}{k_2} * e^{-ik_1 x_2}$
- Obtenemos la inversa de M1
ObtieneInversa(M1, (devuelve)M1I)

6. Realizamos el producto de matrices mediante la función de multiplicación Matlab.

$$M = M1I * M2M3I * M4$$

7. Salida: M

Al final el algoritmo *ObtieneMi* que nos da mejores resultados es la versión 4 ya que reduce mucho más el margen de error que cualquiera de los otros porque simplifica mucho las ecuaciones al hacer los cálculos numéricamente, por lo tanto se ocupará en el sistema Multi-barrera esta versión.

Algoritmo ObtieneInversa

Entrada: M (matriz de entrada)

Salida: MI (matriz invertida)

Para obtener el determinante ocuparemos la función **det** de Matlab.

$$MI[1,1] = M[2,2]/det(M)$$

$$MI[1,2] = -M[1,2]/det(M)$$

$$MI[2,1] = -M[2,1]/det(M)$$

$$MI[2,2] = M[1,1]/det(M)$$

Finalmente en el algoritmo anterior se definen las matrices utilizadas y las funciones que llamamos a través del método de la matriz de transferencia para matrices mal balanceadas en las que nos muestra como fuimos obteniendo algebraicamente para reducir cálculos y evitar los errores numéricos en el sistema, así mismo, en el producto de las matrices y para obtener el determinante usamos funciones de MATLAB que nos ayudan a hacer más funcional el programa y así poder obtener la transmisividad para un valor de energía.

En el caso que se necesite encontrar la T para múltiples valores de energía necesitamos tener una $E_{inicial}$ y una E_{final} , necesitamos saber cuantos valores de energía se necesitan y lo representaremos como el número de Puntos igual $nPuntos$.

1. Definimos un valor para incrementar la energía este será $deltaE$

$$deltaE = (E_{final} - E_{inicial})/(nPuntos - 1)$$

2. Iteramos entre $nPuntos$ (número de puntos) en MMTM, a partir de la energía inicial y vamos incrementando con $deltaE$ cada iteración.

- $E = E_i$
- $deltaE = (E_{final} - E_{inicial})/(nPuntos - 1)$
- Para $i = 1$ hasta $nPuntos$ hacer:
 - Mandamos a llamar a la MMTM y hacemos los pasos 2, 3 y 4
 - $E = E + deltaE$
 - Mostramos T resultantes

En los pasos anteriores podemos ver como al tener múltiples valores de energía el valor de $deltaE$ se va disminuyendo para poder llegar a cierto rango de energía final e ir incrementado poco a poco la energía; así podemos graficar los valores resultantes de T al realizar el método MMTM con las energías obtenidas y obtenemos una función $T(E)$ que sería el *coeficiente de transmisividad* está nos muestra todas las partículas incidentes que se transmiten.

2.5. Análisis de la Matriz de Transferencia para Matrices Mal Balanceadas como método numérico

En el pasado se aplicaban muchos métodos numéricos para llegar a una solución a este tipo de problemas lo que nos hacía tardar varias horas para resolver estos problemas dependiendo de su complejidad. Los métodos numéricos permiten modificar valores o coeficientes con el fin de obtener información más completa en la resolución de un problema, al igual que estos pueden ser susceptibles a tener errores.

En el método de la Matriz de Transferencia para matrices mal balanceadas ocupamos la fórmula de Euler para números complejos en su forma exponencial para poder pasarla a senos y cosenos; así poder facilitar el cálculo de operaciones con números complejos.

Representamos la fórmula de Euler en la ecuación (2.18). En esta fórmula tenemos que:

- x es un número real
- e es la base del logaritmo natural
- i es una unidad imaginaria

En esta se establece la relación entre funciones trigonométricas y funciones exponenciales. Por lo que se considera una manera de relacionar a dos representaciones del mismo número complejo en el plano complejo. Entonces al tener funciones trigonométricas podemos usar las identidades trigonométricas para reducir términos en la multiplicación de matrices para la MMTMB.

Las identidades trigonométricas son igualdades, estas involucran funciones trigonométricas y se pueden usar para cualquier valor permitido de la variable o variables que se elijan para ser aplicados en las funciones.

En la multiplicación de las matrices centrales para la reducción de los términos para el sistema Multi-barreras ocupamos la identidad trigonométrica Producto a suma ésta nos muestra como pasar del producto de dos funciones trigonométricas en donde los ángulos son diferentes; a la suma de dos funciones trigonométricas, esta nos ayuda bastante en la reducción de los términos y nos deja una matriz que es más sencilla de manejar por lo que el programa reduce los cálculos a la vez que los errores numéricos que aparecían al realizar muchos cálculos que nos mandaban a infinito, y desaparecen en la mayoría de los casos en los que se prueba este sistema.

Por lo cual el Método de la matriz de transferencia para matrices mal balanceadas se hace más factible de programar, al generar el algoritmo cambiamos las matrices centrales, y este se ejecuta en un tiempo polinomial lo cual se justifica en el **capítulo 4 sección 4.3**, entonces todo esto nos lleva a que este es un método numérico, porque resuelve un difícil problema en el que poco a poco se van reduciendo los cálculos analizando el problema y buscando varias opciones para resolverlo en lo que ya sabemos, de una forma más eficiente e innovadora para hallar la transmisividad en un sistema Multi-barreras.

Capítulo 3

Marco Metodológico

3.1. Metodología del Sistema Multi-barreras para matrices mal balanceadas

Para el desarrollo del sistema Multi-barrera para matrices mal balanceadas se utilizó la metodología Scrum, esta consiste en realizar pequeñas entregas regulares y parciales del producto final. Para que así poco a poco vayamos consiguiendo resultados del proyecto. Las entregas en la metodología *Scrum* tienen intervalos de tiempo relativamente cortos en los que se realiza una pequeña parte del proyecto global.

Al finalizar este tiempo, los equipos se reúnen, para verificar resultados y planificar las tareas a cumplir.

Una de las ventajas de la metodología Scrum es que se controla el trabajo planificando las tareas pendiente, que se van organizando por prioridad todas las tareas desde las más importante hasta la menos importante, con sus responsables, sus tiempos de entrega y los requisitos para llevarlas a cabo, para revisar más a detalle la metodología ver [Pérez, 2014].

Escogí esta metodología ya que no es necesario dedicarle una gran cantidad de tiempo puesto que es fácil entenderla ya que no posee reglas complicadas, lo único que necesita es mucha dedicación en el proyecto. Las fases que se llevan a cabo en la metodología *Scrum* son las siguientes:

Planteamiento: Donde se define el proyecto bajo el modelo SCRUM los objetivos principales y generales. Lo primero que se considera son las entregas parciales, para planear que estrategias se van a seguir para la elaboración del proyecto.

Lista de tareas: Se elabora una lista de tareas en la que se tiene en cuenta para cada entrega que resultados se deberían de tener. Es muy importante tener en cuanto tiempo se va llevar para tener cada actividad.

Reuniones: Lo mejor es que cada día se dedique al menos 15 minutos para reunirse todo el equipo y poder ponerse al tanto de la evolución del plan. En estas reuniones cada miembro debe mostrar las tareas asignadas y en caso de alguna incidencia debe brindar las opciones más adecuadas.

Demostración: Una vez terminadas las labores de cada fase, el equipo de trabajo debe reunirse para mostrarle sus avances al cliente. El cliente debe decidir si se cambian elementos del proyecto.

Retrospectiva: El equipo de trabajo se vuelve a reunir para valorar los resultados de la entrega y se analizan las mejoras de cada fase.

3.2. Implementación

En esta sección hablaremos sobre el diagrama general del sistema así como también del software. La figura (3.1) muestra el diagrama general de como se verá y como funciona el sistema Multi-barreras para matrices mal

balanceadas.

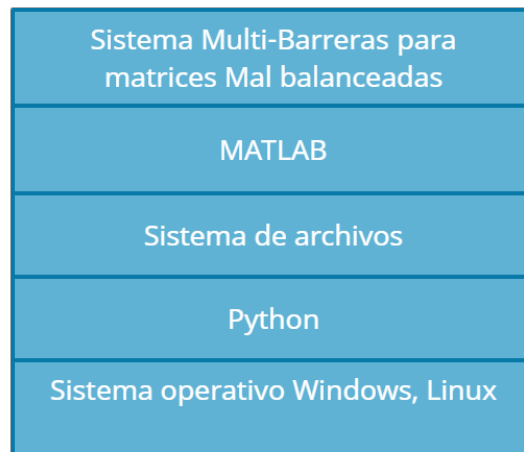


Figura 3.1: Diagrama General del modelo del Sistema Multi-Barreras para matrices mal balanceas

3.3. Infraestructura

Computadoras con las siguientes características:

- HP
- Procesador: Intel(R) Celeron(R)
- Memoria RAM: 4 Gb.
- Lenovo
- Procesador:
- Memeria RAM: 8 Gb.

3.4. Software

Para la implementación del programa se utilizará MATLAB ya que hace más fácil trabajar con cálculos matemáticos y en este caso nosotros lo ocuparemos especialmente para la realización de la matriz de transferencia.

- **MATLAB.**

Es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo que permite realizar tareas de cálculo complejas de forma más rápida que con los lenguajes de programación tradicionales, como C, C++ y Fortran. Permite desarrollar y analizar algoritmos y aplicaciones de forma rápida. Incluye operaciones vectoriales y matriciales que son fundamentales para resolver los problemas científicos y de ingeniería. Es posible diseñar y editar interfaces de usuario. Soporta todo el proceso de análisis de datos, desde su adquisición desde dispositivos externos y bases de datos, pasando por el pre-procesado, visualización y análisis numérico, hasta la producción de resultados con calidad de presentación, para más detalle revisar [Baéz, 2006]. También se tiene

acceso a la plataforma Simulink para simulación multidominio y diseño basado en modelos de sistemas dinámicos y embebidos y a Simulink Control Design.

Características principales:

- Lenguaje de alto nivel para cálculos científicos y de ingeniería
- Entorno de escritorio optimizado para la exploración iterativa, el diseño y la solución de problemas
- Gráficas para visualizar datos y herramientas para crear diagramas personalizados
- Aplicaciones para ajustar curvas, clasificar datos, analizar señales, ajustar sistemas de control y muchas otras tareas
- Toolbox complementarias para una amplia variedad de aplicaciones científicas y de ingeniería
- Herramientas para crear aplicaciones con interfaces de usuario personalizadas
- Interfaces para C/C++, Java, .NET, Python, SQL

En el caso de Python lo utilizaremos para hacer la gráfica de múltiples barreras con la librería numpy que nos facilita el como trabajar con vectores.

■ Python.

Es un lenguaje de programación de alto nivel que se utiliza para desarrollar aplicaciones de todo tipo. Este es un lenguaje interpretado es decir, no es necesario compilarlo para ejecutar las instrucciones escritas en Python, si no que se ejecutan directamente en el ordenador utilizando un IDE denominado interpretador. Python es un lenguaje sencillo de leer y escribir debido a su alta similitud con el lenguaje humano. Además de que se trata de un lenguaje multiplataforma de código abierto, lo que significa que es gratuito y en consecuencia a permitido desarrollar sin límites. A lo largo del tiempo, Python ha ido ganando un gran mercado de programadores, gracias a su sencillez en el código así como también su amplia variedad para poder desarrollar infinitas posibilidades, ya que facilita trabajar con inteligencia artificial, big data, machine learning y data science, entre muchos otros campos en auge, para más detalle ver [LenguajesProgramación, s.f]

Características principales:

- **Es multiparadigma.** Esto quiere decir que aunque su fuerte es la programación orientada a objetos existen otros paradigmas, uno de ellos es la programación imperativa (con sentencias de bucle) o la programación funcional(con módulos y funciones).
- **Es un lenguaje interpretado.** Como se dijo anteriormente en Python, no se necesita compilar el código fuente a código máquina, si no que hay un interprete que es el que ejecutará el programa basándose en el código directamente.
- **Es multiplataforma.** A diferencia de otros lenguajes, Python tiene la posibilidad de usarlo en muchos dispositivos y sistemas operativos, ya que se han creado muchos intérpretes para Unix, Linux, Windows, etc.
- **Es de tipo-dinámico.** No es necesario declarar una variable así como tampoco es necesario mandarle de que tipo son los datos. La variable se adapta a lo que escribimos cuando se ejecuta el programa.
- **Es orientado a objetos.** Hacer software orientado a objetos conlleva una serie de ventajas, sobre todo a la hora reutilizar los componentes gracias a la herencia y sus funciones de polimorfismo.

■ La librería Numpy.

Como se había mencionado anteriormente, se utilizará Python para hacer las gráficas multi-barreras por lo cuál necesitamos la librería numpy entonces dado el caso se explicará su funcionamiento a continuación. Numpy es una librería de Python especializada en el cálculo numérico y el análisis de datos especialmente para un gran volumen de datos que para este caso es una gran opción. Está incorpora una nueva clase de objetos llamados arrays que permite representar colecciones de datos de un mismo tipo en varias dimensiones, para más detalle [Sánchez, 2020].

- **La librería OpenCV.** OpenCV. Es actualmente la biblioteca de visión por computadora más grande por todas las funciones que posee. OpenCV tiene wrappers para otros lenguajes de programación. En este caso OpenCV-Python es la API de Python para OpenCV. Se puede utilizar OpenCV para realizar operaciones simples con imágenes como:

- Abrir y guardar imágenes.
- Dibujar formas simples en imágenes
- Escribir en imágenes

Es básico crear una imagen para poder avanzar y así poder utilizar todas las funciones avanzadas de OpenCV. A si mismo se pueden dibujar varias formas en una imagen existente solo es cuestión de tener una idea de como trabajar con OpenCV.

En OpenCV las posibilidades de análisis y tratamiento de imágenes tan solo con la biblioteca son inmensas, desde hacer un histograma de una imagen, como detectar caras y clasificarlas según su género hasta solo detectar en que partes hay más un color que otro o crear modelos de realidad aumentada, revisar [Crehana, 2021].

En este caso se utilizará la librería OpenCV para poder crear la gráfica multi-barrera a partir de 3 arreglos el del ancho, distancia y el potencial de la barrera para poder representar las barreras esta gráfica será realizada punto por punto y está librería me ayudo mucho en el proceso.

Capítulo 4

Diseño e implementación del Sistema Multi-barreras para matrices mal Balanceadas

En este capítulo se presenta el diagrama de flujo para la matriz de Transferencia para matrices mal balanceadas para hallar la Transmisividad.

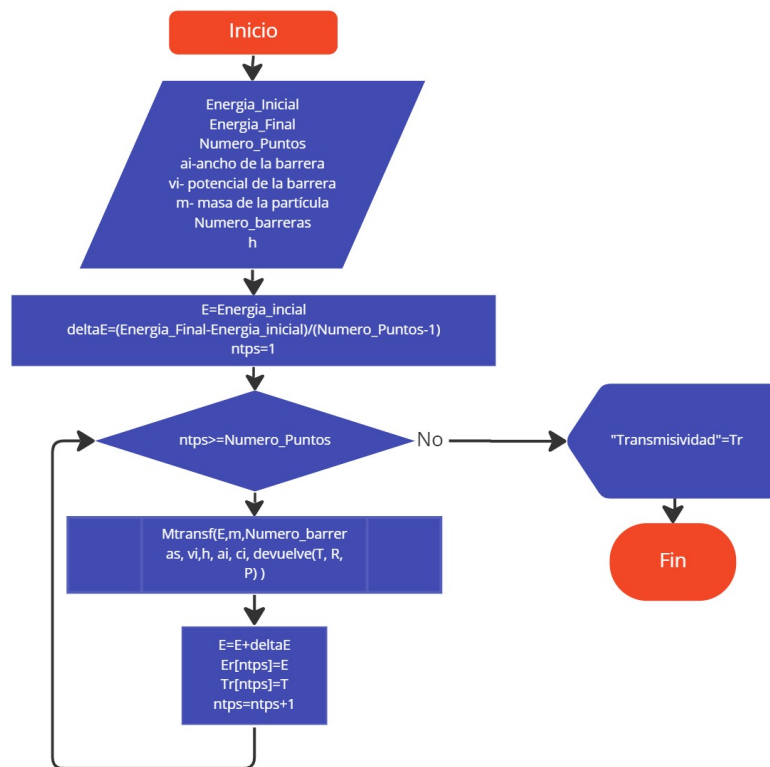


Figura 4.1: Diagrama de flujo Sistema Multi-Barrera para múltiples valores de energía.

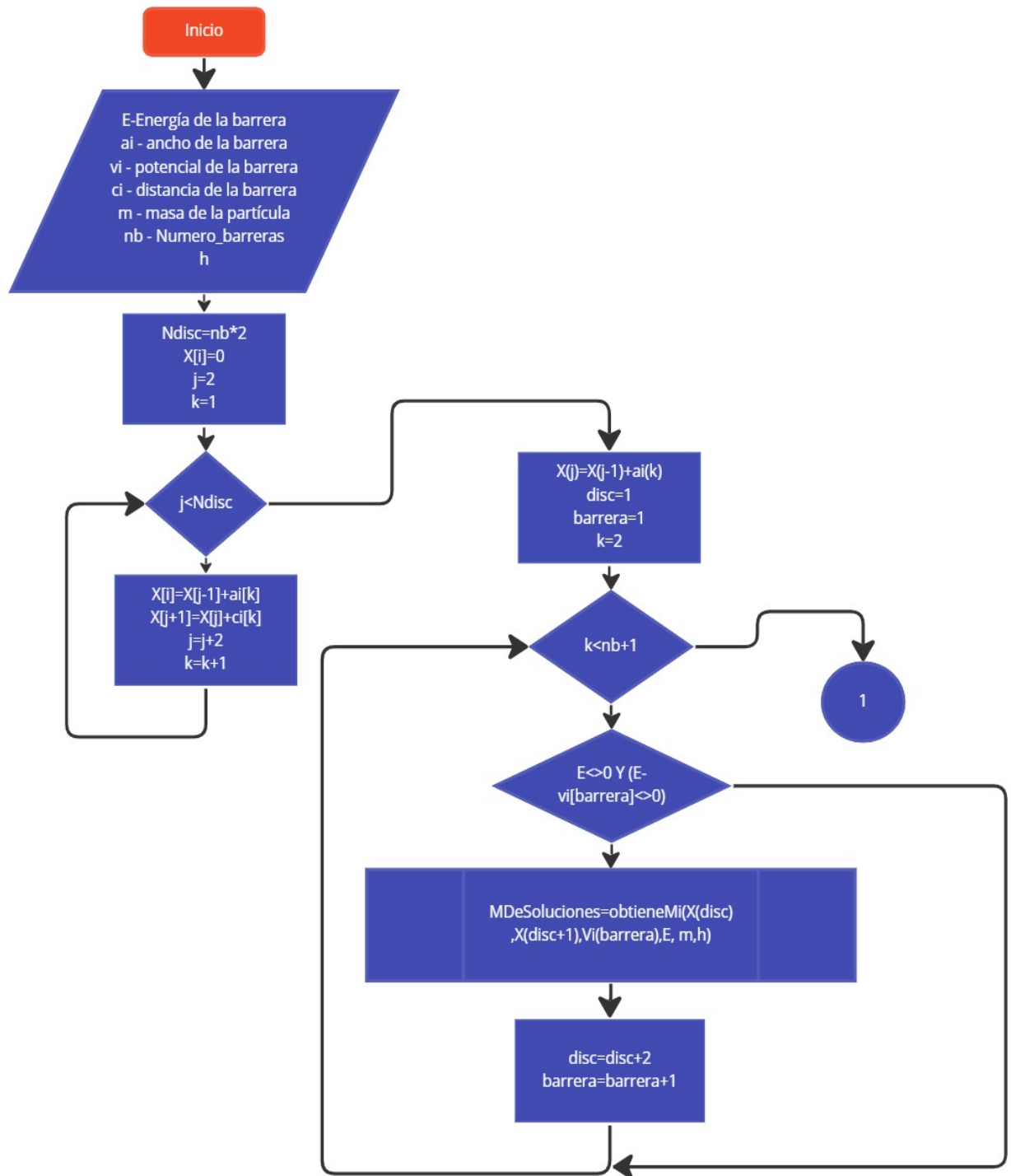


Figura 4.2: Diagrama de flujo Matriz de transferencia para matrices mal balanceadas Parte 1.

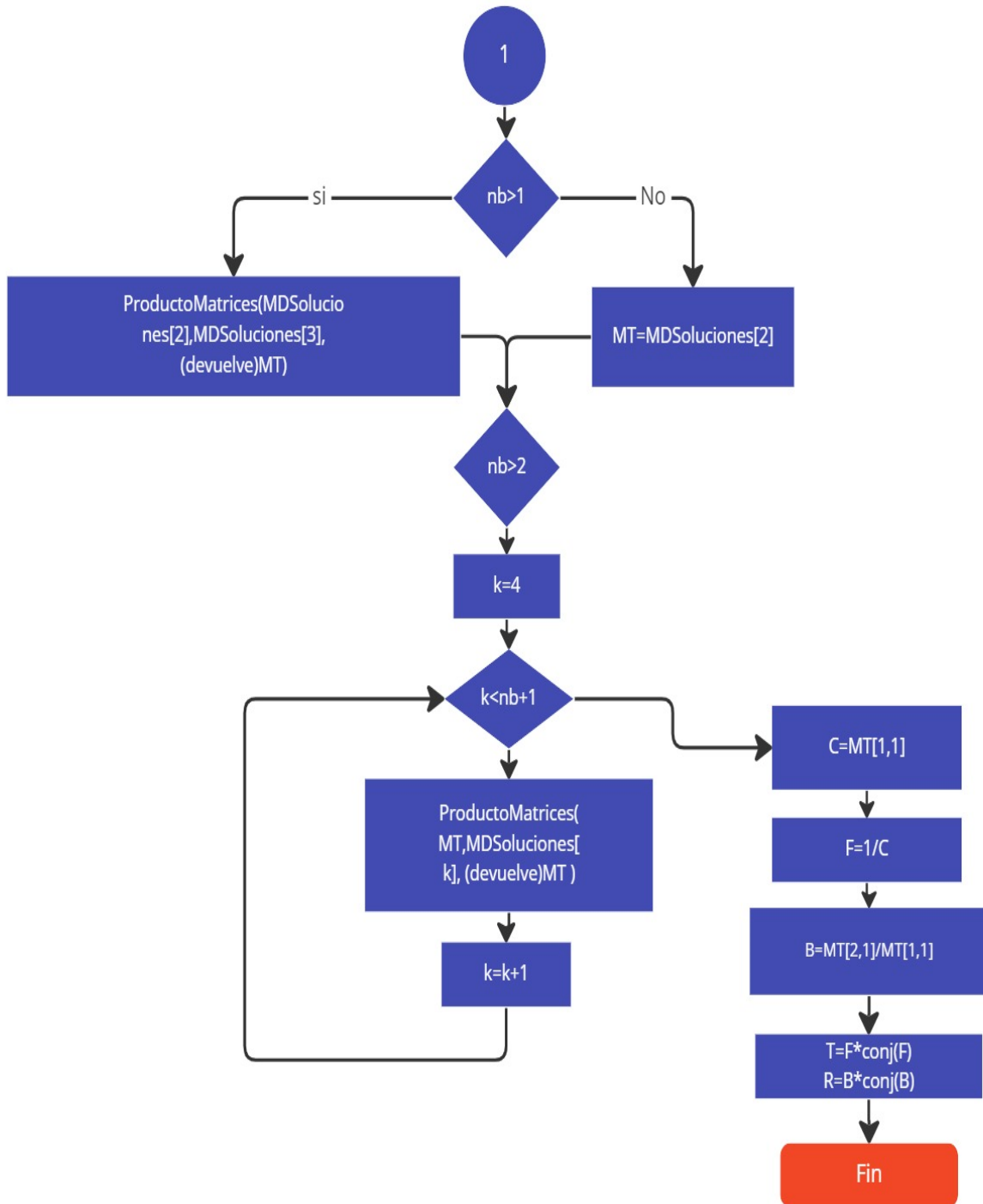


Figura 4.3: Diagrama de flujo Matriz de transferencia para matrices mal balanceadas Parte 2.

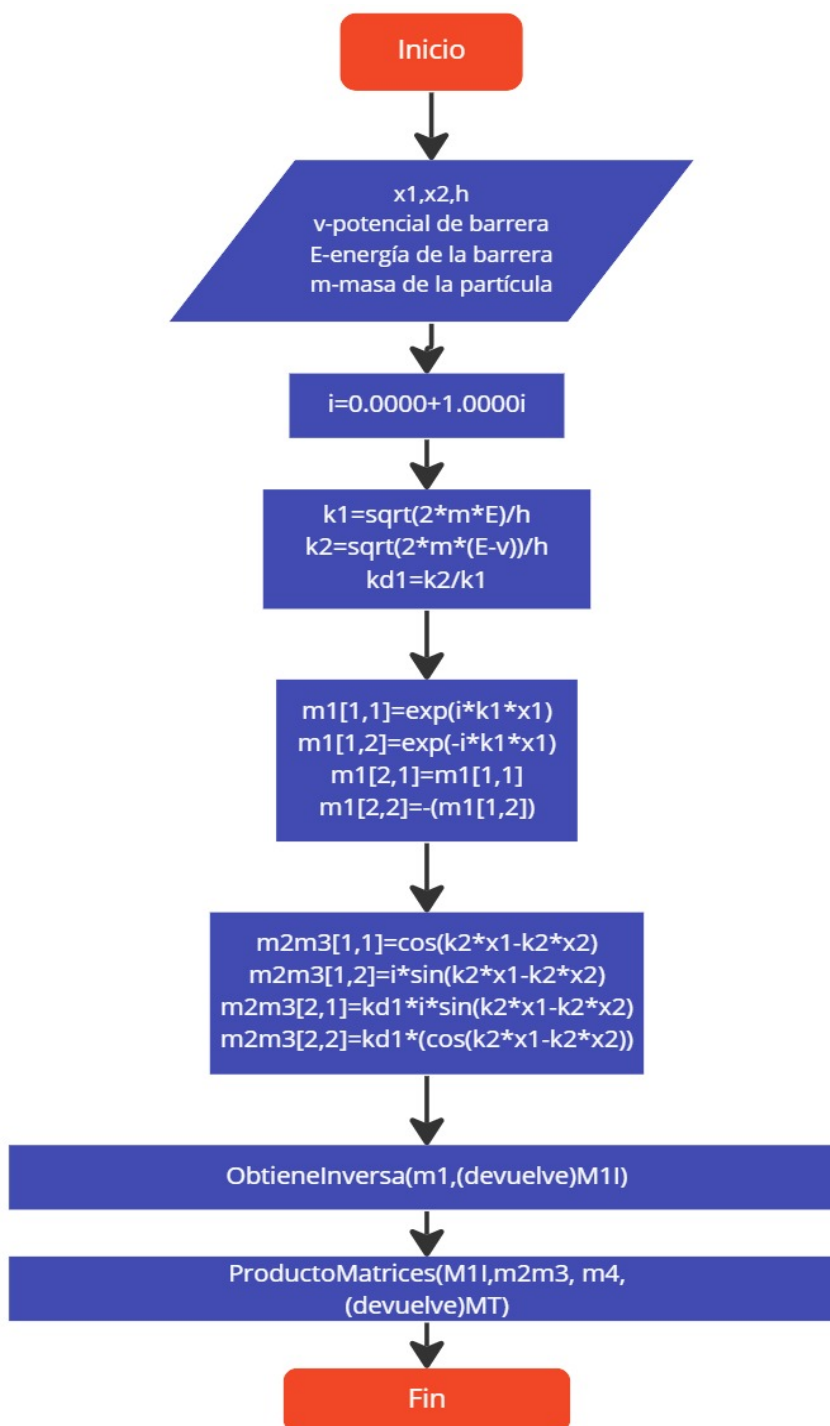


Figura 4.4: Diagrama de flujo que obtiene las matrices en términos de senos y cosenos para la MMTM.

4.1. Diseño del sistema

El proceso iniciará cuando el usuario nos proporcione los datos de la barrera mediante una tabla estos son: el ancho, el potencial y la distancia entre barreras, teniendo en cuenta que cada fila representará el número de barreras, también pedimos otros datos como la energía, la masa y el número puntos estos se usarán para obtener

el rango de energía, el usuario tendrá como resultado dos gráficas la de la Transmisividad y la gráfica del sistema Multi-barrera que representa la forma en como se verían las barreras.

4.2. Vistas del sistema

A continuación, se muestra la propuesta de las vistas para el sistema Multi-barrera para matrices mal balanceadas:

Vista principal. En donde podemos ingresar los datos de la barrera y los rangos de Energía para la grafica de Transmisividad.

Archivo	Edición	Barrera	Ayuda															
Sistema Multi-Barreras		Transmisividad																
Energía Inicial	<input type="text"/>	Energía Final	<input type="text"/>															
Masa de la Partícula	<input type="text"/>	Número de Puntos	<input type="text"/>															
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Ancho de la barrera</th> <th>Potencial</th> <th>Distancia</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table>				Ancho de la barrera	Potencial	Distancia												
Ancho de la barrera	Potencial	Distancia																
<p>Dibujar Sistema</p> <p>Guardar Sistema</p> <p>Imprimir Sistema</p>																		

Figura 4.5: Vista de entrada Sistema Multi-Barrera para matrices mal balanceadas

Grafica de Transmisividad

Después de acceder con el botón de transmisividad empieza el cálculo de la matriz de Transferencia y se grafica la transmisividad.

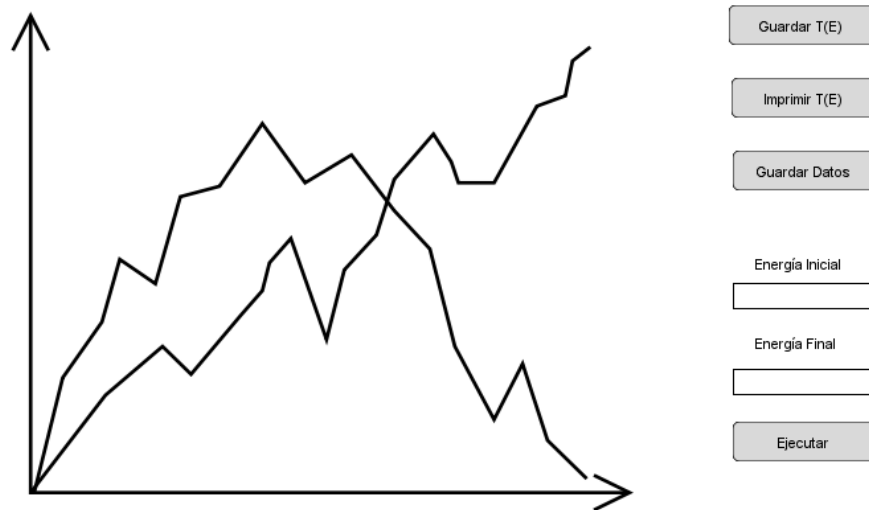


Figura 4.6: Vista de Transmisividad y reflexividad para matrices mal balanceadas

4.3. Análisis del algoritmo del MMT utilizando senos y cosenos, para hallar la transmisividad y reflexividad de un sistema multibarreras

Es importante el diseño de los algoritmos ya que de la eficacia de éste depende el tener mejores resultados en la aplicación solicitada. Sólo cuando se sabe si realmente el algoritmo será eficaz se debería de tomar la decisión de ser implementado para ello, es cuestión de analizarlo paso a paso. El análisis de un algoritmo normalmente se basa más en la experiencia e intuición. Pero existen algunos métodos básicos para poder utilizarlas en éste problema, nos basaremos en el libro de [Brassard, 1996].

En este análisis calcularemos las unidades tiempo para cada algoritmo dependiendo de cada paso, como sabemos dependiendo de los algoritmos asignamos una unidad de tiempo. Listaremos las principales:

- Una asignación es equivalente a 1 unidad de tiempo (u.t).
- Una operación sencilla con un operador equivale a 1 u.t.
- El acceso a memoria de una variable equivale a 1 u.t

En las condicionales se tomará el caso promedio que nos indica:

$T_1(n)$, $T_2(n)$ la suma de los tiempos de la parte verdadera de la condición $T_1(n)$ con la parte falsa de la condición $T_2(n)$, todo se divide por dos. Para las repeticiones existen dos casos:

- **Caso while**

```

inicioCondicion
while( evaluacionCondicion ){
    T1(n)
}

```

La formula para hallar las unidades de tiempo es:

$$T(n) = (T1(n)+evaluacionCondicion)*nRepeticion(n) + inicioCondicion$$

- **Caso for**

```

for ( inicioCondicion ; evaluacionCondicion ; incremento ) {
    T2(n)
}

```

Obtener las unidades de tiempo:

$$T(n) = (T2(n) + evaluacionCondicion + incremento) * nRepeticiones(n) + inicioCondicion$$

Análisis del algoritmo **ObtieneInversa**.

El algoritmo **ObtieneInversa**, es un algoritmo secuencial por lo tanto siguiendo la forma de calcular las unidades tiempo serían 34 u.t.

Análisis del algoritmo **ObtieneMI**

El algoritmo es secuencial y modular al mandar a llamar una función.

1. Se realizan 3 asignaciones una de 8 u.t. otra de 10 u.t y la última de 4 u.t el proceso se realiza en $8 + 10 + 4 = 20u.t.$
2. Se realizan 4 asignaciones para la *matriz*₁ lo que suma $9 + 10 + 9 + 11 = 39u.t$
3. En este paso se realizan 4 asignaciones para la matriz *m2m3*_i lo que suma $11 + 13 + 15 + 13 = 52u.t.$
4. En este paso se realizan 4 asignaciones para la *matriz*₄ lo que suma $9 + 10 + 13 + 15 = 47u.t.$
5. Para llamar a otra función que es *ObtieneInversa* y se le asigna a *M1I* lo que nos da $3u.t.$
6. Si nos basamos en MATLAB para este punto la asignación de la multiplicación nos daría $6u.t.$

Esto nos da un $O(160)u.t.$

Análisis de la MMT utilizando senos y cosenos para hallar la transmisividad de un sistema multibarreras para matrices mal balanceadas

Punto 1: Se realizan 3 asignaciones con $3u.t.$

Punto 2: Se realiza un for que contiene 4 instrucciones en una de ellas se realiza un if; en el cuál calculamos el valor de la unidad de tiempo con la formula anteriormente vista y en el caso de la condicional utilizamos el caso promedio con un resultado de $20n + 1u.t.$

Punto 3: Se realizan dos if uno contiene una instrucción en la parte verdadera y otra en la falsa, en el segundo if tenemos un for con una instrucción lo que nos da un tiempo de $25n + 15/2u.t.$

4.4. Análisis numérico MMT para senos y cosenos

El *cálculo numérico* es la rama de las Matemáticas que estudia los métodos que permiten obtener una solución aproximada (a veces exacta) del problema considerado tras realizar un número finito de operaciones lógicas y algebraicas elementales, para mas detalle revisar el **capítulo 1.2 Noción de algoritmo** en [UGR, s.f]. Los problemas en el análisis numérico se clasifican en dos grupos: según sea su naturaleza numérica o funcional. Los del primer grupo son los problemas relativos a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales. El segundo tipo, por el contrario, son problemas de interpolación y aproximación de funciones.

El desarrollo del Análisis numérico ha ido ligado a la evolución que los ordenadores han experimentado desde su aparición. Los ordenadores son las mejores herramientas para aplicar con eficacia la inmensa mayoría de métodos numéricos, ayudan mucho en el volumen de los cálculos.

La elaboración de un buen algoritmo exige un buen conocimiento matemático, conocer los métodos numéricos involucrados, y también un cierto cuidado en la disposición de los cálculos para minimizar los efectos indeseados de los errores de redondeo que provienen del hecho de que el ordenador no puede utilizar más que una cantidad limitada de números racionales para presentar todos los números reales. El número máximo de decimales que considera un ordenador en la representación interna de un número real se llama *precisión*. A la diferencia entre el número considerado y su representación interna se le llama error de redondeo, revisar [Uh Zapata, 2014].

Si r^* es una aproximación del número real r , se llama error absoluto a

$$|r - r^*|$$

y error relativo a

$$\frac{|r - r^*|}{|r|},$$

siempre que sea $r \neq 0$. Estas dos formulaciones equivalentes de un mismo problema pueden arrojar distintos resultados al efectuar los cálculos en un ordenador.

Ejemplo 1:

Sean $x = 3.141592$ el valor exacto y $x^* = 3.14$ una aproximación a este valor, calcular el valor absoluto y relativo de este número.

El error absoluto es

$$E = |x - x^*| = |3.141592 - 3.14| = 0.001592$$

y el error relativo es

$$E = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{0.001592}{3.141592} = 0.00507$$

Ejemplo 2

Se tiene que medir la longitud de un puente, y se obtiene 9999 cm, respectivamente. Si el valor real es 10000 cm, calcular el error absoluto y el error relativo porcentual en cada caso.

- El error absoluto en la medición del puente es

$$E_A = 10000 - 9999 = 1\text{cm}$$

- El error relativo porcentual para el puente es

$$E_R = \frac{1}{10000} 100\% = 0.01\%$$

4.5. Análisis del MMTM para el caso de una barrera

Analizaremos el comportamiento de la MMTM implementado en MATLAB con respecto a cuando las soluciones de las matrices centrales son de la forma exponencial; para el otro caso en que las matrices centrales sean senos y cosenos de una barrera potencial que tiene las siguientes características:

- Ancho de la barrera: 10.5 unidades atómicas (a.u.)
- Potencial(alto de la barrera): 0.967493267 a.u.
- Masa : 1 a.u.

donde el resultado es la transmisividad T del sistema.

- Las soluciones son (con 11 cifras significativas) de transmisividad que obtuvimos para los siguientes valores de energía de un rango 1000 puntos (con 13 cifras significativas) son:



Figura 4.7: Potencial de barrera análisis numérico

Energía	T analítica	T MMT Exponencial	T MMTM Senos y Cosenos
0.008008008008	3.0512480222E-14	3.0507586688E-14	3.0512480222E-14
0.016016016016	6.8343989935E-14	6.8344350823E-14	6.8343989935E-14
0.024024024024	1.148620198E-13	1.1490483444E-13	1.148620198E-13
0.032032032032	1.7166999791E-13	1.7173792582E-13	1.7166999791E-13
0.04004004004	2.4064694507E-13	2.4073665952E-13	2.4064694507E-13
0.048048048048	3.2399378018E-13	3.2392571778E-13	3.2399378018E-13
0.056056056056	4.2428740282E-13	4.2438228189E-13	4.2428740282E-13
0.064064064064	5.4454387459E-13	5.4438294533E-13	5.4454387459E-13
0.072072072072	6.8829224974E-13	6.8844056924E-13	6.8829224974E-13
0.80880880881	0.000015969889809	0.000015969889809	0.000015969889809
0.81681681682	0.000020721068427	0.000020721068426	0.000020721068427
0.84884884885	0.000062123296184	0.000062123296184	0.000062123296184

El error absoluto (E.A.) es el siguiente:

Energía	T analítica	E.A MMT Exponenciales	E.A MMTM Senos y Cosenos
0.008008008008	3.0512480222E-14	4.89353399999902E-18	0
0.016016016016	6.8343989935E-14	3.60888000006969E-19	0
0.024024024024	1.148620198E-13	4.28146400000035E-17	0
0.032032032032	1.7166999791E-13	6.79279099999959E-17	0
0.04004004004	2.4064694507E-13	8.97144499999767E-17	0
0.048048048048	3.2399378018E-13	6.80624000000143E-17	0
0.056056056056	4.2428740282E-13	9.48790700000219E-17	0
0.064064064064	5.4454387459E-13	1.60929259999946E-16	0
0.072072072072	6.8829224974E-13	1.48319499999969E-16	0
0.80880880881	0.000015969889809	0	0
0.81681681682	0.000020721068427	0	0
0.84884884885	0.000062123296184	0	0
	Promedio:	5.64918043333278E-17	0

El error relativo (E.R.) es el siguiente:

Energía	T analítica	E.R MMT Exponenciales	E.R MMTM Senos y Cosenos
0.008008008008	3.0512480222E-14	0.000160	0
0.016016016016	6.8343989935E-14	5.28046431515338E-06	0
0.024024024024	1.148620198E-13	0.000372	0
0.032032032032	1.7166999791E-13	0.000395	0
0.04004004004	2.4064694507E-13	0.000372	0
0.048048048048	3.2399378018E-13	0.000210	0
0.056056056056	4.2428740282E-13	0.000223	0
0.064064064064	5.4454387459E-13	0.000295	0
0.072072072072	6.8829224974E-13	0.000215	0
0.80880880881	0.000015969889809	0	0
0.81681681682	0.000020721068427	0	0
0.84884884885	0.000062123296184	0	0
	Promedio:	0.000187	0

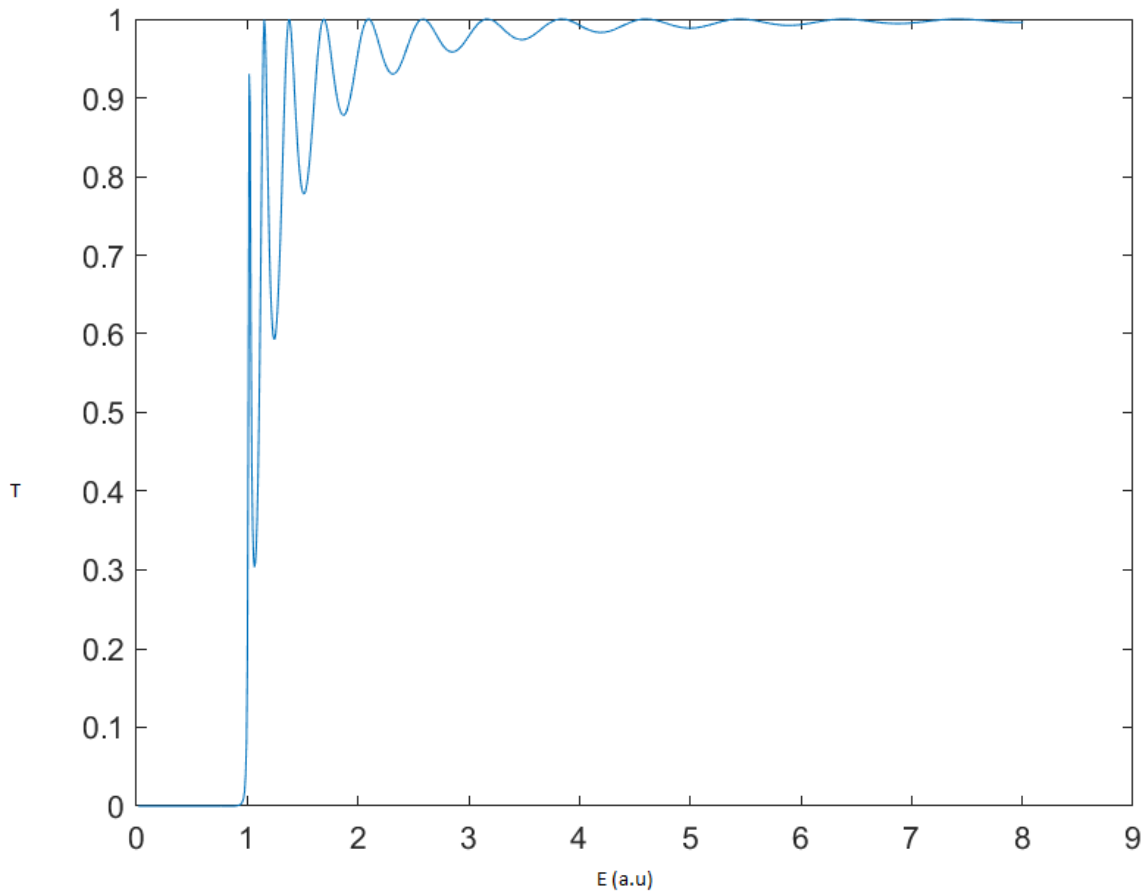


Figura 4.8: Gráfica de T del potencial de una barrera

4.6. Análisis del MMTM para el caso múltiples barreras

Ahora se realizará la comparación entre las dos soluciones de los algoritmos, para los datos resultantes de transmisividad del Sistema para Exponenciales y para el caso donde se trabajan con Senos y Cosenos.

En el siguiente ejemplo se muestra el sistema de 60 barreras que se define de la siguiente manera:

- 60 barreras de ancho de 2 a. u.
- Hay 30 barreras que tienen un potencial de 2 a. u.
- Y las otras 30 barreras tienen un potencial de 3 a. u.
- La masa es de 1 a. u.
- La distancia a la siguiente barrera es de 2 a. u.

donde se va obtener la transmisividad del sistema.

El esquema de 60 barreras se muestra en la siguiente figura:

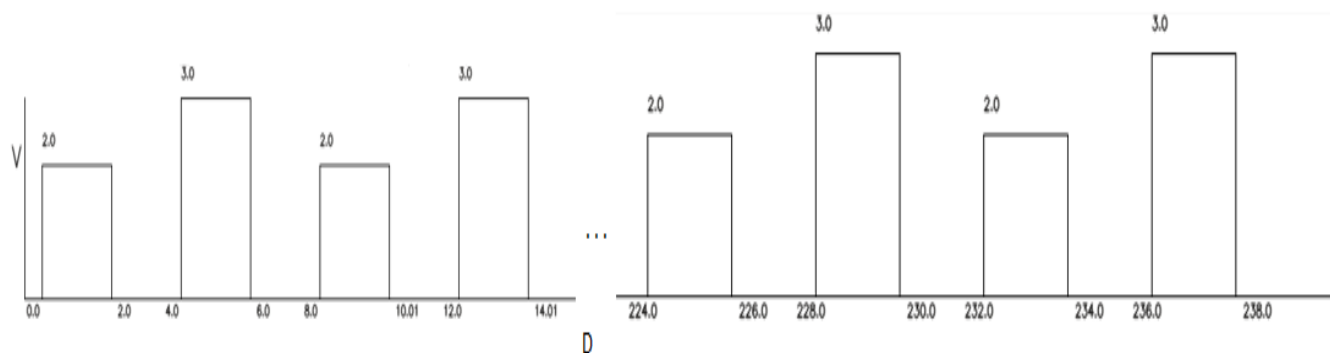


Figura 4.9: Potencial de 60 barreras análisis numérico

Se obtuvieron 12 valores aleatorios para la energía.

Energía	E.R MMT Exponenciales	T MMT Senos y Cosenos	Diferencias
0.56856856857	4.9122686716E-18	4.9122686716E-18	0
0.57657657658	2.1172389787E-31	2.1172389787E-31	0
0.58458458458	0.00066043517926	0.00066043517927	1.00000303177028E-14
0.59259259259	1.3545992826E-41	1.3545992826E-41	0
1.8258258258	1.0626951796E-63	1.0626951796E-63	0
1.8338338338	1.0755059328E-59	1.0755059328E-59	0
1.8418418418	2.8720038775E-55	2.8720038776E-55	9.99996907045045E-66
1.8498498498	2.7719708718E-50	2.7719708718E-50	0
2.1781781782	0.0018150398375	0.0018150398376	1.00000086336594E-13
2.1861861862	1.9028917967E-19	1.9028917967E-19	0

Como podemos notar, la diferencia entre los resultados de los sistemas está entre 1×10^{-13} y 1×10^{-14} esto nos dice que para algunos casos no existe gran diferencia entre uno y otro algoritmo dado que se manejan funciones diferentes como los senos y cosenos.

La gráfica de Transmisividad se muestra en la figura 4.9.

Datos a resaltar:

- Las ejecuciones del sistema fueron hechas en los sistemas Operativos Windows y Linux.
- El equipo que se utilizó fue una P.C Lenovo de Ghz con 8 Gb en RAM.
- La ejecución del sistema del MMT en exponenciales con Windows para 60 barreras duró 0.26 seg con 36 milisegundos.
- La ejecución del sistema del MMT en exponenciales con Linux para 60 barreras duró 0.24 seg.
- La ejecución del sistema del MMT para senos y cosenos con Windows para 60 barreras duró 0.23 seg. con 73 milisegundos.
- La ejecución del sistema del MMT para senos y cosenos con Linux para 60 barreras duró 0.20 seg.
- Las corridas en los diferentes sistemas operativos no cambiaron los valores de transmisividad siguieron siendo los mismos.

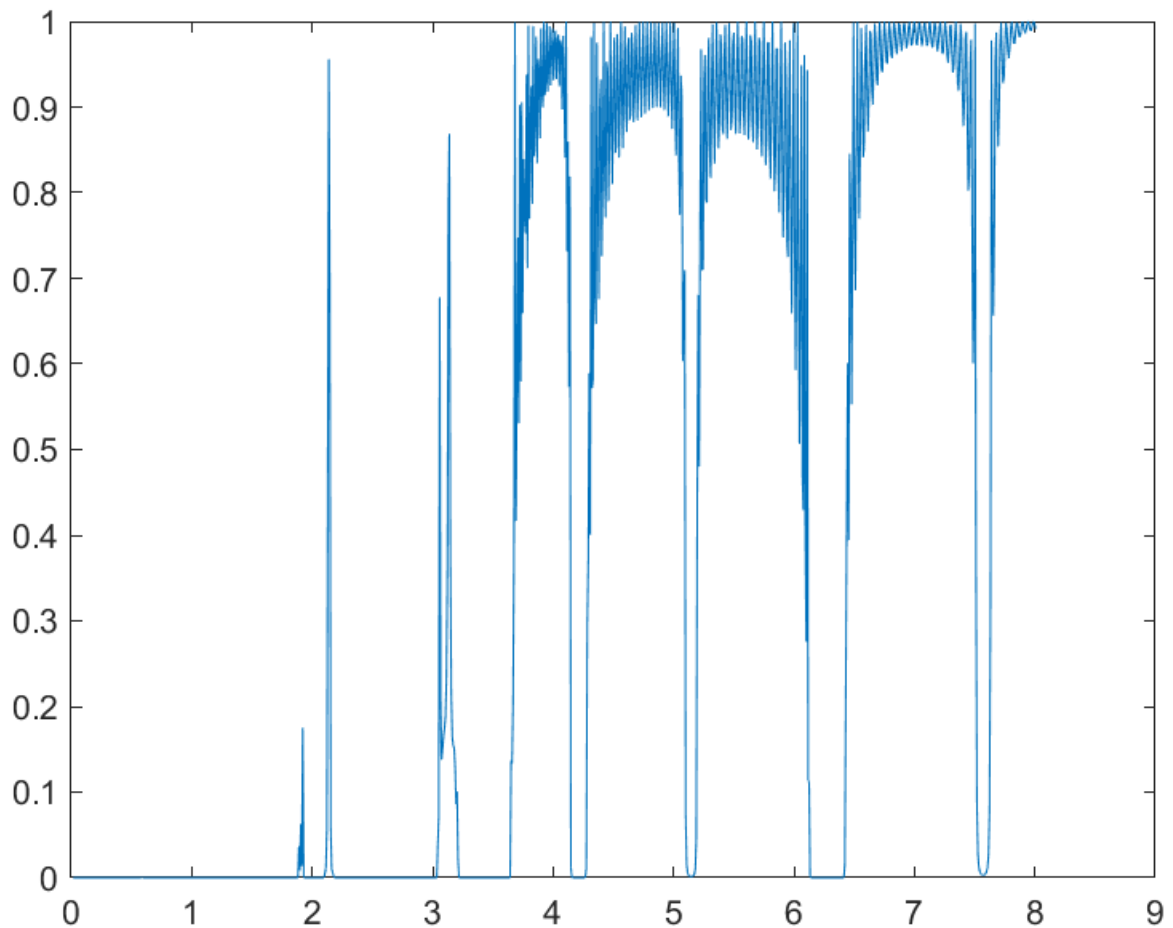


Figura 4.10: Gráfica de T del potencial de 60 barreras

Con estas anotaciones, podemos notar que el algoritmo que obtuvo mayor rapidez al ejecutar la MMT fue el que está en términos de senos y cosenos. Como se puede notar en Windows el que tiene mejor tiempo al correr el programa es el algoritmo con las soluciones en senos y cosenos esto pasa porque al reducir los cálculos que son implementados numéricamente, reduce los tiempos en el algoritmo por que ya no hace tantos como en el de exponenciales.

Después de realizar las pruebas y comprobar que se mejora el sistema al usar senos y cosenos para las soluciones elegimos este método para implementarlo en Matlab con las especificaciones antes vistas, en este se implementará la interfaz que modelamos con un fácil uso para que cualquier usuario sea capaz de utilizarla, también podremos tener el código fuente tanto en Linux como Windows.

En el siguiente capítulo se pondrán algunos ejemplos realizados en el trabajo anterior [Vargas, 2005] en los cuáles solo se graficaba para ciertos rangos porque de lo contrario las soluciones se volvían infinitas y esto provocaba que nos aparecieran errores de overflow en Delphi; de esta manera se mostrará la mejora que realiza este sistema al utilizar los senos y cosenos como soluciones.

Capítulo 5

Pruebas y Resultados

5.1. Introducción

En la mayoría de las tesis, las pruebas son una parte fundamental para demostrar los resultados obtenidos la transmisividad de un sistema multi-barreras para matrices mal balanceadas. Como base del sistema se utilizará el método de la *Matriz de Transferencia para matrices mal balanceadas* que se implementó en MATLAB al igual que la interfaz, y las gráficas especialmente la que representa el modelo multi-barrera se está programada en Python 3.0 está dará la facilidad al usuario de ingresar sus propios sistemas multi-barreras para realizar múltiples ejercicios.

Este software tiene múltiples funciones como guardar las gráficas generadas como imágenes, imprimir los datos del sistema, dibujar los esquemas de transmisividad, también contiene un manual para la ayuda del usuario, así mismo se puede guardar el archivo con los datos de la barrera para volverlas a ejecutar entre otras funciones. El software es compatible con varios sistemas operativos Linux y Windows.

Para generar las gráficas se llaman desde MATLAB con una sentencia que contiene (system) la cuál llama al programa como si fuera la terminal lo ejecuta y este genera una imagen que luego presentamos en la interfaz.

En este capítulo se realizarán las corridas de nuestro programa, donde algunos de nuestros ejemplos, se comparan con trabajos anteriores y se realizan las verificaciones correspondientes; se destaca en nuestro trabajo las modificaciones a las soluciones de la ecuación de Schrodinger para matrices mal balanceadas (vistas en el capítulo 2), éstas surten efecto positivo en nuestro programa a comparación de implementaciones anteriores sin estos cambios.

5.2. Realización de Pruebas

5.2.1. Prueba 1: T en una barrera

Hallar la transmisividad para el siguiente potencial de barrera, para partículas incidentes de masa $m = 1$ con un rango de energía de $[0.0, 4.0]$ con un número de partículas de 1000 puntos.

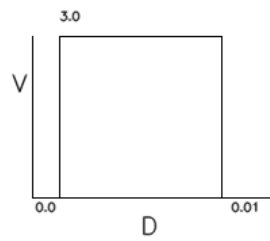


Figura 5.1: Gráfica del sistema Multi-barrera para una barrera

Ancho de la barrera	Potencial de la barrera
3	3

- Tenemos dos formas en que el usuario puede agregar datos la primera es que utilice la tabla y otra es que lo agregue desde un archivo de texto, desde la pestaña Archivo en la parte abrir como se muestra en la figura (5.1).

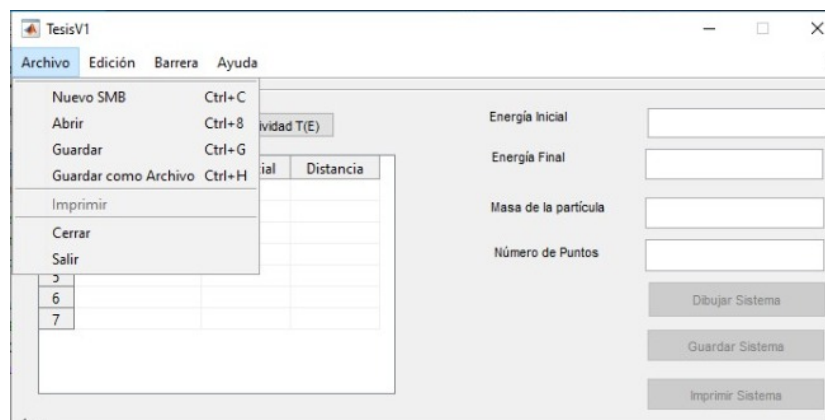


Figura 5.2: Captura de la entrada de datos en el sistema Multi-barrera

- En el caso de que se ingresen los datos por la tabla al oprimir el botón de transmisividad los renglones vacíos de la tabla se eliminan automáticamente como se muestra en la figura (5.2) y se activan los botones de esté.

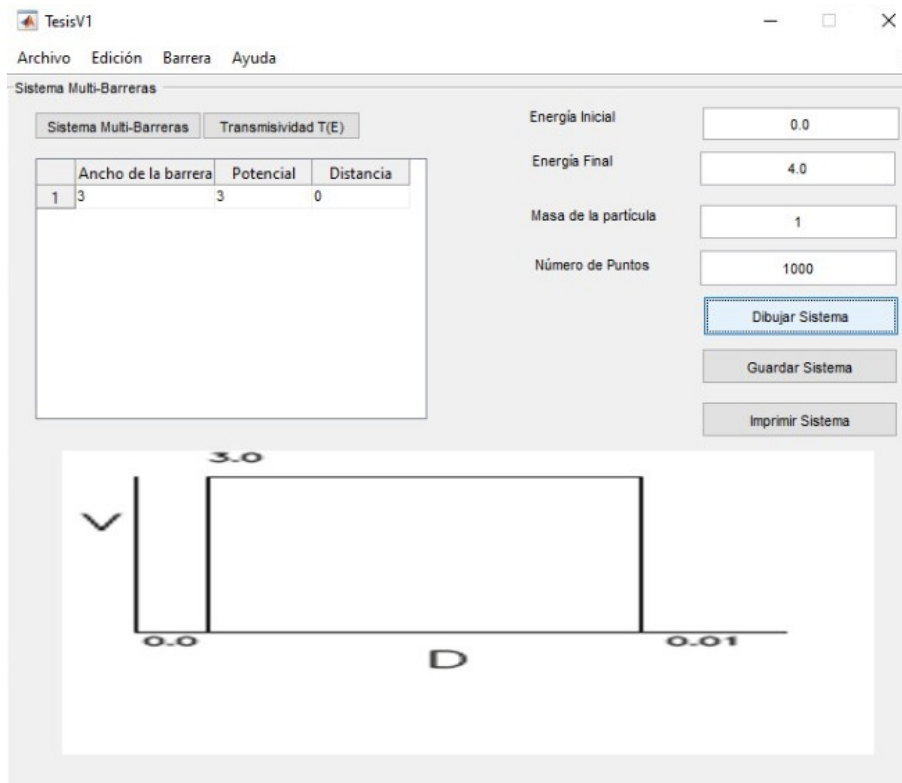


Figura 5.3: Cuando un usuario presiona el botón de Transmisividad

Al obtener la gráfica de transmisividad Fig(5.4) en la ventana del sistema vista en la fig. (5.5) al recorrer los 1000 puntos de energía este es el resultado de la transmisividad con sus respectivas energías; las X son las energías y las Y es la transmisividad. Como podemos notar para este caso la T va creciendo conforme la energía avanza. Observamos que la transmisividad empieza a crecer desde $E = 2.5$ a.u con una $T = 0.002$, en $E = 3.6$ a.u alcanza su valor máximo de $T = 1$, después comienza a decrecer y en $E = 4.0$ a.u. tiene un valor de $T=0.6999$.

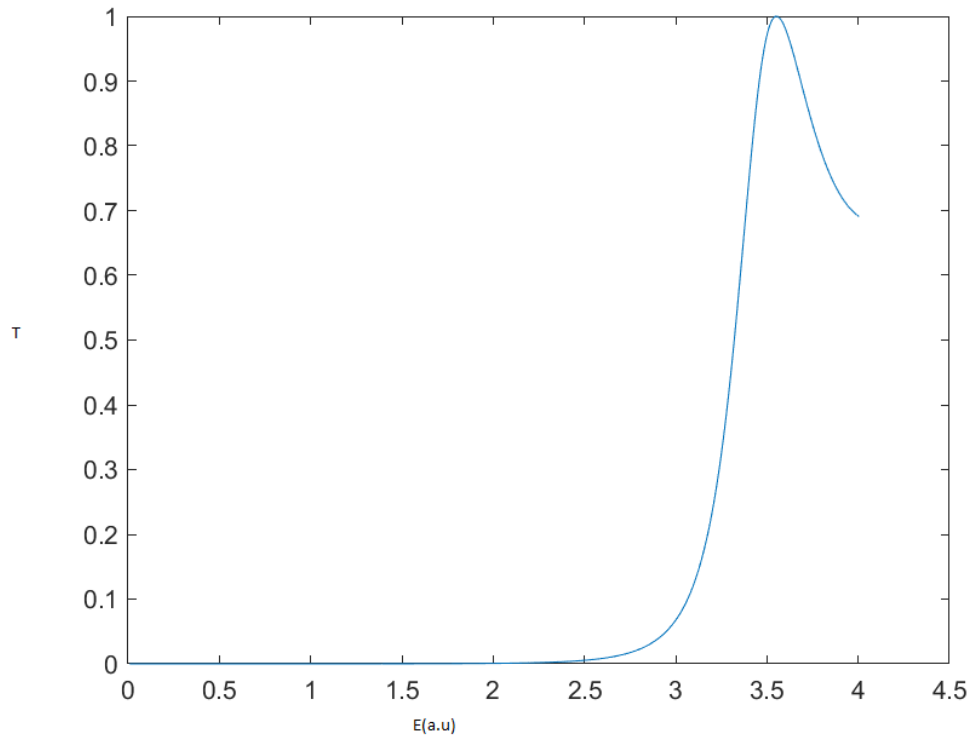


Figura 5.4: Gráfica de transmisividad Prueba 1

- Después de presionar el botón de transmisividad nos abre una nueva ventana que muestran las gráficas de transmisividad y reflexividad dependiendo de que botón se oprima como se ve en las figuras 5.5 y 5.6.

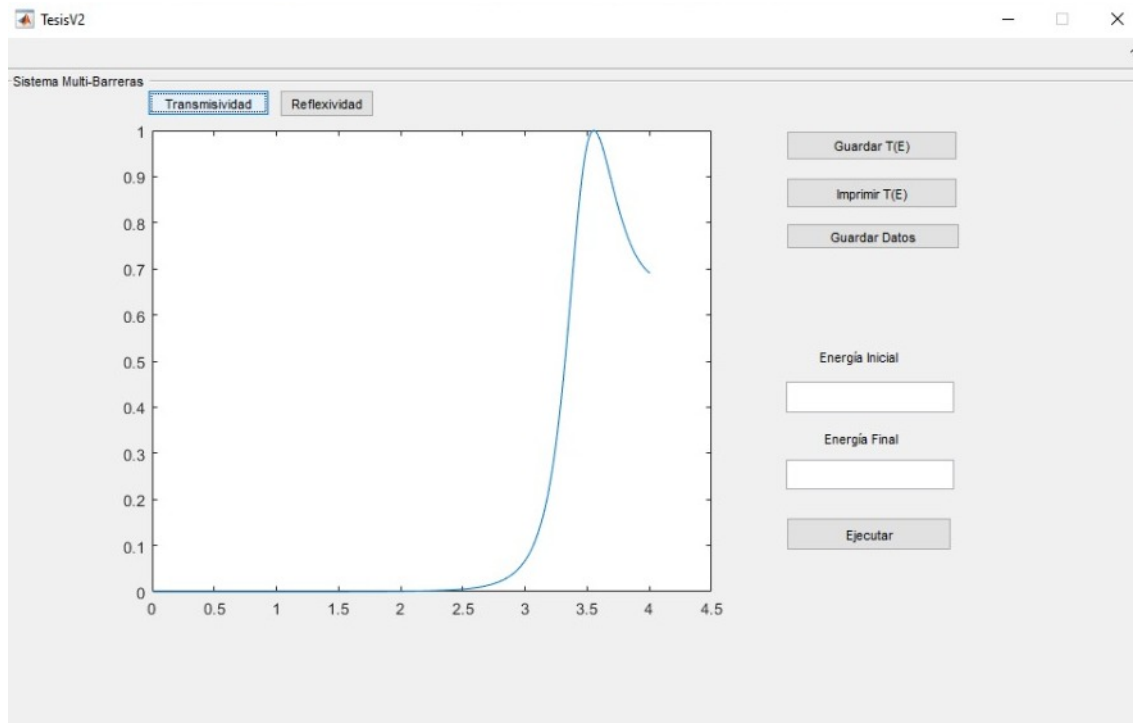


Figura 5.5: Ventana de Gráficas de Transmisividad y Reflexividad (transmisividad) P1

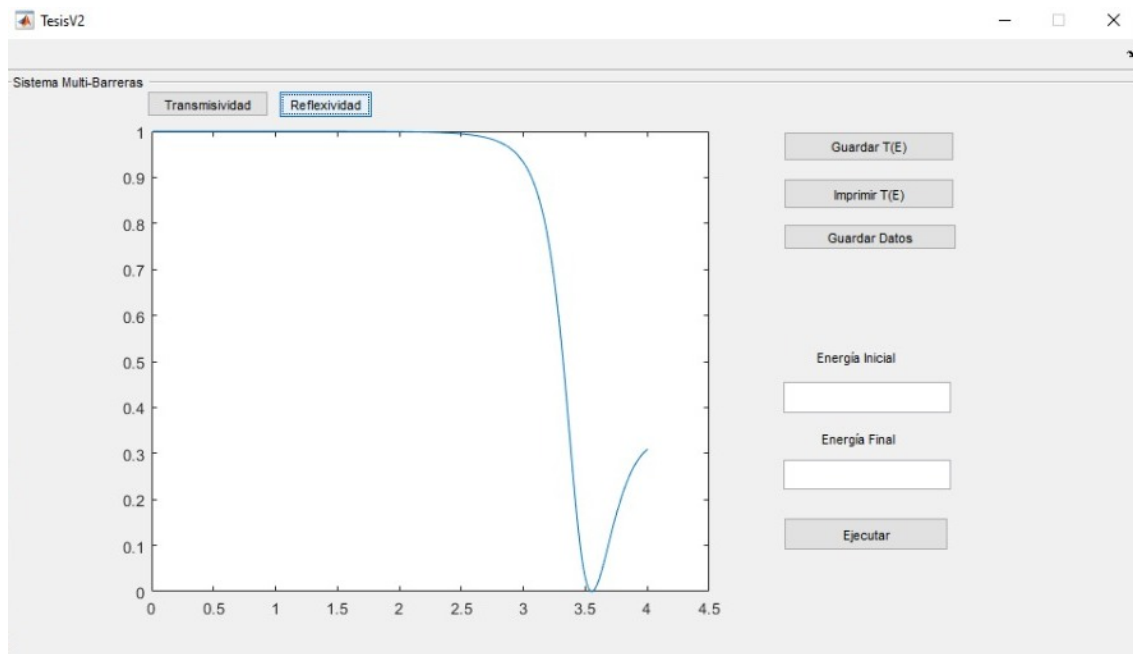


Figura 5.6: Ventana de Gráficas de Transmisividad y Reflexividad (reflexividad) P1

5.2.2. Prueba 2: T en dos barreras iguales

Hallaremos la transmisividad para el siguiente modelo de barreras, para partículas incidentes de masa $m = 1$ con un rango de energía de $[0.0, 3.5]$ y un número de partículas de 1000 puntos.

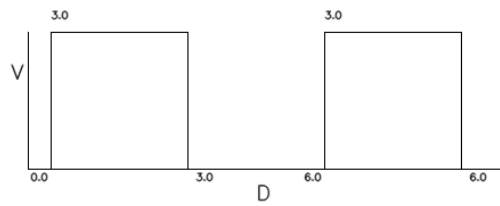


Figura 5.7: Gráfica de dos barreras iguales Prueba 2

Ancho de la barrera	Potencial de la barrera	Distancia
3	3	3
3	3	0

Después de mandar los datos de entrada del sistema para obtener la transmisividad, obtenemos la siguiente figura:

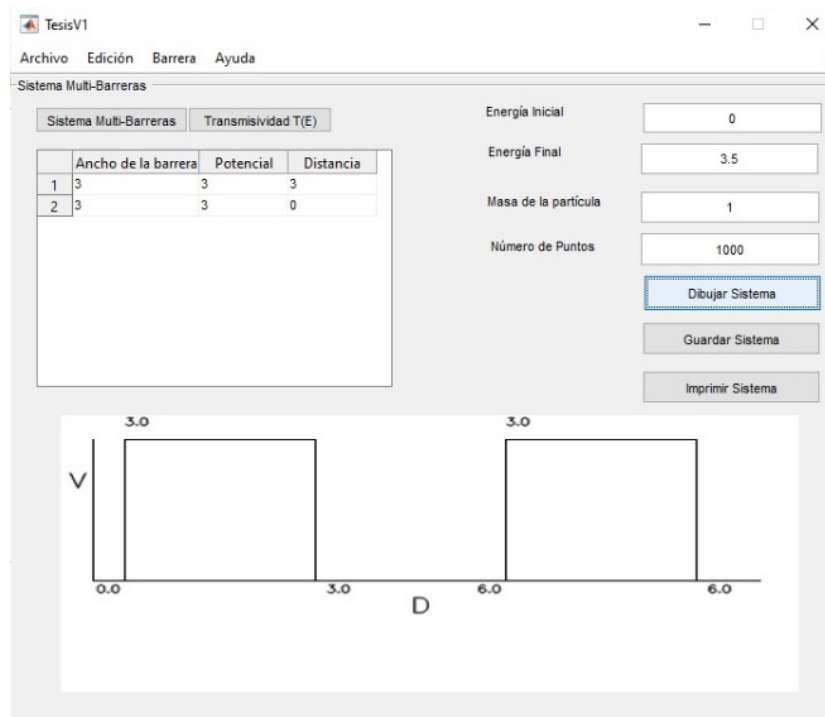


Figura 5.8: Gráfica de dos barreras iguales Prueba 2

En el siguiente paso se obtienen las gráficas de transmisividad y reflexividad.

Cuando obtenemos la T para el modelo de la Fig. (5.7) en la figura (5.9) podemos notar que los valores de energía empiezan a crecer desde $E = 2.7$ a.u. y con una $T = 0.001$ va creciendo en $E = 2.8$ a.u. y llega a una $T = 0.8777$ y en el último punto cuando $E = 3.5$ a.u. alcanza su valor máximo con $T = 1$. En la Fig.(5.10) se encuentra la gráfica de reflexividad para el modelo de dos barreras iguales.

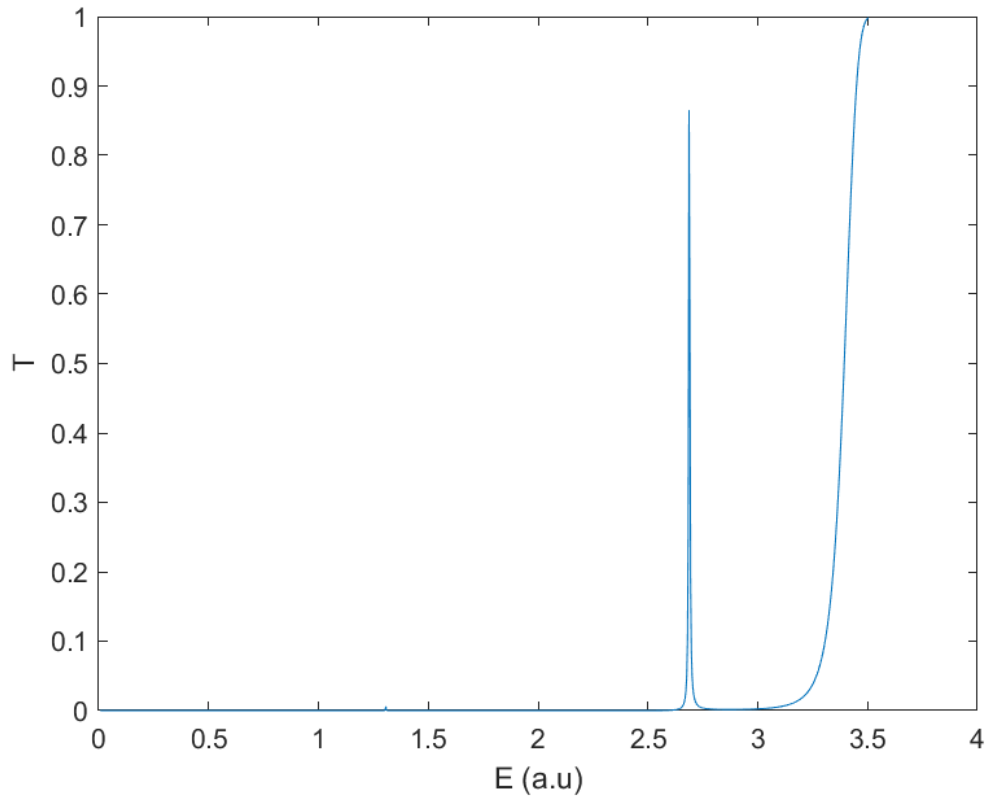


Figura 5.9: Gráfica de T para dos barreras iguales Prueba 2

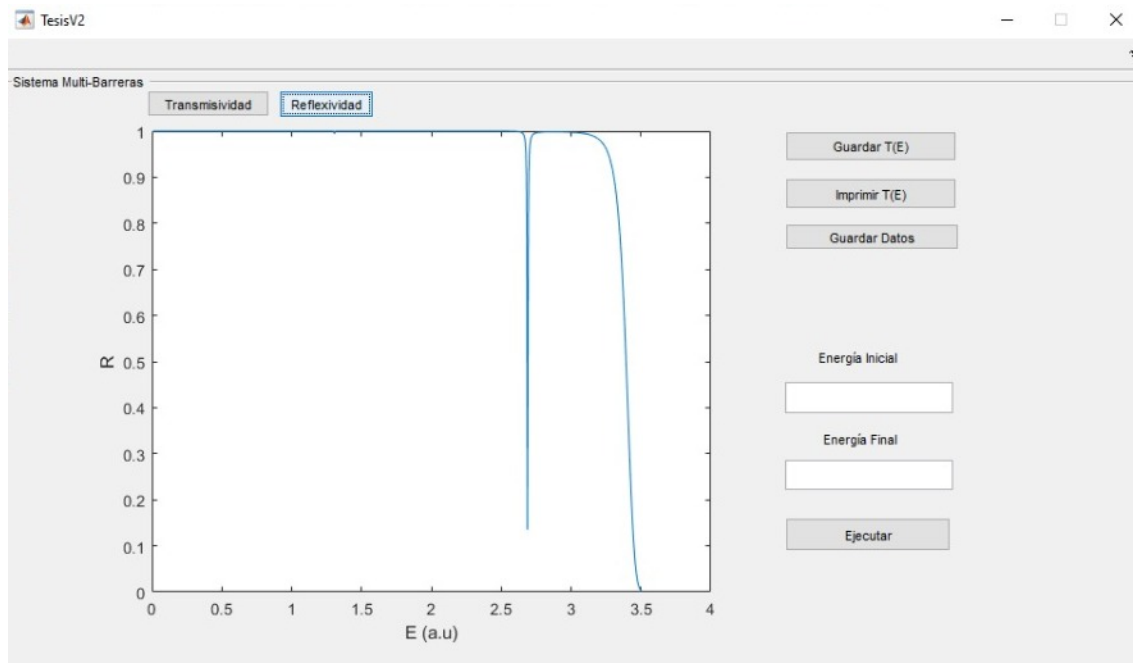


Figura 5.10: Gráfica de Reflectividad para dos barreras iguales Prueba 2

5.2.3. Prueba 3: T en dos barreras diferentes

Hallamos la transmisividad para el siguiente modelo de barreras, para partículas incidentes de masa $m = 1$ con un rango de energía de $[0.0, 4.5]$ y un número de partículas de 1000 puntos.

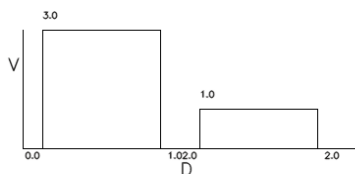


Figura 5.11: Gráfica de dos barreras iguales Prueba 2

Ancho de la barrera	Potencial de la barrera	Distancia
3	3	1
3	1	0

Volvemos a agregar los datos de la barrera en la tabla, y graficamos la tabla.

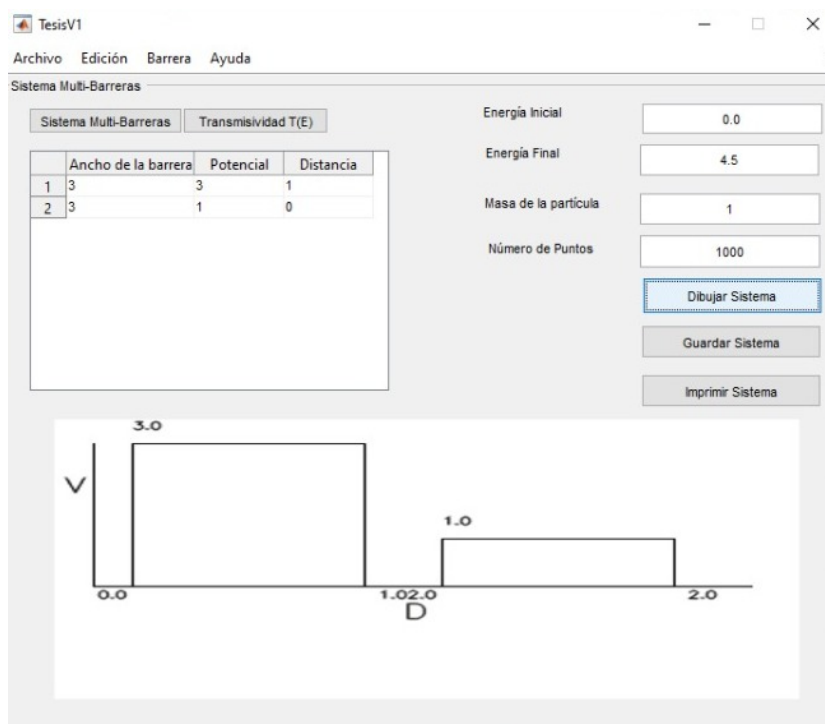


Figura 5.12: Gráfica de dos barreras diferentes Prueba 3

En el siguiente paso se obtienen las gráficas de transmisividad y reflexividad. Al obtener la T para el modelo de la Fig. (5.11) en la figura (5.13) podemos notar que los valores de energía se empiezan a incrementar desde $E = 2.5$ a.u. y con una $T = 0.002$ continúa creciendo en $E = 3$ a.u. y llega a una $T = 0.1$ hasta que en $E = 3.7$ a.u. alcanza su valor máximo con $T = 1$ vuelve a bajar la $E = 4$ a.u. con $T = 0.7$ y sube nuevamente en $E = 4.5$ a.u. para $T = 0.880$. En la Fig.(5.14) se muestra la gráfica de reflectividad para dos barreras diferentes.

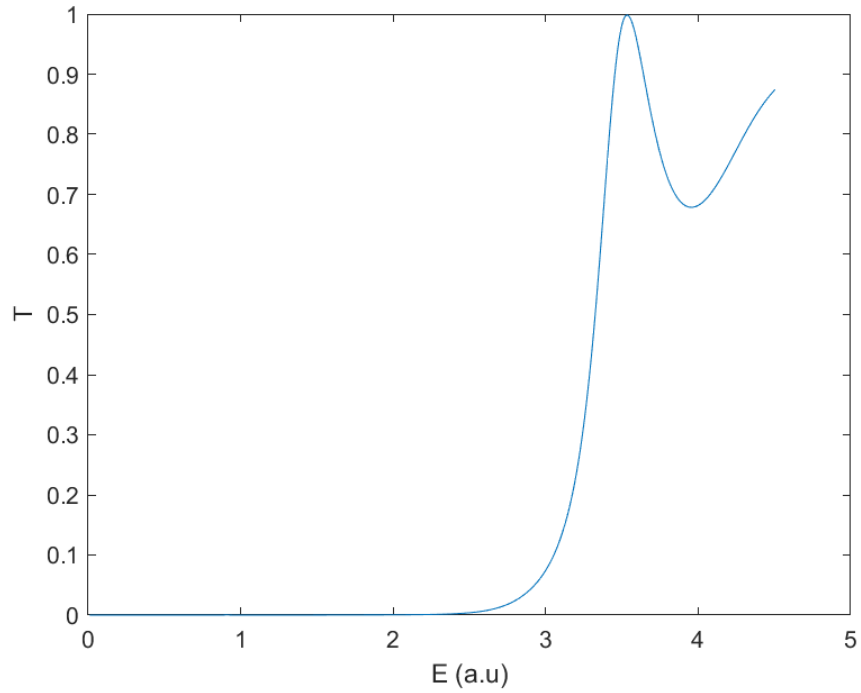


Figura 5.13: Gráfica de T para dos barreras iguales Prueba 2

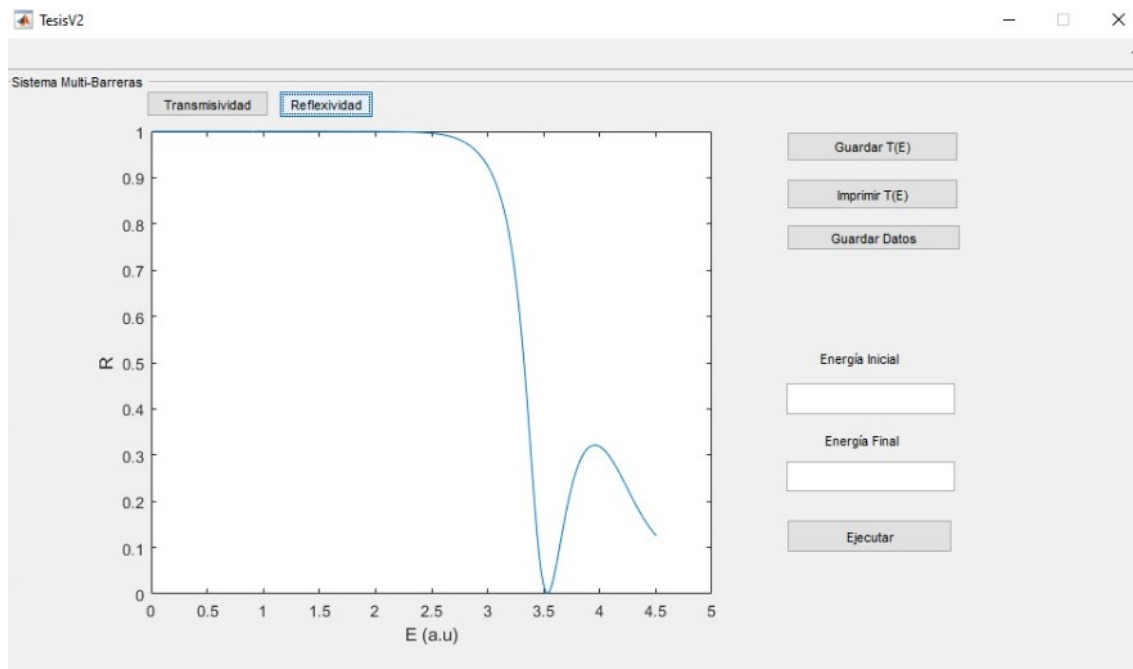


Figura 5.14: Gráfica de Reflectividad para dos barreras diferentes Prueba 3

5.2.4. Prueba 4: Intercambiamos las barreras de la prueba 3 hallamos T

En esta prueba intercambiamos de lugar las barreras de la prueba anterior, es decir, hallamos la transmisividad para el siguiente modelo de barreras, para partículas incidentes de masa $m=1$ con un rango de energía de $[0.0, 4.5]$ con el mismo número de partículas.

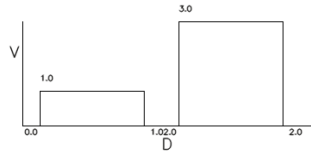


Figura 5.15: Gráfica de intercambio de barreras de la prueba 3

Ancho de la barrera	Potencial de la barrera	Distancia
3	1	1
3	3	0

Agregamos los datos en el sistema y dibujamos la barrera.

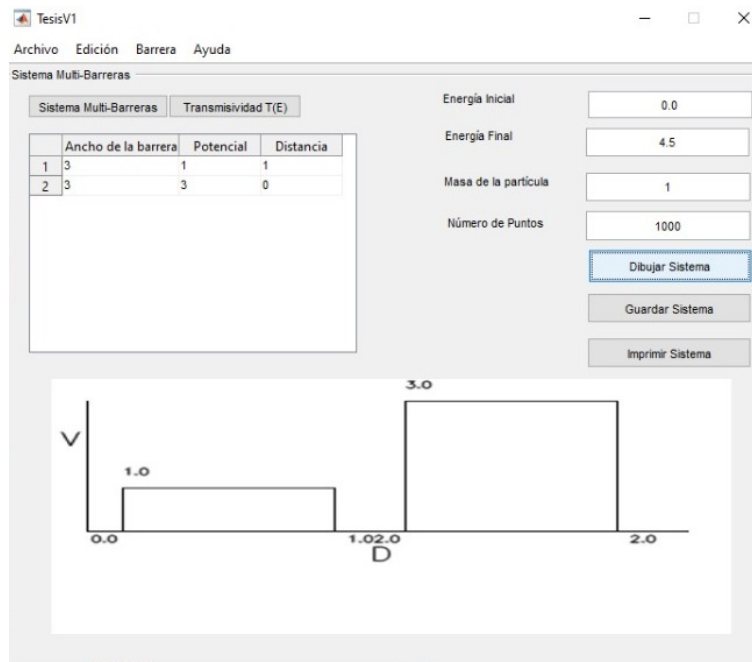


Figura 5.16: Entrada de datos de dos barreras diferentes intercambiadas de la prueba 3

Al intercambiar los potenciales de las barreras de lugar, obtenemos la misma gráfica de T, ver Fig. 5.17, de la prueba 3 figura(5.14), por lo que se concluye que si solo cambiamos las barreras, pero las energías, la masa y el número de partículas permanecen iguales la T no cambiará.

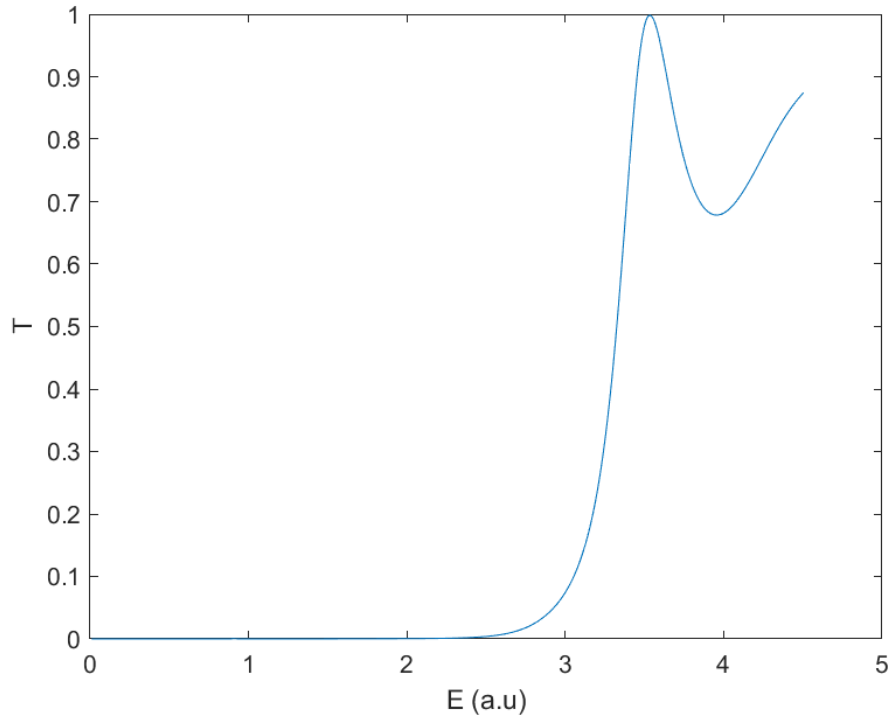


Figura 5.17: Gráfica de T de la prueba 4 es la misma que la prueba 3

Esto nos quiere decir que el sistema Multi-barrera sigue funcionando igual bajo las mismas condiciones a pesar de que las soluciones de las matrices sean diferentes, ya que solo estamos sustituyendo en la ecuación al mismo tiempo que disminuimos los cálculos realizados por el ordenador.

5.2.5. Prueba 5: T en 20 barreras

Hallar la transmisividad para el siguiente modelo de 20 barreras, para partículas incidentes masa $m=1$ con un rango de energía de $[0.0,3.0]$ y un número de partículas de 1000 puntos.

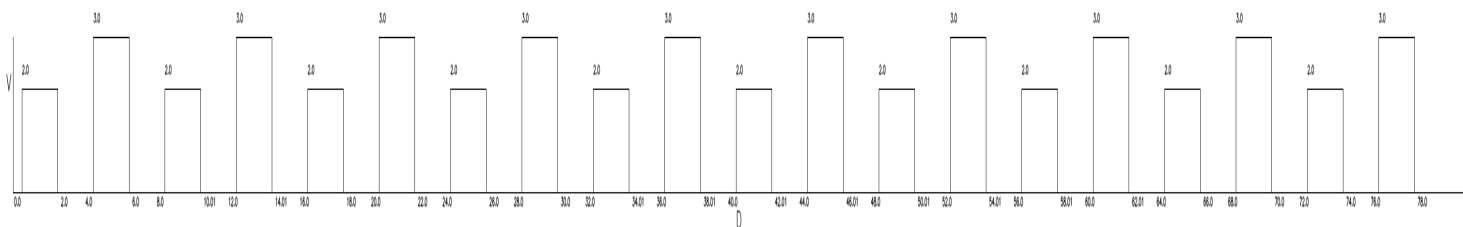


Figura 5.18: Potencial de 20 barreras

Ancho de la barrera	Potencial de la barrera	Distancia
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	2
2	2	2
2	3	0

Este ejemplo fue analizando en la sección anterior solo que para 60 barreras y con un mayor rango de energía de $[0.0,8.0]$. Así mismo esta prueba también se realizó en el trabajo anterior [Vargas, 2005] en donde sólo se graficó para el intervalo de energía de $[1.83,2.25]$ porque al graficar el intervalo completo presentaba errores de overflow ya que se volvían a infinitos.

Se obtienen las gráficas de transmisividad y reflectividad para esta prueba.

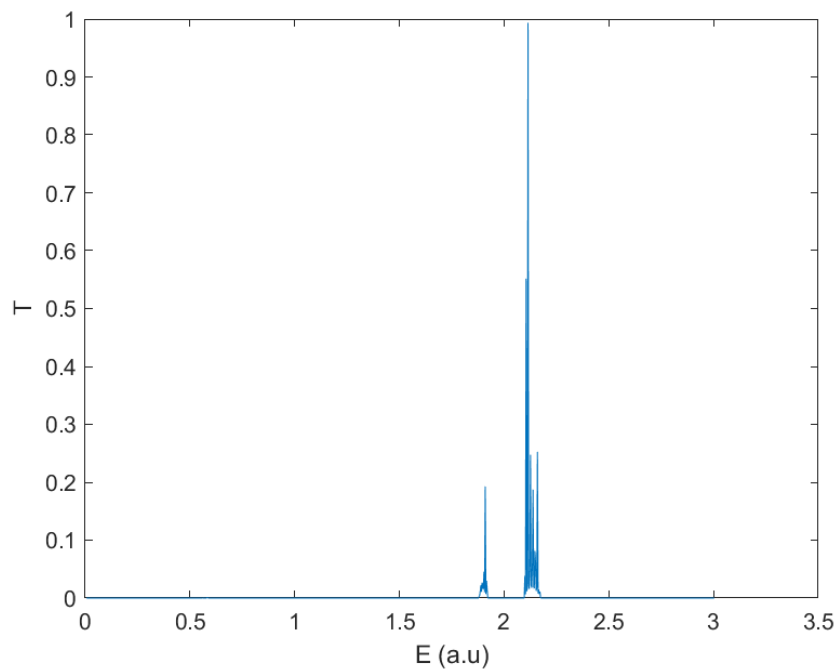


Figura 5.19: Gráfica de T prueba 5

Por lo que podemos ver aunque no cambia la gráfica de T Fig. (5.19) si se gráfica para los intervalos de $[0.0, 3.0]$; donde empieza a incrementar en $E = 1.8$ a.u. donde $T = 0.002$, al seguir creciendo en $E = 1.899$ a.u. con $T = 0.2$. El valor máximo está en $E = 2.20$ a.u. con $T = 0.9999$, en seguida T baja, a $T = 0.25$ para $E = [2.21, 2.22, 2.23]$ con $T = 0.25$ y desciende hasta $T = 0$ en los intervalos de $E = [1.7999, 2.25]$. Esto nos lleva a la conclusión de que el cambiar las soluciones a senos y cosenos nos ayudó a que se pudieran realizar los cálculos que nos mandaban a infinitos, ya que al no obtener errores, se puede graficar el rango completo visto en la figura(5.20) e incluso se puede ampliar el rango como en el análisis numérico del potencial de 60 barreras figura(4.10).

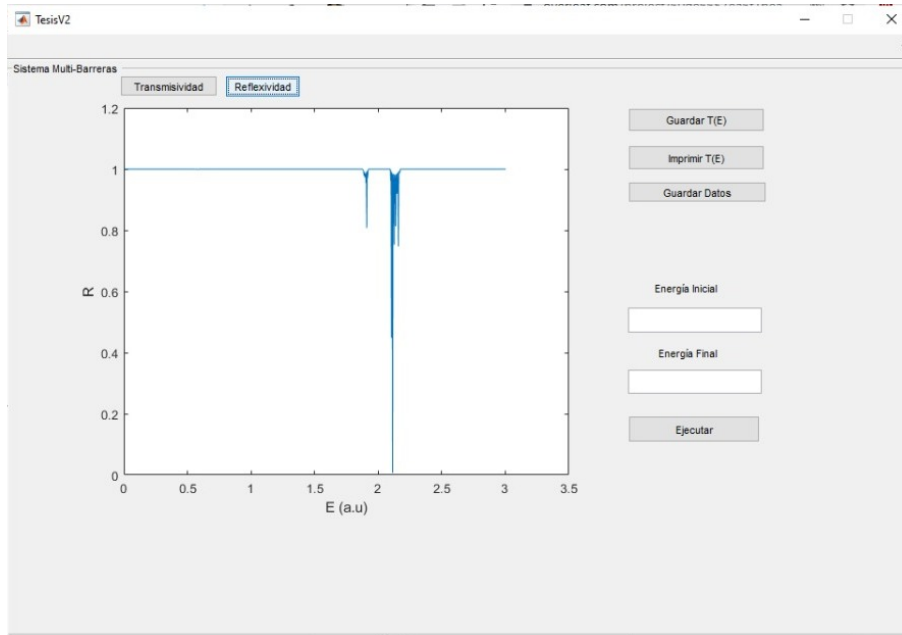


Figura 5.20: Gráfica de R prueba 5

5.2.6. Prueba 6: Sistema multi-barreras en forma de campana de Gauss

Hallaremos la transmisividad para el siguiente modelo en forma de campana de Gauss con 11 barreras, para partículas incidentes de masa $m = 1$ con un rango de energía de $[0.0, 4.0]$.

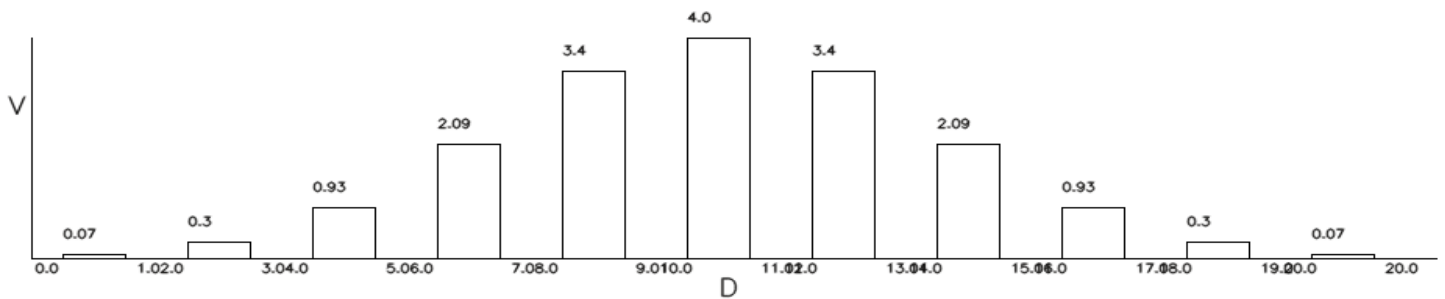


Figura 5.21: Potencial de barreras prueba 6

Los datos generados por el sistema Multi-barreras (mediante una función Gaussiana) son:

Ancho de la barrera	Potencial de la barrera	Distancia
1	0.0675195365951596	1
1	0.2934786054735320	1
1	0.9202651959752360	1
1	2.0818004840828100	1
1	3.3974632662732500	1
1	4.0	1
1	3.3974632662732500	1
1	2.0818004840828100	1
1	0.9202651959752360	1
1	0.2934786054735320	1
1	0.0675195365951596	0

Generamos desde la función gaussiana para 11 barreras los siguientes datos.

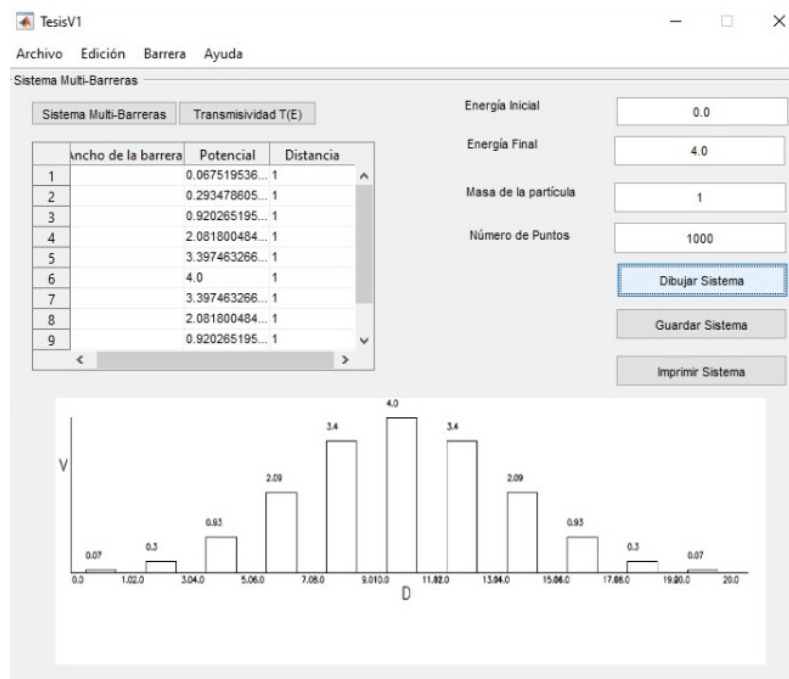


Figura 5.22: Entrada de datos prueba 6

Obtenemos las gráficas de transmisividad y reflectividad. Este ejemplo igual se realizaba en el trabajo anterior [Vargas, 2005] pero T se podía calcular para el intervalo de $E = [1, 2]$ dado que por lo general T era igual a cero, pero en el sistema con exponenciales no permitía hacer la gráfica completa. Al observar la figura (5.23) notamos que existen 3 picos, donde el valor de el primer pico de energía empieza en $E = 1.25$ con $T = 0.48$, en el segundo pico llegamos al valor máximo de T con $E = 1.5$ donde $T = 0.999$ y el tercer pico corresponde a $E = 1.75$ con $T = 0.97$. El valor de T se mantiene hasta llegar a $E = 4$, donde aumenta a $T = 0.15$. En este caso a pesar de que la diferencia de intervalos si es importante puesto que cuando $E = 4$ la transmisividad va en aumento, por lo cual se hizo una gran mejora. La gráfica fig.(5.24) nos muestra la reflectividad del modelo de una función gaussiana para 11 barreras.

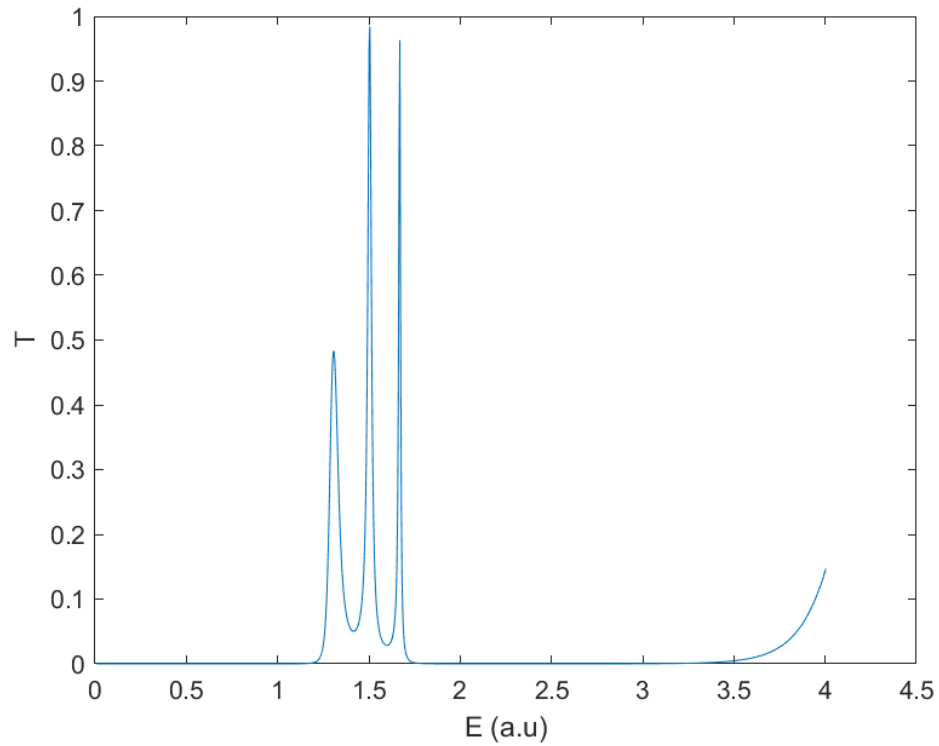


Figura 5.23: Gráfica de T prueba 6

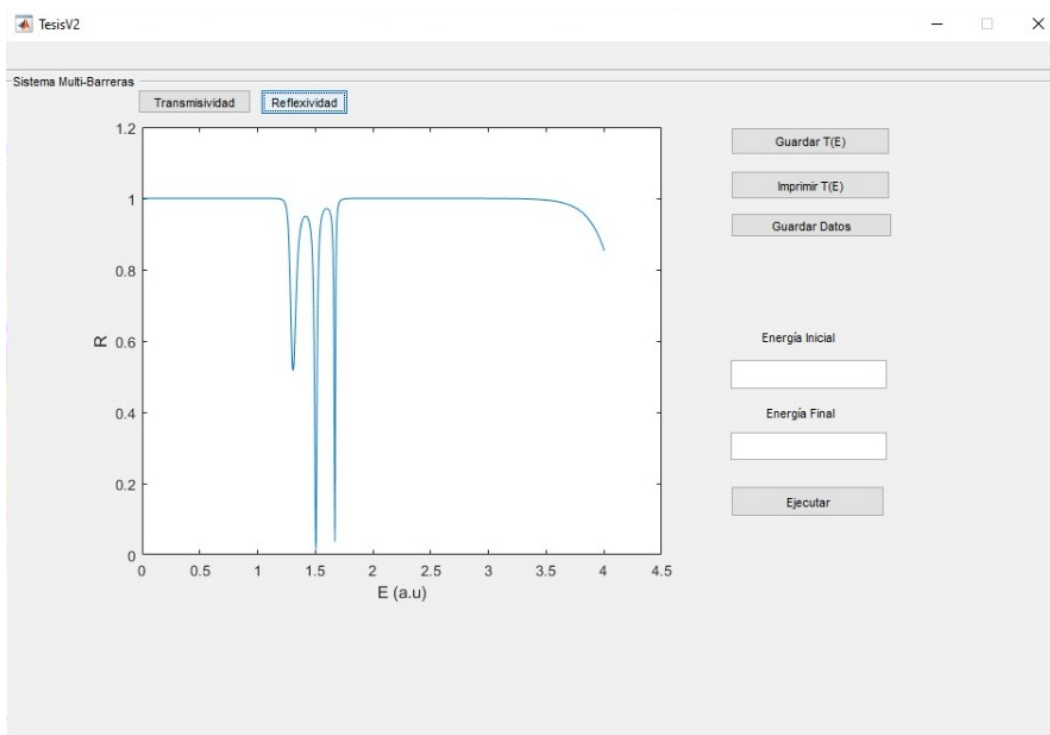


Figura 5.24: Gráfica de Reflectividad de la prueba 6

5.2.7. Prueba 7: Sistema multibarreras en forma de parábola

Hallar la transmisividad para el siguiente modelo en forma de arco parabólico con 11 barreras, para partículas incidentes de masa $m = 1$ con un rango de energía de $[0.0, 4.0]$ y un número de partículas de 1000 puntos.

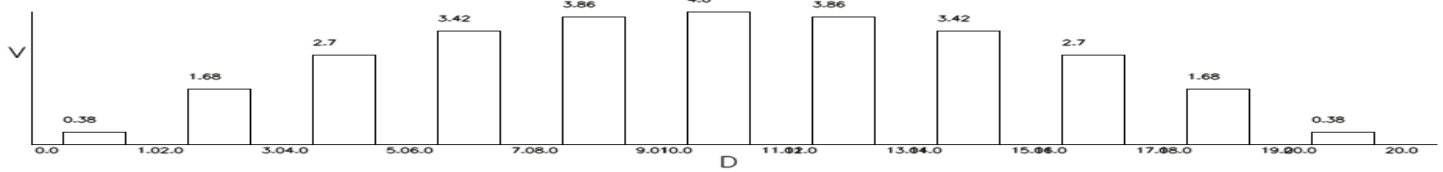


Figura 5.25: Potencial de barreras prueba 6

Ancho de la barrera	Potencial de la barrera	Distancia
1	0.37188208616780	1
1	1.67800453514739	1
1	2.69387755102041	1
1	3.41950113378685	1
1	3.85487528344671	1
1	4.0	1
1	3.85487528344671	1
1	3.41950113378685	1
1	2.69387755102041	1
1	1.67800453514739	1
1	0.37188208616780	0

Agregamos al sistema, los datos de tabla anterior y dibujamos las barreras.

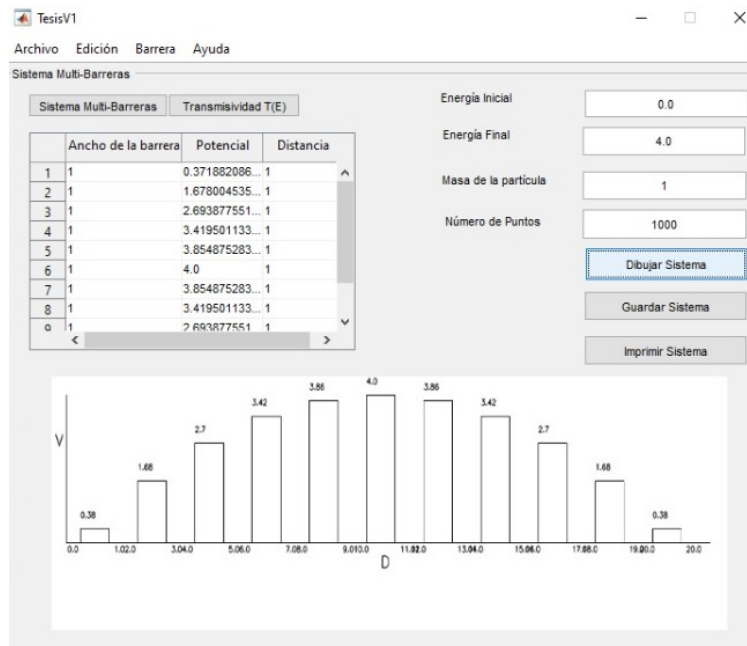


Figura 5.26: Gráfica de barrera prueba 7

En el siguiente paso se obtienen las gráficas de transmisividad y reflexividad, ver Figs. 5.27 y 5.28.

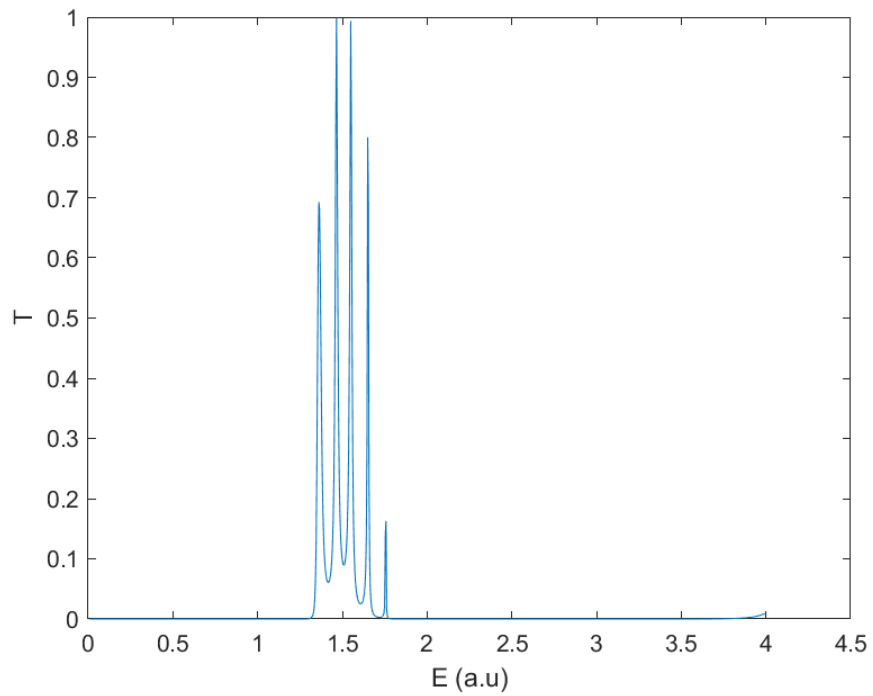


Figura 5.27: Gráfica de T prueba 7

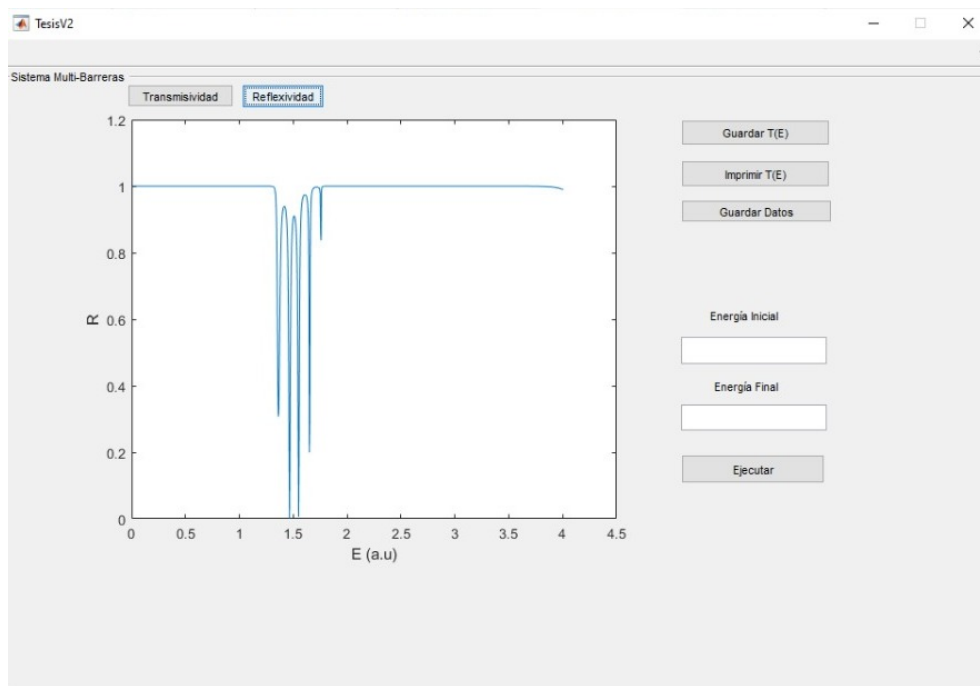


Figura 5.28: Gráfica de reflexividad prueba 7

La prueba 7 igual fue realizada en el trabajo anterior [Vargas, 2005] pero en este caso solo graficaba la T para los intervalos de $E = [1, 2]$ dado que en $E = [0, 1]$ y $E = [2, 3.8]$ la transmisividad es cero. Al observar la figura(5.27) notamos que existen 5 picos, donde el valor de el primer pico de energía empieza en $E = 1.38$ con $T=0.68$, en el segundo pico llegamos al valor máximo de T con $E = 1.49$ donde $T = 1$, el tercer pico es en $E = 1.6$ con $T = 0.98$, el cuarto pico está en $E = 1.65$ con $T = 0.78$ y el último pico está en $E = 1.75$ con $T = 0.198$. Después de este pico la T se mantiene en 0 hasta que llega a la $E = 4$ con $T = 0.004$ y va en aumento. Aunque no hay muchos cambios al tener completo el intervalo podemos observar mejor el comportamiento de la T conforme a las energías. En conclusión, se realizaron varias pruebas con 7 ejemplos de todo tipo, donde se obtuvieron los valores de T . Los errores de overflow que se presentaron en el trabajo anterior por ser demasiado grande se redujeron al utilizar senos y cosenos y minimizando el número de operaciones que realizaba el ordenador.

Capítulo 6

Conclusiones

- Se obtuvieron las nuevas expresiones para las soluciones en términos de senos y cosenos para la ecuación de Schrodinger, para el sistema multi-barreras para matrices mal balanceadas en el método de la Matriz de Transferencia.
- Se redefinió el algoritmo del método de la Matriz de transferencia cambiando las soluciones centrales para la Matriz de Transferencia para hallar la transmisividad T .
- Se analizó el método numérico en el cuál ocupamos la fórmula de Euler y las identidades trigonométricas para la Matriz de Transferencia.
- Se realizó un análisis para el algoritmo de la MMT en el cuál obtuvimos las unidades de tiempo para cada instrucción de cada función en el cuál se determinó el orden del algoritmo.
- Se creó un software en MATLAB para senos y cosenos que modela cualquier sistema multi-barreras, en el cuál encontramos la transmisividad y reflexividad de éste, en el cuál el usuario puede ingresar los datos desde un archivo, una tabla o una función gaussiana o cuadrática.
- Los lenguajes de programación que se utilizaron fueron MATLAB y Python específicamente python fue para la graficación y MATLAB para el cálculo numérico; así como también el software es compatible para Windows y Linux.
- Por último este software mejora a su antecesor por el hecho de combinar los cálculos del ordenador con los realizados analíticamente para minimizar los errores de overflow, disminuyendo los cálculos y mejorando los resultados del sistema.

Apéndice A

Identidades Trigonométricas

A.1. Identidades par e impar

- Funciones Pares

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sec(-x) = \sec(x)$$

- Funciones Impares

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\csc(-x) = -\csc(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

A.2. Identidades de producto a suma

La primera identidad tiene dos ángulos A y B. Cuando se multiplica el seno de un ángulo por el coseno del otro ángulo es igual a:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

Segunda identidad. Se multiplican los senos de los dos ángulos junto y el resultado es:

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

Tercera identidad. Se utilizan dos ángulos diferentes y dos funciones diferentes.

$$\cos(A)\sin(B) = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

Última identidad de producto a suma utiliza los cosenos de dos ángulos:

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

A.3. Identidades Pitagóricas

Las identidades trigonométricas son especialmente útiles para simplificar expresiones trigonométricas.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Basada en la identidad pitagórica podemos encontrar dos identidades Pitagóricas adicionales:

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

A.4. Fórmula de Euler

$$e^{+ix} = \cos(x) + i * \operatorname{sen}(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i * \operatorname{sen}(x)$$

Apéndice B

Manual de Usuario del Sistema MMT

B.1. Requerimientos

Para que el sistema multi-barreras tenga un buen funcionamiento, necesitamos que el ordenador con el que se trabaja tenga estas características:

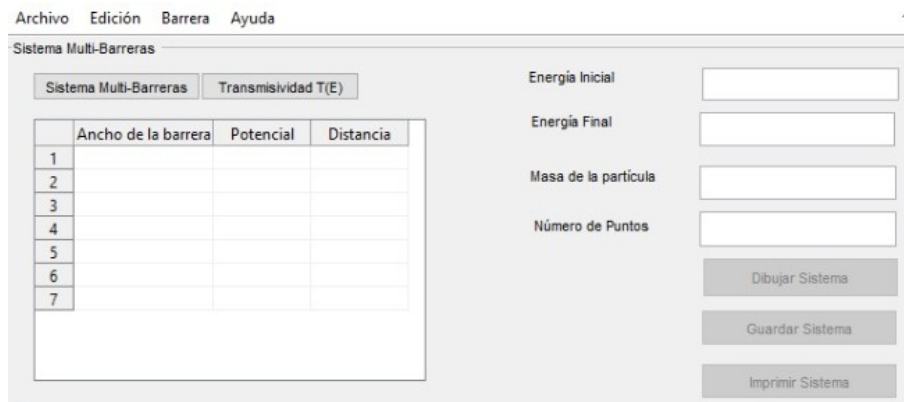
- Sistema Operativo Linux Distribución: Fedora o Windows 10
- MATLAB
- Memoria RAM 8GB
- Python 3

Se necesitan estas características para que se puedan realizar los cálculos y las gráficas; así poder evitar que el sistema se vuelva lento o que se puedan generar errores de MATLAB por saturarse mucho.

B.2. Área de Trabajo

El área de trabajo está conformada por una tabla para las barreras que contiene el ancho de la barrera, el potencial de la barrera y la distancia de una barrera a otra; en esta sección se pueden ingresar las barreras. Con 3 botones uno para dibujar, otro para guardar y un tercero para imprimir el sistema. También contiene una gráfica en la cual se muestra el sistema.

Después de tener los datos de la barrera podemos agregar el intervalo de las energías: la inicial y la final, masa y el número de partículas.



B.3. Menú Archivo

En el menú de archivo se encuentran estas funciones:

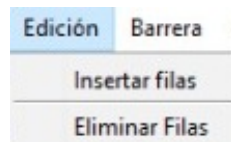
- **Nuevo SMB.** El cuál genera un nuevo lienzo para el sistema Multi-barrera.
- **Abrir.** Esté nos permite elegir un archivo de texto el cuál carga a la tabla los valores de las barreras y las energías, masa y el número de partículas.
- **Guardar.** Guarda el sistema de barreras con un nombre por default.
- **Guardar como.** Guarda el sistema de barreras con el nombre que elijamos.
- **Imprimir.** Se imprime el sistema completo con los datos de la barrera y la gráfica.
- **Cerrar.** Cierra la ventana actual del sistema.
- **Salir.** Cierra todas las ventanas del sistema.



B.4. Menú Edición

En el menú de edición se encuentran estas funciones:

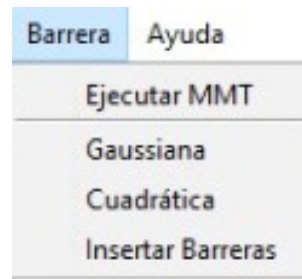
- **Insertar filas.** Agrega más filas a la tabla ingresando el número de filas que quiere.
- **Eliminar filas.** Elimina el número de filas que se ingrese en la ventana desplegable.



B.5. Menú Barrera

En el menú de barrera se encuentran estas funciones:

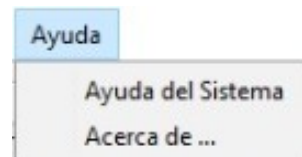
- **Ejecutar MMT.** Ejecuta el sistema multi-barrera para la transmisividad y reflectividad.
- **Gaussiana** genera los datos para una función gaussiana.
- **Cuadrática** genera los datos para una función cuadrática.
- **Insertar barreras.** Inserta una barrera completa para el sistema.



B.6. Menú Ayuda

En el menú de ayuda se encuentran estas funciones:

- **Ayuda del sistema.** En esta opción nos lleva un manual del sistema en que encontramos todas las especificaciones y que realiza cada función.
- **Acerca de...** En esta opción nos abre una ventana que nos muestra la versión del sistema.



Apéndice C

Código fuente para hallar la transmisividad para una barrera

```
fprintf("Transmisividad de un potencial de barrera");
fprintf("Los datos de entrada son en u.a");
Ancho=input("Dame el ancho de barrera: ");
Potencial=input("Dame el potencial de la barrera: ");
Masa=input("Dame la masa: ");
Einicial=input("Dame la energia inicial: ");
Efinal=input("Dame la energia final: ");
Nparticulas=input("Dame el numero de particulas a incidir:");
archivo=fopen('salida2.txt','w+');
e=0.0;
c1=2*Masa*Potencial*Ancho*Ancho;
delta=(Efinal-Einicial)/(Nparticulas-1);
for npts=1:Nparticulas
    e=e+delta;
    c2=e/Potencial;
    if e<Potencial
        c3=1-c2;
        c4=sinh(sqrt(c1*c3));
        T = 1 / (1 + (c4 * c4)/(4 * c2 * c3));
        fprintf(archivo, '%.10d\t%.10d\n', e, T);
    elseif e>Potencial
```

```
c3 = c2 - 1;  
c4 = sin(sqrt(c1 * c3));  
T = 1 / (1 + (c4 * c4)/(4 * c2 * c3));  
fprintf(archivo, '%.10d\t%.10d\n', e, T);
```

```
end
```

```
end
```

```
fclose(archivo);
```

Apéndice D

Código fuente para hallar la transmisividad para MMT para múltiples barreras para varios valores de energía

```
DatosTabla = get(mainHandles.TablaBarreras,'data')
Energia_Inicial= str2double(get(mainHandles.EnergiaInicial,'String'))
Energia_Final= str2double(get(mainHandles.EnergiaFinal,'String'))
Masa= str2double(get(mainHandles.Masa,'String'))
Numero_Puntos= str2double(get(mainHandles.NPuntos,'String'))
n=size(DatosTabla)
Numero_barreras=n(1);
h=1;
%leer archivo
Vi=[];%Potencial de la iesima barrera
Ai=[];%Ancho de la barrera
Ci=[];%Distancia de la barrera
if varargin{1}==0
    for i=1:n(1)
        for j=1:n(2)
            DatosTabla2(i,j)=str2double(DatosTabla(i,j))
        end
    end
elseif varargin{1}==1
    for i=1:n(1)
        for j=1:n(2)
            DatosTabla2(i,j)=DatosTabla(i,j)
        end
    end
end
for j=1:n(2)
    if j==1
        Ai=[Ai;DatosTabla2(:,j)];
    elseif j==2
        Vi=[Vi;DatosTabla2(:,j)];
    elseif j==3
```

```

        Ci=[Ci;DatosTabla2(:,j)]
    end
end
%*****Inicio*****

E=Energia_Inicial
deltaE=(Energia_Final-Energia_Inicial)/(Numero_Puntos-1)
global Er
Er = zeros(1,Numero_Puntos);
global Tr
Tr = zeros(1,Numero_Puntos);
global Rr
Rr = zeros(1,Numero_Puntos);
archivo=fopen('Trans1.txt','w+');
for npts=1:Numero_Puntos
    [T,R,P]=Mtransf(E,Masa,Numero_barreras,Vi,h,Ai,Ci);
    E=E+deltaE;
    Er(npts)=E;
    Tr(npts)=T;
    Rr(npts)=R;
    fprintf(archivo,'% .10d\t%.10d\n',E,T);

end
global grafica
grafica=figure('visible','off')
plot(Er,Tr)
axis([Energia_Inicial,Energia_Final,0 ,1])
xlabel('E (a.u)')
ylabel('T')

saveas(grafica,'transmisividad.png');
axes(handles.axes1)
plot(Er,Tr)%Grafica energia vs T
axis([Energia_Inicial,Energia_Final,0 ,1])
xlabel('E (a.u)')
ylabel('T')
fclose(archivo);
set(mainHandles.Dibujar_Sistema,'enable','on');
set(mainHandles.Guardar_Sistema,'enable','on');
set(mainHandles.ImprimirS,'enable','on');

%*****Funciones*****

function [T,R,P] = Mtransf(E,m,nb,Vi,h,Ai,Ci)
    Ndisc=2*nb%Hallamos el numero de discontinuidades y las almacenamos en X()
    X(1)=0;
    j=2;
    k=1;
    X = zeros(1, Ndisc);
    while j<Ndisc
        X(j)=X(j-1)+Ai(k);
        X(j+1)=X(j)+Ci(k);
        j=j+2;
    end
end

```

```

    k=k+1;
end
X(j)=X(j-1)+Ai(k);%Ultimo hueco
disc=1;
barrera=1;
MDSoluciones = zeros(2,2,nb+1);
for k=2:(nb+1)
    if (E~=0)&&((E-Vi(barrera))~=0)
        MDSoluciones(:, :, k)=obtieneMi(X(disc),X(disc+1),Vi(barrera),E,m,h);
        disc=disc+2;
        barrera=barrera+1;
    end
end
if nb>1
    MT=MDSoluciones(:, :, 2)*MDSoluciones(:, :, 3);
else
    MT=MDSoluciones(:, :, 2);
end

if nb>2
    for k=4:nb+1
        MT=MT*MDSoluciones(:, :, k);
    end
end
c=MT(1,1);
F=1/c;
B=(MT(2,1))/(MT(1,1));
T=F*conj(F);
R=B*conj(B);
P=T+R;
archivo=fopen('salida.txt','w+');
fprintf(archivo,'Transmisividad: %f\n',T);
fprintf(archivo,'Reflexividad: %f\n',R);
fprintf(archivo,'T + R = %f\n',P);

```

```

function [ M ] = obtieneMi( x1, x2, v, E, m, h )
    i=0.0000 + 1.0000i;

    k1=sqrt(2*m*E)/h;
    k2=sqrt(2*m*(E-v))/h;
    kd1 = k2/k1;

    %Matrices
    m1=[exp(i*k1*x1) exp(-i*k1*x1); exp(i*k1*x1) -(exp(-i*k1*x1))];
    m2m3(1,1)=cos(k2*x1-k2*x2);
    m2m3(1,2)=i*sin(k2*x1-k2*x2);
    m2m3(2,1)=kd1*i*sin(k2*x1-k2*x2);
    m2m3(2,2)=kd1*(cos(k2*x1-k2*x2));
    m4=[exp(i*k1*x2) exp(-i*k1*x2); (k1/k2)*exp(i*k1*x2) -(k1/k2)*exp(-i*k1*x2)];

    m11=ObtieneInversa(m1);

```


$M = m_{11} * m_{23} * m_4$

```
function [M1]= ObtieneInversa(m)
    M1(1,1)=m(2,2)/det(m);
    M1(1,2)=-m(1,2)/det(m);
    M1(2,1)=-m(2,1)/det(m);
    M1(2,2)=m(1,1)/det(m);
```

Bibliografía

- [Vargas, 2005] Vargas Lomelí Miguel Angel (2005) : *Soluciones de la ecuación de Schrodinger para un sistema multi-barreras*, Tesis de Licenciatura, Buap, Puebla.
- [Contreras, 2009] Contreras Sanchez Emmanuel (2009) : *Implementación en MATLAB del coeficiente de transmisión de un sistema resonante de doble barrera* , Tesis de licenciatura, BUAP, Puebla.
- [Crankshaw, s.f] Crankshaw Shanna (s.f): *A microscopic model of resonant double-barrier tunneling in a quantum system*.
- [VargasL, 2014] Vargas Lomelí Miguel Ángel (2014): *Simulador de barreras de potencial cuánticas con inclinaciones y campo externo*, Tesis de maestría, BUAP, México.
- [Beiser, 1998] Beiser Arthur (1998): *Conceptos de Física Moderna*, Mc. Graw-Hill, México.
- [Eisberg, 1992] Eisberg Robert M. (1992): *Fundamentos de Física Moderna*, Limusa, México.
- [VargasM, 2005] M. A. Vargas, M. Martín (2005): *Software para hallar la transmisividad de sistemas multibarreras cuánticas parabólicas y Gaussianas por el método de la Matriz de Transferencia*, La Computación en Puebla en el siglo XXI, Ed. FCC-BUAP, México.
- [Brassard, 1996] G. Brassard/P. Bratley (1996): *Fundamentos de algoritmia* México.
- [Salort, 2016] Salort S. Ariel (2016): *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Segundo Orden*.
- [Baéz, 2006] Baéz López David, Cervantes Villagómez Ofelia (2006): *MATLAB Con Aplicaciones a la Ingeniería, Física y Finanzas*
- Enlaces de internet**
- [Martinez, 2009] Martínez Téllez Armando (2009): *Transmisión y reflexión de partículas II*.
<http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com/2010/07/transmision-y-reflexion-de-particulas.html> (recuperado el 15 de agosto de 2021)
- [Castañeta, 2015] Rev.Cs.Farm. y Bioq vol.3 no.1 (2015): *Solución analítica de la ecuación de Schrodinger independiente del tiempo para una partícula en una caja cuántica*. http://www.scielo.org.bo/scielo.php?pid=S2310-02652015000100010&script=sci_arttext (recuperado el 16 de agosto de 2021)
- [Toledano, 2016] Toledano Díaz Mariana (2016): *Efecto túnel cuántico*. <http://fisicotronica.com/efecto-tune1/> (recuperado el 17 de agosto de 2021)
- [Calculisto, s.f] (s.f): *Ecuación de Schrödinger* <https://www.calculisto.com/topics/mecanica-cuantica/summary/518> (recuperado el 19 de agosto de 2021)

- [Pérez, 2014] Pérez Anna (2014): *¿Qué es un SCRUM? Características y ventajas*. <https://www.obsbusiness.school/blog/que-es-un-scrum-caracteristicas-y-ventajas> (recuperado el 21 de septiembre de 2021)
- [LenguajesProgramación, s.f] (s.f): *Python*. <https://lenguajesdeprogramacion.net/python/> (recuperado el 25 de octubre de 2021)
- [Sánchez, 2020] Sánchez Alberca Alfredo (2020): *La librería Numpy*. <https://aprendeconalf.es/docencia/python/manual/numpy/> (recuperado el 1 de octubre de 2021)
- [UGR, s.f] Universidad de Granada (s.f): *Introducción al Cálculo Numérico*. <http://www.ugr.es/~prodelas/ftp/Ciencias/Geologia/TEMA1.pdf> (recuperado el 20 de agosto de 2021)
- [Uh Zapata, 2014] Uh zapata Miguel Angel (2014): *Análisis Numérico I - Lección 6. Errores*. https://www.cimat.mx/~angeluh/webpage_ANI/Lecciones/Leccion6.pdf (recuperado el 26 de octubre de 2021)
- [Crehana, 2021] Rodríguez Hugo (2021): *¿Qué es OpenCV?: ¡Descubre todo acerca de la visión artificial!* <https://www.crehana.com/blog/transformacion-digital/que-es-opencv/> (recuperado el 27 de octubre de 2021)