BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

BUAP

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Unicidad de conos de curvas localmente conexas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

DAVID RODRIGUEZ HERNANDEZ

DIRECTORES DE TESIS

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
DR. DAVID HERRERA CARRASCO

PUEBLA, PUE. AGOSTO 2025

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Título

Unicidad de conos de curvas localmente conexas

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
David Rodríguez Hernández

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Fernando Macías Romero
Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE. AGOSTO DE 2025.

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

DAVID RODRÍGUEZ HERNÁNDEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 9 de junio de 2025, con la tesis titulada:

Unicidad de conos de curvas localmente conexas

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 19 de junio de 2025

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

D*REC/mtrv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo invaluable y desmedido de muchas personas que son parte de este largo y desafiante recorrido. Es un honor expresar mi profundo agradecimiento a todos ellos.

Quiero empezar agradeciendo a mi esposa Leonor, mi mayor motivación, quien ha estado conmigo en las buenas y en las malas, apoyándome y siendo un pilar fundamental en todo.
Agradezco a mi buen amigo Alejandro, por ser una persona que me escucha y anima a seguir adelante.
Agradezco a mis padres, José Luis y Francisca, por guiarme en el camino del estudio.

Muchas gracias a mis directores de tesis, el Dr. Fernando Macías Romero y el Dr. David Herrera Carrasco, por su guía excepcional, paciencia infinita y confianza. Sus críticas constructivas, su disponibilidad para discutir ideas en cualquier momento y su rigor académico han sido fundamentales para este trabajo.

Muchas gracias a los Doctores: María de Jesús López Toriz, Raúl Escobedo Conde, Patricia Domínguez Soto y Mauricio Esteban Chacón Tirado, por el valioso tiempo invertido en la revisión de esta tesis y por sus pertinentes observaciones, mismas que ayudaron a mejorar este trabajo.

Finalmente, doy gracias al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico, indispensable para la realización de este trabajo en este par de años.

Este logro es también el suyo.

Introducción

El presente trabajo de tesis se centra en la teoría de los continuos (un continuo es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo), específicamente en el análisis del cono topológico asociado a este tipo de espacios. Nos enfocamos en las curvas, que son continuos de dimensión 1, y particularmente en las curvas localmente conexas. Este trabajo está estructurado en cuatro capítulos que abordan aspectos esenciales para entender el resultado principal.

El Capítulo 1 presenta una revisión de los resultados básicos de la teoría de los continuos, acompañada de ejemplos ilustrativos que permiten visualizar algunos continuos. Esto proporciona una base sólida para definir el cono de un continuo y entender su estructura espacial.

En el Capítulo 2, estudiamos los espacios contráctiles y el concepto de homotopía, así como algunos resultados clásicos de la teoría de retractos. Estos temas están estrechamente relacionados con los espacios y conos que trabajaremos.

El Capítulo 3 aborda la construcción formal del cono desde la perspectiva de Sam B. Nadler, Jr. [15], utilizando particiones semicontinuas superiores. Este enfoque revela conexiones profundas entre la estructura de un continuo y la de su cono.

En el Capítulo 4, nos enfocamos en los conos de las gráficas finitas, dendritas y dendritas locales. Se prueba que las gráficas finitas que no son un arco, una curva cerrada simple, un n-odo o una curva n-teta para $n \geq 3$ tienen la propiedad del cono único y presentamos el resultado principal de este trabajo, que trata sobre la unicidad del cono de curvas localmente conexas. Se sabe que si dos espacios son homeomorfos, entonces sus conos también son homeomorfos. Sin embargo, la pregunta inversa es más compleja.

En particular, analizamos las investigaciones de Alejandro Illanes, Verónica Martínez-de-la-Vega y Daria Michalik en [6], quienes generalizan el resultado de Daria Michalik [12], el cual dice que dadas dos curvas localmente conexas que no son retractos de vecindad absolutos cuyos conos son homeomorfos, entonces las curvas originales también son homeomorfas. La generalización presentada en [6] extiende este resultado a curvas localmente conexas que no son arcos, curvas cerradas simples, n-odos o curvas n-teta para $n \geq 3$.

David Rodríguez Hernández
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Agosto de 2025

Índice general

Introducción ii

1. Continuos 1

2. Contractibilidad 7

3. Espacios de descomposición 17

4. Conos 25
- 4.1. Conos de continuos 25
- 4.2. Conos de gráficas finitas 37
- 4.3. Conos de dendritas 41
- 4.4. Conos de dendritas locales 45

Capítulo 1

Continuos

En este primer capítulo se tendrá como objetivo presentar el material que será necesario para entender los capítulos consecuentes, se hablará de la notación que se ha convenido en usar, así como algunos conceptos de la teoría de los continuos tales como el concepto de curva que se usa en este trabajo.

Primero comencemos hablando de la notación que a lo largo de este trabajo convenimos en usar, a saber :

- Denotamos por $\mathbb{N}$, al conjunto de números enteros positivos.
- Denotamos por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números enteros, racionales y reales, respectivamente.
- Dado $n \in \mathbb{N}$ denotamos como $\mathbb{R}^n$ al *n-ésimo* espacio euclidiano.
- Si X y Y son dos espacios topológicos con $A \subset X$ y $f\colon X \to Y$ una función, denotamos por $f|_A$ a la función f restringida al subespacio A.

También, si A es un subconjunto de un espacio topológico X, denotamos:

- $\mathrm{int}_X(A)$ como el interior de A en X,
- $\mathrm{cl}_X(A)$ como la cerradura de A en X,
- $\mathrm{fr}_X(A)$ como la frontera de A en X.

En este trabajo se utilizará la siguiente noción de vecindad de un punto:

*Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto V de X es una **vecindad** de x si existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset V$.*

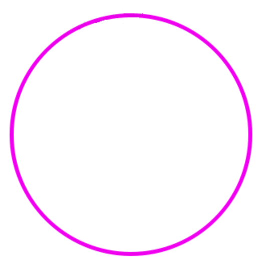
A lo largo de este trabajo estaremos interesados en estudiar los conos de *curvas localmente conexas*, así, es importante antes de continuar saber lo que entenderemos por *curva.*

La primera definición de *continuo* fue dada en 1883 por G. Cantor (1845-1918) y nos dice que un continuo es un subconjunto cerrado y denso en sí mismo y conexo en un espacio Euclidiano. Pero esta definición había sido formulada sobre la base del estudio de otro objeto de investigación matemática: El concepto de línea o curva, las cuales eran más importantes en esa época (véase en [1, págs. 225-226]).

Definición 1.1. *Un **continuo** es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Además si X es un continuo y $Y \subset X$ se dirá que Y es un **subcontinuo** de X, si también Y es un continuo.*

Ejemplo 1.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es un continuo, visto como un espacio métrico restringiendo la métrica usual de $\mathbb{R}$ a $[a, b]$.*

Ejemplo 1.3. *Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon d((0,0),(x,y)) = 1\}$ donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. El espacio X es la circunferencia unitaria y es un continuo.*

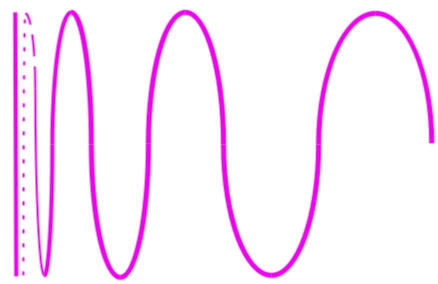


Circunferencia unitaria.

Ejemplo 1.4. *Si $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x \leq 1\}$, entonces $X = cl_{\mathbb{R}^2}(W)$ es un continuo, llamado la curva sinoidal del topólogo. Obsérvese que*

$$X = W \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leq y \leq 1\}.$$

El continuo X se puede observar de manera aproximada en la siguiente figura.



Continuo sen$(\frac{1}{x})$

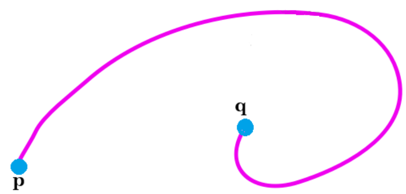
Llegados a este punto es válido hacernos la pregunta: ¿es la unión de continuos un continuo? Y aunque la respuesta es que no necesariamente, el siguiente teorema nos dice bajo qué condiciones esto es posible.

Teorema 1.5. *La unión de dos continuos es un continuo si su intersección es distinta del vacío.*

Demostración: Sean X_1 y X_2 dos continuos en un espacio métrico X, tales que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Queremos probar que $Y = X_1 \cup X_2$ es un continuo. Para esto, obsérvese que $Y \neq \emptyset$ ya que $X_1 \neq \emptyset$ y $X_2 \neq \emptyset$, también Y es compacto pues la unión finita de compactos es compacto. Para probar la conexidad, supongamos por el contrario que Y no es conexo, entonces existen abiertos U y V de X, tales que $U \cap Y \neq \emptyset$, $V \cap Y \neq \emptyset$, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ y $Y \subset U \cup V$. Dado que X_1 es conexo y $X_1 \subset Y \subset U \cup V$, se tiene que $X_1 \subset U$ o $X_1 \subset V$ análogamente $X_2 \subset U$ o $X_2 \subset V$. Sea $p \in X_1 \cap X_2$, sin perdida de generalidad, supongamos que $p \in U$, entonces $X_1 \subset U$ y $X_2 \subset U$, de donde $Y = X_1 \cup X_2 \subset U$, entonces $V \cap Y = \emptyset$ lo cual es una contradicción y, por tanto Y es conexo, finalmente al ser $Y \subset X$, restringiendo la métrica de X a Y se tiene que Y es un espacio métrico. Así Y es un continuo. $\square$

Definición 1.6. *Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$.

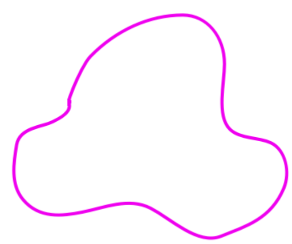
Sea A un arco. Para cualquier homeomorfismo $f\colon [0, 1] \to A$, se tiene que $\{p, q\} = \{f(0), f(1)\}$. Por esto, los puntos extremos del arco A son p y q. Podemos decir que A es un **arco de** p **a** q o de q **a** p.



Arco.

El intervalo $[0,1]$ es un continuo, así un arco es un continuo.

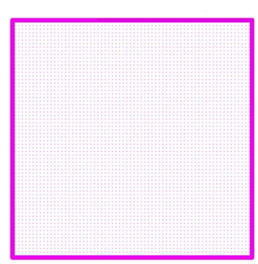
Definición 1.7. *Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria.*



Curva cerrada simple.

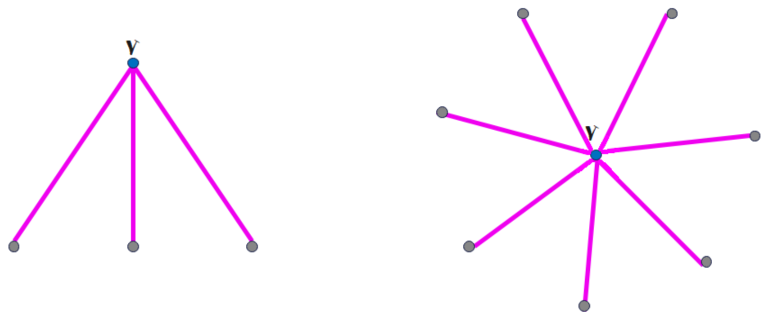
La circunferencia unitaria es un continuo, así una curva cerrada simple también es un continuo.

Definición 1.8. *Sea $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| \leq 1\}$ la bola cerrada de $\mathbb{R}^n$. Para $n \in \mathbb{N}$, una $n-$**celda** es un espacio topológico homeomorfo a B^n, en particular una $2-$**celda** es un espacio topológico homeomorfo a $[0,1] \times [0,1]$.*



2-celda.

Definición 1.9. *Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, un n-**odo** simple es la unión de n arcos los cuales se intersectan dos a dos en un único punto llamado vértice. Al caso particular en que $n = 3$, al 3-odo también se le conoce como **triodo simple**.*



Triodo simple y 7-odo simple.

El n-odo simple es un continuo, esto como consecuencia del teorema 1.5 y del hecho de que cada arco es un continuo.

Alrededor de 1913 H. Hahn (1879-1934) y S. Mazurkiewicz (1888-1945) obtuvieron de manera independiente un resultado para caracterizar la conexidad local, El concepto actual y por tanto con el que trabajaremos para hablar de las curvas localmente conexas, se debe a G. Peano (1858-1932).

Definición 1.10. *Un espacio métrico X es **localmente conexo en** $p \in X$ si para cada vecindad V de p existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U \subset V$. También diremos que X es localmente conexo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.11. *Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X. Diremos que A es una **componente** de X si se cumplen:*

(i) A *es conexo.*

(ii) *Si B es un subespacio conexo de X que contiene a A, entonces $B = A$.*

Los puntos anteriores nos dicen que en realidad una componente es un subespacio conexo maximal.

Teorema 1.12. *X un espacio topológico es localmente conexo si y solo si cada componente de un subconjunto abierto de X es un conjunto abierto de X.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que X es localmente conexo. Sea U un subconjunto abierto de X y sea C una componente de U, se sigue que para cada $c \in C$ existe un abierto y conexo V_c tal que $c \in V_c \subset U$, luego $V_c \cup C$ es un subconjunto conexo de U, así $V_c \subset C$, de donde cada $c \in C$ es un punto interior de C, por lo tanto C es abierto de X.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $x \in X$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea C una componente de U tal que $x \in C$. Por hipótesis, C es abierto y además conexo y es tal que $x \in C \subset U$, esto significa que X es localmente conexo en x. Así, X es localmente conexo. $\square$

Ejemplo 1.13. *Un arco, una curva cerrada simple y una $2-$celda, son ejemplos de continuos localmente conexos.*

Ejemplo 1.14. *Considere $P = ([0,1] \times 0) \cup (A \times [0,1])$, donde $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. El conjunto P es un continuo que no es localmente conexo. Usualmente P es llamado **Peine**.*

En general no sucede que Y es un continuo localmente conexo si X es un continuo localmente conexo e Y un subcontinuo de X. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.15. *Sea $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. Se tiene que $cl_{\mathbb{R}^2}(W)$ es un subcontinuo de $[0,1] \times [0,1]$ que no es localmente conexo.*

Definición 1.16. *Dado un espacio topológico X, decimos que X es **totalmente disconexo** si todas sus componentes conexas son conjuntos unitarios.*

Definición 1.17. *Sea X un espacio topológico, diremos que X tiene **dimensión 1** si cada abierto no vacío de X contiene otro abierto cuya frontera es totalmente disconexa. (Esta definición en realidad nos dice que la topología de X tiene una base de abiertos cuya frontera es totalmente disconexa).*

Definición 1.18. *Llamaremos **curva** a los continuos que tienen dimensión 1.*

Capítulo 2

Contractibilidad

Antes de comenzar con la definición de contractibilidad, es necesario para esta parte hablar del concepto de homotopía. Podemos pensar de manera intuitiva a la homotopía como una deformación continua de funciones continuas, donde una función se transforma gradualmente en otra sin "romper" su continuidad. Formalmente tenemos:

Definición 2.1. *Sean X y Y espacios topológicos y $f, g\colon X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f y g son* ***homotópicas*** *si existe una función continua $H\colon X \times [0,1] \to Y$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Denotamos por $f \simeq g$, cuando f y g son homotópicas. La función H es llamada* ***homotopía****.*

Ejemplo 2.2. *Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas como $f(x) = x$ y $g(x) = 0$. A saber, f y g son homotópicas ya que si consideramos la función $H\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $H(x,t) = (1-t)x$. Se tiene que H es continua y además para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $H(x,0) = (1-0)x = x = f(x)$ y $H(x,1) = (1-1)x = 0 = g(x)$, de donde $f \simeq g$.*

Ejemplo 2.3. *Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funciones definidas como $f(x) = (x, x^3)$ y $g(x) = (x, e^x)$. A saber f y g son homotópicas ya que si consideramos la función $H\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $H(x,t) = (x, (1-t)x^3 + te^x)$ se tiene que H es continua y además para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $H(x,0) = (x, (1-0)x^3 + (0)e^x) = (x, x^3) = f(x)$ y $H(x,1) = (x, (1-1)x^3 + (1)e^x) = (x, e^x) = g(x)$ de donde $f \simeq g$.*

Ejemplo 2.4. *Sea $B^n(r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\vec{x}|| \leq r\}$ y sean $f, g\colon B^n(r) \to B^n(r)$ definidas como siguen $f(\vec{x}) = \vec{x}$ y $g(\vec{x}) = \vec{0}$. Las funciones f y g son* *homotópicas ya que si consideramos la función* $H\colon B^n(r) \times [0,1] \to B^n(r)$ *dada por* $H(\vec{x},t) = (1-t)\vec{x}$. *Se tiene que* H *es continua y además para cualquier* $\vec{x} \in B^n(r)$ *se tiene que* $H(\vec{x},0) = (1-0)\vec{x} = \vec{x} = f(\vec{x})$ *y* $H(\vec{x},1) = (1-1)\vec{x} = \vec{0} = g(\vec{x})$, *de donde* $f \simeq g$.

En el siguiente teorema verificamos que $\simeq$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones continuas entre X y Y.

Teorema 2.5. *Si* X *y* Y *son espacios topológicos y* $f, g, h\colon X \to Y$ *funciones continuas, se verifica lo siguiente:*

(i) $f \simeq f$,

(ii) si $f \simeq g$, *entonces* $g \simeq f$,

(iii) si $f \simeq g$ *y* $g \simeq h$, *entonces* $f \simeq h$.

Demostración. (i) Para este caso bastará con tomar $H\colon X \times [0,1] \to Y$ dada por $H(x,t) = f(x)$, claramente H es continua pues f lo es, además $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = f(x)$ de donde $f \simeq f$.
(ii) Si $f \simeq g$ se tiene que existe una homotopía $H\colon X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Definamos $H^*\colon X \times [0,1] \to Y$ como $H^*(x,t) = H(x,1-t)$. Se sigue que H^* es continua del hecho de que H es continua, además $H^*(x,0) = H(x,1-0) = H(x,1) = g(x)$ y $H^*(x,1) = H(x,1-1) = H(x,0) = f(x)$, de donde $g \simeq f$.
(iii) Ahora supongamos que $f \simeq g$ y $g \simeq h$, entonces existen homotopías $H_1, H_2\colon X \times [0,1] \to Y$ tales que:

$$H_1(x,0) = f(x) \qquad y \qquad H_1(x,1) = g(x)$$

y

$$H_2(x,0) = g(x) \qquad y \qquad H_2(x,1) = h(x)$$

luego, definamos $H^*\colon X \times [0,1] \to Y$ como sigue:

$$H^*(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t), & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \\ H_2(x,2t-1), & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que si $t = \frac{1}{2}$, se tiene que $H_1(x,2t) = H_1(x,1) = g(x)$ y $H_2(x,2t-1) = H_2(x,0) = g(x)$. Por el teorema de pegado de funciones [2, Teorema (1.F.6)]. Se tiene que $H^*(x,t)$ está bien definida y además es continua, más aún $H^*(x,0) = H_1(x,2(0)) = H_1(x,0) = f(x)$ y $H^*(x,1) = H_2(x,2(1)-1) = H_2(x,1) = h(x)$, de donde $f \simeq h$. □

Definición 2.6. *Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$, diremos que X es* ***contráctil*** *si $Id_X \simeq x_0$ donde x_0 es una función constante. Es decir, X es contráctil, si existe una homotopía $H\colon X \times [0,1] \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo 2.7. *El ejemplo 2.2 nos dice que $\mathbb{R}$ es contráctil, mientras que el ejemplo 2.4 nos dice que cualquier bola de radio r de $\mathbb{R}^n$ es contráctil.*

Definición 2.8. *Sean X un espacio métrico, no vacío y separable y A un subespacio no vacío de X. Decimos que A es un* ***retracto*** *de X, si existe una función continua $r\colon X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$.*

- *La función r es llamada* ***retracción****.*
- *Claramente X es un retracto de sí mismo, considerando $Id_X\colon X \to X$ como retracción.*

Teorema 2.9. *Sean X un espacio métrico, no vacío y separable y A un subespacio no vacío de X. Si A es un retracto de X, entonces A es cerrado de X.*

Demostración. Supongamos que A es un retracto de X y sea $r\colon X \to A$ una retracción, en caso de que $A = X$ ya acabamos pues claramente A sería cerrado. Así, supongamos que $A \neq X$. Sea $x_0 \in X \backslash A$, obsérvese que $r(x_0) \neq x_0$ y $r(x_0) \in A$, luego deben existir dos abiertos de X, digamos U_0 y V_0 tales que $x_0 \in U_0$, $r(x_0) \in V_0$ y $U_0 \cap V_0 = \emptyset$, luego como r es continua, se tiene que $r^{-1}(V_0)$ es un abierto de X tal que $x_0 \in r^{-1}(V_0)$ ya que $r(x_0) \in V_0$. A continuación, consideremos $W_0 = U_0 \cap r^{-1}(V_0)$, notar que W_0 es abierto de X con $x_0 \in W_0$ y además $W_0 \cap r(W_0) = \emptyset$. Supongamos que $W_0 \cap A \neq \emptyset$ y sea $a \in W_0 \cap A$, entonces $a \in W_0$ y $a \in A$ por lo que $r(a) = a$ y así $r(a) \in W_0$, entonces $a \in W_0 \cap r(W_0)$ lo cual es una contradicción, entonces debe suceder que $W_0 \subset X \backslash A$ y por tanto $X \backslash A$ abierto, con lo que concluimos que A es un cerrado de X. □

Teorema 2.10. *Un subespacio A de un espacio métrico, no vacío y separable X es un retracto de X si y solo si, para cada espacio Y y cada función continua $f\colon A \to Y$ existe una función continua $F\colon X \to Y$ tal que $F\mid_A = f$.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea A un retracto de X y $r\colon X \to A$ una retracción. Sean Y un espacio y $f\colon A \to Y$ una función continua. Consideremos $F = f \circ r$, a saber, F es continua y cumple que para cualquier $a \in A$, $F(a) = f(r(a)) =$

$f(a)$ por lo que $F\mid_A = f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que para cada espacio Y y cada función $f\colon A \to Y$ existe una función continua $F\colon X \to Y$ tal que $F\mid_A = f$. Si en particular consideramos $Y = A$ y $f = Id_A$, debe existir $F\colon X \to A$ tal que $F\mid_A = Id_A$, entonces para cada $a \in A$, $F(a) = Id_A(a) = a$ por lo que F es una retracción y por lo tanto A es retracto de X. $\square$

Teorema 2.11. *Si X es un espacio métrico, no vacío, separable y contráctil y A un retracto de X, entonces A es contráctil.*

Demostración. Sea $r\colon X \to A$ una retracción. Como X es contráctil, existe $x_0 \in X$ y una homotopía $H\colon X \times [0,1] \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ para cada $x \in X$. Definamos $F\colon A \times [0,1] \to A$ por $F(a,t) = (r \circ H)(a,t)$ para cada $a \in A$. A saber, F está bien definida, es continua y es tal que para cada $a \in A$,

$$F(a,0) = (r \circ H)(a,0) = r(H(a,0)) = r(a) = a$$

y

$$F(a,1) = (r \circ H)(a,1) = r(H(a,1)) = r(x_0) \in A.$$

Por tanto, A es contráctil. $\square$

Definición 2.12. *Sea X un conjunto no vacío y sea $f\colon X \to X$ una función, se dice que $x \in X$ es un **punto fijo** de f si $f(x) = x$.*

Ejemplo 2.13. *Es fácil verificar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x$ tiene como puntos fijos a 0 y 3.*

Ejemplo 2.14. *De igual forma es fácil verificar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 5$ no tiene puntos fijos.*

Definición 2.15. *Se dice que un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si cada función continua $f\colon X \to X$, tiene un punto fijo.*

Ejemplo 2.16. $[0,1]$ *tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, sean $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua, $A = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$ y $B = \{x \in [0,1] : x \geq f(x)\}$. Obsérvese que $[0,1] = A \cup B$ y, que A y B son subconjuntos cerrados de $[0,1]$, además $0 \in A$ y $1 \in B$. Entonces, como $[0,1]$ es un conexo, existe $x_0 \in A \cap B$, es decir $x_0 \in A$ y $x_0 \in B$ por lo que $x_0 \leq f(x_0)$ y $x_0 \geq f(x_0)$ y en consecuencia $f(x_0) = x_0$.*

Ejemplo 2.17. *S^n no tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, consideremos la función $f : S^n \to S^n$ dada por $f(x) = -x$. Esta función manda cada punto x de la esfera S^n a un punto diametralmente opuesto $-x$, a saber si f es vista como una transformación lineal, se afirma que f es continua. y como x es siempre distinta de $-x$, se tiene que $f(x) \neq x$ para cada $x \in S^n$. por tanto S^n no tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 2.18. *[13, Teorema(3.5.2.)(Teorema del punto fijo de Brouwer)] Sea $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ una función continua, entonces f tiene un punto fijo.*

Observación: Es importante mencionar que la propiedad del punto fijo se preserva bajo homeomorfismos. Claramente el teorema previo nos dice que $[0,1]^n$ tiene la propiedad del punto fijo. Además, se sabe que B^n y $[0,1]^n$ son homeomorfos por lo que B^n tiene la propiedad del punto fijo.

Lema 2.19. *Sea X un espacio métrico, no vacío y separable que tiene la propiedad del punto fijo, si A es un retracto de X, entonces A tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Como A es un retracto de X, existe $r\colon X \to A$ retracción. Sea $g\colon A \to A$ una función continua cualquiera y definamos $f\colon X \to X$ como $f = g \circ r$, por la manera en que f está definida, se tiene que f es continua. Luego, como X tiene la propiedad del punto fijo, debe existir $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$, es decir $g(r(x_0)) = x_0$, obsérvese que $g(r(x_0)) \in A$, por lo que $x_0 \in A$, entonces $r(x_0) = x_0$ y así se tiene que $g(x_0) = x_0$, de donde g tiene un punto fijo y, por lo tanto, A tiene la propiedad del punto fijo. □

El teorema 2.11 nos dice que todo retracto de un contráctil es contráctil, por tal hecho no podemos ignorar como estos dos conceptos se relacionan. En la literatura sobre retractos, también aparecen los siguientes conceptos.

Definición 2.20. *Sea X un espacio métrico, no vacío y separable, y A un subespacio no vacío de X. Diremos que A es un* ***retracto de vecindad*** *de X si existe un abierto U de X tal que $A \subset U$ y A es un retracto de U.*

Ejemplo 2.21. *El espacio S^1 es un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^2$, para esto basta considerar $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, claramente $S^1 \subset U$ y obsérvese que $r\colon U \to S^1$ dada como $r(x) = \frac{x}{||x||}$ es una retracción. De manera similar se puede demostrar que, en general, S^n es un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 2.22. *Sea X un espacio métrico, no vacío y separable, diremos que X es un* ***retracto absoluto****, si para cada espacio Z y cada encaje $h\colon X \to Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z se tiene que $h(X)$ es un retracto de Z.*

Ejemplo 2.23. *El intervalo $[0,1]$ y $\mathbb{R}$, son retractos absolutos, ver la observación del teorema 2.36.*

Definición 2.24. *Diremos que un espacio métrico, no vacío y separable X es un* ***extensor absoluto*** *si para cada espacio Z y cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y toda función continua $f\colon A \to X$ existe una función continua $F\colon Z \to X$ tal que $F\mid_A = f$.*

Definición 2.25. *Diremos que un espacio métrico, no vacío y separable X es un* ***retracto de vecindad absoluto*** *si para cada espacio Z y cada encaje $h\colon X \to Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z, se tiene que $h(X)$ es un retracto de vecindad de Z.*

Definición 2.26. *Diremos que un espacio métrico, no vacío y separable X es un* ***extensor de vecindad absoluto*** *si para cada espacio Z, cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y toda función continua $f\colon A \to X$, existen un subconjunto abierto U de Z tal que $A \subset U$ y una función continua $F\colon U \to X$ tal que $F\mid_A = f$.*

De las definiciones previas obsérvese que si A es un retracto de un espacio X se implica que A es un retracto de vecindad de X, basta con tomar $U = X$ abierto de X en la definición 2.20. Luego, es claro que si un espacio es retracto absoluto, entonces es retracto de vecindad absoluto, también es claro que si un espacio es extensor absoluto, entonces es extensor de vecindad absoluto. A saber, sobre estas últimas, los siguientes teoremas nos dice que las propiedades de ser extensor absoluto y extensor absoluto de vecindad son invariantes topológicos.

Teorema 2.27. *Sean X y Y espacios métricos, no vacíos y separables, homeomorfos, si X es un extensor absoluto, entonces Y también lo es.*

Demostración. Dado que X y Y son homeomorfos, entonces existe $h\colon X \to Y$ homeomorfismo. Sean Z un espacio cualquiera, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f\colon A \to Y$ una función continua. Obsérvese que $h^{-1} \circ f\colon A \to X$ es una función continua y como X es extensor absoluto, existe una función continua $E\colon Z \to X$ tal que $E|_A = h^{-1} \circ f$, así, convenientemente definamos $F\colon Z \to Y$ como $F = h \circ E$, claramente F es continua, y si $a \in A$, $F(a) = (h \circ E)(a) = h(E(a)) = h((h^{-1} \circ f)(a)) = h(h^{-1}(f(a))) = f(a)$ de donde $F|_A = f$ y, por lo tanto, Y es extensor absoluto. □

Teorema 2.28. *Sean X y Y espacios métricos, no vacíos y separables, homeomorfos, si X es un extensor de vecindad absoluto, entonces Y también lo es.*

Demostración. Dado que X y Y son homeomorfos, existe $h\colon X \to Y$ homeomorfismo. Sean Z un espacio cualquiera y A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f\colon A \to Y$ continua. Obsérvese que $h^{-1} \circ f\colon A \to X$ es una función continua y dado que X es extensor de vecindad absoluto, existen U abierto de Z con $A \subset U$ y una función continua $G\colon U \to X$ tal que $G|_A = h^{-1} \circ f$. Así, definamos $F\colon U \to Y$ como $F\colon h \circ G$, es claro que F es continua y además si $a \in A$, $F(a) = (h \circ G)(a) = h(G(a)) = h((h^{-1} \circ f)(a)) = h(h^{-1}(f(a))) = f(a)$, de donde $F|_A = f$ y, por lo tanto, Y es extensor de vecindad absoluto. □

Teorema 2.29. *[11, Teorema 3.13] Sea X un espacio métrico, no vacío y separable, entonces X es un retracto absoluto si y solo si X es un extensor absoluto. Más aún, X es un retracto de vecindad absoluto si y solo si X es un extensor de vecindad absoluto.*

Teorema 2.30. *Sean X y Y espacios métricos, no vacíos y separables, homeomorfos, si X es un retracto absoluto, entonces Y también lo es.*

Demostración. Supongamos que X es un retracto absoluto, luego por el teorema 2.29 tenemos que X es un extensor absoluto. Como X es homeomorfo a Y, el teorema 2.27 nos garantiza que Y es un extensor absoluto y, nuevamente, por el teorema 2.29 Y es un retracto absoluto. □

Teorema 2.31. *Sean X y Y espacios métricos, no vacíos y separables, homeomorfos, si X es un retracto de vecindad absoluto, entonces Y también lo es.*

Demostración. De manera similar al teorema previo, supongamos que X es un retracto de vecindad absoluto, luego por el teorema 2.29 tenemos que X es un extensor de vecindad absoluto. Como X es homeomorfo a Y, el teorema 2.27 nos garantiza que Y es un extensor de vecindad absoluto y, nuevamente, por el teorema 2.29 Y es un retracto de vecindad absoluto. $\square$

Definición 2.32. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real. Una* ***norma*** *sobre $\mathcal{V}$ es una función $||.|| : \mathcal{V} \to [0, \infty)$ que tiene las siguientes propiedades.*

- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *para todo* $x, y \in \mathcal{V}$
- $||tx|| = |t|||x||$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *y* $x \in \mathcal{V}$
- $||x|| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

Nota: Si $||.||$ es una norma sobre un espacio vectorial X, la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = ||x - y||$ define una métrica sobre X. Al par $(X, ||.||)$ le llamamos espacio vectorial normado.

Definición 2.33. *Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial métrico, separable y no vacío, y C un subconjunto no vacío de $\mathcal{L}$. Se dice que C es un conjunto* ***convexo*** *si para cualesquiera dos elementos c_0 y c_1 de C, se tiene que el conjunto $\{(1 - t)c_0 + tc_1 : t \in [0, 1]\} \subset C$.*

Teorema 2.34. *[5, Teorema 4.25] Sean X un espacio vectorial normado, C un subconjunto convexo de X, entonces C es un retracto absoluto.*

Teorema 2.35. *Sean X un retracto de vecindad absoluto y A un retracto de vecindad de X, entonces A es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración: Como A es un retracto de vecindad de X, existen un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una retracción $r : U \to A$. Consideremos Z un espacio y $h : A \to Z$ un encaje tal que $h(A)$ es un cerrado de Z. Luego $h^{-1} : h(A) \to A \subset X$ es una función continua y como X es un retracto de vecindad absoluto, el teorema 2.29 nos dice que X es un extensor de vecindad absoluto, así deben existir un abierto V de Z tal que $h(A) \subset V$ y una función continua $F : V \to X$ tal que $F|_{h(A)} = h^{-1}$. Dado que U abierto de X se implica que $F^{-1}(U)$ es un abierto de V y por transitividad abierto de Z tal que $h(A) \subset F^{-1}(U)$. Defininimos $G : F^{-}(U) \to h(A)$ como $G = r \circ F$, nótese que G es continua y además si $h(a) \in h(A)$, $G(h(a)) = (r \circ F)(h(a)) = r(F(h(a))) = r(h^{-1}(h(a))) = r(a) = a = h^{-1}(h(a))$, de donde $G|_{h(A)} = h^{-1}$ por lo que A es un extensor de vecindad absoluto. Por el teorema 2.29 tenemos que A es un retracto de vecindad absoluto. $\square$

Teorema 2.36. *[5, Teorema 4.30] Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos, no vacíos y separables. El espacio $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto, si y solo si, X_n es un retracto absoluto para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Observación: $\mathbb{R}$ es un espacio convexo en sí mismo y a $\mathbb{R}$ se le puede dar estructura de espacio vectorial normado, luego el teorema 2.34 garantiza que $\mathbb{R}$ es un retracto absoluto. De manera similar siendo $[0,1]$ convexo y subconjunto de $\mathbb{R}$, se tiene que $[0,1]$ es retracto absoluto, sumado a esto, por el teorema 2.36 se tiene que el cubo de Hilbert $[0,1]^{\infty}$, $[0,1]^n$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{\infty}$ son retractos absolutos.

Corolario 2.37. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que S^n es retracto de vecindad absoluto.*

Demostración: Por la observación del teorema 2.36, tenemos que $\mathbb{R}^{n+1}$ es un retracto absoluto, lo que implica que $\mathbb{R}^{n+1}$ es un retracto de vecindad absoluto, en el ejemplo 2.21 vimos que S^n es un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^{n+1}$, luego el teorema 2.35 nos dice que S^n debe ser un retracto de vecindad absoluto. □

Teorema 2.38. *Sea X un espacio métrico, no vacío y separable. Si X es contráctil, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración: Sea X un espacio contráctil, entonces existe una homotopía $H : X \times [0,1] \to X$ tal que para cualquier $x \in X$, $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ con $x_0 \in X$. Sean $p, q \in X$ y $\alpha : I \to X$ una función definida como:

$$\alpha(t) = \begin{cases} H(p,2t) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \\ H(q, 2-2t) & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

por el lema de pegado de funciones se afirma que α está bien definida y es continua. Luego, obsérvemos que $\alpha(0) = H(p,0) = p$ y $\alpha(1) = H(q,0) = q$, de donde, se tiene que existe una trayectoria de p a q en X, por lo que X es conexo por trayectorias. □

El teorema 2.38 nos da una manera de descartar espacios que no son contráctiles, tomemos de ejemplo a S^0, como sabemos $S^0 = \{-1, 1\}$ el cual no es conexo por trayectorias luego S^0 no es contráctil.

Teorema 2.39. *[13, Corolario 1.6.7] Sea X un espacio métrico, no vacío y separable, entonces X es un retracto absoluto si y solo si X es un retracto de vecindad absoluto contráctil.*

Teorema 2.40. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que S^{n-1} no es un retracto de B^n.*

Demostración: Supongamos que pasa lo contrario, es decir que S^{n-1} es un retracto de B^n, se sabe que B^n tiene la propiedad del punto fijo, luego por el lema 2.19, S^{n-1} debe tener la propiedad del punto fijo, lo cual es una contradicción al ejemplo 2.17, por lo tanto S^{n-1} no es un retracto de B^n. □

Teorema 2.41. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que S^{n-1} no es contráctil.*

Demostración: Previamente verificamos que S^0 no es contráctil. Supongamos por el contrario que S^n es contráctil, por el corolario 2.37 tenemos que S^n es retracto de vecindad absoluto y entonces, por el teorema 2.39, S^n es retracto absoluto, en particular, S^n puede ser encajado en B^{n+1}, de donde existe $r : B^{n+1} \to S^n$ retracción, lo cual es una contradicción. □

Teorema 2.42. *Si X es un espacio métrico, no vacío y separable y $A \subset X$ es un retracto de vecindad absoluto cerrado, entonces A es un retracto de vecindad de X.*

Demostración. Sea A un retracto de vecindad absoluto, tenemos por el teorema 2.29 que A es un extensor de vecindad absoluto, es decir, para cada espacio Z y cada subespacio no vacío y cerrado B de Z y toda función continua $f\colon B \to A$ existen un subconjunto abierto U de Z tal que $B \subset U$ y una función continua $F\colon U \to A$ tal que $F\mid_B = f$. En particular, si $Z = X$, $B = A$ y $f = Id_A\colon A \to A$ existe un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una función continua $F\colon U \to A$ tal que $F\mid_A = Id_A$, es decir, F es una retracción de U en A y, por lo tanto, A es un retracto de vecindad de X. □

Capítulo 3

Espacios de descomposición

En este capítulo se hablará de la descomposición semicontinua superior (scs) de un espacio topológico, especificamente de la descomposición scs de los continuos. Se hablará de algunos resultados de las particiones y veremos bajo que condiciones la descomposición de un continuo es tambien un continuo y demostraremos que toda descomposición scs de un continuo es un continuo, también se abordará una tecnica para construir particiones scs.

Definición 3.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X es una* ***partición*** *de X si los elementos de $\mathcal{G}$ son ajenos dos a dos y su unión es igual a X. Si además, los elementos de la partición $\mathcal{G}$ son cerrados en X, diremos que $\mathcal{G}$ es una* ***partición cerrada*** *de X.*

Ahora consideremos (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{G}$ una partición. Sea $\tau(\mathcal{G}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{G} \colon \bigcup \mathcal{U} \in \tau\}$. A saber $\tau(\mathcal{G})$ es una topología para $\mathcal{G}$, en efecto, al ser $\mathcal{G}$ una partición de X se tiene que $\bigcup \mathcal{G} = X \in \tau$ y así $\mathcal{G} \in \tau(\mathcal{G})$, claramente como $\emptyset \subset \mathcal{G}$ es tal que $\bigcup \emptyset = \emptyset \in \tau$ y así, $\emptyset \in \tau(\mathcal{G})$. Ahora consideremos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ en $\tau(\mathcal{G})$, es claro que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{G}$ y se tiene que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subcolecciones de la partición se cumple la igualdad $\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \bigcup \mathcal{U} \cap \bigcup \mathcal{V}$ luego como $\bigcup \mathcal{U}$ y $\bigcup \mathcal{V}$ son elementos de τ entonces $\bigcup(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \in \tau$ y por tanto $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau(\mathcal{G})$. Finalmente consideremos $\mathcal{F}$ una colección arbitraria de elementos en $\tau(\mathcal{G})$, notemos que $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup\limits_{\mathcal{U} \in \mathcal{F}} (\bigcup \mathcal{U})$, y como para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, se tiene que $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{F} \in \tau(\mathcal{G})$.

Notación: Diremos que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un **espacio de descomposición** de

X.
Observación: Lo anterior nos dice que cada vez que tomemos una partición de un espacio topológico, podemos dotarla de una topología.

Nótese que por la manera en que una partición está definida, cada vez que consideramos un elemento x de X, este es seleccionado de un único elemento de la partición $\mathcal{G}$, por tanto consideremos la siguiente definición.

Definición 3.2. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{G}$ una partición de X. A la función*

$$\pi\colon X \to \mathcal{G}$$

que asigna a x elemento de X su único elemento de $\mathcal{G}$ que lo contiene la llamaremos ***función natural****.*

Nótese que π es suprayectiva pero además es continua. En efecto, consideremos V un subconjunto abierto de $\mathcal{G}$, dado que $\mathcal{G}$ es una partición de X, cada elemento $G \in \mathcal{G}$ es un subconjunto disjunto de X, luego $\pi^{-1}(V) = \{x \in X\colon \pi(x) \in V\} = \bigcup\limits_{G\in V} G$ y como V abierto de $\mathcal{G}$ se tiene que $\bigcup\limits_{G\in V} G$ abierto de X, así $\pi^{-1}(V)$ es abierto de X y por lo tanto π es continua.

Los espacios de descomposición son muy importantes en la teoría de los continuos y serán de gran importancia en este capítulo cuando definamos el cono sobre un espacio topológico, entonces vale la pena analizar la siguiente pregunta ¿El espacio de descomposición de un continuo es también un continuo? La respuesta es que no necesariamente y para verificar esto, veremos el ejemplo que sigue a continuación:

Ejemplo 3.3. *Consideremos al continuo $X = [-1, 1]$ y sea $\mathcal{G}$ una partición de X dada por $\mathcal{G} = \{\{x, -x\}\colon -1 < x < 1\} \cup \{\{-1\}, \{1\}\}$, A saber $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ no es un continuo, dado que puede verificarse que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ no es un espacio de Hausdorff y por tanto no es metrizable. [Véase teorema 3.6].*

Como hemos visto, si $\mathcal{G}$ es una partición de un continuo X no necesariamente sucede que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un continuo. ¿Cuándo si? Los teoremas que a continuación se enuncian son clave para hablar de esto. [Véase teorema 3.7].

Lema 3.4. *Sean X y Y espacios topológicos con X compacto e Y de Hausdorff. Consideremos $f\colon X \to Y$, si f es una función continua, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea C un cerrado de X. Por hipótesis tenemos que X es compacto, luego C es compacto y al ser f continua, tenemos que $f(C)$ es compacto, como cualquier subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado, entonces $f(C)$ es cerrado de Y. Por lo tanto, f es una función cerrada. $\square$

Lema 3.5. *Sean X y Y espacios topológicos con X compacto e Y de Hausdorff. Consideremos $f\colon X \to Y$, si f es continua y suprayectiva, entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva con X compacto e Y de Hausdorff, por el lema 3.4 f es cerrada. Consideremos a $\mathcal{C}$ una base numerable para X, luego para cada subconjunto finito $\mathcal{L}$ de $\mathcal{C}$ definamos $E_{\mathcal{L}} = Y - f\left(X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\right)$. Es claro que $\bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ es abierto de X por lo que $X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ es cerrado de X, en consecuencia, $f\left(X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\right)$ es cerrado de Y, luego $E_{\mathcal{L}}$ es abierto de Y, para cada $\mathcal{L}$ subconjunto finito de $\mathcal{C}$.

Afirmación: $\mathcal{P} = \{E_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L}\ es\ un\ subconjunto\ finito\ de\ \mathcal{C}\}$ es una base numerable para Y.

En efecto, obsérvese que al ser $\mathcal{C}$ numerable, se tiene que $\mathcal{P}$ es numerable. Ahora, sean U un abierto de Y y p un elemento de U, $f^{-1}(\{p\})$ es cerrado de X y $f^{-1}(U)$ es abierto de X ya que f es continua, luego como X compacto, $f^{-1}(\{p\})$ es también compacto, obsérvese que $f^{-1}(\{p\}) \subset f^{-1}(U)$, entonces existe un subconjunto finito $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{C}$ tal que:

$$f^{-1}(\{p\}) \subset \bigcup_{L\in\mathcal{L}'} L \subset f^{-1}(U).$$

Afirmamos que p es un elemento de $E_{\mathcal{L}}$, ya que de lo contrario, si $p \notin E_{\mathcal{L}}$ se tiene que $p \in f\left(X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L\right)$. Así, existe $x \in X - \bigcup_{L\in\mathcal{L}} L$ tal que $f(x) = p$. Luego, $x \in f^{-1}(\{p\}) \subset \bigcup_{L\in\mathcal{L}'} L$, lo cual es una contradicción. Por último nótese que al ser f continua y suprayectiva debe suceder que Y es compacto al igual que X. Así, Y compacto y de Hausdorff, entonces regular con base númerable, por lo que Y es metrizable (Véase [7, pág. 241]). □

Teorema 3.6. *Sea X un espacio métrico compacto, un espacio de descomposición $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ de X es metrizable si y solo si es de Hausdorff.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Es claro que si $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es metrizable, entonces es Hausdorff.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es de Hausdorff, como $\pi\colon X \to \mathcal{G}$ es suprayectiva y continua. Por el lema 3.5, se tiene que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es metrizable. □

Teorema 3.7. *Sea X un continuo, un espacio de descomposición $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ de X es un continuo si y solo si es de Hausdorff.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un continuo, en particular, es de Hausdorff.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es de Hausdorff, entonces por el teorema 3.6 se tiene que es metrizable, más aún, como $\pi\colon X \to \mathcal{G}$ es continua, se sigue que $\mathcal{G}$ tiene que ser compacto y conexo. Por tanto $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un continuo.

Este último teorema nos dice como a partir de un continuo construir otros nuevos, sin embargo, requiere la condición de que los espacios de descomposición sean de Hausdorff. Ahora hablemos de un tipo especial de partición, la llamada semicontinua superior; ésta nos facilitará la construcción de nuevos continuos a partir de otros.

Definición 3.8. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{G}$ una partición de X, diremos que $\mathcal{G}$ es **semicontinua superior** si siempre que $D \in \mathcal{G}$, $U \in \tau$ y $D \subset U$, existe $V \in \tau$ con $D \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{G}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.*

Definición 3.9. *Sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X, diremos que $A \subset X$ es **$\mathcal{G}$-saturado** si existe una subcolección $\mathcal{C}$ de elementos de $\mathcal{G}$ tal que $A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.*

Ejemplo 3.10. *Si X un conjunto con $\mathcal{G}$ una partición de X y consideramos $\pi\colon X \to \mathcal{G}$ la función natural, dado $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ se tiene que $\pi^{-1}(\mathcal{B})$ es $\mathcal{G}$-saturado, ya que $\pi^{-1}(\mathcal{B}) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.*

Teorema 3.11. *Sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de un espacio topológico X, $A \subset X$ es $\mathcal{G}$-saturado si y solo si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $A \subset X$ y supongamos que A es $\mathcal{G}$-saturado, entonces existe una subcolección $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$ tal que $A = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$, nótese que $\pi(A) = \{\pi(x) \colon x \in A\} = \mathcal{C}$, luego $\pi^{-1}(\pi(A)) = \pi^{-1}(\mathcal{C}) = \{x \in X \colon \pi(x) \in \mathcal{C}\} = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C = A$ y así $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, claramente $\pi(A)$ es un subconjunto de $\mathcal{G}$ y del ejemplo 3.10, tenemos que su preimagen debe ser $\mathcal{G}$-saturado de ahí que A es $\mathcal{G}$-saturado. □

El siguiente teorema 3.12 nos dice que pasa con los abiertos de X si estos a su vez son $\mathcal{G}$-saturados.

Teorema 3.12. *Sea X un espacio topológico y sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de X, si U es $\mathcal{G}$-saturado y abierto de X , entonces $\pi(U)$ es abierto de $\mathcal{G}$.*

Demostración. Consideremos U un conjunto $\mathcal{G}$-saturado y abierto de X, entonces por el teorema 3.11, tenemos que $U = \pi^{-1}(\pi(U))$, de donde $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{V\in\pi(U)} V$ es abierto de X, es decir, $\bigcup_{V\in\pi(U)} V \in \tau_X$, luego $\pi(U) \in \mathcal{G}$ y así $\pi(U) \in \tau_X(\mathcal{G})$, es decir, $\pi(U)$ es un abierto de $\mathcal{G}$. □

A continuación veremos un par de caracterizaciones de la partición semicontinua superior.

Teorema 3.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ un espacio de descomposición de X, además consideremos a $\pi\colon X \to \mathcal{G}$ la función natural, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{G}$ es una partición semicontinua superior,

(ii) π *es una función cerrada,*

(iii) si $G \in \mathcal{G}$ *y* $U \in \tau$ *con* $G \subset U$*, entonces existe* $V \in \tau$ *tal que* V *es* $\mathcal{G}$*-saturado y* $G \subset V \subset U$*.*

Demostración. $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Supongamos que $\mathcal{G}$ es semicontinua superior y sea C un cerrado de X. Primero veamos que $\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C)) \in \tau$. En efecto, sea $x \in \pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C))$, entonces $\pi(x) \in \mathcal{G} - \pi(C)$, luego $\pi(x) \subset X - C$ de lo contrario si existiera $y \in \pi(x) \cap C$ entonces $y \in \pi(y)$ luego $\pi(y) \cap \pi(x) \neq \emptyset$ de donde $\pi(x) = \pi(y) \in \pi(C)$ porque $y \in C$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\pi(x) \in \mathcal{G} - \pi(C)$, nótese que $X - C$ es abierto de X y como $\mathcal{G}$ es semicontinua superior, debe existir $V \in \tau$ con $\pi(x) \subset V$ tal que si $A \in \mathcal{G}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset X - C$, a saber si $v \in V$ nótese que $\pi(v) \in \mathcal{G}$ y además $\pi(v) \cap V \neq \emptyset$ por lo que $\pi(v) \subset X - C$. Ahora veamos que $\pi(V) \subset \mathcal{G} - \pi(C)$ sea $B \in \pi(V)$, debe existir $b \in V$ tal que $\pi(b) = B$, si $\pi(b) \in \pi(C)$ tendríamos que exite $y \in C$ tal que $\pi(b) = \pi(y)$ y entonces $y \in \pi(b) \cap C$ y por tanto $\pi(b)$ no puede estar contenido en $X - C$ lo cual es una contradicción. Por tanto $\pi(V) \subset \mathcal{G} - \pi(C)$ y tomando preimagenes en la contención, entonces $V \subset \pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C))$ y dado que $x \in \pi(x) \subset V$ entonces tenemos que $\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C)) \in \tau$ luego, del ejemplo 3.10 sabemos que $\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C))$ es $\mathcal{G}$-saturado y así por el teorema 3.12 tenemos que $\pi(\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(C)))$ es abierto de $\mathcal{G}$ y dado que π es suprayectiva, entonces $\mathcal{G} - \pi(C) \in \tau(\mathcal{G})$ y así finalmente $\pi(C)$ es cerrado de $\mathcal{G}$ y, por lo tanto, π es cerrada.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Sean $G \in \mathcal{G}$ y $U \in \tau$ con $G \subset U$ y supongamos que π es cerrada. Claramente $X - U$ es cerrado de X por lo que tenemos que $\pi(X - U)$ es cerrado de $\mathcal{G}$, luego $\mathcal{G} - \pi(X - U)$ es abierto de $\mathcal{G}$ y dado que π es continua, $\pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(X - U))$ es abierto de X. Haciendo $V = \pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(X - U))$ ya tenemos que $V \in \tau$ y además del ejemplo 3.10 también V es $\mathcal{G}$-saturado, solo resta probar que $G \subset V \subset U$, veamos que en efecto $G \subset V$, sea $x \in G$ como $G \in \mathcal{G}$ entonces $\pi(x) = G$, y como por hipótesis tenemos que $G \subset U$, entonces $\pi(x) \subset U$ por lo que $\pi(x) \notin \pi(X - U)$, es decir $\pi(x) \in \mathcal{G} - \pi(X - U)$ y entonces $x \in \pi^{-1}(\mathcal{G} - \pi(X - U))$, es decir $x \in V$ por lo tanto $G \subset V$ ya solo veamos que $V \subset U$, sea $x \in V$, entonces $\pi(x) \in \mathcal{G} - \pi(X - U)$, así $\pi(x) = A$, para algún $A \in \mathcal{G} - \pi(X - U)$, de donde $A \notin \pi(X - U)$ por tanto $\pi(x) = A \subset U$ y así $x \in U$, por lo tanto $V \subset U$.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Finalmente, sea $D \in \mathcal{G}$, $U \in \tau$ con $D \subset U$. Por hipótesis tenemos que existe $V \in \tau$ tal que V es $\mathcal{G}$-saturado y $D \subset V \subset U$. Sea $A \in \mathcal{G}$ con $A \cap V \neq \emptyset$ como V es $\mathcal{G}$-saturado tenemos que existe una subcolección $\mathcal{C}$ de elementos de $\mathcal{G}$ tal que $V = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, de donde $A \subset V$ y así se concluye que $A \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es una partición semicontinua superior. □

Lema 3.14. *Sea X un espacio topológico tal que para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado de X. Si $\mathcal{G}$ es una partición semicontinua de X, entonces $\mathcal{G}$ es una partición cerrada.*

Demostración. Sean $A \in \mathcal{G}$ cualquiera, $x \in A$ y nuevamente consideremos a π la función natural. Se tiene por hipótesis que $\{x\}$ es cerrado de X y por el teorema 3.13, tenemos que π es función cerrada, entonces $\pi(\{x\})$ es cerrado de $\mathcal{G}$, obsérvese que $\pi(\{x\}) = \{\pi(x)\} = \{A\}$, de donde, $\{A\}$ es cerrado de $\mathcal{G}$ y, como π continua, entonces $\pi^{-1}(\{A\})$ es cerrado de X, a saber $\pi^{-1}(\{A\}) = \{x \in X : \pi(x) \in \{A\}\} = \{x \in X : \pi(x) = A\} = A$, por lo tanto, A es cerrado de X. Así, $\mathcal{G}$ es una partición cerrada. □

Definición 3.15. *Si $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es un espacio de descomposición de un espacio topológico X tal que $\mathcal{G}$ es semicontinua superior. Diremos que $(\mathcal{G}, \tau(\mathcal{G}))$ es una **descomposición scs** de X.*

Lema 3.16. *Si X un espacio métrico compacto, entonces cualquier descomposición scs de X es metrizable.*

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ una descomposición scs de X, queremos ver que $\mathcal{G}$ es metrizable. Dado que X es métrico compacto el teorema 3.6, nos garantiza que bastará con demostrar que $\mathcal{G}$ es de Hausdorff. A saber, sean $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ con $G_1 \neq G_2$, así $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ y como X es normal, los conjuntos unipuntuales son cerrados, por lo que el lema 3.14 nos asegura que G_1 y G_2 son cerrados, más aún, existen U_1 y U_2 ajenos y abiertos en X tales que $G_1 \subset U_1$ y $G_2 \subset U_2$. Por el teorema 3.13, existen V_1 y V_2 $\mathcal{G}$-saturados abiertos tales que $G_1 \subset V_1 \subset U_1$ y $G_2 \subset V_2 \subset U_2$. Ahora, sea $x \in G_1$, entonces $G_1 = \pi(x) \in \pi(G_1) \subset \pi(V_1)$, entonces $G_1 \in \pi(V_1)$ y de manera análoga $G_2 \in \pi(V_2)$, nótese que V_1 y V_2 cumplen las hipótesis del teorema 3.12 por lo que $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ abiertos en $\mathcal{G}$, como V_1 y V_2 son $\mathcal{G}$-saturados, el teorema 3.11 nos dice que $V_1 = \pi^{-1}(\pi(V_1))$ y $V_2 = \pi^{-1}(\pi(V_2))$, obsérvese que como

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ se tiene también que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de donde $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$ y así $\mathcal{G}$ es de Hausdorff. $\square$

Teorema 3.17. *Si X es un continuo, entonces cualquier descomposición scs de X es un continuo.*

Demostración. Sean X un continuo y $\mathcal{G}$ una descomposición scs de X. Nótese que al ser X compacto y conexo, se tiene que $\mathcal{G}$ tambien lo es ya que $\pi\colon X \to \mathcal{G}$ es continua, más aún, por el lema 3.16, tenemos que $\mathcal{G}$ debe ser metrizable y por tanto $\mathcal{G}$ es un continuo. $\square$

El siguiente teorema 3.18 nos da una forma interesante de obtener una partición semicontinua superior a partir de un espacio topológico dado, evidentemente el plan es obtener un continuo a partir de un continuo dado via su descomposición scs.

Teorema 3.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado de X no vacío, entonces la partición $\mathcal{G}_A$ definida como sigue es semicontinua superior*

$$\mathcal{G}_A = \{A\} \cup \{\{z\}\colon z \in X - A\}.$$

Demostración. Sean $G \in \mathcal{G}_A$ y $U \in \tau$ con $G \subset U$. Primero supongamos que $G = A$ y sean $V = U$ y $B \in \mathcal{G}_A$ con $B \cap V \neq \emptyset$. Si $B = A$, se sigue que $B \subset U$ y entonces $\mathcal{G}_A$ es semicontinua superior, por otro lado, si $B = \{z\}$ para algún $z \in X - A$, entonces $z \in V$ y luego $B \subset U$ y así $\mathcal{G}_A$ es semicontinua superior.
Ahora supongamos que $G = \{x\}$ para algún $x \in X - A$. Consideremos $V = U \cap (X - A) \in \tau$ y sea $B \in \mathcal{G}_A$ con $B \cap V \neq \emptyset$. Note que $B \neq A$ pues si $B = A$, por un lado tendríamos que $A \cap V \neq \emptyset$ mientras que por otro $A \cap V = A \cap (U \cap (X - A)) = \emptyset$, por tanto $B = \{z\}$ para algún $z \in X - A$, como $\{z\} \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $z \in V = U \cap (X - A)$ y en consecuencia $\{z\} = B \subset U$ y por tanto $\mathcal{G}_A$ es semicontinua superior. $\square$

Nota: Dado (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{G}_A$ definida como en el teorema 3.18, denotaremos el espacio de descomposición $(\mathcal{G}_A, \tau(\mathcal{G}_A))$ simplemente por X/A, a saber, podemos pensar intuitivamente a X/A como el espacio obtenido de X al reducir A a un punto. Además, en el caso en que X es un espacio metrico compacto o un continuo, claramente por el lema 3.16 y por el teorema 3.17 X/A será metrizable o un continuo, respectivamente.

Capítulo 4

Conos

En este capítulo, se define el cono de un epacio topológico, en particular se estudia este objeto sobre continuos, tales como las gráficas finitas, las dendritas y las dendritas locales.

4.1. Conos de continuos

En el capítulo 3, dados un espacio topológico X y A un subconjunto cerrado de X, hemos construido mediante las particiones semicontunuas superiores, su espacio de descomposición, que denotamos por X/A. La siguiente definición está basada en esta construcción:

Definición 4.1. *Consideremos $Z = X \times [0,1]$ con X un espacio topológico, $A = \{(x,1) \colon x \in X\}$. El **Cono de** X es $Cono(X) = Z/A = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$.*

- $X \times [0,1]$ es llamado el **cilindro** de X,
- La base del $Cono(X)$ es el conjunto $B = \pi(\{(x,0) \colon x \in X\})$,
- A es el vértice del $Cono(X)$ y lo denotaremos por v_X,
- Nótese que en el caso en que X es un continuo, tenemos por el teorema 3.17 que $Cono(X)$ también es un continuo,
- Los puntos del $Cono(X)$ son de la forma $[(x,t)]$ donde $x \in X$ y $t \in [0,1]$.

Los siguientes resultados nos dicen que de hecho solo con que X sea métrico y compacto, se tendrá que el $Cono(X)$ es un continuo.

Teorema 4.2. *Sea X un espacio topológico, entonces el $Cono(X)$ es contráctil.*

Demostración. Consideremos $H\colon Cono(X) \times [0,1] \to Cono(X)$ como:

$$H([(x,t)],s) = \begin{cases} [(x,(1-s)t+s)], & si \quad t \in [0,1), \\ \\ v_X, & si \quad t = 1. \end{cases}$$

Obsérvese que:

$$H([(x,t)],0) = [(x,(1-0)t+0)] = [(x,t)]$$

y

$$H([(x,t)],1) = [(x,(1-1)t+1)] = [(x,1)] = v_X.$$

Vamos a probar que H es continua, en efecto, analicemos esto en dos casos, supongamos primero que $t < 1$, nótese que $H^*\colon X \times [0,1] \times [0,1] \to X \times [0,1]$ dada por $H^*(x,t,s) = (x,(1-s)t+s)$, es continua y en consecuencia $H = \pi \circ H^*$ es continua en $Cono(X) \times [0,1] \setminus \{v_X\} \times [0,1]$ con $\pi\colon X \times [0,1] \to Cono(X)$ la función natural. Ahora bien, si $t = 1$, H es constante para cada $s \in [0,1]$, a saber $H(v_X,s) = v_X$, sea U un abierto de $Cono(X)$ que contiene a v_X, a saber, U tiene la siguiente forma: $U = \pi(X \times (1-\epsilon,1])$ para $\epsilon > 0$, es decir que U contiene los puntos $[(x,t)]$ del $Cono(X)$ para los que $t > 1-\epsilon$.
Ahora bien, consideremos $W = \pi(X \times (1-\eta,1]) \times (s-\delta,s+\delta)$ con $\eta = \epsilon$ si $s = 1$ o bien $\eta = \frac{\epsilon}{2}$ si $s < 1$ y con $\delta > 0$ suficientemente pequeña, tal W es un abierto de $Cono(X) \times [0,1]$ tal que $(v_X,s) \in W$. Sea $(v,s') \in W$, para el caso en que $s = 1$, se tiene que $W = (X \times (1-\epsilon,1]) \times (1-\delta,1+\delta)$, luego $s' \in (1-\delta,1+\delta)$, entonces $|s'-1| < \delta$ para δ tan pequeña como quieramos, digamos $\delta < \epsilon$, si $t > 1-\eta$, entonces $(1-s')t+s' > (1-s')(1-\eta)+s' = 1-\eta-s'+s'\eta+s' = 1-(1-s')\eta > 1-\delta\eta > 1-\delta\epsilon > 1-\epsilon$, y como

$$H(v_X,s') = \begin{cases} [(x,(1-s')t+s')] & si \quad t \in [0,1), \\ \\ v_X & si \quad t = 1, \end{cases}$$

se tiene que $H(v_X,s') \in U$ ya que $(1-s')t+s' > 1-\epsilon$.
Ahora bien para el caso en que $s < 1$, se tiene que $W = \pi(X \times (1-\frac{\epsilon}{2},1] \times$

$(s-\delta, s+\delta))$, sea $(v_X, s') \in W$, luego $s' \in (s-\delta, s+\delta)$ para $\delta > 0$ tan pequeña como quieramos, digamos $\delta < \frac{\epsilon}{2}$, es decir, que $s' - s < \frac{\epsilon}{2}$, entonces $s' < \frac{\epsilon}{2} + s < \frac{\epsilon}{2} + 1$. Si $t > 1 - \eta$, entonces $(1-s')t + s' > (1-s')(1-\eta) + s' = 1 - (1-s')\eta > 1 - \eta = 1 - \frac{\epsilon}{2} > 1 - \epsilon$, de donde al igual que en el caso previo $H(v_X, s') \in U$ y así H es continua, por lo tanto $Cono(X)$ es contráctil. □

Teorema 4.3. *Sea X un espacio topológico, entonces el $Cono(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Se sigue del teorema 4.2 y del hecho de que todo espacio contráctil es conexo por trayectorias ver 2.38. □

Corolario 4.4. *Sea X un espacio métrico, compacto y no vacío, entonces el $Cono(X)$ es un continuo.*

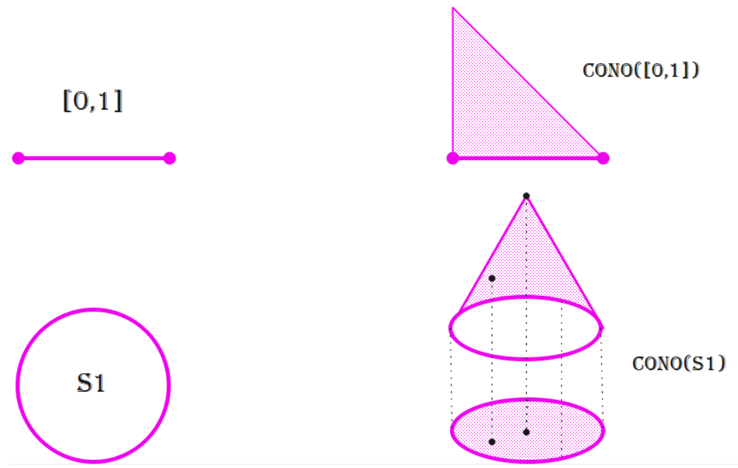
Demostración. El teorema 4.3 nos dice que $Cono(X)$ es conexo por trayectorias, entonces $Cono(X)$ es conexo y así $Cono(X)$ es un continuo. □

Definición 4.5. *Sea X un espacio topológico y consideremos el $Cono(X)$ con base B, llamamos* ***Suspensión sobre*** *X al espacio de descomposición $Cono(X)/B$ el cual denotamos por $Sus(X) = Cono(X)/B = ((X \times [0,1])/(X \times \{1\}))/(X \times \{0\})$.*

Anteriormente se definió lo que era un n-odo simple [véase 1.9], a saber, si consideramos $n \in \mathbb{N}$ y X como un espacio discreto de n puntos con $n \geq 3$ podemos ver un n-odo simple como $Cono(X)$ y en lo consecuente lo denotaremos simplemente por T_n.

Definición 4.6. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un espacio discreto de n puntos con $n \geq 3$, llamamos curva n-**teta** al espacio $Sus(X)$ y lo denotaremos por Θ_n.*

Pueden existir espacios no homeomorfos cuyos conos si lo sean, a saber, el intervalo $[0,1]$ y S^1 no son homeomorfos, sin embargo sus conos si lo son, ya que tanto $Cono([0,1])$ como $Cono(S^1)$ son homeomorfos a una **2-celda**.



Otro ejemplo a destacar que tiene que ver con nuestras definiciones previas, consiste en tomar $n \in \mathbb{N}$: $n \geq 2$ y resulta ser que Θ_n y T_n son espacios no homeomorfos entre si, pero sus respectivos conos si lo son.

Este ejemplo previo en realidad es consecuencia de un resultado más general, en el siguiente teorema se demuestra que dado cualquier espacio topológico X, se tiene que $Cono(Cono(X))$ y $Cono(Sus(X))$ son homeomorfos.

Teorema 4.7. *[3, Lema (4.1)] Sea X un espacio topológico, entonces los espacios*

(i) $Cono(Cono(X))$,

(ii) $Cono(X) \times [0,1]$,

(iii) $Sus(Cono(X))$,

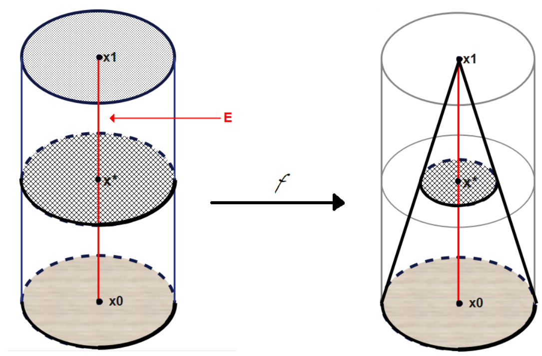
(iv) $Cono(Sus(X))$,

son homeomorfos entre ellos.

Demostración. $\boxed{(i) \approx (ii)}$ Consideremos la función $f\colon Cono(X)\times[0,1] \to Cono(X) \times [0,1]$ dada por

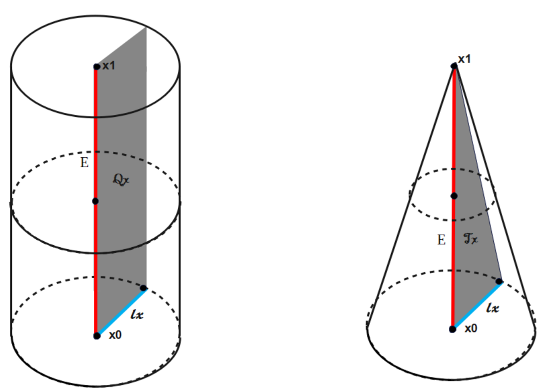
$$f(([(x,t)],s)) = ([(x,(1-s)t)],s)$$

nótese que esta función deja invariante al conjunto $Cono(X) \times \{0\}$ y para cada $s \in (0,1)$ manda a $Cono(X) \times \{s\}$ en el subcono de radio s contenido en $Cono(X) \times \{s\}$, además manda al conjunto $Cono(X) \times \{1\}$ a un punto del $Cono(X) \times \{1\}$, digamos $x \times \{1\}$ con x algún punto del $Cono(X)$. Esta función induce un encaje que preserva el nivel del $Cono(Cono(X))$ en $Cono(X) \times [0, 1]$. A saber, la imagen de este encaje es una forma particular de caracterizar al $Cono(Cono(X))$ que convenimos en denotar por $C(C(X))$. Obsérvese que los espacios $Cono(X) \times [0, 1]$ y $C(C(X))$ contienen como subespacio a $x \times [0, 1]$ el cual llamaremos *eje* y lo denotaremos simplemente por E, para ilustrar esto véase la figura de abajo tomando $x_0 = (x, 0)$, $x_1 = (x, 1)$ y $x^* = (x, \frac{1}{2})$.



$Cono(X) \times [0, 1]$ y $C(C(X))$

Ahora bien, dado $x \in Cono(X)$, el segmento l_x del $Cono(X)$ determina un "cuadrado" $Q_x = l_x \times [0, 1]$ en $Cono(X) \times [0, 1]$, también l_x determina un "triángulo rectángulo" T_x en $C(C(X))$ tal que T_x y Q_x tienen como lados comunes a E y a l_x, ilustramos esta idea a continuación:



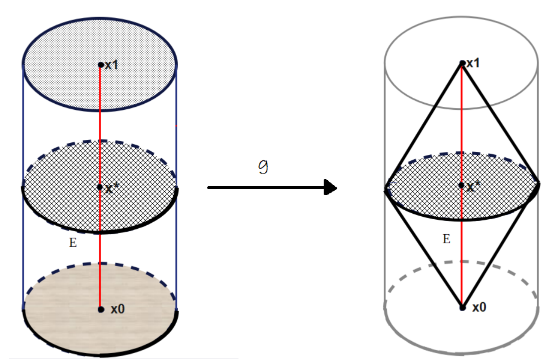
$Cono(X) \times [0, 1]$ y $C(C(X))$ son homeomorfos

Luego para cada x podemos escoger un homeomorfismo $\psi_x\colon Q_x \to T_x$ que mantenga invariantes los lados comunes E y l_x y usando el mismo homeomorfismo para cada x, podemos combinar estos en un solo homeomorfismo $\Psi\colon Cono(X) \times [0,1] \to C(C(X))$ y así $Cono(X) \times [0,1]$ y $C(C(X))$ son homeomorfos.

$\boxed{(ii) \approx (iii)}$ Para esta parte consideremos la función $g\colon Cono(X)\times[0,1] \to Cono(X) \times [0,1]$ dada por

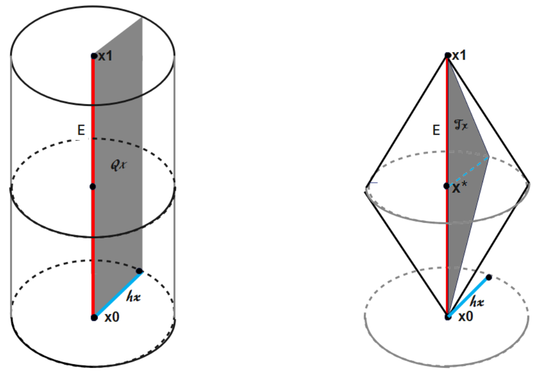
$$g(([(x,t)],s)) = ([(x,(1-|1-2s|)t)],s).$$

Nótese que esta función deja invariante al conjunto $Cono(X)\times\{\frac{1}{2}\}$, manda el conjunto $Cono(X)\times\{0\}$ a un punto de $Cono(X)\times\{0\}$ y manda el conjunto $Cono(X)\times\{1\}$ a un punto de $Cono(X)\times\{1\}$. La función g induce un encaje que preserva el nivel de la $Sus(Cono(X))$ en $Cono(X) \times [0,1]$. A saber, la imagen de este encaje es también una forma particular de caracterizar a la $Sus(Cono(X))$ que convenimos en denotar por $SC(X)$. También aquí, $Cono(X) \times [0,1]$ y $SC(X)$ tienen como subespacio común a E, sirve de ilustración la figura que a continuación se presenta:



$Cono(X) \times [0,1]$ y $SC(X)$

Ahora bien, dado $x \in Cono(X) \times \{0\}$, el segmento h_x del $Cono(X)$ determina un "cuadrado" $Q_x = l_x \times [0,1]$ en $Cono(X) \times [0,1]$, también h_x determina un "triángulo isósceles" T_x en $SC(X)$ tal que T_x y Q_x tienen como lado común a E y "altura" común h_x, ilustramos esta idea a continuación:



$Cono(X) \times [0,1]$ y $SC(X)$ son homeomorfos

Luego para cada x podemos escoger un homeomorfismo $\psi_x \colon Q_x \to T_x$ que mantenga invariantes a E y a la altura h_x y usando el mismo homeomorfismo para cada x, podemos combinar estos en un solo homeomorfismo $\Psi \colon Cono(X) \times [0,1] \to SC(X)$ y así $Cono(X) \times [0,1]$ y $SC(X)$ son homeomorfos.

$\boxed{(iii) \approx (iv)}$ Para cada $x \in X$, sea $L_x = \{[(x,t)] \in Cono(X) \colon t \in [0,1]\}$ la línea del cono que une x con v_X, luego $Sus(L_x)$ es un "triángulo" T_x contenido en $Sus(Cono(X))$. Para cada $x \in X$, los T_x tienen en común el segmento A que contiene a v_X y cuyos vértices son p_0 y p_1. Así, $Sus(Cono(X)) = \bigcup_{x \in X} T_x$ donde $T_x \cap T_y = A$ para cada $x \neq y \in X$.
Por otro lado, para cada $x \in X$, sea $M_x = \{[(x,s)] \in Sus(X) \colon s \in [0,1]\}$ la línea en la suspensión que contiene a x, luego $Cono(M_x)$ es un "triángulo" T'_x contenido en $Cono(Sus(X))$, a saber, estos T'_x tiene en común el segmento A' que contiene a $v_{Sus(X)}$ y cuyos vértices son p'_0 y p'_1 (polos de $Sus(X)$), así $Cono(Sus(X)) = \bigcup_{x \in X} T'_x$ con $T'_x \cap T'_y = A'$ para cada $x \neq y \in X$, luego, para cada $x \in X$, sea $\psi_x \colon T_x \to T'_x$ un homeomorfismo tal que $\psi_x(p_0) = p'_0$, $\psi_x(p_1) = p'_1$ y $\psi_x(v_x) = v_{Sus(X)}$, se sigue que $Sus(Cono(X))$ y $Cono(Sus(X))$ son homeomorfos. $\square$

Definición 4.8. *Sea X un continuo y sea $\mathfrak{n}$ un número cardinal. Diremos que un punto $x \in X$ es de orden menor o igual que $\mathfrak{n}$ en X, lo cual denotamos por $ord(x,X) \leq \mathfrak{n}$, si x tiene una base de abiertos $\mathcal{B}_x$ tal que $|fr_X(B)| \leq \mathfrak{n}$ para cada $B \in \mathcal{B}_x$. El número cardinal $\mathfrak{n}$ más pequeño con esta propiedad es llamado el orden del punto x en X y lo denotamos por $ord(x,X) = \mathfrak{n}$.*

Definición 4.9. *Sea X un continuo y consideremos $x \in X$, diremos que:*

- *x es un **punto de ramificación** de X si $ord(x, X) \geq 3$,*
- *x es un **punto ordinario** de X si $ord(x, X) = 2$,*
- *x es un **punto extremo** en X si $ord(x, X) = 1$.*

Sean

$$\begin{aligned} R(X) &= \{x \in X \colon x \text{ es punto de ramificación de } X\}, \\ O(X) &= \{x \in X \colon x \text{ es punto ordinario de } X\}, \\ E(X) &= \{x \in X \colon x \text{ es punto extremo de } X\}. \end{aligned}$$

Definición 4.10. *Sea X un continuo, diremos que $x \in X$ es un **punto euclidiano** si existe una vecindad de x en X que es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, también diremos que x es un punto semieuclidiano de X si x tiene una vecindad que es homeomorfa al semiespacio $\{(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n \colon p_n \geq 0\}$, además denotamos por:*

- *$\alpha(X) = \{x \in X \colon x$ es un punto euclidiano de $X\}$,*
- *$\beta(X) = \{x \in X \backslash \alpha(X) \colon x$ es un punto semieuclidiano de $X\}$,*
- *$\gamma(X) = X \backslash (\alpha(X) \cup \beta(X))$.*

Nota: Las componentes de $\alpha(X)$ son llamadas **componentes euclidianas de X**.

Ejemplo 4.11. *Consideremos $X = [0, 1]$ se tiene que $\alpha(X) = (0, 1)$, ya que cada $x \in (0, 1)$ tiene una vecindad de la forma (a, b) con $0 < a < x < b < 1$, tal vecindad como sabemos es homeomorfa a $\mathbb{R}$, también para este ejemplo se tiene que $\beta(X) = \{0, 1\}$, como consecuencia de que las vecindades de 0 y 1 son de la forma $[0, b)$ y $(a, 1]$ respectivamente, que a su vez son homeomorfas a $[0, \infty)$. De esto tenemos que $\gamma(X) = \emptyset$. Más aún dado que $\alpha(X)$ es conexo, entonces X solo tiene una componente euclidiana, a saber $(0, 1)$.*

Ejemplo 4.12. *Consideramos $X = S^1$, a saber, $\alpha(X) = X$ ya que cada punto de S^1 tiene vecindades homeomorfas a $\mathbb{R}$, luego, claramente $\beta(X) = \emptyset$ y $\gamma(X) = \emptyset$, además como $\alpha(X) = S^1$ y sabemos que S^1 es conexo, entonces X tiene una sola componente euclidiana, a saber S^1.*

Ejemplo 4.13. *Consideremos* $X = S^1 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$, *se tiene que* $\alpha(X) = X \backslash \{(1,0),(2,0)\}$, $\beta(X) = \{(2,0)\}$ *y* $\gamma(X) = \{(1,0)\}$, *nótese que las vecindades de* $(1,0)$ *son triodos con vértice* $(1,0)$ *y en particular estos no son puntos euclidianos ni semieuclidianos. Finalmente obsérvese que* X *tiene dos componentes euclidianas, a saber* $S^1 \backslash \{(1,0)\}$ *y* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x < 2, y = 0\}$.

Teorema 4.14. *Si* X *es una curva localmente conexa, entonces se cumplen:*

(i) X *es una curva cerrada simple si y solo si* $v_X \in \alpha(Cono(X))$,

(ii) X *es un intervalo si y solo si* $v_X \in \beta(Cono(X))$,

(iii) $\alpha(X \times [0,1)) = \alpha(X) \times (0,1)$.

Demostración. (i) $\boxed{\Rightarrow}$ Si X es una curva cerrada simple cualquier vecindad del vértice del $Cono(X)$ es homeomorfa a un disco abierto que a su vez es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, de donde $v_X \in \alpha(Cono(X))$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $v_X \in \alpha(Cono(X))$ A saber $X \neq [0,1]$, nótese que si sucediera que $X = [0,1]$ tendríamos que existe una vecindad en el $Cono(X)$ homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, pero las vecindades de v_X son homeomorfas al semiespacio euclidiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$ y estas no son homeomorfas a $\mathbb{R}^n$, para algún n. Así, supongamos que $R(X) \neq \emptyset$ y tomemos $p \in R(X)$ fijo, nótese que cada vecindad de v_X contiene puntos de la forma $[(p,t)]$ y conjuntos de la forma $T_3 \times [0,1]$, tales vecindades no son planas y luego v_X no pertenece a $\alpha(Cono(X))$, lo cual es una contradicción. Así $R(X) = \emptyset$ y en consecuencia, cada punto de X es ordinario, por lo tanto, X es una curva cerrada simple.

(ii) $\boxed{\Rightarrow}$ Si X es un intervalo cualquier vecindad del vértice v_X del $Cono(X)$ es homeomorfa al semiespacio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$, de donde $v_X \in \beta(Cono(X))$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $v_X \in \beta(Cono(X))$. Se tiene que X no puede ser una curva cerrada simple, ya que si X lo fuera, tendríamos por el inciso (i) que $v_X \in \alpha(Cono(X))$ y eso contradice nuestra hipótesis. Luego, al igual que en el inciso anterior, supongamos que $R(X) \neq \emptyset$, de igual manera tomemos $p \in R(X)$ fijo, luego cada vecindad de v_X contiene puntos de la forma $[(p,t)]$ y conjuntos de la forma $T_3 \times [0,1]$ y al igual que en el inciso anterior v_X no pertenece a $\beta(Cono(X))$ lo cual es una contradicción, de donde debe suceder que $R(X) = \emptyset$ y así X es un intervalo.

(iii) Sea $(x,t)\in\alpha(X)\times(0,1)$, entonces $x\in\alpha(X)$ y $t\in(0,1)$, como $x\in\alpha(X)$ existe una vecindad V de x homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ para algún $n\in\mathbb{N}$ y como $(0,1)$ homeomorfo a $\mathbb{R}$, entonces $V\times(0,1)$ es una vecindad de (x,t) homeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1}$, de donde $(x,t)\in\alpha(X\times(0,1))$, luego $(x,t)\in\alpha(X\times[0,1))$ y así $\alpha(X)\times(0,1)\subseteq\alpha(X\times[0,1))$.
Ahora, obsérvese que $\alpha(X)=X\backslash(\beta(X)\cup\gamma(X))$, por lo que si $x\in\beta(X)\cup\gamma(X)$ se implica que x no es un punto euclidiano de X, luego $(x,t)\notin\alpha(X\times[0,1))$ ya que si (x,t) es un punto euclidiano de $\alpha(X\times[0,1))$, existe una vecindad de (x,t) homeomorfa a algun espacio euclidiano, note que las vecindades de (x,t) son homeomorfas a un semiespacio euclidiano o bien contienen conjuntos de la forma $T_3\times[0,1]$. Ahora, si $x\notin\beta(X)\cup\gamma(X)$ se implica que $(x,t)\in\alpha(X)\times(0,1)$ y así $\alpha(X\times[0,1))\subseteq\alpha(X)\times(0,1)$. □

Corolario 4.15. *Sea X una curva localmente conexa que no es una curva cerrada simple, entonces:*

(i) Cualquier componente euclidiana M del $Cono(X)$ es de la forma $M=N\times(0,1)$ para alguna componente euclidiana N de X.

(ii) Para cualquier componente euclidiana N de X, se tiene que $N\times(0,1)$ es una componente euclidiana del $Cono(X)$.

Demostración. (i) Dado que X no es una curva cerrada simple se tiene por el teorema 4.14(i) que $v_X\notin\alpha(Cono(X))$, de donde $\alpha(Cono(X))=\alpha(X\times[0,1))$. Luego por el teorema 4.14(iii), implicamos que $\alpha(Cono(X))=\alpha(X)\times(0,1)$, así, si M es una componente de $\alpha(Cono(X))$, entonces M es una componente de $\alpha(X)\times(0,1)$. Obsérvese que $\alpha(X)=\bigcup C_\delta$, donde C_δ componente de $\alpha(X)$, por lo que $\alpha(X)\times(0,1)=\left(\bigcup C_\delta\right)\times(0,1)=\bigcup(C_\delta\times(0,1))$, donde $C_\delta\times(0,1)$ conexo para cada δ y $(C_\delta\times(0,1))\cap(C_\varepsilon\times(0,1))=\emptyset$ si $\delta\neq\varepsilon$, luego M es $N\times(0,1)$ para $N=C_\delta$ para alguna δ.

(ii) Sea N una componente de $\alpha(X)$, luego $N\times(0,1)$ es un conexo contenido en $\alpha(X)\times(0,1)=\alpha(X\times[0,1))$, de donde $N\times(0,1)\subset M$ para alguna componente M de $\alpha(X\times[0,1))$. Por el inciso anterior $M=K\times(0,1)$ para alguna componente K de $\alpha(X)$ de donde $N\times(0,1)\subset K\times(0,1)$, entonces $N\subset K$ y como N es componente de $\alpha(x)$ se tiene que $N=K$, es decir, $M=N\times(0,1)$ y por lo tanto $N\times(0,1)$ componente de $\alpha(Cono(X))$. □

Ejemplo 4.16. *Si consideramos el triodo simple* $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$*, donde* A_1*,* A_2 *y* A_3 *son arcos con puntos extremos* e_1*,* e_2 *y* e_3 *respectivamente y punto extremo en común* p*, se tiene que:*

$\alpha(X) = A_1\backslash\{p, e_1\} \cup A_2\backslash\{p, e_2\} \cup A_3\backslash\{p, e_3\}$,

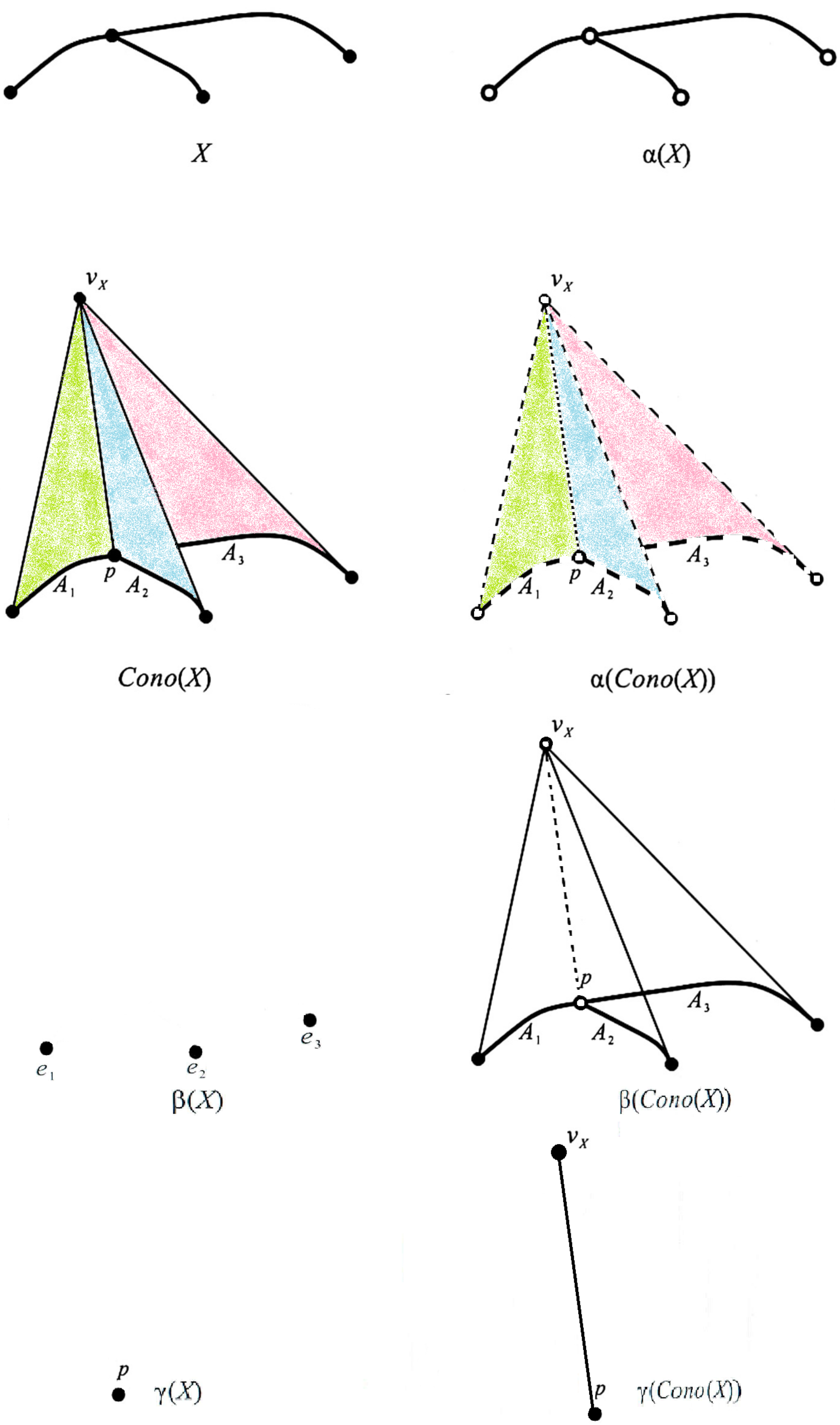
$\alpha(Cono(X)) = (A_1\backslash\{p, e_1\}\times(0, 1))\cup(A_2\backslash\{p, e_2\}\times(0, 1))\cup(A_3\backslash\{p, e_3\}\times (0, 1))$,

$\beta(X) = \{e_1, e_2, e_3\}$,

$\beta(Cono(X)) = (X \times \{0\}) \cup (\beta(X) \times [0, 1))$,

$\gamma(X) = \{p\}$,

$\gamma(Cono(X)) = \{p\} \times [0, 1]$.


X
$\alpha(X)$
v_X
p
A_1
A_2
A_3
$Cono(X)$
$\alpha(Cono(X))$
e_1
e_2
e_3
$\beta(X)$
$\beta(Cono(X))$
$\gamma(X)$
$\gamma(Cono(X))$

Para los resultados que veremos más adelante es necesario considerar los siguientes subconjuntos de X y del $Cono(X)$.

Notación 4.17. *Sea X un continuo. Consideremos lo siguientes conjuntos:*

- $O_{NL}(X) = O(X) \cap cl_X(E(X))$,
- $E_D(X) = E(X) \cap cl_X(R(X))$,
- $E_{ND}(X) = E(X) \backslash E_D(X)$,
- $C_X = \{w \in Cono(X) \colon w$ *pertenece al interior como variedad de una 2-celda en* $Cono(X)\}$,
- $D_X = Cono(X) \backslash C_X$,
- $S_X = \{w \in D_X \colon w$ *es el vértice de un triodo simple contenido en* $D_X\}$,
- $T_X = D_X \backslash S_X$,
- $H_X = \{w \in Cono(X) \colon w$ *tiene una vecindad aplanable en* $Cono(X)\}$.

4.2. Conos de gráficas finitas

En general las *Gráficas* se pueden caracterizar de diversas formas, para este trabajo veamos el siguiente concepto.

Definición 4.18. *Una* ***gráfica finita*** *es un continuo que puede escribirse como la unión finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos o son ajenos o bien se intersectan solo en uno o en sus dos puntos extremos.*

El siguiente lema generaliza la idea presentada en el ejemplo 4.16.

Lema 4.19. *[6, Lema 3.1] Sea X una gráfica finita y supongamos que $|R(X)| = m \geq 1$, entonces:*

(i) $\gamma(Cono(X)) = R(X) \times [0, 1]$ *y, por lo tanto,* $\gamma(Cono(X))$ *es el cono sobre el espacio discreto con m puntos,*

(ii) *Si $m = 1$, entonces* $\gamma(Cono(X)) \subset cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1))$ *para cada componente euclidiana J de X,*

(iii) *Si* $R(X) = \{p, q\}$ *con* $p \neq q$*, entonces* $\gamma(Cono(X))$ *es el arco* $\{p, q\} \times [0, 1]$*. Si existe una componente euclidiana* J *de* X *tal que* $cl_X(J) \cap \{p, q\} = \{p\}$*, entonces* $cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1)) \cap \gamma(Cono(X))$ *es el arco* $\{p\} \times [0, 1]$*.*

Demostración. (i) Consideremos $J^* = \bigcup\{J \times (0,1) \colon J$ es una componente euclidiana de $X\}$, a saber, $J^* = (X \backslash (\beta(X) \cup \gamma(X))) \times (0, 1) = \alpha(X) \times (0, 1)$, luego por el teorema 4.14 (iii), $J^* = \alpha(X \times [0, 1))$ y, en consecuencia, $J^* \subset \alpha(Cono(X))$. Dado que X tiene al menos un punto de ramificación, entonces X no puede ser una curva cerrada simple y tampoco un intervalo, de donde por 4.14 (i) e (ii), tenemos que $v_X \notin \alpha(Cono(X)) \cup \beta(Cono(X))$. Obsérvese que $\beta(Cono(X)) = (\alpha(X) \times \{0\}) \cup (\beta(X) \times [0, 1))$ de donde $\gamma(Cono(X)) = R(X) \times [0, 1]$.
(ii) Como $m = 1$, tenemos que $R(X)$ tien un único elemento, entonces denotemos por p al único punto de ramificación de X, obsérvese que para cualquier componente euclidiana J de X se tiene que $p \in cl_X(J)$, más aún, por el inciso (i) $\gamma(Cono(X)) = \{p\} \times [0, 1]$, de donde se tiene que $\gamma(Cono(X)) \subset cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1))$ para cualquier componente euclidiana J de X.
(iii) Sea J una componente euclidiana de X tal que $cl_X(J) \cap \{p, q\} = \{p\}$, entonces $\{p\} \times [0, 1] \subset cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1))$. Obsérvese que si $z \in \{q\} \times [0, 1)$ existe V vecindad de z en $Cono(X)$ tal que $V \cap (J \times (0, 1)) = \emptyset$, por lo que $z \notin cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1))$ para cualquier $z \in \{q\} \times [0, 1)$ y así $cl_{Cono(X)}(J \times (0, 1)) \cap \gamma(Cono(X)) = \{p\} \times [0, 1]$. □

Lema 4.20. *Consideremos a* X *como una gráfica finita y a* Y *una curva localmente conexa. Si* $Cono(X)$ *y* $Cono(Y)$ *son homeomorfos, entonces* Y *es una gráfica finita.*

Demostración. Como X es una gráfica finita se tiene que X tiene un número finito de componentes euclidianas y también un número finito de puntos de ramificación, luego el corolario 4.15 nos dice que por cada componente euclidiana en X hay una componente euclidiana en $Cono(X)$ y viceversa, de donde $Cono(X)$ tiene un número finito de componentes euclidianas. Además, S_X es un conjunto finito. Luego, tenemos por hipótesis que $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos y recordemos que el número de componentes es un invariante topológico, entonces $Cono(Y)$ tiene un número finito de componentes euclidianas y S_Y es un conjunto finito, argumentando de manera similar por el corolario 4.15, se tiene que Y tiene un número finito de componentes euclidianas y un número finito de puntos de ramificación. Por tanto Y es una gráfica finita. □

El siguiente teorema y corolario nos ayudarán a demostrar el corolario 4.24, mismo que será de gran utilidad en el resultado principal de este trabajo.

Teorema 4.21. *[12, Teorema (4.1)] Si X y Y son curvas localmente conexas y $X \times [0,1)$ es homeomorfo a $Y \times [0,1)$, entonces X y Y son homeomorfos.*

Corolario 4.22. *Si X y Y son curvas localmente conexas y $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ un homeomorfismo tal que $h(v_X) = v_Y$, entonces X y Y son homeomorfos.*

Demostración. Sean X y Y curvas localmente conexas, como $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ es homeomorfismo tal que $h(v_X) = v_Y$, entonces $h(X \times [0,1)) = Y \times [0,1)$, de donde $X \times [0,1)$ e $Y \times [0,1)$ son homeomorfos y así por el teorema 4.21, X y Y son homeomorfos. □

Lema 4.23. *Sea Y un continuo y consideremos a X una gráfica finita que no sea un intervalo, una curva cerrada simple, un n-odo o una n-teta para $n \geq 3$. Si $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(v_X) = v_Y$.*

Demostración. Supongamos que X tiene al menos un punto de ramificación, es decir que $|R(X)| = m \geq 1$, por tanto, supongamos primero que $m \geq 3$, por el lema 4.19 (i) y dado que $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos se tiene que $\gamma(Cono(X))$ y $\gamma(Cono(Y))$ son conos sobre el espacio discreto de m puntos, es decir, son $m-odos$ simples, luego $h(\gamma(Cono(X))) = \gamma(Cono(Y))$ y h manda el corazón de $\gamma(Cono(X))$ en el corazón de $\gamma(Cono(Y))$, en consecuencia $h(v_X) = v_Y$.
Ahora supongamos que $m = 2$ y digamos que $R(X) = \{p, q\}$ con $p \neq q$, a saber, existe una componente euclidiana J de X tal que $cl_X(J) \cap \{p, q\}$ contienen un solo elemento p o q, ya que si $cl_X(J) \cap \{p, q\} = \{p, q\}$, para toda componente euclidiana de X, se tendría que X es una n-teta lo cual sería una contradicción. Sin pérdida de generalidad supongamos que $cl_X(J) \cap \{p, q\} = \{p\}$, así por el lema 4.19 (iii), $cl_{Cono(X)}(J \times (0,1)) \cap \gamma(Cono(X))$ es el arco $\{p\} \times [0,1]$. Además por el corolario 4.15 (ii), el conjunto $E = J \times (0,1)$ es una componente euclidiana de $Cono(X)$ por lo que $h(E)$ es una componente euclidiana de $Cono(Y)$, por el Corolario 4.15 (i), existe una componente

euclidiana L de Y para la que $h(E) = L \times (0,1)$. El lema 4.19 nos dice que $\gamma(Cono(X))$ es el arco $\{p,q\} \times [0,1]$ y como $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos, entonces $\gamma(Cono(Y))$ es un arco.
Consideremos:

$$J_0 = cl_{Cono(X)}(J \times (0,1)) \cap \gamma(Cono(X)) = \{p\} \times [0,1]$$

y

$$L_0 = cl_{Cono(Y)}(L \times (0,1)) \cap \gamma(Cono(Y)).$$

Obsérvese que J_0 es un subarco propio del arco $\gamma(Cono(X))$ y como $h(\gamma(Cono(X))) = \gamma(Cono(Y))$, entonces $h(J_0) = L_0$ y L_0 es un subarco propio del arco $\gamma(Cono(Y))$. Por el lema 4.19 (ii), Y tiene exactamente dos puntos de ramificación p_0 y q_0, luego $\gamma(Cono(Y))$ es el arco $\{p_0,q_0\} \times [0,1]$. Si L contiene a ambos puntos p_0 y q_0, por la construcción del $Cono(Y)$, tenemos que

$$\gamma(Cono(Y)) = \{p_0,q_0\} \times [0,1] \subset L_0 \subset \gamma(Cono(Y))$$

y entonces $L_0 = \gamma(Cono(Y))$ lo cual es una contradicción. Esto prueba que $cl_X(L) \cap \{p_0,q_0\}$ es un conjunto unipuntual, supongamos que $cl_X(L) \cap \{p_0,q_0\} = \{p_0\}$. Por tanto $L_0 = \{p_0\} \times [0,1]$. Ahora, como

$$h(\{p,q\} \times [0,1]) = h(\gamma(Cono(X))) = \gamma(Cono(Y)) = \{p_0,q_0\} \times [0,1]$$

y como

$$h(\{p\} \times [0,1]) = h(J_0) = L_0 = \{p_0\} \times [0,1],$$

entonces $h(v_X) = h(p,1) = (p_0,1) = v_Y$.
Finalmente supongamos que $m = 1$. Dado que X no es un n-odo para $n \geq 3$, debe existir una componente euclidiana J de X tal que $cl_X(J)$ es una curva cerrada simple. Sea $p \in X$ tal que $R(X) = \{p\}$, luego por el corolario 4.15 (ii), $E = J \times (0,1)$ es una componente euclidiana de $Cono(X)$ y dado que $h(\gamma(Cono(X))) = \gamma(Cono(Y))$, entonces $h(E)$ es una componente euclidiana de $Cono(Y)$, luego existe una componente euclidiana L de Y tal que $h(E) = D = L \times (0,1)$. El lema 4.19 (i), nos garantiza que $\gamma(Cono(X)) = \{p\} \times [0,1]$, entonces $\gamma(Cono(Y))$ es un arco. Consideremos

$$\mathcal{A}_J = cl_{Cono(X)}(J \times (0,1)) \cap \beta(Cono(X))$$

$$\mathcal{A}_L = cl_{Cono(Y)}(L \times (0,1)) \cap \beta(Cono(Y)).$$

Como $h(E) = D$, se tiene que $h(\mathcal{A}_J) = \mathcal{A}_L$ y $h(cl_{Cono(X)}(\mathcal{A}_J)) = cl_{Cono(Y)}(\mathcal{A}_L)$, obsérvese que $cl_{Cono(X)}(\mathcal{A}_J) = cl_X(J \times \{0\})$ es una curva cerrada simple y por tanto $cl_{Cono(Y)}(\mathcal{A}_L)$ es una curva cerrada simple.
Ahora veamos que Y contiene exactamente un punto de ramificación, supongamos por el contrario que Y tiene exactamente dos puntos de ramificación p_0 y q_0. En el caso en que Y no es una n-teta para $n \geq 3$ notemos que Y satisface las hipótesis que se tenían para X en el caso anterior, de donde $h(v_X) = v_Y$, luego por el corolario 4.22 X y Y son homeomorfos, lo cual es una contradicción. Así para este caso supongamos que Y es una n-teta para algún $n \geq 3$, entonces $cl_{Cono(Y)}(\mathcal{A}_L) = cl_Y(L) \times \{0\}$ es un arco que une los puntos $(p_0, 0)$ y $(q_0, 0)$, lo cual es una contradicción, y entonces, Y contiene exactamente un punto de ramificación.
Sea $y \in Y$ tal que $R(Y) = \{y\}$. Si $cl_Y(L)$ es un arco que une a y con un punto extremo e de Y, entonces $\mathcal{A}_L = (L \times \{0\}) \cup (\{e\} \times [0,1])$, entonces $cl_{Cono(Y)}(\mathcal{A}_L)$ es un arco que une los puntos $(y, 0)$ y v_Y lo cual es una contradicción. Así $cl_Y(L)$ es una curva cerrada simple y entonces $cl_{Cono(Y)}(\mathcal{A}_L)$ es la curva cerrada simple $cl_Y(L) \times \{0\}$ por lo tanto $h(J \times \{0\}) = L \times \{0\}$.
Como $h(\{p\} \times [0,1]) = h(\gamma(Cono(X))) = \gamma(Cono(Y)) = h(\{y\} \times [0,1])$, tomando intersecciones concluimos que $h(p, 0) = (y, 0)$. Entonces h manda el otro punto extremo del arco $\gamma(Cono(X))$ al otro punto extremo del arco $\gamma(Cono(Y))$ y así $h(v_X) = v_Y$. □

Corolario 4.24. *Sea X una gráfica finita. Entonces X tiene la propiedad del cono único si y solo si X es diferente de un intervalo, una curva cerrada simple, un n-odo o una n-teta con $n \geq 3$.*

Demostración. Sea Y un continuo y supongamos que $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos, sea $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ un homeomorfismo, luego por el teorema 4.23, $h(v_X) = v_Y$, por el corolario 4.22, se tiene que X y Y con homeomorfos y por tanto X tiene la propiedad del cono único. □

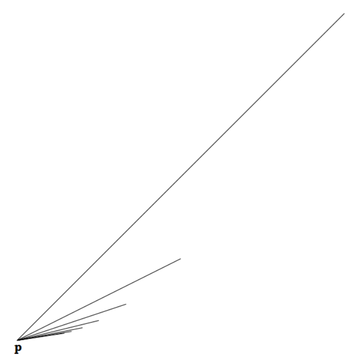
4.3. Conos de dendritas

En esta sección recordamos la definición de dendrita y dendrita local, se dan un par de ejemplos clásicos de estos conceptos y se prueba que la dendrita F_ω tiene la propiedad del cono único.

Definición 4.25. *Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 4.26. *El arco y T_n para $n \geq 3$ son ejemplos de dendritas.*

Ejemplo 4.27. *Al continuo que es homeomorfo a la unión de una cantidad infinita numerable de arcos $A_1, A_2, \ldots$ tales que tienen en común un punto extremo p y $\lim\limits_{i\to\infty} diam(A_i) = 0$ se le conoce como **punto peludo** y es una dendrita, la cual denotamos por F_ω.*



F_w.

Definición 4.28. *Una **dendrita local** es un continuo tal que cada punto tiene una vecindad que es una dendrita.*

Ejemplo 4.29. *El arco, la curva cerrada simple, T_n y Θ_n para $n \geq 3$ son dendritas locales.*

Ejemplo 4.30. *Toda dendrita es dendrita local*

Lema 4.31. *[16, Lema 5.1] Sea X una dendrita local y sea*

$$K_X = (X \times \{0\}) \cup (Cono(E(X))\backslash\{v_X\})$$

entonces $D_X = K_X$ si X contiene una curva cerrada simple o bien $D_X = K_X \cup \{v_X\}$ en caso contrario. Además si X es una dendrita local diferente de un arco, se tiene que $S_X = R(X) \times \{0\}$ si $v_X \in C_X$ y $S_X = (R(X) \times \{0\}) \cup \{v_X\}$ si $v_X \in D_X$.

Observación: *No perdamos de vista que $D_X = Cono(X)\backslash C_X$ por lo que podemos decir que si X contiene una curva cerrada simple entonces $C_X = [(O(X) \cup R(X)) \times (0,1)] \cup \{v_X\}$ y en caso contrario $C_X = (O(X) \cup R(X)) \times (0,1)$.*

Lema 4.32. *Sea X una dendrita que no es una gráfica finita y sea Y una dendrita local. Si $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos, entonces Y también es una dendrita.*

Demostración. Consideremos a $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ un homeomorfismo, En [10, Lema (4.4.2)] se demuestra que si D es una dendrita local que no tiene puntos extremos , entonces D es una gráfica finita. Afirmamos que Y tiene puntos extremos, ya que si $E(Y) = \emptyset$, entonces Y es una gráfica finita y dado que X es una curva localmente conexa, el lema 4.20, nos dice que X es una gráfica finita, lo cual es una contradicción. Por tanto $E(Y) \neq \emptyset$. Ahora supongamos que Y no es una dendrita, entonces Y contiene al menos una curva cerrada simple, luego por el lema 4.31, tenemos que:

$$D_Y = (Y \times \{0\}) \cup (Cono(E(Y))\backslash\{v_Y\})$$

de donde $v_Y \in C_Y$, ahora consideremos a e como un punto extremo de Y, nótese que el arco abierto $\{e\} \times (0,1)$ está contenido en D_Y pero su cerradura $cl_{Cono(Y)}(\{e\} \times (0,1)) = \{e\} \times [0,1] \not\subset D_Y$ ya que $v_Y \in C_Y$. Finalmente, como $h(D_X) = D_Y$, si J es un arco abierto contenido en D_X, $h(J)$ es un arco abierto de D_Y, ya que los arcos abiertos de D_X son precisamente las componentes euclidianas de D_X, además, para cualquier arco abierto J contenido en D_X, se tiene que $cl_{Cono(X)}(J) \subset D_X$. Luego al ser $\mathcal{A} = \{e\} \times (0,1)$ un arco abierto de D_Y, $h^{-1}(\mathcal{A})$ es un arco abierto contenido en D_X, entonces $cl_{Cono(X)}(h^{-1}(\mathcal{A})) \subset D_X$, por lo que, $h(cl_{Cono(X)}(h^{-1}(\mathcal{A}))) = cl_{Cono(Y)}(h(h^{-1}(\{e\} \times (0,1)))) = cl_{Cono(Y)}(\{e\} \times (0,1)) \subset D_Y$ lo cual es una contradicción, por lo tanto Y es una dendrita. $\square$

En [8, Teorema 16, pág. 344] se demuestra que las dendritas son retractos absolutos, luego entonces por el teorema 2.39 se tiene que toda dendrita es contráctil.

Lema 4.33. *Si X es una dendrita diferente de un arco, entonces para cada curva cerrada simple S contenida en D_X, se tiene que $v_X \in S$.*

Demostración. Como X es una dendrita, se sabe que X no contiene curvas cerradas simples, además X es una dendrita local, luego por el lema 4.31,

$$D_X = (X \times \{0\}) \cup Cono(E(X)).$$

Sea $S \subset D_X$ una curva cerrada simple y supongamos que $v_X \notin S$, es decir que $S \subset W \subset Cono(X)$ con $W = (X \times \{0\}) \cup (E(X) \times (0,1))$.

Como las dendritas son contráctiles y $E(X) \times (0,1)$ son arcos abiertos que también son contráctiles, se tiene que W es contráctil, más aún, como $S \subset W$ es un retracto de vecindad absoluto cerrado, se implica que S es un retracto de W por lo que S es contráctil, lo cual es una contradicción. Por lo tanto para cada curva cerrada simple contenida en D_X, se tiene que $v_X \in S$. □

Teorema 4.34. *Sean X y Y dendritas diferentes de un intervalo, un punto peludo o un n-odo para $n \geq 3$. Si $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(v_X) = v_Y$.*

Demostración. Sean K_X y K_Y como en el lema 4.31. Observemos que si X es una gráfica finita, tendríamos justamente las hipótesis del lema 4.23 y ya acabamos. Entonces supongamos que X no es una gráfica finita, luego por el lema 4.20, se tiene que Y no es gráfica finita, como X es una dendrita, entonces es dendrita local y no contiene curvas cerradas simples por lo que $D_X = K_X \cup \{v_X\}$, más aún, al ser X diferente de un arco y $v_X \in D_X$ se implica que $v_X \in S_X = (R(X) \times \{0\}) \cup \{v_X\}$, de la misma manera al ser Y una dendrita diferente de un arco $D_Y = K_Y \cup \{v_Y\}$ y $v_Y \in S_Y = (R(Y) \times \{0\}) \cup \{v_Y\}$. Dado que h homeomorfismo $h(D_X) = D_Y$ y $h(S_X) = h(S_Y)$ por lo que $h(v_X) \in D_Y$ y $h(v_X) \in S_Y$. Afirmamos que para todo $r \in R(Y)$, h no manda a v_X hacia $(r,0)$. En efecto, como Y dendrita diferente de F_ω y diferente del n-odo para $n \geq 3$, tenemos que $|R(Y)| \geq 2$, sea $r \in R(Y)$ fijo pero arbitrario, a saber, r es un punto de corte de Y. Sean $p \in R(Y) - \{r\}$ y L la componente de $Y - \{r\}$ que contiene a p y consideremos $e, f \in E(cl_Y(L)) - \{r\}$ con $e \neq f$, nótese que e y f son puntos extremos de Y, consideremos J como el arco en L con puntos extremos e y f y obsérvese que $\Gamma = (J \times \{0\}) \cup (Cono(\{e,f\})) \subset D_Y$ es una curva cerrada simple tal que $(r,0) \notin \Gamma$ y como $h(D_X) = D_Y$ tenemos que $h^{-1}(\Gamma)$ es una curva cerrada simple contenida en D_X, de donde por el lema 4.33, $v_X \in h^{-1}(\Gamma)$, entonces $h(v_X) \in \Gamma$ y así $h(v_X) \neq (r,0)$ para todo $r \in R(Y)$. Por lo tanto $h(v_X) = v_Y$. □

Teorema 4.35. *Sea X una curva localmente conexa. Si $Cono(X)$ es homeomorfo al $Cono(F_\omega)$, entonces X es homeomorfo a F_ω.*

Demostración. No perdamos de vista que F_ω es una dendrita y en consecuencia dendrita local, luego por el lema 4.39, se tiene que X debe ser una dendrita local. Ahora, dado que $Cono(X)$ es homeomorfo a $Cono(F_\omega)$, entonces $Cono(X)$ tiene un número infinito de componentes euclidianas J_i,

$i \in \mathbb{N}$, cada una de la forma $J_i = L_i \times (0,1)$, donde L_i es una componente euclidiana de X, obsérvese que $\gamma(Cono(X))$ es un arco, más aún, para cualesquiera componentes euclidianas J_i, J_j del $Cono(X)$ con $i \neq j \in \mathbb{N}$, se tiene que $cl_{Cono(X)}(J_i) \cap cl_{Cono(X)}(J_j) = \gamma(Cono(X))$, como X es localmente conexo, existe un punto $x \in X$ tal que para cada par de componentes euclidianas L_i, L_j de X con $i \neq j \in \mathbb{N}$, se tiene que $cl_X(L_i) \cap cl_X(L_j) = \{x\}$. Entonces X tiene un único punto de ramificación y un número infinito de componentes euclidianas, y dado que es localmente conexo se concluye que X debe ser homeomorfo a F_ω. □

4.4. Conos de dendritas locales

En esta última sección se demuestra el resultado principal de este trabajo (teorema 4.43), mismo que es una generalización del trabajo de Daria Michalik en [12]. Además como parte importante para la demostración del teorema 4.43, se prueba que si X es una dendrita local e Y una curva localmente conexa, tales que sus conos son homeomorfos, se implica que Y es una dendrita local.

Lema 4.36. *[17, Observación 4.1.3 (13)] Sean X una dendrita local y E_D, T_X, H_X, S_X, D_X como en definición 4.17, entonces*

$$E_D(X) \times (0,1) = (T_X \backslash cl_{D_X}(S_X)) \cap (T_X \backslash H_X).$$

Corolario 4.37. *Sean X y Y dendritas locales y $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$, entonces $h(E_D(X) \times (0,1)) = E_D(Y) \times (0,1)$.*

Demostración. Del lema 4.36 y dado que h homeomorfismo, se tiene que $h(E_D(X) \times (0,1) = h((T_X \backslash cl_{D_X}(S_X)) \cap (T_X \backslash H_X))$

$$\begin{aligned}
&= h(T_X \backslash cl_{D_X}(S_X)) \cap h(T_X \backslash H_X)\\
&= (h(T_X) \backslash cl_{D_Y}(T(S_X))) \cap (h(T_X) \backslash h(H_X))\\
&= (T_Y \backslash cl_{D_Y}(S_Y)) \cap (T_Y \backslash H_Y)\\
&= E_D(Y) \times (0,1).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.38. *[17, Observación 4.1.4] Sea X una dendrita local diferente de un arco y una curva cerrada simple, y sea $M \subset Cono(X)$. Entonces M es* *una componente de $T_X \cap H_X$ si y solo si existe una componente euclidiana A de X tal que $cl_X(A)$ tiene dos puntos extremos $a \neq b$ y*

$$M = \begin{cases} A \times \{0\} & si \quad a, b \in O_{NL}(X) \cup R(X), \\ \\ A \times \{0\} \cup \{b\} \times [0,1) & si \qquad\quad b \in E_{ND}(X). \end{cases}$$

Lema 4.39. *Sean X una dendrita local e Y una curva localmente conexa. Si $Cono(X)$ es homeomorfo al $Cono(Y)$, entonces Y es una dendrita local.*

Demostración. Dado que X es una dendrita local, para cada $(x,t) \in Cono(X) \backslash \{v_X\}$ se tiene que existe U_x vecindad de x en X tal que U_x es una dendrita, de donde se sigue que U_x es contráctil, luego $Cono(U_x)$ es una vecindad de (x,t) contráctil en $Cono(X)$. Por el teorema 4.2, sabemos que $Cono(X)$ es contráctil en v_X, de donde $Cono(X)$ es localmente contráctil en v_X por lo tanto $Cono(X)$ es localmente contráctil. Supongamos que Y no es una dendrita local, entonces existe $(y,t) \in Cono(Y)$ para el que cada vecindad de y en Y contiene una curva cerrada simple, digamos S, luego cualquier vecindad de (y,t) en $Cono(Y)$ contiene cilindros homeomorfos a $S \times [0,1]$ que no son contráctiles de donde $Cono(Y)$ no es localmente contráctil, lo cual es una contradicción. □

Para lo consiguiente denotamos $\mathcal{A}_0$ como la clase de las dendritas locales que son arcos, curvas cerradas simples o un punto peludo F_ω y sea $\mathcal{F}_0$ la clase de las dendritas locales dada por

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{A}_0 \cup \{\Theta_m \colon m \geq 3\} \cup \{T_n \colon n \geq 3\}.$$

Lema 4.40. *Sea $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ un homeomorfismo con X y Y dendritas locales que no pertenecen a la clase $\mathcal{F}_0$. Sea A una componente euclidiana de X tal que $cl_X(A)$ es un arco ep. Si $e \in E(X)$, entonces existe una componente euclidiana B_A en Y tal que $cl_Y(B_A)$ es un arco fq con $f \in E(Y)$ y*

$$h((A \times \{0\}) \cup Cono(\{e\})) = (B_A \times \{0\}) \cup Cono(\{f\})$$

más aún, si $A_1 \neq A_2$, entonces $B_{A_1} \neq B_{A_2}$.

Demostración. Supongamos que $e \in E_{ND}$ y $M = (A \times \{0\}) \cup (\{e\} \times [0,1))$. Por el lema 4.38, M es una componente de $T_X \cap H_X$, y dado que h

homeomorfismo, entonces $h(M)$ es una componente de $T_Y \cap H_Y$ y existe la componente euclidiana B_A de Y tal que $cl_Y(B_A)$ tiene dos puntos extremos $f \neq q$ y

$$h(M) = \begin{cases} B_A \times \{0\} & si \quad q, f \in O_{NL} \cup R(Y), \\ \\ (B_A \times \{0\}) \cup (\{f\} \times [0,1)) & si \qquad f \in E(Y), \end{cases}$$

notése que $v_X \in cl_{Cono(X)}(M)$. Supongamos que X no es una dendrita, entonces $v_X \in C_X$ y $h(v_X) \in C_Y \cap cl_{Cono(Y)}(h(M))$. Como $cl_{Cono(Y)}(B_A \times \{0\}) \subset Y \times \{0\} \subset D_Y$, entonces $h(M) = (B_A \times \{0\}) \cup (\{f\} \times [0,1))$. Ahora supongamos que X es una dendrita, como X distinto de la clase $\mathcal{F}_0$, se tiene que X tiene al menos dos puntos de ramificación y por el lema 4.34, $v_Y = h(v_X) \in h(cl_{Cono(X)}(M)) = cl_{Cono(Y)}(h(M))$ entonces $h(M) = (B_A \times \{0\}) \cup (\{f\} \times [0,1))$, luego para ambos casos se concluye que

$$h((A \times \{0\}) \cup Cono(\{e\})) = (B_A \times \{0\}) \cup Cono(\{f\}).$$

Finalmente dado que h es un homeomorfismo, $B_{A_1} \neq B_{A_2}$ para componentes euclidianas $A_1 \neq A_2$. □

Lema 4.41. *Si X y Y son dendritas locales que no pertenecen a la clase $\mathcal{F}_0$ y $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ un homeomorfismo, entonces $h(v_X) = v_Y$.*

Demostración. Sean X y Y dendritas locales diferentes de la clase $\mathcal{F}_0$. Si X es una gráfica finita por el lema 4.23, se tiene que $h(v_X) = v_Y$. Supongamos que X no es una gráfica finita, en caso de que X sea una dendrita por el lema 4.32 y el teorema 4.34, se obtiene que $h(v_X) = v_Y$. Así, supongamos que X no es una gráfica finita ni dendrita, nuevamente ocupando el resultado de [10, Lema (4.4.2)], obtenemos que $E(X) \neq \emptyset$, sea $e \in E(X)$, si $e \in E_D(X)$ por el corolario 4.37 existe $f \in E_D(Y)$ tal que $h(\{e\} \times (0,1)) = \{f\} \times (0,1)$. Obsérvese que:

$$h(Cono(\{e\})) = h(cl_{Cono(X)}(\{e\} \times (0,1))) = cl_{Cono(Y)}(h(\{e\} \times (0,1)))$$
$$= cl_{Cono(Y)}(\{f\} \times (0,1)) = Cono(\{f\})$$

y como $h(C_X) = C_Y$, entonces:

$$h(v_X) = h(Cono(\{e\}) \cap C_X) = Cono(\{e\}) \cap C_Y = v_Y.$$

Ahora bien, si $e \in E_{ND}(X)$, entonces existe una componente euclidiana A de X tal que $cl_X(A)$ tiene dos puntos extremos $a \neq e$, para algún $a \in R(X) \cup O_{NL}(X)$. Por el lema 4.40, existe un punto $f \in E_{ND}(X)$ y una componente euclidiana B_A de Y tal que $cl_Y(B_A)$ tiene dos puntos extremos $b \neq f$ para algún $b \in R(Y) \cup O_{NL}(X)$ que satisface $h((A \times \{0\}) \cup Cono(\{e\})) = (B_A \times \{0\}) \cup Cono(\{f\})$, obsérvese que

$$((A \times \{0\}) \cup Cono(\{e\})) \cap C_X = v_X$$

y

$$((B_A \times \{0\}) \cup Cono(\{f\})) \cap C_Y = v_Y$$

con lo que $h(v_X) = v_Y$. □

En [12], Daria Michalik prueba el siguiente resultado:

Teorema 4.42. *Sean X y Y curvas localmente conexas que no son dendritas locales. Entonces $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos si y solo si X y Y son homeomorfos.*

A saber, el resultado principal de este trabajo es una generalización de dicho teorema.

Teorema 4.43. *Sean X y Y curvas localmente conexas diferentes de un intervalo, una curva cerrada simple, un n-odo y una curva n-teta, para $n \geq 3$. Entonces $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos si y solo si X y Y son homeomorfos.*

Demostración. Se sabe que si X y Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces $Cono(X)$ y $Cono(Y)$ son homeomorfos. Supongamos entonces que $h\colon Cono(X) \to Cono(Y)$ es un homeomorfismo. Si X no es una dendrita local, por el lema 4.39, se tiene que Y tampoco es dendrita local y por el teorema 4.42 se obtiene que X y Y son homeomorfos.
Ahora supongamos que X y Y son dendritas locales, si X o Y son el punto peludo F_ω, por el teorema 4.35, se obtiene que X y Y son homeomorfos y si sucede lo contrario, tendríamos que X y Y son dendritas locales diferentes de la clase $\mathcal{F}_0$, luego por el lema 4.41, $h(v_X) = v_Y$ de donde por el corolario 4.22, concluimos que X y Y son homeomorfos. □

Referencias

[1] Janusz Jerzy Charatonik, Bosquejo de la historia de la teoría de los continuos, Capítulo 9, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 225–264.

[2] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[3] Craig R. Guilbault, *A solution to the Groot's absolute cone conjeture*, Topology 46 (2007), 89–102.

[4] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Luis Alberto Guerrero Méndez, *La magia de los espacios métricos,* FCFM, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2025.

[5] David Rodríguez Hernández, Fernando Macías Romero, David Herrera Carrasco, Un estudio de la contractibilidad, *Matemáticas y sus aplicaciones 25* Textos Científicos, Direccción de Fomento Editorial, BUAP, Primera Edición 2025

[6] Alejandro Illanes, Verónica Martínez-de-la-Vega, Daria Michalik, *The uniqueness of cones over locally connected curves*, Topol. Appl. 320 (2022), 108242.

[7] Kazimierz Kuratowski,*Topology,* Vol I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[8] Kazimierz Kuratowski,*Topology,* Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[9] María de Jesús López Toriz, *Hiperespacios que son conos*. (Tesis de Doctorado). Universidad Nacional Autónoma de México, México, (2001).

[10] María de Jesús López Toriz, Patricia Pellicer-Covarrubias, Alicia Santiago-Santos, $\frac{1}{2}$-*homogeneous suspensions*, Topol. Appl. 157, (2010) 482–493.

[11] Sergio Macías. *Una introducción a los retractos absolutos y a los retractos de vecindad absolutos.* Revista de integración, Vol. 31(2013), No. 2, 153–164.

[12] Daria Michalik, *The cones over locally connected curves*, Topol. Proc. 52 (2018), 35–43.

[13] Jan van Mill, Infinite-dimensional topology, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1989.

[14] James R. Munkres, *Topología,* Prentice Hall, Madrid 2002.

[15] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[16] Sam B. Nadler, Jr., Patricia Pellicer-Covarrubias, *Cones that are* $\frac{1}{2}$-*homogeneous*, Houst. J. Math. 33 (1) (2007), 229–247.

[17] Patricia Pellicer-Covarrubias, Alicia Santiago-Santos, *Degree of homogeneity on cones*, Topol. Appl. 175 (2014), 49—64.

[18] Isabel Puga, Dendroides, Capítulo 3, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 51–84.

Índice de conceptos

Arco, 3
Cilindro, 25
Componente, 5
Cono, 25
Continuo, 2
Contráctil, 9
Curva, 6
Curva cerrada simple, 4
Dendrita, 42
Dendrita local, 42
Descomposición scs, 23
Dimensión 1, 6
Espacio de descomposición, 17
Extensor absoluto, 12
Extensor de vecindad absoluto, 12
Función natural, 18
$\mathcal{G}$-saturado, 20
Gráfica finita, 37
Homotopía, 7
Localmente conexo, 5
N-odo simple, 5
N-teta, 27
Partición, 17
Partición cerrada, 17
Punto de ramificación, 32
Punto euclidiano, 32
Punto extremo, 32
Punto ordinario, 32
Punto Peludo F_ω, 42
Retracto, 9
Retracto absoluto, 12
Retracto de vecindad, 11
Retracto de vecindad absoluto, 12
Semicontinua superior, 20
Subcontinuo, 2
Suspensión, 27
Totalmente disconexo, 6
Triodo simple, 5
Vecindad, 1