BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

EL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS DEL LENGUAJE ALGEBRAICO EN EL TRÁNSITO DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR AL SUPERIOR EN AMBIENTES VIRTUALES DE APRENDIZAJE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTORA EN INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

PRESENTA:

MÓNICA PÉREZ GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MARCO A. VELÁZQUEZ ALBO

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE 2024.

PÁGINA DE APROBACIÓN

Miembros del jurado

Dra. Lilia Alarcón y Pérez

Dr. Antonio Fernández Crispín

Dr. Neptalí Ramírez Reyes

Dr. Fco. Javier Guzmán Games

Dr. Marco A. Velázquez Albo

Presentación

En el presente documento se hace el despliegue de las representaciones semióticas que se desarrollan para el lenguaje algebraico en ambientes virtuales de aprendizaje. En el cual se espera que los lectores tengan acceso al conocimiento producido por el mundo académico al campo de la Educación Matemática, y muy particularmente, a la del Lenguaje.

En el primer capítulo, se hace un acercamiento a la perspectiva histórica-epistemológica de las Matemáticas, y el desarrollo del lenguaje matemático, mismo que al paso del tiempo, se perfecciona y perfila a configurar lo que hoy en día conocemos como lenguaje algebraico.

En el segundo capítulo, se presenta una de las teorías con la que se va a trabajar en la investigación, es decir la semiótica, presentando las diferentes escuelas de las cuales parte este análisis hasta llegar a la de Duval, de la cual se deriva el uso de representaciones semióticas en Educación Matemática. Así mismo, se aborda los ambientes virtuales en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, el cual es uno de los elementos centrales del trabajo de investigación.

A continuación, en el tercer capítulo, se hace el despligue de los diversos factores que consideramos contextualizan la construcción de representaciones semióticas para el desarrollo de las competencias en el lenguaje algebraico.

En el cuarto capítulo, se hace el despligue de las principales teorías en las cuales se basa nuestra investigación, las cuales son el aprendizaje significativo de Ausubel y el enfoque ontosemiótico de Godino. Ambas teorías nos dan pautas y conceptos que nos ayudan a describir nuestro problema de investigación, el cual como recordamos a los lectores está referido a la construcción de representaciones semióticas para el lenguaje algebraico descrito en los planes educativos de educación media superior y superior.

Posteriormente, en el quinto capítulo se desarrolla la metodología que enmarca esta investigaión, con los principales aportes que hace el enfoque socioeconómico para la evaluación de competencias.

Por último, en el sexto capitulo se muestran resultados de la aplicación de los instrumentos de recolección de información, los cuales nos permitieron dar las conclusiones para modificar puntualmente en alguno de ellos para poder realizar el trabajo de campo completo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme una beca para estudiar un doctorado reconocido en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad de México, cuyo efecto hizo posible mi dedicación de tiempo completo a la investigación y redacción de esta tesis doctoral.

A lo largo de mi estancia por el doctorado, agradezco a mis profesores por formarme como investigadora educativa y sobre todo a los integrantes de mi jurado, quienes oportunamente me hicieron redirigir y delimitar mi investigación, aportando críticas constructivas siempre, dando como resultado esta redacción académica.

Índice

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

El presente trabajo surge a raíz de la labor cotidiana que se lleva a cabo en las aulas de una escuela de nivel secundaria y de bachillerato, al notar que los discentes en la experiencia personal sufrían un conflicto de ideas y concepciones con respecto a su pensamiento aritmético, el cual había estado influenciado durante seis años previos a su ingreso a nivel secundaria. Problemática que no dista de discentes que cursan los siguientes niveles educativos, el medio superior y superior. Este encuentro se debía a que empezaban a trabajar de lleno con ecuaciones de primer grado, pero ya generadas, ya estructuradas sin saber que significaba esa x, y o z, ni saber a que se refería la expresión "$piensa\ un\ número$". De acuerdo con el trabajo de Gavilán (2011) se sabe que los conceptos vinculados con el álgebra y su operación muestran con frecuencia, dificultades y conflictos en los discentes. Debido a que el paso de la aritmética al álgebra es un cambio cualitativo en su forma de pensar.

Es muy importante recalcar la labor del docente, específicamente en la didáctica, que de acuerdo con Brousseau (2007) un conocimiento, como un obstáculo, es siempre el fruto de una interacción del discente con su medio y, más precisamente, con una situación problemática que vuelve a un conocimiento interesante.Por lo que en lo concerniente al docente este tendrá que planear una estrategia que permita al discente hacer dicha transición y que además de ello provoque en el discente la participación y motivación en su proceso de aprendizaje de este nuevo tema, el Álgebra, ya que lo acompañará por el resto de su estadía por este grado académico y muy posiblemente hasta que termine su formación profesional.

Existen numerosas investigaciones con respecto a las dificultades que presentan los discentes con respecto a la transición del pensamiento aritmético al algebraico, y en todas estas salen a relucir aquellas que se refieren específicamente al lenguaje algebraico. Según Alfonso (2009) exceptuando la química, la física o la música, en ninguna otra ciencia como en el álgebra ha influido tanto en su desarrollo la adopción de una simbología adecuada, la cual a lo largo de los siglos se ha ido configurando en un conjunto específico de símbolos y números que permiten expresar y homogeneizar toda la teoría existente, a este conjunto lo concibe como “lenguaje algebraico”.

Kieran (2004) menciona que las actividades generacionales del álgebra escolar implican la formación de expresiones y ecuaciones que son precisamente los objetos del álgebra, esto incluye ecuaciones de una incógnita y que represente situaciones problemáticas, por lo que si nos referimos a esta perspectiva, el discente no comprende ciertos vocablos o expresiones, por lo que le hace aún más difícil comprender que es lo que realmente le están pidiendo en el problema. Por su parte, Castro (2012) nos menciona que la traducción entre lenguajes puede representar una dificultad para el discente debido a las características propias del lenguaje, dado que deben dar significado a las letras, vocablos y, al uso desigual que se da entre la aritmética y el álgebra, como por ejemplo que diferentes letras, representan ahora valores y, que además de ello, sean diferentes.

En consecuencia, es de suma importancia abordar la manera en qué el discente construye diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, mismo que dentro de la episteme histórica de las matemáticas ha creado diferentes posturas.

Tema: Una perspectiva del lenguaje algebraico y su complejidad.

Dentro de las Matemáticas es importante la utilización de un método simbólico o lenguaje satisfactorio que permita expresar de manera clara y concisa los razonamientos que emanan de esta disciplina, asímismo se debe poder operar con él aplicando leyes determinadas, cuyo proceso de resolución de problemas aporte simplicidad y claridad en su manejo, dando paso a una solución concreta, y es el uso del álgebra quien lo ha permitido a lo largo del tiempo y de sus refinaciones. La posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla es lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, los discentes por lo general no llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque no llegan a ver su relación con lo que representan.

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las Matemáticas escolares. De acuerdo con el trabajo de Gavilán (2011) se sabe que los conceptos vinculados con el álgebra y su operación muestran con frecuencia, dificultades y conflictos en los discentes. Debido a que el paso de la aritmética al álgebra es un cambio cualitativo en su forma de pensar. Si aunado a esto, consideramos que por su naturaleza misma el álgebra tiene diferentes representaciones a lo largo de la enseñanza durante la secundaria, y no sólo de este nivel, sino en general, el discente no tiene un aprendizaje significativo de ésta y por tanto cada vez que avance en su nivel educativo seguirá enfrentando la misma problemática una y otra vez.

En la enseñanza escolar de la aritmética, los discentes resuelven sin complicaciones problemas de suma, sustracción, multiplicación y división a través de un amplio conjunto de estrategias, sin embargo, al iniciar el aprendizaje del álgebra suelen presentar dificultades en las operaciones algebraicas, ya que ahora los problemas que se les presentan se resuelven utilizando algoritmos que van más allá de los que ellos conocen, surgen frases como "*si está sumando ahora pasa restando*" o "*si está dividiendo pasa multiplicando*", que aun cuando son literariamente informales e implican propiedades de conmutatividad, para el discente dichas frases no tienen sentido.

Podemos observar que es muy común que los discentes al aprender álgebra empleen sus conocimientos aritméticos, resolviendo así problemas sencillos, sin embargo, cuando se les presenta un problema que necesita un razonamiento extra, el discente empieza a presentar dificultades y conflictos, que más adelante se convertirán en obstáculos, es entonces cuando el rechazo hacia las Matemáticas se intensifica, ya que esta transición es un cambio cualitativo en la forma de pensar del discente, incluso muchos discentes manifiestan sentimientos de tensión y miedo que pueden estar asociados al desfase existente (Gavilán, 2011). Siguiendo a García (2010) se requiere un especial cuidado en el nexo entre ambas materias, aritmética y álgebra, de tal forma que el discente perciba que el simbolismo empleado en el álgebra es sólo una manera de generalizar ciertas propiedades aritméticas.

El presente proyecto surge a raíz de la labor cotidiana que se lleva a cabo en las aulas de una escuela a nivel secundaria y bachillerato, al notar que los discentes en la experiencia personal sufrían un conflicto de ideas y concepciones con respecto a su pensamiento aritmético, el cual había estado influenciado durante seis años previos a su ingreso a nivel secundaria, sin embargo, esta situación no es ajena en discentes de nivel medio superior y superior. Este encuentro se debía a que empezaban a trabajar de lleno con ecuaciones de primer grado, pero ya generadas, ya estructuradas sin saber que significaba esa x, y o z, ni saber a que se refería la expresión "$piensa\ un\ número$". Según Alfonso (2009) exceptuando la química, física o la música, en ninguna otra ciencia como en el álgebra ha influido tanto en su desarrollo la adopción de una simbología adecuada, la cual a lo largo de los siglos se ha ido configurando en un conjunto específico de símbolos y números que permiten expresar y homogeneizar toda la teoría existente, a este conjunto lo concibe como "lenguaje algebraico".

Desde la educación primaria los discentes manipulan expresiones con letras, como en el cálculo de perímetros y áreas, sin embargo, cuando pasan a secundaria, dicha manipulación se vuelve más compleja. Godino y Font (2003) nos mencionan que en el cambio de manipulación entre un grado y otro, hay dos etapas que distinguir. La primera en la cual los símbolos sustituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos, y la segunda en la que los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban.

En la adquisición del conocimiento matemático, particularmente, se requiere el uso de representaciones. Estas se pueden tipificar en a) internas, aquellas que se usan para pensar sobre ideas matemáticas, razonar y organizar el conocimiento que a su vez proporcionan, y b) externas, para expresar y comunicar ideas matemáticas, mediante las cuales se materializan los conceptos matemáticos (Castro, 1994, Goldin, 2002; citados por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 274). Sin embargo, para un mismo concepto existe una diversidad de representaciones, por lo que el término de sistemas de representación, entendiendo a este como un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, permite que se produzca una traducción entre una y otra, siendo necesario el dominio de todos ellos para una mayor comprensión del concepto (Castro, 1994; Goldin, 1998; Kaput, 1992, citados por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 274).

Retomando lo expuesto, para un mismo concepto existe una diversidad de representaciones y el dominio de todas ellas facilita la adquisición de un concepto, por lo que la confusión entre los objetos representados con las representaciones de los mismos, y la aplicación arbitrara de las normas sintácticas a “representaciones equivalentes” en sistemas de representaciones diferentes, constituyen buena parte de las dificultades del álgebra escolar (Duval, 1995, citado por Gárriga, 2011). Por lo tanto, para tener acceso al conocimiento matemático, en nuestro caso particular en el lenguaje algebraico, es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas, ya que, para Duval, un sujeto ha adquirido un concepto determinado, cuando se cumple dos condiciones: (1) debe disponer de al menos dos registros diferentes para representar un objeto; y (2) debe ser capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo. Como ejemplos de tales representaciones (Godino et al., 2016) se tienen: a) lengua natural (oral, escrita), b) representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal), c) representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales), d) representaciones alfanuméricas (algebraicas).

Por lo anterior, el uso del lenguaje algebraico que hacen los discentes de educación media superior y superior debe ser fortalecido para que así pueda crear más representaciones y pueda transitar entre ellas de manera natural, permitiéndole adquirir un conocimiento significativo.

Aprendizaje del álgebra escolar por competencias.

El problema de la transición entre el lenguaje aritmético al algebraico ya se ha abordado, y se ha atacado desde diferentes perspectivas, en donde se han formulado instrumentos a lapiz y papel, impregnando la resolución de ecuaciones de primer grado o sistemas de ecuaciones como en el trabajo de Álvarez, García & Santos (1992). Este trabajo en específico basado en las competencias en el uso del lenguaje algebraico, permitió visualizar que los discentes de segundo año de secundaria tenían problemas de manipulación para la resolución de ecuaciones, por lo que les pareció pertinente diseñar un instrumento con más de treinta dos ecuaciones. Sin embargo, ¿será este tipo de trabajos o instrumentos los que permitan visualizar las competencias algebraicas con las que cuenta el discente?. Fernández (1997) en su trabajo nos menciona que los problemas verbales ofrecen una oportunidad para documentar las competencias algebraicas con las que cuenta el discente, ya que la admisión de diferentes representaciones en su resolución, contribuye a una visión más adecuada del desarrollo de las competencias del sujeto.

Lemon y Lesh (1992) explican que la clave para el aprendizaje y la instrucción en conceptos matemáticamente complejos resulta de dos perspectivas: de la identificación de procesos cognitivos que contribuyen a la competencia de dominio, y del análisis del pensamiento del sujeto, en el cual se deciden estrategias de resolución.

Investigaciones más recientes en esta misma línea apuntan asimismo que el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en la enseñanza obligatoria constituye uno de los factores esenciales de las *discontinuidades* observadas en el sistema educativo español, entre las matemáticas de la educación secundaria obligatoria (en adelante, ESO, con discentes entre 12 y 16 años) y las del bachillerato (discentes entre 16 y 18 años).

Filloy, Puig y Rojano (2008) nos mencionan, que en el proceso de la traducción de un lenguaje a otro existen cuando menos dos competencias:

> El centro del proceso que esta en juego es precisamente el paso del enunciado del problema, que se presenta escrito en lenguaje natural, a una expresión del lenguaje del álgebra: una ecuación. Por tanto, en la resolución algebraica de problemas está implicada, por un lado, la competencia en ambos lenguajes, y, por otro, la competencia en el proceso de paso de un texto escrito en el lenguaje natural a un texto escrito en lenguaje del álgebra. (pp. 330).

Hasta este punto hemos introducido un nuevo concepto dentro del estudio de la transición del lenguaje aritmético al algebraico, competencias. Dicho concepto se ha puesto de manifiesto en los planes educativos no sólo de nuestro país, sino a nivel mundial. Y no sólo a nivel básico sino también en nivel medio superior y superior, pero ¿qué entendemos por competencias? Las competencias, como concepto y aplicación, surgieron en el ámbito económico, de manera especial en el área laboral. Su origen se remonta al siglo XIX en paises capitalistas y su auge esta dado en el presente siglo debido a la globalización. La introducción del término “competencias” en el ambito educativo, aproximadamente en los años veinte del siglo pasado, fue como respuesta a las exigencias que la economía mundial imponía al trabajo (Juárez, 2020).

En relación a esto, fue en 1999, que la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) lanzó el Programa para la Evaluación Internacional para Discentes (PISA, por sus siglas en inglés), con el objetivo de monitorear a los discentes en su etapa final de escolaridad obligatoria, en cuyo caso deberían de haber adquirido conocimientos y destrezas necesarios para una completa participación en la sociedad. Uno de los puntos principales de este programa es la introducción del concepto de innovar en competencias, para aumentar de esta manera la capacidad de los discentes en el análisis, razonamiento y comunicación, entre otras capacidades (Amador, 2018).

Precisamente refiriéndonos a las competencias propias de las actividades laborales Díaz-Barriga, (2006) consideró que:

> El análisis de tareas ya había permitido desagregar una habilidad integrada (en ocasiones se le denomina compleja) en una serie de acciones más simples que permiten el dominio de la ejecución. La novedad con el enfoque de las competencias radica en una puntualización minuciosa de los aspectos en los cuales se debe concentrar "el entrenamiento" o "la enseñanza". (p. 5).

Las competencias no son un concepto abstracto, se trata de las actuaciones que tienen las personas para resolver problemas integrales del contexto, con ética, idoneidad, apropiación del conocimiento y puesta en acción de las habilidades necesarias. Este término se ha ido construyendo desde diversas escuelas epistemológicas, a partir de diferentes contextos laboral-educativo y con distintas disciplinas, ante el proceso de la globalización se plantean nuevos retos en la relación educación-trabajo.

Si buscamos una definición como tal de competencias, encontraremos diferentes significados y concepciones, sin embargo podemos entenderlas como el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, valores, creencias y principios que se ponen en juego para resolver los problemas y situaciones que emergen en un momento histórico determinado, que le toca vivir al sujeto que interactúa en el ambiente (Mastache, 2001). Esta definición es demasiado extensa, pero engloba de alguna forma el sentido de las competencias, su funcionalidad y sus alcances. Dentro de la educación se ha fomentado mucho éste término, a tal grado que en los modelos educativos se encuentran descritas de tal forma que engloban precisamente este conjunto de habilidades.

Las competencias son, por tanto, las oportunidades reales que los discentes tienen para poder adquirir los funcionamientos que ellos valoran. Y los funcionamientos son: “(...) como las cosas que el sujeto hace o la situación en que se encuentra gracias a sus recursos y al uso que puede hacer de ellos (Cejudo, 2006: 267). Diferentes competencias pueden constituir un set individual de capacidades y estas capacidades valiosas pueden ser potenciadas mediante determinadas pedagogías (por ejemplo, la capacidad del pensamiento crítico, o la capacidad de la imaginación o la capacidad de tener voz).

Desde la perspectiva del proyecto Tuning, las competencias son un conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe de reunir un titulado para satisfacer plenamente las exigencias de los contextos sociales (2007). Las describen como *capacidades* de las personas que desarrollan de forma gradual a lo largo de su proceso educativo y que son evaluadas en diferentes etapas, estas capacidades adquiridas en la última fase del proceso educativo, entendida como el nivel superior, las denominan como competencias genéricas. Esta forma de definir a las competencias será la que utilicemos en nuestro trabajo de investigación, ya que nos permitirá evaluar el desarrollo que se han tenido del lenguaje algebraico tanto en nivel medio superior y superior.

En el caso del proceso de la resolución de problemas algebraicos mediante el método cartesiano (MC) (Filloy, Puig & Rojano, 2008) se evocan siete pasos por los cuales el resolutor puede transitar lienalmente en ellos: 1) Lectura análitica del enunciado, 2) Elección de una cantidad, 3) Representación de otras cantidades, 4) Establecimiento de una ecuación, 5) Transformación de la ecuación, 6) Aplicación del algoritmo, y 7) Interpretación del resultado. Obviamente, cada uno de los pasos va acompañado de una competencia a desarrollar, así en el primer paso se desarrolla la competencia en el lenguaje natural, específicamente en textos matemáticos. En el segundo, tercero y cuarto, se encuentra implícita la competencia del proceso mismo del MC, como el manejo de signos elementales y cantidades, así como el uso correcto de sus reglas de sintaxis y operacionalidad. En el quinto y sexto paso, se definen las competencias estrictamente algebraicas, como lo es el cálculo y la manera de expresar en forma canónica los resultados. Finalmente, el séptimo paso exige la competencias en el contenido del problema, misma que permitirá la adecuación del resultado obtenido matemáticamente al contexto del lengueje natural.

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra deben atender equilibradamente a distintos objetivos educativos: a) Establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de utilizarse en una amplia gama de casos particulares y que contribuyan, por sí mismas, a la potenciación de las capacidades cognitivas de los discentes. b) La aplicación funcional, que posibilite a los discentes valorar y aplicar sus conocimientos algebraicos fuera del ámbito escolar, en situaciones de la vida cotidiana. c) La valoración instrumental, creciente a medida que el discente progresa hacia tramos superiores de la educación, y en la medida en que el Álgebra proporciona formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, herramientas para la simbolización y acceso al lenguaje científico. Todos estos objetivos encaminados a la definición de competencias, propuestos en los modelos educativos desde educación básica hasta el superior.

Entre los Objetivos Generales propuestos para la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, indicados en el Real Decreto citado, los objetivos número 1, 2, 4, 9 y 10 se refieren o están especialmente relacionados con la enseñanza del Álgebra. Los Contenidos indicados para la enseñanza del Álgebra, recogidos en el Real Decreto, se presentan detallados dentro del Bloque Números y Operaciones. En cuanto a la Metodología, el docente debe elegir la orientación metodológica más adecuada a cada actividad de aula y combinarla adecuadamente con otras, haciendo uso de los recursos y materiales apropiados.

Respecto a los criterios de Evaluación, indicamos aquellos que tienen relación con el Álgebra, junto a un breve comentario.

" 5. Resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización de las relaciones que puedan distinguirse en ellos y, en su caso, de la resolución de ecuaciones de primer grado."

Este criterio va dirigido a comprobar que el discente es capaz de utilizar las herramientas algebraicas básicas en la resolución de problemas. Para ello ha de poner en juego la capacidad de utilizar los símbolos, con las convenientes notaciones habituales, para el planteamiento de ecuaciones y resolverlas por algún medio fiable, que no necesariamente ha de ser la manipulación algebraica de las expresiones. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas" (Hiebert y Carpenter, 1992, pp- 66-67).

Tan solo en la educación media superior en el Acuerdo 444 de la SNB (2008), se citan precisamente las competencias que dan pauta a la Reforma Integral de la Educación Media Superior, con las cuales se definenen las competencias genéricas, disciplinares y profesionales. Las primeras aplicables a todos los egresados de este nivel educativo, consideradas por ello clave, transversales y transferibles. Tanto las segundas como terceras han de dividirse en básicas y extendidas, con ciertas características particulares en cada una de ellas. De las competencias genéricas declaradas en este acuerdo, el caso particular de nuestra investigación nos interesa aquella donde se expresa y comunica, ya que sus atributos son: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas e Identifica las ideas clase en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

En nuestro caso particular, nos atañen las competencias disciplinares, las cuales expresan conocimientos, habilidades y actitudes mínimos necesarios para que los discentes se desarrollen eficazmente en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida, tal y como nos mencionaba Mastache en su definición de competencias.

Dichas competencias disciplinares se organizan en cuatro campos: Matemáticas, Ciencias experimentales, Ciencias sociales y Comunicación, por obvias razones nos atañe las competencias disciplinares de Matemáticas. Éstas buscan propiciar el desarrollo de las creatividad y el pensamiento lógico y crítico de los discentes. Es curioso observar que dentro de las competencias se menciona que los discentes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder mediante la repetición de procedimientos establecidos pero que en el campo de la investigación, se siga pretendiendo que el discente resuelva una cantidad exorbitada de ejercicios matemáticos, en específico de ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones, en donde se evalúa la cantidad de aciertos sobre los erróneos, creyendo que el discente ha adquirido una competencia, cuando en realidad lo que ha aprendido es el procedimiento para resolver las ecuaciones pero no razona el resultado obtenido, el cual finalmente se debe trasladar a un contexto real.

Las competencias matemáticas para el nivel medio superior son 8, de las cuales sólo se consideran: Construye e interpreta modelos matemáticos y Formula y resuelve problemas matemáticos, ya que estas fomentan el lenguaje algebraico como tal y por tanto el resto de las competencias se mantendrán al margen de la investigación.

Un modelo educativo puede contemplarse como un gran pastel con diferentes niveles, en el que todos los pedazos estan relacionados entre sí, por lo que los resultados particulares o por unidades se agregan a un aprendizaje global y al desarrollo del nivel de competecias, y éstas pueden ser genéricas y específicas en cada área. Las competencias genéricas identifican los elementos compartidos, que se tienen en cualquier programa de estudio superior, como la capacidad de aprender, de tomar decisiones, de diseñar proyectos, habilidades interpersonales, etc. las cuales se complementan con las competencias específicas de cada profesión.

Cabe mencionar que el proyecto Tuning tuvo una primera versión en el continente Europeo, haciendo una reflexión intensa sobre la educación superior, con una participación de 175 universidades, por lo que a raíz de este trabajo se replicó en América Latina, con la participación de 182 universidades provenientes de 18 países latinoamericanos.

De este trabajo se desprenden 27 competencias genéricas para el nivel superior, enfocadas en 12 áreas del conocimiento y de las cuales se desprenden las competencias específicas para cada una de ellas (Beneitone, et.al., 2007). Obviamente no podemos considerar todas las competencias genéricas para nuestro trabajo, además de volverlo extenso, perderíamos de vista aquellas que estan realmente involucradas con el lenguaje algebraico. De lo anterior es que consideramos sólo las siguientes competencias genéricas:

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

La primera competencia, habla sobre un trabajo metacognitivo con respecto abstracción, análisis y síntesis, que conlleva el razonamiento matemático, la siguiente consideramos que va implícita en la traducción de enunciados verbales a algebraicos, y por último, como veremos más adelante, las habilidades en el uso de las tecnologías, y con respecto a la actual situación sanitaria, juegan un papel importante en el desarrollo de las competencias algebraicas en los discentes.

Dentro del proyecto Tuning, se distinguen tres competencias genéricas: *instrumentales*, interpersonales y sistémicas. Siendo las instrumentales aquellas capacidades cognitivas, metodológicas, tecnológicas y lingüísticas que desarrolla el discente, y las que estaremos evaluando en este trabajo.

Como se ha podido observar, las competencias genéricas planteadas desde los programas de educación básica (secundaria) hasta la educación superior (universidad) para el área de matemáticas estan hilados de tal forma que al ir avanzando en cada nivel, estas se vayan desarrollando, sin embargo, ¿realmente los discentes cuentan con dichas competencias? o bien, ¿están en vías de desarrollo?.

Para poder dar respuesta a estas preguntas es primordial llevar a cabo, además de la elección de dichas competencias correspondientes al lenguaje algebraico, la definición de cada una de ellas, así como su nivel de progresión, formas de desarrollar cada una y los métodos de evaluación. Para dicho ejercicio, se considera el planteado en el informe del proyecto Tuning (2007) de la competencia genérica: Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.

En el cual, una vez identificada la competencia genérica a evaluar, se toman en cuenta cuáles otras estan vinculadas con su desarrollo, por mencionar una diremos la capacidada de abstracción y análisis. En el caso de las matemáticas, sabemos que el conocimiento se desarrolla de forma sistemática, por lo que esta competencia en específico se podría generar a través de la proposición de problemas que sean resueltos mediante discusiones, que sean presentados en la forma más general posible, proponiendo actividades que contribuyan a profundizar y solidificar los conocimientos adquiridos, proponer tareas que promuevan la reflexión, dar paso a la discusión y proceso de resolución, por mencionar alguna actividad inherente a este proceso.

Es de suma importancia considerar que los planteamientos de problemas con información descontextualizadas o con datos exhuberantes, no son suficientes para que el discente sea capaz de utilizar los conocimientos matemáticos en situaciones reales, por lo que es de suma importancia que entre más se desarrollen estas competencias con contextos y datos reales serán más eficientes en la adquisión de éstas. También se deben desarrollar las actividades de tal forma que el discente siempre este activo, ya que de lo contrario un ambiente pasivo podría tener como consecuencia que no desarrollen las habilidades de interpretación, raciocinios espaciales, lógicos y matemáticos.

Enseñanza de las matemáticas a través de medios digitales.

Una de las desventajas que presupone la transición entre un lenguaje y otro, es que el discente no logra visualizar su desarrollo y aplicación en la vida cotidiana, o cuando menos, en una representación distinta a la de lápiz y papel, es por ello que a través de la revisión bibliográfico se ha podido observar la implementación de actividades dentro de plataformas matemáticas, como GeoGebra o MathLab, por mencionar algunas, y que hoy en día debido a la situación sanitaria que se vivió. a nivel mundial han cobrado mayor fuerza.

En 1992, durante el Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, que se realizó en la Ciudad de Juárez, México, Mendez presentaba una propuesta de trabajo con hojas electrónicas de cálculo, para resolver problemas algebraicos verbales, con discentes del nivel medio superior, este trabajo refleja que desde hace años se ha tenido la necesidad de fomentar el uso de la computadora para ejemplificar o visualizar los quehaceres matemáticos, ya que esto propiciaría un mejor aprendizaje. Este trabajo, mostraba el caso de Ismael, un discente que presentaba dificultades en la resolución de problemas algebraicos, cuyo proceso de evolución fue desde la notación simbólica de las variables hasta su resolución en Lotus, mediante la utilización de la hoja de cálculo.

Las representaciones visuales pueden resultar más intuitivas y dotar de significado a las relaciones algebraicas. De esta forma se puede establecer un puente entre aritmética y álgebra, entre el pensamiento aritmético y el algebraico, a través de acercamientos numéricos y gráficos que desemboquen en los sistemas de representación simbólicos (Fernández, 1997).

La actual situación mundial en la que vivimos, nos ha permitido observar las carentes habilidades del docente ante el manejo de herramientas tecnológicas que podrían coadyuvar en su labor diaria de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, no toda la responsabilidad cae sobre el docente, sino también el alcance de las herramientas que el mismo gobierno ha de disponer para llegar a todos los discente, y nos referimos específicamente al uso de plataformas educativas que necesitan tener una conexión fija de internet o bien, que el discente tenga que adquirir artículos electrónicos que antes sólo eran considerados de lujo, pero que ahora se han vuelto de necesidad básica.

Considerando que la Informática en la Educación, sobre todo en la Educación Matemática, es un medio poderoso para desarrollar en el discente su creatividad e imaginación, la posibilidad de visualizar gráficamente conceptos teóricos como así también la de modificar las diferentes variables que intervienen en la resolución de problemas, favorece el aprendizaje de los discentes (Alemán de Sánchez, 2002). Aunado a esto el momento histórico en el que se encuentra inserto el hecho educativo implica asimilar un modo nuevo de dirigirse al futuro con visión retadora e inspirada, donde se busque mejorar las estrategias para el aprendizaje involucrando a todos los actores sociales, haciendo uso de las TIC que nos exige este mundo cambiante y evolutivo.

El uso inadecuado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el ámbito educativo, ha originado la necesidad en los docentes e instituciones, de reflexionar para garantizar el máximo aprovechamiento en términos de apoyar y facilitar el aprendizaje de los discentes. En la actualidad se evidencia cómo la responsabilidad en el uso de las TIC se remite exclusivamente al docente de informática, en donde las prácticas se limitan al manejo básico del computador. Por otro lado los docentes de áreas diferentes a la tecnología y la informática, experimentan serias dificultades en cuanto al manejo del computador, centrando su uso en actividades de su oficio como elaboración de planillas de notas y en transmisión de contenidos.

Como se ha podido observar, la transición del lenguaje aritmético al algebriaco es un tema trabajado, es un tema con una amplía bibliografía desde diferentes perspectivas. Sin embargo, hoy en día las nuevas necesidades de volver hacia una educación virtual, nos exije redirigir estas perspectivas, incluyendo en ellas la tecnología así como teorías que las respalden, es aquí y ahora donde radica la importancia de este trabajo de investigación. Partimos de un plano en el cual se encuentran trabajos relacionados con el uso del lenguaje algebraico, de las tecnologías, y de las competencias que deben adquirir los discentes de educación media superior y superior. Enfocándonos a fortalecer estás competencias disciplinares de Matemáticas en las cuales los discentes puedan razonar y transformar un enunciado verbal a uno algebraico.

Recordemos que para muchos jóvenes el álgebra se percibe como una rama ajena a las matemáticas, el uso de las nuevas tecnologías presentan oportunidades de generar muchos ejemplos numéricos, datos, patrones, etc. generalizando la información que se maneja sobre todo en el álgebra, donde una letra puede tomar cualquier número y que eso dificulta que el discente le de un sentido a la expresioón algebraica.

Problematización del lenguaje algebraico: todo comienza con su traducción

Existen numerosas investigaciones con respecto a las dificultades que presentan los discentes con respecto a la transición del pensamiento aritmético al algebraico, y en todas estas salen a relucir aquellas que se refieren específicamente al lenguaje algebraico.

Por la importancia que conocer a fondo cómo se relacionan entre sí la lengua materna y el álgebra simbólica, en el aprendizaje y la enseñanaza de ésta última, se ha considerado conveniente estudiarla en su condición cómo lenguaje. Así el trabajo de Davis Kirshner enfatiza el carácter de lengua escrita del álgebra y recurre a la lingüística y a la semiótica para analizar la sintaxis y la semántica algebraica. Este autor hace uso de la gramática generativa y transformacional para producir expresiones algebraicas simples y transformarlas, con base en descripciones de sus formas superficiales y profundas (Kirshner, 2001). Luis Radford (2000) toma la idea de Vygotsky de que la cognición humana está atada al uso de signos, de tal manera que ya no se considera central lo que los signos representan sino lo que nos permiten hacer. Es más, sostiene que los signos forman parte de sistemas de signos que son parte de una cultura y por tanto trascienden las cogniciones individuales.

Ambas concepsiones, tanto la de Kirshner como la de Radford, se nutren de disciplinas como la lingüística y la semiótica.

Kieran (2004) menciona que las actividades generacionales del álgebra escolar implican la formación de expresiones y ecuaciones que son precisamente los objetos del álgebra, esto incluye ecuaciones de una incógnita y que represente situaciones problemáticas, por lo que si nos referimos a esta perspectiva el discente no comprende ciertos vocablos o expresiones, por lo que le hace aún más difícil comprender que es lo que realmente le están pidiendo en el problema. Por su parte, Castro (2012) nos menciona que la traducción entre lenguajes puede representar una dificultad para el discente debido a las características propias del lenguaje, dado que deben dar significado a las letras, vocablos y, al uso desigual que se da entre la aritmética y el álgebra, como por ejemplo que diferentes letras, representan ahora valores y, que además de ello, sean diferentes.

Partiremos de la noción clásica de «problema aritmético» como un problema que puede resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, , ×, /, etc.) ejecutables a partir de los datos del problema, datos que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes. Tanto las cantidades que resultan de las operaciones intermedias como la cantidad incógnita, tienen que poder ser interpretadas en el contexto del enunciado del problema. Podemos considerar que las técnicas clásicas de resolución de los problemas aritméticos escolares se materializan en discursos verbales que, partiendo de los datos y mediante una cadena de operaciones aritméticas, permiten calcular la cantidad incógnita. Los elementos tecnológico-teóricos que permiten describir, justificar e interpretar esta práctica aritmética elemental consisten esencialmente en las propiedades de los diferentes sistemas de números (naturales y racionales), en las propiedades de las operaciones aritméticas con estos números y en las operaciones elementales entre cantidades de magnitudes, a lo que se podría añadir, en el nivel teórico, el discurso implícito que describe e interpreta el «patrón de análisis-síntesis» (Gascón, 1993).

Duval sostiene que las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas...). Esta producción no responde únicamente o necesariamente a una función de comunicación: puede responder también a una función de objetivación o a una función de tratamiento.

La bibliografía nos evoca a dos tipos de traducción entre el lenguaje natural y algebraico: *a) traducción sintáctica*, la cual indica la conversión de cada oración verbal en una ecuación, cambiando palabras claves por símbolos y en un orden de izquierda a derecha, y *b) traducción semántica*, la cual exige un trabajo metacognitivo, ya que se debe comprender la relación que existe entre las cantidades conocidas y desconocidas que vienen planteadas en el enunciado verbal, y la cual debe expresarse en un lenguaje simbólico de ecuaciones (Clement, 1982, MacGregor & Stacey, 1993, citados por Gárriga, 2011).

Con respecto a la traducción sintáctica, esta permite convertir muchos problemas verbales en ecuaciones que conducen a soluciones correctas, aunque el discente por lo general no comprende la relación que existe entre una y otra. Sin embargo, este tipo de traducción conlleva a que ocurra con más regularidad el error de inversión para las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división, complicando la comparación entre cantidades (Gárriga, 2011).

Por su parte, Filloy (1999, citado en Serres, 2011, p.127) estudió la adquisición del lenguaje algebraico desde dos estrategias: a) *modelaje de situaciones*, para desarrollar habilidades sintácticas y b) *producción de códigos*, para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Obteniendo como resultados que existe una relación entre lo sintáctico y lo semántico, y que el avance de uno de ellos implica el de la otra parte.

Además, para resolver problemas verbales Filloy (1999, citado en Serres, 2011, p. 137) considera tres métodos: a) *método cartesiano (MC)* el cual consiste en representar las incógnitas de un enunciado verbal en una expresión algebraica, cuya solución matemática tendría nuevamente una traducción verbal para dar solución al problema, b) *método de inferencias analíticas sucesiva (MIAS)* cuya solución final es el producto de inferencias lógicas que actúan como descriptores, y c) *método analítico de exploraciones sucesivas (MAES)* muy parecido al anterior, sólo que se plantea un valor hipotético para la incógnita, por lo que lo vuelve un método más cargado a la aritmética.

En el trabajo que presenta Marquina (2014) enmarca una serie de ocho pasos para traducir problemas expresados en palabras comunes al lenguaje algebraico, que den pauta a la elaboración de posibles soluciones correctas a problemas matemáticos. Entre ellos se destacan, leer el problema cuidadosamente (si es necesario más de una vez), identificar los datos e incógnitas involucradas (clasificando en variables o constantes) y de esta manera reducir la dificultad al trabajar con una sola variable o máximo dos, según sea el caso, y por último, establecer, resolver y verificar la ecuación planteada.

Con el uso de un dominó algebraico Rodríguez-Domingo (2015) y apoyándose de la clasificación hecha por Socas (1997, citado por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 280) encontró que los errores que comenten los discentes entre una lenguaje y otro, radica en la aritmética y en aquellos derivados de las características propias del simbolismo algebraico. Aportando además que los errores más frecuentes derivados de la aritmética, fueron aquellos relacionados con el uso del paréntesis y el de las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación y división, incluyendo además el de la potenciación. Martínez (2019) encontró que los discentes traducen literalmente el enunciado, es decir no identifican las operaciones a desarrollar, generalizan procedimientos ya conocidos y además de ello, los mecanizan. Por lo que no llegan a comprender el planteamiento del problema y por ende, el resultado obtenido es meramente numérico sin darle una interpretación acorde.

Como hemos visto, parte de las dificultades se deben a problemas propios del uso y comprensión de nuestro lenguaje; dificultad que se agrava al emplear palabras que en el contexto matemático tienen diferente significado que, en el lenguaje habitual como raíz, potencia, primo, diferencia, matriz, etc.

Preguntas de investigación.

El trabajo centra su importancia en el desarrollo de las competencias del lenguaje algebraico que presentan los discentes que transitan del nivel medio superior al superior en ambientes virtuales, haciendo uso de la teoría de representaciones semióticas, es decir, que el discente sea capaz de generar y transitar entre más de dos registros para un mismo objeto matemático, basado en las competencias disciplinarias de Matemáticas.

Además de ello, se pretende fortalecer el uso del lenguaje algebraico, cuando menos para las operaciones básicas aritméticas: suma, resta, multiplicación y división, en cuyo caso, permitira que el discente pueda dominar al menos diferentes registros semióticos de estos vocablos.

Kirshen (citado en Filloy, Puig & Rojano, 2008) enfatiza el carácter de lengua escrita del álgebra y recurre a la lingüística y a la semiótica para analizar la sintaxis y la semántica algebraica, por lo que uno de los puntos a tratar en este trabajo será precisamente las representaciones semióticas que el discente pueda formular para la generación de competencias disciplinares. A raíz de este abordaje se plantea la siguiente pregunta de investigación:

- ¿De qué forma la implementación de un ambiente de aprendizaje virtual, fortalecerá las competencias del lenguaje algebraico en discentes de educación media superior y superior?

Objetivos.

Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación se plantea el siguiente objetivo genral de trabajo.

Objetivo General

- Diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje virtual que permita fortalecer las competencias del lenguaje algebraico en discentes de educación media superior y superior.

Con los siguientes objetivos particulares:

- Definir las competencias a observar en el lenguaje algebraico.
- Diseñar un instrumento que nos permita evaluar dichas competencias.
- Establecer las diferentes representaciones semióticas con respecto a las operaciones básicas aritméticas.

- Desarrollar un ambiente virtual para simular las representaciones semióticas de las competencias del uso del lenguaje algebraico.

Relevancia de la investigación.

Dentro de este aspecto, en México particularmente se desarrolló un trabajo llamado *Competencia en el uso del lenguaje algebraico* el cual se llevó a cabo a nivel nacional en varios centros de educación superior y que fue coordinado por la Dra. Teresa Rojano del CINVESTAV en el año 1992, estamos hablando de un proyecto que desde sus primeras aproximaciones hasta su culminación, englobó un número determinado de resultados, mismos que permitierón visualizar las carentes competencias en universitarios con respecto al uso del lenguaje algebraico. Así mismo permitió ampliar las investigaciones hacía el uso de las TIC como apoyo en las representaciones de enunciados verbales, lo cual nos habla que efectivamente, como nos mencionaba Fernández (1997) las diferentes representaciones facilitan o coadyuban a la transición del lenguaje aritmético al algebraico mediante la formación de diferentes representaciones de éste concepto.

Como lo menciona la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2004) el paso del aprendizaje centrado en el docente al aprendizaje centrado en el discente se apoya en nuevas teorías, tales como la teoría constructivista, la cognición situada, aprendizaje autoregulado, aprendizaje cognitivo y la teoría sociocultural de Vygotsky. Una de las teorías más prominentes de las anteriores citadas se relaciona con el constructivismo, teoría según la cual el discente se convierte en el centro del aprendizaje donde busca y construye su propio conocimiento dentro de un contexto significativo a partir de sus estructuras mentales.

Considerando lo antes expuesto se puede emitir una hipótesis de trabajo a raíz de las competencias del uso del lenguaje algebraico. Esta quedaría redactada tentativamente:

Las competencias del uso del lenguaje algebraico influencían en la formación de registros semióticos en los discentes que pueden verse reflejados en su transición del lenguaje aritmético al algebraico.

CAPÍTULO I

Matemáticas y el lenguaje algebraico

La comprensión de un fenómeno no puede ser completa sin una vuelta a sus orígenes e ideas iniciales. Esta síntesis histórica comienza desde la aparición de los primeros documentos (piedras, papiros, cuevas, tablillas de arcilla, etc.), íntimamente ligadas a las circunstancias que hicieron posible la evolución en la historia general de las ciencias, pero muy específicamente en las Matemáticas.

Las traducciones entre los lenguajes (natural y simbólico) cuando no son congruentes producen dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y no siempre son consideradas en la práctica docente. Por lo que al hacer un breve recorrido en la formación de un lenguaje tan específico como el que se usa en las Matemáticas, permitirá al lector abrir su mente para darle el significado y contextualización al problema semántico que se presenta en esta investigación.

1.1 Epistemología de las Matemáticas

El término Matemática viene del griego <*matema*>, que quiere decir aprendizaje, estudio y ciencia. Justamente las Matemáticas son una disciplina que estudia conceptos como la cantidad, el espacio, la estructura y el cambio. Por lo que, desde tiempo muy remotos, la Matemática ha sido terreno fecundo para llevar a cabo disputas filosóficas. Pareciera que los problemas fisiológicos que plantea esta disciplina son tan antiguos como ella misma. Podríamos considerar desde las paradojas de Zenón en el siglo V a.C. hasta la teoría de conjuntos, innumerables controversias en el desarrollo histórico de la Matemática. Y esto se debe a que la Matemática crece sin cesar, cada día se desarrolla más y más, pero pareciera que todo proviene de una misma raíz. Tal suposición, dio paso a la formación de tres escuelas filosóficas, según Beyer (2001): la logicista de Russell (1872-1970), la formalista de Hilbert (1862-1943) y la intuicionista de Brouwer (1881-1966).

Russell y sus seguidores pretendieron derivar toda la Matemática a partir de la lógica de Frege, el cual intentó dotar a la aritmética de fundamentos seguros, es decir, Frege consideraba que las verdades aritméticas eran “analíticas” y “a priori”, y que serían a las de la lógica lo que los teoremas son los axiomas de geometría (Font, 2009), sin embargo, ciertas paradojas en la teoría de conjuntos hicieron tambalear el intento de su formación, dando paso a la teoría de tipos y el axioma de reductibilidad, como una prueba para solventar dicha situación, no obstante, dicha solución no satisfizo ni al mismo Russell.

Por otro lado, los formalistas sustentaban que toda la Matemática estaba fundamentada en la teoría de números y de conjuntos, tenían como concepción que no existían los objetos matemáticos, simplemente símbolos ostensivos. Y como en todo, los extremistas de esta escuela consideraban que las fórmulas no se referían a nada, que carecían de significado y que por ende carecían de un valor de verdad. Hacia la mitad del siglo XX, el formalismo se convirtió en el punto de vista predominante en las instituciones universitarias. Sin embargo, fue Gödel quien se encargó de probar que, en la aritmética, existen proposiciones que no pueden deducirse de los axiomas que existían, por lo tanto, el sistema de axiomas estaba incompleto.

Por último, los intuicionistas, los cuales afirmaban que la Matemática era el estudio de un cierto tipo de construcciones mentales y rechazaban el principio del tercero excluido en los dominios infinitos, por lo que rechazaban las pruebas por reducción al absurdo. La principal repercusión de este punto de vista, propuesto inicialmente por Kant, fue la aparición de una alternativa ontológica al platonismo (Font, 2009). Por ende, los intuicionistas, sostenían que los objetos matemáticos, sólo son construcciones mentales materializadas en signos.

A través de la historia de la humanidad y del desarrollo de las sociedades han surgido grandes pensadores, y especialmente grandes matemáticos, que con sus trabajos han colaborado en el nacimiento de la matemática a manera de respuesta a las necesidades de los seres humanos. Obviamente no podríamos considerar todos y cada uno de los aportes hechos por estos matemáticos en el desarrollo humano, sin embargo, consideramos conveniente mostrar aquellos que han sido relevantes para la configuración del lenguaje matemático, ya que tantos puntos de vista sobre las Matemáticas polemizan tanto sobre el tipo de "cosas" como sobre la "manera de pensar, actuar, dialogar, …" sobre estas "cosas" (Font, 2009), no olvidemos que la comprensión de un fenómeno no puede ser completa sin una vuelta a sus orígenes, a las ideas iniciales.

Esta síntesis histórica debe de comenzar con la aparición de documentos (piedras, suelos, utensilios, papiros, tablillas de arcillas, etc.) los cuales podrían considerarse como las primeras actividades de carácter científico. La riqueza histórica de la que alardea una civilización debe considerar el tiempo, la grandeza o decadencia de la época en que se ubica, así es como surge un cuestionamiento muy importante para nuestro trabajo de investigación ¿en qué momento, la humanidad comenzó a pensar en términos numéricos o geométricos? Tradicionalmente, podríamos considerar como respuesta que todo comenzó en Grecia, sin embargo, existe evidencia en suponer que todo comenzó antes del auge de esta gran civilización, en la prehistoria.

Boyer (citado en Collet, 1985) menciona algo relacionado al descubrimiento de un hueso perteneciente a un lobo, en el cual aparecen cincuenta y cinco incisiones, dispuestas en dos series, por grupos de cinco. Pero eso no es lo curioso, sino que el hueso fue descubierto en sedimentos que datan de hace 30, 000 años, aproximadamente. Es decir, antes de que el hombre formulara un lenguaje capaz de favorecer la comunicación verbal, era capaz de observar un árbol o un bosque, una piedra o un montón de ellas, un lobo o una manada, etc. quizá esas incisiones en el hueso pudiesen haber sido una forma de llevar un conteo sobre los integrantes de la manada. Este suceso podría haber sido la transición entre el hombre primitivo y aquel que se convertiría en productor, comerciante, etc. dando paso a la creación de un primer sistema de numeración. Es bien sabido, que antes de que existiera el sistema numérico que hoy en día conocemos y manejamos, le precedieron el agrupamiento de signos, tales como rayas verticales, guijarros, dedos de la mano, etc., por lo tanto, podríamos decir que el conocimiento matemático inicia en todas las culturas como un mecanismo de conteo.

Se tiene el registro de que hace aproximadamente 30,000 años, algunos grupos de *homo sapiens* del sur de África usaron una convención muy similar: representaban los enteros positivos mediante muescas hechas en huesos de animales. Si se adoptara la convención de las piedras, o la de las muescas, la suma equivaldría a la operación física de agregar piedras (o muescas), mientras que la resta equivaldría a la operación de quitarlas (Piñeiro, 2019). Según la historia, fue el comercio, la primera actividad en la cual se utilizó formalmente la matemática, curiosamente ese hecho no ha cambiado, pues sigue siendo la economía, la disciplina que más uso le da a ésta. Los egipcios, por ejemplo, escribían sobre piedra, ladrillo o piezas de barro, cuyas inscripciones datan del año 3100 a.C., en los cuales enumeraban las cifras asociadas a la guerra. Además, sabemos que muchas civilizaciones alrededor del mundo tuvieron grandes aportes a la geografía, con respecto a mediciones de la tierra, pero también en la astronomía, al predecir acontecimientos que ocurrían en el espacio, como los Mayas.

Después de haber dejado en claro que los griegos no fueron los primeros en pensar en términos numéricos, debemos reconocer que fueron ellos quienes hicieron grandes aportes a la matemática, y no sólo a esta sino en general a todas las ciencias. En particular, la filosofía matemática requería no sólo la descripción verbal sino una representación gráfica, por lo que la geometría es adoptada por estos filósofos, incluso se sabe que en la Academia de Platón (primera Universidad de Occidente) el único requisito de admisión era saber geometría. Los griegos aprendían gramática, música, gimnasia, historia y danza durante los años de su formación inicial, por lo que los estudios matemáticos no eran su fuerte, ya que el mismo Platón propone la primera reforma de programa, insistiendo en que los niños pueden aprender matemáticas desde muy pequeños. Hasta Isaac Newton aproximadamente, los científicos se honraban en nombrase “filósofos de la naturaleza” (Ruíz, 1990).

Algunos elementos clave de la filosofía kantiana, denominada así por su fundador Immanuel Kant, son muy importantes para la filosofía matemática. Partimos del hecho de que existen dos tipos de juicio: analítico y sintético. Por su parte, un juicio analítico es aquel en cuyo predicado está contenido el sujeto, por ejemplo, “todo cuerpo ocupa un volumen”, donde el predicado “ocupa un volumen” pertenece al sujeto “cuerpo”. Mientras que un juicio sintético, es aquel cuyo predicado está fuera del concepto expresado en el sujeto, por ejemplo, “la silla es azul”, donde el predicado es “azul” y no necesariamente pertenece al sujeto “silla”, puesto que hay sillas de todos colores (Aboites & Aboites, 2008). Kant se da cuenta, de que las afirmaciones que le conciernen a la ciencia deben estar constituidas por juicios sintéticos, pues de esta forma se garantiza un avance y progreso del conocimiento científico. Para Kant, la matemática se basa en la aritmética y la geometría, basado en que la estética trascendental va en el sentido de que los juicios sintéticos a priori son posibles en la aritmética por la intuición de tiempo, y la geometría por la intuición de espacio.

Sin escatimar los aportes hechos por una u otra escuela, es muy importante hacer notar que el factor común entre todas ellas ha sido la estructura formal del razonamiento matemático. Los puntos de discrepancia, según Chela, 1986 (citado por Beyer & Walter, 2001) reside en el diferente aparato deductivo que usan y en la concepción que se tiene de los objetos matemáticos. El problema ontológico de los objetos matemáticos es el de establecer si existen independientemente de la mente humana, y, en caso de que así sea, qué clase de objetos son. Mientras que el problema epistemológico, será cómo es posible conocer esos objetos (Piñeiro, 2019).

Así pues, tenemos al realismo ontológico, el cual sostiene que los objetos de la matemática existen por sí mismos, con independencia del lenguaje o la conciencia de los matemáticos y de que sean o no conocidos en un momento determinado. Dentro de sus máximos exponentes tenemos a Platón, Frege, Gödel, Quine, Putnam, Hale y Maddy (Aboites, 2008). Por su parte, Quine argumentaba que nosotros creemos en objetos ordinarios, por ejemplo, en sillas o mesas, por que forman parte de nuestro conocimiento. Mientras que Putnam, mencionaba que en la Física se cuenta con magnitudes medibles con números reales, por lo que sería imposible hacer ciencia sin la existencia de dichos números. Sin embargo, su contrapuesto, el antirrealismo ontológico, afirma que los objetos matemáticos no existen por sí solos, sino que necesitan de los sujetos pensantes. En este sentido, el realismo epistemológico, asegura que los objetos matemáticos se descubren de manera análoga a como se descubren las entidades concretas, por ejemplo, un planeta o una estrella, se conoce hasta que alguien las observa. Sin embargo, su contraparte, el antirrealismo matemático, sostiene que los objetos matemáticos no se descubren, sino que se construyen o inventan. Además, el realismo epistemológico esta siempre asociado a alguna forma de realismo semántico, en donde todos los enunciados matemáticos tienen un valor de verdad bien definido.

Por otro lado, tenemos al faccionalismo matemático, adoptando la postura de que los objetos matemáticos no existen, sino que son términos individuales del lenguaje matemático, los cuales son útiles en la práctica de la ciencia, pero no son entidades reales, sino abstractas. A razón de ello, valdría la pena hablar sobre el platonismo matemático, el cual sostenía que todos los objetos matemáticos son objetos abstractos, los cuales dentro de la filosofía de las matemáticas son entes a los cuales no se le pueden asignar coordenadas espaciales ni temporales, por lo tanto, los objetos matemáticos podrían considerarse eternos e inmutables. Sin embargo, las características de muchos de ellos se han modificado a lo largo del tiempo, por lo tanto se estaría contradiciendo esta postura.

En este punto, es evidente que la filosofía matemática, no puede estar liberada de la opinión y del mundo subjetivo del pensador que la confiere, no es de extrañarse que buena parte de las ideas que todavía se poseen acerca de la naturaleza de las matemáticas, así como de su desarrollo y enseñanza, estén condicionadas por el racionalismo. Para Lakatos, discípulo de Popper, la matemática es una ciencia casi empírica, pues no hay posibilidad de asegurar la certeza absoluta de las proposiciones (Trigueros, 1991, citada por Beyer & Walter en 2001). Esta misma autora, nos menciona otra escuela, los positivistas lógicos, para quienes las matemáticas constituían el lenguaje en el que se expresaban las ciencias en sí mismas, y por el cual, se formalizaban y adquirían una presentación más precisa. Es en este sentido que, Cesarman (1982, citado por Beyer & Walter en 2001) afirma que las matemáticas no constituyen una solución a los problemas que plantea el conocimiento de la naturaleza, sino que son un instrumento que sirve para relacionar mediciones y cuantificaciones.

Para algunas corrientes filosóficas, la Matemática es un lenguaje, mientras que para otras es una ciencia, que tiene asociado un lenguaje a través del cual se estudian y manipulan objetos (Beyer & Walter, 2001).

1.2 Desarrollo del lenguaje matemático

Según la Real Academia Española de la Lengua, la Matemática es:

> "Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones" (RAE, 2021).

Sin embargo, referirse a los símbolos matemáticos requiere una breve reseña de su configuración a través de la historia, ya que estos se han visto influenciados por diversas culturas. Por lo que a raíz de esto, se ha llegado a postular la hipótesis de que las Matemáticas serían solo otra forma de lenguaje escrito, sin embargo, dado a los avances del lenguaje humano esta hipótesis ha sido desechada, ya que sus características y naturaleza son totalmente diferentes.

Oliva (1999, citado por Ros en 2016)

> "Si tenemos en cuenta que la comunicación simbólica es la forma de expresión más acabada de la cultura humana y si consideramos que en el lenguaje de un sujeto se contiene su concepción del mundo y de la cultura, debemos colegir que un conocimiento del lenguaje de las capacidades lingüísticas de los individuos sea determinante para la construcción bioantroplógica, psicológica y socio-didacta de los actores humanos a través de sus acciones simbólicas". (pp.219)

Las Matemáticas, como otras ciencias y disciplinas, establecen su propio contenido con características, estructuras y organización propia. Sin embargo, a diferencia de las otras, la Matemática hace muy evidente su poder comunicador, conciso y sin ambigüedades. Con respecto a esto, en el lenguaje matemático, la no ambigüedad es necesaria; esto implica que el significado de cada término o símbolo debe estar bien definido. De acuerdo con Pimm (1990, citado por Ros en 2016), el lenguaje que se usa en Matemáticas es específico, particular y está definido por un conjunto de símbolos o caracteres gráficos que son utilizados para una perfecta definición de sus objetos.

A razón de esto, bien vale la pena hablar sobre el enfoque del formalismo, el cual sostiene que la esencia de la Matemática radica en la manipulación de símbolos; es decir, sólo se necesita proporcionar un listado con todos los símbolos y reglas existentes alrededor de ella para poder manipularlas, y, por dificil que parezca, este forma de pensar es mejor aceptada entre los matemáticos que en los filósofos de la matemática. Esto quizá se deba a que uno de los aspectos característicos de la Matemática es su vinculación con un lenguaje específico de carácter formal con ciertas propiedades que lo diferencian del lenguaje natural, dando paso a un aumento de su rigor por la significación de los términos empleados dentro de ella. En este sentido, son numerosos los ejemplos de interacción entre el lenguaje natural y el simbólico, los cuales datan desde los griegos y árabes, haciendo uso de letras para expresar precozmente un simbolismo formal, como por ejemplo, en la geometría. Desde Galileo sabemos que el mundo de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas:

> La filosofía está escrita en ese libro enorme que tenemos continuamente abierto delante de nuestros ojos (hablo del universo), pero que no puede entenderse si no aprendemos primero a comprender la lengua y a conocer los caracteres con que se ha escrito. Está escrito en lengua matemática, y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin los cuales es humanamente imposible entender una palabra; sin ellos se deambula en vano por un laberinto oscuro [traducción de Aurora Bernárdez, tomada de *Italo Calvino*, Por qué leer a los clásicos, Siruela, Barcelona, 2012]. (Rojas, 2018)

La simbología, empleada en las Matemáticas se ha constituido a través de la historia (Fernández, 2010), dando paso a la configuración del lenguaje matemático el cual ha sido un esfuerzo colectivo que abarca más de veinte siglos y a muchos imperios, algunos ya desaparecidos, siempre en la búsqueda de una mejor forma de expresar relaciones estructuradas abstractas, que permitan la comprensión y eficacia del uso de las Matemáticas. En consecuencia, el álgebra ha surgido como una rama de las Matemáticas, la cual ha tenido una evolución a través del tiempo; la retórica y los simbolismos que se utilizan hoy en día, tuvieron que pasar por una serie de cambios y convenciones que fueron surgiendo y evolucionando de las mismas sociedades, en busca de darles solución a sus necesidades y problemáticas. Diofanto ha sido considerado como el padre del álgebra, debido por su forma de escritura, sin embargo, no fue el primero en hacer uso del álgebra.

Tenemos por ejemplo, a los babilónicos quienes manejaban un álgebra retórica, es decir, sin utilizar símbolos como hoy en día, y a pesar de ello podían resolver ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Así mismo, en los papiros egipcios, como en el *Rhind*, se encuentran símbolos para la adición y la sustracción, descritas como un par de piernas en dirección de la escritura e inversamente, respectivamente, incluso una tímida aproximación para el signo de igualdad y la incógnita. Fue Tales de Mileto quien al parecer adquirió sus conocimientos en el curso de viajes efectuados a Egipto, y los introdujo posteriormente en Grecia. Dando paso a los ya renombrados Pitágoras, Diofanto, Descartes, Euclides, por mencionar a algunos.

Los griegos (exceptuando a Diofanto) tuvieron que inventar procesos geométricos para llegar a solucionar problemas algebraicos, esta geometría algebraica procedía en gran medida por los pitagóricos. Hablando de la geometría, no podemos ignorar el hecho de que esta se vio influenciada en gran medida por las obras de Euclides, en las cuales se abordaba, además del método científico, teoria de números. Sin embargo, los *Elementos*, fue la obra que determinó la enseñanza de geometría que hoy se trabaja en las aulas, incluida el álgebra tratada geometricamente.

Aunque las fuentes históricas sean escasas, sabemos que también el Oriente tuvo aportes significativos hacia las Matemáticas, como por ejemplo, la invención del *"suanpan"* (máquina de calcular con bolas) el cual fue utilizado desde el siglo XII hasta nuestros días, la utilización práctica de los números negativos, el desarrollo del binomio ilustrado por el triángulo de Pascal e incluso, la utilización de series. Y si hablamos de las matemáticas indias, estas se caracterizaban por el desarrollo del cálculo numérico y algebraico, de la trigonometría y del estudio de los cuadriláteros, así como la *"notación bráhmi",* de la cual se configuraría años más tarde, nuestro sistema decimal (Collet, 1985). Es de conocimiento general, que en los tiempos de las conquistas, no sólo se ejercía una conquista en términos territoriales, sino también en todo lo demás, como dominación política y cultura, las conquistas musulmanas no fueron la excepción. Los árabes, quienes poseían una cultura muy rudimentaria, absorbieron la ciencia y la tecnología egipcia, babilónica, griega y romana. Los persas y árabes se encargaron de rescatar el legado científico de los griegos, fundando la Casa de la Sabiduria en su capital Bagdad, en donde se hicieron acopio y traducción de los más célebres textos de esta civilización, por sabios sirios cristianos (Rojas, 2018).

Uno de esos sabios fue Al-Khowarizmi (ca. 780-850 d.C.), cuya fama perdura hasta la actualidad y al que evocamos cada vez que hablamos de algoritmos, un vocablo derivado de su nombre. Se sabe que vivió durante el reinado del califa Al-Mamun (813-833), y aunque se sabe poco de su vida, sus contribuciones científicas están contenidas en cinco tratados dedicados a la aritmética, álgebra, astronomía, geografía y calendario. La obra principal de Al-Khowarizmi es *llistib al-S1abr wa'l- muqqtibala*, que significa "ciencia de la transposición y la reducción", donde el término "*al-yabr*" se convirtió en "álgebra", sinónimo de lo que hoy en día conocemos como la ciencia de las ecuaciones.

El libro de Al-Khwarizmi procede en forma similar a la de muchos otros "recetarios" algebraicos posteriores. Plantear un problema particular y mostrar cómo hallar la solución. El problema, por ejemplo, podría ser encontrar un número que reducido tres unidades se convierte en dos. En el caso de las igualdades algebraicas se procede como cuando se tiene una balanza para pesar y comparar objetos. Por eso, la palabra "*al-yabr*" muchos la interpretan como *completar,* en referencia a la idea de completar expresiones matemáticas para mantener el equilibrio. Curiosamente, en los planes educativos actuales, esta manera de introducir al discente al álgebra, sigue vigente. La traducción al latín del libro de Al-Khwarizmi, realizada en 1145, fue titulada *Liber algebrae et almucabola*. Es éste el momento en el que el vocablo "álgebra" ingresa definitivamente al repertorio verbal europeo (Rojas, 2018).

Euclides representaba los números por segmentos de rectas en sus teoremas aritméticos que encontramos en los libros VII al IX, de su obra *Elementos*, y las letras utilizadas estaban unidas a los segmentos. Por otra parte, las demostraciones geométricas del *Algebra* de Al-Khwarizmi utilizaban diagramas letrados, pero todos los coeficientes que aparecían en las ecuaciones algebraicas eran números específicos representados por cifras o escritos literalmente. Fue Jordanus Nemorarius, el fundador de la escuela mecánica medieval quien planteo la primera formula exacta del plano inclinado. El uso de letras en lugar de números fue una de las innovaciones más importantes en la aritmética, puesto que dió paso a la enunciación de teoremas generales del álgebra, introduciendo la noción de "parámetro". Cabe mencionar que en ocasiones Nemorarius se confundía, pues a veces utilizaba dos letras para designar un número y otras, sólo una letra.

A razón de esto, vale la pena mencionar que en Alemania fueron tantas las obras de álgebra que se imprimieron que, durante un tiempo la palabra germánica *Coss* (incógnita) se impuso en otras partes de Europa; el álgebra se llamó incluso durante una época *"arte cósico".* Pero no solo eso, sino que los símbolos germánicos (+) y (-) para la adición y la sustracción, respectivamente, provocaron el abandono de los símbolos italianos *p* y *m.* En 1489, antes de la publicación de la *Summa,* un docente alemán de Leipzig, *Johann Widman,* pubicó una aritmética comercial titulada *Rechenung auff al/en Kauffmanschafft,* que es el más antiguo de los libros impresos donde por primera vez aparecen estos símbolos . En esta aritmética comercial, estos símbolos se utilizaban para indicar el exceso y la deficiencia en las medidas de almacén; más tarde se convertirían en los símbolos habituales para las operaciones aritméticas de la adición y la sustracción.

La invención de la imprenta ejerce una influencia benéfica sobre la normalización de los conocimientos y la difusión de las ideas matemáticas. La obra que hizo famoso a Viete fue publicada en Tours en 1591 y más tarde en París en 1624. En esta obra nos ofrece una contribución original al álgebra simbólica que es sensiblemente análoga a nuestra concepción moderna. Aunque es cierto que sus predecesores habían adelantado ya algunos rudimentos de simbolismo que evidenciaban preocupaciones muy legítimas, antes de Viete no parece haber modo de distinguir la cantidad desconocida de las otras cantidades. La solución elegida por Viete es a la vez sencilla y eficaz: las vocales representan las cantidades desconocidas mientras que las consonantes simbolizan las cantidades conocidas. Observemos que nuestra convención moderna, debida a René Descartes (1596-1650), es contraria a la suya (Collete, 1985).

Hasta la mitad del siglo XIX, con el desarrollo del álgebra abstracta (momento en que esta disciplina llega a ser un objeto matemático en sí mismo) el álgebra se ocupó fundamentalmente de la resolución de ecuaciones, de ahí que Kieran (2004) indique que desde la época de Al- Khowarizmi, el álgebra se ha considerado como la ciencia de la resolución de ecuaciones. Sin embargo, esta perspectiva no ha sido la única a lo largo de la historia del álgebra, ya que esta ha sido enriquecida por diferentes culturas, tal y como lo menciona Gavilán (2011) quien señala a Nesselman (1811-1881) diferenciando tres nociones del desarrollo del álgebra.

La primera noción la nombró primitiva o retórica, en la que todo se escribía en lenguaje ordinario y se extendía desde los babilonios (1700 a.C.) hasta Diofanto (250 d.C.) incluidos los griegos a quienes se les atribuye la resolución de problemas a través de demostraciones geométricas. Fue Diofanto quien utilizó por primera vez un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación. La segunda noción la llamó intermedia o sincopada, en esta se comenzó a introducir algunas abreviaturas como las que desarrolló Diofanto y se prolongó hasta comienzos del siglo XVI, y por último la tercera noción, simbólica o actual, donde aparece todo el simbolismo que se trabaja con todo su rigor y lenguaje formal, es Vieta en el siglo XVI quien marca el inicio de esta etapa junto con Descartes, quienes empiezan a usar letras no sólo para representar incógnitas, sino también números.

Como se ha visto el álgebra ha sufrido a lo largo de la historia una serie de optimizaciones que la han definido como una de las ramas de la Matemática más importante, ya que se ha convertido en un lenguaje universal, permitiendo su lectura e interpretación en diferentes textos matemáticos alrededor de mundo, lo cual contribuye al intercambio de conocimiento entre diferentes culturas. Sin embargo, este lenguje matemático, altamente especializado no puede ser aplicado estrictamente en las clases para la comunicación entre docentes con discentes y entre los discentes. Ello es debido a los principios del lenguaje matemático, y a que la Matemática en general, ha sido considerada una materia dificil, desconectada de la vida del discente y con poca aplicabilidad, pero esta situación puede salvarse cuando se establecen situaciones matemáticas apropiadas. Un texto matemático permite llegar a una consécuencia lógica y, derivado de ésta, al uso de un simbolismo mínimo, adecuado y conveniente. Como lo ideal es que los discentes vayan superándose en cada nivel de su educación, el uso del lenguaje matemático debe compaginarse a este propósito a fin de que pueda comunicar correctamente sus ideas, usando adecuadamente el lenguaje matemático que es posible que utilice.

Dentro de las Matemáticas es importante la utilización de un método simbólico o lenguaje satisfactorio que permita expresar de manera clara y concisa los razonamientos que emanan de esta disciplina, así mismo se debe poder operar con él aplicando leyes determinadas, cuyo proceso de resolución de problemas aporte simplicidad y claridad en su manejo, dando paso a una solución concreta, y es el uso del álgebra quien lo ha permitido a lo largo del tiempo y de sus refinaciones. La posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla es lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, los discentes por lo general no llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque no llegan a ver su relación con lo que representan.

La comunicación desempeña un papel importante en la clase de matemáticas, pero a condición de que no sea entendida simplemente como la transcripción de un lenguaje simbólico, o de que las interacciones orales y escritas que se dan en la clase no se reduzcan simplemente a que el discente dé pequeñas respuestas de sí y no a preguntas formuladas por el docente. Cuando la comunicación es deficiente, en general, la clase se puede reducir a la transcripción de un lenguaje simbólico que carece de sentido; esto no permite que los discentes desarrollen su pensamiento matemático, a través de los procesos de particularizar, generalizar, conjeturar y convencer (Mason *et al*., 1998, citados por Jiménez *et al*., 2010). Con la práctica de una buena comunicación se desarrollan procesos de pensamiento donde los discentes son estimulados a utilizar su propio lenguaje, de tal manera que el lenguaje de la matemática surge como un proceso de construcción y no como una imposición del docente.

En este sentido, para Godino y Llinares (2000, citados en Jiménez *et al*., 2010), el tipo de discurso, o sea, la comunicación oral o escrita en el aula, realizada por el docente y los discentes, es un aspecto central y determinante de lo que los discentes aprenden en matemáticas. Si el docente se empeña en usar un patrón de interacción *unidireccional,* donde el principal protagonista de la clase es él, y se tienen como recursos didácticos solo el tablero, el marcador y, en últimas, el libro de texto, el significado de las matemáticas será muy diferente al que se concebiría en una relación rica de interacción entre docente, discentes y saber matemático. En este sentido, si en el triángulo didáctico (docente-conocimiento-discente) se permite una verdadera interacción, la clase de matemáticas es un núcleo de aprendizaje.

Dado que la matemática usa un lenguaje específico y es una forma de ver el mundo, la perspectiva interaccionista defiende el carácter discursivo del conocimiento; discurso que depende en gran medida de la comunicación y construcción de significados en los diversos contextos. En el aprendizaje, el lenguaje es, por excelencia, la forma de conocer, que se da en la interacción y la participación de todos en la clase. Así, la aprehensión de los conceptos y el desarrollo del pensamiento matemático se dan por la constitución de una práctica social interactiva. De acuerdo con lo anterior, la construcción de significados emerge de procesos interactivos e interpretativos, y la acción del sujeto se orienta a través de las interpretaciones elaboradas en la relación con otros, es decir, en la concertación de significados (Yackel, citado en Godino y Batanero, 1994).

La mayoría de los discentes aprende a aplicar los símbolos del lenguaje matemático según ciertas "reglas" que no poseen ningún tipo de justificación re-ferencial que las dote de sentido. A través de la historia hemos podido denotar que para la construcción del lenguaje matemático, se han tenido que vincular las expresiones formales con sus referentes situacionales y conceptuales, por lo que la construcción del pensamiento matemático y, específicamente, de los formalismos matemáticos, juega un papel esencial la representación del contenido semántico de los contextos y situaciones que constituyen los referentes de las transformaciones matemáticas. Y como consecuencia de lo anterior, el lenguaje matemático no puede ser considerado ni como una mera sintaxis desprovista de cualquier significado referencial, ni como una simple expresión notacional del significado de los conceptos matemáticos construidos mediante un proceso de reflexión y abstracción interna del sujeto a partir de la acción sobre el objeto, como propone Piaget. Al contrario, la adquisición de los símbolos matemáticos se origina en contextos de interrelación social y comporta una construcción conceptual que implica una función reguladora y constructiva y no estrictamente de-pendiente, de la significación de los conceptos matemáticos (Gómez, 1989).

El lenguaje, por tanto, es un "instrumento" del pensamiento y no sólo un "medio"; está entonces en una relación fundamental con el pensar, y, por lo tanto, debe ocupar una posición determinante en todo análisis epistemológico, incluidas las Matemáticas. El método de Boole es el de conducir al análisis de las operaciones de la mente; como señala en *An investigation of the laws of thought (Ruíz, 1990)*:

> "Estudiando las leyes de los signos, estamos en efecto estudiando las leyes manifestadas del razonamiento".

La lógica, sus leyes y proposiciones, pueden establecerse a través de "un cálculo del razonamiento deductivo" O, como diría luego (Ruíz, 1990):

> "La teoría de la lógica y la teoría del lenguaje resultan así, íntimamente relacionadas. Un intento afortunado de expresar las proposiciones lógicas por medio de símbolos -cuyas leyes combinatorias podrían basarse en las leyes de los procesos mentales que representan- sería un proceso en el camino hacia un lenguaje filosófico" .

Las leyes de la lógica son para Boole en su forma, aunque no en su contenido, matemática. Todas las leyes básicas de lógica las va reduciendo a relaciones de asociatividad, conmutatividad, distributividad, etc. Para ello identifica el signo " + " a los términos "y", "o" de la lógica. Las únicas diferencias con la aritmética-álgebra son:

(i) (si $XY = XZ => Y = Z$) no es válida

(ii) (ii) $X^2 = X$, que no es una regla clásica del álgebra (en 1847 había señalado $X^n = X$).

Durante esta época los avances en la lógica habían sido introducidos en el marco de la evolución de la matemática. Muchas de las innovaciones aparecían condicionadas por las necesidades en la búsqueda de sustentar condiciones de rigor para los resultados matemáticos. En Boole (como también en Peirce) la lógica simbólica era matemática. Considerando la matemática como un medio de comunicación formal filosófico, preserva una estructura elaborada buscando mantener la precisión en la comunicación y exactitud en las proposiciones (Malacara, 2019).

Sin pretensión alguna, la Matemática es la única asignatura que se estudia en todos los paises y en todos los niveles educativos. La causa fundamental de esa presencia universal radica en que las Matemáticas, poseen un lenguaje “poderoso, conciso y sin ambigüedades”, según el Informe Cockroft (1985, citado en Caserio & Vozzi, 2015). Y se pretende que sea aprendido por nuestros discentes, hasta conseguir que lo “hablen”. Sin embargo, debemos entender que la Matemática utiliza en su lenguaje una sintáxis propia representando números, conjunto de números, cantidades, relaciones con letras y signos, en general una terminología que no siempre coincide con el lenguaje común, por lo cual sería absurdo inferir que los discentes lo reconocerían por ellos mismos. El desconocimiento de dicho lenguaje, produce errores de construcción e interpretación, dificultando la comunicación entre el docente y los discentes. En cuyo caso, para Brousseau (1986), la comunicación y el lenguaje forman parte de un proceso complejo en el sistema docente-discente-medio (triángulo didáctico).

Se sugiere que antes de la iniciación de los contenidos matemáticos, se fortalezca el lenguaje matemático, para que de esta manera el proceso de la disciplina como tal, pueda fluir de manera natural. Permitiendo de esta manera la decodificación correcta de los mensajes emitidos por el docente, sin tener que recurrir a la memorización de procedimientos, transformando así un concepto en un conjunto de palabras sin sentido ni razón de ser, a un trabajo metacognitivo para la aprehensión de conceptos realmente significativos. Este proceso, es decir, la comprensión correcta del lenguaje matemático, requiere que el discente haga un ejercicio de análisis, síntesis, traducción, comprensión, etc. actividades para las cuales, en general, no se encuentra preparado. Sin embargo, al realizar dicho proceso, ocurren dos hechos simultáneos: adquiere un lenguaje y, este a su ves se convierte en la puerta de acceso al razonamiento matemático. Dando paso a la oralidad, la cual como hemos visto en el desarrollo del álgebra, es un medio discursivo en la resolución de cuestiones matemáticas.

El conocimiento matemático necesita apoyarse en un conjunto de formas de razonamiento de las que va a depender el tipo de este conocimiento y sus formas de adquisición. En este sentido, a lo largo del desarrollo, encontramos tres formas de razonamiento que constriñen la elaboración de las construcciones mentales y determinan los contenidos intencionales de las acciones y las posibilidades de conferir significados a lo real (Serrano, *et al*., 2011). Estas tres formas de razonamiento corresponden a los estadios de desarrollo en los que el sujeto puede manejar símbolos y signos (función semiótica) y son las siguientes:

a) El razonamiento transductivo, que al ir de lo particular a lo particular, impide efectuar generalizaciones y, por tanto, generar conceptos.

b) El razonamiento inductivo, que va de lo particular a lo general y se desarrolla a lo largo de las dos últimas subetapas (organización de las operaciones concretas) del estadio.

c) El razonamiento deductivo, que va de lo general a lo particular, es característico del estadio de las operaciones formales.

El lenguaje ordinario es el resultado de la actividad humana, posee una dimensión histórico-económica y depende de una superestructura simbólica (Radford 2004, citado por García, 2015), igualmente constituye una herramienta mental (cognitiva) muy compleja de definir. Todo lenguaje posee tres aspectos claves, el primero un conjunto de elementos básicos discretos o vocabulario; el segundo, una sintaxis, es decir, un determinado poder para combinar los elementos del vocabulario de manera específica, donde cada secuencia puede determinar conceptos diferentes; y por último un alcance semántico personal, generado por secuencias sintácticamente bien formadas, que permiten al individuo hablar sobre objetos (Quesada 1991, citado por García, 2015). Esto significa que el lenguaje es como un texto que se produce y se revisa constantemente, cambia en razón de la acumulación de información, reflexiones posteriores o por la influencia de las emociones y los sentimientos.

Las matemáticas vistas como lenguaje no escapan a este proceso ya que los objetos de los que habla y con los que trata se encuentran en permanente construcción, siendo esta la parte más problemática y por ende más rica de su significado (D`Amore, 2011). El conocimiento y el avance las matemáticas se han desarrollado de manera consolidad en la humanidad, precisamente al formalismo de comunicación. Al considerar al lenguaje ordinario como punto de partida para la construcción del lenguaje matemático, se evidencia la existencia de una compleja relación entre signo y significado, aspecto que se agrava por un paradójico uso de símbolos que no poseen referentes físicos y demandan un manejo totalmente conceptual. Se cree que a partir de ellos, el individuo debe ser capaz de modelar la realidad, a pesar del carácter polisémico que, muchas veces, tales símbolos engloban. Podría considerarse entonces que el aprendizaje de las matemáticas parte del lenguaje ordinario para la construcción de los conceptos básicos o fundamentales que utiliza, aunque conforme se desarrolla, genera y utiliza su propia simbología, sintaxis y semántica para manipularlos.

El crecimiento del lenguaje ordinario y el consecuente enriquecimiento de su campo semántico actúan como facilitadores para la comprensión y uso hablado de los objetos, ya sean propios del lenguaje ordinario o del matemático (García, 2015). Estos aspectos podrían generar condiciones de reconocibilidad e identificación del objeto hablado distinguiendo sus posibles representaciones, lo que contribuye a que el lenguaje matemático crezca en cantidad y calidad, y por ende, a que su aprendizaje y utilización en la solución de problemas sea mucho más eficiente.

El lenguaje que las matemáticas crea e inventa con el propósito de simplificar procedimientos requiere ser conocido y comprendido por el discente para poder encontrar un significado y así generar un aprendizaje. Si no se logra comprender el lenguaje con el que se desarrolla las matemáticas, el discente no podrá acceder a su aprendizaje (Silva y Rodríguez, 2010). Si bien, plantear la matemática como un lenguaje acarrea severos problemas, bien valadría la pena no perder de vista la función histórica de las matemáticas, pues recordemos que su epistemología parte de la realidad, es decir, las matemáticas nacen con la finalidad de encontrar soluciones a los problemas cotidianos, y esta ha sido su función. El hecho es que, al considerar a la Matemática como un lenguaje formal que tiene una estructura, con una semiótica, una gramática elemental y una sintaxis a veces rígida, a veces laxa, la matemática carece o tiene deficiencias importantes en algunos de estos elementos.

Si analizamos la prosodia actual de la matemática encontraremos que impone dificultades para la comunicación oral. La ciencia de las matemáticas como un lenguaje formal adopta los vocablos disponibles en el lenguaje común del usuario; en otros casos, dispone de términos propios únicos a las matemáticas, pero ya de uso en casi todos los idiomas (Malacara, 2019). Las matemáticas tratan de representar de manera escrita algo similar a la prosa llana. Los vocablos echan mano de los alfabetos latino, griego e incluso hebreo, sin olvidar la exclusividad de la numeración indo-arábiga. A lo largo de los años, la matemática también ha desarrollado una iconografía propia. Inclusive, la metáfora simple, tan común, estética y valiosa en un lenguaje habitual, es impensable en el lenguaje matemático. Y es aquí donde radica una muy importante diferencia con respecto a los lenguajes naturales. El lenguaje matemático, se ha especulado, puede tener diferentes grados estéticos según diversos autores. Se cita la ecuación de segundo grado como una de las ecuaciones más comunes, pero carente de estética y belleza, por lo que, la tarea de todo matemático es encontrar la funcionalidad de cualquier cantidad variable (Hersh y John-Steiner, 2011).

Con base en lo anterior, la medida estética de una expresión matemática crece con el orden y decrece con la complejidad. Para mantener la belleza de una ecuación es necesario presentarla de una manera ordenada y con una complejidad reducida. La representación tiene que ser lo más adecuada posible. Con respecto al orden, es inevitable relacionar la entropía como un concepto que afecta los lenguajes (Eco, 2015). La estructura semántica de la matemática es el resultado de la aportación de diversas culturas en diverso tiempo. Este lenguaje universal contiene características encontradas en lenguajes comunes, además de propiedades no contenidas en ningún otro. Además, se utiliza en muchas funciones mentales como la atención, la memoria y el pensamiento lógico-matemático (Vigotsky, 2005).

La mayoría de los conceptos matemáticos no pertenecen a las formas reales o se apoyan en relaciones entre objetos o conjuntos que se definen formalmente. Además la contribución que hacen algunos estudiosos de la didáctica matemática como Pimm(1990), usan de manera metafórica el considerar a la Matemática como un lenguaje. En relación con los términos y símbolos matemáticos no siempre la lista de ellos se usa para un único objeto o concepto y, ocasionalmente se utilizan términos que provienen del lenguaje cotidiano a los que puede dárseles o no un significado distinto del semántico, y, adquirir un sentido de amplitud o de restricción en relación con el lenguaje común.

1.3 Dificultades en el lenguaje: causa-efecto de la génesis algebraica en Matemática escolar

Dentro de las Matemáticas es importante la utilización de un método simbólico o lenguaje satisfactorio que permita expresar de manera clara y concisa los razonamientos que emanan de esta disciplina, así mismo se debe poder operar con él aplicando leyes determinadas, cuyo proceso de resolución de problemas aporte simplicidad y claridad en su manejo, dando paso a una solución concreta, y es el uso del álgebra quien lo ha permitido a lo largo del tiempo y de sus refinaciones. La posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla es lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, los discentes por lo general no llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque no llegan a ver su relación con lo que representan.

Una verdadera actividad matemática exige que el sujeto se implique profundamente en ella, lo que supone que formule enunciados, pruebe preposiciones, construya modelos, lenguajes, conocimientos, que los ponga a prueba, que los intercambie con otros, que reconozca lo que están conformes con la cultura matemática y tome las que le son útiles para continuar sus actividades. Un discente hace realmente las matemáticas cuando, para construir con sentido un conocimiento matemático, debe: actuar, formular y probar (Brousseau, 1998). El aprendizaje se lleva a cabo, entonces, a partir de una acción fundamentalmente simbólica, y por ello, el lenguaje, esencialmente simbólico, germina en la acción y en él se incardinan sociedad y proceso educativo. La utilización del lenguaje matemático en su contexto social permitirá el acceso a conceptualizaciones lógicas más avanzadas y facilitará el desarrollo del pensamiento.

Entendiendo que el lenguaje de las Matemáticas se configura en un ámbito más semiótico que lingüístico, se acentúan ciertos aspectos semióticos en las matemáticas escolares. El hecho de suponer que los discentes manejan el simbolismo de la Matemática, representa una dificultad en el aula, ya que se trata de incentivar un aprendizaje carente de propiedades significativas en el discente, es como si el docente y el discentes estuvieran hablando dos idiomas diferentes. Por lo que, el desarrollo del simbolismo del discente se debe ir configurando en los primeros años educativos, para que cuando lleguen a niveles más avanzados, como educación media superior y superior, estos puedan establecer una adecuada conexción semántica entre los símbolos y sus significados.

Este aprendizaje se llevará a cabo a partir de procesos de asimilación, recreación, apropiación y uso de símbolos y estructuras conformadas por símbolos cada vez más abstractas. Este recorrido se expresa en cuatro tramos o niveles de simbolización superpuestos (Alcalá, 2004):

1. Introducción del simbolismo (de la palabra al simbolismo notacional).
2. Las operaciones aditivas y la formación básica del número (el conocimiento operatorio del número natural).
3. Las operaciones multiplicativas y nuevos campos numéricos.
4. El simbolismo de tercer orden. La entrada de lenguaje algebraico y el razonamiento proporcional.

La relación entre el lenguaje natural, cotidiano, y el simbólico, es esencial en las actividades de aprendizaje de las matemáticas (Vergnaud, 1991), citado por Ros (2016). Pareciera una obviedad pero el proceso de comunicación en la clase de Matemáticas no ha tenido la suficiente importancia. En el proceso de docente-emisor y discente-receptor, la comunicación se ha limitado al discurso hecho por el docente, descuidando aspectos importantes como el tipo de lenguaje que utilizan los discentes para representar sus raciocinios matemáticos. Cabe resaltar que el importante papel de la comunicación en la clase de Matemáticas, se ha visto reducido a una simple transcripción de un lenguaje simbólico con carencia de sentido, inhibiendo en los discentes el desarrollo del pensamiento matemático, este hecho puede mermar el hecho de que el lenguaje matemático surga como un proceso de construcción.

Otro aspecto importante que debe convertirse en objetivo del currículo de matemáticas, especialmente en los niveles de educación básica y media, es el desarrollo de la capacidad de comunicación oral y escrita de los discentes. El lenguaje oral sirve de soporte al pensamiento e, incluso, es a través de él que se desarrollan los aspectos esenciales de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Ponte et al. (2007); sin embargo, el lenguaje escrito, incluyendo todo tipo de registro escrito, simbólico o representación iconográfica, es una forma complementaria de comunicación y un medio importante que permite a los discentes reflexionar sobre su comprensión matemática, y hacer explícitas las conexiones entre diversos conceptos. Según estos autores, esta es la forma como los discentes desarrollan su capacidad de comunicarse matemáticamente, entre ellos y con el docente (Jimenez et al. 2010).

Generalmente, los matemáticos de la Antigüedad no podían resolver el caso general de un problema planteado, resolvían por eso casos especiales de cada ecuación y describían el proceso de solución en forma de recetarios verbales. Es lo que se llamaba el álgebra *vernácula*, es decir, platicadita. Un matemático del siglo XII no contaba con símbolos estándar para la adición, la sustracción o la multiplicación, y ni siquiera el símbolo de igualdad estaba a su disposición. Por eso al principio los problemas numéricos se planteaban en forma puramente verbal. Un libro de aquella época, leído hoy, sorprende por la ausencia de simbología. Sólo encontramos frases y más frases que nos hablan de la variable, su cuadrado o su cubo. Los griegos siguieron un camino alternativo y muy peculiar. Versados en la geometría y provistos de potentes teoremas matemáticos, podían convertir muchos problemas numéricos en un problema geométrico equivalente. Éste es precisamente el método griego de geometrizar la aritmética para resolver problemas que ahora llamamos algebraicos.

El álgebra es una disciplina que requirió siglos para madurar, y en realidad no se pudo algebraizar completamente a las matemáticas hasta el siglo XIX. Generaciones de matemáticos batallaron hasta llegar a la conceptualización y notación correctas. Por lo que, no podemos pretender que un discente adquiera dicho lenguaje en uno o dos cursos de Matemáticas, mucho menos si en la escuela se le ha dotado de puros algoritmos y no de una comprensión de ellos.

En palabras de Stenhouse (1986):

"para transformar la escuela hay que conocerla".

En consecuencia, se muestra un análisis de los diferentes patrones de interacción que se llevan a cabo en el aula de clase y el papel que cobra el lenguaje en el aprendizaje. Durante mucho tiempo, las matemáticas han sido percibidas como difíciles de aprender, y los resultados de los discentes en su rendimiento académico parecen confirmarlo (Jiménez et al., 2010).

Con la llegada del Movimiento de la Matemática Moderna, en la década de los sesenta, la simbolización, el lenguaje abstracto y la demostración rigurosa, por ejemplo, entraron en el currículo de la educación básica y media; esa excesiva rigurosidad, como bien es sabido, trajo mayores dificultades al aprendizaje de la matemática en este nivel, hasta el punto de que algunos críticos consideran ese programa un fracaso (Vasco, 1994; Miorin, Miguel e Fiorentini, 1993). Con las nuevas reformas curriculares en los años ochenta, yendo de un extremo a otro, la demostración prácticamente desapareció del lenguaje de la matemática en ese nivel; con ese nuevo enfoque curricular se valoriza el trabajo empírico, que, dicho sea de paso, en el nivel de la educación básica y media es fundamental, pues es el que permite, a partir de casos y constataciones particulares, buscar la generalización y la conjeturación, para luego sí intentar la demostración o, en palabras de Mason et al. (1998), "el convencer". Ahora, el desarrollo del currículo que simplemente repite algoritmos, enunciados o conceptos, y 'experimenta' casos particulares sin analizar su validez, genera también problemas, pues la esencia de la matemática desaparece. (Jimenez et al., 2010)

Una de las causas principales de los tropiezos de los discentes en la comprensión y desarrollo de los conceptos matemáticos se encuentra en la transición de la aritmética al álgebra, en la que se dificulta la representación de las diferentes ecuaciones y en las cuales se hace necesario observar otros tipos de representación como la geométrica para consolidar los conocimientos algebraicos, como lo menciona Zubia (1988) “Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances (...) en la matemática”. (Busto, 2009)

Los niños al llegar al estudio del álgebra traen consigo las nociones previas adquiridas en el estudio de la aritmética, pero el álgebra no es una simple generalización de la aritmética y mucho menos es hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética, “el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del discente de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones” (Kieran. C), entre las dificultades más generales que se les presenta a los discentes de álgebra se encuentra la forma de ver el signo igual, las dificultad con las convenciones de notaciones, los métodos de simbolizar, las variables, las expresiones y ecuaciones, así como la resolución de estas.

Métodos de simbolizar. En la solución a problemas meramente aritméticos los discentes usan diversos tipos de métodos informales de solución, estos a su vez no les exige tener cierta claridad en los procedimientos que usan para llegar a estas soluciones. Por su parte el álgebra les obliga a formalizar procedimientos que tal vez antes no les interesaban, además no comprenden que el procedimiento es en muchos casos la respuesta al problema; esperando siempre que la operación sea cerrada y que tenga como respuesta un número.

Uso de la variable. En el estudio de la aritmética no es usual que los discentes trabajen con variables, uno de los usos que se le otorga a las letras es el de etiquetas para denotar unidades de medida y según Kieran (1998) este es el principal problema que los discentes tiene en la comprensión de la variable y su entendimiento como etiqueta, de la misma manera Kieran citando a Kuchemann (1981) “la mayoría de los discentes trataban la letra en expresiones y ecuaciones como incógnitas especificas más que como número generalizado o como variables.”

Ecuaciones. Los discentes en sus primeros años de estudio, están familiarizados con la solución a ecuaciones del tipo sumando faltante, sin embargo estas situaciones generalmente se les presentan de una manera descontextualizada y carente de significado, además las soluciones que dan a estas ecuaciones muestran al lado derecho la solución del cálculo, es decir un número.

Errores y dificultades en la generalización: Para los discentes resulta difícil encontrar términos generales y llegar a su expresión simbólica, el problema surge en la introducción didáctica de los problemas que se le presenten. Cuando se ha trabajado un problema es difícil retener en la memoria las distintas propiedades que configuran su estructura; de esta manera se limitan solo unas pocas propiedades y al enfrentarse a otros problemas usan estas propiedades y si se cumplen dan esta como la solución del problema (Busto, 2009).

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las Matemáticas escolares. Existen numerosas investigaciones con respecto a las dificultades que presentan los discentes con respecto a la transición del pensamiento aritmético al algebraico, y en todas estas salen a relucir aquellas que se refieren específicamente al lenguaje algebraico. De acuerdo con el trabajo de Gavilán (2011) se sabe que los conceptos vinculados con el álgebra y su operación muestran con frecuencia, dificultades y conflictos en los discentes. Debido a que el paso de la aritmética al álgebra es un cambio cualitativo en su forma de pensar. Si aunado a esto, consideramos que por su naturaleza misma el álgebra tiene diferentes representaciones a lo largo de la enseñanza durante la educación básica, y no sólo de este nivel, sino en general, el discente no tiene un aprendizaje significativo de ésta y por tanto cada vez que avance en su nivel educativo seguirá enfrentando la misma problemática una y otra vez.

Por la importancia de conocer a fondo cómo se relacionan entre sí la lengua materna y el álgebra simbólica, en el aprendizaje y la enseñanaza de ésta última, se ha considerado conveniente estudiarla en su condición cómo lenguaje. Así el trabajo de Davis Kirshner enfatiza el carácter de lengua escrita del álgebra y recurre a la lingüística y a la semiótica para analizar la sintaxis y la semántica algebraica. Este autor hace uso de la gramática generativa y transformacional para producir expresiones algebraicas simples y transformarlas, con base en descripciones de sus formas superficiales y profundas (Kirshner, 2001). Luis Radford (2000) toma la idea de Vygotsky de que la cognición humana está atada al uso de signos, de tal manera que ya no se considera central lo que los signos representan sino lo que nos permiten hacer. Es más, sostiene que los signos forman parte de sistemas de signos que son parte de una cultura y por tanto trascienden las cogniciones individuales.

Ambas concepsiones, tanto la de Kirshner como la de Radford, se nutren de disciplinas como la linguüística y la semiótica. Desde hace algunos años, son numerosos los trabajos que han puesto de manifiesto que la mayoría de los escolares han aprendido a manipular símbolos matemáticos de acuerdo con ciertas reglas sintácticas, sin ninguna referencia a los aspectos semánticos.

Algunos de estos trabajos han estudiado la naturaleza de los errores que los discentes cometen en el aprendizaje de los simbolismos matemáticos. En los trabajos de Matz (1982) y Sleeman (1984), se atribuye la causa de los errores en el aprendizaje del álgebra a la formación de «reglas prototípicas» que son extra- poladas incorrectamente a contextos y situaciones no adecuadas, porque los discentes se limitan a manipular los símbolos sin relacionarlos en absoluto con sus referentes conceptuales o situacionales. Esto se puede observar muy concretamente en los libros de textos con los cuales se les enseña álgebra a los discentes, en los cuales se suelen presentar problemas descontextualizados y con datos extrapolados, por lo que la solución numérica carece de sentido para el discente.

Ello hace que el niño no relacione dicha situación con su conocimiento de los algoritmos canónicos de la multiplicación y la división, vinculado a otros contextos estrictamente escolares, y busque una representación gráfica que transmita “el significado” de la situación en su globalidad. El análisis y diferenciación entre los aspectos matemáticos y extramatemáticos en múltiples y diversos contextos permitirá representar las transformaciones matemáticas a través de un proceso de búsqueda de isomorfismos matemáticos a partir de la diversidad semántica.

En este proceso el recurso a códigos figurativos e icónicos, es una estrategia fundamental, porque permite vincular el significado de la operación con el contenido metafórico (Gómez, 1989).

Estos hechos se le atribuyen a una mala enseñanza de las matemáticas que no incide suficientemente en la vinculación de los simbolismos del lenguaje formal con sus referencias conceptuales y situacionales (Gómez, 1989). Kieran (2004) menciona que las actividades generacionales del álgebra escolar implican la formación de expresiones y ecuaciones que son precisamente los objetos del álgebra, esto incluye ecuaciones de una incógnita y que represente situaciones problemáticas, por lo que si nos referimos a esta perspectiva el discente no comprende ciertos vocablos o expresiones, por lo que le hace aún más difícil comprender que es lo que realmente le están pidiendo en el problema. Por su parte, Castro (2012) nos menciona que la traducción entre lenguajes puede representar una dificultad para el discente debido a las características propias del lenguaje, dado que deben dar significado a las letras, vocablos y, al uso desigual que se da entre la aritmética y el álgebra, como por ejemplo que diferentes letras, representan ahora valores y, que además de ello, sean diferentes.

En la enseñanza escolar de la aritmética, los discentes resuelven sin complicaciones problemas de suma, sustracción, multiplicación y división a través de un amplio conjunto de estrategias, sin embargo al iniciar el aprendizaje del álgebra suelen presentar dificultades en las operaciones algebraicas, ya que ahora los problemas que se les presentan se resuelven utilizando algoritmos que van más allá de los que ellos conocen, surgen frases como “*si está sumando ahora pasa restando*” o “*si está dividiendo pasa multiplicando*”, que aun cuando son literariamente informales e implican propiedades de conmutatividad, para el discente dichas frases no tienen sentido.

Podemos observar que es muy común que los discentes al aprender álgebra empleen sus conocimientos aritméticos, resolviendo así problemas sencillos, sin embargo, cuando se les presenta un problema que necesita un razonamiento extra, el discente empieza a presentar dificultades y conflictos, que más adelante se convertirán en obstáculos, es entonces cuando el rechazo hacia las Matemáticas se intensifica, ya que esta transición es un cambio cualitativo en la forma de pensar del discente, incluso muchos discentes manifiestan sentimientos de tensión y miedo que pueden estar asociados al desfase existente (Gavilán, 2011). Siguiendo a García (2010) se requiere un especial cuidado en el nexo entre ambas materias, aritmética y álgebra, de tal forma que el discente perciba que el simbolismo empleado en el álgebra es sólo una manera de generalizar ciertas propiedades aritméticas.

Los discentes de educación básica (secundria y bachillerato) sufren un conflicto de ideas y concepciones con respecto a su pensamiento aritmético, el cual ha estado influenciado durante su formación escolar previa, dicha situación no es ajena en discentes de nivel superior. Este encuentro se debe a que empiezan a trabajar de lleno con ecuaciones de primer grado, pero ya generadas, ya estructuradas sin saber que significaba esa x, y o z, ni saber a que se refería la expresión “$piensa\ un\ número$”. Según Alfonso (2009) exceptuando la química, física o la música, en ninguna otra ciencia como en el álgebra ha influido tanto en su desarrollo la adopción de una simbología adecuada, la cual a lo largo de los siglos se ha ido configurando en un conjunto específico de símbolos y números que permiten expresar y homogeneizar toda la teoría existente, a este conjunto lo concibe como “lenguaje algebraico”.

Desde la educación primaria los discentes manipulan expresiones con letras, como en el cálculo de perímetros y áreas, sin embargo cuando pasan a secundaria, dicha manipulación se vuelve más compleja. Esta situación se agrava cuando pasan de secundaria a bachillerato, ya que en este nivel se empieza a trabajar con el Cálculo, el cual implica que el discente deba de tener un manejo amplio del lenguaje algebraico y sus reglas de operación. Godino y Font (2003) nos mencionan que en el cambio de manipulación entre un grado y otro, hay dos etapas que distinguir. La primera en la cual los símbolos sustituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos, y la segunda en la que los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban.

1.4 Enseñanza-Aprendizaje del Álgebra

¿Cómo enseñar mejor las matemáticas? es, sin lugar a dudas, la pregunta que origina el área de investigación que, en muchos países, se conoce como Didáctica de las Matemáticas. Y más específicamente, ¿cómo enseñar el álgebra escolar? Para contestar a esta pregunta podemos focalizar nuestra atención sobre la mente del sujeto que ha de aprender, lo cual nos lleva a entender la "comprensión" como "proceso mental" y a reflexiones psicológicas que nos pueden ayudar a saber lo que sucede en la mente del discentes y, como consecuencia, nos pueden dar indicaciones sobre cuándo y cómo enseñar.

La enseñanza de las matemáticas ha tenido que estar de acuerdo con el espíritu de la época ─ creyendo que las Matemáticas sirven para estructurar el pensamiento y que eran el lenguaje de la ciencia. Podemos encontrar matemáticas en todas partes, se decía, pero no cualquier clase de matemáticas, sino las matemáticas de hoy en día: la teoría de conjuntos, las estructuras matemáticas, la probabilidad, la estadística, el álgebra, etc. y cuanto más pronto los discentes entren en contacto con estas matemáticas, mejor (Font, 2009). Varias han sido las propuestas tendientes a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, pero la situación parece no modificar o, en todo caso, se ha modificado muy poco (Menezes y Ponte, 2006),

La enseñanza tradicional de la matemática se ha dedicado durante mucho tiempo a la trasmisión de contenidos ya sistematizados en lenguaje simbólico, el mismo usado para la comunicación universal entre especialistas del área, pero que, como se sabe, no es apropiado para la comunicación en la clase, lo cual ha tenido como consecuencia que esta disciplina se vea como algo exótico, difícil y poco atractiva (Muniz y Borges, 2008).

Para la resolución de problemas, por ejemplo, la comprensión lectora es fundamental; además, la escritura está íntimamente relacionada con la lectura, así que la escritura asume un papel importante, debido a que, de alguna manera, un escrito es una sucesión de ideas ordenadas coherentemente, aspecto que en matemáticas hace parte de su estructura. Aprender a comunicarse en la lengua materna es imprescindible para un buen desempeño en matemáticas, dado que estas tienen su lenguaje simbólico propio.

Hacer que los discentes lean una definición o el enunciado de un problema y que expresen con sus palabras lo que entendieron, y confrontarlo con lo que entendieron los demás, es sin duda una buena estrategia, tanto para mejorar la comprensión lectora, como para desarrollar la argumentación, ya que una de las grandes dificultades en la resolución de problemas es que no se entiende el enunciado(Jimenez et al., 2010). La formación del docente que ha de impartir matemáticas requiere situar la formación matemática en un lugar importante; ningún tipo de formación pedagógica, psicológica ni didáctica puede suplir una débil formación matemática del futuro docente de matemáticas de cualquier nivel educativo. El diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje requiere unos sólidos conocimientos matemáticos además de una formación didáctica.

Muchos investigadores en este campo han optado por desarrollar programas de investigación específicos del área. Entre otros, la Socioepistemología de Cantoral y colaboradores, la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y colaboradores, el Enfoque Ontosemiótico de Godino y colaboradores, la Teoría de la Objetivación de Radford y colaboradores, la Teoría Antopológica de Chevallard y colaboradores, la Educación Matemática Crítica de Skovmose y colaboradores, la Teoría APOS de Dubinsky y colaboradores, el Constructivismo Social de Ernest y colaboradores, el cosntructivismo Radical de Von Glaserfeld y colaboradores, etc.

Los diversos enfoques que se han propuesto en la Didáctica de las Matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) Una metodología de investigación. De acuerdo con Font (2002), si un programa de investigación problematiza y se posiciona explícitamente sobre cuestiones de ontología y de epistemología general, diremos que se trata de un programa de investigación global (puntos 1 y 2), si problematiza la naturaleza de las matemáticas hablaremos de programa semilocal (punto 3) y si sólo se posiciona en los últimos tres puntos hablaremos de programa local (Font, 2009).

En cuanto a los métodos de investigación podemos decir que se ha pasado del predominio de un enfoque psicoestadístico en la década de los 70 y parte de los 80, a los métodos cualitativos. Hoy en día los escenarios naturalistas y los estudios de casos gozan de clara preferencia sobre aquellos en los que se controlan y manipulan circunstancias y variables. En cuanto a los marcos teóricos, si bien el enfoque psicológico no ha perdido su importancia se están desarrollando también investigaciones dentro de otros enfoques como el interpretativo, etnográfico, antropológico, sociocultural, etc. (Font, 2009)

Las dificultades que se producían en el aprendizaje de las matemáticas eran causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática tradicional (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducían en el discente una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa. Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los discentes para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre docentees y discentes relacionados con el uso de elementos genéricos. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los discentes puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene el elemento genérico.

Sin entrar en un análisis exhaustivo de las consecuencias del enfoque "moderno" de las matemáticas en la enseñanza no universitaria, podemos decir que los aspectos más perjudiciales de la aplicación concreta de esta reforma fueron (Núñez y Font 1995):

- *Los textos didácticos* ofrecían pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los discentes conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, lo cual facilitaba preguntas del tipo "esto para qué sirve".

El aprendizaje de las estructuras matemáticas, inició tímidamente una línea de trabajo, que llamaremos "semántica" (entendiendo por semántica todo aquello que tiene que ver con la construcción de significado que hace el discente), que pretendía resolver una de las grandes dificultades del aprendizaje de las matemáticas: su nivel de abstracción y generalización. Esta forma de entender la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas consideraba imprescindible presentar contextos variados que diesen sentido al concepto (Font, 2009).

Para entender el efecto que tiene la semántica en la traducción de un lenguaje a otro, partiremos de la noción clásica de “problema aritmético” como un problema que puede resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, , ×, /, etc.) ejecutables a partir de los datos del problema, datos que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes. Tanto las cantidades que resultan de las operaciones intermedias como la cantidad incógnita, tienen que poder ser interpretadas en el contexto del enunciado del problema. Podemos considerar que las técnicas clásicas de resolución de los problemas aritméticos escolares se materializan en discursos verbales que, partiendo de los datos y mediante una cadena de operaciones aritméticas, permiten calcular la cantidad incógnita. Los elementos tecnológico-teóricos que permiten describir, justificar e interpretar esta práctica aritmética elemental consisten esencialmente en las propiedades de los diferentes sistemas de números (naturales y racionales), en las propiedades de las operaciones aritméticas con estos números y en las operaciones elementales entre cantidades de magnitudes, a lo que se podría añadir, en el nivel teórico, el discurso implícito que describe e interpreta el “patrón de análisis-síntesis” (Gascón, 1993).

La geometría interviene constantemente en la enseñanza de las matemáticas, además de ser una de las estructuras matemáticas mas llamativas y cautivadoras para los discentes por la multiplicidad de representaciones que involucra en su contenido. Sin embargo, los discentes presentan vacíos conceptuales al relacionar la geometría con algunas temáticas propias del álgebra, particularmente en torno a las ecuaciones algebraicas y los productos notables además de su aplicación en diversos campos.

No obstante, la geometría puede ser un arma potente en la búsqueda de un punto medio en el que se realice el traspaso de la aritmética al álgebra de una manera más natural para los discentes, ya que permite evidenciar otras formas de razonamiento y de comprensión de un mismo concepto ayudando a la construcción de los conocimientos algebraicos a partir de una base sólida (Busto, *et al*., 2009).

Las expresiones simbólicas y las representaciones geométricas constituyen un método de enseñanza eficaz, el cual origina habilidades que permiten un adecuado razonamiento en el discente para la interpretación de casos particulares llegando a los generales, además, permite avanzar en la representación verbal de las construcciones geométricas y de las ecuaciones que se presentan a partir de la utilización de un lenguaje retórico (Busto, 2009), En ese sentido, las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas...). Esta producción no responde únicamente o necesariamente a una función de comunicación: puede responder también a una función de objetivación o a una función de tratamiento (Duval, 2006).

La bibliografía nos evoca a dos tipos de traducción entre el lenguaje natural y algebraico: *a) traducción sintáctica*, la cual indica la conversión de cada oración verbal en una ecuación, cambiando palabras claves por símbolos y en un orden de izquierda a derecha, y *b) traducción semántica*, la cual exige un trabajo metacognitivo, ya que se debe comprender la relación que existe entre las cantidades conocidas y desconocidas que vienen planteadas en el enunciado verbal, y la cual debe expresarse en un lenguaje simbólico de ecuaciones (Clement, 1982, MacGregor & Stacey, 1993, citados por Gárriga, 2011).

Con respecto a la traducción sintáctica, esta permite convertir muchos problemas verbales en ecuaciones que conducen a soluciones correctas, aunque el discente por lo general no comprende la relación que existe entre una y otra. Sin embargo, este tipo de traducción conlleva a que ocurra con más regularidad el error de inversión para las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división, complicando la comparación entre cantidades (Gárriga, 2011).

Por su parte, Filloy (1999, citado en Serres, 2011, p.127) estudió la adquisición del lenguaje algebraico desde dos estrategias: a) *modelaje de situaciones*, para desarrollar habilidades sintácticas y b) *producción de códigos*, para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Obteniendo como resultados que existe una relación entre lo sintáctico y lo semántico, y que el avance de uno de ellos implica el de la otra parte.

Además, para resolver problemas verbales Filloy (1999, citado en Serres, 2011, p. 137) considera tres métodos: a) *método cartesiano (MC)* el cual consiste en representar las incógnitas de un enunciado verbal en una expresión algebraica, cuya solución matemática tendría nuevamente una traducción verbal para dar solución al problema, b) *método de inferencias analíticas sucesiva (MIAS)* cuya solución final es el producto de inferencias lógicas que actúan como descriptores, y c) *método analítico de exploraciones sucesivas (MAES)* muy parecido al anterior, sólo que se plantea un valor hipotético para la incógnita, por lo que lo vuelve un método más cargado a la aritmética.

En el trabajo que presenta Marquina (2014) enmarca una serie de ocho pasos para traducir problemas expresados en palabras comunes al lenguaje algebraico, que den pauta a la elaboración de posibles soluciones correctas a problemas matemáticos. Entre ellos se destacan, leer el problema cuidadosamente (si es necesario más de una vez), identificar los datos e incógnitas involucradas (clasificando en variables o constantes) y de esta manera reducir la dificultad al trabajar con una sola variable o máximo dos, según sea el caso, y por último, establecer, resolver y verificar la ecuación planteada.

Con el uso de un dominó algebraico Rodríguez-Domingo (2015) y apoyándose de la clasificación hecha por Socas (1997, citado por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 280) encontró que los errores que comenten los discentes entre una lenguaje y otro, radica en la aritmética y en aquellos derivados de las características propias del simbolismo algebraico. Aportando además que los errores más frecuentes derivados de la aritmética, fueron aquellos relacionados con el uso del paréntesis y el de las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación y división, incluyendo además el de la potenciación. Martínez (2019) encontró que los discentes traducen literalmente el enunciado, es decir no identifican las operaciones a desarrollar, generalizan procedimientos ya conocidos y además de ello, los mecanizan. Por lo que no llegan a comprender el planteamiento del problema y por ende, el resultado obtenido es meramente numérico sin darle una interpretación acorde.

Como hemos visto, parte de las dificultades se deben a problemas propios del uso y comprensión de nuestro lenguaje; dificultad que se agrava al emplear palabras que en el contexto matemático tienen diferente significado que, en el lenguaje habitual como raíz, potencia, primo, diferencia, matriz, etc.

1.5 Competencias del lenguaje algebraico

El problema de la transición entre el lenguaje aritmético al algebraico ya se ha abordado, y se ha atacado desde diferentes perspectivas, en donde se han formulado instrumentos a lapiz y papel, impregnando la resolución de ecuaciones de primer grado o sistemas de ecuaciones como en el trabajo de Álvarez, García & Santos (1992). Este trabajo en específico basado en las competencias en el uso del lenguaje algebraico, permitió visualizar que los discentes de segundo año de secundaria tenían problemas de manipulación para la resolución de ecuaciones, por lo que les pareció pertinente diseñar un instrumento con más de treinta dos ecuaciones. Sin embargo, ¿será este tipo de trabajos o instrumentos los que permitan visualizar las competencias algebraicas con las que cuenta el discente?. Fernández (1997) en su trabajo nos menciona que los problemas verbales ofrecen una oportunidad para documentar las competencias algebraicas con las que cuenta el discente, ya que la admisión de diferentes representaciones en su resolución, contribuye a una visión más adecuada del desarrollo de las competencias del sujeto.

La concepción que se tiene del álgebra en el currículo de matemáticas es muchas veces sesgada y como mencionan Kieran y Filloy (1998) citando a Love (1986, p 49).

> “Hoy en día el álgebra no es meramente “dar significado a los símbolos” sino otro nivel más allá de eso; que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son especialmente algebraicos – por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, es lo que significa pensar algebraicamente” (Busto et al., 2009).

La clave para el aprendizaje y la instrucción en conceptos matemáticamente complejos resulta de dos perspectivas: de la identificación de procesos cognitivos que contribuyen a la competencia de dominio, y del análisis del pensamiento del sujeto, en el cual se deciden estrategias de resolución (Lemon y Lesh, 1992).

El proyecto “Realistic Mathematics Education” desarrollado en el instituto Freudenthal (De Lange, 1996; Reewijk, 1997). Este proyecto considera que “saber matemáticas” es “hacer matemáticas”, lo cual comporta, entre otros aspectos, la resolución de problemas de la vida cotidiana. Uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los discentes. Otros principios, importantes, son que hay que dar al discente la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos y que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser muy interactivo. Básicamente se dan cuatro razones para integrar los problemas contextualizados en el currículum: (a) facilitan el aprendizaje de las matemáticas, (b) desarrollan las competencias de los ciudadanos, c) desarrollan las competencias y actitudes generales asociadas a la resolución de problemas y (d) permiten ver a los discentes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana (De Lange, 1996 citado por Font, 2009).

Para la psicología piagetiana el progreso cognitivo se explica a partir de un modelo basado en la creciente competencia lógica del sujeto, y en el que los aspectos semánticos o del contenido no tienen un papel relevante. Sin embargo, la abundante investigación realizada en los últimos años sobre el papel de la representación del contenido en la construcción del pensamiento ha puesto de manifiesto la importancia de los aspectos temáticos y su función constitutiva en la construcción del razonamiento(Gomez, 1989). Investigaciones más recientes en esta misma línea apuntan asimismo que el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en la enseñanza obligatoria constituye uno de los factores esenciales de las *discontinuidades* observadas en el sistema educativo, entre las matemáticas de la educación básica con las de educación superior.

Filloy, Puig y Rojano (2008) nos mencionan, que en el proceso de la traducción de un lenguaje a otro existen cuando menos dos competencias:

> El centro del proceso que esta en juego es precisamente el paso del enunciado del problema, que se presenta escrito en lenguaje natural, a una expresión del lenguaje del álgebra: una ecuación. Por tanto, en la resolución algebraica de problemas está implicada, por un lado, la competencias em ambos lenguajes, y, por otro, la competencias en el proceso de paso de un texto escrito en el lenguaje natural a un texto escrito en lenguaje del álgebra. (pp. 330).

Hasta este punto hemos introducido un nuevo concepto dentro del estudio de la transición del lenguaje aritmético al algebraico, competencias. Dicho concepto se ha puesto de manifiesto en los planes educativos no sólo de nuestro país, sino a nivel mundial. Y no sólo a nivel básico sino también en nivel medio superior y superior, pero ¿qué entendemos por competencias? Las competencias, como concepto y aplicación, surgieron en el ámbito económico, de manera especial en área laboral. Su origen se remonta al siglo XIX en paises capitalistas y su auge esta dado en el presente siglo debido a la globalización. La introducción del término “competencias” en el ambito educativo, aproximadamente en los años veinte del siglo pasado, fue como respuesta a las exigencias que la economía mundial imponía al trabajo (Juárez, 2020).

En relación a esto, fue en 1999, que la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) lanzó el Programa para la Evaluación Internacional para Discentes (PISA, por sus siglas en inglés), con el objetivo de monitorear a los discentes en su etapa final de escolaridad obligatoria, en cuyo caso deberían de haber adquirido conocimientos y destrezas necesarios para una completa participación en la sociedad. Uno de los puntos principales de este programa es la introducción del concepto de innovar en competencias, para aumentar de esta manera la capacidad de los discentes en el análisis, razonamiento y comunicación, entre otras capacidades (Amador, 2018).

Precisamente refiriéndonos a las competencias propias de las actividades laborales Díaz-Barriga, (2006) consideró que:

> El análisis de tareas ya había permitido desagregar una habilidad integrada (en ocasiones se le denomina compleja) en una serie de acciones más simples que permiten el dominio de la ejecución. La novedad con el enfoque de las competencias radica en una puntualización minuciosa de los aspectos en los cuales se debe concentrar “el entrenamiento” o “la enseñanza”. (p. 5).

Las competencias no son un concepto abstracto, se trata de las actuaciones que tienen las personas para resolver problemas integrales del contexto, con ética, idoneidad, apropiación del conocimiento y puesta en acción de las habilidades necesarias. Este término se ha ido construyendo desde diversas escuelas epistemológicas, a partir de diferentes contextos laboral-educación y con distintas disciplinas, ante el proceso de la globalización se plantean nuevos retos en la relación educación-trabajo.

Si buscamos una definición como tal de competencias, encontraremos diferentes significados y concepciones, sin embargo podemos entenderlas como el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, valores, creencias y principios que se ponen en juego para resolver los problemas y situaciones que emergen en un momento histórico determinado, que le toca vivir al sujeto que interactúa en el ambiente (Mastache, 2001). Esta definición es demasiado extensa, pero engloba de alguna forma el sentido de las competencias, su funcionalidad y sus alcances. Dentro de la educación se ha fomentado mucho éste término, a tal grado que en los modelos educativos se encuentran descritas de tal forma que engloban precisamente este conjunto de habilidades.

Las competencias son, por tanto, las oportunidades reales que los discentes tienen para poder adquirir los funcionamientos que ellos valoran. Y los funcionamientos son: “(...) como las cosas que el sujeto hace o la situación en que se encuentra gracias a sus recursos y al uso que puede hacer de ellos (Cejudo, 2006: 267). Diferentes competencias pueden constituir un set individual de capacidades y estas capacidades valiosas pueden ser potenciadas mediante determinadas pedagogías (por ejemplo, la capacidad del pensamiento crítico, o la capacidad de la imaginación o la capacidad de tener voz).

Desde la perspectiva del proyecto Tuning, las competencias son un conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe de reunir un titulado para satisfacer plenamente las exigencias de los contextos sociales (2007). Las describen como *capacidades* de las personas que desarrollan de forma gradual a lo largo de su proceso educativo y que son evaluadas en diferentes etapas, estas capacidades adquiridas en la última fase del proceso educativo, entendida como el nivel superior, las denominan como competencias genéricas. Esta forma de definir a las competencias será la que utilicemos en nuestro trabajo de investigación, ya que nos permitirá evaluar el desarrollo que se han tenido del lenguaje algebraico tanto en nivel medio superior y superior.

En el caso del proceso de la resolución de problemas algebraicos mediante el método cartesiano (MC) (Filloy, Puig & Rojano, 2008) se evocan siete pasos por los cuales el resolutor puede transitar lienalmente en ellos: 1)Lectura análitica del enunciado, 2)Elección de una cantidad, 3)Representación de otras cantidades, 4)Establecimiento de una ecuación, 5)Transformación de la ecuación, 6)Aplicación del algoritmo, y 7)Interpretación del resultado.

Obviamente, cada uno de los pasos va acompañado de una competencia a desarrollar, así en el primer paso se desarrolla la competencia en el lenguaje natural, específicamente en textos matemáticos. En el segundo, tercero y cuarto, se encuentra implícita la competencia del proceso mismo del MC, como el manejo de signos elementales y cantidades, así como el uso correcto de sus reglas de sintaxis y operacionalidad. En el quinto y sexto paso, se definen las competencias estrictamente algebraicas, como lo es el cálculo y la manera de expresar en forma canónica los resultados. Finalmente, el séptimo paso exige la competencias en el contenido del problema, misma que permitirá la adecuación del resultado obtenido matemáticamente al contexto del lengueje natural.

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra deben atender equilibradamente a distintos objetivos educativos: a) Establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de utilizarse en una amplia gama de casos particulares y que contribuyan, por sí mismas, a la potenciación de las capacidades cognitivas de los discentes. b) La aplicación funcional, que posibilite a los discentes valorar y aplicar sus conocimientos algebraicos fuera del ámbito escolar, en situaciones de la vida cotidiana. c) La valoración instrumental, creciente a medida que el discente progresa hacia tramos superiores de la educación, y en la medida en que el Álgebra proporciona formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, herramientas para la simbolización y acceso al lenguaje científico. Todos estos objetivos encaminados a la definición de competencias, propuestos en los modelos educativos desde educación básica hasta el superior.

Entre los Objetivos Generales propuestos para la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, indicados en el Real Decreto citado, los objetivos número 1, 2, 4, 9 y 10 se refieren o están especialmente relacionados con la enseñanza del Álgebra. Los Contenidos indicados para la enseñanza del Álgebra, recogidos en el Real Decreto, se presentan detallados dentro del Bloque Números y Operaciones. En cuanto a la Metodología, el docente debe elegir la orientación metodológica más adecuada a cada actividad de aula y combinarla adecuadamente con otras, haciendo uso de los recursos y materiales apropiados.

Respecto a los criterios de Evaluación, indicamos aquellos que tienen relación con el Álgebra, junto a un breve comentario.

> “ 5. Resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización de las relaciones que puedan distinguirse en ellos y, en su caso, de la resolución de ecuaciones de primer grado.”

Este crterio va dirigido a comprobar que el discente es capaz de utilizar las herramientas algebraicas básicas en la resolución de problemas. Para ello ha de poner en juego la capacidad de utilizar los símbolos, con las convenientes notaciones habituales, para el planteamiento de ecuaciones y resolverlas por algún medio fiable, que no necesariamente ha de ser la manipulación algebraica de las expresiones. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas” (Hiebert y Carpenter, 1992, pp- 66-67).

Tan solo en la educación media superior en el Acuerdo 444 de la SNB (2008), se citan precisamente las competencias que dan pauta a la Reforma Integral de la Educación Media Superior, con las cuales se definenen las competencias genéricas, disciplinares y profesionales. Las primeras aplicables a todos los egresados de este nivel eduactivo, consideradas por ello clave, transversales y transferibles. Tanto las segundas como terceras han de dividirse en básicas y extendidas, con ciertas características particulares en cada una de ellas. De las competencias genéricas declaradas en este acuerdo, el caso particular de nuestra investigación nos interesa aquella donde se expresa y comunica, ya que sus atributos son: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas e Identifica las ideas clase en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

En nuestro caso particular, nos atañen las competencias disciplinares, las cuales expresan conocimientos, habilidades y actitudes mínimos necesarios para que los discentes se desarrollen eficazmente en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida, tal y como nos mencionaba Mastache en su definición de competencias.

Dichas competencias disciplinares se organizan en cuatro campos: Matemáticas, Ciencias experimentales, Ciencias sociales y Comunicación, por obvias razones nos atañe las competencias disciplinares de Matemáticas. Éstas buscan propiciar el desarrollo de las creatividad y el pensamiento lógico y crítico de los discentes. Es curioso observar que dentro de las competencias se menciona que los discentes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder mediante la repetición de procedimientos establecidos pero que en el campo de la investigación, se siga pretendiendo que el discente resuelva una cantidad exorbitada de ejercicios matemáticos, en específico de ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones, en donde se evalúa la cantidad de aciertos sobre los erróneos, creyendo que el discente ha adquirido una competencia, cuando en realidad lo que ha aprendido es el procedimiento para resolver las ecuaciones pero no razona el resultado obtenido, el cual finalmente se debe trasladar a un contexto real.

Las competencias matemáticas para el nivel medio superior son 8, de las cuales sólo se consideran: Construye e interpreta modelos matemáticos y Formula y resuelve problemas matemáticos, ya que estan fomentan el lenguaje algebraico como tal y por tanto el resto de las competencias se mantendrán al margen de la investigación.

Un modelo educativo puede contemplarse como un gran pastel con diferentes niveles, en el que todos los pedazos estan relacionados entre sí, por lo que los resultados particulares o por unidades se agregan a un aprendizaje global y al desarrollo del nivel de competecias, y éstas pueden ser genéricas y específicas en cada área. Las competencias genéricas identifican los elementos compartidos, que se tienen en cualquier programa de estudio superior, como la capacidad de aprender, de tomar decisiones, de diseñar proyectos, habilidades interpersonales, etc. las cuales se complementan con las competencias específicas de cada profesión.

Cabe mencionar que el proyecto Tuning tuvo una primera versión en el continente Europeo, haciendo una reflexión intensa sobre la educación superior, con una participación de 175 universidades, por lo que a raíz de este trabajo se replicó en América Latina, con la participación de 182 universidades provenientes de 18 países latinoamericanos.

De este trabajo se desprenden 27 competencias genéricas para el nivel superior, enfocadas en 12 áreas del conocimiento y de las cuales se desprenden las competencias específicas para cada una de ellas (Beneitone, et.al., 2007). Obviamente no podemos considerar todas las competencias genéricas para nuestro trabajo, además de volverlo extenso, perderíamos de vista aquellas que estan realmente involucradas con el lenguaje algebraico. De lo anterior es que consideramos sólo las siguientes competencias genéricas:

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

La primera competencia, habla sobre un trabajo metacognitivo con respecto abstracción, análisis y síntesis, que conlleva el razonamiento matemático, la siguiente consideramos que va implícita en la traducción de enunciados verbales a algebraicos, y por último como veremos más adelante, las habilidades en el uso de las tecnologías, y con respecto a la actual situación sanitaria, juegan un papel importante en el desarrollo de las competencias algebraicas en los discentes.

Dentro del proyecto Tuning, se distinguen tres competencias genéricas: *instrumentales*, interpersonales y sistémicas. Siendo las instrumentales aquellas capacidades cognitivas, metodológicas, tecnológicas y lingüísticas que desarrolla el discente, y las que estaremos evaluando en este trabajo.

Como se ha podido observar, las competencias genéricas planteadas desde los programas de educación básica (secundaria) hasta la educación superior (universidad) para el área de matemáticas estan hilados de tal forma que al ir avanzando en cada nivel, estas se vayan desarrollando, sin embargo, ¿realmente los discentes cuentan con dichas competencias? o bien, ¿están en vías de desarrollo?.

Para poder dar respuesta a estas preguntas es primordial llevar a cabo, además de la elección de dichas competencias correspondientes al lenguaje algebraico, la definición de cada una de ellas, así como su nivel de progresión, formas de desarrollar cada una y los métodos de evaluación. Para dicho ejercicio, se considera el planteado en el informe del proyecto Tuning (2007) de la competencia genérica: Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.

En el cual, una vez identificada la competencia genérica a evaluar, se toman en cuenta cuáles otras estan vinculadas con su desarrollo, por mencionar una diremos la capacidada de abstracción y análisis. En el caso de las matemáticas, sabemos que el conocimiento se desarrolla de forma sistemática, por lo que esta competencia en específico se podría generar a través de la proposición de problemas que sean resueltos mediante discusiones, que sean presentados en la forma más general posible, proponiendo actividades que contribuyan a profundizar y solidificar los conocimientos adquiridos, proponer tareas que promuevan la reflexión, dar paso a la discusión y proceso de resolución, por mencionar alguna actividad inherente a este proceso.

Es de suma importancia considerar que los planteamientos de problemas con información descontextualizadas o con datos exhuberantes, no son suficientes para que el discente sea capaz de utilizar los conocimientos matemáticos en situaciones reales, por lo que es de suma importancia que entre más se desarrollen estas competencias con contextos y datos reales serán más eficientes en la adquisión de éstas. También se deben desarrollar las actividades de tal forma que el discente siempre este activo, ya que de lo contrario un ambiente pasivo podría tener como consecuencia que no desarrollen las habilidades de interpretación, raciocinios espaciales, lógicos y matemáticos.

CAPÍTULO II

Representaciones semióticas

Uno de los problemas que más preocupa hoy a la moderna psicología cognitiva, y en general, a toda la psicología del pensamiento, es el de la producción del razonamiento abstracto y la naturaleza de los sistemas de representación. Entendiendo por razonamiento abstracto a la capacidad cognitiva que nos permite procesar y manipular ideas y conceptos de manera concreta, sin depender de objetos o situaciones observables. De ahí que el estudio de la naturaleza de los sistemas de representación sea de suma interés para la psicología cognitiva, ya que el desarrollo cognitivo es un factor (entre otros) para el desarrollo del razonamiento abstracto. Según Piaget, el razonamiento abstracto surge en la etapa de operaciones formales, alrededor de los 11-12 años, y se ve sumamente enriquecido por la información que el cerebro organiza en esquemas mentales, los cuales son estructuras de conocimiento que ayudan a interpretar el mundo. A manera que estos esquemas se vuelven más sofisticados, se mejora la capacidad de abstraer y generalizar a partir de la experiencia, aunado con la formación académica, estos esquemas en el ámbito matemático se tornan más específicos y complejos conforme avanza el nivel educativo. Es por ello por lo que se torna importante en el desarrollo del razonamiento abstracto, comprender los principios y patrones subyacentes de este proceso, y a lo largo de los años se ha ido consolidando una teoría en el ámbito matemático para escudriñar este proceso cognitivo en el discente. Una de las teorías que se ha perfilado para interpretar dicho proceso cognitivo es la de Representaciones Semióticas, propuesta por Duval, de la cual hablaremos en términos generales en el siguiente apartado, brindando al lector términos centrales de dicha teoría, que fueron considerados para este trabajo de investigación.

2.1 Representaciones semióticas y su constitución

Considerando que el lenguaje matemático, específicamente el algebraico, es un conjunto de símbolos, entonces, es suficiente señalar que cualquier sistema linguo-semiótico, ya sea realmente existente en la historia de la cultura o uno que permita describir un objeto significativo, resultaría incompleto si no propone su definición de símbolo, tal es el caso de las Matemáticas. El interés que suscitó en los años 1990 sobre la comprensión de la comunicación en el salón de clase puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para el docente, comprender la naturaleza del discurso matemático. La semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva.

A efectos de la presente investigación, se toma como referencia la llamada *Teoría de los Registros de Representación Semiótica* (TRRS), de Raymond Duval, según la cual la construcción conceptual y de comunicación, específicamente en Matemáticas, dependen de dos factores: la actividad de formación de representaciones (gráficos, tablas, notaciones, lenguaje verbal), y de procesos de transformación denominados *tratamiento*, y *conversión*, de los sistemas de signos (registros), que constituyen dichas representaciones (Duval, 1999).

Este efoque dentro de las ciencias cognitivas, explora cómo las personasen este caso, los discentes, utilizan y transforman diferentes sistemas de signos y símbolos para representar conceptos abstractos y a partir de ello, construir significados. Este enfoque parte de que el pensamientos humano no puedes separarse de los sistemas de representación que utilizamos para comprender y comunicar el conocimiento, tal cual se ha ido refinando el lenguaje matemático, que tanto atañe esta investigación.

Cuando consideramos que la actividad matemática escolar requiere precisamente que el discente maneje diferentes regsitros de un mismo concepto matemático, nos referimos a que éste pueda tomar objetos matemáticos y pueda sustituirlos por representaciones semióticas de ellos, sin embargo, no es la única actividad que deben hacer, ya que deben relacionarlos entre signos de manera compleja mediante reglas (operaciones aritméticas, conjuntos, etc.), esta actividad demanda un proceso de comunicación y de la adquisición de nuevos conocimientos, así como del uso de los ya contraidos.

Si consideramos válida la aportación de Duval, existen diferentes sistemas de representación semiótica (mental, icónica, material, semiótica, etc.), con respecto a lo anterior, sólo se puede considerar como registro aquellos sistemas que permitan una transformación de representación. En este sentido, el lenguaje verbal, las representaciones gráficas y tabulares, las expresiones numéricas, las notaciones algebraicas e inclusive los sistemas icónicos, se consideran registros semióticos (RS).

Ahora bien, para que un conjunto de signos sea considerado un Registro de Representación Semiótica (RRS) Duval requiere que se puedan realizar tres actividades cognitivas dentro del sistema semiótico: (1) Construir una marca o conjunto de marcas que sean perceptibles como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. (2) Transformar las representaciones de modo que se obtengan otras que permitan construir un conocimiento con respecto a las iniciales. (3) Convertir las representaciones de un sistema a otro, de tal forma que las últimas permitan explicitar otras significancias a lo ya representado.

Para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, por tanto, la cuestión de cómo se puede acceder a los objetos matemáticos se vuelve crucial, y es relacionada estrechamente con aquella de los procesos semio-cognitivos, específicamente aquellos movilizados en Matemática, es decir, con la producción o con la elección de representaciones semióticas en los oportunos registros y su movilización (implícita o explícita) en dos tipos de transformaciones: tratamiento (transformación de una representación a otra del mismo tipo, es decir, en el mismo registro semiótico, del mismo objeto) y de conversión (transformación de una representación semiótica en otra de tipo diferente, es decir, en otro registro, del mismo objeto).

Para comprender un poco más estas actividades, hablemos de la conversión, la cual se refiere al proceso de trasladar información de un registro de representación a otro. En algunos estudios de aprendizaje matemática, especialmente del álgebra se han encontrado que una de las mayores difiultades que existe en el desarrollo acertivo de dichos problemas, se asocian principalmente a inconvenientes de conversión, es decir, a trasnformaciones representacionales desde un tipo de registro dado. Como por ejemplo, convertir una ecuación algebraica en un gráfico, o como lo es en nuestro caso, convertir enunciados de un lenguaje natural a lenguaje algebraico.

Además, según Duval, el aprendizaje efectivo de conceptos abstractos como los que se encuentran en Matemáticas, no ocurre solamente a través de la manipulación dentro de un mismo registro, ya que esto sólo podría referirse al hecho de resolver mecanicamente una expresión algebraica, es decir, encontrando el valor numérico de la incógntia. Sin embargo, al plantearle al discente que grafique o interprete dicho valor, no logre hacerlo y de esta manera, evidenciando que no ha podido llevar a cabo la conversión, sino que spolo tiene un buen uso y manejo del tratamiento de la representación semiótica de un objeto.

Para Duval existen por lo menos dos características en el proceso cognitivo de las habilidades matemáticas: (1) Diversos registros de representación semiótica y (2) los objetos matemáticos no son accesibles mediante la visualización.

En base a estas dos premisas, Duval define:

Semiosis: Es a la actividad ligada a la producción de representaciones.

Noesis: Es la aprehensión conceptual de los objetos representados incluyendo el proceso cognitivo desarrollado por el sujeto.

Desde la educación primaria los discentes manipulan expresiones con letras, como en el cálculo de perímetros y áreas. Sin embargo, cuando pasan a secundaria, dicha manipulación se vuelve más compleja. Godino y Font (2003) nos mencionan que en el cambio de manipulación entre un grado y otro, hay dos etapas que distinguir. La primera en la cual los símbolos sustituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos, y la segunda en la que los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban.

Raymond Duval tenía razón cuando afirmaba: no existe noética sin semiótica (1993). Hoy sabemos que debemos pasar a través de varias representaciones semióticas para alcanzar la gradual y consciente construcción cognitiva del objeto.

Dentro de la TRRS se consideran ocho tipos de registros semióticos: verbal o lingüístico (RRVL), numérico (RRN), algebraico (RRA), simbólico (RRS), geométrico (RRGe), gráfico (RRGr), computacional (RRC) y tabular (RRT). Cada uno de estos tipos de registros semióticos tienen una aplicación, como lo es en la resolución de problemas abstractos, o en el trabajo de fórmulas matemáticas, en el análisis de datos y cálculo numérico, en la visualizacipon de estructuras o cambios continuos, que permitan al discente fortalecer conceptos matemáticos.

En Matemáticas y, sobre todo en el lenguaje algebraico, el que un discente tenga la capacidad de trabajar en múltiples registros semióticos y moverse entre ellos es vital. Por mencionar un ejemplo, para entender completamente una función matemática, el discente debe ser capaz de: a) manipular en su forma agebraica (resolviendo ecuaciones), b) visualizar en su forma gráfica (trazando la curva), c) interpretar sus propiedades a partir de números o tabla de valores y, por último, d) explicar de manera clara en lenguaje verbal.

Dada esta clasificación de RS, es posible considerar que los discentes presenten dificultades para adquirir la habilidad de transitar entre un registro y otro, al respecto Duval (2006) menciona algunos aspectos a considerar:

- Los contextos de representación utilizados en matemática son semióticos.
- El procesamiento matemático implica siempre una transformación de representaciones.
- Se requiere una coordinación interna para elegir una representación según el propósito de la actividad.

Al respecto de esta última aseveración, se debe considerar que cuando al discente se le proponen problemas escolares, en su mayoria suelen tener contextos con datos extrapolados, aspecto que llega a provocar una dificultad dentro de la coordinación del discente, asímismo el uso de diferentes términos relacionados a un mismo objeto llega a ser causa de confusión, por lo que ocupa representaciones erroneas para llegar a traducir un problema en lenguaje natural al algebraico.

En el caso de esta investigación, en donde abordamos precisamente la competencia de adquisición del lenguaje algebraico, y considerando lo tratado en el apartado anterior, se deben distinguir dos clases de transformación: la *conversión* en la que se cambia el sistema semiótico sin cambiar los objetos matemáticos, y el *tratamiento*, en donde se opera manteniendo el mismo registro. Para comprender mejor este proceso, se puede considerar el siguiente ejemplo: dado la siguiente expresión “la cuarta parte de un entero” (se considera un RRVL), convertir dicha expresión mediante la fracción $1/4$ (se considera un RRN) y si continuaramos con el tratamiento, podríamos considerar transformar dicho registro en una expresión decimal, 0.25. (Figura 1).

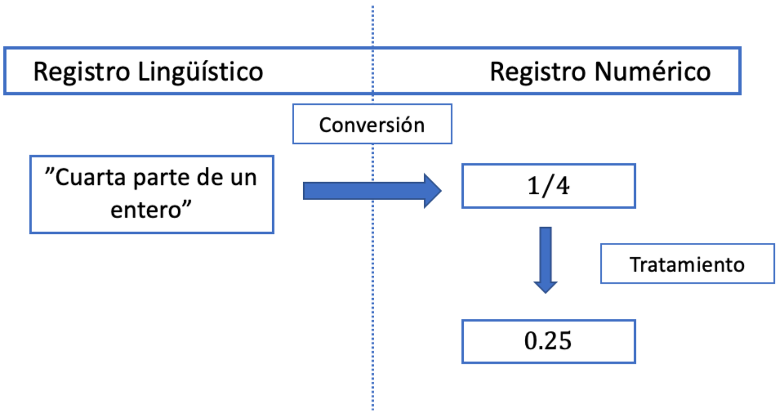


Figura 1. Ejemplo de transformaciones semióticas en Matemáticas.

La conversión y el tratamiento, podrían considerarse como un todo, es decir, como un entorno metodológico y estratégico dentro de la actividad matemática, aún más dentro del currículo escolar para la resolución de problemas, o bien, como lo es nuestro caso, para el trabajo algebraico, desde la traducción de enunciados coloquiales a expresiones algebraicas, hasta la resolución de sistemas de ecuaciones; sin embargo, la conversión es un proceso meramente cognitivo, por lo que lo vuelve más complejo que el tratamiento, llegando a ser considerado como el origen de la comprensión, y por ende del desarrollo del pensamiento abstracto.

A partir de lo anterior, es preciso abordar el dominio que se tiene de las representaciones semióticas para el lenguaje matemático ya que los conceptos matemáticos sueles expresarse de manera simbólica y abstracta. Hasta este punto, podríamos mencionar que dentro de las matemáticas, el álgebra es intrísicamente multifacética, por lo que su comprensión y dominio depende en gran medida de cómo los discentes pueden transitar entre una y otra representación.

2.2 ¿Qué es el dominio de representaciones semióticas en el lenguaje algebraico?

En la adquisición del conocimiento matemático, particularmente, se requiere el uso de representaciones. Estas se pueden tipificar en a) internas, aquellas que se usan para pensar sobre ideas matemáticas, razonar y organizar el conocimiento que a su vez proporcionan, y b) externas, para expresar y comunicar ideas matemáticas, mediante las cuales se materializan los conceptos matemáticos (Castro, 1994, Goldin, 2002; citados por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 274). Sin embargo, para un mismo concepto existe una diversidad de representaciones, por lo que el término de sistemas de representación, entendiendo a este como un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, permite que se produzca una traducción entre una y otra, siendo necesario el dominio de todos ellos para una mayor comprensión del concepto (Castro, 1994; Goldin, 1998; Kaput, 1992, citados por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 274).

Retomando lo expuesto, para un mismo concepto existe una diversidad de representaciones y el dominio de todas ellas facilita la adquisición de un concepto, por lo que la confusión entre los objetos representados con las representaciones de los mismos, y la aplicación arbitraria de las normas sintácticas a “representaciones equivalentes” en sistemas de representaciones diferentes, constituyen buena parte de las dificultades del álgebra escolar (Duval, 1995, citado por Gárriga, 2011). Por lo tanto, para tener acceso al conocimiento matemático, en nuestro caso particular en el lenguaje algebraico, es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas, ya que, para Duval, un sujeto ha adquirido un concepto determinado, cuando se cumple dos condiciones: (1) debe disponer de al menos dos registros diferentes para representar un objeto; y (2) debe ser capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo.

El que un discente tenga la capacidad de moverse entre registros semióticos no solo facilita el aprendizaje, sino que refuerza una comprensión más enriquecida y conectada de los conceptos algebraicos. Al hacer este tipo de vinculación simbólica con representaciones gráficas o verbales, los estudiantes pueden visualizar y entender mucho mejor lo que se les plantea en un enunciado coloquial o bien, con una expresión algebraica. Este tipo de domuinio de las representaciones semióticas, amplía las herramientas cognitivas del discente para abordar y dar solución a este tipo de planteamientos matemáticos.

Comunmente las actividades que se llevan a cabo en el aula para realizar conversiones, se caracterizan por iniciar con la representación algebraica, es decir, dentro del currículo escolar, la primera interacción que tienen los jóvenes con álgebra se da a través de operaciones con expresiones algebraicas ya formadas, esto cambia en nivel medio superior, ya que en este nivel el discente ya tiene que hacer conversiones entre un registro y otro, ya que se introducen los gráficos de diferentes ecuaciones, por lo que los estudiantes interactuan con dos tipos de registros, los tabulares y gráficos. Incluso, para lograr este último registro, se deben estudiar los trazos característicos de la funciones, y graficar a partir de ellas, pues en los problemas de los libros de textos, les presentan como puntos máximos o mínimos, o bien, puntos significativos de trazo, utilizando rotaciones e incluso traslaciones verticales y horizontales.

Recordemos que el álgebra implica un alto nivel de abstracción, en sus formas más generales. Y que el uso de diferentes representaciones semióticas ayuda a los discentes a desarrollar una comprensión más matizada de conceptos abstractos, como funciones, relaciones y variación, tal como se expuso anteriormente, en el nivel medio superior los discentes estan interactuando con este tipo de representaciones semióticas gráficas que incluso llegan a creer que esa es la única representación correcta de una ecuación. Por lo que, un dominio sólido de dichas representaciones permite a los discentes aplicar sus conocimientos algebraicos en contextos más amplios y multidisciplinarios, como en la física, economía o ingeniería, por mencionar algunos.

Es importante establecer diferencias entre un RS y otro, de tal forma que se pueda extraer información de un mismo objeto matemático con diferentes representaciones. Sin embargo, es muy importante que durante la adquisión del dominio de una u otra representación, no se debe confundir el objeto matemático sólo con representaciones, es decir, procurar que el discente sólo conciba un objeto matemático a partir de una representación, ya que si esto sucede, el discente sólo podría acceder a una parte del objeto matemático y no a su totalidad. Desde el trabajo de aula, se ha podido observar que cuando a un discentes se le cuestiona por una función cuadrática, este sólo concibe una gráfica en forma de columpio, y aunque la representación semiótica gráfica es correcta, este no es el concepto completo de dicha función.

Duval (1999) menciona que durante las observaciones que se habían hecho hasta la fecha desde la mirada del aprendizaje de las matemáticas, se había podido probar que para cambiar la forma de una representación era, para muchos discentes una operación difícil, en cualquiera de los niveles escolares existentes, incluso podría llegar a ser imposible. A razón de lo anterior, aseguraba que el hecho de que alguien pudiese transitar entre un registro y otro, aún tenía que aplicar de manera correcta la sintáxis de operacionalidad entre dichos registros, por lo que la conversión, no era el fin único del aprendizaje matemático, pues dicho transito no implicaba que pudiera realizar una conversión inversa.

Uno de los desafíos en el dominio de las representaciones semióticas es precisamente, el de la enseñanza enfocada solo en el tratamiento, es decir, a menudo la enseñanza se centra en el tratamiento de las representaciones dentro de un solo registro, lo que refuerza habilidades procedimentales pero no necesariamente este proceso promueve el dominio de múltiples representaciones, cuanto menos de un concepto matemático.

Por lo anterior, el uso del lenguaje algebraico que hacen los discentes de educación media superior y superior debe ser fortalecido para que así pueda crear más representaciones y pueda transitar entre ellas de manera natural, permitiéndole adquirir un conocimiento significativo. Bajo esta perspectiva se han propuesto incorporar algunas estrategias para el desarrollo del dominio de las representaciones semióticas, tales como utilizar y practicar con la conversión entre registros, diseñando ejercicios donde los discentes deban convertir de una representación a otra. O bien, fomentando la reflexión y la metacognición del uso de diferentes representacione semióticas, con la finalidad de que visualicen las ventajas o limitaciones que ofrece cada una de ellas.

2.3 Enseñanza de las matemáticas a través de dispositivos digitales ¿Qué es un ambiente virtual de aprendizaje (AVA)?

La matemática ha avanzado a grandes pasos en unos cuantos siglos. Sin embargo, a principios del siglo XX solamente algunos matemáticos podían decir que abarcaban una buena parte de su totalidad. En la actualidad es casi imposible que un matemático abarque ni siquiera su propia área de estudio. La actividad en la cual la matemática encuentra aplicaciones fuera de su propio campo se llama matemática aplicada pues bien sabido que esta ciencia es automáticamente multidisciplinaria. La computadora proporciona una manera muy rápida de obtener soluciones numéricas de distintos problemas. En la matemática aplicada un problema tiene solución satisfactoria si se puede proporcionar un algoritmo en la computadora de tal manera que se tengan disponibles las soluciones numéricas. La tecnología ofrece herramientas dinámicas que pueden hacer que conceptos tan complejos como los que hay en las matemáticas sean más accesibles, visuales e interactivos. La evolución de la tecnología no se ha dado de la noche a la mañana, y su aplicación en las matemáticas tampoco, por ello hacemos una breve reseña histórica de cómo esta herramienta se fue configurando para su uso en la enseñanza-aprendizaje de diferentes disciplinas, muy específicamente de las matemáticas, tema que nos compete.

En 1834, el matemático Charles Babbage diseñó su máquina analítica, considerada como el precusor de los ordenadores modernos, de ahí que sea considerado como uno de los padres de la computación moderna. Ésta era capaz de realizar cualquier cálculo aritmético a partir de instrucciones almacenadas, por lo que este modelo tenía una unidad de memoria; era programable, lo cual permitía el direccionamiento condicional y los ciclos; y en ella se introducían los datos con tarjetas perforadas.

En 1945, el matemático John von Neumann diseñó una computadora electrónica llamada EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer), que fue construida y entró en operación en 1952 (Von Neumann, 1945). Su predecesora fue la ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) la cual tenía ciertas limtiaciones con su diseño, pues las instrucciones tenían que ser programadas manualmente, además de que tanto los datos como los resultados tenían que ser almacenados en distintas memorias, por lo que para volver a correr el programa se tenía que volver a configurar manualmente, lo que de alguna manera implicaba largas sesiones de trabajo. Esta situación que se solucionó con la EDVAC, pues ya era capaza de almacenar datos y resultados en una misma memoria, lo que actualmente se conoce como la arquitectura de von Neumann.

Además, esta computadora empezó a manejar un lenguaje binario, basado en 0 y 1, lo cual fue soporte para la estadarización de los sistemas binarios con los cuales trabajan hoy en día las computadoras. En tanto a sus aportes hacia las matemáticas, la EDVAC era capaz de resolver, por ejemplo, ecuaciones diferenciales parciales no lineales, debido a que su diseño tenía una arquitectura que le permitía procesar de manera secuencial las instrucciones, lo que le facilitaba las automatización de cálculos.

Al principio, las computadoras se programaban en lenguaje de máquina, las instrucciones se introducían en la forma de números binarios y los programas eran listados de números en este formato. La programación era un trabajo sumamente tedioso y sujeto a muchas posibilidades de cometer errores. Se crearon los primeros lenguajes ensambladores, que traducían las instrucciones escritas con nombres cortos para las operaciones y números en hexadecimal al lenguaje de máquina. Después, se crearon lenguajes con los cuales era más sencillo escribir un algoritmo para resolver algún problema y el correspondiente compilador, el programa que traduce las instrucciones del lenguaje a lenguaje ensamblador. En 1956, nació el primer compilador Fortran, cuyo significado es Formula Translating System (Knuth, Trabb, 1976). Este compilador traducía un programa escrito en un lenguaje accesible para el público en general a un programa en lenguaje ensamblador, es decir, en el lenguaje utilizado por la máquina.

Los Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) y los Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) aparecen como estrategias efectivas para transformar las concepciones tradicionales de lo que significa enseñar y aprender mediante la tecnología, ya que permite el acceso a materiales didácticos, actividades interactivas, aún más en nuestra área de interés que permiten visualizar el comportamiento de algunos conceptos matemáticos; el concepto clave es el trabajo colaborativo, mediante el cual, el discente vincula sus nuevos aprendizajes con experiencias de saber previas y basa su aprendizaje en problemas que reflejan su realidad (Moreno y Montoya, 2015).

Moreno y Montoya (2015) resaltan que el uso de los EVA permiten personalizar el aprendizaje, de tal forma que los discentes pueden avanzar a su propio ritmo y acceder a los diferentes materiales que proporcionan estos entornos. Entre las ventajas que presentan este tipo de herramientas destacan su uso en una amplia flexibilidad de horarios, así como el poder visualizar videos o actividades interactivas en un mismo sitio, sin tener que estar usando diferentes ventanas en una misma pantalla. Además de ello, no podemos olvidarnos que pueden visualizarse en difernetes puntos geográficos, por lo que no es necesario estar en la sede de origen del EVA, sino que pueden hacerlo desde cualquier punto del mundo, facilitando de esta manera también la comunicación entre el docente y el discente.

A principios del año 2000, el uso de la web da un giro importante con la incorporación de herramientas que facilitaron la interacción de los usuarios entre sí y con la red misma, generando una gran diversificación de contenidos y una gran oportunidad para compartir experiencias e información general (Berners-Lee, Hendler y Lassila, 2001). Los primeros en aprovechar esta revolución tecnológica fueron las universidades e institutos de educación superior, quienes empezaron a desarrollar recursos como los Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) o sistemas de gestión de aprendizaje (LMS por sus siglas en inglés) para el desarrollo de los contenidos de ciertos programas

Con la evolución de los recursos de internet y la manera cómo los usuarios interactúan con ellos, el uso de internet se vuelve más dinámico permitiendo crear comunidades virtuales de usuarios que comparten sus contenidos, brindando la posibilidad de que puedan proponer sus propios diseños, lo cual se convirtió también en una gran oportunidad para diversificar los procesos de enseñanza y aprendizaje de muchas disciplinas.

Las tecnologías están creando una gran revolución en la forma como se imparte la enseñanza, especialmente en la educación superior, donde el uso de plataformas virtuales como moodle o blackboard ponen a disposición de sus discentes una gran variedad de recursos, no solo para aprender desde otras perspectivas, sino también para aprender de manera colectiva con otros estudiantes en cualquier parte del mundo. Claro que también este tipo de enseñanza a presentado algunas dificultades como lo es la brecha digital, pues la falta de familiaridad con la tecnología por parte de docentes, así como el acceso a este tipo de herramientas digitales hace que se haga más grande.

A pesar de estas dificultades, la revolucionaria herramienta ha sido la base para el surgimiento de programas e incluso universidades virtuales, lo cual le ha dado una importante dinámica a los procesos de formación, tanto de pregrados como de posgrados y formación complementaria, creando una mayor oferta de estos programas y generando oportunidades para aquellas personas que por distintas razones no pueden acceder a una formación presencial.

2.4 Enseñanza-Aprendizaje del álgebra por AVA

Una de las desventajas que presupone la transición entre un lenguaje y otro, es que el discente no logra visualizar su desarrollo y aplicación en la vida cotidiana, o cuando menos, en una representación distinta a la de lápiz y papel, es por ello que a través de la revisión bibliográfica se ha podido observar la implementación de actividades dentro de plataformas matemáticas, como GeoGebra o MathLab, por mencionar algunas, y que hoy en día debido a la situación sanitaria que se vivió a nivel mundial han cobrado mayor fuerza.

En 1992, durante el Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, que se realizó en la Ciudad de Juárez, México, Mendez presentaba una propuesta de trabajo con hojas electrónicas de cálculo, para resolver problemas algebraicos verbales, con discentes del nivel medio superior, este trabajo refleja que desde hace años se ha tenido la necesidad de fomentar el uso de la computadora para ejemplificar o visualizar los quehaceres matemáticos, ya que esto propiciaría un mejor aprendizaje. Este trabajo, mostraba el caso de Ismael, un discente que presentaba dificultades en la resolución de problemas algebraicos, cuyo proceso de evolución fue desde la notación simbólica de las variables hasta su resolución en Lotus, mediante la utilización de la hoja de cálculo.

Las representaciones visuales pueden resultar más intuitivas y dotar de significado a las relaciones algebraicas. De esta forma se puede establecer un puente entre aritmética y álgebra, entre el pensamiento aritmético y el algebraico, a través de acercamientos numéricos y gráficos que desemboquen en los sistemas de representación simbólicos (Fernández, 1997). Incluso con el desarrollo de estos EVA la enseñanza del álgebra comenzó a integrar actividades interactivas y visuales como simuladores, dando paso a plataformas como GeoGebra y Desmos, haciendo posible que los discentes pudieran visualizar ecuaciones, funciones y gráficos, cooperando de esta manera en la adquisición de conceptos abstractos, en contraste a leer, descargar pdf y resolver en lapiz y papel múltiples ejercicios como se venía haciendo con el uso de algunas plataformas escolares.

La actual situación mundial que vivimos, nos ha permitido observar las carentes habilidades del docente ante el manejo de herramientas tecnológicas que podrían coadyuvar en su labor diaria de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, no toda la responsabilidad cae sobre el docente, sino también el alcance de las herramientas que el mismo gobierno ha de disponer para llegar a todos los discentes, y nos referimos específicamente al uso de plataformas educativas que necesitan tener una conexión fija de internet o bien, que el discente tenga que adquirir artículos electrónicos que antes sólo eran considerados de lujo, pero que ahora se han vuelto de necesidad básica.

Considerando que la Informática en la Educación, sobre todo en la Educación Matemática, es un medio poderoso para desarrollar en el discente su creatividad e imaginación, la posibilidad de visualizar gráficamente conceptos teóricos como así también la de modificar las diferentes variables que intervienen en la resolución de problemas, favorece el aprendizaje de los discentes (Alemán de Sánchez, 2002). Aunado a esto el momento histórico en el que se encuentra inserto el hecho educativo implica asimilar un modo nuevo de dirigirse al futuro con visión retadora e inspirada, donde se busque mejorar las estrategias para el aprendizaje involucrando a todos los actores sociales, haciendo uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) que nos exige este mundo cambiante y evolutivo.

El uso inadecuado de las TIC en el ámbito educativo, ha originado la necesidad en los docentes e instituciones, de reflexionar para garantizar el máximo aprovechamiento en términos de apoyar y facilitar el aprendizaje de los discentes. En la actualidad se evidencia cómo la responsabilidad en el uso de las TIC´s se remite exclusivamente al docente de informática, en donde las prácticas se limitan al manejo básico del computador. Por otro lado los docentes de áreas diferentes a la tecnología y la informática, experimentan serias dificultades en cuanto al manejo del computador, centrando su uso en actividades de su oficio como elaboración de planillas de notas y en transmisión de contenidos.

Esto lleva consigo una responsabilidad en la capacitación continua de docentes, no sólo en el manejo técnico, sino también en la didáctica asociada a estas herramientas. En el caso de las matemáticas, las habilidades didácticas de los profesores deben estar bien cimentadas, y respaldadas de tal forma que se logre el aprendizaje significativo de los conceptos abstractos. Implementar este tipo de herramientas en el ámbito tecnológico es el doble de carga, por lo que la participación de todos los involucrados en el contrato didáctico reforzará las competencias tanto en docentes como en discentes.

Como se ha podido observar, la transición del lenguaje aritmético al algebraico es un tema trabajado, es un tema con una amplía bibliografía desde diferentes perspectivas, sin embargo, hoy en día las nuevas necesidades de volver una educación virtual, nos exije redirigir estas perspectivas, incluyendo en ellas la tecnología así como teorías que las respalden, es aquí y ahora donde radica la importancia de este trabajo de investigación. Partimos de un plano en el cual se encuentran trabajos relacionados con el uso del lenguaje algebraico, de las tecnologías, y de las competencias que deben adquirir los discentes de educación media superior y superior. Enfocándonos a fortalecer estás competencias disciplinares de Matemáticas en las cuales los discentes puedan razonar y transformar un enunciado verbal a uno algebraico. Recordemos que para muchos jóvenes el álgebra se percibe como una rama ajena a las Matemáticas, el uso de las nuevas tecnologías presentan oportunidades de generar muchos ejemplos numéricos, datos, patrones, etc. generalizando la información que se maneja sobre todo en el álgebra, donde una letra puede tomar cualquier número y que eso dificulta que el discente le de un sentido a la expresioón algebraica.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que el uso de las TIC como herramientas de apoyo en la enseñanza de las matemáticas, específicamente del álgebra se debe dar responsablemente, pues no todas las plataformas educativas funcionan para esta rama del conocimiento, además de que el uso desmedido de este tipo de interfaces podrían llegar a ser confusas para los discentes, desvíandolos de la adquisición significativa de objetos matemáticos.

2.5 Enseñanza-Aprendizaje del álgebra por AVA diacrónicos

Con la masificación de la información a través de los medios virtuales, se van creando nuevas herramientas que permiten un uso más eficiente y seguro de esta. Es así como aparecen estrategias como la de computación en la nube (Armbrust, et al. 2010), lo cual se asocia con la posibilidad de utilizar el internet mismo como un espacio de almacenamiento de la información, a la cual se puede acceder desde cualquier lugar y en cualquier momento.

Este tipo de avance tecnológico ha permitido trabajar a los docentes sincrónicamente con los discentes durante la emergencia sanitaria que se generó por el COVID en el año 2020. Evento que catapultó el uso síncrónico de las TIC para la enseñanza de las diferentes disciplinas, particularmente de las matemáticas. Sin embargo, este tipo de trabajo sincrónico, necesitaba que tanto el docente como el discente estuvieran conectados al mismo tiempo para poder dar una retroalimentación del trabajo realizado en plataforma educativa, para comprender un poco más sobre la necesidad de implementar también un trabajo colaborativo asincrónico con los discentes, de tal forma que les fascilite un aprendizaje progresivo para el uso del lenguaje algebraico, con la revisión de un material que este siempre disponible para poder trabajar a su propio ritmo y en horarios más flexibles, lo describimos brevemente en las siguientes líneas.

El uso de TIC en educación ha tenido una importante evolución a lo largo de los últimos cuarenta años, tomando distintos referentes teóricos y pedagógicos como la teoría conductista, la cognitiva, la constructivista y la reciente teoría sociocultural (López, 2017). Cada una de estas teorías ha permitido evidenciar las transformaciones que se han dado en materia educativa a partir de la incorporación de las tecnologías digitales y el uso del computador. La matemática sin embargo, ha sido uno de los campos del saber que más ha tardado en incorporar estas estrategias y en dar un salto importante hacia la utilización de las TIC como apoyo a los procesos de aprendizaje, siendo todavía frecuente el uso de metodologías tradicionales y la realización de procesos mecánicos, descontextualizados y que no generan reflexiones importantes en los estudiantes sobre la utilidad que tienen los conceptos estudiados en su formación académica y en su vida cotidiana (Vega, et al. 2015).

En 1967, Bolt, Beranek, Newman y Papert desarrollaron el lenguaje Logo, marcando una etapa importante de influencia en la educación. El Logo se utilizó en la enseñanza para diseñar actividades para explorar conceptos matemáticos mediante la programación (Papert, 1995, 1996, 2000). En muchos planes y programas de estudio se incluyeron actividades con el lenguaje Logo (Sacristán, 2011), con el objetivo de hacer accesible el apredizaje de la programación visual y experimental.

A principios de los años 70 se concluye en un estudio que el uso del lenguaje Logo puede potenciar la capacidad lectora de algunos discentes, además de aumentar el interés por aprender y el nivel de autoconfianza en muchos de ellos (Feurzeig y Lukas, 1972). Por este motivo Papert (1972) defendió el aprendizaje de las matemáticas de un modo activo y práctico, en contra de lo que proponía la enseñanza tradicional. Según este autor, conocer conceptos sin saber de qué manera se construyen es insuficiente, motivo por el cual también propuso el aprendizaje mediante la ayuda de la programación. Diversos estudios realizados con el lenguaje Logo han demostrado que la programación puede facilitar la conceptualización de variables matemáticas como las algebraicas (Noss, 1986), contribuye muy significativamente al desarrollo de la competencia en la resolución de problemas (Battista y Clements, 1987) y afecta positivamente ciertas áreas del funcionamiento y logro cognitivo (Clements, 1987).

Barrow, et al. (2009) quienes realizan un estudio experimental en tres distritos de Estados Unidos con el fin de evaluar el uso de un programa denominado I Can Learn. Mediante este programa los estudiantes desarrollan competencias en las ramas de prealgebra y algebra. Para el desarrollo de este trabajo los investigadores aplicaron dos metodologías simultáneas. Por un lado, estimaron el impacto de la intención de tratamiento en el uso del programa basados en la técnica de regresión de mínimos cuadrados ordinarios. Por otro lado, utilizaron variables instrumentales con el fin de disminuir el sesgo y el margen de error en las estimaciones y el tratamiento de los datos (Rodríguez, et al 2011). Con este estudio, los autores concluyen que el efecto del uso de TIC sobre el rendimiento académico es alto (Barrow, et al. 2009).

Los hallazgos en países en vía de desarrollo son variados. Banerjee, et al. (2007) en la India, aplican un programa de computador a niños de cuarto grado que les pide resolver problemas de matemáticas con un nivel de complejidad acorde a sus edades, los resultados muestran un efecto positivo y altamente significativo en el aprendizaje de los conceptos de esta área, además pudo observar que fortalecían su capacidad para invetigar y aprender de manera independiente y colaborativa.

Balanskat, et al. (2006) refieren varios estudios en los cuales el uso de TIC no tiene una influencia positiva significativa en el logro escolar en matemáticas, Sin embargo, sí se evidencia un impacto importante a largo plazo en los resultados de las pruebas PISA cuando las instituciones han usado estos recursos de manera frecuente y continua. Como resultado de sus investigaciones, pudo visualizar que el impacto que tienen las TIC en la enseñanza, depende en gran medida de la calidad del acceso y uso en las aulas, ya que éstas pueden generar brechas de rendimiento entre discentes con diferentes contextos, haciendo énfasis en la capacitación de los docentes para su uso adecuado.

En Patiño, et al. (2013) por ejemplo, se aplica un enfoque cualitativo para identificar y describir las estrategias mediadas por la tecnología para el aprendizaje de la matemática mediante el paradigma sociocultural. Con este estudio se encuentra que los docentes muestran un interés creciente por la aplicación de recursos tecnológicos, sin embargo, dado que la institución no cuenta con las herramientas suficientes que faciliten su aplicación, el aprovechamiento de dichos recursos no es significativo, lo que conlleva a que los docentes no puedan trascender su rol de usuarios a creadores y desarrolladores de los mismos recursos y que el uso de estos no se haga de manera contínua.

CAPÍTULO III

El lenguaje algebraico desde algunas miradas que lo conforman

Se hace el despligue de los diversos factores que consideramos contextualizan la construcción de representaciones semióticas para el desarrollo de las competencias en el lenguaje algebraico. En el cual se espera que los lectores tengan acceso al conocimiento de diversos factores que influyen en la transición del lenguaje aritmético al algebraico en discentes de nivel medio superior y superior.

En primera instancia se hace una breve introducción a los procesos de comunicación en el aula, los cuales juegan un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos, así como propiciar el desarrollo de competencias para perfilar un lenguaje matemático. Mismo que se ve influenciado por el mismo devenir de las matemáticas y su enseñanza.

En el primer apartado, se presenta al lector la Geometría como una forma de introducir al discente a la Geometría, ya que fue a razón de esta que se fue configurando precisamente el lenguaje algebraico, y por ende la enseñanza del álgebra en general. Sin embargo, ambas ramas de la Matemática, Geometría y Álgebra presentan ciertas dificultades en su aprendizaje.

En la segunda parte, hablaremos un poco de aquellas circunstancias psico-socio-educativas que influyen en el aprendizaje de las Matemáticas, así como el rendimiento académico que se presenta en los discentes en diferentes pruebas estandarizadas.

Posteriormente, en el apartado de ambientes educativos, se presenta los procesos de enseñanza-aprendizaje que se llevan a cabo en el aula, específicamente en el nivel medio superior y superior para el álgebra, incluyendo aquellos que se llevan a cabo a través de ambientes virtuales, considerando también el conocimiento y didáctica que poseen los docentees.

Por último, se aborda las directrices institucionales con respecto a los aprendizajes significativos en Matemáticas, a través de dos modelos educativos que refieren en la Educación Matemática para establecer dichos aprendizajes.

Procesos de comunicación en el aula

En los últimos años se le ha dado mayor importancia a los procesos de comunicación que se llevan a cabo dentro del aula. La relación Educación-Comunicación se refiere a la construcción de significados y conceptos, los cuales tienen como base la comunicación, no sólo en Matemáticas como lo es nuestro caso, sino en todas las asignaturas dentro de la marcha escolar. De ahí la importancia que cobra en los procesos de enseñanza-aprendizaje en la clase de Matemáticas. Podemos entender a esta relación, como un proceso de interacción social en la cual se favorece la negociación de significados, el dabate y el consenso, que en conjunto con los recursos pedagógicos, personales y psicológicos que utiliza el docente para relacionarse con el alumnado, propicia que éstos desarrollen su pensamiento matemático, como por ejemplo, la argumentación.

Sin embargo, en la práctica pedagógica, la comunicación se ve realmente empobrecida ya que muchas veces, esta se convierte en un monólogo, donde el docente poseedor del conocimiento, habla y explica la clase para sí mismo, sin considerar diversos factores involucrados en el proceso de comunicación. Específicamente, el docente de Matemáticas reduce dicho proceso a un simple formulario y resolución de problemas bajo la aplicación de ciertos algoritmos.

La comunicación para el proceso de aprendizaje de las matemáticas es un componente esencial, ya que a través de ésta, los discentes son capaces de reflexionar, clarificar y ampliar sus ideas sobre las relaciones y razonamientos matemáticos, esto nos lleva a cuestionarnos, ¿qué es la comunicación? Pues bien, la palabra comunicación proviene del latín *communis*, que significa común. La comunicación es la acción de comunicar, que a su vez proviene del latín, *communicare.* Al comunicarnos establecemos algo en común con alguien, o bien con un grupo de personas, ya sea frente a frente o a través de las nuevas tecnologias de comunicación. En cualquiera de los casos, dicho proceso de comunicación requiere de los siguientes elementos: la fuente, el mensaje, el medio o canal, el destino y la retroalimentación.

Al mencionar los elementos que conlleva el proceso de comunicación, está claro que para que ésta se lleve a cabo, la persona a la cual se dirige el mensaje lo debe de entender, y por lo tanto, debe conocer el lenguaje que se esta utilizando. Por lo que se hace necesario que los docentees reflexionen sobre cómo se está articulando dicho lenguaje, ya sea motriz o verbalmente, así como, simbólica o gráficamente.

Específicamente el lenguaje matemático, nos menciona Bautista (2020), permite expresar ideas, comprender expresiones, entender diferentes formas de representación o de notación y resolver problemas. Por lo que, quien es hábil al comunicarse con dicho lenguaje, puede interpretar y expresar situaciones de contextos matemáticos de manera significativa, ya que comprende el mensaje en dicho proceso de comunicación. En caso contrario, cuando no se es hábil comunicativamente en el uso del lenguaje matemático (símbolos, diagramas, algoritmos, notaciones, gráficas, etc.) la diificultdad para tener un buen desempeño en la materia está casi asegurada. Bautista (2020) nos meciona que para la comprensión y el alcance de las competencias matemáticas, es necesario fortalecer destrezas de comunicación, tales como argumentación, interpretación, explicación y justificación. Recordemos que el desarrollo de estas habilidades aumenta la capacidad del discente de indagar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimiento matemáticos o utilizar diferentes tipos de representación en la resolución de un problema.

Cabe mencionar que a pesar de que las Matemáticas no son un lenguaje como tal, han creado uno propio con el cual se puede comunicar, expresar y representar, además se puede leer y escribir. Por lo que al abordar la relación docente-discente como un acto comunicativo, se pueden descubrir diferentes situaciones que dificultan el aprendizaje de las Matemática en los discentes, tales como: que la comunicación es unidireccional, es decir, que el docente deposita la información en sus discentes para que sea reproducida fielmente, sin retroalimentación alguna, por lo que no es una comunicación de doble vía; que en la relación docente-discente, se hablan diferentes lenguajes, es decir, que el docente expresa ciertas notaciones acompañado de un lenguaje verbal específico que el discente no comprende; lo que conlleva al siguiente punto, para el discente toda representación simbólica carece de sentido y valor para él.

Es claro que el discente para poder participar dentro del proceso comunicativo matemático, ha de verse en la necesidad de usar (o bien, ejercitar) el uso e interpretación de un nuevo lenguaje semiótico que abarca vocablos que están relacionados con un nuevo sistema de representación, el cual estará vinculado con su aprendizaje, en la medida que realice una correcta interpretación de dicho sistema, ya sea gráfico o algebraico. Las habilidades comunicativas, como lo menciona Duval (1999), son indispensables tanto para la designación de los objetos matemáticos, como para el trabajo con dichos objetos. Pero esta situación, es decir, la manera de construir los objetos matemáticos, en muchas ocaciones se ve afectada por la manera en que llegan a ellos, a través del lenguaje utilizado por el docente.

Cuando un docente es capaz de establecer una buena comunicación con sus discentes, según Camacho y Sáenz (2000, citados por Del Barrio, et.al. 2009) se cumplen los siguientes requisitos: la comunicación basada en una confianza mutua, permite una libre expresión de ideas y manifestaciones personales, así mismo, se favorece frecuentes intercambio de papeles entre el ser emisor o receptor, por lo que la comunicación fluye en ambas direcciones.

Esto último, se acerca a la contrastación hecha por Sierpinska (citado en Godino & Batanero, 1994) para los diferentes papeles que se pueden desarrollar en las clases de matemáticas, los cuales adoptan una orientación constructivista, interaccionista o bien, socio-histórica. Para el caso constructivista, Sierpinska plantea la siguiente metáfora: *los discentes hablan, el docente escucha*; la cual adopta sin lugar a duda, una pedagogía centrada en el discente, en donde el docente se convierte en oyente y cuestionador, dispuesto a clarificar las interpretaciones realizadas por el discente. En el caso de que se trate de una orientación interaccionista, se planteó la siguiente metáfora: *docentees y discentes en diálogo;* en cuyo caso, los procesos comunicativos permiten la comprensión personal a través de la negociación, argumentación y debate que se desarrolla en clase. Por último, en la orientación socio-histórica, se planteó la metáfora: *los docentees hablan, los discentes escuchan;* inspirada en la escuela de Vigotsky, donde existe una sociedad con estructuras sociales preexistente, el docente tiene todo la legitimidad y por lo tanto lo que dice es verdadero e incuestionable, por lo que el lenguaje se vuelve unidireccional.

Una de las técnicas que ploriferan el proceso de comunicación en el aula son las preguntas, sin embargo, como menciona Menezes (2004, citado por Suárez, 2013), almomento de hacer preguntas se debe tener cuidado con la claridad y la consición, así como la variación de la dificultad, procurando involucrar a todo el grupo, o en su defecto, a la mayoría, evitando responder el mismo y dando tiempo a que el discentes razonen y reflexionen sus respuestas. Aunado a esto, el docente debe de plantear cuestionamiento, que para el discente tengan significado, incorporando el contexto en el cual se desarrolla el discente. De esta manera, el discente empieza hallar sentido a lo que hace y piensa frente a la matemática, cambiando su actitud hacia ésta, repeliendo el temor, rechazo y desinterés, que se presentaba al existir desconexión con el mundo real que le rodea.

En conclusión, en cualquier campo de la enseñanza de las matemáticas, se deben planificar y ejecutar actividades proclives al fortalecimiento de las habilidades propias del proceso de comunicación, procurando cultivar aun desde los primeros grados de escolaridad las habilidades de comunicación, incentivando particularmente el uso del lenguaje matemático para formar discentes matemáticamente competentes.

Devenir de las Matemáticas y su enseñanza

Se sabe que el juego, el habla, la religión, así como las Matemáticas, forman parte de la cultura de todos los pueblos, transitan de una generación a otra a través de diversos procesos educativos, ya sean escolares o no escolares, también denominados como formales e informales. Específicamente la Matemática ha tenido un desarrollo tan histórico que sabemos que éstas, estaban presentes desde el siglo V a.C. con las paradojas de Zenón, y que fueron configurándose hasta el día de hoy como con la teoría de números, sin embargo, cada día se desarrolla más y más, y con ello su proceso de enseñanza se vuelve más exigente, de tal forma que logren su objetivo de transitar entre las diferentes generaciones.

La matemática escolar, específicamente, se rige por un sistema de razón, dicho sistema se denomina dentro de la jerga como discurso Matemático Escolar, este discuro se encuentra fuertemente centrado en el valor mismo de los conceptos puros. Nos referimos a conceptos como el de función, razón, fracción, número, sucesión, espacio, etc., que se encuentran dentro de los currículos escolares de la Matemática, que al ser introducidos al aula como objetos formales acompañados de procesos algorítmicos, nos mencionan Cantoral, et.al (2015), se les reduce a meros tratamientos didácticos secuenciados y debidamente cronometrados. Esto debido a que curricularmente, se debe abarcar un contenido muy extenso dentro de los ciclos escolares, que en nivel Medio Superior y Superior, como lo son en nuestro caso, abarcan un semestre, y que por lo tanto, afectansustancialmente su consolidación en el aprendizaje del discente.

Esto implica que el docente de matemáticas de nivel intermedio en su quehacer pedagógico debe proveer al discente de situaciones de aprendizaje en las cuales el discente comprenda la naturaleza de los sistemas axiomáticos; Aray, et. al (2019), mencionan que dichas situaciones, desarrollen, prueben y provean justificaciones basadas en el método inductivo y deductivo para establecer conjeturas que involucran líneas, ángulos y figuras. Sin embargo, encontramos un obstáculo dentro de estas experiencias de aprendizaje, ya que éstas solo pueden ser promovidas por los docentes si es que ellos las poseen, y son capaces de crearlas o recrearlas para sus discentes, tal y como lo veremos en capítulos más adelante.

No podemos dejar de lado, la notariedad de que en los primeros años de escolaridad, los discentes suelen mostrar aceptación y gusto por las matemáticas, ya que su enseñanza esta basada en juegos lúdicos e interactivos con su entorno. Sin embargo, éste se va perdiendo conforme se avanza en la escolaridad (Gómez-Chacón, 2002), debido a que se vuelve más formal, más estructurado y rígido, basado en estructuras algorítmicas, formularios, y contexto irreal, ya que en los mismos planteamientos de problemas, se usan datos extrapolados. Este es un factor que debe tener en cuenta el docente a la hora de planear y ejecutar actividades de aula, al respecto:

> Gómez-Chacón (2002, citado por Rey, et.al en 2012)
>
> "Las actividades dentro del aula deben abordar tres componentes: el cognitivo, que aborda las creencias subyacentes a la actitud; el afectivo que se hace evidente en la aceptación o rechazo por la tarea planteada o por las matemáticas mismas, y el intencional que se puede entender como la tendencia a un determinado comportamiento". (pp. 967)

El objetivo de la enseñanza de las matemáticas no es sólo que los niños aprendan las tradicionales reglas aritméticas, las unidades de medida y unas nociones geométricas, tal y como lo menciona Ruíz (2011), sino su principal finalidad es que puedan resolver problemas y aplicar los conceptos y habilidades matemáticas para desenvolverse en la vida cotidiana. Esto implica que puedan resolver problemas con diferentes contextos, de ahí la importancia de no memorizar los procesos algorítmicos, ya que esto promueve que el discente sólo pueda resolver uno o dos problemas bajo las mismas condiciones, en cambio si se promueve el razonamiento dentro del proceso de enseñanza a través de la comunicación en el aula, como se vio anteriormente, éste podrá llegar a resolver problemas con distintas variables en juego.

A lo largo de la historia de la psicología, el estudio de las matemáticas se ha realizado desde perspectivas diferentes, a veces enfrentadas, subsidiarias de la concepción del aprendizaje en la que se apoyan. Como principales aportaciones de este devenir de la enseñanza de las Matemáticas, tenemos:

◊ *Teoría del aprendizaje de Thorndike.* Es una teoría de tipo asociacionista, y su ley del efecto fueron muy influyentes en el diseño del currículo de las matemáticas elementales en la primera mitad de este siglo.

◊ *Browell,* que defendía la necesidad de un aprendizaje significativo de las matemáticas cuyo principal objetivo debía ser el cultivo de la comprensión y no los procedimientos mecánicos del cálculo.

◊ *Piaget,* reaccionó también contra los postulados asociacionistas, y estudió las operaciones lógicas que subyacen a muchas de las actividades matemáticas básicas a las que consideró prerrequisitos para la comprensión del número y de la medida.

◊ Ausubel, Bruner y Vygotsky, también se preocuparon por el aprendizaje de las matemáticas y por desentrañar que es lo que hacen realmente los niños cuando llevan a cabo una actividad matemática, abandonando el estrecho marco de la conducta observable para considerar cognitivos internos.

Por lo anterior, es que las Matemáticas y su enseñanza han tenido un gran desarrollo en el ámbito de la investigación educativa, y que han considerado no sólo la parte teórica y práctica de ésta, sino también aquellos factores que socio-culturales que influyen en el aprendizaje significativo de esta matería.

3.1 Tesitura del aprendizaje de las Matemáticas

Para comprender la naturaleza de las dificultades es necesario conocer cuáles son los conceptos y habilidades matemáticas básicas, cómo se adquieren y qué procesos cognitivos subyacen a la ejecución matemática. Específicamente hablando de nuestro tema de investigación, sabemos que epistemológicamente las Matemáticas, muy en particular el lenguaje algebraico, se ha constituido a través de la historia (Fernández, 2010), dando paso a la configuración de un lenguaje, el cual ha sido esfuerzo colectivo que abarca más de veinte siglos y a muchos imperios, algunos incluso, ya desaparecidos. Esta necesidad de dar solución a problemas de la sociedad circundante, dio paso a inventar procesos geométricos que dieran una solución elocuente, y aceptable por ésta. Sabemos que históricamente, este procedimiento se vió fuertemente influenciado por Euclides, quien en su obra *Elementos*, determinó la enseñanza de la geometría que hoy se trabaja en las aulas, incluida el álgebra tratada geométricamente, por lo que a continuación se hace una breve reseña de las dificultades que se prensentan en el aprendizaje de la Geometría, y de cómo esta influencia de manera directa la comprensión y entendimiento del álgebra.

3.1.1 Dificultades en el aprendizaje de la Geometría

Antes de adentrarnos a las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la Geometría, bien vale la pena introducir al lector sobre dicha disciplina, la cual es una rama multifacética de las matemáticas. Su riqueza, es producto de la estrecha relación con otros dominios matemáticos, con las ciencias naturales y sociales y la vida cotidiana, por lo que abarca varias dimensiones. Camargo & Acosta (2012), mencionan que se habla de una dimensión biológica ya que se relaciona con capacidades humanas como el sentido espacial, la percepción y la visualización; así mismo, en su dimensión física, indaga por propiedades espaciales de los objetos físicos y de sus representaciones, modelando el espacio circundante; en su dimensión aplicada, se constituye en una herramienta de representación e interpretación de otras ramas del conocimiento, y por último, en su dimensión teórica, integra una colección de diversas teorías que han sido ejemplo de rigor y abstracción.

Esto lleva a suponer a Camargo & Acosta (2012), que en la multidimensionalidad de la geometría coexisten dos polos en permanente tensión: el empírico, donde se ubican la percepción, la intuición, la visualización y el carácter instrumental de la geometría; y el teórico, relacionado con los aspectos abstractos, conceptuales, deductivos, formales y rigurosos de la geometría, como disciplina científica. Y en efecto, podemos corroborar que dichos polos se ecuentran inmersos en la enseñanza de la Geometría, puesto que desde antes de ingresar al preescolar, ya llevamos conocimiento de los limites de un espacio, como la forma de nuestra casa, de la tele, de la silla, o la mesa en la cual comemos, estamos conscientes de que estos elementos poseen diferentes formas, al sólo visualizarlas, claro que dentro de la enseñanza escolar, empiezan a tomar significado y nombre, rectándulo, cuadrado, círculo, etc. Sin embargo, en el proceso de la enseñanza escolar esta se va dificultando entre más se avance en el nivel, ya que aquellas formas básicas con la cuales conviviamos de manera inhata, en el bachillerato se complican con nombres como eclipse, circunferencia, paralelogramo, etc.

El desarrollo histórico de la geometría ha estado relacionado con actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas; situación que puede utilizarse para justificar un re-direccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro de una visión contextualizada de la geometría, la cual, a diferencia de la percepción disjunta que concibe su evolución de forma enajenada de la dinámica social, se oriente a potenciar su aplicabilidad y utilidad en la vida del ser humano, así como a incentivar en los discentes y las discentes el desarrollo de ciertas habilidades, entre ellas, razonamiento y justificación (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). La Geometría ofrece, a quien la aprende, una oportunidad para emprender un viaje hacia formas superiores de pensamiento.

Estudiar Geometría brinda la oportunidad, según López & García (2008), de conocer a la primera ciencia en la que, a partir de unas cuantas definiciones y postulados considerados verdaderos, se construye un sólido edificio de afirmaciones cuya veracidad puede demostrarse. Los matemáticos y filósofos griegos, amantes y buscadores incansables de la verdad, tenían en alta estima a la Geometría porque para ellos representó un cuerpo de conocimientos que eran verdaderos y que, además, podía demostrarse que lo eran, que no dependían del humor de las personas ni de los dioses; a tal grado llegó esta valoración, que en la Academia, la escuela filosófica de Platón, estaba escrito: *Nadie entre aquí que no sepa Geometría* (Ruíz, 2003). Por lo que, sin duda el manejo de la geometría nos lleva al desarrollo de un pensamiento matemático, el cual como hemos visto, se refiere a las habilidades de reflexionar, argumentar y deducir la solución de un problema.

Sin embargo, en cuanto a la enseñanza de dicha disciplina, muchos docentees identifican a la Geometría, principalmente, con temas como perímetros, superficies y volúmenes, limitándola sólo a las cuestiones métricas; para otros docentes, la principal preocupación es dar a conocer a los discentes las figuras o relaciones geométricas con dibujos, su nombre y su definición, reduciendo las clases a una especie de glosario geométrico ilustrado. Es evidente, que para el discente esto no la hace atractiva ni de interés, ya que tendrán que adquirir no sólo memorísticamente estas fórmulas, sino que además tendrán que aprenden a manipular herramientas como el juego geométrico para realizar dichos trazos.

Además de ello, en una investigación realizada por Gamboya y Ballesteros (2010) respecto a los recursos que utilizan los docentees para desarrollar la clase de geometría, los discentes señalan que hay poca diversidad, el uso de cartulina, periódico, tijeras, goma u otro material concreto, algún programa computacional especial para geometría y equipo tecnológico (computadora, proyector de multimedia, calculadoras, entre otros) son poco empleados por parte de los docentees, lo que les dificulta la comprensión y visualización del comportamiento y construcción de cada uno de los cuerpos geométricos trabajados en clase.

La geometría ha sido considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del individuo, dada su aplicación en diversos contextos; sin embargo, Báez e Iglesias (2007) señalan que su enseñanza presenta ciertas dificultades, pues algunas veces las docentes y los docentes no desarrollan los contenidos geométricos contemplados en los programas ya sea por desconocimiento de la importancia de la disciplina o por poco dominio de los contenidos geométricos. En aquellos casos en que sí se desarrollan, se hace enfatizando en el uso de fórmulas y cálculo de áreas, como ya se había mencionado, por lo que su capacidad formadora de razonamiento lógico y su contribución en el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica se ve sesgada, obstáculo que con el tránsito por los saberes Matemáticos, específicamente del álgebra presenta serias dificultades, ya que el discente no es capaz de generalizar a partir de un proceso individual.

Aunque se ha reconocido la importancia de la capacidad aritmética y el desarrollo de la capacidad de razonamiento, los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial han sido desplazados a un segundo plano en importancia, pues prácticamente desapareció de los planes de estudio durante la época de los años sesenta y setenta, como consecuencia del posicionamiento de las llamadas “Matemáticas modernas”, caracterizadas por su formalismo y la algebrización de la geometría.

La enseñanza de esta disciplina se ha inscrito en un ambiente aislado del entorno del discente, donde los contenidos no representan un conocimiento útil para este y donde el ensayo, el error y la discusión no son aprovechados como un medio para lograr un aprendizaje. En recientes investigaciones de la Didáctica Matemática, se ha corroborado que el estudio de los errores que cometen los discentes en la solución de un problema, conllevan a un aprendizaje por parte del docente, para poder visualizar el fallo dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, y de esta manera replantear su didáctica. Con respecto a esto, Radillo (2011) nos dice que los errores en la solución de problemas Euclidianos, se clasifican tres tipos, los cuales no son excluyentes entre sí:

- ◊ De representación, ya sea verbla, gráfica y/o simbólica, así como la traducción entre estas.
- ◊ Deductivos o de razonamiento, referentes a la lógica seguida en la resolución de un problema dado.

◊ Axiomáticos o de aplicación de teoría, relativos a la disponibilidad capaz de los conocimientos previos necesarios para resolver un problema.

Las dificultades que se presentan en la solución de problemas de la geometría se encuentran relacionadas con el uso de los códigos del lenguaje matemático. Esta disciplina ha sido relegada y olvidada en el nivel secundario y por ello hay serias deficiencias en los niveles posteriores, medio superior y superior. Aunado a esto, la enseñanza tradicional de esta disciplina se ha enfocado en construcciones mecanicistas y descontextualizadas, basada en libros de texto, los cuales sólo piden recrear dichos cuerpos geométricos en los cuadernos de los discentes.

Por último, la geometría es una de las ramas de la matemática que debe ocupar un lugar privilegiado en los currículos escolares, debido a su aporte a la formación del individuo, desde sus diferentes dimensiones. Hoy podemos formular dos grandes objetivos de la enseñanza de la geometría. El primero, introducir a nuestros discentes en el mundo de la teoría a partir del mundo de la percepción, y el segundo, lograr el equilibrio entre los polos empírico y teórico de la actividad geométrica buscando que no haya predominio de uno de los dos en la actividad geométrica de los discentes.

3.1.2 Dificultades en el aprendizaje del álgebra

Históricamente las matemáticas han sido una disciplina que para muchos de los discentes ha sido difícil de aprender, siendo la pregunta principal del docente ¿por qué no aprenden mis discentes?, específicamente en el caso del álgebra, surgen cuestionamientos como ¿Por qué no logran desarrollar una sucesión?, ¿por qué no comprender lo que les plantea el problema? Preguntas que estan íntimamente ligadas con el uso del lenguaje algebraico, que como ya hemos abordado, tiene un fuerte impacto en la comprensión de lo que se le esta pidiendo resuelva, sobre todo si desconoce dicho código involucrado en el mensaje.

En el álgebra, estudios como Leinhardt (1987, 1989) han caracterizado las “buenas” explicaciones de enseñanza en esta rama de las Matemáticas. Éstas deben indicar la pregunta u objetivo de la explicación, y abordarse desde el conocimiento conceptual y las habilidades que poseen los discentes, para que estos logren pasar de lo que saben a lo que tienen que aprender. Esto implica tomar en consideración las dificultades y errores de los discentes y señalar constantemente el logro de aprendizaje esperado.

Siguiendo las investigaciones con respecto a las dificultades que presentan los discentes con respecto al uso y manejo del álgebra, encontramos una clasifcación de los erroes más frecuentes por parte de los discentes, dichos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1. Clasificación de dificultades algebraicas en discentes.

<table>
<tr><th>Autor</th><th colspan="2">Clasificación</th></tr>
<tr><td>Radatz (1979)</td><td colspan="2">-Dificultades de lenguaje
-Dificultades para obtener información espacial
-Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos
-Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento
-Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Palarea y Socas (1994)</td><td>Cognitivos</td><td>-Considerar expresiones incompletas.
-Proceso-producto (adición aritmética-algebraica)
-Concatenación (yuxtaposición de dos símbolos)</td></tr>
<tr><td>Errores del álgebra que están en la aritmética</td><td>-Operaciones con fracciones
-Uso de paréntesis
-Potencias
-Linealidad</td></tr>
<tr><td>Errores del álgebra propias del lenguaje</td><td>-Sentido del signo(ecuaciones)
-Sustitución formal (variables de una expresión son sustituidas por expresiones más complejas, que son nuevamente variables)</td></tr>
<tr><td>Rico (1995)</td><td colspan="2">-Datos mal utilizados
-Interpretación incorrecta del lenguaje
-Inferencias no válidas lógicamente
-Teoremas o definiciones deformados
-Falta de verificación en la solución
-Errores técnicos de la aritmética</td></tr>
</table>

Caputo y Macías (2006)	-Propuestas incoherentes -*Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico* -Errores algebraicos elementales -Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos -No lograr concluir la demostración	
Castro (2012)	Achacables a la aritmética	Uso de paréntesis Jerarquía de operaciones Propiedad distributiva
	Asociadas a la generación de patrones	Sucesiones Término general
	Asociadas a expresión de la generalización	
	Asociadas al lenguaje	*Traducción del lenguaje coloquial al algebraico* *Uso de letras* *Uso de símbolos*
	Asociadas a la estructura de las expresiones	Externa o superficial Interna

Como se puede observar en la Tabla 1, cada uno de los diferentes estudios enunciados, mencionan distintas dificultades que presentan los discentes con respecto al álgebra, pero en todos ellos se hace referencia a las dificultades que presentan los discentes con respecto al lenguaje algebraico. Dificultad que se agrava al emplear palabras que en el contexto matemático tienen diferente significado que, en el lenguaje habitual del discente, como raíz, potencia, primo, diferencia, matriz, etc. Aunado a los aspectos cognitivos descritos y las explicaciones de enseñanza en matemáticas deben considerar una selección cuidadosa y oportuna de representaciones y relaciones conceptuales y de tareas. También, se debe destacar la aplicabilidad del contenido (los conceptos en estudio) en diversos contextos.

Siguiendo el trabajo de Martínez (2019), se encontró que los discentes traducen literalmente el enunciado, es decir no identifican las operaciones a desarrollar, generalizan procedimientos ya conocidos y además de ello, los mecanizan. Por lo que no llegan a comprender el planteamiento del problema y por ende, el resultado obtenido es meramente numérico sin darle una interpretación acorde. Esto se encuentra relacionado con la puesta en juego para representar situaciones tomadas de la realidad.

Sin embargo, aún falta mucho por hacer para lograr que los discentes desarrollen el sentido de realidad y puedan hacer una lectura de ésta para trasladarla a una representación matemática que les permita resolver, predecir y optimizar, entre otras cosas.

Para resolver problemas verbales Filloy (1999, citado en Serres, 2011, p. 137) considera tres métodos: a) *método cartesiano (MC)* el cual consiste en representar las incógnitas de un enunciado verbal en una expresión algebraica, cuya solución matemática tendría nuevamente una traducción verbal para dar solución al problema, b) *método de inferencias analíticas sucesiva (MIAS)* cuya solución final es el producto de inferencias lógicas que actúan como descriptores, y c) *método analítico de exploraciones sucesivas (MAES)* muy parecido al anterior, sólo que se plantea un valor hipotético para la incógnita, por lo que lo vuelve un método más cargado a la aritmética.

Por su parte, Rodríguez-Domingo (2015), con el uso de un dominó algebraico y apoyándose de la clasificación hecha por Socas (1997, citado por Rodríguez-Domingo, 2015, p. 280) encontró que los errores que comenten los discentes entre una lenguaje y otro, radica en la aritmética y en aquellos derivados de las características propias del simbolismo algebraico. Aportando además que los errores más frecuentes derivados de la aritmética, fueron aquellos relacionados con el uso del paréntesis y el de las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación y división, incluyendo además el de la potenciación.

El lenguaje matemático trata de expresar estructuras por medios exclusivamente formales. Ello implica, como procesos intermedios, identificar las variables que intervienen, los parámetros, las incógnitas, y comprender las relaciones que existen entre todas ellas; asimismo, supone el manejo de conceptos tales como la proporcionalidad o la igualdad, para poder expresar, respetando las reglas sintácticas del álgebra, el mensaje codificado. Como sujetos principales del discurso matemático escolar, en una práctica educativa tradicional, los docentes conciben su rol como transmisores de información;

recíprocamente, los discentes se ven a ellos mismos como receptores de esos conocimientos. Desde este tipo de práctica educativa se evidencia el bajo aprovechamiento, el escaso aprendizaje logrado, la falta de atención, el aburrimiento y la polarización de expectativas, por un lado, y las frustraciones por el otro (Piscitelli, 2009).

Aprender matemáticas es sinónimo de resolver problemas; aprender a resolver problemas implica adquirir el dominio de los distintos códigos del lenguaje matemático (verbal, simbólico, gráfico, numérico, etc.) que se requieren para operar con los objetos matemáticos y expresar las relaciones entre ellos. Si un problema matemático es expresado en forma verbal, el discente debe comprender la formulación que está expresada, no en el lenguaje cotidiano, sino en un lenguaje especializado de las matemáticas, ya que los significados de los términos empleados en este ámbito pueden diferir de sus acepciones en el lenguaje cotidiano (Pimm, 1999; Ortiz, Batanero & Serrano, 2001; Alcalá, 2002; Ardila, 2002; Palencia & Talavera, 2004).

De acuerdo con Fujii (citado por Palarea, 1998), existen numerosas investigaciones en torno a las dificultades que se dan en la enseñanza y aprendizaje de contenidos algebraicos, en donde se han identificado dificultades específicas al aprender álgebra, como por ejemplo: obstáculos cognoscitivos, la letra como objeto y aplicación errada de la notación de encadenamiento, entre otros.

Por lo expuesto en este capítulo, podemos declarar que una de las dificultades que más se repite en diferentes estudios es aquella relacionada con el lenguaje matemático en general, y que las carencias en el desarrollo de la aritmética y geometría, podrían potenciar significativamente el rezago académico del discente con respecto a esta materia.

3.2 Circunstancias psico-socio-educativas en el aprendizaje de las Matemáticas

Históricamente han predominado los posicionamientos más psicológicos y cognitivos donde el conocimiento matemático es visto, sobre todo, como un producto mental e individual. Sin embargo, surgen de manera reciente posturas en donde se hace énfasis en una concepción del conocimiento matemático como proceso social y cultural. En esta tesitura, es importante hacer énfasis en que los dos enfoques son complementarios, ya que no tendría sentido el análisis del proceso de estudio matemático de un sujeto en un contexto aislado de influencias socioculturales, que en parte determinan sus formas de razonamiento y acciones. Por lo que, tomar en cuenta las variables contextuales que intervienen en el proceso de estudio de la matemática enriquecerá la óptica para una intervención mejor sustentada, como pretendemos sea nuestro caso, particularmente en la construcciones de representaciones semióticas para el lenguaje algebraico.

3.2.1 Prejuicio y rechazo hacia las Matemáticas

En la sociedad se ha creado el mito de que el área de las matemátias son de las más importantes en la vida del estudiantes y que todo aquel que pretenda formarse como profesionista deberá aprenderlas, esto ha generado un conflicto en el discente, ya que a medida que avaza de grada va descubriendo su complejidad, pero no sólo eso, sino que las va considerando aburridas. Desde su infancia el discente interactua de manera natural con las matemáticas, al observar figuras como el televisor, el refrigerador o la mesa, les da una dimensión y profundidad, o bien, cuando jugando emplea bloques de diferentes formas para construir, todo lo observa y aprende de manera natural. Sin embargo, cuando comienza su educación escolar, empieza a tener conflictos con los conceptos, pues ahora las formas y figuras que observaba en su día a día, empieza a formalizarse como cuadrado, rectángulo, etc. agudizándose conforme avanza en los siguientes niveles educativos.

Es muy común escuchar a nuestro alrededor a personas que dogmatizan que las matemáticas son muy difíciles y que quién domina las matemáticas es un experto. Estos comentarios abonan a seguir con el mito de que sólo pueden ser estudiadas y aprendidas por un grupo exclusivo de personas y que son inaccesibles para los demás. Aunado a esto, la forma tradicional de trabajo en clase de matemáticas no es la más apropiada para el desarrollo de procesos matemáticos por la estructura que tiene, ya que esta metodología genera problemas con desconexión entre la matemática y el mundo real, muchas veces el manejo excesivo de lenguaje abstracto y formal, desmotiva al discente, y en últimas, genera un rechazo hacia éstas.

Además sabemos que, en el caso particular del álgebra, esta situación se ve reflejada en el desempeño académico que se evalúa, y, sobre todo, en donde encontramos concepciones erróneas de conceptos algebraicos, que si bien hacen referencia a operaciones básica aritméticas, el hecho de utilizar un lenguaje diferente al conocido durante su educación básica, resulta frustrante para el discente comprender dicha rama de las Matemáticas.

A muchas personas no les agradan, y más aún, a otras les desagradan. La mayoría de estas personas señalan que porque no las entienden y no encuentran su utilidad. Sin embargo, la mayoría de ellos estudia solamente para aprobar el examen y en algunos casos lo hacen una noche previa al examen, por lo que sólo memorizan.

Según la UNESCO (1998) el rechazo o el gusto por las matemáticas pueden ser entendidos como la valoración promedio de un conjunto de variables de naturaleza emocional tales como el autoconcepto matemático, la percepción de dificultad o las emociones asociadas más frecuentes con esta materia. Al respecto Jiménez, Suárez & Galindo (2010) afirma que la concepción que se tenga de la matemática tiene consecuencias directas, a veces dramáticas, en el accionar del docente en su clase; dicha situación descrita se confirma con los resultados en las distintas pruebas que el propio Estado u otros organismos realizan a discentes de diferentes niveles de la educación.

Entre las dificultades evidenciadas en estudios, con respecto a las dificultades que presentan los discentes al realizar expresiones algebricas, se encuentra el temor en los discentes de expresar con letras lo que han venido trabajando en los grados precedentes; es decir, la dificultad de realizar la transición del lenguaje aritmético al algebraico, lo cual ocurre, en parte, debido al carácter abstracto del álgebra y a un limitado acercamiento al trabajo con variables (Rey, et. al, 2012).

Esta concepción pedagógica sobre la enseñanza de la Matemática, se ve inspirada en el paradigma positivista que en convivencia con prácticas intuitivas y tradicionales de la enseñanza, niega las potencialidades constructivistas del conocimiento del discente e irrespeta por su carácter impositivo y de violencia académica los derechos del niño. Esta subcultura didáctica va creando hacia los saberes matemáticos del currículo las hiladas de un tejido aversivo y de odio, que más tarde se habrá de convertir en uno de los factores endógenos del retraso académico, de la deserción escolar y la exclusión social. Esto conlleva sin lugar a duda a la creación simultanea de una especial forma de exclusión social promotora de analfabetismo matemático con consecuencias epistémicas en el adolescente y adulto que se detectan en la prosecución estudiantil que denominaré “segregación académica”, y que encuentra “refugio” en los estudios humanísticos y sociales donde se evade y, paradójicamente, se sigue reproduciendo.

En este sentido, la exclusión es un fenómeno social altamente complejo, necesariamente abordable desde múltiples perspectivas porque proviene de diversas causas una de sus causas más importantes: la educativa, y dentro de ella, la que contextualiza y formaliza la escuela a través de uno de sus saberes académicos: la Matemática y su enfoque pedagógico. Una manera muy sutil de exclusión sin deserción, se expresa en aquellos discentes que habiendo continuado la marcha hacia la obtención del título académico profesional medio o superior no presentan en su experiencia académica ni en sus repertorios intelectuales la impronta de la racionalidad matemática y su transferencia a situaciones de la realidad. obliga al discente a diseñar su futuro en un tipo de escenario académico donde los conocimientos, saberes y miradas epistémicas se pasean por los estudios humanísticos y sociales, no siempre en sintonía con las potenciales vocaciones del discente, convirtiendo a estos en “terrenos epistemológicos de ocupación forzada” (Rivas, 2005).

La Educación Matemática como factor generador de aversión pedagógica temprana, coadyuvante de deserción escolar, responsable en alto grado de una particular manera de exclusión sin deserción que denominaré segregación académica y, por supuesto, corresponsable de exclusión social al contribuir a expulsar del sistema escolar a un sujeto al que le será negada su preparación profesional para el desempeño ocupacional posterior. El problema de la reprobación de las matemáticas en el nivel medio superior (bachillerato) es tan grave que ocasiona que los discentes de este nivel resuelvan estudiar carreras que no tengan nada que ver con dicha disciplina, sacrificando con ello sus verdaderos intereses profesionales, y con ello, optando a carreras con baja demanda laboral.

La Educación Matemática así concebida se edifica sobre sus propios prejuicios, mitos y tabúes, entre los que podemos mencionar un pequeño pero representativo muestrario de estas creencias que se siguen reproduciendo en la escuela, incluso, a través los egresados universitarios:

◊ La Matemática es una disciplina altamente compleja, difícil de aprender y complicada para aprender a enseñarla.
◊ La Matemática escolar solo es posible enseñarla desde la ciencia de la Matemática, es decir, desde adentro donde ella es contexto y texto, significado y significante.
◊ La Matemática solo se enseña de manera axiomática y demostrativa.
◊ El analfabetismo funcional matemático de los discentes es responsabilidad de los currículos y sus programas
◊ La Matemática es una disciplina científica cuyo culto académico debe ser reverenciado

La deserción escolar, encuentra en el área de la Matemática una de sus máximas expresiones por la manera irreverente e irrespetuosa como se presenta y enseña, dando inicio, en el niño escolar, a un proceso de rechazo lento y paulatino que va desembocando en desencanto, desinterés y falta de motivación por la Matemática. van generando fobias prematuras en el infante, hacia la matemática creándole así la larva académica del fracaso escolar concretado en bajo rendimiento, repetición y abandono de la escuela o en prosecución intelectualmente desventajosa y/o desfavorable, sin duda uno de los problemas más graves que afectan la eficiencia terminal, el rezago y, sobre todo, la deserción, lo que conlleva a la reprobación.

Por lo que no es extraño ver como los jovenes de educación media superior al elegir en el cuarto semestre el área terminal de su bachillerato, eligan áreas excluyentes de la Matemática en general, y sólo aquellos que realmente les interese y apasione dicha disciplina estará dispuesto a realizar su último año escolar en ésta área.

3.2.2 Bajo rendimiento en las Matemáticas

La educación tiene como función social básica: “Ampliar las oportunidades educativas, para reducir desigualdades entre grupos sociales, cerrar brechas e impulsar la equidad” (SEP). La deserción escolar propicia el efecto contrario: las fisuras sociales se amplían y la movilidad social se pierde si quienes tienen menos oportunidades y recursos abandonan las aulas.

El bajo rendimiento académico es un problema que enfrentan discentes y docentees en todos los niveles educacionales. Su trascendencia para el individuo y la sociedad es palpable a partir de 2 elementos fundamentales: primero, cuando el bajo rendimiento académico afecta la autorrealización profesional de los educandos, y segundo, cuando el nivel de conocimientos y habilidades que pueden adquirir, resulta limitado a las exigencias de su práctica profesional.

Las causas del bajo rendimiento académico son muy variadas, de las cuales se pueden enunciar: desintegración familiar, estilos de crianza, padres trabajadores, desinterés de los padres, adicciones, hijos predilectos, hijos no deseados, por citar algunas. Dichas causas pueden estar asociadas a variables pedagógicas y personales del discente; entre las pedagógicas se consideran: maestría pedagógica-personalidad, proceso didáctico, acompañamiento pedagógico, clima de la clase y tamaño del grupo. De las variables personales del discente se han estudiado las sociodemográficas, las familiares, motivacionales, cognoscitivas y emocionales. Específicamente las familiares requieren del trabajo de la familia con el discente, sus problemas y los vínculos que establece con la institución educativa.

3.2.2.1 Organismos supranacionales y nacionales que enmarcan el bajo rendimiento en Matemáticas

La OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) tiene un proyecto denominado PISA, por sus siglas en inglés (*Programme for International Student Assessment*), cuyo objetivo es evaluar la formación de discentes cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, alrededor de los 15 años (OCDE, 2017). Dicho programa se ha concebido como una herramienta que proporcione información necesaria y relevante para adoptar decisiones politicas de los miembros que conforman dicha organización, y por ende, mejorar los niveles educativos.

La evaluación cubre las áras de lectura, matemáticas y competencia cinetífica. Cubriendo el dominio de los procesos, el entendimiento de los conceptos y la habilidad de actuar o funcionar en varias situacioes adecuadas a cada dominio. Combinado con la información obtenida a través de diversos cuestionarios, PISA proporciona tres tipos de resultados (OCDE, 2017):

- Indicadores básicos, que ofrecen un perfil base de los conocimientos y destrezas de los estudiantes.
- Indicadores derivados de los cuestionarios, que muestran la relación existente entre dichas detrezas y diversas variables demoggráficas, sociales, económicas y educativas.
- Indicadores de tendencias, que muestran los cambios en los niveles y en la distribución de los resultados, y en las relaciones entre las

variables y los resultados del entorno, a nivel sistémico, del alumnado y de los centros escolares.

La prueba PISA, tiene definida las áreas de conocimiento que evalúa, en nuestro caso particular, define la competencia matemática como: la capacidad un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Evaluando tres aspectos interrelcionados: a) procesos, que describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto del problema con las matemáticas y de ese modo resolverlo, y las capacidades subyacentes a esos procesos, b) contenido, que deberá ser utilizado en las preguntas de evaluación, y c) contextos, en los que se insertan las preguntas de evaluación.

Desde esta particular definición de competencia matemática, la OCDE ratifica que aunque es importante resolver operaciones aritméticas, no son matemáticas suficientes para el desarrollo de una sociedad tan demandante como en la que vivimos. Por lo que para poder aplicar dichos conocimientos, es imprescindible tener un par de capacidades básicas, como elegir un modelo adecuado y seleccionar una estrategia de resolución.

Existen siete capacidades fundamentales que emplea la prueba PISA para medir la capacidad matemáticas: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y de un lenguaje de carácter simbólico, formal y técnico, y, la utilización de herramientas matemáticas (OCDE, 2017). En el caso particular de esta investigación, estamos interesados como mide aquella relacionada con las representaciones, el razonamiento y argumentación, y, la utilización del lenguaje, mismas que describe de la siguiente manera:

	Formulación matemática de las situaciones	Empleo de conceptos, datos, prodecimientos y razonamientos matemáticos	Interpretación, aplicación y evaluación de los resultados matemáticos
Representación	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones cuando se interactúa con un problema.	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones cuando se interactúa con un problema.	Interpretar los resultados matemáticos en distintos formatos en relación a una situación o uso; comparar o valorar dos o más representaciones en relación con una situación.
Razonamientos y argumentación	Explicar, defender o facilitar una justificación de la representación identificada o elaborada de una situación del mundo real.	Explicar, defender o facilitar una justificación de los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemática. Relacionar datos para llegar a una solución matemática, hacer generalizaciones o elaborar un argumento de varios pasos.	Reflexionar sobre soluciones matemáticas y elaborar explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o proporcionen una solución matemática a un problema contextualizado.
Utilización de operaciones y de lenguaje de carácter simbólico, formal y técnico	Utilizar variables, símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados para representar un problema del mundo real empleando un lenguaje simbólico/formal.	Comprender y utilizar constructos formales basados en las definiciones, las reglas y los sistemas formales, así como mediante el empleo de algoritmos.	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Utilizar esta comprensión para favorecer la interpretación de la solución en su contexto y valorar la viabilidad y posibles limitaciones de la misma.

Figura 2. Relación entre los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas.

Fuente: Marco de Evalución y de Ánalisis de PISA para el desarrollo: lectura, matemáticas y ciencias, OCDE, 2017.

En relación a los niveles mediante los cuales PISA evalúa dicha competencia matemática, tenemos al respecto seis niveles, me parece interesante describir que mide cada nivel para poder abordar y comprender los resultados que ha obtenido México en esta prueba, por lo que a continuación desgloso, que se mide en cada nivel (Figura 3).

Nivel	Descriptor
6	En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones problemáticas complejas, así como usar sus conocimientos en contextos relativamente no habituales. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, para desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.
5	En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar su gama limitada de habilidades y razonar con cierta perspicacia en contextos sencillos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Sus interpretaciones son lo bastante sólidas para fundamentar la creación de un modelo sencillo o para seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Muestran cierta capacidad para manejar porcentajes, fracciones y números decimales, así como para trabajar con relaciones proporcionales. Sus soluciones reflejan que pueden desarrollar una interpretación y un razonamiento básicos.
2	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Los alumnos de este nivel pueden extraer información de una única fuente y usar un único modo de representación. Los estudiantes pueden utilizar algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas que contengan números enteros. Son capaces de hacer interpretaciones literales de los resultados.
1a	En el nivel 1a, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.
1b	En el nivel 1b, los alumnos pueden entender preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, que incluyen toda la información pertinente y que tienen enunciados sintácticamente simples. Son capaces de seguir unas instrucciones claramente enunciadas. Pueden dar el primer paso de una solución de dos pasos a un problema.
1c	En el nivel 1c, los alumnos pueden entender preguntas relacionadas con contextos sencillos que les son conocidos, que incluyen toda la información pertinente y que tienen enunciados breves y sintácticamente simples. Son capaces de seguir una sola instrucción claramente enunciada. Pueden resolver problemas que se limiten a un único paso o cuenta.

Figura 3. Descripción resumida de los niveles de competencia matemática en PISA.

Fuente: Marco de Evalución y de Ánalisis de PISA para el desarrollo: lectura, matemáticas y ciencias, OCDE, 2017.

En este sentido, México participa en PISA desde el año 2000, la aplicación es trianual, y en cada ciclo de aplicación enfatiza en uno de los dominios de evaluación, así en el 2000 evalúo lectura, en 2003 matemáticas y en 2006, ciencias. México ha participado ininterrumpidamente durante dos ciclos completos, es decir, que cuenta con información sobre seis aplicaciones (PISA, 2018). Algunos de los resultados clave en el área de Matemáticas fueron: alrededor del 44% de los estudiantes alcanzó el nivel 2 o superior, sólo el 1% de los estudiantes obtuvo un nivel de competencia 5 o superior. En comparación proporcional con países asiáticos, los cuales obtuvieron un 44% en competencia de nivel 5 o superior.

La UNESCO (Organización de las Nacaiones Unidas para la Educación, la Cultura y la Ciencia) por su parte ha hecho aportes a la enseñanza de las matemáticas, pero no sólo desde la didáctica sino también desde la investigación misma, ya que menciona sirven para enfrentar los desafíos de estos tiempos, como lo fue la situació sanitaria suscitada por el el COVID-19, incluso antes de que la OMS (Organización Mundial de la Salud) la UNESCO declaro el 14 de Marzo como el día internacional de las Matemáticas, destacando la importancia que tiene la ciencias matemáticas para hacer frente a los desafíos que se plantean en el camino hacia el desarrollo sostenible (UNESCO, 2021).

En este sentido, en el año 2015, el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), presentó algunos resultados principales del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo, TERCE. Dicho estudio abarcó a 15 países de América Latina y el estado de Nuevo León, de México, evaluando el logro de aprendizajes en las disciplinas de lenguaje, matemática y ciencias, en dicho estudio participaron 195, 752 estudiantes.

Los aprendizajes evaluados en la prueba de matemática del TERCE fueron cinco dominios y tres procesos cognitivos. Los dominios evaluados son: a) Dominio numérico, b) Dominio geométrico, c) Dominio de la medición, d) Dominio estadísitico, y, e) Dominio de la variación; mientras que los procesos cognitivos fueron: a) Reconocimiento de objetos y elementos, b) Solución de problemas simples, y, c) Solución de problemas complejos. De dicho estudio se obtuvieron los siguientes resultados, el primer caso (resultados más parecidos entre países) corresponde a Medición (donde el porcentaje de estudiantes que responde correctamente los ítems varía entre 25% y 52%) y Números (con porcentajes de estudiantes que varía entre 26% y 55%). La mayor heterogeneidad entre países se observa en el dominio de Variación (donde hay un país en que el 34% de los estudiantes contesta correctamente esos ítems y otro en que la cifra llega a 83%).

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene como misión contribuir al mejoramiento de la educación en México a través de la realización de evaluaciones integrales de la calidad del sistema educativo y de los factores que la determinan, así como de la difusión transparente y oportuna de sus resultados para apoyar la toma de decisiones, la mejora pedagógica en las escuelas y la rendición de cuentas.

La deserción escolar es uno de los problemas que se encuentran en el centro de atención de las políticas y las acciones realizadas por la Secretaría de Educación Pública (SEP), principalmente de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS), debido a los altos índices que se presentan en ese nivel. Según el modelo que sigue el sistema educativo mexicano, el primer requisito para lograr una educación de calidad, radica en garantizar el acceso y la permanencia en un programa educativo, en cualquiera de sus vertientes: presencial, intensivo, virtual, auto planeado, mixto o certificado en exámenes (DOF, 2008, 2008b, 2008c; SEP-SEMS RIEMS). Y según las estadísticas del sistema educativo en México del ciclo escolar 2013-2014, realizada por la SEP, la Educación Media Superior (EMS) muestra un aumento en el índice de abandono escolar, siendo el subsistema con el mayor índice.

La mayoría de las y los discentes se encuentran en el periodo de tránsito de la minoría de edad al momento en el que pueden ejercer plenamente sus derechos y deberes ciudadanos, por lo que una tarea importante de autoridades, directores, docentes y padres de familia, consiste en lograr que este tránsito corra en paralelo con una creciente capacidad de asumirse como auténticos ciudadanos, comprometidos, críticos y solidarios. En esta idea la deserción significa mucho más que la interrupción de un proceso de construcción de conocimientos, por demás valioso, pues con ella se debilita la función educativa de coadyuvar a la cimentación de una ciudadanía responsable (SEP, 2012).

Construye T es un programa dirigido y financiado por la SEP, a través de la SEMS, e implementado con el apoyo del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. Su objetivo es fortalecer las capacidades de la escuela para desarrollar habilidades socioemocionales en las y los jóvenes, y así mejorar el ambiente escolar. Este programa se enfoca en tres dimensiones que a su vez se dividen en seis habilidades generales y 18 habilidades específicas, actualmente ha sido implementado en los 32 estados de la república.

En 2007, la SEP diseñó un Programa de Prevención de Riesgos en la Educación Media Superior (PPREMS) para hacer frente a la problemática del abandono escolar y las situaciones de riesgo a las que se enfrentaban los discentes de este nivel. En 2008, la SEP se acercó al Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) y al Fondo para la Infancia de las Naciones Unidas (UNICEF), posteriormente, a la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Tecnología (UNESCO), para dar soporte técnico y operativo al PPREMS, es aquí donde nace el programa *Construye T*, conocido formalmente como apoyo a los y las jóvenes del nivel medio superior para el desarrollo de su proyecto de vida y la prevención de riesgos.

Hasta 2013, el Programa se basó en la realización de actividades en seis dimensiones de trabajo que estaban relacionadas con el abandono escolar: conocimiento de sí mismo, vida saludable, escuela y familia, cultura de paz y no violencia, participación juvenil, y construcción de proyecto de vida. Algunas de estas dimensiones cambiaron de nombre durante la primera etapa, pero básicamente abarcaban las mismas temáticas. El programa está dirigido a la comunidad de los planteles públicos federales y estatales del NMS, tanto rural como urbana, en las 32 entidades federativas del país, que cursan la modalidad escolarizada.

El programa *Construye T* maneja fichas de actividades para ser desarrolladas por los docentees, directivos o en trabajo individual de las y los discentes, las cuales son materiales prácticos y fáciles de usar, donde se proponen ejercicios para que las y los discentes desarrollen sus habilidades socioemocionales.

3.2.2.2 Factores de influyen en el bajo rendimiento en Matemáticas

Son muchas las razones que explican la deserción escolar y éstas a su vez dependen de las condiciones propias de cada lugar, por ejemplo: escasez de recursos económicos para invertir, bajas esperanzas de retorno económico hacia los padres respecto a la educación de los hijos (para qué estudian, que se pongan a trabajar), escasez de oferta educativa, baja calidad de la educación, problemas para entender a los docentes, entornos escolares negativos, bajo rendimiento y desinterés de los discentes por estudiar, entre otras tantas más. La deserción escolar genera que quienes abandonan la escuela antes de concluir sus estudios se priven de la oportunidad de ingresar al ciclo de la movilidad social, y conseguir un trabajo con digna remuneración económica y asistencia social.

El rendimiento académico de los discentes, se ve influenciado por un gran múmero de variables, condicionantes socioculturales, factores emocionales, aspectos técnicos y didáctico, etc. pero también están presentes los estilos de aprendizaje. Afirma con mucha claridad De Natale (1990) que “aprendizaje y rendimiento implican la transformación de un estado determinado en un estado nuevo, que se alcanza con la integración en una unidad diferente con elementos cognitivos y de estructuras no ligadas entre sí”. Es el docente quien debe encargarse de que el clima emocional que existe en el salón de clases sea uno lleno de afecto a ayudar a aprender, por lo que dicho ambiente será decisivo para el éxito de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Dos de los problemas básicos del nivel medio superior, a lo largo de décadas, han sido las altas tasas de reprobación y deserción escolares, las cuales en los últimos años han estado cercanas a 45% y 16%, respectivamente (sep, 2012). La reprobación y la deserción están íntimamente vinculadas y tienen múltiples causalidades. De acuerdo con el Reporte de la encuesta nacional de deserción en la educación media superior (SEP, SEMS 2018), la precariedad del entorno familiar, los rezagos académicos acumulados por los estudiantes, los aspectos vinculados con la gestión escolar y la formación de los docentes, entre otros, son factores que inciden en la deserción escolar.

La puesta en marcha de la Reforma Integral de la Educación Media Superior buscó, antes que nada, incidir en el perfil de egreso de los estudiantes de este nivel educativo, no en los dos problemas antes mencionados. La reprobación y la deserción escolares influyen directamente en la eficiencia terminal del nivel medio superior, la cual se mantiene en 60%, aproximadamente. Esto significa que cada año dejan el bachillerato más de un millón y medio de jóvenes en el país.

Hasta el momento, la principal política para disminuir la de- serción y reprobación en el nivel medio superior se ha centrado en los programas de becas. Si bien éstos han sido positivos, porque inciden en mejorar las difíciles condiciones económicas de los estudiantes, no han logrado mejorar significativamente su desempeño escolar, ya que, por sí mismos, no resuelven el problema del rezago educativo y la excesiva carga académica de los estudiantes que cursan el bachillerato tecnológico.

En ese sentido, el conocimiento de los estilos de aprendizaje de los discentes constituye el primer paso para mejorar nuestra labor docente. Alonso (1992) indica que “las investigaciones cognitivas han demostrado que las personas piensan de manera distinta, captan la información, la procesa, la almacenan y la recuperan de forma diferente”. En cuyo caso, afirman Dunn y Dunn (1984), “en el ámbito más concreto de las matemáticas es muy posible que los discentes que obtienen notas más altas en amtemáticas la consigan porque se les está enseñanado en la forma que mejor va con estudio peculiar. Y si los docentees de matemáticas cambiarian sus estrategias instructivas para acomodarlas a los estilos de los discentes con calificaciones más bajas, es muy probable que disminuyera el número de éstos”. Hoeny y Munford (1986) clasifican los estilos de aprendizaje en cuatro tipos: activo, reflexivo, teórico y pragmático.

Es importante determinar cuál es el nivel de conocimiento con el cual ingresan los discentes a nivel medio superior y superior, pero más aún, cuál es su sentir con las matemáticas, específicamente con el álgebra, cuyo proceso de aprendizaje en estos niveles es más complejo, ya que se empiezan a tratar sistemas de ecuaciones y funciones, así como hacer el tratamiento de éstas a través del cálculo diferencial e integral. El sentimiento que los discentes puedan tener con respecto a ésta área, le permitirá al docente diseñar estrategias para trabajar los temas si realmente pretende lograr los objetivos curriculares que se plantean al inicio de cada semestre.

El campo controversial de la Etnomatemática cuyo padre fundador Ubiratan D'Ambrosio, pone al centro de sus preocupaciones la dimension moral y política de la educación matemática, los cuestionamientos de justicia social y de equidad. Ya que considera que estos son factores primordiales en la educación matemática.

En este aspecto la escolaridad de los padres es un factor que incide en la trayectoria educativa de los jóvenes. Una extensa tradición de investigaciones ha estudiado y constatado la importancia de ciertas características de la familia, como su nivel socioeconómico y cultural, en la determinación de los niveles de los aprendizajes escolares y, por tanto, en la reproducción de las desigualdades sociales. Algunas características de la estructura familiar probablemente afectan el comportamiento escolar del niño de diversas formas, a la vez que ciertas características de éste (actitudes, comportamientos) pueden incidir en decisiones familiares con consecuencias para su estructura.

La principal conclusión de un reciente trabajo longitudinal (1998-2000) en Estados Unidos (Martin, 2012) sintetiza que de dos familias con el mismo nivel educativo, el hijo del núcleo con los dos padres biológicos obtendrá una escolaridad más alta que la alcanzada por el de madres solteras; la estructura familiar sería uno de los factores de determinación de la estratificación social.

El niño de origen social alto, según la teoría de la reproducción (Bourdieu y Passeron, 1981), tiene mayor probabilidad de ser exitoso en la escuela no sólo porque su familia posee los recursos económicos necesarios, sino también porque tiene habilidades cognitivas, códigos lingüísticos y conceptuales, formas de comunicación y de los comportamientos esperados y valorados por la institución escolar; es decir, una mayor cantidad de *recursos culturales*, heredados de sus padres, que le ayudan y le dan ventajas para apropiarse del currículum escolar y ajustarse a determinados modelos de autoridad. Algunas investigaciones han mostrado que los hijos de familias con padrastros tienen rendimientos muy similares a los de las monoparentales.

Para entender cómo esos recursos económicos, culturales y sociales de los padres se convierten en ventajas educacionales, Lareau y Horvat (1999) diferencian entre la posesión y la activación de los recursos, definiéndolos como: *Posesión de recursos*. Las familias con más recursos (*stock*) económicos pueden ofrecer los medios educativos requeridos para una mejor Oportunidad de Aprendizaje (oda), en su propio hogar o enviando a sus hijos a escuelas que también brindarán mayores recursos educativos. Para el caso de *Activación de recursos*, el capital no es sino recurso activado y, por tanto, depende de la habilidad y capacidad del actor para activarlo y tornarlo capital efectivo. Entonces, la transmisión familiar al niño requiere de *prácticas*, de acuerdo con *estrategias* definidas por los actores y orientadas a *actualizar el valor potencial* de los recursos disponibles. Los bienes económicos, culturales y sociales de los padres se transforman en capital cultural para el hijo cuando, mediante la acción y la interacción intrafamiliar, se promueve el desarrollo de características personales (cognitivas, lingüísticas, comunicativas) y patrones de comportamientos acordes con las expectativas de la institución escolar.

Por lo anterior, podemos delucidar que son variados y muy importantes cada uno de los factores que estan involucrado en el aprendizaje de las Matemáticas, factores de índole psico-socio-educativo que pueden favorecer o desfavorecer el desarrollo congnitivo del discente, sobre todo en los niveles medio superior y superior, en donde ya posee una edad para poder trabajar legalmente, y muchas veces desertan del camino educativo por recursos económicos, pero no sólo eso, sino también de emociones que se ven involucrados en su crecimiento escolar.

3.3 Procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula

Las Matemáticas desde la mirada socioepistemológica son consideradas parte esencial de la cultura, un elemento “vivo” que se crea “fuera” del aula, pero se recrea “dentro” de ella: las Matemáticas no se inventaron para ser enseñadas y sin embargo se enseñan, se las usa en distintos escenarios, digamos que “viven” a través de las acciones más básicas de toda actividad humana: construcción de vivienda, actividades de siembra y tejido, elaboración de protocolos para el empleo de fármacos o de tóxicos, elaboración de recetas de cocina, diseño de depósitos de vino, cálculo de dosis médicas, explicitación de conjeturas matemáticas, coordinación de movimientos de un piloto al aterrizar en una pista complicada, matematización de fenómenos biológicos, toma de decisiones para inversiones financieras, interpretaciones de la opinión pública, simulación de flujos continuos, trueque en mercados tradicionales, estudio de la consolidación de suelos finos saturados, de mecanismos regulatorios de temperatura en la industria química, etc.

Dado que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema didáctico le obliga a una serie de modificaciones sobre su estructura y su funcionamiento; lo cual afecta también a las relaciones que se establecen entre discentes y docente. Al introducir como objeto didáctico el saber matemático al aula, se producen discursos que faciliten la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos y, en consecuencia, el saber se despersonaliza y descontextualiza reduciéndose a temas secuenciados, con el fin de favorecer la formación de consensos. Dichos consensos se alcanzan a costa de una pérdida del sentido y del significado original, reduciendo el saber a temas aislados y secuenciados, a menudo denominados conocimientos: “contenidos” o “unidades temáticas” de una asignatura, como lo es el álgebra, particularmente.

3.3.1 Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Media Superior y Superior

La historia de las matemáticas nos muestra que se han aplicado diversos modelos de enseñanza que dejan ver que en todos los niveles la mayor parte de la población estudiantil muestra una aversión a esta área. Autores como Bishop tienen la concepción de que la noción de las matemáticas es el resultado de un producto cultural. Se dice que las matemáticas son una de las materias más importantes del currículo escolar, de ser así, si alguien pretende continuar con sus estudios en otros niveles educativos debe aprender a vivir y lidiar con las matemáticas, de otra forma el número de discentes reprobados irá enaumento, (Bishop, 1999).

Retomando el TERCE y el objetivo de analizar curricularmente las tendencias de enseñanza de las matemáticas, podemos retomar algunas concepciones teóricas con respecto a este tema en América Latina y el Caribe.

En la dimensión pedagógica de dicho análisis, se identifica el predominio de los enfoques cognitivo/sociocultural y constructivista, los que consideran las etapas de desarrollo del estudiante, dándole protagonismo en el proceso de aprendizaje, tomando en cuenta su conocimiento previo y su contexto sociocultural (OREALC/ UNESCO Santiago, 2013). El enfoque cognitivo/sociocultural prioriza el cumplimiento de objetivos de aprendizaje alineados con la necesidad de que los estudiantes desarrollen ciertas capacidades, habilidades, valores y actitudes que sirven para la vida. Bajo este enfoque, el docente es un intermediario entre el estudiante y la cultura social e institucional, es un mediador del aprendizaje.

El enfoque constructivista se refiere principalmente a cómo los estudiantes son capaces de construir nuevos significados a partir de las estructuras mentales y los conocimientos que ya poseen. Desde esta óptica, en el proceso de enseñanza se consideran las ideas previas que los estudiantes tienen del nuevo objeto de aprendizaje y se fomenta la participación de ellos en su propio aprendizaje. Nuevamente, el rol del docente se entiende como un mediador del aprendizaje, pues guía la participación y el razonamiento de los estudiantes a través de actividades y preguntas diseñadas previamente (Calero, 2009).

Las corrientes de enseñanza observadas en la región parecen responder a las exigencias que en la actualidad se le hacen a la formación escolar y se alinean con las tendencias mundiales. De hecho, según las conclusiones del proyecto DESECO (Definición y Selección de Competencias) de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), el constructivismo es el enfoque educativo que mejor se adapta a los procesos de construcción de las competencias clave en la sociedad actual (Serrano y Pons, 2011).

Los documentos curriculares de los distintos países orientan el trabajo docente en las aulas mediante la declaración de esos dos enfoques (constructivista y cognitivo/sociocultural). Y con esto, implícitamente, entregan gran relevancia al rol del profesor en la relación pedagógica: su incidencia en el logro de los objetivos es total; el lugar de los docentes no es el centro del sistema educativo sino su base, los profesores concretan día a día lo que, para ellos, es más eficiente en el ámbito educativo.

En términos concretos, al menos a nivel de las orientaciones curriculares y desde una perspectiva constructivista (Calero, 2009), se espera que los docentes de matemática de la región sean capaces de:

- Planificar la enseñanza, considerando las características y los intereses particulares de los estudiantes, y reflexionar en torno a ella tanto previa como posteriormente a la ejecución de esas planificaciones.
- Desarrollar actividades didácticas que se centren en el quehacer del estudiante, cuidando que sean suficientemente desafiantes, pero no frustrantemente imposibles.
- Usar el conocimiento intuitivo o previo en el desarrollo de las actividades didácticas.
- Fomentar la participación de los estudiantes en clase, dando oportunidades para la reflexión y expresión de opiniones e ideas. Crear

instancias en donde los estudiantes puedan verbalizar sus modelos mentales y contrastarlos con los de los demás.

● Relacionarelcontenidoconsituaciones cotidianas y significativas para los estudiantes.

● Generar climas de confianza para que los estudiantes no teman dar una respuesta errónea, enfatizando que el conocimiento se construye corrigiendo errores y que el único error real “es pensar que la certeza existe, que la verdad es absoluta, que el conocimiento es permanente” (Moreira, 2005, p. 94).

● Ayudar a solucionar las dificultades que entrampan el desarrollo de las actividades propuestas, sin dar las respuestas, sino que entregando las herramientas u orientaciones para continuar.

● Brindar espacios para la experimentación y la creatividad.

Por otro lado, tenemos a la Socioepistemología, cuya palabra se compone de tres elementos socio – episteme – logos y en ese sentido plantea el tema de la construcción social del conocimiento. Aplicarla a la Matemática exige, por tanto, de un reto mayúsculo, pues se deben analizar las relaciones entre una ciencia formal y la vida en sociedad.

Etimológicamente, la Socioepistemología (del latín socialis y el griego επιστήμη, episteme, “conocimiento” o “saber”, y λόγος, logos, “razonamiento” o “discurso”), también conocida como epistemología de las prácticas o filosofía de las experiencias, es una rama de la epistemología que estudia la construcción social del conocimiento. En la Socioepistemología se aborda la consideración de los mecanismos de institucionalización que lo afectan, vía la organización social de la enseñanza, el aprendizaje y la investigación. Está, por tanto, íntimamente relacionada con la Sociología de la Educación y de la Ciencia.

La Socioepistemología nace en la escuela mexicana de Matemática Educativa a fines de los ochenta y se extiende hacia Latinoamérica y otras latitudes durante los noventa con el objetivo de atender colectivamente un problema mayor: explorar formas de pensamiento matemático, fuera y dentro del aula, que pudiesen difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población.

La Socioepistemología postula que para atender la complejidad de la naturaleza del saber matemático y su funcionamiento a nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social, se debe problematizar al saber situándolo en el entorno de la vida del aprendiz, lo que exige del rediseño del discurso Matemático Escolar con base en prácticas sociales. Es preciso aclarar, que el entorno del aprendiz no se reduce a la medida de metros cuadrados en los que se mueve, sino que en su entorno se conciben cuestiones profundas como su cultura, sus conocimientos, sus saberes, su historia, su presente y la propia historia que permitió la emergencia de los saberes matemáticos. Dicha historia, aunque no cuantificable en metros cuadrados, es su propia historia

3.3.2 Didáctica del álgebra en Educación Media Superior y Superior

Para entender cuáles son los problemas que se presentan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, es importante mencionar cómo se lleva a cabo el desarrollo cognitivo, partiendo de que "el desarrollo cognitivo se refiere a los procesos mentales complejos mediante los cuales el ser humano produce el conocimiento: sensación, percepción, atención, memoria, aprendizaje, imaginación, pensamiento y razonamiento" (Saavedra, 2004). Para poder trabajar los procesos mentales antes mencionados, es necesario partir de las concepciones constructivistas.

Desde este enfoque, retomo tres autores que son necesarios para comprender cómo se ha llevado a cabo la didáctica de las matemáticas en general, pero particularmente como este enfoque ha influenciado en la enseñanza del álgebra escolar.

Comenzando con Piaget, el cual cnsidera que el modo de conocer el mundo que nos rodea se da por medio de un proceso al cual denominó equilibración (Saavedra, 2004). Vigotsky por su parte nos permitió avanzar más, planteando que los discentes aprenden contenidos culturales, aceptados por la sociedad y es por eso que se necesita ayuda de otras personas, planteando el proceso de reequilibración. Por último, pero no menos importante, Ausubel, el cual nos proporciona elementos complementarios para orientar la práctica docente.

Para poder trabajar con los discentes los procesos mentales, en cuanto a la atención, la memoria y el razonamiento, es necesario proponer actividades que permitan fortalecer el aprendizaje y la comprensión de las expresiones algebraicas, cuanto más del lenguaje que se pretende utilizar. Sin embargo, mantener la atención de los discentes hoy en día se ha convertido en un reto, ya que el uso de aplicaciones como las redes sociales, ha desarrollado en los jóvenes un tiempo de atención menor a un minuto, por lo que esto influye en el desarrollo del conocimiento del álgebra en el nivel medio superior o superior, ya que las sesiones de trabajo están compuestas de cincuenta minutos.

En el área del álgebra es necesario buscar estrategias que permitan el desarrollo de un aprendizaje significativo, solo mediante este los discentes del nivel medio superior y superior podrán aplicar el conocimiento matemático en cualquier contexto. De ahí que la didáctica que se genere para la enseñanza del álgebra debe tener aplicación en los diversos temas que compete al discente, involucrando su contexto real, de tal forma que el conocimiento que vaya generando tenga un sentido en su vida cotidiana.

Debemos tener en cosideración que el discente del nivel medio superior y superior, al ingresar a cualquier subsistema se enfrenta a un nuevo contexto social, además, por lo general, la familia deja de involucrarse de manera directa con su aprendizaje en dichos niveles. Desde el trabajo de camppo en nivel medio superior, pude observar que los padres dejan de ir a los centros escolares a preguntar sobre el discente, permitiendo que este empiece a tomar sus propias decisiones, forzándolo a tener responsabilidad sobre su aprendizaje, muchas veces de manera errónea.

Además de la participación familiar, se debe considerar la didáctica que oferta el docente para dicha área matemática, en la cual se debe sensibilizar al docente sobre las actividades que lleva a cabo dentro del aula, pero también, sobre aquellas que deja extracurricularmente para fortalecer el aprendizaje captado en el aula. Aunque el trabajo del aula es en su mayoría responsabilidad del docente, en este proceso se debe tener una comunicación abierta con las autoridades correspondientes, para que los puedan ayudar con respecto a algunas actividades que se necesite desarrollar dentro o fuera del centro escolar, así como para proporcionar el equipo necesario para llevar a cabo la didáctica planteada por el docente.

La crisis educativa que nos afecta en estos tiempos, se visualiza particularmente en los altos niveles de repetición y deserción escolar por causa primordialmente a la escasa motivación- estímulo del discente. Este problema es consecuencia de un diseño de un plan de estudios inequitativo. Aprender matemáticas, específicamente, álgebra, implica el desarrollo de habilidades generales para el manejo, la comprensión y comunicación de datos numéricos, más que el dominio de conceptos y técnicas aisladas e involucra comprensiones globales más o menos amplias, además del uso coherente de un lenguaje cuya configuración le permitirá al discente desenvolver su capacidad de generalización, en cuyo caso, podra aplicar a los problemas que se le presenten en la vida cotidiana.

3.3.3 Enseñanza del álgebra con ambientes virtuales

Dada nuestra situación sanitaria actual, en la cual se hiperdesarrolló las actividades a través de un medio digital, ésta demás decir que la comunicación debió configurarse a un paso agigantado para poder cumplir con los estándares y necesadidades del discente en cuestiones algebraicas.

El uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como un recurso para el proceso de enseñanza y aprendizaje puede constituirse como un elemento potenciador con base en fundamentos psicopedagógicos, así como de los fundamentos de la naturaleza del campo disciplinar en particular, como el caso de las matemáticas.

En las últimas décadas, se han observado acelerados cambios tecnológicos en todos los campos, incluyendo el de las TIC. En este campo, los cambios cuantitativos representados por mayor digitalización, más informatización y más medios originan cambios de orden cualitativo en lo social asociados al cambio tecnológico. El contexto educativo no es ajeno a estas prácticas que los discentes han apropiado y traído al aula desde afuera, desde la sociedad global en la que viven y en donde se originan nuevas y cambiantes prácticas socio-culturales resultado de la tecnologización e informatización del mundo actual.

El uso pedagógico de las nuevas tecnologías en la educación obliga a la interactividad; que se puede dar a través de teléfono, fax, Internet, correo electrónico, correo tradicional. Los mensajes que se articulen a través de estos medios deben ser bidireccionales para que refuercen la retroalimentación y la libre participación de los discentes con sus docentees y entre ellos mismos rompiendo barreras de espacio y de tiempo. Por lo que nuestro trabajo pretende cubrir este punto, de tal forma que se propicie la construcción de representaciones semióticas para el lenguaje algebraico.

Las relaciones pedagógicas que se establezcan tanto en las aulas presenciales, como a distancia y a través de la educación virtual son actos intrínsecamente culturales que inciden profundamente en la calidad de la educación y en el desarrollo humano. En el marco del 4° Congreso Colombiano y 5° Latinoamericano de Lectura y Escritura Ferreiro, Emilia (1999) comentó:

> "El uso de un software educativo conceptualmente atrasado no va a acelerar el proceso de comprensión de la naturaleza de un sistema alfabético de escritura. (Muchos de ellos son una pura réplica de lo peor que se puede hacer con un pizarrón, sólo que más atractivo porque se usa animación. Peores resultados van a obtener si se confía en el uso exclusivo del 'mouse', evitando el teclado). Los nuevos medios son inútiles si no insertamos en ellos nuevas ideas".

Las Nuevas Tecnologías han impactado de tal manera la sociedad que es imposible prescindir de ellas, bien sea que la escuela, el aula o espacio didáctico, las tenga o no. Sin embargo, su utilización es la de mediadoras entre el docente, el saber (objeto de estudio) y el discente. Cada tecnología tiene su propio lenguaje y su propio canal para pasar la información; y de cada una de ellas, podemos los educadores, aprovechar sus posibilidades para promover y acompañar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Uno de los softwares que más se utilza para la enseñanza de la geometría, y a su vez el desarrollo del álgebra es GeoGebra, cuyas bondades permite al docente y al discente tener ese proceso de comunicación que se debe llevar a cabo para la adquisición de un aprendizaje significativo.

La tecnología no es neutra, Cisneros (2014) nos comenta que su uso proporciona nuevos conocimientos del objeto, transformándolo, por la mediación la experiencia intelectual y afectiva del ser humano, individualmente y en colectividad; posibilitando al discente interferir, manipular, actuar mental o físicamente sobre nuevas formas, por el acceso a aspectos hasta entonces desconocidos del objeto.

Por otro lado, el dominio disciplinar, pedagógico y tecnológico; articulado y orientado hacia el planteamiento de trayectorias de aprendizaje de los discentes, es un aspecto de suma importancia como competencia profesional para el docente. Lo anterior plantea y posibilita, como señala Díaz Barriga (2003), una transformación en el proceso de aprendizaje del discente, la innovación en los métodos de enseñanza, los materiales de apoyo educativo, la evaluación y los ambientes de aprendizaje. En este sentido, el propósito al usar las TIC es crear entornos de aprendizaje que pongan a disposición del discente una diversidad de herramientas interactivas para su aprendizaje y realimentación por parte del docente (García Fallás, 2003). De esta manera, el conocimiento didáctico matemático y las herramientas digitales permiten una interactividad dinámica entre el discente y el docente, motivándolos a explorar y aprender juntos.

Las tecnologías digitales como fenómeno complejo cultural requieren ser consideradas dentro de su contexto actual y de manera especial las características de sus objetos tecnológicos, siendo estos las herramientas determinantes en la comprensión y transformación del contexto, los objetos tecnológicos generan dinámicas socio-culturales-cognitivas propias de cada época histórica, tal y como lo estamos viviendo ahora, en donde el avance en capacidades tecnológicas, de almacenamiento, pedagógicas y económicas ha desarrollado el aprendizaje de las Matemáticas, pero no sólo eso sino en cada una de las temáticas que se despliegan de ellas, como la geometría y el álgebra.

El acercamiento que tienen los discentes de educación superior a las tecnologías se ve mediado y significado por diversas formas de socialización tecnológica en distintos entornos, como el del hogar, el educativo, el de la vida, así como por la experiencia previa con otras herramientas cotidianas. Estos aspectos resultan relevantes en la apropiación social de las tecnologías y, en consecuencia, en las dinámicas de aplicación escolar, y por ende en el diseño de los procesos de aprendizaje.

De esta manera, las TIC no pueden considerarse de manera separada de la cultura, sino una forma de expresión de la misma, ya que se crea y se recrea la cultura en situaciones y prácticas que no se limitan a contextos geográficos y grupos sociales, sino que tienen como característica fundamental la de vincular prácticas sociales entre individuos que se encuentran en contextos espacio-temporales y entornos socio-culturales distintos, de manera que plantea un esquema de funcionamiento en el que se establecen relaciones sociales en un medio de interacción virtual, que da origen a nue- vas formas de construcción cultural.

Cada espacio le da un sentido distinto al proceso socio-cultural de apropiación de TIC, que no está determinado por las posibilidades de la tecnología sino por el universo de prácticas compartidas, a través de las cuales la tecnología se emplea; cómo se entiende en contextos cotidianos y cuál es el significado de esa experiencia para quienes la utilizan (Hine, 2004). Todo esto sin dejar de lado, la comunicación que existe entre la comunidad de invsetigadores y docentes que desarrollan las herramientas necesarias para el aprendizaje del álgebra, compartiendo lso resultados de intervenciones o bien, de secuencias didácticas en entornos digitales.

3.3.4 Conocimiento y didáctica del docente de Matemáticas

El rendimiento académico de los estudiantes está en función directa con el accionar docente en el aula (Lara, Aguilar, Cerpa y Núñez, 2009, p. 1; Padilla y Villafuerte, 2018, p. 15), quien estimula el desarrollo de habilidades cognitivas y socioemocionales en el discente (Tuirán, 2017, p. 14). Originar una mejor comprensión de entes abstractos, favorecer el razonamiento lógico y propiciar emociones positivas hacia los números y las figuras geométricas en general es una de las principales tareas de los profesores de matemáticas (Gómez, 2010, p. 228).

Los maestros competitivos, incluidos los de matemáticas, favorecen el autoconocimiento de los estudiantes, inyectan en ellos deseos de superación y expectativas para su crecimiento académico, profesional y humano, orientan las sanas prácticas sociales (Secretaría de Educación Pública [SEP], 29 de octubre de 2008), cuentan con habilidades para la enseñanza, así como dominio de los planes y programas de estudio (Dolores y García, 2016, p. 72), emplean diversos materiales didácticos (SEP, 2015, p. 8) y apoyan a los discentes en todo momento (Santana, Marchena, Martín y Alemán, 2018, p. 367).

Los objetivos a alcanzar en las matemáticas se relacionan con que los discentes sean capaces de llevar a cabo operaciones numéricas, identificar sus jerarquías, manejar el lenguaje del álgebra, usar ecuaciones lineales, entre otros, que les permita resolver retos y situaciones de la vida diaria (SEP, 2019, p. 6); también, estimar comportamiento de variables, interpretar símbolos matemáticos y experimentar las dimensiones del espacio y las características físicas de los objetos (Martínez y Camarena, 2015, p. 194).

Aquellos profesores de matemáticas que buscan la calidad en su quehacer profesional están en preparación continua, construyen ambientes de enseñanza adecuada, planifican el curso y sus clases diarias, llevan los conocimientos del aula a la vida diaria, buscan conocer y satisfacer las necesidades académicas, y en ocasiones las de índole personal, de los discentes; son ejemplo de disciplina, perseverancia y superación (Martínez et al., 2016, p. 127); articulan contenidos previos y entre materias, cuentan con basto material didáctico y aplican diversas herramientas de evaluación; invitan a la participación y construcción de conocimiento en conjunto, otorgan recompensas y motivan a levantarse de los fracasos académicos (Tello y Tello, 2013, p. 89); promueven el interés por las matemáticas y son capaces de compartir sus experiencias en este campo (Artavia, 2005, p. 3; Covarrubias y Piña, 2004, p. 64); emplean estrategias para que la enseñanza de las matemáticas sea accesible para todos (Carlos, 2016, p. 305), se adaptan a las diferentes características conductuales y cognitivas de los jóvenes, así como de sus entornos socioculturales (Camberos, Lechuga y Salinas, 2014, p. 11), alinean los contenidos con las necesidades de los estudiantes, además de que son promotores de la convivencia (Grupo de trabajo "Investigación sobre el abandono escolar temprano", 2013, p. 13); plantean situaciones que generan conflicto de valores y estimulan la crítica y la creatividad con el objetivo de generar experiencias valiosas (Jaik y Barraza, 2011, p. 228); reflexionan sobre los problemas de la enseñanza de las matemáticas y proponen y aplican medidas de solución (Aké, Martínez y López, 2018, p. 129) y son flexibles en sus dinámicas (Rodríguez, 2011, p. 4).

Los docentes, en particular los de matemáticas, suelen representar un reto académico positivo para los bachilleres, pues despiertan el deseo de esfuerzo y perseverancia. También, son motivo de inspiración para levantarse de los fracasos matemáticos y seguir enfrentando el curso (Silas, 2008, p. 14), invitan a la construcción y aplicación del conocimiento sin miedo al error (Morales, 2017, p. 37), le dan mucha importancia a los logros y lo transmiten en el aula (Hernández y Ceniceros, 2018, p. 174), son paladines emocionales de sus estudiantes (Venet y Díaz, 2018, p. 5), incitan a incrementar tanto la voluntad como el autoaprendizaje y la autoregulación, aportan ideas y experiencias profesionales y personales que preparan a los jóvenes para la vida y sus contextos (Peña, Andrade y Aké, 2018, p. 99; Roux y Anzules, 2015, p. 3), son motor de motivación y desafío intelectual (Barojas y Ramírez, 2015, p. 71), son dedicados para sus discentes y monitorean sus avances y si estos no se dan, se detienen para volver a explicarles (Morales, 2018, p. 80), fomentan hábitos de estudio para que sean implementados en clase, en la casa y más allá del aula

(Sesento y Lucio, 2017, p. 32), despiertan el interés por el estudio (López, García y Díaz, 2018, p. 92), tornan simple lo complejo, propician espacios agradables, apoyan y empatizan con los discentes y anteponen la formación de estos (Vidal y Márquez, 2016, p. 103), invitan a la participación (Cerda, Salazar, Guzmán y Narváez, 2018, p. 265), son accesibles tanto en clase como fuera de ella (Basto, 2017, p. 2), tienen mucha disponibilidad y son claros en las instrucciones académicas que giran (Barragán, Aguilar, Cerpa y Núñez, 2009, p. 4), así como en los consejos que comparten (Covarrubias y Piña, 2004, p. 64).

Cuando el docente revisa su práctica docente se ve en la necesidad de convertirse en un comunicador, tarea que no se consigue a corto plazo, sino en la medida en que este profundice en su conocimiento disciplinar, y oriente su práctica tendiendo a fortalecer este proceso. en el caso del docente investigador, se cumple el propósito de valorar la importancia que tiene el uso de una jerga matemática adecuada para enseñar esta asignatura.

Las reformas educativas de los últimos años exigen que los docentees tengan las competencias docentes necesarias para llevar a cabo con éxito su labor, solicitando competencias relacionadas al conocimiento de la materia a impartir, así como aquellas que le permitan realizar el proceso enseñanza-aprendizaje de forma adecuada.

Un docente de matemáticas, según Ball y Bass (2000), debe realizar cuatro actividades centrales: 1) desglosar ideas y procedimientos matemáticos; 2) escoger representaciones para mostrar ideas matemáticas; 3) analizar métodos y soluciones diferentes de las propias, y 4) deducir lo que entienden sus discentes. Mientras que Barnett y Hodson (2001) afirman que los docentees no sólo deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los discentes, cómo organizar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades de ellos.

Por lo tanto, ¿qué deberíamos entender por conocimiento profesional del docente de matemáticas?. Shulman (1986) hace una gran contribución en el campo de la comprensión de las componentes del conocimiento de un docente, partiendo del hecho de que no basta con que el docente domine el conocimiento de la materia, y propone los siguientes componentes:

- ◊ Conocimiento de la materia
- ◊ Conocimiento pedagógico general- Conocimientos curriculares
- ◊ Conocimiento sobre los discentes
- ◊ Conocimiento de los contextos educativos
- ◊ Conocimiento de los fines y valores educativos -Conocimiento didáctico del contenido

Ball y colaboradores (2008) presentan una concreción del modelo de Shulman, el cual se enfoca en dos componentes: el dominio del conocimiento de la materia y el dominio del conocimiento didáctico del contenido. Como producto del modelo de Ball y colaboradores (2008), Carrillo y colaboradores (2013) presentan el modelo que denominan El conocimiento especializado del docente de matemáticas, Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK, por sus siglas en inglés).

El modelo de MTSK se divide en dos dominios: de un lado se muestra el conocimiento matemático del docente (Mathematical Knowledge, MK) y del otro, el conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Knowledge of Content, PCK), en el centro del modelo se encuentran las concepciones y creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Dentro de los subdominios del MK encontramos el conocimiento de los temas (Knowledge of Themes, KoT) que se refiere a aquellos aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, etcétera, que caracterizan aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que se encuentra en manuales y textos matemáticos.

Dentro del PCK consideramos los subdominios siguientes: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (Knowledge of the Teaching of Mathematics, KMT), referente a conocer distintas estrategias que permitan al docente fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, y la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación para hacer comprensible un contenido determinado.

El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of the Features of Learning of the Mathematics, KFLM) toma en cuenta las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, el lenguaje asociado a cada concepto, así como los errores, dificultades u obstáculos posibles.

El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS) es aquel conocimiento acerca de lo que el discente debe o puede alcanzar en un curso escolar determinado; de las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Considerando, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de docentees expertos acerca de logros de aprendizaje.

A pesar de que los docentes tienen ya cierta experiencia dando los cursos de matemáticas y trabajan durante casi seis meses con los discentes donde presentaron el rediseño de su actividad, ninguna de las actividades llegó a su conclusión de forma exitosa (es decir, llegar al objetivo planteado), debido a distintas situaciones (nivel de partida, conocimiento de los participantes, mal planeación de los tiempos, etc.), ya que los docentees no las tenían planificadas; lo cual tiene que ver en todos sus aspectos, con el conocimiento didáctico del contenido.

Los procesos de formación de profesores en muchas ocasiones insisten en dar cursos teóricos por igual, con nuevos conte- nidos, pero poco se trabaja en reorganizar la práctica educativa frente a grupo y fuera de él. Abordar el enfoque de las competencias demanda mucho trabajo en las escuelas, un trabajo paciente, de mediano plazo, en el cual los profesores aprendan a ir reorientando la práctica tradicional, el estudio de nuevos materiales, sí, pero con el propósito de construir ejemplos significativos para los estudiantes que les aporten, además de información relevante, experiencias de solución de problemas, aprendizajes de vida o proyectos realizables dentro de un campo determinado.

Para el docente, los discentes sólo necesitan saber hacer, quedando de un lado los conceptos empleados, es decir, dan pauta a cuestionar si tienen dificultades con el conocimiento de la estructura matemática.

3.4 Directrices institucionales

3.4.1 Currículo escolar

El Marco Curricular Común (MCC) es uno de los pilares de la Reforma Educativa de la Educación Media Superior (RIEMS), cuya base es el perfil del egresado, esto es; los conocimientos, habilidades y actitudes que todos los discentes de Educación Media Superior deben tener sin importar el subsistema al cual pertenezcan. Este perfil está compuesto por las competencias genéricas y sus principales atributos, además de las competencias disciplinares básicas y exten- didas, y las profesionales.

En esencia, está basado en el modelo de competencias profesionales, las cuales se entienden como la “capacitación real para resolver determinados problemas”, contando además de los conocimientos, destrezas y aptitudes, o la flexibilidad y autonomía, con las competencias “humanas, las socioemocio- nales y sociopolíticas”, que “amplían el radio de acción a la participación en el entorno profesional, así como a la organización del trabajo y a las actividades de planificación”. (Bunk, 1994).

A pesar de la entrada en vigor de la Ley General del Servicio Profesional Docente y del Modelo Educativo impulsado por el gobierno del Presidente Enrique Peña Nieto, las transformaciones curriculares en la educación obligatoria, de nuestro país, se encuentran en espera de su instrumentación. Como consecuencia, se siguen aplicando los planes de estudio diseñados en el sexenio pasado. Tal es el caso de la Educación Media Superior, que se encuentra aplicando el Marco Curricular Común, derivado de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS).

De acuerdo con la Secretaria de Educación Pública (s.f) la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) nació con el espíritu de forjar un sistema educativo que permitiera a los egresados, de este nivel educativo, contar con todas las herramientas necesarias para su desarrollo, de manera exitosa y competente, pero también que pudieran insertarse a la sociedad globalizante y a una demanda laboral con una creciente necesidad de trabajar bajo el esquema de competencias. Por lo tanto, la RIEMS perfila al Sistema Nacional de Bachillerato para que dé cabida a un Marco Curricular Común (MCC), a la definición y reconocimiento de las porciones de la oferta de la Educación Media Superior, a la profesionalización de los servicios educativos y a la Certificación Nacional Complementaria

El MCC es parte fundamental para la RIEMS la cual le da sustento al Sistema Nacional del Bachillerato, que de acuerdo con la SEP (s.f) surge del conocimiento de la diversidad de opciones del bachillerato que responden a distintos intereses y necesidades. El MCC no pretende homologar los programas de estudio sino que busca desarrollar, a través de las diferentes modalidades del bachillerato las competencias que definan un perfil común del egresado mediante herramientas comunes aunque estudien cosas distintas.

Específicamente, el desarrollo de las competencias genéricas permitirá construir el perfil del egresado Los principales elementos del Marco Curricular Común son las competencias. Las competencias genéricas articulan y dan identidad a la EMS y constituyen el perfil del egresado del SNB. Son las que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar; les permiten comprender el mundo e influir en él; les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean (SEP, 2016, p.23)

A pesar de la entrada en vigor de la Ley General del Servicio Profesional Docente y del Modelo Educativo impulsado por el gobierno del Presidente Enrique Peña Nieto, las transformaciones curriculares en la educación obligatoria, de nuestro país, se encuentran en espera de su instrumentación. Como consecuencia, se siguen aplicando los planes de estudio diseñados en el sexenio pasado. Tal es el caso de la Educación Media Superior, que se encuentra aplicando el Marco Curricular Común, derivado de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS).

Por lo tanto, para que la reforma, impulsada por la RIEMS garantizara el éxito que se plantea de forma teórica, ha sido muy importante que los docentes, como actores nodales del proceso educativo, respondan a una serie de competencias docentes definidas en la propia RIEMS, como perfil del docente ideal para lograr los productos esperados en los planes de estudio por competencias. Sin embargo, esta situación no siempre se ha logrado, a pesar del diplomado ofrecido para fortalecer la formación de los docentes en la orientación de un trabajo por competencias y sus estrategias de instrumentación en el salón de clases.

3.4.1.1 Marco reglamentario con respecto a los aprendizajes significativos de Matemáticas

La medición de los conocimientos y habilidades matemáticas en los jóvenes de EMS ha sido una preocupación desde hace años en todo el mundo. Las pruebas estandarizadas reproducen lo comprendido en los contenidos escolares y revisan si los estudiantes son capaces de aplicar lo aprendido en diversas circunstancias de la vida como individuo comprometido y reflexivo (Martínez et al., 2017, p. 7). Las evaluaciones matemáticas, las cuales son las de mayor reprobación (Vidales, 2009, p. 329), tienen por objeto identificar el pensamiento matemático, las destrezas para solucionar problemas, las actitudes hacia los números, los valores adquiridos (Flores y Gómez, 2009, p. 123) y los desafíos que se tengan para aprender, que no necesariamente tienen que ver con factores cognitivos o pedagógicos. En la aplicación de evaluaciones de esta asignatura, se recomienda la participación de estudiantes, docentes, padres de familia y personal administrativo (Dolores y García, 2016, p. 34).

El rendimiento académico es la consecuencia de lo aprendido según la valoración realizada por el profesor mediante exámenes, tareas, trabajos grupales y otras actividades como la asistencia a clases (Chilca, 2017, p. 18; Saucedo, Herrera, Díaz, Bautista y Salinas, 2014, p. 88); se refiere a la certificación de las competencias de aquellos discentes que concluyeron satisfactoriamente sus estudios; es el proceso de adquirir conocimientos, habilidades, actitudes y valores para adaptarse e interactuar con el entorno (Becerra y Reidl, 2015, p. 81); ubica la eficacia, la autorregulación académica del estudiante y el trabajo del docente y se expresa mediante el promedio o las calificaciones (Roux y Anzures, 2015, p. 4); mide lo aprendido y las destrezas con los que se debe contar al llegar a la adultez (SEP, 26 de septiembre de 2018, p. 10); incluye la cuantificación de sus aspiraciones e intereses (Saucedo et al., 2014, p. 6). En lo que respecta a la unidad de aprendizaje matemáticas, el rendimiento se refiere a la capacidad del discente de solventar problemas de la vida real aplicando el conocimiento matemático; el estudiante desarrolla habilidades como elaborar problemas numéricos, aplicar proporcionalidades, el uso del lenguaje algebraico, obtener productos de expresiones, el cálculo del perímetro y áreas de figuras, entre otros (SEP, 2019, p. 2). El rendimiento académico es el indicador más empleado para identificar el conocimiento de los bachilleres, así como sus esfuerzos y capacidades en esta disciplina (Gaxiola et al., 2011, p. 53).

Los discentes con suficiente rendimiento académico en matemáticas han desarrollado hábitos de estudio (Sesento y Lucio, 2017, p. 32), sus propias estrategias de aprendizaje, actitudes positivas hacia el conocimiento (Padilla y Villafuerte, 2018, p. 18), mayores aspiraciones, su personalidad (Martínez-Otero, 2009, p. 17), su madurez, responsabilidad para enfrentar los problemas personales (Dzay y Narváez, 2012, p. 29), su motivación (Sánchez, Téllez, Sánchez y Reyes, 2017, p. 3), ambiciones (Ortega, Macías y Hernández, 2014, p. 35), la capacidad para hacer frente a los retos de la vida, su grado de adaptabilidad (Corzo, 2016, p. 10), su afectividad y perseverancia (Ricoy y Couto, 2018, p. 74).

Instrumentos como el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) ubican las competencias de los estudiantes para aplicar en la vida práctica lo aprendido en esta disciplina (Barojas y Ramírez, 2015, p. 72). También, sitúan características socioemocionales como persistencia, manejo de estrés, empatía y toma de decisiones (Hernández y Backhoff, 2017, p. 25). Determina el estado del alumnado de EMS en el uso e interpretación numéricos, pensamiento algebraico y manejo de espacios, formas, medidas e información. Las calificaciones obtenidas se pueden posicionar en cuatro niveles: en el primero, los estudiantes tienen retos para efectuar operaciones con fracciones o variables; en el segundo, realizan cálculos con porcentajes; en el tercero, la aplicación del lenguaje de las matemáticas les permite hacer problemas con incógnitas; y en el cuarto, los discentes solucionan problemas de contenidos matemáticos vistos hasta el último grado del bachillerato. En México, 66.2 % de los estudiantes no logra superar el nivel I y 23.3 % llega hasta el nivel II (INEE, 2017, p. 6).

Dentro de los desafíos que tiene la evaluación de las matemáticas se encuentran el cambio de la cultura del aprendizaje, enseñar no solo para las evaluaciones sino para resolver conflictos personales y profesionales, múltiples objetivos fijados en el aprendizaje que han desviado la focalización de propósitos principales de la preparación para la vida, las formas de calificar que no están alineadas a principios pedagógicos y las aplicaciones de exámenes individuales cuando en la práctica se cuenta con posibilidades de trabajar en equipo y emplear las tecnologías de la información (Santiago, McGregor, Nusche, Ravelo y Toledo, 2012, p. 133). Además, la valoración del discente debe arrojar datos que permitan normalizar el nivel real de conocimientos y así diseñar ambientes adecuados según los niveles y edades, motivar la creatividad, asociar el impacto que el aprendizaje tiene en las capacidades intelectuales y. socioemocionales de los muchachos, erradicar el temor al fracaso, vincular el aprendizaje con las necesidades comunitarias y favorecer el autoaprendizaje.

3.4.1.2 Planes de estudio nacionales para la educación media superior y superior

Cada variante de la educación media superior es un universo, y es polisémica. Es en estas variantes y polisemia donde la revisión de los fines de la educación media superior, con sus diversas modalidades y nombres (OCDE, 2012, p. 23), tiene sentido y pertinencia contemporánea.

Si algo nos revela la crisis mundial educativa es la necesidad de repensar y buscar una educación más humana que reduzca la desigualdad socioeconómica. La visión prospectiva de la que se habla más arriba tiene como base dos prácticas sencillas: la generosidad y el autoexamen. Esto significa que visualizar y trabajar para el futuro requieren la práctica generosa de construir en el presente para las próximas generaciones, sobre todo, mediante el ejercicio crítico del presente (Martínez Ruiz y Rosado Moreno, 2013).

Atender la expectativa laboral de un joven al egreso, mediante un sistema que vincule los contenidos curriculares con las habilidades necesarias y especializadas de un primer empleo, es corresponsabilidad del sistema educativo y de los tres grandes actores: el Estado, la empresa y la sociedad. Los empleadores, las instituciones que proveen educación y los jóvenes son universos paralelos; cada uno entiende, de manera distinta, una misma situación (Mourshed, Farrell y Barton, 2013, p. 18).

La Educación Media Superior (EMS) es un espacio para formar personas con conocimientos y habilidades que les permitan desarrollarse en sus estudios superiores o en el trabajo y, de forma más amplia, en la vida. Asimismo, los jóvenes adquieren actitudes y valores que tienen un impacto positivo en su comunidad y en la sociedad.

En un contexto de expansión de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) es importante conocer las cifras referentes a su uso en la EMS, porque nos permitirán inferir qué tanto las usan los discentes y el desarrollo de las competencias digitales, indispensables ahora no sólo en los ámbitos educativos, sino también en los mercados laborales. ¿La dotación y distribu ción de computadoras e Internet es suficiente y equitativa en el ambiente escolar para todos los discentes de EMS? Para medirlas, el INEE aporta dos indicadores: la disponibilidad para uso educativo y la conexión a Internet de las escuelas de EMS, por entidad federativa, modelo educativo y tipo de sostenimiento.

El INEE muestra que en el ciclo escolar 2007-2008, por cada nueve discentes de EMS había una computadora para uso educativo en las escuelas. “Esta proporción -dice- disminuye considerablmente en planteles privados, donde seis estudiantes comparten una computadora, lo cual hace suponer que en relación con el acceso a las TIC estos discentes se encuentran en condiciones materiales más favorables que sus pares de las escuelas públicas” (INEE, 2009, p. 128). Podemos concluir que la dotación y distribución de computadoras e Internet es insuficiente y desigual entre los tipos de escuela, las regiones y los discentes de eMs. Es una desigualdad que está estrechamente relacionada con la adquisición de competecias indispensables para hacer frente al mundo actual, por lo que su ausencia impactará de manera negativa el desarrollo futuro, principalmente en los ámbitos laboral y profesional.

Las opciones de EMS en México responden a diversos orígenes y contextos. Aunque con objetivos concurrentes, la EMS se caracteriza por su diversidad. Según la Clasificación Internacional Normalizada de la Educación (ISCED, por sus siglas en inglés), la Educación Media Superior tiene como objetivos consolidar la educación secundaria como preparación a la educación terciaria y/o proporcionar destrezas adecuadas para ingresar al mundo laboral. En ese sentido, la EMS se caracteriza por realizar un tipo de instrucción más diversificada y especializada y por un espectro más amplio de opciones dentro los propios contenidos.

En 2007-2008 iniciaron los trabajos de la denominada Reforma Integral a la Educación Media Superior (RieMs). Este proyecto tuvo como objetivo la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato (snB) sustentado en cuatro ejes. El primero fue la creación de un marco curricular común, a partir de incorporar las competencias genéricas, disciplinarias y profesionales como fundamento del perfil de egreso de los estudiantes en este nivel y la inclusión de competencias disciplinarias y profesionales extendidas para quienes cursan bachilleratos bivalentes. El segundo eje fue “la definición y reconocimiento a las porciones de la oferta en educación media superior”, lo cual significa la identificación precisa de los tipos de bachillerato que ofrece el sistema (escolarizado, no escolarizado y mixto) y el nivel de profundidad que brindan en el desarrollo de las competencias ya mencionadas. El tercero fue la profesionalización de los servicios educativos, la cual tuvo diversas estrategias; entre las más importantes está la formación del personal docente. El cuarto eje fue la certificación nacional de competencias, que implicaría el reconocimiento de los discentes que posean las competencias establecidas en el Marco Curricular Común (MCC) por parte del Sistema Nacional de Bachillerato (SEP, SEMS, 2009).

Por su parte, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) enfatiza que el nivel medio superior tiene una relevancia creciente en un entorno de condiciones sociales y económicas cambiantes, en particular porque se trata del último nivel de educación formal en un importante número de países. De esa forma, la EMS precisa asegurar que la formación que reciban los jóvenes les otorgue habilidades mínimas necesarias para el empleo y la capacitación, así como para el acceso a niveles educativos superiores.
Lo anterior, resalta la propia OCDE, supone desafíos de grandes dimensiones, ya que los discentes de EMS requieren ser vistos desde su heterogeneidad, tanto en términos de aspiraciones como de sus conocimientos y habilidades previamente adquiridas.

No se puede construir un modelo educativo centrado en el aprendizaje -que busque el desarrollo de competencias genérica- sin que se transformen las estructuras de gobierno y de gestión académica prevalecientes dentro de nuestras organizaciones educativas. Aaunado a esto, el currículo con asignaturas vinculadas a las competencias genéricas no es el mejor camino para que los estudiantes las desarrollen, puesto que la acumulación de asignaturas propicia que se siga poniendo el acento en la transmisión de información y en los saberes deseados, sin considerar cabalmente el desarrollo de las competencias mismas.

El 20 de septiembre de 2011 el Senado de la República haya aprobado que la obligatoriedad de la educación media superior se eleve a rango constitucional, lo cual se implementará gradualmente a partir del ciclo 2012-2013, hasta universalizarla en todo el país para el ciclo 2020-2021. La Educación

Media Superior se fundamenta en el artículo 3° de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos en el que se establece que la educación es un derecho de los mexicanos que debe tender al desarrollo armónico de los seres humanos; es obligación de los mexicanos hacer que sus hijas, hijos o pupilos menores de edad cursen la educación preescolar, la primaria, la secundaria y la media superior.

3.4.2 Modelos educativos

A pesar de la entrada en vigor de la Ley General del Servicio Profesional Docente y del Modelo Educativo impulsado por el gobierno del Presidente Enrique Peña Nieto, las transformaciones curriculares en la educación obligatoria, de nuestro país, se encuentran en espera de su instrumentación. Como consecuencia, se siguen aplicando los planes de estudio diseñados en el sexenio pasado. Tal es el caso de la Educación Media Superior, que se encuentra aplicando el Marco Curricular Común, derivado de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS).

3.4.2.1 Enfoque por competencias

El modelo educativo establecido en la Educación Media Superior de México considera los desempeños terminarles de los discentes, sin importar el subsistema al cual pertenezcan, a partir del desarrollo de un conjunto de competencias. En este sentido el MCC permite articular los programas de distintas opciones de la EMS en el país (Figura 4); además, comprende una serie de desempeños terminales expresados como:

(I) competencias genéricas,

(II) competencias disciplinares básicas y extendidas (de carácter propedéutico) y

(III) competencias profesionales básicas y extendidas (para el trabajo).

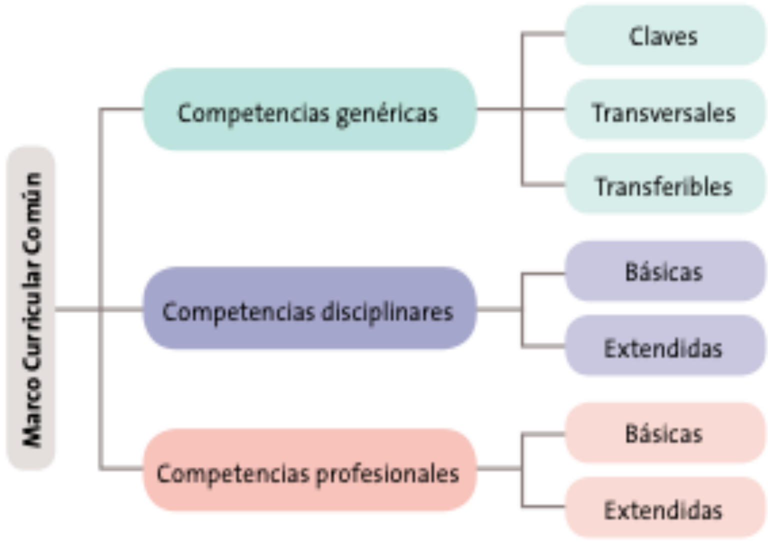


Figura 4. Esquema de las competencias en el Marco Curricular Común de educación Media Superior.

Fuente: Planes de estudio de referencia del componente básico del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior, SEP, 2017.

Todas las modalidades y subsistemas de la EMS comparten el MCC para la organización de sus planes y programas de estudio; específicamente, las dos primeras competencias son comunes a toda la oferta académica. Por su parte, las competencias profesionales básicas y extendidas se definen según los objetivos específicos y necesidades de cada subsistema e institución.

De esa manera se define el concepto general de competencia, competencias genéricas, disciplinares básicas y extendidas; y profesionales básicas y extendidas:

Competencia: es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico. Esta estructura reordena y enriquece los planes y programas de estudio existentes y se adapta a sus objetivos; no busca reempla zarlos, sino complementarlos y especificarlos. Define estándares compartidos que hacen más flexible y pertinente el currículo de la EMS.

En este sentido podemos entender a las competencias como el logro de *capacidades de aprendizaje que permiten a los discentes adquirir de manera paulatina niveles cada vez más altos de desempeño*, las cuales incluyen habilidades humanas, morales, habilidades de pensamiento y resolución de problemas prácticos, teóricos, científicos y filosóficos. De esta manera, se considera que lo más importante es desarrollar en el discente el uso y la aplicación que tiene el conocimiento que se imparte en las aulas.

Competencias genéricas : entendidas como aquellas que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar, las que les permiten comprender el mundo e influir en él, les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean y participar eficazmente en su vida social, profesional y política a lo largo de la vida.

A cada uno de estos campos disciplinares le corresponde un grupo de asignaturas, como se expresa a continuación:

Matemáticas: ***Álgebra, aritmética, cálculo, trigonometría y estadística***

Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los discentes. Un discente que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos.

Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los discentes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases.

En diversos documentos se ha reiterado que las competencias genéricas deben buscar desarrollarse de manera transversal dentro del currículo, esto es, mediante estrategias de aprendizaje incorporadas a la enseñanza de las denominadas asignaturas disciplinarias y de formación profesional. La adquisición de las competencias implicaría ir más allá de la sola transmisión de contenidos teóricos, y buscaría, por medio de diversas estrategias y entornos de aprendizaje, favorecer las actitudes y el desarrollo de las habilidades establecidas en el perfil de egreso del nivel medio superior.

La formación integral sería el eje de los servicios brindados en el sistema educativo, por lo que las actividades culturales, de cuidado de la salud y de activación física, el servicio social y las prácticas escolares y/o profesionales estarían integradas al currículo. Las tutorías académicas y escolares serían parte de los procesos de atención de los discentes con el objetivo de apoyarlos en la construcción de su trayectoria formativa, de superar rezagos y orientarlos en caso de problemas extraacadémicos.

Al analizar algunos planes de estudio, tanto de bachilleratos tecnológicos o bivalentes (IPN, Conalep) como del bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y de los Colegios de Ciencias y Humanidades (CCH), no parece claro que en los bachilleratos tecnológicos los lineamientos y propósitos explícitos de formación integral de los estudiantes se estén cumpliendo satisfactoriamente. En el caso del IPN, los estudiantes deben cursar de nueve a diez asignaturas por semestre, con un total de 33 a 39 horas por semana; en la UNAM y los CCH, los estudiantes deben cubrir de 102 a 120 créditos por año, mediante 12 o 13 asignaturas, con un promedio de entre 24 y 30 horas por semana (UNAM, 2013; CCH, 2013; IPN, 2013; Conalep, 2013).

Así, a los problemas de rezago que arrastran los estudiantes desde el nivel básico se suman los que derivan de la sobresaturación del currículo y la no integración de las actividades vinculadas a la formación de competencias genéricas de manera transversal. El hecho de que los estudiantes de los bachilleratos tecnológicos y técnicos sean los que más altos porcentajes de reprobación y deserción presenten no es ajeno a dicha situación.

En lugar de incorporar transversalmente algunas competencias como “Afronta los deberes y dilemas éticos de la profesión”, “Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado” y “Comunica con claridad sus pensamientos, escucha con respeto y reflexiona sobre lo que otros opinan”, por poner algunos ejemplos de las competencias genéricas buscadas en el nivel medio superior, se siguen manteniendo o agregando asignaturas al currículo, sin generar esfuerzos de integración de las mismas de manera transversal dentro de las asignaturas disciplinarias o profesionales.

3.4.2.2 Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

Tarazona (2005) relata los inicios del ABP: se manifestó en 1950 y se aplicó en los primeros años de enseñanza en el Case Western Reserve University School of Medicine; su primera aplicación general en un programa de formación médica se realizó en la Universidad de McMaster de Canadá, en 1969.

Posteriormente, se ha implementado en universidades de Estados Unidos de América, tales como Nuevo México, Michigan, Tufts y Harvard. Los fundamentos teóricos que sustentan la efectividad del ABP son múltiples; algunos de los más importantes son los siguientes: el concepto de aprendizaje dentro de un contexto, que parte de la premisa de que cuando se aprende dentro de un contexto en el cual posteriormente se va a utilizar el conocimiento se facilitan el aprendizaje y la habilidad para usar la información; en el ABP el conocimiento se adquiere en un proceso que se inicia con la activación del conocimiento previo y termina con la construcción del conocimiento propio, mediante un proceso de incorporación del entendimiento y la elaboración del conocimiento.

Echeverry (2004), en su estudio, se pregunta: ¿qué se considera un problema? Y lo define como: comprender un fenómeno complejo es un problema. Resolver una incógnita, una situación, para las cuales no se conocen caminos directos e inmediatos es un problema. Encontrar una forma mejor de hacer algo es un problema. Hacerse una pregunta o plantearse un propósito sobre posibles relaciones entre variables es un problema (p. 2).

El camino que toma el proceso de aprendizaje convencional se invierte en el ABP: en la enseñanza tradicional primero se expone la información y, posteriormente, se busca aplicarla en la resolución de un problema; en el caso del ABP, primero se presenta el problema, se identifican las necesidades de aprendizaje, se busca la información necesaria y, finalmente, se regresa al problema; en el recorrido que viven los estudiantes, desde el planteamiento original del problema hasta su solución, trabajan de manera colaborativa en pequeños grupos; los problemas deben estar diseñados para motivar la búsqueda independiente de la información por todos los medios disponibles para el estudiante y, además, generar discusión en el grupo, para compartir en esa experiencia de aprendizaje la posibilidad de practicar y desarrollar habilidades.

En la solución de problemas suelen utilizarse diferentes tipos de problemas de acuerdo con su grado de estructuración. Los problemas intencionalmente mal estructurados, abiertos o no muy claros en cuanto a la solución precisa que se pide suelen denominarse brunerianos; para resolverlos la capacidad de descubrimiento del estudiante se exige al máximo. Los problemas estructurados en los cuales se señala lo que el estudiante debe hacer para resolverlos adecuadamente suelen llamarse problemas no brunerianos, porque la búsqueda es guiada y el descubrimiento es menos intenso.

Kolmos (2004) dice que la educación tradicional, desde los primeros años de estudio hasta el nivel de posgrado, ha formado a estudiantes que comúnmente tienen poca motivación y se sienten incluso aburridos con su manera de aprender: se los obliga a memorizar una gran cantidad de información, la cual en su mayoría se vuelve irrelevante en el mundo exterior a la escuela, o bien en muy poco tiempo se presenta en los discentes el olvido de mucho de lo que aprendieron, y gran parte de lo que logran recordar no puede ser aplicado a los pro- blemas y tareas que se les presentan en el momento de afrontar la realidad.

Las características y objetivos principales del ABP son:

- El método se orienta hacia la solución de problemas seleccionados o diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos objetivos de conocimiento; pretende fomentar el razonamiento crítico, en particular las habilidades para resolver problemas e investigar.
- El aprendizaje se centra en el estudiante y no en el profesor ni solo en los contenidos, el maestro se convierte en un facilitador o tutor del aprendizaje, y busca transferir conocimientos y habilidades a la solución de nuevos problemas.
- Los cursos con este modelo de trabajo se abren a diferentes disciplinas del conocimiento.

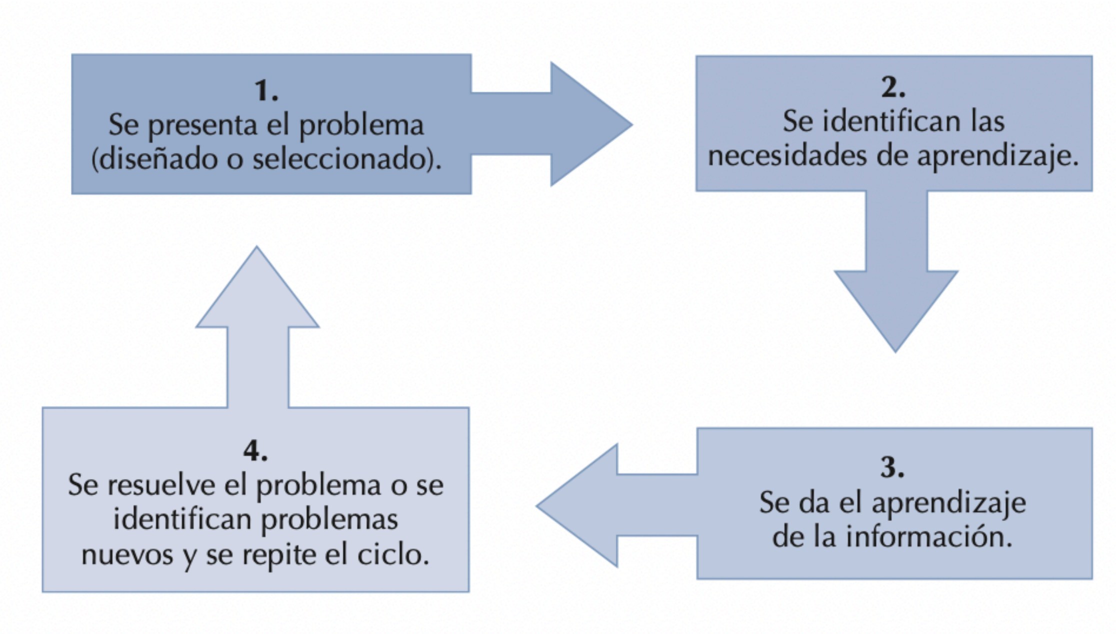


Figura 5. Pasos del proceso de aprendizaje en el ABP.

Por otra parte, Restrepo (2005) caracteriza los atributos necesarios que debe tener un tutor que siga los lineamientos del ABP:

- Trabajar con metas y métodos del programa y, a su vez, saber manejar la interacción de grupos.

- Servir como coordinador de autoevaluación y de otros métodos para evaluar la solución de problemas y el desarrollo de habilidades del pensamiento.
- Motivar, reforzar, estructurar, facilitar pistas o sintetizar información.

CAPÍTULO IV

Teorías que coadyuvan al aprendizaje del lenguaje algebraico

4.1 Construcción del Aprendizaje Significativo Ausbeliano: Fundamentación Teórica

Mucho se habla del aprendizaje significativo, sobre todo en el ámbito escolar, dado que los objetivos y metas que se plantean en los modelos educativos recurren a este concepto, pero ¿cuál es su verdadera definición? Y, ¿porqué día a día se procura que el discente obtenga esto en cada uno de las asignaturas al finalizar un curso? Dentro del siguiente capítulo abordaremos aquellos elementos prudentes que nos permitan definir este tipo de aprendizaje y dar respuesta a nuestro segundo cuestionamiento. Para comenzar con este capítulo es importante comenzar con la siguiente concepción general: el aprendizaje significativo comprende la adquisición de nuevos significados y, a la inversa. El surgimiento de nuevos significados refleja en el discente, la consumación de una proceso de aprendizaje significativo. Y aunque pareciera reduntante dicha concepción, definiremos algunas diferencias entre significado y aprendizaje significativo, y de cómo estos dos conceptos estan estrechamente correlacionados.

4.1.1 Fundamentos teoricos del aprendizaje significativo

En 1963, Ausubel hizo su primer intento de explicación de una teoría cognitiva del aprendizaje verbal significativo publicando la monografía “The Psychology of Meaningful Verbal Learning”; en el mismo año se celebró en Illinois el Congreso Phi, Delta, Kappa, en el que intervino con la ponencia “Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento”.

Cuarenta años de vigencia tiene esta teoría, lo que justifica su fuerza explicativa. Mucho tiempo, sin duda, en el que los profesionales de la educación nos hemos familiarizado sobre todo con la idea de significatividad del aprendizaje y hemos intentado lograrlo en nuestro alumnado, no siempre con el éxito deseado. Supuestamente al amparo de la Teoría del Aprendizaje Significativo se han planificado muchas programaciones escolares y programas curriculares y en el fondo no sabemos muy bien cuáles son sus aspectos más destacados, aquéllos que hubiesen podido ayudarnos a comprender los entresijos que definen al aprendizaje significativo y que lo hacen posible. Por eso se hace necesario adentrarnos en la teoría en sí y profundizar en la misma, de manera que la aprendamos significativamente para, con ello, lograr que los aprendizajes que pretendemos de nuestros discentes (relativos a los contenidos científica y contextualmente validados) sean realmente significativos.

En primera instancia, hablaremos sobre la caracterización de la teoría como tal. En un segundo apartado se tratan los conceptos definitorios de la misma, fundamentalmente, el constructo "aprendizaje significativo", que se analiza primero desde una perspectiva ausubeliana y, después con las aportaciones que lo han enriquecido, aumentando así su comprensión y su aplicabilidad. Con objeto de aclarar y especificar su potencialidad en el aula, se termina este apartado con una revisión de algunos usos poco acertados de dicho constructo. Se analizan también algunas consecuencias derivadas de esta teoría y, por último, se lleva a cabo una revisión del aprendizaje significativo desde la perspectiva de la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird y la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud.

Podemos considerar a la teoría que nos ocupa como una teoría psicológica del aprendizaje en el aula. Ausubel (1973, 1976, 2002) ha construido un marco teórico que pretende dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la adquisición y la retención de los grandes cuerpos de significado que se manejan en la escuela.

Es una teoría psicológica porque se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los discentes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación (Ausubel, 1976). Es una teoría de aprendizaje porque ésa es su finalidad. La Teoría del Aprendizaje Significativo aborda todos y cada uno de los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo que adquiera significado para el mismo.

Pozo (1989) considera la Teoría del Aprendizaje Significativo como una teoría cognitiva de reestructuración; para él, se trata de una teoría psicológica que se construye desde un enfoque organicista del individuo y que se centra en el aprendizaje generado en un contexto escolar. Se trata de una teoría constructivista, ya que es el propio individuo-organismo el que genera y construye su aprendizaje.

Lo que define a la teoría ausubeliana es el "aprendizaje significativo", una etiqueta que está muy presente en el diálogo de docentes, diseñadores del currículum e investigadores en educación y que, sin embargo, son muchos también los que desconocen su origen y su justificación. Precisamente por eso, conviene que se haga una revisión sobre su significado y sobre la evolución que ha seguido. El objeto de este apartado es analizar el sentido y la potencialidad del constructo como tal. Para ello se abordará una primera parte relativa al aprendizaje significativo en sí, analizada bajo dos puntos de vista: la posición de Ausubel, por un lado, y, por otro, las aportaciones y reformulaciones realizadas a lo largo de este tiempo. Esto permitirá que pasemos revista, en la segunda parte, a algunos malos entendidos y confusiones con respecto al sentido que se le atribuye a aprendizaje significativo o a su aplicación.

De este modo, se obtendrá una visión de conjunto que delimite algunas conclusiones significativas al respecto y posibilite una mejor comprensión y aplicación del constructo en el aula.

4.1.2 Importancia del aprendizaje significativo en la adquisición del conocimiento

La dificultad principal con la teoría de la mediación estriba en su incapacidad para explicar los aspectos denotativos del significado; por ejemplo, la palabra "perro" produce una experiencia cognoscitiva, perfectamente definida y diferenciada (significado), que incorpora los atributos distintivos o de criterio de los perros que sirvan para distinguirlos de los gatos, los seres humanos, y otros organismos. Cuando mucho, un proceso de mediación de representaciones, que refleje los aspectos más condicionables de la conducta total instigada por los perros, podrá identificarse con las connotaciones actitudinal y afectiva de la palabra “perro”. Pero no define su significado denotativo; pues el mismo signo puede instigar respuestas implícitas (motoras y afectivas) muy diferentes con el mismo significado denotativo, y las mismas respuestas implícitas pueden ser producidas por signos con significados denotativos muy diferentes.

Lo mismo sucede cuando en el lenguaje algebraico al discente se la dicen palabras como aumentar, disminuir, el producto, el cuadruple, o bien, la quinta parte de. Es por ello que el discente, cuando se enfrenta directamente con el álgebra y se le plantea problemas cuya solución sea a través del planteamiento de expresiones algebraicas, no logra definir dicha ecuación, y por ende la solución del problema, sin embargo, como estamos describiendo, el signficado denotativo que el discente tiene de una palabra como suma, resta, multiplicación y división es muy limitada.

Los teóricos cognoscitivos conceden, por supuesto, que los aspectos connotativos del significado puedan conceptualizarse plausiblemente como una respuesta implícita y fraccionaria, en gran parte de naturaleza afectiva. De hecho, C. K. Staats y A. W. Staats (1957) fueron capaces, por procedimientos de condicionamiento simple, de conferir a sílabas sin sentido significados connotativos de palabras ya significativas; sin embargo, de ninguna manera el aspecto más decisivo y distintivo de la adquisición de significados es de naturaleza denotativa, y este aspecto del fenómeno del significado apenas si podría explicarse invocando el mismo mecanismo que aclara los atributos connotativos de las palabras.

La teoría de la mediación del significado, de Osgood, ha sido ampliada recientemente por O. H. Mowrer (1960) y A. W. Staats (1961) para incluir “respuestas sensoriales condicionadas”. La palabra “manzana” según Mowrer, “no solamente transporta la implicación de algo que gusta o disgusta, sino también la de un objeto con ciertas cualidades puramente sensoriales” (Mowrer, 1960). Del lado positivo, esta concepción de la mediación modificada se aproxima a la postura cognoscitiva por cuanto sostiene que las palabras (estímulos condicionados) representan objetos en virtud de que producen parte del mismo contenido cognoscitivo (imágenes o respuestas sensoriales condicionadas), de esos objetos. Identificado así el portador del significado con el contenido consciente sustantivo (las imágenes), y no con la conducta implícita, se establece una base adecuada para los aspectos diferenciados del significado denotativo; sin embargo, quedan todavía por resolverse importantes problemas teóricos. En primer lugar, se debilita la concepción del contenido cognoscitivo producido por un signo o un significado como respuesta sensorial.

4.1.2.1 Diferencias entre significado y aprendizaje significativo (AS)

Es de nuestra índole definir de qué manera las palabras, conceptos y proposiciones adquieren significado en la sintaxis de nuestra lengua materna, al leer y también al comunicarnos en otros lenguajes, en nuestro caso particular, en el lenguaje matemático-algebraico. El aprendizaje significativo es muy importante en el proceso educativo porque es el mecanismo humano por excelencia para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representadas por cualquier campo del conocimiento. La adquisición y retención de grandes cuerpos de la materia de estudio son realmente fenómenos muy impresionantes si se considera que: a) los seres humanos, a diferencia de las computadoras, pueden aprender y recordar inmediatamente sólo unos cuantos ítems discretos de información que se les presenten de una sola vez, y b) el recuerdo de listas aprendidas mecánicamente, que se presenten muchas veces, está limitada notoriamente por el tiempo y por el mismo tamaño de la lista, a menos que se “sobreaprenda” y se reproduzca frecuentemente.

La enorme eficacia del aprendizaje significativo como medio de procesamiento de información y mecanismo de almacenamiento de la misma puede atribuirse en gran parte a sus dos características distintas: la intencionalidad y la sustancialidad de la relacionabilidad de la tarea de aprendizaje con la estructura cognoscitiva. En primer lugar, al relacionar intencionalmente el material potencialmente significativo a las ideas establecidas y pertinentes de su estructura cognoscitiva, el discente es capaz de explotar con plena eficacia los conocimientos que posea a manera de matriz ideática y organizadora para incorporar, entender y fijar grandes volúmenes de ideas nuevas. Es la misma intencionalidad de este proceso lo que lo capacita para emplear su conocimiento previo como auténtica piedra de toque para internalizar y hacer inteligibles grandes cantidades de nuevos significados de palabras, conceptos y proposiciones, con relativamente pocos esfuerzos y repeticiones.

Por este factor de intencionalidad, el significado potencial de ideas nuevas en conjunto puede relacionarse con los significados establecidos (conceptos, hechos y principios) también en conjunto para producir nuevos significados. En otras palabras, la única manera en que es posible emplear las ideas previamente aprendidas en el procesamiento (internalización) de ideas nuevas consiste en relacionarlas, intencionadamente, con las primeras. Las ideas nuevas, que se convierten en significativas, expanden también, a su vez, la base de la matriz de aprendizaje.

Cuando, por otra parte, el material de aprendizaje se relaciona arbitrariamente con la estructura cognoscitiva, no puede hacerse empleo directo del conocimiento establecido para internalizar la tarea de aprendizaje. En el mejor de los casos, los componentes ya significativos de la tarea de aprendizaje pueden relacionarse a las ideas unitarias que existan en la estructura cognoscitiva (con lo que se facilita indirectamente el aprendizaje por repetición de la tarea en su conjunto); pero esto no hace de ninguna manera que las asociaciones arbitrarias acabadas de internalizar sean por sí mismas relacionables con el contenido establecido de la estructura cognoscitiva, ni tampoco las hace útiles para adquirir nuevos conocimientos. Y dado que la mente humana no está diseñada eficientemente para internalizar y almacenar asociaciones arbitrarias, este enfoque permite que se internalicen y retengan únicamente cantidades muy limitadas de material, y sólo después de muchos esfuerzos y repeticiones.

De la misma manera, el hecho de que una idea nueva se vuelva significativa (que llegue a ser un contenido claro, diferenciado y perfectamente articulado de la conciencia) después de ser aprendida significativamente, es de suponerse que se haga intrínsecamente menos vulnerable, que las asociaciones arbitrarias internalizadas, a la interferencia de otras asociaciones del mismo tipo, y de ahí que sea más susceptible de ser retenida. Además, como señalaremos al estudiar el proceso de asimilación, el mantenimiento de esta misma ventaja de relacionabilidad intencionada (gracias al afianzamiento del significado nuevo con su idea establecida correspondiente durante el periodo de almacenamiento) extiende todavía más el lapso de retención.

En segundo lugar, la naturaleza sustantiva o no literal de relacionar e incorporar así el material nuevo a la estructura cognoscitiva salva las drásticas limitaciones impuestas por las brevedades del ítem y el periodo del recuerdo mecánico en el procesamiento y almacenamiento de información. Es obvio que puede aprenderse y retenerse mucho más si se le pide al discente que asimile únicamente las sustancias de las ideas en lugar de las palabras exactas empleadas para expresarlas.

La capacidad, característicamente humana, para el aprendizaje verbal significativo depende, claro, de capacidades cognoscitivas como la representación simbólica, la abstracción, la categorización y la generalización. Es la posesión de estas capacidades lo que hace posible, a fin de cuentas, el descubrimiento original y el aprendizaje eficiente de conceptos y proposiciones genéricos y, con ello, la adquisición ulterior de la información y las ideas más detalladas y relacionables que constituyen el volumen del conocimiento. Otra manera de compensar las limitaciones para procesar y almacenar información, del cerebro humano, es la descrita por G. A. Miller.

En este sentido, se le denomina fragmentación (“chunking”) y procede de la teoría de la información. La fragmentación se refiere al proceso de arreglar sucesivamente la entrada del estímulo en otra “secuencia de fragmentos” organizada más eficientemente; pero este mecanismo sólo mejora la capacidad mecánica de procesar y almacenar información, del ser humano, y es consecuentemente menos importante para la adquisición del conocimiento de una materia de estudio: En la jerga de la teoría de la comunicación, este último proceso debiera ser llamado recodificación. La salida se da en un código que contiene muchos fragmentos con pocos bits* por fragmento. El discente, entonces, recodifica la entrada en otro código que contiene menos fragmentos con más bits por fragmento. Hay muchas maneras de efectuar esta recodificación; probablemente la más simple consista en agrupar los acontecimientos de entrada, aplicarle un nombre nuevo al grupo y entonces recordar el nuevo nombre en lugar de los acontecimientos de entrada originales (G. A. Miller, 1956)

4.1.2.2 Limitaciones del aprendizaje significativo

Como cualquier producción humana, la teoría ausubelina no es infalible. Ella encierra limitaciones y cuestionamientos importantes para su desarrollo y superación. Una de las críticas más frecuentes que se le hace, a la que no le falta fundamento, es su incapacidad para trascender a otros aprendizajes; por ejemplo: el aprendizaje por descubrimiento, el aprendizaje cooperativo. También limita la forma de interiorizar el conocimiento a la subsubción y supraordenación, lo cual en la actualidad ha sido superado con la demostración de otras formas de ordenamiento e interiorización del conocimiento.

Es cierto que esta teoría no contempla otras formas de aprendizaje, pero también es cierto que el aprendizaje por recepción existe como práctica educativa en nuestras aulas, por lo que el aprendizaje significativo constituye ante el mismo una propuesta muy atractiva y efectiva. Sobre todo en aquellas materias que contienen gran número de relaciones conceptuales y fórmulas que pueden ser transmitidas segúnlametodologíade Ausubel.

Una vez que se ha expuesto el sentido atribuido al constructo aprendizaje significativo, así como su evolución, hemos de hacer válida la opinión de Moreira (1997) de que se ha trivializado su utilización, ya que todos “hacemos” aprendizaje significativo con nuestros discentes y en muchos casos se desconoce su significado, su evolución y la fundamentación teórica que lo avala.

Lo que sigue pretende servir de revisión de algunos de esos tópicos o aspectos mal comprendidos con respecto al constructo que, en ningún caso, constituirá una relación exhaustiva de los mismos. Su finalidad no es otra que la de ayudar a mejorar nuestro conocimiento sobre el tema en el contexto de la teoría expuesta y de ninguna manera pretende ser descalificante.

No es posible desarrollar aprendizajes significativos si no se cuenta con una actitud significativa de aprendizaje. No se genera tampoco aprendizaje significativo si no están presentes las ideas de anclaje pertinentes en la estructura cognitiva del aprendiz. Aprendizaje significativo no es lo mismo que aprendizaje (que puede ser mecánico) de material lógicamente significativo; no cabe confundir el proceso con el material con el que se realiza.

El aprendizaje significativo no se produce de manera súbita, sino que se trata de un proceso demorado que requiere su tiempo; el aprendizaje significativo no se produce instantáneamente sino que requiere intercambio de significados y ese proceso puede ser largo. Aprendizaje significativo no es necesariamente aprendizaje correcto; siempre que haya una conexión no arbitraria y sustantiva entre la nueva información y los subsumidores relevantes se produce un aprendizaje significativo, pero éste puede ser erróneo desde el punto de vista de una comunidad de usuarios. Aprendizaje significativo no es lenguaje, no es simplemente un modo específico de comunicación aprendiz/docente.

No se puede desarrollar aprendizaje significativo en el alumnado con una organización del contenido escolar lineal y simplista; significado lógico es una cosa y significado psicológico es otra. Aprendizaje significativo no es el uso de mapas conceptuales y/o diagramas V; no podemos confundir el proceso en sí con herramientas que pueden facilitarlo o potenciarlo. No hay aprendizaje significativo sin la interacción personal (Rodríguez, 2003 a).

4.1.3 Costructivismo en la configuración del aprendizaje significativo en Matemáticas

A partir de los procesos mentales nace el interés de conocer la organizació de las fuciones gnósticas en el hombre, entre las cuales se encuentra el lenguaje.

Los estudiosos en la materia se han dedicado a investigar y profundizar el curso del funcionamiento del córtex del cual se derivan todas las fuciones mentales, entre ellas: movimiento, acción, gnosis pensamiento, lenguaje, entre otros. Es en las funciones gnósticas en donde podemos ubicar los procesos mentales, que nos permiten además de desarrollar el lenguaje, también desarrollar los conocimiento matemáticos y dentro de los procesos mentales ubicamos la atención, la memoria y el razonamiento. Este último, según Piaget, el razonamiento es un proceso cognitivo, lógico, formal y reflexivo constituido por signos, significados y significantes, implicados en la formación de conceptos, razonamiento y solución de problemas.

Para que el estudiante construya conceptos matemáticos debe estar en contacto con ellos, como el lenguaje común, desde temprana edad. Esto permitiría que los conceptos matemáticos se alcancen antes de lo que se hace. El discente de nivel medio superior y superior pueden entender más fácilmente algunos conceptos, pero no pasalo mismo con otros, como lo son las expresiones algebraicas. Se considera que ello se debe a la utilidad que le suelen dar, por ejemplo, si se trabaja con los discentes el concepto de número natural positivo, no sólo aplicarían ese conocmiento, además en su mente se ha formado el concepto, lo que no sucede con las expresiones algebraicas.

Ante la necesidad de que los discentes de educación media superior y superior construyan conceptos matemáticos es necesario diseñar estrategias que les permitan, a través de situaciones didácticas, dar las herramientas necesarias para dicha actividad gnóstica.

4.1.3.1 Generalidades del constructivismo

En la actualidad el uso de la palabra innovación educativa como de constructivismo en las escuelas está empezando a ser un slogan o una imagen de marca, muchísimos maestros, pero sobre todo investigadores educativos, exhiben su vitola de constructivistas, de manera que, desde finales del siglo pasado, podemos observar que casi todas las teorías educativas y/o instruccionales parecen haber abierto sucursales constructivistas (Tolchinsky, 1994).

En este sentido cualquier tipo de clasificación de los constructivismos recoge, explícita o implícitamente, la existencia de:

a) un constructivismo cognitivo que hunde sus raíces en la psicología y la epistemología genética de Piaget,

b) un constructivismo de orientación socio-cultural (constructivismo social, socio-constructivismo o co-constructivismo) inspirado en las ideas y planteamientos vygotskyanos y

c) un constructivismo vinculado al construccionismo social de Berger y Luckmann (2001) y a los enfoques posmodernos en psicología que sitúan el conocimiento en las prácticas discursivas (Edwards, 1997; Potter, 1998).

Estas diferentes formas de entender el constructivismo, aunque comparten la idea general de que el conocimiento es un proceso de construcción genuina del sujeto y no un despliegue de conocimientos innatos ni una copia de conocimientos existentes en el mundo externo, difieren en cuestiones epistemológicas esenciales como pueden ser el carácter más o menos externo de la construcción del conocimiento, el carácter social o solitario de dicha construcción, o el grado de disociación entre el sujeto y el mundo.

De manera general podríamos decir que los diferentes constructivismos se podrían situar en un sistema de coordenadas cartesianas espaciales cuyos tres ejes vendrían determinados, respectivamente, por los pares dialécticos endógeno-exógeno, social-individual y dualismo- adualismo (ver Figura 6) lo que conduce a que difieran a la hora de pronunciarse sobre *qué* y cómo se construye y *quién* construye.

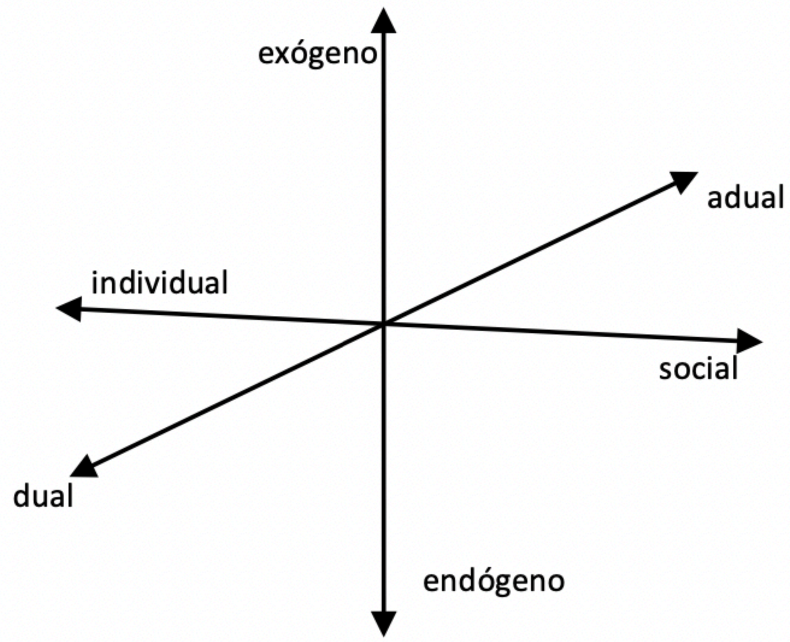


Figura 6. El sistema de los constructivismos.

Sobre “qué es lo que se construye”, aunque todas las propuestas constructivistas insisten en que construir es crear algo nuevo, mientras que para los constructivismos cognitivos de corte piagetiano el acento está situado en las estructuras generales del conocimiento y se encuentra ligado a categorías universales, para los vehiculados por el procesamiento de la información podemos observar que se centran, o bien en los cambios de reglas y en el procesamiento estratégico (modelos de procesamiento serial), o bien en los cambios asociativos y cuantitativos de las redes neuronales (modelos conexionistas) con un especial énfasis en los cambios que ocurren en el nivel microgenético y ligados a contenidos específicos.

En el caso de los constructivismos de tradición vygotskyana lo que se construye es una actividad semióticamente mediada que recoge la variedad de maneras que tienen los sujetos de reconstruir significados culturales y en el construccionismo social, lo que se construye son artefactos culturales. Estas diferencias relativas a lo que se construye son importantes a la hora de valorar el alcance teórico de las diferentes propuestas constructivistas y su pertinencia para describir y explicar diferentes fenómenos como el desarrollo o el aprendizaje.

En relación al “cómo se construye” los modelos cognitivos hacen referencia a mecanismos autorreguladores, mientras que los modelos vinculados al constructivismo social o al construccionismo social no son mecanismos reguladores de naturaleza interna sino que la responsabilidad de la dirección que toma la construcción viene determinada por una forma concreta de organización social.

Finalmente (“quién construye”), el sujeto que construye el conocimiento es, para cualquier tipo de constructivismo, un sujeto activo que interactúa con el entorno y que, aunque no se encuentra completamente constreñido por las características del medio o por sus determinantes biológicos, va modificando sus conocimientos de acuerdo con ese conjunto de restricciones internas y externas. Sin embargo, detrás de esta homogeneidad en la conceptualización del „sujeto constructor‟, se esconde una gran diversidad epistémica, y sin llegar a la consideración de los “siete sujetos” que nos describe Gillièron (1996; 35-39) si que diríamos que, al menos nos encontramos con cuatro sujetos bien diferenciados: el sujeto individual, el sujeto epistémico, el sujeto psicológico y el sujeto colectivo. Estos cuatro sujetos constructores, aunque no de manera totalmente isomorfa, van a dar lugar a cuatro modelos generales de constructivismo.

4.1.3.2 Tipología en el aprendizaje significativo

Ausubel distingue 3 tipos fundamentales de aprendizaje significativo (Aceituno, 1998): a) Aprendizaje representacional: tipo básico de aprendizaje significativo. En él se asignan significados a determinados símbolos (palabras) se identifican los símbolos con sus referentes (objetos, eventos, conceptos). b) Aprendizaje de conceptos: los conceptos representan regularidades de eventos u objetos, y son representados también por símbolos particulares o categorías y representan abstracciones de atributos esenciales de los referentes. c) Aprendizaje proposicional: la tarea no es aprender significativamente lo que representan las palabras aisladas o combinadas sino aprender lo que significan las ideas expresadas en una proposición, las cuales a su vez constituyen un concepto. En este tipo de aprendizaje la tarea no es aprender un significado aislado de los diferentes conceptos que constituyen una proposición, sino el significados de ella como un todo. En este trabajo nos centramos en el aprendizaje significativo dentro de los marcos del aprendizaje por recepción, o sea, aquel en el que se exponen los contenidos ya elaborados y que tienen que ser asimilados por el sujeto en forma de conocimientos.

4.1.3.3 Condiciones que facilitan el logro del aprendizaje significativo

Un aprendizaje significativo no se puede borrar por su condición de diferenciado, estable y perdurable, ya que está anclado en los subsumidores que lo han permitido y le han dado origen, aunque sea científica y contextualmente no aceptado por la comunidad de usuarios. El proceso de asimilación que conduce al aprendizaje significativo es evolutivo; se trata de un fenómeno progresivo y no de sustitución del tipo “todo o nada”; el propio subsumidor se ve modificado. La adquisición y el aprendizaje de conceptos se caracterizan por su progresividad (Caballero, 2003).

Para Moreira (2002), Greca y Moreira (2002), Rodríguez y Moreira (2002 a) y Moreira y Greca (2003) la mente opera con representaciones determinadas por los invariantes operatorios de los esquemas (supuestos psicológicos). En esas representaciones es en donde se plasma el conocimiento del individuo. Los modelos mentales son representaciones que se ejecutan en la memoria episódica; los esquemas de asimilación se construyen en la memoria a largo plazo y por eso tienen carácter de estabilidad. Tanto los modelos mentales como los esquemas se pueden definir por los invariantes operatorios que los caracterizan.

Al construir un esquema, la persona lo usa asimilando de ese modo una determinada clase de situaciones. Dado que es la organización invariante de la conducta ante las mismas circunstancias y en contextos similares, ese esquema permite su dominio. Pero al enfrentarse a una situación nueva -un mundo nuevo- para la que el esquema no es suficientemente eficaz ni válido, éste ya no funciona, lo que reclama por parte del sujeto algún mecanismo que le permita asimilarla.

Para ello, podría pensarse que se construye un modelo mental que actúa de intermediario (modelo mental que resulta de la aplicación de elementos de varios esquemas) y que permite hacerle frente a esa nueva realidad. El dominio progresivo de la misma podría llevar también a una paulatina estabilización de esa primera representación, lo que nos conduce a su transformación en esquema de asimilación (Moreira, 2002).

Hemos de tener en cuenta que nuevos invariantes son los que condicionan nuevos conceptos y teoremas en acción y, por lo tanto, nuevos esquemas. Debemos considerar también que tanto los modelos mentales como los esquemas pueden contener esos invariantes o, para ser más precisos, que los invariantes operatorios de los esquemas determinan los modelos metales que se ejecuten, y que, consecuentemente, una vez que los modelos mentales vayan dando un mayor dominio por revisión recursiva, pueden ir constituyéndose en esquemas de asimilación (Greca y Moreira, 2002).

4.2 Generalidades del Enfoque Ontosemiótico

El punto de vista ontosemiótico (EOS) nació alrededor del 1994 (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2012) con el objetivo de iniciar este camino de reflexión meta-didáctica, partiendo de la constatación de algunos límites en el punto de vista antropológico que había iniciado a formular Chevallard (1991; 1992).

Dicha teoría engloba la llamada TAD (teoría antropológica de la didáctica) creada por Yves Chevallard pero con objetivos declarados manifiestamente diversos de los objetivos perseguidos por la teoría de situaciones (D‟Amore y Godino, 2006; 2007; Font, Godino y D‟Amore, 2007), aún sin estar en antítesis y teniendo importantes puntos de comunión.

El objetivo de continuar en la comparación y en la articulación de diferentes modelos teóricos, llevaron al EOS a formular algunas “nociones primitivas” con un alto grado de generalidad, como son “práctica matemática”, “institución”, “objeto matemático”, “función semiótica” y las dualidades cognitivo-antropológico (persona-institución, elemental-sistémico, ostensivo-no ostensivo, extensiva-intensiva, expresión-contenido).

Muchas de las propuestas estrictamente didácticas desarrolladas en los años dentro del EOS son compatibles totalmente con las bases de la teoría de las situaciones como se ve explícitamente enunciado en Godino y Batanero (2016):

> «La teoría de las situaciones didácticas formulada por Brousseau constituye, desde nuestro punto de vista, una teoría del aprendizaje organizado de la matemática, es decir, una teoría de la enseñanza de la matemática, en acuerdo con los presupuestos epistemológicos y psicológicos evidenciados en precedencia. Describe un ambiente de aprendizaje potente en el cual no sólo se presta atención al saber matemático puesto en juego en la propuesta de trabajo sino también a las actividades de comunicación en aula, todo esto en una secuencia ordenada de situaciones didácticas. (...) la teoría de las situaciones didácticas [y aquí se citan los trabajos de G. Brousseau] que nos sirve de referencia evidencia el papel de las situaciones de acción para hacer que los estudiantes den sentido a las nociones y a los procesos de la matemática».

Efectivamente, algunos de los presupuestos de base de las dos teorías son similares:

- la elección de situaciones de aprendizaje significativas preparadas por el docente;
- el papel del docente como un director de teatro de la actividad de los estudiantes implicados en situaciones a-didácticas;
- el papel importante del conocimiento matemático (el Saber) para poder proceder a la transposición didáctica;
- la importantísima fase de la institucionalización que, en la teoría de las situaciones, es aquella final en el uso de situaciones a-didácticas;

En D‟Amore, Font y Godino (2007) se muestra cómo, con instrumentos del EOS y de la sociología, es posible evidenciar cómo el fenómeno del contrato didáctico, introducido por la teoría de las situaciones de Guy Brousseau, puede tener explicaciones de carácter sociológico.

En esencia, el EOS resulta ser una herramienta teórica muy valiosa por dos razones principales: nos permite guiar investigaciones y formular modelos sobre estos temas y, además, nos permite enmarcar nuestras *acciones* en esos modelos para mejorar aquellas situaciones problemáticas que se pueden identificar en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

4.2.1 Diferencias entre la etnomatemática y el enfoque ontosemiótico (EOS)

La etnografía constituye un campo de estudio esencial de la antropología, tiene por función la descripción y análisis de las culturas, y la lingüística, por otro lado, se ocupa, en parte, de la descripción y análisis de los códigos lingüísticos (Saville-Troike, 2005).

Tal como plantearía Cassirer (2013), la naturaleza humana no puede ser explicada en términos de la física o la química, como tampoco podemos arrojar todas las apuestas a la resolución de la cultura por un empirismo ensimismado, es decir, la relatividad interpretativa, subjetiva e incluso accional de los individuos tiene otro fundamento sólido, pero no concluyente, el símbolo. Ahora bien, el lenguaje simbólico y la metáfora se expresan como elementos distintivos entre las sociedades humanas y animales, nos otorgan las posibilidades de vislumbrar las interrelaciones culturales subsistémicas, donde estas interrelaciones de patrones en diferentes aspectos son lo suficientemente penetrantes como para denominarlas *temas*, o bien, principios organizadores centrales que gobiernan de la conducta social (Saville-Troike, 2005). De esta forma, la etnografía del habla, es una subdisciplina de la antropología que considera como objeto central la dimensión semiótica de la cultura, pero desde una metodología empírica y descriptiva, donde el lenguaje, la antropología y la cultura, constituyen una compleja tríada propia de la condición humana.

Con la expresión “enfoque semiótico-antropológico” se describe el modelo teórico para la Didáctica de la Matemática que adopta la noción de significado como clave para analizar la actividad matemática y los procesos del conocimiento matemático. No se trata de un modelo teórico acabado sino de un sistema de nociones en proceso de elaboración y desarrollo cuya idea impulsora consiste en tratar de articular dentro de un sistema coherente las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adoptando nociones semióticas como enfoque integrador.

Entre las nociones teóricas adoptadas que usaremos en el estudio de las tres dimensiones mencionadas, propuestas en este modelo para el análisis didáctico, están las de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (Godino y Batanero, 1994). Tales significados se conciben como los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) realizadas por una persona (o en el seno de una institución) para resolver un campo de problemas matemáticos. Los sistemas de prácticas que una institución considera apropiados para resolver un tipo de tareas son denominados por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) una praxeología matemática, noción que podemos asimilar con la que Godino y Batanero denominan "significado institucional de un objeto matemático". La interpretación de las praxeologías como significados de los objetos matemáticos (teorías, contenidos u organizaciones matemáticas) supone la adopción de una epistemología de tipo pragmatista y relativista (en consonancia con la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein). Estas entidades se conciben como sistemas formados por distintos elementos agrupables en dos categorías:

(a) Dimensión praxémica (praxis), formada por el campo de problemas, las técnicas (operaciones, procedimientos) y los elementos notacionales o lingüísticos puestos en juego.

(b) Dimensión discursiva (logos), formada por los conceptos, propiedades y argumentaciones que regulan, organizan y estructuran los componentes praxémicos.

La noción de praxeología nos proporciona una herramienta potente para analizar la variedad de significados atribuidos a un contenido matemático cualquiera. Para seleccionar los aspectos de dicho contenido viables en un nivel y contexto educativo es necesario disponer de las diversas posibilidades e identificar sus elementos constituyentes, así como tener en cuenta las relaciones ecológicas entre los objetos matemáticos involucrados (Godino, 1993).

Por otra parte, para describir y explicar los logros y dificultades de los discentes tenemos que analizar con suficiente detalle el proceso de estudio, los patrones de interacción docente-discente a lo largo del proceso, así como la trama compleja de objetos matemáticos y relaciones que constituyen el conocimiento pretendido. Con dicho fin las nociones de "praxeología didáctica" y "función semiótica" pueden ser herramientas conceptuales útiles.

En consonancia con el interaccionismo simbólico, el modelo teórico que se propone para la Didáctica de la Matemática, considera como objeto o entidad matemática "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas" (Godino, 2001, p.6). Para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se considera necesario explicitar los distintos tipos de objetos mediante los cuales describir la actividad matemática y los productos resultantes de la misma.

En el trabajo citado, Godino, propone los siguientes tipos de entidades:

(1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

(2) Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios,...); son las tareas que inducen la actividad matemática.

(3) Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

(4) Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función,...).

(5) Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

(6) Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

El enfoque ontosemiótico (EOS) se apoya en presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El conjunto de nociones teóricas que, actualmente, componen el EOS, se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite analizar aspectos complementarios de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, Batanero, Font, 2007):

(1) *Sistema de prácticas (operativas y discursivas).* El EOS adopta como elemento central la actividad de resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático (Godino, Batanero, 1994). La noción de sistema de prácticas (institucionales y personales) aporta la visión antropológica y pragmatista de las matemáticas e introduce las nociones de significado institucional y personal de los objetos matemáticos, distinguiendo diversos tipos de los mismos. La noción de significado institucional de referencia de un objeto o tema de estudio orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos y su articulación en un significado global u holístico. Este significado global se considera como la población de referencia (de situaciones-problemas) de la cual

se seleccionarán muestras adecuadas a las circunstancias particulares de los procesos que se pretenden diseñar.

(2) *Configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas.* La adopción de una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articula, de manera coherente, la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos. La noción de configuración ontosemiótica (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones-problemas cuya resolución competente se trata de desarrollar en los discentes (Godino et al., 2011). El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los discentes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio.

(3) *Configuración didáctica,* entendida como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema. Constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática (Contreras, García, Font, 2014; Godino, Contreras, Font, 2006). Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

(4) *La dimensión normativa,* o sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas (Godino et al., 2009), que generaliza las nociones de contrato didáctico (Brousseau, 1990) y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que

intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es uno de los factores explicativo de los fenómenos didácticos.

(5) *La noción de idoneidad didáctica,* como criterio general, relativo a las circunstancias contextuales, de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático (Godino, 2013). El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el marco del EOS las nociones de conocimiento y competencia se relacionan, teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente. La dialéctica entre práctica y objeto, entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático.

4.2.1.1 Semiótica y Objetos Matemáticos (OM)

El *objeto matemático* designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Godino, 2002). Esta idea es tomada de Blumer, quien afirma que un objeto es *"cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo"* (Blumer, 1982, p. 8).

En el EOS, los "objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo" (Godino & Font, 2002, p.2). Los objetos matemáticos son para ser "comprendidos", y, en el EOS, esto se describe por medio de la *función semiótica*, la cual se define como aquella en la que el objeto (como significante) tiene significados en función de un sistema de prácticas (personales o institucionales) ante cierta clase de situaciones problemas. Con este enfoque ontológico se trasciende la visión superficial de objetos matemáticos que se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos. Es decir, "los objetos no son sólo los conceptos, sino cualquier entidad a la que nos referimos (real o imaginaria) que intervienen, y los que emergen, de algún modo en la actividad matemática" (Godino *et al*., 2009, p.11).

El EOS define *seis objetos primarios*, con puntos de partida en la Teoría Antropológica y las diferentes versiones del *triángulo epistemológico*, los creadores del EOS formulan la siguiente ontología de objetos:

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones o gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, entre otros).
- *Situaciones* (problemas, aplicaciones extra-matemática, ejercicios).
- *Procedimientos* (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- *Conceptos* (que son introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media o función).
- *Propiedad o atributo de los objetos* (como los enunciados sobre conceptos).
- *Argumentos* (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo).

A su vez, estos objetos se organizan en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de los siguientes tipos:

- *Representacional* (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito).
- *Instrumental* (un objeto usa a otro u otros como instrumento).

- *Estructural* (dos o más objetos componen un sistema del cual emergen nuevos objetos).

Las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la matemática y generalizan radicalmente la noción de representación (Font, Godino y D'Amore, 2007). Aquí, el papel de representación no lo asume el lenguaje de manera exclusiva; en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problema, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos) pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas: *"Signo es cualquier cosa que determina a alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual ella misma se refiere (su objeto) de la misma manera; el interpretante se convierte a su vez en un signo, y así* ad infinitum*"* (Peirce, 1931-1958).

La *función semiótica* surge cuando entre dos objetos (ostensivos o no ostensivos) se establece una dependencia representacional o instrumental, donde uno de los objetos se pone en el lugar del otro o bien uno es usado por otro.

Con la idea de *función semiótica* se evidencia la naturaleza esencialmente relacional tanto de la actividad matemática como de los procesos que difunden el conocimiento matemático. Esta noción permite:

- Formular en términos semióticos y de un modo general y flexible el conocimiento matemático.
- Explicar en términos de conflictos semióticos las dificultades y los errores de los discentes.

4.2.1.2 Dimensiones en los procesos de enseñanza-aprendizaje en Matemáticas

Para el EOS la configuración y trayectoria didáctica es un componente que describe con detalle los roles entre los sujetos (docentes y estudiantes) y de estos con los objetos matemáticos como un sistema integrado y complejo vinculado a una o más situaciones problemas. Es un trabajo que tiene como punto de partida la Teoría de Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras & Font, 2006) y es de mucha utilidad para describir y analizar la relación entre los procesos de enseñar y aprender matemáticas.

En una *Configuración Didáctica* se definen varios subprocesos que, integrados, modelan las relaciones sujetos-objetos: (1) epistémico, (2) cognitivo-afectivo, (3) instruccional. En este último se articulan las relaciones estudiantes-docente-medios. Debe estar claro que las configuraciones no son conjuntos de relaciones lineales simples, sino una compleja red de interrelaciones que abarcan todos los subprocesos mencionados. Cada configuración constituye, en sentido metafórico, un "retrato" particular de lo que es un continuo de relaciones que progresa en el tiempo conformando lo que comúnmente se conoce como una *trayectoria didáctica.*

Este componente se enfoca principalmente en la descripción de los patrones de interacción y su relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas). Estos resultados pueden ser de mucha utilidad para los docentes en su proceso de planificación de la enseñanza en el aula, además de sus ventajas como referente teórico para investigaciones sobre la efectividad de los procesos didácticos en las clases de matemáticas.

Entendemos que, en este componente, se puede clarificar aún más la noción de "trayectoria didáctica" para trascender la noción común de "secuencia de configuraciones" que tiene connotaciones predominantemente lineales. Sugerimos revisar la ontología para acercarse más a un "retículo didáctico", de manera que se puedan explicar con mayor claridad las relaciones no-lineales entre las diferentes configuraciones (epistémica, cognitiva-afectiva, instruccional) según progresan en el tiempo, como en una red.

4.2.1.3 Niveles de análisis de un proceso matemático

De acuerdo con la dimensión y el momento del proceso de enseñanza y aprendizaje que se quiere indagar, el EOS cuenta con niveles de análisis que permiten obtener la información requerida para la toma de decisiones instruccionales (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Practicas matemáticas. “Toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).
- Configuración de objetos y procesos. Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje
- Normas y metanormas. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
- Idoneidad didáctica. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

4.2.2 Aplicación en Matemática Educativa

La aplicación de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la matemática corresponde a una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías, contextos, entre otros). Según esta posición filosófica, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente del ser humano y de su actividad –privada o social–, en algún dominio real no precisado. El conocimiento matemático consiste en descubrir relaciones preexistentes que vinculan entre sí tales objetos.

Tal concepción implica una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido de que se considera como un sistema de verdades seguras e inmutables. Bajo esta idea, el significado del término función será simplemente el concepto de función dada por su definición matemática.

Para vislumbrar la aplicación del EOS en los procesos de enseñanza de las Matemátias plantearemos el siguiente ejemplo tomado de la tesis doctoral de V. Font, para tratar cuestiones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático, en nivel medio superior, la derivada.

Font utilizó un cuestionario a un grupo de discentes que ya habían trabajado con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitio hallar una condición que cumplen todas las subtangentes. A continuación se muestra el cuestionario aplicado:

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

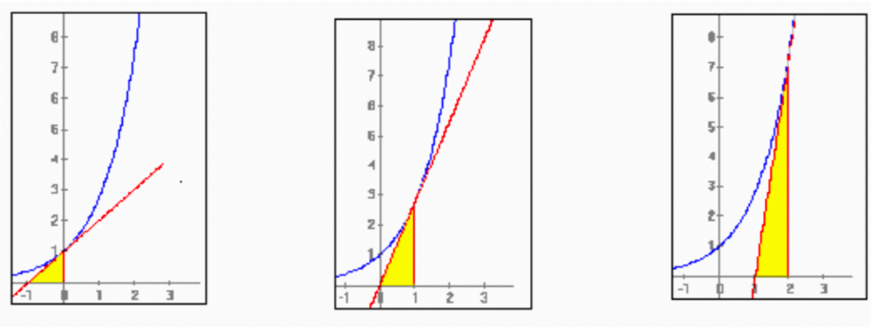


Figura 3

b) Calcula $f'(a)$

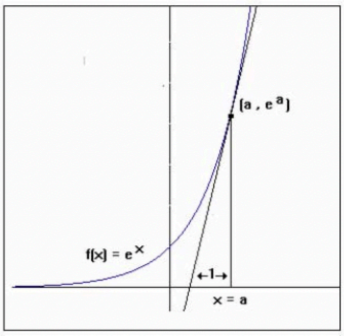
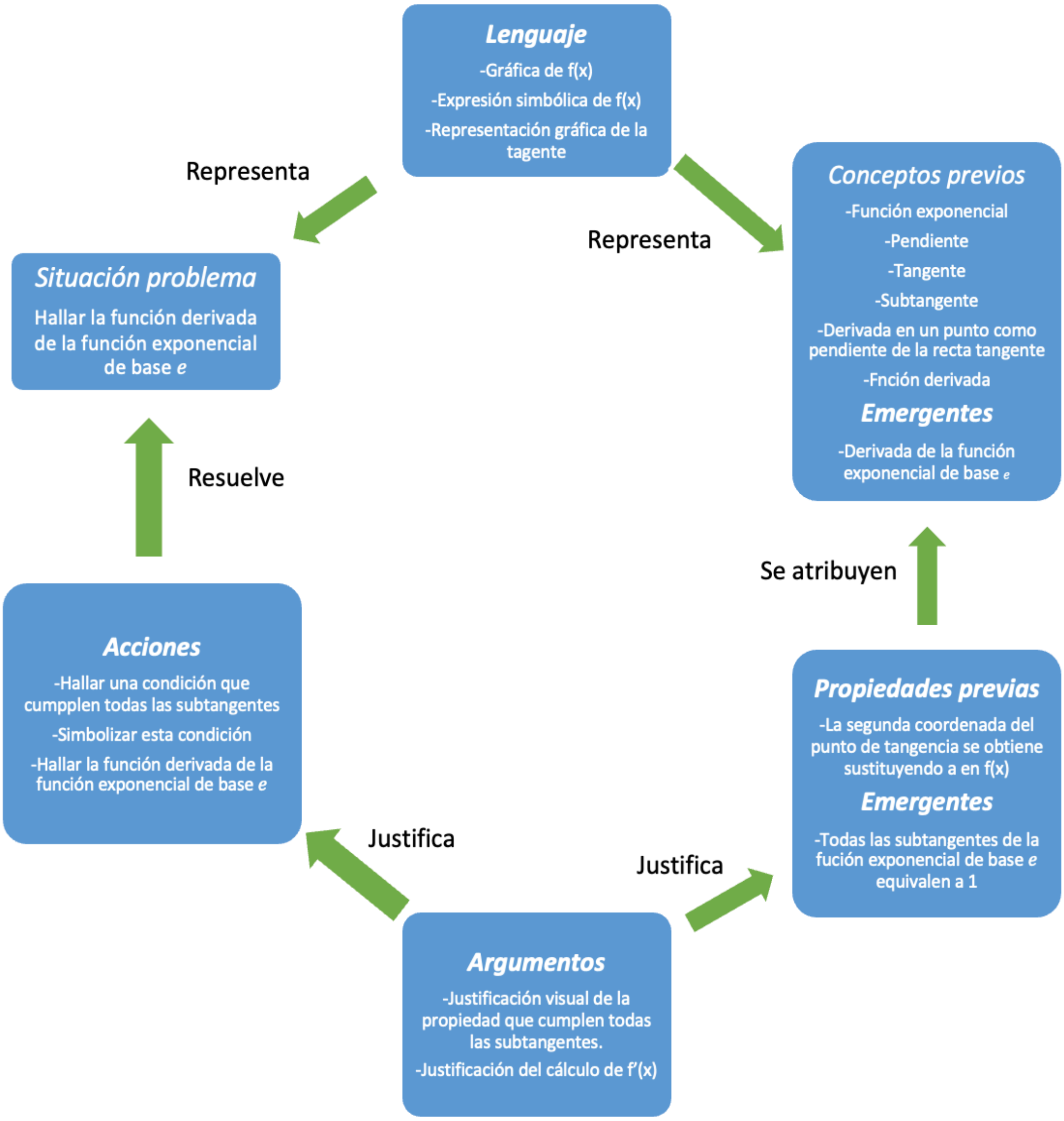


Figura 4

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.

Figura 7. Cuestionario aplicado en Font, 2005.

Para realizar la práctica que permita calcular la derivada de la función planteada, se debe poner en práctica una configuración (epistémica / cognitiva), cuyos componentes se pueden observar en el siguiente esquema:



Si nos fijamos en el cuadro de las acciones, resulta que para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ los discentes han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a artir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero la condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivda, lo que permite calcular la derivada en $x = a$. Por último, los discentes han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella s ereiva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión sibólica de la función derivada.

Se ha de considerar que para que las acciones que propone Font, se puedan aplicar, es necesario tener presente el resto de objetos, es decir, se tiene que realizar una argumentación, además de utilizar, entre otros, el concepto de derivada entendida como pendiente de la recta tangente, así como gráficas y fórmulas, etc.

En la propuesta que hace Font, se debe reconocer los siguientes tipos de significados sistémicos: *de referencia*, *pretendido*, *implantado* y *evaluado*. Asimismo, recoge información detallada de las prácticas personales de los estudiantes, lo cual permite caracterizar sus significados personales iniciales y finales, así como algunos aspectos de su construcción progresiva.

Entre las conclusiones sobre el desarrollo y análisis de la experiencia de enseñanza destacan las siguientes:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los discentes llevan a proponer significados pretendidos, que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por tal motivo, resulta difícil hacerlas compatibles con las restricciones materiales y temporales reales.
- El significado personal de objetos, que se suponía que los discentes habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad) era insuficiente. De aquí se deduce que una manera de asegurar que los discentes adquieran un buen significado personal del objeto derivada consiste en lograr un buen significado personal sobre dichos objetos previos.

- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.
- El hecho de diseñar un significado pretendido, que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas – $f(x)$ o $f'(x)$ –, modificó los significados de los objetos personales *funciones elementales* de los discentes. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de discentes incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Esas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales *funciones elementales* antes del proceso de instrucción, ni habían sido contempladas de manera explícita en el diseño previo del significado pretendido.

La noción de *función semiótica*, junto con las dualidades cognitivas extensivo-intensivo y expresión-contenido, son usadas de manera sistemática para analizar la complejidad ontosemiótica de las definiciones *derivada en un punto* y *función derivada*. Este análisis identifica los conflictos semióticos potenciales que son tomados en cuenta al diseñar la experiencia y trata algunas dificultades persistentes en la comprensión de dichas nociones.

Este ejemplo ha permitido ilustrar un fenómeno, según Font (2005) considerado muy relevante dentro del enfoque EOS: *la realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica.*

De esta forma, se puede considerar como desde el EOS se pueden hacer diferentes propuestas para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos con mayor dificultad que el docente pudiera encontrar dentro del desarrollo del currículo escolar, proponiendo nuevas técnicas para la adquisicón significativa de los mismos.

4.2.2.1 Análisis semiótico del lenguaje algebraico

Los objetos matemáticos tienen un significado consensuado en la comunidad matemática -el denominado significado institucional-, ocurre que es común que este no coincida con el significado construido por los estudiantes que están aprendiendo el denominado significado personal. Hacer esta distinción desde el EOS tiene sentido porque, en el campo educativo identificar estas diferencias permite establecer el desarrollo del individuo que aprende y además de plantear estrategias tanto en el salón de clase como a nivel de propuestas curriculares. Esto mismo sucede con el lenguaje algebraico, ya que el discente ha venido utilizando palabras tan comunes como suma, resta, multiplicación y división, y cuando llega a niveles como el medio superior y superior, utiliza términos como aumentar, el doble, disminuir, producto o razón, por lo que los discentes han de haber denominado personalmente un sólo termino para una operación aritmética particular.

En este sentido la noción de función semiótica se constituye en un instrumento metodológico útil para un análisis el cual, como mencionan Aznar et al. (2016), permita:

• “Identificar los conflictos de significados que pueden obstaculizar el aprendizaje en un proceso de instrucción.
• “Obtener información relevante para el diseño de estrategias de enseñanza” (p. 672).

Godino y Batanero (2003), al igual que Hjelmslev (1971) y Eco (2005), conciben la función semiótica como una correspondencia que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión, que le corresponde al signo.
- Un plano de contenido, que le corresponde al significado del signo.
- Un criterio, que le corresponde a un código o regla que relaciona los planos anteriores.

Así, cuando se utilizan los signos y se les otorga un significado se establece una correlación que está influida por el contexto y que no actúan independientemente.

Aznar y sus colegas (2016), mencionan que, podemos determinar o modelar los significados personales establecidos a los objetos matemáticos a través del análisis de las funciones semióticas involucradas, a fin de contrastar las con aquellas que representan los significados institucionales o pretendidos.

En ese marco, cuando el individuo establece una función semiótica para un objeto que le conduce a un uso diferente al que se tiene de referencia y que, genera contradicciones, entonces se dice que existe un conflicto. Ahora bien, el conflicto se denomina como semiótico cuando existe una discordancia entre el significado, es decir la interpretación, que se le da a una misma expresión o representación por parte de dos sujetos que bien pueden ser individuos o comunidades (instituciones).

Como lo plantean Godino et al. (2007), cuando la disparidad de significados se produce entre instituciones se habla de un conflicto semiótico epistémico. Y si la discordancia aparece en las prácticas matemáticas de un mismo sujeto se denomina conflicto semiótico cognitivo.

En este aspecto, para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia. Al término de esta segmentación comparativa, entonces se puede ver si las unidades significantes son, en cada uno de los dos registros, unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples. Esta comparación puede hacerse directamente o por intermedio de una tercera representación que de alguna manera "codifique" las representaciones que se quieren comparar.

Luego se debe examinar si cumplen con los tres criterios de congruencia citados a continuación:

- El primero es la posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental. Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del "léxico" de un registro.

- El segundo criterio es la univocidad "semántica" terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada.
- El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes.

Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones.

4.2.2.2 Desarrollo de competencias para el lenguaje algebraico

Godino, Aké y colaboradores (2014) han propuesto un modelo de pensamiento algebraico en el que se distinguieron inicialmente un nivel de razonamiento puramente aritmético, dos de actividad protoalgebraica y un tercero de actividad claramente algebrizada. En un trabajo posterior ampliaron el modelo para incluir finalmente seis niveles de algebrización (Godino et al., 2015).

Es importante mencionar lo que se entiende por niveles de algebrización:

> Los niveles de algebrización se asignan a la actividad matemática que realiza el sujeto que resuelve un problema o tarea matemática, no a las propias tareas, las cuales se pueden resolver de distintas maneras, pudiendo poner en juego una actividad algebraica diferente. (Godino et al., 2015, p. 119)

Además, los niveles planteados son los siguientes (Godino et al, 2015):

Nivel 0 (aritmético): Se opera con objetos intensivos y utilizando registros de represen- tación de lenguaje natural, numérico, icónico, gestual.

Nivel 1: En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos y aplicarse relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales, se reconocen los objetos intensivos y se calcula con objetos extensivos. La igualdad se usa como equivalencia y se utilizan como lenguajes el natural, numérico, icónico, gestual.

Nivel 2: Se utilizan representaciones simbólicas (literales) para referirse a objetos intensivos reconocidos, pero vinculados a la información especial, temporal y el contexto. Aunque se reconocen la generalidad, no se opera con variables para obtener formas canónicas.

Nivel 3: Aparecen variables o indeterminadas que se manejan de manera analítica, con un lenguaje simbólico y sin hacer referencia a la información contextual.

Nivel 4: Se utilizan parámetros y coeficientes variables que permiten el estudio de familias de ecuaciones y funciones.

Nivel 5: Se hace uso de más de un parámetro, junto con variables o cantidades indeterminadas, para realizar cálculos analíticos con base en reglas sintácticas.

Nivel 6: El estudio de las estructuras algebraicas en sí se lleva a cabo a partir de definiciones y propiedades como estructura algebraica.

Es importante mencionar que, por un lado, estos autores consideran que es posible la existencia de niveles más avanzados propios de estudios universitarios en matemáticas (Godino et al., 2015). Por otro, y como ya se mencionó al inicio de la sección, los primeros tres niveles (0-2) corresponden a prácticas matemáticas aritméticas protoalgebraicas, por lo que los niveles de prácticas algebraicas propiamente dichas son a partir del nivel 3.

También, se debe considerar que en una expresión algebraica, cada símbolo corresponde generalmente a una unidad significativa. Hay, sin embargo, unidades significativas en las que los símbolos se omiten: el coeficiente 1, el carácter “positivo” de los coeficientes mayores que 0. Así, no se escribe $y = +1x$, pero en cambio si se escribe $y = -2x$. Recordar esta trivialidad es importante cuando se trata de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes dentro de una representación gráfica, por ejemplo, y de las unidades significativas de la escritura algebraica.

CAPÍTULO V

Estrategia metodológica

En este capítulo se presenta el diseño metodológico de la investigación. Con base a los objetivos establecidos, y con los referentes que circundan el tema de estudio, este capítulo ofrece una descripción pormenorizada de los componentes metodológicos de planeación, organización y desarrollo de la estrategia metodológica, con la finalidad de dar sentido al proceso investigativo creando un vínculo entre la fase teórica y la fase operativa, a razón de la primera pudimos abordar en capítulos anteriores algunos conceptos y teorías, que nos sirvieron de base para llevar a cabo el trabajo de campo; mientras que para la segunda fase, abordaremos algunas metodologías que nos guiarán en el proceso de obtención de información. Si bien, en el algún punto del capítulo pudiera parecer redundante la información que hasta el momento se ha ofrecido, tiene como objetivo esclarecer desde la postura de los autores, las decisiones metodológicas empleadas para nuestra investigación. Es así que este capítulo proporciona detalles del qué, el cómo y el porqué del diseño metodológico.

5.1 Modelo de la investigación

El estudio del aprendizaje significativo de representaciones semióticas para el lenguaje algebraico podría ser abordado desde diferentes modelos teóricos y metodológicos pero como ya hemos visto en capítulos anteriores, en su mayoría han sido de corte cuantitativo, midiendo solamente correctamente o erróneamente los resultados de su uso. Sin embargo, nosotros recurrimos al modelo cualitatitvo para explorar la construcción de significados relacionados con el fenómeno de estudio, de esta forma se busca acercarse de manera un poco más amplia a disciplias que permiten tener un panorama más amplio del problema bajo estudio, permitiendo en todo momento mantener el carácter emergente y dinámico que nos brinda la investigación cualitativa.

La concepción constructivista del aprendizaje escolar se basa en crear el conocimiento partiendo de los conocimientos previos o esquemas de conocimiento que ya posee el discente. Los conocimientos previos serán, pues, las representaciones que uno posee, en un momento dado de su vida, sobre alguna porción de la realidad (Coll, et.al. 1993) y se concibe la realidad a través de dichas representaciones. Cuando el discente contrasta los aprendizajes previos con los nuevos y los acomoda creando vínculos valiosos, es cuando ocurrre el aprendizaje.

La simplicidad a la hora de expresar un concepto es el más alto grado de complejidad de toda teoría. Por esto y sin menoscabo de lo que pueda surgir más adelante en este proyecto, podemos definir la investigación cualitativa como el estudio de la gente a partir de lo que dicen y hacen las personas en el escenario social y cultural. El objetivo de la investigaciójn cualitativa es el de proporcionar una metodología de investigación que permita comprender el complejo mundo de la experiencia vivida desde el punto de vista de las personas que la viven (Taylor y Bogdan, 1984).

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no puede estar presidido únicamente por la preocupación del proporcionar a los discentes los conocimientos necesarios para continuar en otras etapas educativas. El objetivo debe ser el que todos los discentes adquieran en esta etapa los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y obligaciones en una sociedad cada vez más tecnológica y necesitada de un mayor conocimiento matemático.

A raíz de esta postura, la metodología que se plantea para el desarrollo de las competencias del lenguaje algebraico para los niveles medio superior y superior, es mediante secuencias didácticas, en las cuales se ha articulado la estrategia de proyectos formativos del enfoque socioformativo de las competencias con una perspectiva constructivista. Con ello se pretende promover un avance en los procesos de formación desde el modelo de competencias, con la integración de algunos aspectos del constructivismos, para así ofrecer a la comunidad matemática una propuesta sencilla, pero innovadora.

5.2 Enfoque

Desde la década de 1990, el modelo de competencias educativas se ha consolidado como un nuevo corpus teórico y metodológico para orientar el currículo, la gestión educativa y los procesos de aprendizaje y evaluación. Los diversos enfoques de las competencias se deben a académicos que han formulado sus propuestas en este campo desde diferentes contextos, lineas de investigación, proyectos de aplicación, propósitos científicos y epistemologías.

En este sentido, el CIFE (Centro de Investigación en Formación y Evaluación) ha identifiacdo cuatro grandes enfoques de las competencias a nivel mundial: funcionalista, conductual, constructivista y socioformativo. Existen otros más dentro de los estudios que se han realizado, como el crítico social, el holístico-sistémico, etc. pero en la práctica, estos son los que más impacto han tenido.

En el enfoque socioformativo se ha considerado la concepción anterior para proponer la siguiente definición: las competencias son actuaciones integrales ante actividades y problemas del contexto, con ideoneidad y compromiso ético, integrando el saber ser, el saber hacer y el saber conocer en una perspectiva de mejora continua.

A finales de la década de 1990 y comienzos de 2000 se empezó a estructurar el enfoque socioformativo (Tobón, 2001-2004), el cual también se suele denominar *enfoque sistémico-complejo* o *enfoque complejo*. Concibe la formación de las competencias como parte de la formación humanada integral, a partir del proyecto ético de vida de cada persona, dentro de escenarios educativos colaborativos y articulados con lo social, lo económico, lo político, lo cultural, el arte, la ciencias y la tecnología.

En el enfoque socioformativo, los procesos curriculares y de aprendizaje se oriental a los retos del contexto externo, en el presente y en el futuro, considerando a su vez las necesidades vitales de estudiantes, docentes y directivos, así como los propósitos de formación de las perspectivas institucionales.

Este enfoque se enfatiza en la formación del compromiso ético ante uno mismo, pues la mayoría de los problemas globales que tenemos en la actualidad se relacionan con la ética, como la violencia de género, la crisis económica, la contaminación y destrucción del medio ambiente, entre otros. A diferencia de otros enfoques, en los cuales se descuida la ética, o bien, se aborda como una competencia más, para el enfoque socioformativo, la ética es la esencia de todas las competencias.

Lo anterior significa que podemos formar discentes con muchos conocimientos; sin embargo, para que sean competentes es necesario que aprendan a aplicarlos en actividades y problemas de calidad, integrando una actuación ética, con base en valores y actitudes. Es decir, para que los discentes puedan ser competentes, además de abordar situaciones problemáticas en forma práctica, estén en condiciones de comprenderlas, contextualizarlas y analizarlas a partir de conceptos y teorías, cuando más en el área de matemáticas.

5.2.1 Fundamentos del enfoque socioformativo

La metodología de proyectos formativos se fundamenta en el enfoque de proyectos propuesto por Kilpatrick (Kilpatrick, 1918). Este autor específicamente aborda la manera de enseñanza a través de la resolución de problemas, basándose principalmente en la metodología de Polya y otros autores, por lo que Kilpatrick (1985) agrupó los enfoques de los últimos tiempos sobre cómo enseñar a resolver problemas en cinco categorías, a las que les puso los nombres de *ósmosis, memorización, imitación, cooperación y reflexión*.

Los cursos en los que se enseña a resolver problemas por *ósmosis* están basados en la idea de que la forma fundamental de aprender a resolver problemas es resolver (muchos) problemas y que, al resolverlos, se aprenden las técnicas, los métodos o las herramientas heurísticas que están implícitas en ellos. La organización de la enseñanza consiste entonces básicamente en la elaboración de una colección de problemas que contenga implícitamente lo que se quiere enseñar y en el establecimiento de una secuencia adecuada de presentación a los discentes.

Los cursos que Kilpatrick coloca en la categoría que llama “memorización” tienen su precedente en los enfoques de enseñanza influidos por los análisis jerárquicos de las tareas de aprendizaje, en los que la solución de un problema se descompone en procedimientos atómicos, que se enseñan uno a uno.

El centro de un curso es la imitación cuando se sitúa a los discentes en presencia de un modelo de resolutor competente y se enseña de alguna manera a analizar esa conducta competente y a compararla con conductas propias o ajenas.

Los cursos en los que la cooperación desempeña un papel importante tienen la característica de que los discentes no tienen que ser capaces simplemente de observar y analizar conductas competentes para (intentar) imitarlas, sino que tienen que ser capaces de observar y analizar también las conductas de sus pares, para cooperar con ellos.

Finalmente, se considera que la reflexión ha de desempeñar un papel importante en un curso de resolución de problemas a partir del momento en que en las investigaciones sobre la actuación de los resolutores se introduce como un elemento explicativo del fracaso la mala gestión o la carencia de control del proceso y otros factores de tipo metacognitivo.

Kilpatrick basa su método en el constructivismo, en la individualidad del discente para que su aprendizaje sea significativo. Por lo tanto, en el método de proyectos se pone en primer plano las diferencias individuales de los discentes, sus intereses, la dirección del propio aprendizaje, el hecho de aprender haciendo y una formación democrática (Kilpatrick, 1918 citado en Zabala, 1999).

En base a lo anterior, un proyecto formativo se constituye de un conjunto articulado de actividades de aprendizaje que se van desplegando en el tiempo para resolver un problema contextualizado y contribuir a desarrollar una o varias competencias (Tobón, 2013a). Los proyectos formativos son una metodología para el desarrollo y evaluación de competencias; constituyen acciones articuladas para resolver un problema del contexto con base en la colaboración y co-creación de saberes; y buscan que los estudiantes sean competentes para afrontar los retos de la sociedad del conocimiento (Cardona, Vélez, & Tobón, 2016).

Los proyectos socioformativos constituyen una de las metodologías más completas en el proceso de formación y valoración de las competencias (...) se puede incluir el aprendizaje basado en problemas, el aprendizaje basado en mapas, sociodramas, juego de roles, las pasantíasformativas, etc." (Tobón, 2010, p. 175). Este método fue conceptualizado por Kilpatrick (Tobón, 2010) como un procedimiento dinámico, cambiante de organizar la enseñanza mediante actividades con verdadero sentido vital para los estudiantes, es un trabajo conjunto y libremente elegido por los estudiantes y el profesor para mejorar su realidad vital, al ser elegido por las partes involucradas favorece el entusiasmo en la ejecución.

Un proyecto formativo se estructura mediante una ruta formativa, a través del cual se orienta todo su proceso metodológico y mediante el cual se pretende la adquisición de las competencias de los estudiantes, mediante la especificación de diferentes componentes: proyecto, competencias, actividades, evaluación y recursos. La ruta formativa a través de fases, direcciona la realización de actividades que permitan alcanzar niveles de desempeño. En estas fases participan estudiantes y profesores, su fin fundamental es articular todo el proceso de aprendizaje y la valoración de las competencias. La descripción de las fases se muestra en la Figura 8,

Fase	Descripción
Direccionar el proyecto	Se acuerda la ruta de formación con los estudiantes y se establecen los criterios necesarios a tener en cuenta en el proyecto.
Planear el proyecto	Los estudiantes planifican con el docente un proyecto acorde con el proyecto general del curso.
Ejecutar el proyecto	Los estudiantes ejecutan el proyecto con la mediación del docente.
Evaluar el proyecto	Los estudiantes, con el apoyo del docente, presentan el informe el proyecto.

Figura 8. Fases de un proyecto formativo.

En cada fase se deben programar tanto las actividades en las cuales exista interacción directa con el profesor, como aquellas que contemplen trabajo independiente y autónomo de parte del estudiante. En cada fase se consideran aspectos de evaluación que se muestran a continuación.

La valoración de las competencias se lleva a cabo, esencialmente, buscando que los estudiantes resuelvan problemas del entorno y entreguen una o varias evidencias, para lo cual se tienen como referencia unos criterios claves. Con base en ello se determina el nivel de desempeño, los logros y las acciones concretas para mejorar. Los estudiantes durante el proceso de formación deben presentar evidencias que se obtienen en la realización de proyectos, las cuales se evalúan mediante niveles de dominio. Los niveles de dominio se muestran en la Figura 9, los cuales son: pre-formal, receptivo, resolutivo, autónomo y estratégico. Estos niveles aplican a un criterio o a una competencia.

Figura 9. Niveles de dominio de una competencia.

Para comprender un poco más la Figura anterior, tenemos que:

- Nivel Pre-Formal: Actúa ante los problemas sin claridad. No se manejan tecnicas formales.
- Nivel Receptivo: Actúa ante los problemas con algunas nociones. El desmpeño es muy operativo y mecánico.
- Nivel Resolutivo: Actúa ante los problemas comprendiendo los procedimientos elementales. Se resuelven problemas sencillos de contexto.
- Nivel Autónomo: La persona actúa con autonomía y criterio propio ante los problemas.
- Nivel Estratégico: Actúa ante los problemas logrando impacto. En ocasiones es creativa. Se consideran las consencuencias de diferentes opciones de resolución de problemas en el contexto.

El proceso de evaluación requiere de una secuencia de actividades, en donde, a partir de la definición de unas competencias, los criterios y sus correspondientes evidencias, es posible definir un mapa de aprendizaje (rúbrica por competencias) que contemple diversos tipos de evaluación y su correspondiente retroalimentación. Así mismo este proceso debe estar soportado por ddiferentes instrumentos que garanticen el seguimiento y la obtención de los propósitos formativos del discente.

Hablando de evaluación, dentro de un proyecto formativo se consideran tres tipos: a) autoevalución, cuando una persona, grupo de personas, corporación o estado, evalpuan sus propias competencias con relación a unos criterios y evidencias, b) heteroevaluación, la realiza una persona experta en el área, y, c) coevaluación, es la evaluación entre pares (personas o grupos de un mismo nivel). En el enfoque Socioformativo se enfatiza en evaluar a los estudiantes, durante diferentes momentos del proceso formativo: al inicio (evaluación de diagnóstico), durante el desarrollo de la formación (evaluación continua), al final de la formación (evaluación para la acreditación).

Para Tobón. (2010), una matriz configurada mediante los niveles de dominio es a su vez un mapa de aprendizaje, los cuales son tablas de doble entrada en las cuales se relacionan los criterios de las competencias con los niveles de dominio, y se integran las evidencias de los estudiantes.

5.2.2 Paradigma de la investigación

En el paradigma tradicional de evaluación se emplea un solo instrumento: el examen o test. Se confeccionan los primeros instrumentos para medir, por ejemplo, las pruebas para evaluar la lectura y escritura: escalas de ortografía de Buckingan, de escritura de Ayres y Freeman y, de redacción de Hillegas, entre otras.

El sistema de evaluación se caracterizó por ser mecánico, con parámetros estandarizados y masivos, pero no respondían a la información requerida para mejorar el proceso de aprendizaje ni el rendimiento académico del discente. No se podían evaluar procesos cognitivos superiores porque resultaban ser difícilmente objetos de observación y medición. La memorización era el único proceso cognitivo para evaluarse; fue imposible propiciar el desarrollo del pensamiento analítico, crítico, reflexivo y creativo en el discente.

En las prácticas educativas, la evaluación tradicional constituye el objetivo primordial de la educación; se aprendía para la evaluación. Es fundamental indicar que la evaluación tradicional no reconoce diversidad cultural, de capacidades, estilos de aprendizaje, entre otros aspectos de los discentes; es una evaluación homogénea. No otorga espacio a la retroalimentación, ni oportunidades de mejora del aprendizaje; por lo tanto, tampoco se propicia la evaluación procesual ni se considera la evaluación diagnóstica. Tobón (2017) señala que el modelo de evaluación tradicional se caracteriza por varios aspectos, entre los que destacan: que la evaluación es la finalidad primordial; el único que la ejecuta es el docente y, además, determina arbitrariamente los parámetros sin considerar criterios académicos y profesionales; la información obtenida de la evaluación se otorga mediante notas cuantitativas sin argumentación; se centra más en los errores que en los aciertos; los errores se castigan y no se asumen como oportunidades de aprendizaje; no se brinda la oportunidad de mejoras porque los resultados de las pruebas son definitivos y, por ende, no se proporcionan herramientas para lograrlas.

De acuerdo con la clasificación de Muñoz (2007), la primera generación surge en la década de 1960; en este periodo se buscaba medir el dominio de los contenidos a través de test de memoria. Durante la segunda generación, con un enfoque más cualitativo, nace la evaluación de los programas y se presentan dos paradigmas: el de la evaluación basada en criterios y otra comprensiva o interpretativa (Sakate, 2004); la primera evalúa variables descriptivas, y la segunda, el conocimiento experiencial. En la evaluación de la segunda generación se incluyen otros factores: los programas, los currículos, las estrategias didácticas, los materiales, la organización, entre otros. La ventaja de este tipo de evaluación es que proporciona información acerca de las fortalezas y debilidades de un todo integrado, pero se produce una vinculación superlativa entre el objetivo y la evaluación. El evaluador es un descriptor y mediador que ayuda a todos los actores a seleccionar, organizar y formular todo lo operativo en la institución educativa.

Para efectos del estudio analítico, adicionalmente a los modelos de evaluación presentados por Muñoz (2007), se exponen otros más dado que permiten ampliar la visión acerca de la evaluación y facilitan la comprensión de su evolución: evaluación alternativa, de ejecución, auténtica, por competencias, y finalmente, la socioformativa.

La evaluación alternativa se basa en principios constructivistas y atiende con mayor énfasis las exigencias de la sociedad de la información, más que las de la sociedad del conocimiento. Se diferencia de la tradicional en que es más completa; esto se debe a dos razones: la primera, puesto que emplea diversos procedimientos y técnicas incorporados a las actividades diarias; y la segunda, porque al usar varios procedimientos y técnicas recopila evidencia más cercana a la realidad del proceso de aprendizaje. La diversidad de la instrumentación de evaluación y su metodología responden a la intención de adaptarse a diferentes situaciones y a los propios discentes. Además, al obtener más información y de forma completa, genera mayor credibilidad en la evaluación.

Los rasgos que distinguen a esta evaluación son: favorece la evaluación formativa; considera los diferentes estilos de aprendizaje, capacidades y experiencias de los discentes; hace énfasis en las fortalezas de los discentes en lugar de sus debilidades o errores; propicia la reflexión del proceso de aprendizaje, por lo que, a su vez, da oportunidad a un perfeccionamiento en el proceso de enseñanza - aprendizaje; facilita la documentación del avance del discente y del grupo; se lleva a cabo a través de actividades dinámicas participativas, compartidas y continuas; se genera la evaluación por distintos agentes (heteroevaluación, coevaluación y autoevaluación); y, por último, las pruebas permiten ensayos y aplicaciones.

Las técnicas de evaluación alternativas se clasifican en dos grupos: las del desempeño y de observación. La Secretaría de Educación Pública de México (2019: 1) facilita la clasificación de las técnicas en las carteras de registro de asistencia y evaluación para los docentes; además, hace énfasis en la ejecución de la evaluación formativa mediante el Acuerdo 11/02/2019: “Que la evaluación tiene una finalidad esencialmente formativa al constituirse en la fuente de información para el mejoramiento de la práctica educativa […]”. Las técnicas de evaluación de desempeño sirven para valorar el proceso y el producto final: pruebas escritas y orales, matrices de valoración, listas de cotejo, escalas de apreciación o estimativas, etc. Las técnicas de evaluación de observación son de carácter complementario y valoran más lo actitudinal; los instrumentos recurrentes son: guías de observación, registros anecdótico, diarios de clase o de trabajo, escalas de actitudes.

Se puede deducir que para efectos de la evaluación por competencias, tras varias aportaciones de teóricos especializados, el axioma de evaluación ha tenido conversiones conceptuales; la principal es que dejó de concebirse como objetivo de la misma y ahora se comprende como un proceso, por lo que coincide con la evaluación formativa. Varios autores han realizado distintas conceptualizaciones acerca de la evaluación por competencias, sin embargo, de todas las acepciones actuales, la más aceptada en Iberoamérica y los países europeos es la propuesta por Tobón(2013). Al respecto, este autor sostiene que la evaluación por competencias es “un proceso que busca el mejoramiento continuo con base en la identificación de logros y aspectos por mejorar en la actuación de las personas en la resolución de problemas del contexto” (2013: 24).

La evaluación por competencias se fundamenta en los lineamientos pedagógicos de la evaluación integral, que radica en valorar el desarrollo cognitivo, procedimental y actitudinal del discente, los cuales constituyen los pilares de la Escuela Transformadora, así lo afirma Lafranscesco (2005). De igual forma, este autor señala que se basa en los dos principios de la evaluación auténtica, ya que las competencias se evalúan en la acción y en situaciones reales. El primer principio se refiere a que no se debe emitir una evaluación con base en lo que los discentes resuelven en una prueba escrita al final del curso, puesto que se limitaría a valorar los saberes declarativos y factuales; es necesario constatar sobre la marcha el desempeño del discente ante circunstancias complejas y contextualizadas. El segundo principio de la evaluación auténtica es el planteamiento de situaciones cercanas a la vida cotidiana.

La evaluación requerida en la sociedad del conocimiento actual se conforma tanto de la metodología cuantitativa y cualitativa, pero no de manera análoga, sino que una es resultado de la otra; se cualifica para cuantificar. Dicho en otros términos, al exponer "La metodología para evaluar competencias descansa en la premisa de la valoración y estimación cuantitativa y cualitativa del progreso evidente de competencias diversas según criterios éticos y objetivos" (Mejía, 2012: 33). Por otra parte, Tobón (2013) aclara que en el nivel de preescolar de la educación básica, se emplea únicamente la categoría cualitativa.

En relación con aspectos didácticos, Díaz (2010) presenta acciones que facilitan la ejecución de la evaluación por competencias: definir la situación didáctica al discente; diseñar actividades que conduzcan a un proceso evaluador abierto; que propicie la evaluación de competencias en sus diversas dimensiones, así como también la identificación del grado de los distintos componentes que conforman la competencia a evaluar, nominándolos indicadores de desempeño.

Además de conocer las vertientes metodológicas de la evaluación por competencias, tanto cualitativa como cuantitativa, y sus acciones didácticas, surge la cuestión acerca de cuáles son los elementos que la comprenden. La respuesta de Tobón (2013) ante esta interrogante es que son: el aprendizaje esperado a evaluar (SEP, 2018, 2011, 2006); las evidencias pertinentes o pruebas de ejecución (ensayos, mapas conceptuales, informes de prácticas, informes de ensayos, registros de roles, cartas, pruebas escritas, entre otros); la instrumentación para evaluarlas; y los niveles de desempeño y acciones de mejoramiento para los actores involucrados en la educación.

Otros aspectos relevantes en la evaluación por competencias son, en primer lugar: el manejo de diversos tipos de evaluación; el empleo de la evaluación por actores (heteroevaluación, coevaluación y autoevaluación) y, de igual forma, se requiere la evaluación según su temporalización (diagnóstica, procesual y final) y su funcionalidad (formativa). En segundo lugar destaca el papel de la retroalimentación en el proceso de evaluación, hecha con asertividad; y finalmente la metaevaluación, retomada de la evaluación de negocios, pero incluyendo las aportaciones de la evaluación socioformativa.

El enfoque socioformativo enriquece de forma sustancial el de competencias; un ejemplo de ello es su contribución a la evaluación. Tobón (2013), considerado también el precursor del enfoque socioformativo, reconsidera y complementa los cánones de la evaluación por competencias en ejes, para brindar mayor claridad y precisión en la metodología: formar y aplicar la competencia maestra de evaluación; establecer el propósito de la evaluación de las competencias; enfocarse en el logro de los aprendizajes esperados y en la realización de evidencias; plantear problemas del contexto en la evaluación; evaluar a través del portafolio; esbozar y utilizar rúbricas socioformativas; desarrollar la metacognición en la formación y la evaluación; diseñar y aplicar instrumentos de evaluación basados en problemas; y retroalimentar a los discentes con asertividad.

De los preceptos de la evaluación por competencias expuestos por Tobón (2013), resulta necesario referir algunas aproximaciones conceptualuales a la metagonición para comprender su papel en el proceso de la evaluación socioformtiva.

5.3 Método de la investigación

Tobón et.al. (2010) han propuesto una metodología de secuencias didácticas basada en el enfoque socioformativo de las competencias. Dicha metodología se puede adecuar a las necesidades que se presenten en el ámbito de la educación, en nuestro caso, en el desarrollo de competencias del lenguaje algebraico en niveles medio superior y superior. Un aspecto fundamental en las secuencias didácticas destinadas a formar y evaluar competencias desde la perspectiva socioformativa consiste en considerar un problema significativo y pertinente del contexto para orientar el proceso de mediación docente.

Una secuencia didáctica se puede hacer para toda la asginatura o módulo o para cada una de sus partes componentes. En nuestro caso particular, vamos a realizarla para el módulo de lenguaje algebraico. Esta constituida por algunos elementos de identificación: a) Nombre de la asignatura, b) Nombre del docente, c) Grupo, y d) Fechas que abarca la secuencia.

Se debe considerar también otros aspectos, como: a) bloque, b) tema, y c) unidades. Desde el enfoque socioformativo, los bloques o temas se convierten en ejes procesuales; con ello pasan de ser contenidos a procesos dinamizadores de la formación y ayudan a organizar las secuencias didácticas para así dosificar mejor la formación de los estudiantes. Es importante tener presente que si en el currículo ya se tiene este lenguaje de contenidos, entonces así se le considerará en la secuencia didáctia, pero con la firme intención de formar competencias y no de un aprendizaje aislado.

Tal como lo propone Kilpatrick, la resolución de problemas propuestos en el aula, deben buscar conflictos reales, de tal forma que el discente le encuentre sentido la solución obtenida, dinamizando de esta manera la formación en torno a su comprensión y resolución creativa. Desde el enfoque socioformativo, se propone que el docente y discente, son los principales actores en proponer el problema que se debe abordar, desde la formulación hasta la solución y aplicación de las mismas. Técnicamente no hay un grado de participación mejor que otro, sino que depende del tipo de asignatura, el nivel educativo, las metas de la secuencia didáctica y las competencias de los mismso discentes.

Antes de elaborar la secuencia didáctica debemos asegurarnos, como docentes, de que lo que vamos a plantear como competencias, realmente lo sean. Una vez que se tenga la claridad acerca de las competencias que se pretenden formar en los discentes, es fundamental tener en cuenta que dentro del enfoque socioformativo, se trabaja el concepto de saberes esenciales (saber ser, saber hacer y saber conocer) el cual contempla un compromiso ético y procesos metacognitivos.

Con base a lo anterior, Tobón, et.al. (2010) proponen dentro de su trabajo un formato sugerido para planificar las secuenciasd didácticas por competencias en diferentes niveles educativos, Figura 10.

Formato estándar de secuencia didáctica		
IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA	**PROBLEMA SIGNIFICATIVO DEL CONTEXTO:**	
Datos generales: **Asignatura:** **Docente:** **Fechas:** **Horas o créditos:** **Bloque, tema, etc.**		
COMPETENCIAS		
Competencia específica 1:		
Saber conocer	**Saber hacer**	**Saber ser**
Competencia específica 2:		
Saber conocer	**Saber hacer**	**Saber ser**
Competencia genérica 1:	**Criterios:**	
Competencia genérica 2:	**Criterios:**	
Competencia genérica 3:	**Criterios:**	
Competencia genérica 4:	**Criterios:**	

Figura 10. Formato estándar de secuencias didáctica.

Fuente: Tobón, et. al. 2016.

El cuadro de la Figura 10, es correspondiente sólo a los datos generales y de competencias específicas y genéricas que se pueden encontrar dentro de una secuencia didáctica. Sin embargo, estos autores también nos comparten un formato de evaluación, Figura 11.

ACTIVIDADES			EVALUACIÓN						METACOGNICIÓN	RECURSOS
Grandes fases o pasos	Actividades con el docente	Actividades de aprendizaje autónomo de los discentes	Criterios y evidencias	Inicial-receptivo	Básico	Autónomo	Estratégico	Recomendaciones de evaluación		
Tiempo	Tiempo	Tiempo	Ponderación	Puntos	Puntos	Puntos	Puntos			
Tiempo	Tiempo	Tiempo	Ponderación	Puntos	Puntos	Puntos	Puntos			
Tiempo	Tiempo	Tiempo	Ponderación	Puntos	Puntos	Puntos	Puntos			
Normas de trabajo										
Observaciones										

Figura 11. Formato de evaluación de la secuencia didáctica.

Fuente: Tobón, et. al (2016).

Con respecto a los saberes que se deben abordar en el desarrollo de una competencia, los autores nos brindan un cuadro guía sobre los componentes que debe contener cada saber, el cual se debe procurar dentro del diseño de las secuencias didácticas, Figura 12.

ESTRUCTURA Y COMPONENTES DE LOS TRES SABERES: SER, HACER Y CONOCER			
	Saber ser	**Saber hacer**	**Saber conocer**
Estructura	Aborda los procesos afectivo-motivacionales de las competencias.	Se refiere a los procesos del hacer, como el desempeño con base en procedimientos.	Se basa en procesos cognoscitivos.
Componentes	• Actitudes (son disposiciones a la acción y constituyen una puesta en práctica de los valores). • Valores (son disposiciones afectivas estables a actuar de una determinada manera). • Estrategias afectivo-motivacionales (son acciones que realiza la persona para mejorar su desempeño en el ser).	• Habilidades técnicas (son parte de las habilidades procedimentales). • Habilidades procedimientales (son un hacer ante actividades). • Estrategias del saber hacer (son acciones planeadas de la persona para lograr un excelente desempeño en el hacer).	• Conceptos (son procesos cognoscitivos reguales de representación del conocimiento formal). • Teorías (son conjuntos articulados de conceptos en torno a explicar un fenómeno). • Estrategias cognoscitivas (son acciones planeadas de la persona en torno a cómo mejorar la apropiación de conceptos y teorías, así como su aplicación y mejora).

Figura 12. Estructura y componentes de los tres saberes.

Fuente: Tobón, 2009

Dichas propuestas metodológicas hechas por Tobón et.al (2016), son los que han servido para el proceso de la propuesta de secuencia didáctica para el desarrollo de las competencias del lenguaje algebraico en los niveles medio superior y superior, que se presenta en el siguiente apartado.

5.3.1 Alcance de la investigación

En el marco del diseño de la investigación cualitativa, el abordaje al proceso de la flexibilidad y la apertura, permiten distinguir la evolución del conocimiento debido a que, en el curso de las acciones llevadas al campo de la investigación, éstas se van ajustando a las condiciones del escenario o ambiente (Salgado, 2007). Esta posibilidad brinda la oportunidad de poder delimitar el alcance que se pretende lograr en concordancia con los objetivos de la investigación. Por tanto, es preciso destacar que las características de este, son prominentes a la exploración y descripción de los elementos estudiados.

De acuerdo a Ávila (2006), el alcance de la investigación, debe reunir cuatro elementos esenciales que debe atender, estos son: los propósitos, toda vez que son las metas que se pretenden alcanzar; los objetivos, siendo que éstos delimitan hasta donde se quiere llegar con los resultados de la investigación, sin descuidar el enunciado tácito de estos, planteados al inicio de la investigación; las preguntas de investigación generadas a partir del tema central y; las limitaciones y restricciones, éstas se encuentran estrechamente ligadas de las premisas planteadas o condiciones en que se basa y conduce a la investigación.

A partir de lo anterior Tojar (2006), delimita que el alcance debe cumplir requisitos especiales en función de las intenciones con que se pretende lograr de la investigación. Por tanto, considerando la base epistemológica y el enfoque de la presente investigación, se parte que debe atender a la descripción exhaustiva, sin perder el marco global de referencia. Por otro lado, se precisa que en el campo de la interpretación, existe un antes (el diseño y preparación del trabajo de campo, así como la preparación fundamental del investigador hacia esta función) y un después, que permita llevar a cabo el análisis más claro de la información obtenida (recordando que ésta es promotora de generar nuevos conocimientos, sobre todo al campo de la sociología de las profesiones); es decir, se trata de que el modelo cualitativo requiera de personas responsables de las interpretaciones e involucradas en el trabajo de campo, haciendo observaciones, emitiendo juicios subjetivos, analizando y resumiendo, a la vez que se da cuenta de su propia conciencia (Stake, 1999, p.45). En suma, el alcance de la investigación cualitativa de la presente tesis reúne las condiciones de ser: exploratoria y en consecuencia descriptiva.

5.3.2 Población objetivo

La población objetivo, de acuerdo a nuestra pregunta de investigación, ¿cómo fortalecer las competencias del lenguaje algebraico en discentes de nivel medio superior y superior?, son por ende, discentes de estos dos niveles educativos en México. Evidentemente, no podríamos evaluar el desarrollo de dichas competencias en toda a población estudiantil de estos niveles, por lo que es necesario trabajar con una muestra.

Al respecto, Goetz y Lecompte (1988), nos mencionan que la selección y el muestreo, son métodos de toma de decisiones relacionados. En el primer caso, es la forma especializada de un proceso más general de enfoque y elección: la selección. En realidad, la distinción entre ambos términos es relevante, ya que la muestra se usa en variados contextos y en su mayoría de forma inadecuada, para denotar cualquier colectivo sometido a un estudio; además de que confiere cierto protagonismo a cuestiones estadísticas y de probabilidad para hacer un cálculo que arroja un número determinado de unidaeds de estudio. En cambio, la selección requiere que el investigador determine los perfiles relevantes de la investigación, así como el acceso que se tiene a las unidades de análisis.

Los procedimientos de muestreo y selección, empleados pueden, sin que lo advierta el investigador, acentuar demasiado ciertas características en perjuicio de otras, lo que podría repercutir en los resultados del estudio, además también debe tener en cuenta los periodos de tiempo, ya que la vida de los grupos e individuos (en estudios de caso) podrían ser demasiado cortas o largas.

Con base a esto, se ha optado por un muestreo por conveniencia, en el cual la selección guiada por factores como la facilidad de acceso, la conveniencia del investigador, la disponibilidad de muestras y otros análogos, de carácter fortuito son los que caracterizan este tipo de muestreo (Manheim, 1977).

De acuerdo a la accesibilidad que se tiene a los grupos que participarán en este estudio, las muestras tienen las siguientes características:

- Nivel medio superior

Discentes de entre 16-18 años, adscritos al área de físico-matemáticas, correspondientes al programa educativo de bachillerato general, los cuales deben elegir de entre las áreas: químico-biológicas, económico-administrativa, humanidades y ciencias sociales, y, la pertinente a nuestro trabajo de invetigación. En este semestre el mapa curricular instruye que deben cursar las asignaturas de Cálculo integral (con requisito de Cálculo diferencial), y, Probabilidad y Estadística II (con requisito de Probabilidad y Estadística I), sin embargo, dada la obligatoriedad de cursar las asignaturas dentro de los semestres correspondientes, no restringe la inscripción a los cursos de sexto semestro, aún si no se han aprobado los cursos requisitos. Dicho grupo seleccionado pertenece a un colegio particular de la zona 2 de Xalapa, además de qué específicamente esta área terminal, suele no ser tan demandada por los discentes, debido a los prejuicios que existen alrededor de las matemáticas, como ya se expuso con anterioridad, está conformado por 12 discentes. Aunado a esto, el colegio cuenta con un trabajo híbrido en la plataforma Moodle, por lo que se puede acceder a ella para plantear el trabajo en ambientes virtuales de aprendizaje.

- Nivel superior

Discentes de entre 18-20 años, adscritos al segundo semestre de la carrera de Estadística de la Universidad Veracruzan en el campus Xalapa, cuyo programa educativo advierte dentro de los dos primeros semestres las asignaturas de Cálculo aplicado a la estadística I y Pensamiento crítico para la solución de problemas, en los cuales se despliegan unidades temáticas con respecto al álgebra. Dado que la propuesta que suscita esta investigación se aplicará en el primer semestre, nos enfocaremos en el curso de Cálculo aplicado a la estadística I, por lo que serán partícipes todos los discentes inscritos en este curso, y está conformado por 36 discentes. En dicho curso se propone una unidad de competencia:

“Comprende de manera crítica los conceptos de problema y solución (eje teórico), formula problemas y construye, de manera explicita o argumentada, propuestas de solución relacionados a entornos disciplinares y transdisciplinares, mediante estrategias procidementales, cognitivas y metacognitvas (eje heurístico) en un marco de actitudes estrechamente vinculadas al pensamiento crítico y a la solución de problemas (eje axiológico). (Universidad Veracruzana, 2022)

En el caso de la carrera de Estadística, el trabajo relacionado con ambientes virtuales de aprendizaje se da de manera híbrida en la plataforma EMINUS.

5.4 Instrumentos para la recogida de información

Los estudios de corte cualitativo son generalmente apoyados por técnicas y procedimientos de recolección de la información característicos, entre los cuales encontramos la entrevista, la observación, los grupos de discusión, la narrativa, o historias de vida, por mencionar algunos. La finalidad de estas técnicas y procedimientos es la obtención de datos; ya sea que el investigador sólo recoja los datos o los produzca, cualquiera que sea la intención de la recolección de la información el proceso deberá estar apoyado por una adecuada técnica e instrumento.

Las técnicas entonces, también conceptualizadas por algunos autores como método de recolección de la información (Alvarez-Gayou, 2009) se refieren a las diferentes formas en las que el investigador obtiene la información que busca. Después de haber contemplado el enfoque socioformativo como método de invetigación y haber diseñado las secuencias didácticas bajo los formatos propuestos por Tobón, et. al (2016), se consideran algunos procedimientos de recogida de información propios del método etnográfico, como lo son: la entrevista semiestructurada, la observación participante y el diario de campo.

Los instrumentos de recogida de información se agrupan de acuerdo al tipo de evaluación, resultando: a)autoevaluación, secuencias didácticas, b)coevaluación y heteroevaluación, con rúbrica. Además cómo ya se había mencionado, se puede hacer una evaluación previa a la aplicación de la secuencia didáctica, y posterior a ella.

5.4.1 Diagnóstico y Secuencias didácticas

Basados en la propuesta estandarizada de las secuencias didácticas desde el enfoque socioformativo, se estableció la siguiente propuesta como diagnóstico. Dicha prueba se montó en la plataforma de Microsoft Forms, de tal manera que al realizarla el discente, se pudieran recopilar las respuestas de cada uno de ellos. La prueba se ha probado y validado en el trabajo de Pérez (2020), en el cual se llevo a cabo a papel y lápiz, por lo que sólo se hizo la adecuación a un recurso digital.

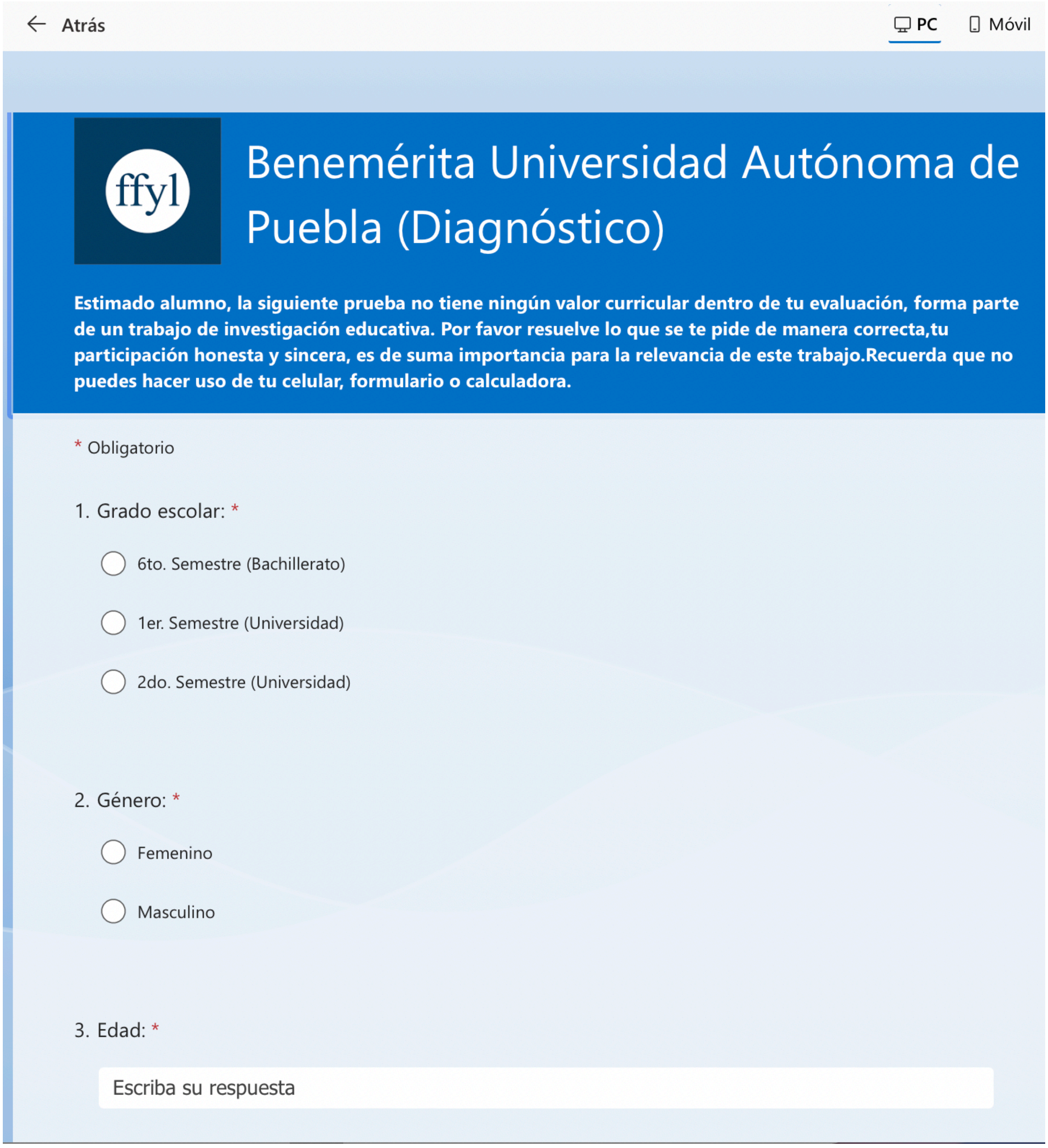


Figura 13. Prueba pretest en Microsoft Forms.

Como se puede observar en la Figura 13, alguno de los beneficios que tiene utilizar la plataforma de Microsoft Forms es que se puede visualizar en dos versiones, para PC o para móvil, lo cual favorece la traslación a un aprendizaje de entorno virtual, además de ello, las preguntas se puede restringir a *obligatorias* para que el discente no pueda saltar hacia una nueva sección, o bien, para cuando al finalizar quiera dar *Enviar*, le aparezca un mensaje de que aún no ha terminado la prueba.

Con el objetivo de mostrar un plan de acción a seguir dentro de cada sesión de trabajo, se presenta la siguiente propuesta indicativa (Tabla 2) para la construcción de una propuesta didáctica de manera digital, la estructura general de cada sesión esta basada en el formato de Tobón, et. al. (2016), bajo el sustento teórico abordado con anterioridad.

5.4.2 Evaluación mediante rúbricas

Los mapas de aprendizaje (rúbricas desde el enfoque socioformativo) son un instrumento muy completo que podemos usar para llevar a cabo tanto los procesos iniciales y finales, pero también el proceso formativo del estudiante, que es al que se le debe dar mayor énfasis.

Como lo describe Tobón (2013, 2014) los mapas de aprendizaje están conformados de la siguiente manera:

1. Problema del contexto. Es el reto que se desea abordar.
2. Evidencia. Es la prueba o producto tangible que se obtendrá en la resolución del reto.
3. Indicadores o estándares de competencia. Son los criterios (indicadores de desempeño, atributos, resultados de aprendizaje) que debe de demostrar la persona para demostrar una actuación idónea en la resolución del reto.
4. Niveles de dominio. Son los niveles de desempeño que alcanza la persona en la resolución del reto.
5. Descriptores. Son las actuaciones específicas que denotan un nivel de dominio del indicador propuesto en el mapa de aprendizaje.
6. Ponderación. Cada nivel de dominio debe de tener una ponderación, ya sea en porcentaje o en puntos directamente.
7. Retroalimentación. En este apartado se considera la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación.

De acuerdo a Tobón (2013, 2014a), la socioformación marca 5 niveles de dominio para la valoración de las competencias (Tabla 2), los cuales se pueden aplicar a un criterio, varios criterios o a una competencia completa.

Tabla 2. Niveles de dominio de una competencia desde el enfoque socioformativo.

Fuente: Tobón (2013), p.333

Niveles de dominio	Características
Preformal	– Se tienen algunos elementos que no alcanzan a definir un nivel receptivo. Es preformal porque todavía la competencia no tiene forma, es decir, estructura.
Receptivo	– Se tiene recepción de la información – El desempeño es muy operativo – Hay baja autonomía – Se tienen nociones sobre la realidad y el ámbito de la actuación en la competencia.
Resolutivo	– Se resuelven problemas sencillos del contexto – Hay labores de asistencia de otras personas – Se tienen elementos técnicos de los procesos implicados en la competencia – Se poseen algunos conceptos básicos
Autónomo	– Hay autonomía en la actuación (no se requiere de asesoría continua de otras personas) – Se gestionan recursos – Hay argumentación científica sólida y profunda – Se resuelven problemas de diversa índole con los elementos necesarios
Estratégico	– Se plantean estrategias de cambio en la realidad – Hay creatividad e innovación

	– Hay altos niveles de impacto en la realidad – Se hacen análisis evolutivos y prospectivos para abordar mejor los problemas – Se consideran las consecuencias de diferentes opciones de resolución de los problemas en el contexto

Para la elaboración de una rúbrica socioformativa, la socioformación propone los siguientes descriptores basados en los niveles de desempeño vistos anteriormente, observe Tabla 3.

Tabla 3. Descriptores para los niveles de desempeño desde la socioformación. *Fuente: Tobón (2014)*

Receptivo	Resolutivo	Autónomo	Estratégico
Identifica Reconoce Registra Se concentra Describe Define	Comprende Resuelve Ejecuta Planifica Elabora Diagnostica Implementa Realiza	Argumenta Explica Autorregula Mejora Formula Critica Analiza Articula	Crea Innova Vincula Transversaliza Sinergia Adapta Teoriza

Con base en las tablas proporcionadas por Tobón, las rúbricas para los problemas contextualizados dentro de las sesiones propuestas para el desarrollo de las competencias del lenguaje algebraico, de las operaciones básicas aritméticas en los niveles medio superior y superior, quedarían descritas de la siguiente manera:

Tabla 4. Propuesta indicativa de las sesiones de trabajo.

<table>
<tr><th colspan="3">Formato estándar de secuencia didáctica</th></tr>
<tr><th>IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA</th><th colspan="2">PROBLEMA SIGNIFCATIVO DEL CONTEXTO:</th></tr>
<tr><td>Datos generales: Educación Media Superior
Asignatura:Cálculo integral: pensamiento y lenguaje variacional
Semestre: Sexto
Fechas:
Número de sesión: 1
Bloque, tema, etc. Suma y resta</td><td colspan="2">Desafíos matemáticos
Durante la sesión se le presentan diferentes desfios al discente de manera contextualizada como lo es el comité estudiantil y una figura geométrica (triángulo).</td></tr>
<tr><th colspan="3">COMPETENCIAS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Competencias disciplinar:
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reals, hipotéticas o formales.

Atributos:
-Expresa ideas y concpetos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</td></tr>
<tr><th>Saber conocer</th><th>Saber hacer</th><th>Saber ser</th></tr>
<tr><td>• Expresiones algebraicas
• Números y sus propiedades
• Conceptos básicos del lenguaje algebraico</td><td>• Transitar del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico
• Desarrollar un lenguaje simbólico para la generalización y su representación
• Expresar de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: representar mediante símbolos
• Evaluar expreseiones algebraicas en diversos contextos numéricos</td><td>• Mostrar disposición para fortalecer su lenguaje algebraico
• Aportar puntos de vista con apertura para reflexionar con otras personas sobre su proceso de aprendizaje</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES		EVALUACIÓN					METACOGNICIÓN
Actividades con el docente	**Actividades de aprendizaje autónomo de los discentes**	**Criterios y evidencias**	**Inicial-receptivo**	**Básico**	**Autónomo**	**Estratégico**	
Se les presenta la dinámica de la plataforma y de cómo se puede trabajar en ella. Así como la primera situación problema	Comienzan con la lectura del primer problema contextualizado del comité estudiantil	-Identificar datos relevantes para hacer el cálculo aritmético. **Evidencia:** Expresión algebraica $70x = 3500$	Identifica los datos relevantes por sí mismo	Utiliza la letra x como se le sugiere para formar la expresión algebraica	Formula la expresión algebraica correcta	Con la expresión formada debe encontrar la respuesta de 50 boletos	¿Porqué seleccionaron la "x" como variable incógnita? ¿Podrían haber elegido cualquier otra letra?
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	
Se les presenta la situación problema con respsecto a la figura geométrica	Comienzan con la lectura del primer problema contextualizado del triángulo isósceles	-Identificar datos relevantes para hacer el cálculo aritmético. **Evidencia:** Expresión algebraica $a + a + 5 = 23$	Identifica los datos relevantes por sí mismo	Utiliza la letra a como se le sugiere para formar la expresión algebraica	Formula la expresión algebraica correcta	Con la expresión formada debe encontrar la respuesta de 9m	¿Porqué seleccionaron la "a" como variable incógnita? ¿Podrían haber elegido cualquier otra letra?
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	
Se les presenta problemas en conjunto a	Dan paso a la lectura de un nuevo reto para	-Identificar datos relevantes para hacer el cálculo aritmético.	Identifica los datos relevantes	Utiliza la letra x como se le sugiere para	Formula la expresión algebraica correcta	Con la expresión formada debe encontrar la	Si fuera mayúscula la letra de la incógnita, ¿afectaría el cálculo en cada uno de los inicisos realizados?

partir de los previos, dando continuidad a la construcción de expresiones algebraicas	el comité estudiantil Dan paso a la lectura de un nuevo reto geométrico	**Evidencia:** Expresión algebraica $130x + 110 = 500$ -Identificar datos relevantes **Evidencia:** Expresión algebraica $P = a + b + c$	por sí mismo	formar la expresión algebraica Utiliza la letra a como se le sugiere para formar la expresión algebraica		respuesta de 3 boletos Este inciso no tiene un valor aritmético como respuesta, sino la construcción de un expresión algebraica válida.	
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	
Se les presenta uan serie de ejercicios de imitación (Kilpatrick, 1918)	Se les presenta un cierre con actividades de traducción entre un lenguaje coloquial a uno algebraico	Identifica los datos relevantes para crear las expresiones algebraicas correspondientes **Evidencia:** Expresión algebraica $x + 5 = 7,$ $x - 33 = 144,$ $x + 4 = 12,$ *Un número menos* 3 *da como resultado dos* $x - 3 = 7,$ *Pienso un número que al aumentar en* 12 *obtengo* $18.$	Identifica los datos relevantes por si mismo	Utiliza una variación de letras como incógnitas	Formula las expresiones correctas	No tienen una respuesta aritmética	¿Es posible hacer uso de otras formas de expresar la suma y la resta? ¿Es posible mejorar las expresiones que formulé? ¿De qué forma?

<table>
<tr><th colspan="3">Formato estándar de secuencia didáctica</th></tr>
<tr><th>IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA</th><th colspan="2">PROBLEMA SIGNIFCATIVO DEL CONTEXTO:</th></tr>
<tr><td>Datos generales: Educación Media Superior
Asignatura:Cálculo integral: pensamiento y lenguaje variacional
Semestre: Sexto
Fechas:
Número de sesión: 2
Bloque, tema, etc. Multiplicación y división</td><td colspan="2">Negocios y más negocios
Durante la sesión se le presentan diferentes desfios al discente de manera contextualizada como lo es el trabajo de una imprenta, el uso de Uber (transporte privado) y del estadio de beisbol.</td></tr>
<tr><th colspan="3">COMPETENCIAS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Competencias disciplinar:
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reals, hipotéticas o formales.

Atributos:
-Expresa ideas y concpetos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</td></tr>
<tr><th>Saber conocer</th><th>Saber hacer</th><th>Saber ser</th></tr>
<tr><td>• Expresiones algebraicas
• Números y sus propiedades
• Conceptos básicos del lenguaje algebraico</td><td>• Transitar del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico
• Desarrollar un lenguaje simbólico para la generalización y su representación
• Expresar de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: representar mediante símbolos
• Evaluar expreseiones algebraicas en diversos contextos numéricos</td><td>• Mostrar disposición para fortalecer su lenguaje algebraico
• Aportar puntos de vista con apertura para reflexionar con otras personas sobre su proceso de aprendizaje</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES		EVALUACIÓN					METACOGNICIÓN
Actividades con el docente	**Actividades de aprendizaje autónomo de los discentes**	**Criterios y evidencias**	**Inicial-receptivo**	**Básico**	**Autónomo**	**Estratégico**	
Se les presenta la dinámica de la plataforma y de cómo se puede trabajar en ella. Así como la primera situación problema	Comienzan con la lectura del primer problema contextualizado sobre una imprenta	-Identificar datos relevantes para hacer el cálculo aritmético. **Evidencia:** Expresión algebraica $3x = 2550$	Identifica los datos relevantes por sí mismo	Utiliza la letra x como se le sugiere para formar la expresión algebraica	Formula la expresión algebraica correcta	Con la expresión formada debe encontrar la respuesta de $850	¿Porqué seleccionaron la "x" como variable incógnita? ¿Podrían haber elegido cualquier otra letra?
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	
Se les presenta la situación problema con respsecto al uso del Uber	Comienzan con la lectura del primer problema contextualizado del Uber	-Identificar datos relevantes para hacer el cálculo aritmético. **Evidencia:** Expresión algebraica $2.75x + 35$	Identifica los datos relevantes por sí mismo	Utiliza la letra x como se le sugiere para formar la expresión algebraica	Formula la expresión algebraica correcta	Con la expresión formada debe encontrar la respuesta de $2.75x + 35 = 65.25$	¿Porqué seleccionaron la "x" como variable incógnita? ¿Podrían haber elegido cualquier otra letra?
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	
Se les presenta problemas en conjunto a	Dan paso a la lectura de un nuevo reto para	-Identificar datos relevantes para hacer el cálculo aritmético.	Identifica los datos relevantes	Utiliza la letra x como se le sugiere para	Formula la expresión algebraica correcta	Con la expresión formada debe encontrar la	Si fuera mayúscula la letra de la incógnita, ¿afectaría el cálculo en cada uno de los inicisos realizados?

partir de los previos, dando continuidad a la construcción de expresiones algebraicas	el trabajo de imprenta	**Evidencia:** Expresión algebraica $4x = 3975$ -Identificar datos relevantes	por sí mismo	formar la expresión algebraica		respuesta de \$993.75	
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	
Se les presenta un problema extra con respecto a un estadio de beisbol.	Dan paso a la lectura de un nuevo reto.	-Identificar datos relevantes para hacer el cálculo aritmético. **Evidencia:** Expresión algebraica ${}^{3}/_{4}x = 9084$ -Identificar datos relevantes	Identifica los datos relevantes por sí mismo	Utiliza la letra x como se le sugiere para formar la expresión algebraica	Formula la expresión algebraica correcta	Con la expresión formada debe encontrar la respuesta de 12,112 butacas	Si fuera mayúscula la letra de la incógnita, ¿afectaría el cálculo en cada uno de los inicisos realizados?
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	
Se les presenta uan serie de ejercicios de imitación (Kilpatrick, 1918)	Se les presenta un cierre con actividades de traducción entre un lenguaje coloquial a uno algebraico	Identifica los datos relevantes para crear las expresiones algebraicas correspondientes **Evidencia:** Expresión algebraica $3x,$ $3m - 5,$ $5 - 2a = 18,$ $Cuatro\ veces\ c\ menos\ 5\ me\ da\ 12,$ ${}^{x}/_{3} = 27,$ $12\ más\ tres\ veces\ m\ me\ da\ 18,$ $x(6) = 72,$ $\frac{x+y}{xy},$ $Pienso\ un\ número\ que\ dividido\ por\ 3,\ obtenga\ 25$	Identifica los datos relevantes por si mismo	Utiliza una variación de letras como incógnitas	Formula las expresiones correctas	No tienen una respuesta aritmética	¿Es posible hacer uso de otras formas de expresar la multiplicación y la división? ¿Es posible mejorar las expresiones que formulé? ¿De qué forma?

Normas de trabajo

1) Una vez conectados a la plataforma deberán terminar las actividades correspondientes a la sesión.
2) Al finalizar la sesión deberá guardar los avances que se hayan realizado en la plataforma.

Observaciones

Formato estándar de secuencia didáctica	
IDENTIFICACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA	**PROBLEMA SIGNIFCATIVO DEL CONTEXTO:**
Datos generales: Educación Media Superior **Asignatura:**Cálculo integral: pensamiento y lenguaje variacional **Semestre:** Sexto **Fechas:** **Número de sesión:** 3 **Bloque, tema, etc.** Operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división	Puntajes perdidos Durante la sesión se le presenta un juego común para los alumnos: Preguntados, para que puedan fortalecer el lenguaje algebraico visto en las sesiones anteriores.

COMPETENCIAS

Competencias disciplinar:
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reals, hipotéticas o formales.

Atributos:
-Expresa ideas y concpetos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Saber conocer	Saber hacer	Saber ser
• Expresiones algebraicas • Números y sus propiedades • Conceptos básicos del lenguaje algebraico	• Transitar del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico • Desarrollar un lenguaje simbólico para la generalización y su representación • Expresar de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: representar mediante símbolos • Evaluar expreseiones algebraicas en diversos contextos numéricos	• Mostrar disposición para fortalecer su lenguaje algebraico • Aportar puntos de vista con apertura para reflexionar con otras personas sobre su proceso de aprendizaje

ACTIVIDADES		EVALUACIÓN					METACOGNICIÓN
Actividades con el docente	**Actividades de aprendizaje autónomo de los discentes**	**Criterios y evidencias**	**Inicial-receptivo**	**Básico**	**Autónomo**	**Estratégico**	
Se les presenta la dinámica de la plataforma y de cómo se puede trabajar en ella. Así como la primera situación problema	Comienzan con la lectura del problema contextualizado sobre un juego común llamado: Preguntados	-Identificar datos relevantes para desarrollar el resto de enunciados. **Evidencia:** Expresión algebraica $w = 2x - 100,$ $M = 2x + 400,$ $G = 3x + 300,$ $P = 5x - 100,$ $A = x - 20,$ $D = 3x - 700,$ $z - 500 = x,$ $X = 2(z - 500) + 100,$ $R = 3x + 2z - 900,$ $C = x + 2100$	Identifica los datos relevantes por sí mismo	Utiliza la letra x como se le sugiere para formar las expresiones algebraicas	Formula las expresiones algebraicas correctas	Con las expresiones formadas debe encontrar los puntajes de cada participante	Con base a la primera expresión proporcionada, ¿Podrían haber elegido cualquier otra letra? De ser así, ¿cambiarían el resto de las expresiones que formularon?
Tiempo	**Tiempo**	**Ponderación**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	**Puntos**	

Normas de trabajo
1) Una vez conectados a la plataforma deberán terminar las actividades correspondientes a la sesión.
2) Al finalizar la sesión deberá guardar los avances que se hayan realizado en la plataforma.

Observaciones

Una vez, realizada la prueba de diagnóstico, se le proporcionó al discente el enlace de las secuencias didácticas para el desarrollo de las competencias del lenguaje algebraico en cada nivel educativo, en la plataforma de GeoGebra.

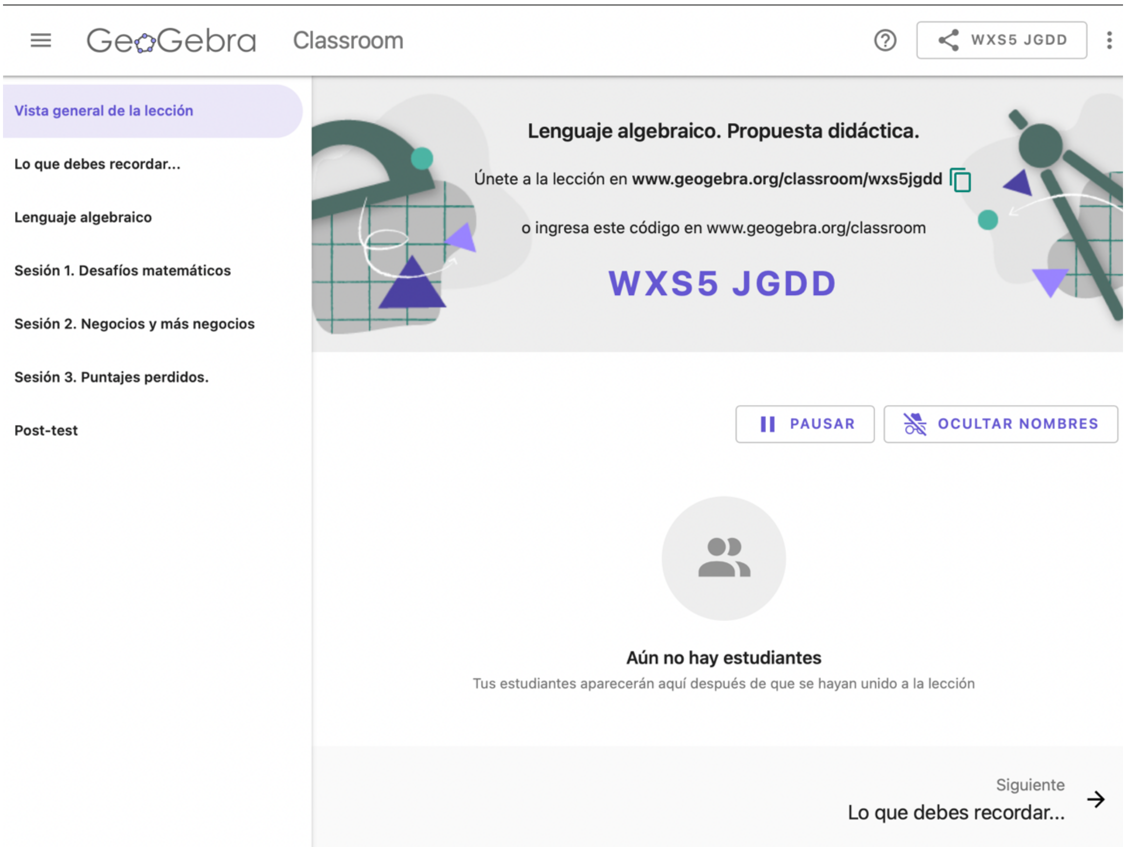


Figura 14. Interfaz de las sesiones didácticas en GeoGebra.

Como se puede observar en la Figura 14, esta plataforma nos permite incluir las tres sesiones dentro de una misma lección (termino que utiliza GeoGebra para armar libros completos a partir de actividades particulares), por lo que, al discente le aparecen consecutivamente las actividades sin ser sesgadas. Además se puede vincular a classroom, por lo que es de fácil acceso tanto para docentes como para discentes, también tiene la ventaja de poder vincular la prueba diagnóstico y el postest de Microsoft Forms.

Ahora bien, se describe a continuación la lección en GeoGebra con la cual se pretende fortalecer las competencias del lenguaje algebraico en discentes de educación media superior y superior.

Figura 15. Introducción a la lección de GeoGebra.

En primera instancia, se le proporciona al discente una introducción con respecto a las expresiones algebraicas, denominada *Lo que debes recordar…,* en ella se muestra su estructura, ya que es la base del lenguaje algebraico.

Posteriormente, dentro de la lección esta *Lenguaje algebraico,* en ella se le proporciona al discente la información necesaria sobre las diferente formas de llamar a las operaciones aritméticas básicas dentro de lenguaje algebraico, con la finalidad de ir familiarizando al discente con el uso de estos términos, tal y como se observa en la Figura 16.

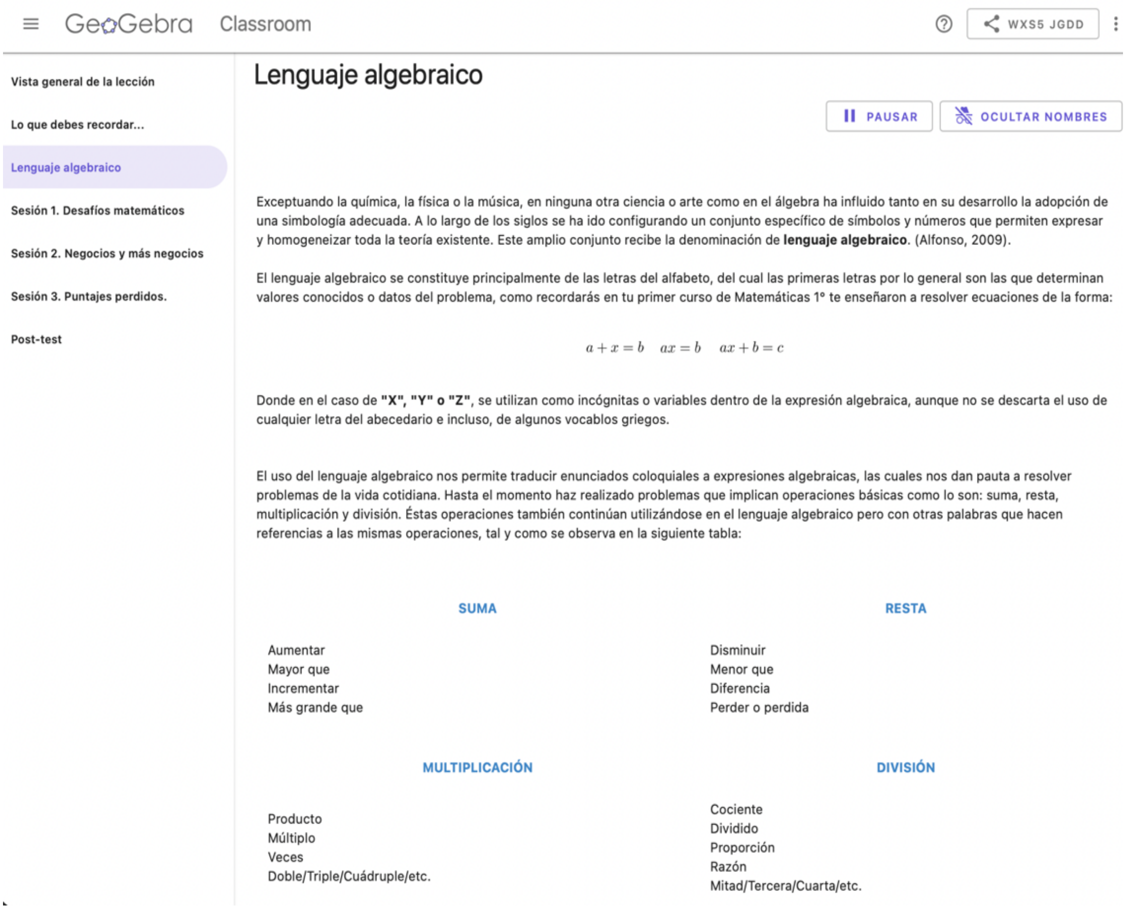


Figura 16. Sección de Lenguaje algebraico de GeoGebra.

Dentro de esta misma sección, se le proporciona al discente ejemplos sobre algunos enunciados en lenguaje coloquial al algebraico, de las cuatro operaciones básicas aritméticas, además de un recurso digital en video, observe la Figura 17.

Figura 17. Continuidad de la sección de Lenguaje algebraico de GeoGebra.

A continuación, en la Figura 18, se muestra la estructura de una de las secuencias didáctcas en la plataforma de GeoGebra, el resto se puede observar en el siguiente link: https://www.geogebra.org/classroom/wxs5jgdd#tasks/vxvtuwuq

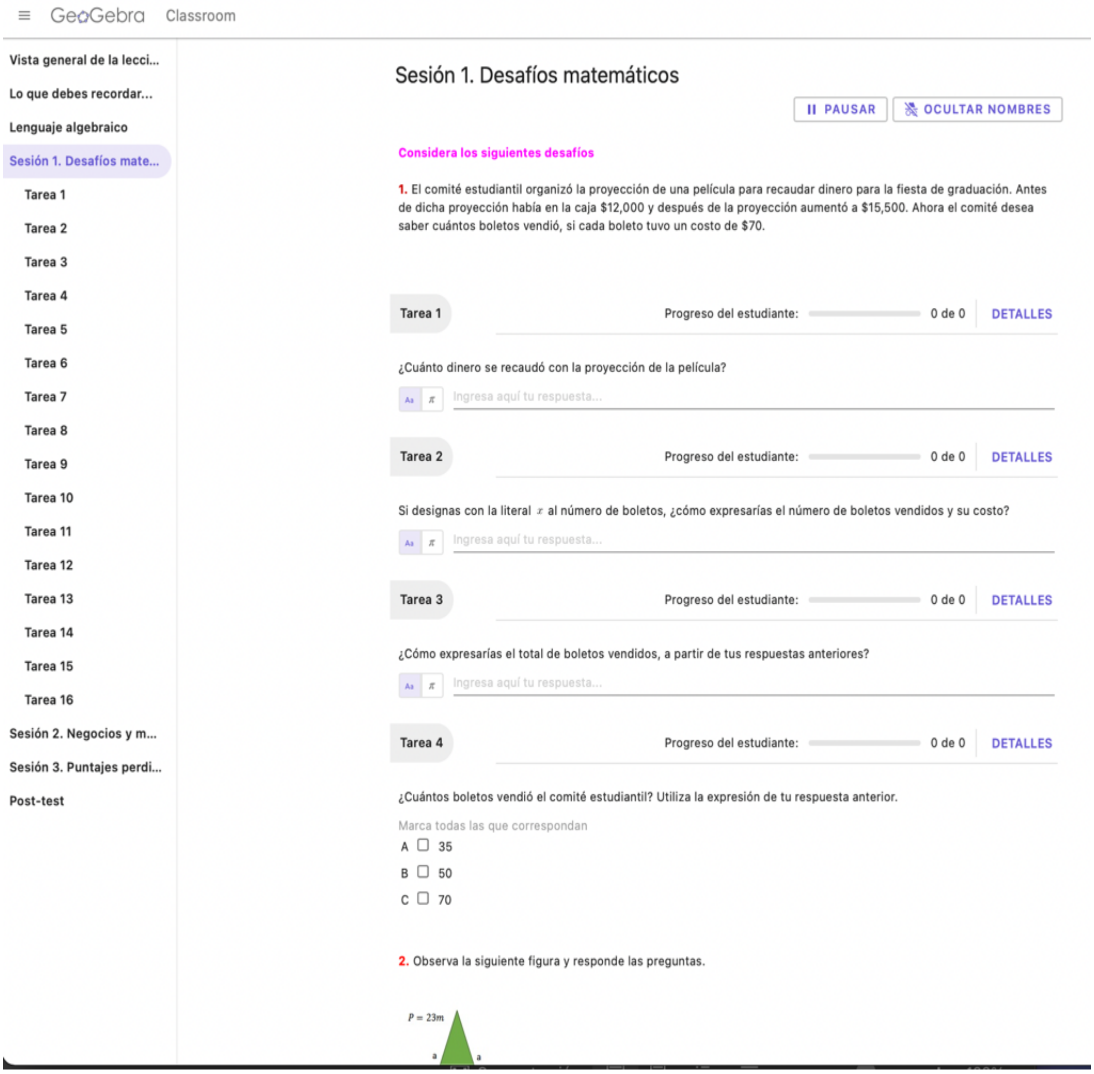


Figura 18. Sesión 1: Desafios matemáticos en GeoGebra.

5.4.3 La entrevista semiestructurada

La entrevista semiestructurada es una técnica de investigación que ha evolucionado con el tiempo, y su desarrollo no se puede atribuir a una sola persona. Uno de los enfoques más influyentes en el desarrollo de la entrevista semiestructurada provino de la tradición de la investigación cualitativa y la etnografía. Figuras clave en este desarrollo incluyen a investigadores como Clifford Geertz, Erving Goffman y Robert K. Merton. Estos académicos contribuyeron a la conceptualización de la entrevista como un medio para obtener comprensiones más profundas de la vida social y cultural.

El trabajo de sociólogos y antropólogos en el siglo XX, junto con otros investigadores en campos relacionados, influyó en la aplicación de la entrevista semiestructurada como una herramienta de investigación que permite la flexibilidad necesaria para explorar temas complejos y obtener perspectivas ricas de los participantes.

La entrevista es una técnica en la que el entrevistador solicita información a un entrevistado para obtener su opinión sobre un problema determinado (Rodríguez, Gil y García, 1996. p.167), esto supone la interacción dinámica y efectiva entre dos o más personas a través de preguntas y respuestas que pueden indagar sobre aspectos de la conducta tales como sentimientos, opiniones, comportamientos.

La entrevista entonces, es una conversación estructurada con un propósito bien definido (Álvarez-Gayou, 2009. p. 109). Para fines del trabajo de campo y en congruencia con los objetivos considerados para la investigación y los objetivos propios de la entrevista, se eligió esta técnica de recolección de la información con la finalidad de descubrir y desvelar el significado que los informantes atribuyen a los difentes vocablos del lenguaje algebraico, propio de las operaciones básicas aritméticas, buscando en todo momento la generación de conversaciones abiertas y en confianza en las cuales fluyó la información considerada en el guión de entrevista, pero también otra información que de manera emergente contribuyó a una mejor comprensión de cómo el uso de la plataforma de GeoGebra podía facilitar la adquisición del uso del lenguaje algebraico.

Tal como lo establecen los expertos en investigación, la entrevista se centró en determinados temas que fueron establecidos a priori en congruencia con los objetivos de la investigación, no se siguió una estructura rígida y previamente estructurada, pero si se desarrolló con el apoyo de un guión que permitió mantener la conversación dentro de los límites del tema de estudio. En el proceso de entrevista, tal como sugiere Kvale (1996) se buscó conducir la conversación de la mejor manera para la obtención de descripciones ricas que evidenciaran la postura de los informantes sobre el uso del lenguaje algebraico, y que estas descripciones fueran lo más claras posibles para evitar ambigüedades que pudieran crear un sesgo en los resultados de la investigación.

Las entrevistas, cuyo proceso de realización es detallado en el siguiente capítulo, fueron elegidas para la recolección de la información, además de ser consideradas como un elemento característico de la investigación cualitativa, debido a su carácter natural de generador de contenido de análisis.

5.4.4 Observación participante y diario de campo

La otra técnica de recolección de la información seleccionada fue la observación, la razón principal de esta elección metodológica, radica en que el proceso de observación se desarrolla de manera deliberada e intencionada con un propósito establecido y orientado hacia la obtención de información no verbal sobre el fenómeno de estudio; el proceso de observación "supone advertir los hechos como se presentan y registrarlos siguiendo algún procedimiento físico o mecánico" (Rodríguez, Gil y García, 1996. p.150).

La observación entonces, permitió tener una representación de la realidad del fenómeno de estudio para lo cual fue necesario agudizar todos los sentidos para lograr una comprensión completa de lo que se observó. La realización de la observación no es un proceso sencillo, por lo que en un proceso inicial se acotó el tipo de observación que se realizaría; para el caso de esta investigación doctoral la observación participante fue la mejor opción para la obtención de información y contribuyó a la comprobación, explicación y entendimiento de la información recolectada en otras fases de la investigación y con otras técnicas e instrumentos.

La observación participante es una técnica de investigación cualitativa que implica que el investigador se involucre activamente en la situación o contexto que está estudiando, participando en las actividades y eventos en lugar de simplemente ser un observador externo. Dentro de esta técnica se lleva a cabo un registro detallado de las observaciones, incluyendo descripciones de eventos, interacciones y reflexiones personales.

Otro de los instrumentos, que sirvieron para complementar la observación fue el diario de campo. El diario de campo es un tipo de registro escrito que los investigadores utilizan para documentar sus observaciones, reflexiones y experiencias mientras están inmersos en el entorno de su investigación. Para el caso propio de nuestra investigación, este instrumento nos permitió tomar nota de lo que pasaba en el trabajo de campo, es decir, dentro del trabajo de las secuencias didácticas en la plataforma.

La práctica de mantener diarios de campo se ha extendido a diversas disciplinas, y su evolución ha llevado a la inclusión de técnicas reflexivas y análisis más sistemáticos. La tradición de utilizar diarios de campo se ha consolidado como una herramienta fundamental en la investigación cualitativa y etnográfica, permitiendo a los investigadores capturar y analizar la complejidad de los contextos sociales y culturales.

5.5 Propuesta de ánalisis de la información recogida

El análisis de la información supone una tarea analítica profunda que nos llevará al hallazgo de significados, descripciones interpretaciones del fenómeno de estudio. Desde una visión cualitativa y en congruencia con el paradigma interpretativo, el análisis de la información debe apoyarse de una técnica que permita favorecer al proceso de investigación. Es así que, para el análisis de la información obtenida como resultado de la fase de recolección y el trabajo en el campo, recurrimos al proceso de triangulación.

Tradicionalmente el análisis triangular ha venido a desempeñar funciones de corroboración, elaboración e iniciación (Greene, Caracelli y Graham citado por Rodríguez, 1999), por lo que en esta investigación la triangulación de informantes permitió hacer una contrastación de la información generada por los discentes, el a priori según la teoría y la respuestas proporcionadas en el entorno virtual. La triangulación de los informantes adicionalmente permite tener una visión multidimensional del fenómeno de estudio basada en los conocimientos que cada individuo tiene sobre el tema. Con la finalidad de corroborar y dar mayor pertinencia y validez a los hallazgos y al trabajo de campo realizado, adicionalmente a la triangulación de informantes, se llevó a cabo una triangulación de instrumentos de recolección de la información (observación, entrevista, y el diariode campo), esto permitió verificar la congruencia entre lo que se dijo, lo que se observó y las acciones naturales de los informantes en el contexto real.

Se realizó la triangulación de las teorías; de esta manera, se triangularon las posturas teóricas que sustentan la investigación y que han sido presentadas en capítulos anteriores; este procedimiento permitió analizar los hallazgos desde cada teoría buscando los puntos de coincidencia de manera trasversal entre teorías así como distinguir elementos específicos que contribuyeron a responder las preguntas de investigación y a validar o desechar los supuestos establecidos para la investigación. El proceso de triangulación resultó importante para logra una visión integradora de los puntos de vista de los informantes y los resultados, lo cual permitió consolidar los hallazgos y dar mayor credibilidad a la investigación.

Finalmente, la manera de presentar l

CAPÍTULO VI

Aplicación y análisis de la propuesta en GeoGebra para el nivel medio superior

En este capítulo se muestra el desarrollo de la aplicación, es decir, la fase de experimentación, en donde se aplicó la propuesta didáctica diseñada cuyo objetivo es disminuir las dificultades que presentan los discentes con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, con el apoyo de un entorno virtual de aprendizaje (EVA), en específico con el uso de términos sinónimos de las operaciones que ya conocen como sumatoria, diferencia, multiplicación y división. La aplicación de la propuesta nos permitió recoger la información respecto al desempeño, dificultades y competencias desarrolladas de los discentes del nivel medio superior y superior en cada una de las sesiones que se llevaron a cabo dentro de la plataforma de GeoGebra. A continuación se muestra el proceso para el nivel medio superior.

6.1 Aplicación de la prueba diagnóstica

La propuesta didáctica está contemplada para estudiantes de educación medio superior, bachillerato, por lo que recurrimos a una escuela de ese nivel educativo. Una vez preparadas las sesiones en la plataforma de GeoGebra y la prueba diagnóstico, se solicitó al Centro de Estudios Las Américas A.C. nos permitieran probar la propuesta didáctica con su grupo del área técnica de bachillerato. Se acordó que por tiempos pertinentes al programa de estudio se aplicara en la semana del 03 al 07 de Julio del 2023.

La prueba diagnóstico fue aplicada el día 03 de julio del presente año y fue aplicado con la intención de conocer el grado de conocimientos previos que tenían consigo los discentes con respecto a la traducción de enunciados coloquiales a expresiones algebraicas (Véase Anexo). Se aplicó a un total de 12 discentes del área técnica de bachillerato, los cuales ya han abordado dicho tema en cursos pasados, la edad de los discentes oscilaban entre 17 y 18 años, el 56% de discentes eran hombres y el 44% fueron mujeres.

La aplicación de la prueba diagnóstico, así como de las sesiones se acopló de acuerdo al horario que tenían los discentes con respecto a la materia, se aplicó el día lunes a las 10:00 hrs con una duración de 40 minutos. A continuación, en la Tabla 3 se muestran los resultados obtenidos, donde:

A. Respuesta correcta.
B. Respuesta en proceso.
C. Respuesta incorrecta.

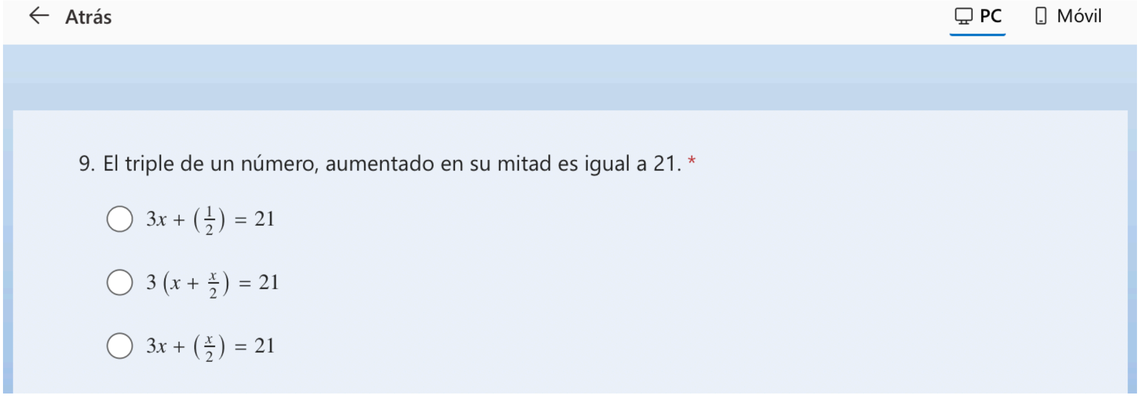
Cabe mencionar que esta escala, es sólo asociativa a la prueba diagnóstico, no mide la competencia que tiene el discente ni el nivel de dominio del lenguaje algebraico, por eso sólo califica si es correcta o errónea su respuesta, o bien si existe un vago conocimiento sobre el uso del lenguaje algebraico, de tal forma que su respuesta se encuentre en proceso.

Tabla 5. Tabla general de resultados obtenidos en la prueba diagnóstico.

Ítem	**1**										**2**		
Respuesta	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	*g*	***h***	***i***	***j***	***a***	***b***	***c***
A	25%	17%	17%	**58%**	17%	**0%**	33%	33%	25%	58%	42%	17%	8%
B	**42%**	58%	67%	42%	67%	50%	42%	58%	17%	42%	33%	**58%**	**75%**
C	33%	25%	17%	0%	17%	50%	25%	8%	**58%**	0%	25%	25%	17%

Como se puede observar en la tabla anterior, un porcentaje muy alto de los discentes tiene una respuesta en proceso, y aunque lo deseable es que los porcentajes más altos los tuvieran las respuestas correctas, debido a que son discentes del área técnica, podemos observar que incluso en el inciso (a), considerado uno de los más sencillos de resolver, el 42% tuvo una respuesta en proceso.

En el inciso (f), no hubo ninguna respuesta correcta, sin embargo, la población estuvo dividida por igual en una respuesta en proceso como errónea. Este inciso mencionaba el uso de fracciones.



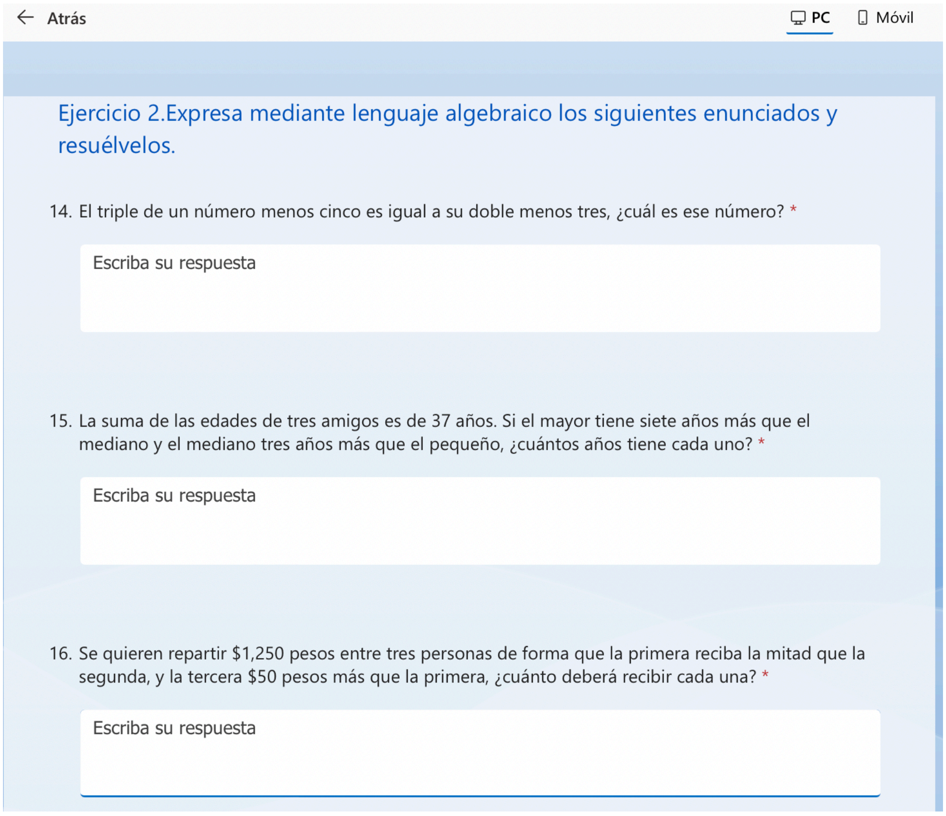
← Atrás PC Móvil

9. El triple de un número, aumentado en su mitad es igual a 21. *

- $3x + \left(\frac{1}{2}\right) = 21$
- $3\left(x + \frac{x}{2}\right) = 21$
- $3x + \left(\frac{x}{2}\right) = 21$

Para el caso del inciso (i) el 58% de los discentes, dio una respuesta incorrecta, este inciso habla sobre el perímetro de un polígono, por lo que existen deficiencias con respecto a este tema, tal y como se suponía a partir de la literatura existente.

Con respecto al segundo ítem, en este no sólo requería que el discente tradujera enunciados coloquiales a expresiones algebraicas y viceversa, sino que que también tenían que resolver dichas expresiones para dar solución al problema planteado.



← Atrás PC Móvil

Ejercicio 2.Expresa mediante lenguaje algebraico los siguientes enunciados y resuélvelos.

14. El triple de un número menos cinco es igual a su doble menos tres, ¿cuál es ese número? *

Escriba su respuesta

15. La suma de las edades de tres amigos es de 37 años. Si el mayor tiene siete años más que el mediano y el mediano tres años más que el pequeño, ¿cuántos años tiene cada uno? *

Escriba su respuesta

16. Se quieren repartir $1,250 pesos entre tres personas de forma que la primera reciba la mitad que la segunda, y la tercera $50 pesos más que la primera, ¿cuánto deberá recibir cada una? *

Escriba su respuesta

En este sentido, podemos notar que en el inciso (a) no tuvieron mayor problema ya que el 42% de los discentes si pudo expresar y resolver correctamente el problema, sin embargo, en los siguientes dos incisos (b) y (c), la mayoría de los discentes se quedaron en el proceso, esto debido a que planteaban expresiones en donde utilizaban algunos datos proporcionados por el planteamiento del problema pero de manera incorrecta, dando por resultado respuestas erróneas.

Con el fin de visualizar las respuestas de los estudiantes en la prueba diagnóstico, se presenta la Figura 19.

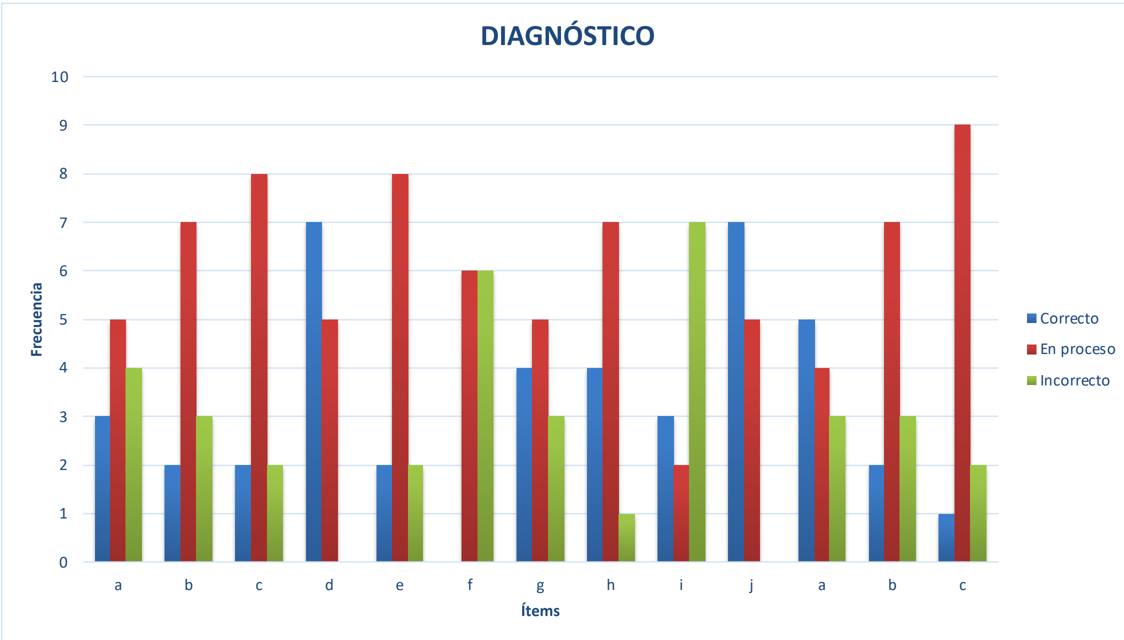


Figura 19. Resultados de la prueba diagnóstico en discentes de bachillerato.

Después de haber obtenido los resultados anteriores en la prueba diagnóstico, se procedió a explicar a los discentes la funcionalidad del uso del material didáctico en GeoGebra, teniendo como objetivo disminuir las dificultades que presentaron los discentes haciendo uso del lenguaje algebraico propuesto para las operaciones básicas aritméticas, obteniendo los resultados que se describen en el siguiente apartado.

6.2 Desarrollo y análisis de las sesiones

En este apartado se describe el desarrollo de las actividades que se diseñaron y plantearon en el EVA de GeoGebra, fueron tres sesiones de 50 minutos y los respectivos horarios establecidos por el Colegio Educativo para la asignatura de Cálculo Integral, tal y como se muestra en la siguiente Tabla.

Tabla 6. Fechas y horarios de aplicación.

Actividad	Fecha	Hora
Sesión 1	Martes, 04 de Julio 2023	10:30hrs
Sesión 2	Miércoles, 05 de Julio 2023	9:40hrs
Sesión 3	Jueves, 06 de Julio 2023	8:00hrs
Post-test	Viernes, 07 de Julio 2023	10:30hrs

Se describe el horario de cada una de las sesiones porque se debe tener en cuenta que el rendimiento que tiene el discente a las 8:00hrs podría ser diferente al de las 10:30hrs suponiendo que sea debido a la carga curricular previa que haya tenido durante su jornada estudiantil.

A partir de esto, se realizó la recogida de información, para ello se llevó un diario de campo para ir describiendo la interacción que se suscitaba durante el desarrollo de las sesiones, asímismo como se planteó en la propuesta indicativa del capítulo anterior, la escala de medición para medir el nivel de competencia que presenta el discentes dentro de las sesiones es la siguiente:

A. Nivel Estratégico.
B. Nivel Autónomo.
C. Nivel Básico.
D. Nivel Inicial-Receptivo

Cabe mencionar que se contó con el apoyo del profesor de la asignatura de dicho Colegio Educativo, esto para tener un mayor control sobre la población pero a su vez para observar el desarrollo de la interacción que pudieran tener con el EVA, sus compañeros y su profesor.

6.2.1 Análisis de las sesiones

Teniendo como información que el objetivo de la presente invetigación es fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico en discentes del nivel medio superior en un entorno virtual de aprendizaje, se presentan los resultados obtenidos en cadas una de las actividades planteadas en GeoGebra. Así como una breve reseña de los logros y/o dificultades que presentaron los discentes en el desarrollo de estas, dando pauta a enriquecer esta investigación.

Sesión 1. Desafíos matemáticos

Empezaremos describiendo la sesión, la cual está estructurada en tres partes, la primera parte *"considera los siguientes desafíos"* se le plantea al discente el desarrollo de dos desafíos matemáticos que implican el uso del lenguaje algebraico y uso de propiedades geométricas que, como se planteó en capítulos anteriores, es una de las dificultades que suelen presentar los discentes con respecto al uso del lenguaje algebraico, además se pudo observar en la prueba diagnóstico que nuestra población estudiantil presentaba dificultades en este aspecto. La segunda parte *"Trabajemos juntos"* es una actividad para trabajar colectivamente en el desarrollo de ejercicios que dan continuidad a los planteados en la primera parte, pero con diferentes planteamientos, y por último la tercera parte *"¿Con qué finalizamos?",* en esta parte se hace el cierre de la sesión con producciones propias del discente. Cabe mencionar que dentro de cada una de las partes se monitoreó el trabajo que iban realizando los discentes, esto con el fin de indagar si entendían el planteamiento de las actividades o bien, si tenían dudas con respecto a la redacción de éstas.

Es de suma importancia, hacer mención que para la realización de la prueba diagnóstico, así como para el uso del EVA en GeoGebra, se les pidió a los discentes crear una cuenta para el uso exclusivo de dichas actividades. Dichas cuentas tenían que tener la siguiente estructura:

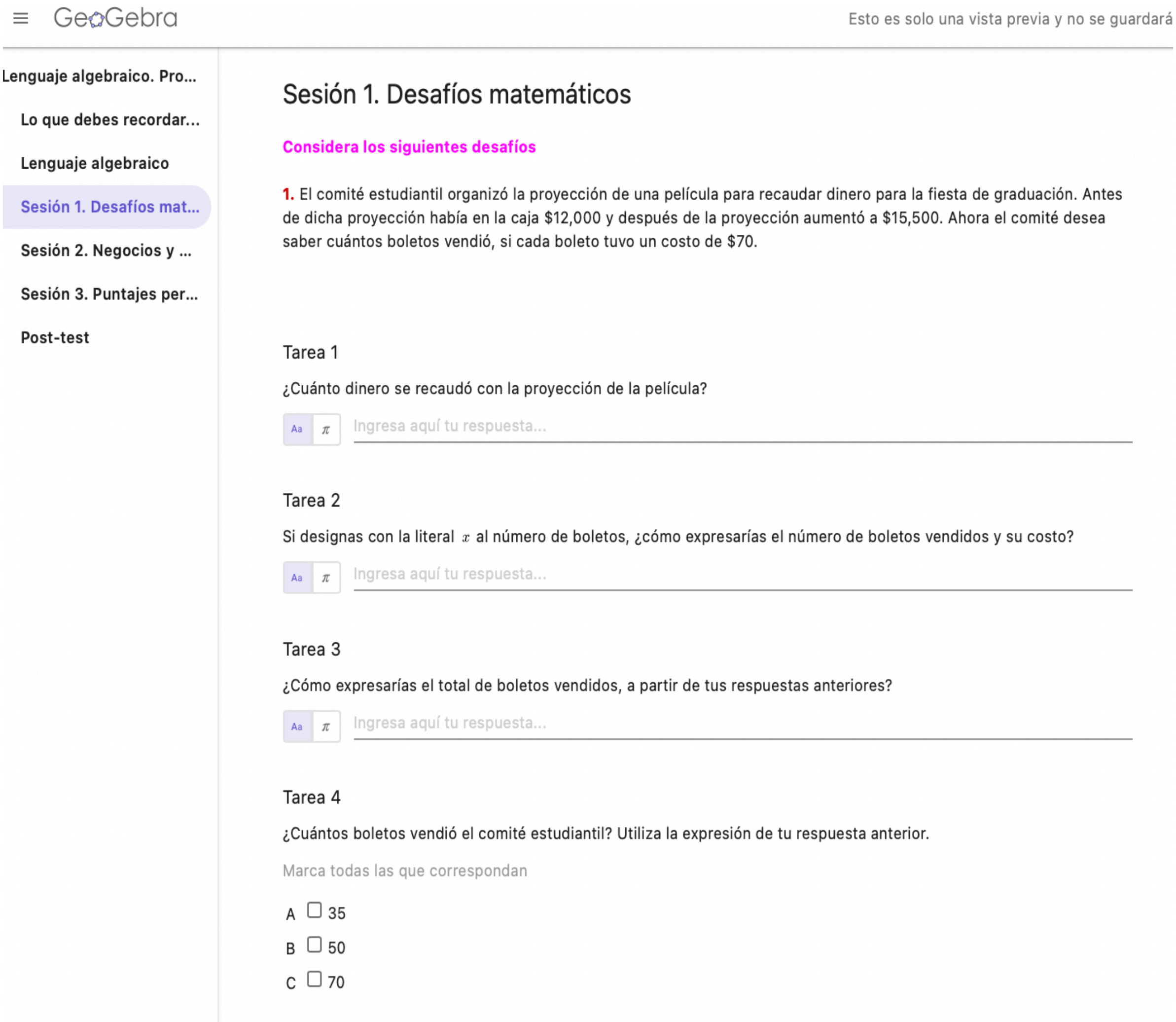
- Usuario(No.Lista)_Bach@hotmail.com

Esto con la finalidad, de tener un control sobre las respuestas que proporcionaba cada uno de los discentes, así como para la sección de entrevistas semiestructuradas facilitar la identificación de aquellos casos interesantes a la investigación.

Considera los siguientes desafíos

La actividad se inició dándoles la indicación de cómo se iba a trabajar la sesión completa dentro de GeoGebra haciendo mención sobre el tiempo de trabajo con el cual contaban (40min), aún cuando el tiempo de clase es de 50min. se les pidió terminar en ese lapso de tiempo para que les diera tiempo de cerrar y enviar sus respuestas dentro de la plataforma, así como para cerrar sus sesiones. También se les indicó que cualquier consulta que hicieran sobre la marcha de las actividades serian contestadas con otra pregunta, a excepción que fuera sobre el uso técnico de la plataforma.

Los discentes comenzaron con la primera actividad de esta sección de la sesión, leyendo la siguiente situación problemática:



En esta actividad los discentes tardaron aproximadamente 15 minutos en leer y contestar las preguntas. Una de las virtudes que tiene el uso de GeoGebra es que no permite avanzar al discente a siguientes actividades, sino ha dado una respuesta a todas las tareas planteadas, por lo que no habrá respuestas en blanco. Sin embargo, esto también da pauta a que el discente conteste de manera errónea, o bien, correcta de forma al azar.

Durante el desarrollo de esta sección, algunos discentes aún tratandose del uso de una plataforma educativa, hicieron uso de papel y lápiz para dar respuesta a la problemática que se les presentó. Sin embargo, como es el fin de la investigación fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico para las operaciones básicas aritméticas en un EVA, se consideraron sólo las respuestas que anotaban dentro de GeoGebra.

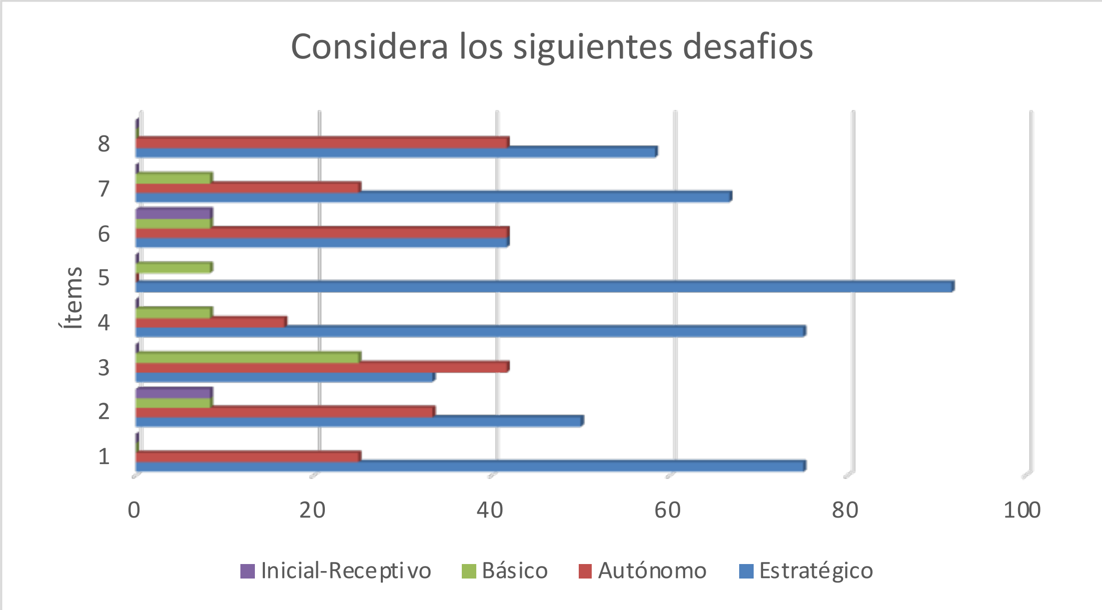


Figura 20. Respuestas a los incisos de la sección.

Para el inciso (a) se pudo observar en la revisión de las respuestas proporcionadas que el 75% de los discentes tuvieron un nivel estratégico, mientras que el 25% tuvo un nivel autónomo.

Para el inciso (b) se pudo observar que la mitad de los discentes tuvieron un nivel estratégico, dando la respuesta esperada de $70x$, 4 discentes dejaron su respuesta en un nivel autónomo y dos discentes más respondieron en un nivel básico o bien en un nivel inicial-receptivo, respectivamente.

Para el caso del inciso (c) el cual se esperaba que los discentes comenzaran ya con la formulación de la expresión, es decir, $70x$ = 3500. Se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 21 de los cuales destacamos que el 42% de los discentes dejaron su respuesta en un nivel autónomo, es decir que aún cuando ya tenían las respuestas de los ítems anteriores no lograron asociar ambas respuestas en una expresión completa, ya que dejaron expresadas respuestas como: $70 \times 50 = 3500$ o bien, $x = 50 \times 70$. También se puede observar que un 25% de los discentes, proporcionó una respuesta de nivel básico, esto por que dieron respuestas tales como: $3500, 70x$ o bien, 70.

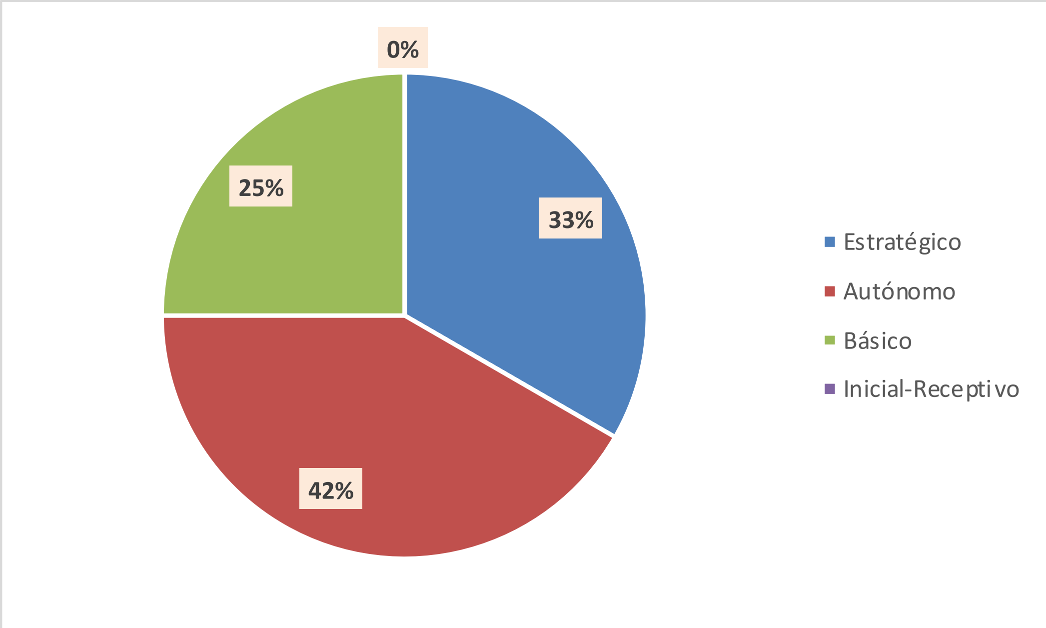
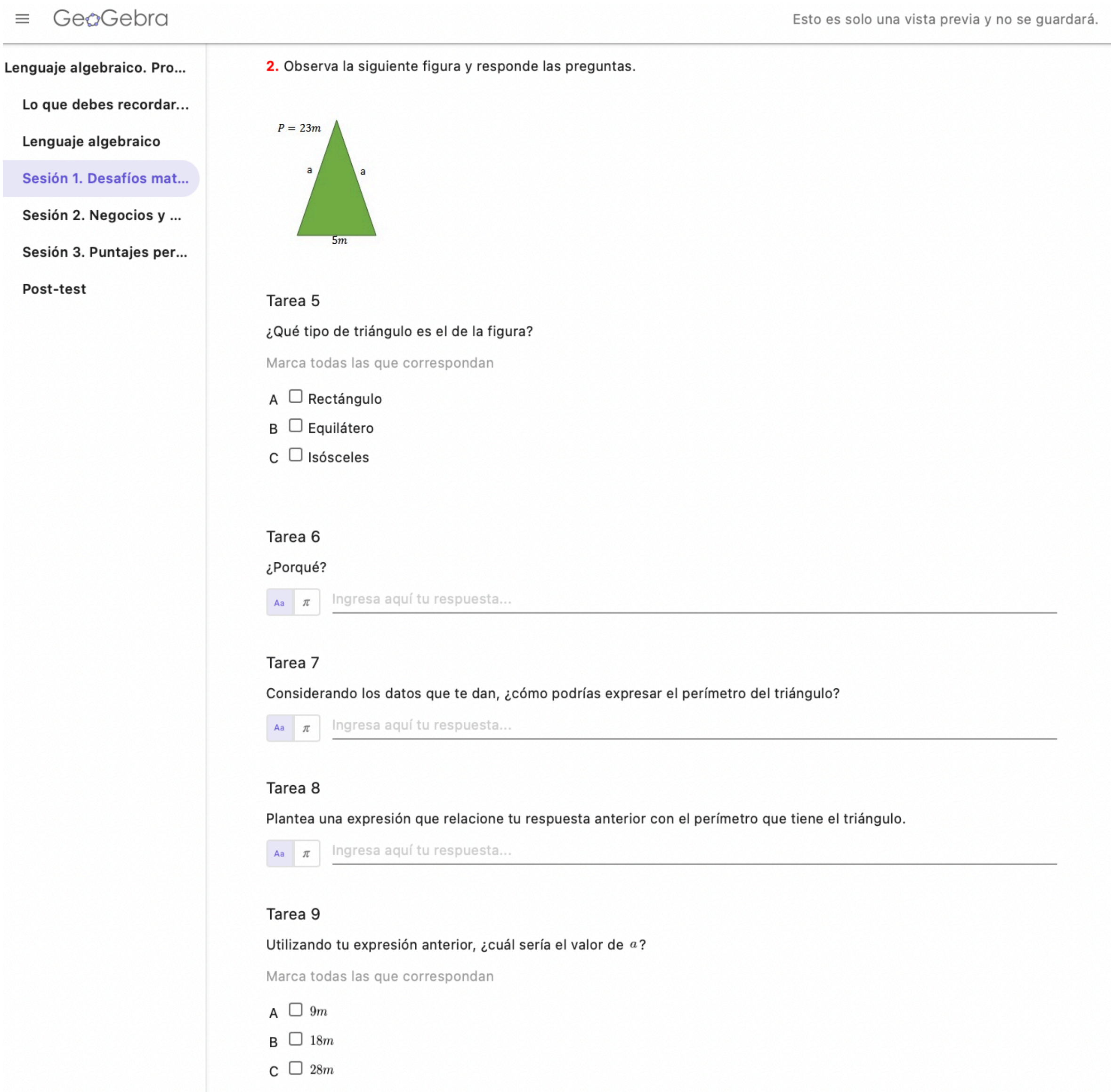


Figura 21. Respuesta al inciso (c) del ítem 1.

Por último, para el inciso (d) entraba en acción el discente al dar como respuesta 50 boletos vendidos, nueve discentes dieron la respuesta correcta, mostrando un nivel estratégico, dos dejaron su respuesta en un nivel autónomo y uno más dio una respuesta de nivel básico.

En la segunda actividad demoraron aproximadamente 15 minutos, en donde se les planteó la siguiente situación problemática:



Esta actividad se planteó de acuerdo con el estado del arte, en donde se mostraba un déficit en el tema relacionado con la geometría, caso particular del cálculo de perímetros y áreas, asímismo, en la prueba diagnóstico se pudo corroborar que los discentes, si presentaban dicha deficiencia, obteniendo los resultados que se describen a continuación.

Para el inciso (a) once discentes contestaron correctamente, por lo que presentan un nivel estratégico, es decir, lograron identificar que correspondía a un triángulo isósceles, y un solo discente mostró un nivel básico, ya que dio como respuesta que se trataba de un triángulo rectángulo, sin embargo, en la justificación de su respuesta todos proporcionaron la misma característica, de que poseía dos lados de la misma longitud, por lo que suponemos que este último tuvo una confusión con respecto al nombre, pero no a la característica que posee.

Cabe mencionar que al finalizar la sesión y después de observar en un conteo rápido dicha respuesta, se le preguntó al grupo ¿cómo se habían dado cuenta de que era un triángulo isósceles? Dando como respuesta que “tenían dos lados iguales”, por lo que se les preguntó nuevamente, ¿cómo sabían que eran iguales? Dando como respuesta que “se veían iguales”, “eran del mismo tamaño”, o bien, “porque los dos tenían a”, por lo que suponemos que los discentes si logran asociar que la literal representa una magnitud y al ser la misma, deben ser iguales en magnitud.

Para el inciso (b) se esperaba que los discentes haciendo uso de sus conocimientos previos con respecto al cálculo del perímetro, formularan la expresión: $P = a + a + 5$ o bien, una equivalente, $P = 2a + 5$. El 42% de los discentes dieron una respuesta de nivel estratégico (Figura 22), es decir expresaron alguna de las antes mencionadas y el 42% de ellos dieron una respuesta de nivel autónomo, considerando que dieron respuestas como: $a + a + 5$ y “sumando sus lados”, sin igualar al perímetro. También se destaca que el 16% de los discentes dieron una respuesta de nivel básico e inicial-receptivo, por lo que supondríamos no recordaban como se calculaba el perímetro.

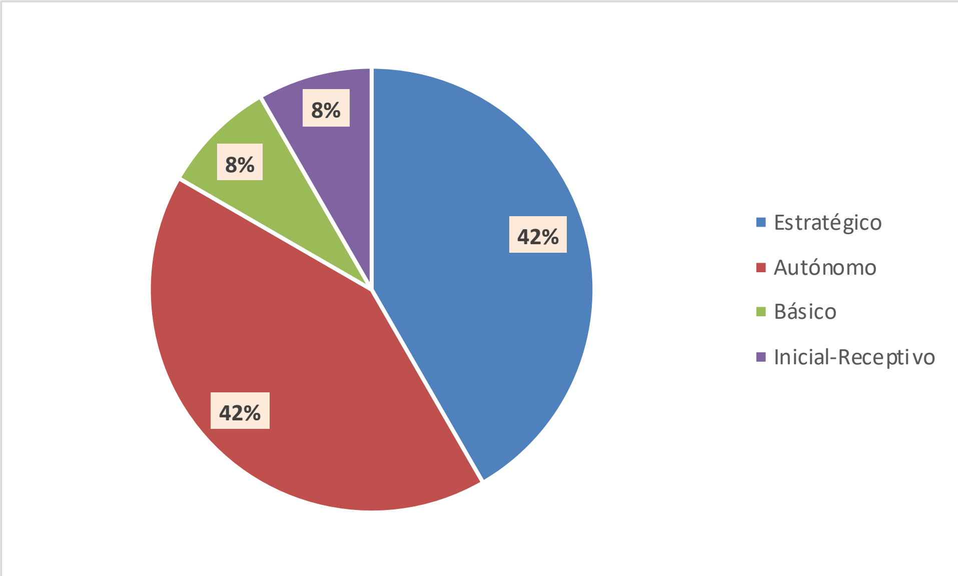


Figura 22. Respuesta al inciso (b) del ítem 2.

Para el inciso (c) es esperaba que los discentes desarrollaran la expresión completa de $23 = a + a + 5$ o bien, una equivalente, $23 = 2a + 5$. Ocho discentes contestaron alguna de las opciones antes mencionadas, mostrando un nivel estratégico. Tres dejaron su respuesta en un nivel autónomo donde incluso ponían las magnitudes correspondientes. Sólo un discente dió una respuesta de nivel básico, ya que no denotaba la expresión algebraica a pesar de haber contestado los ítems anteriores.

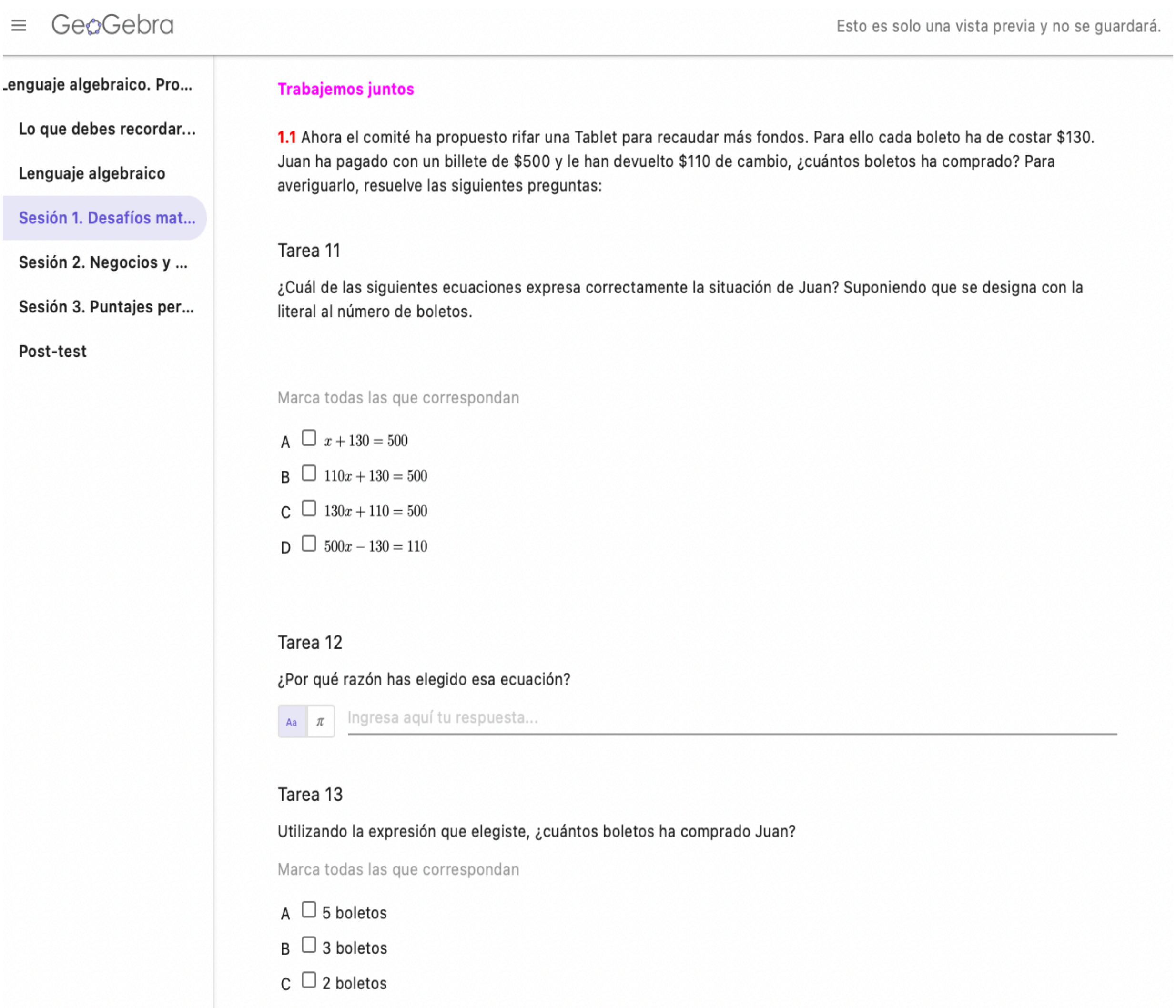
Para el inciso (d) se esperaba que los discentes realizaran la acción de trabajar con la expresión algebraica que ya habían formulado, dando como respuesta 9m, eso mostraría un nivel estratégico. En tal situación el 58% de los discentes obtuvieron dicho nivel, mientras que el 42% no lograron llegar al resultado correcto, por lo que mostraron un nivel autónomo.

Después de haber concluido las actividades de esta sección de la sesión, los discentes continuaron con la siguiente: “Trabajemos juntos”. En este punto, se les cuestionó si habían tenido alguna duda con respecto al uso de la plataforma, a lo que respondieron que no, aunque si era un poco tardado meter expresiones algebraicas.

Trabajemos juntos

Para esta sección se dió un lapso de 15 minutos para completar las actividades, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática, cabe mencionar que fueron planteamientos dando continuidad a los de la primera sección, pero con un mayor grado de dificultad.



GeoGebra — Esto es solo una vista previa y no se guardará.

- Lenguaje algebraico. Pro...
- Lo que debes recordar...
- Lenguaje algebraico
- Sesión 1. Desafíos mat...
- Sesión 2. Negocios y ...
- Sesión 3. Puntajes per...
- Post-test

Trabajemos juntos

1.1 Ahora el comité ha propuesto rifar una Tablet para recaudar más fondos. Para ello cada boleto ha de costar $130. Juan ha pagado con un billete de $500 y le han devuelto $110 de cambio, ¿cuántos boletos ha comprado? Para averiguarlo, resuelve las siguientes preguntas:

Tarea 11

¿Cuál de las siguientes ecuaciones expresa correctamente la situación de Juan? Suponiendo que se designa con la literal al número de boletos.

Marca todas las que correspondan

A ☐ $x + 130 = 500$

B ☐ $110x + 130 = 500$

C ☐ $130x + 110 = 500$

D ☐ $500x - 130 = 110$

Tarea 12

¿Por qué razón has elegido esa ecuación?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 13

Utilizando la expresión que elegiste, ¿cuántos boletos ha comprado Juan?

Marca todas las que correspondan

A ☐ 5 boletos

B ☐ 3 boletos

C ☐ 2 boletos

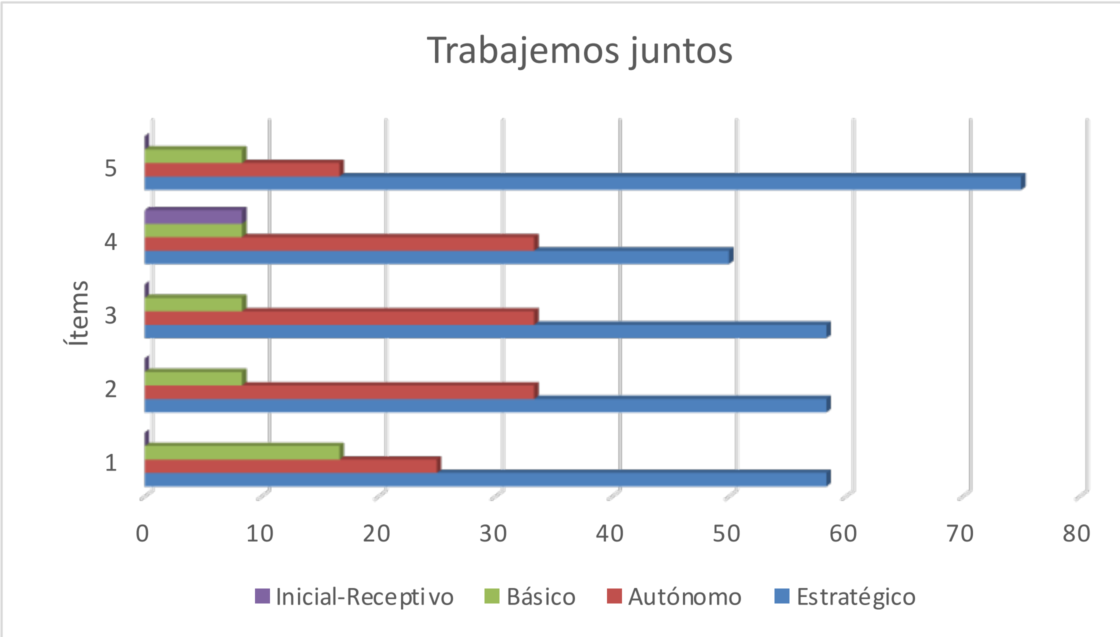


Figura 23. Respuestas de los incisos de la sección.

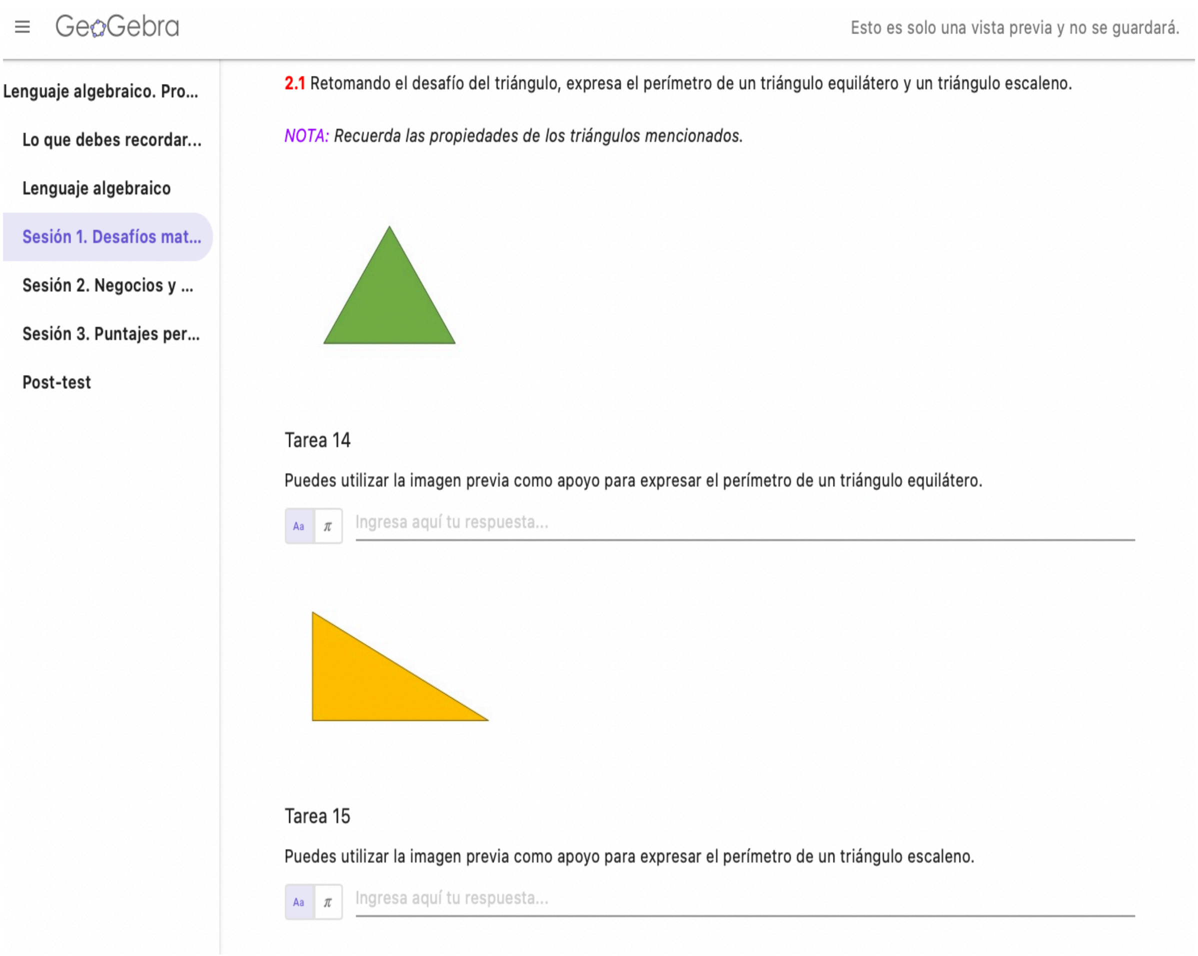
Para el inciso (a) se esperaba que los discentes eligieran en base a la información proporcionada la expresión $130x + 110 = 500$. Siete de los discentes eligieron correctamente la expresión, mostrando un nivel estratégico, mientras que tres mostraron tener un nivel autónomo y uno sólo, un nivel básico. Con el fin de justificar el nivel de sus respuestas al ser de elección múltiple y estar ya formuladas, fue porque eligieron la expresión $110x + 130 = 500$, en cuya justificación expresada en el inciso (b), se pudo observar que confundieron el precio del boleto con el cambio proporcionado, pero estaban conscientes de que ambos valores tendrían que dar el total del billete de $500.

Para el inciso (c) siete discentes contestaron correctamente desarrollando la expresión que eligieron dando como respuesta 3 boletos, mostrando de esta forma un nivel estratégico. El resto del grupo ha dejado una respuesta de nivel autónomo y básico, ya que al elegir erróneamente la expresión el resultado fue incorrecto, o bien, porque el desarrollo de la expresión para dar la solución quedó inconcluso por cálculos aritméticos.

De esta última respuesta, pudimos observar que el grupo necesitaba reforzar la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $ax + b = c$

por lo que esta actividad permitió que el profesor de la asignatura pudiera ver los déficits con los cuales debe trabajar, por lo que hasta el momento pudimos ver que la justificación del trabajo se estaba cumpliendo.

La siguiente situación problemática mencionaba:



En esta actividad se pretendía que con base en la actividad anterior donde se anotaban los datos necesarios para calcular el perímetro del triángulo isósceles, ellos pudieran hacer algo semejante.

Para el inciso (a) seis discentes lograron expresar de manera correcta el perímetro de los triángulos que se les presentó, dando expresiones como: $P = x + x + x$, $P = l + l + l$, o bien, $P = a + a + a$ para el caso del triángulo equilátero, mientras que para el triángulo escaleno, formularon expresiones como: $P = x + y + z$ y $P = a + b + c$, cabe mencionar que en todas las expresiones que formularon asociaron la P a $Perímetro$.

Los otros cuatro discentes no lograron expresar correctamente el perímetro, dando como respuestas: $a + a + a, x + x + x$, mostrando un nivel autónomo, dos discentes más, escribieron con magnitudes, como $5m + 5m + 5m$ para el caso del triángulo equilátero.

Para el inciso (b), se obtuvieron respuestas muy parecidas al anterior como se puede observar en la Figura 24. El 75% de los estudiantes se mantuvo en un nivel estratégico, mientras que el 8% para el triángulo escaleno dejaron expresado únicamente magnitudes, mostrando un nivel básico e inicial-receptivo.

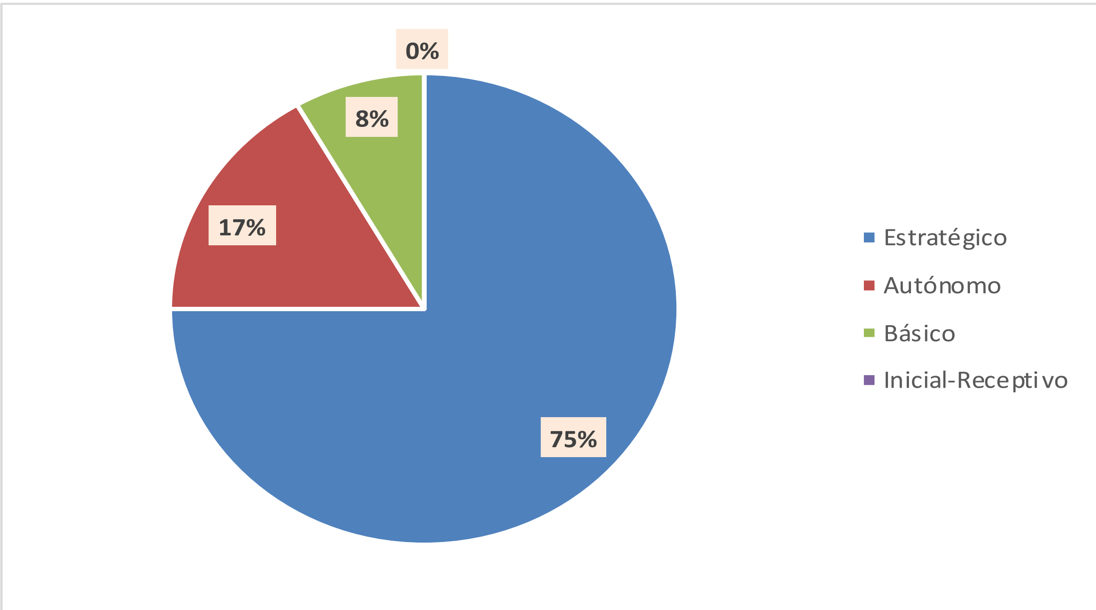
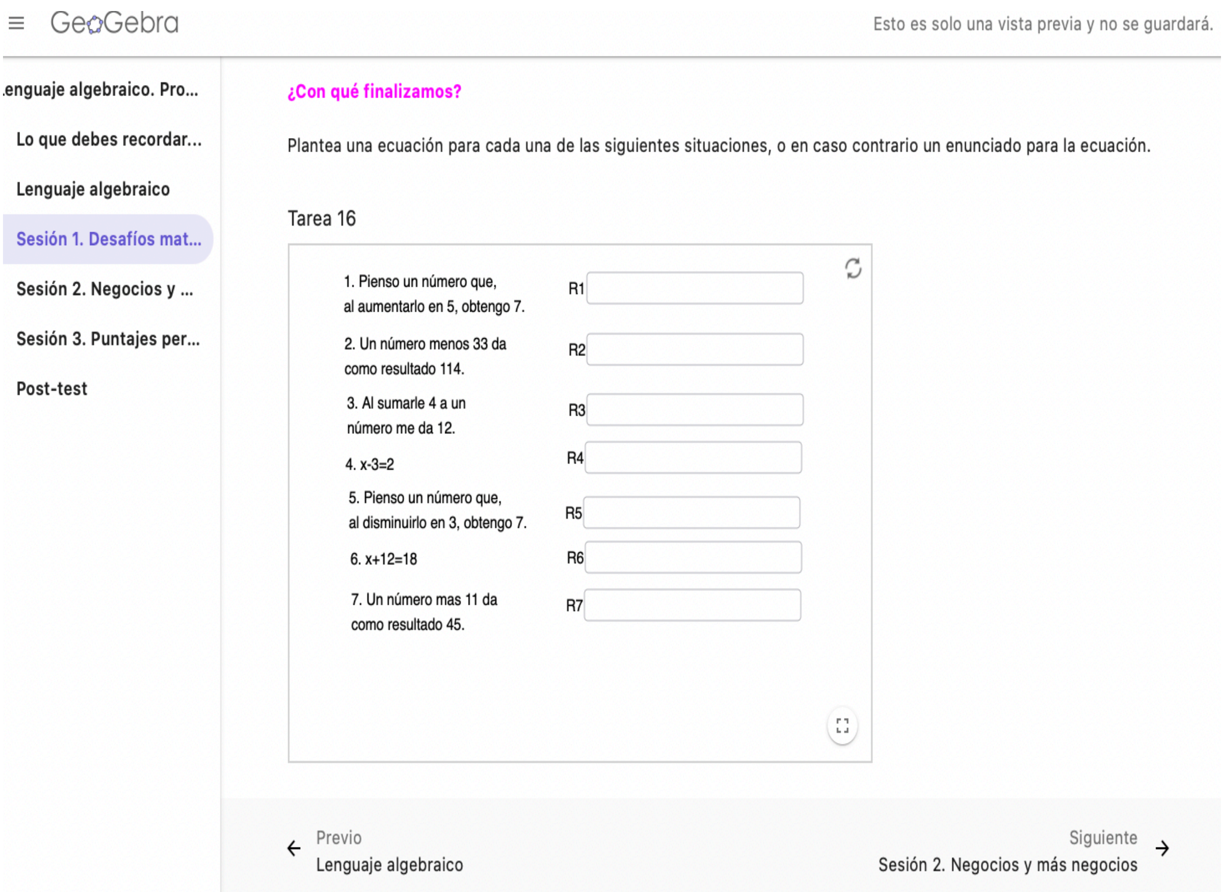


Figura 24. Respuesta al inciso (b) del ítem 2.

¿Con qué finalizamos?

En esta sección se utilizó el resto del tiempo especificado para esta primera sesión para completar las actividades, obteniendo los resultados que a continuación se describen.



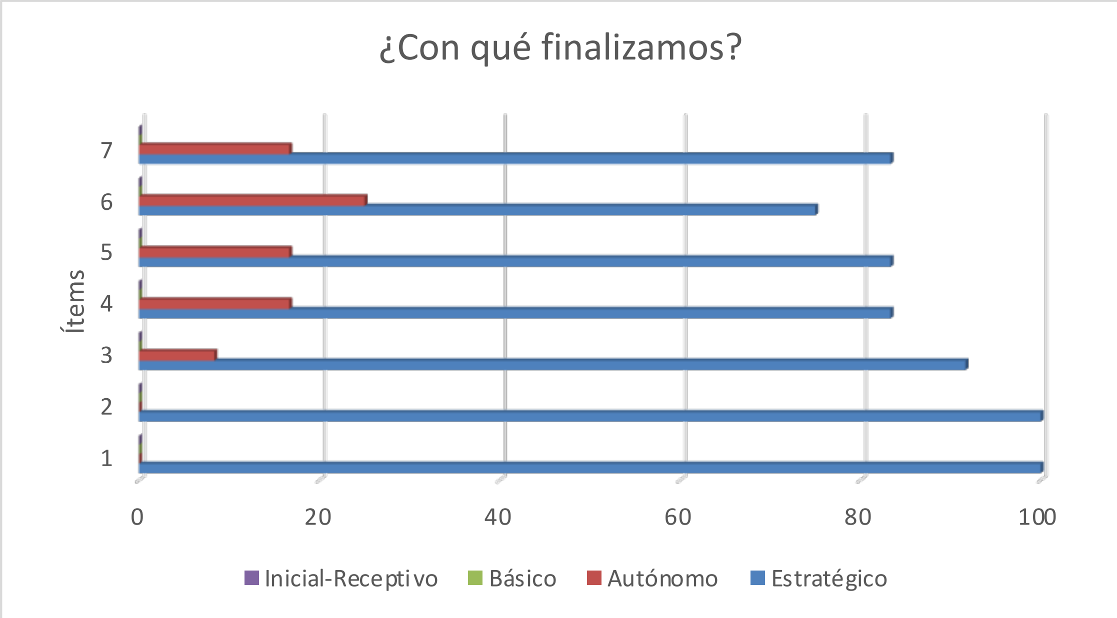


Figura 25. Respuestas de los incisos de la sección.

Para los incisos (a) y (b) se esperaba que dieran las respuestas: $x + 5 = 7$ y $x - 33 = 144$, respectivamente, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal, los doce discentes dieron una respuesta correcta, mostrando un nivel estratégico.

Para el inciso (c) se esperaba que los discentes dieran como respuesta $x + 4 = 12$, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal. Once de ellos dieron una respuesta correcta, mostrando así un logro de un nivel estratégico. Mientras que sólo un discente se quedo en el nivel autónomo, debido a que completó aritméticamente la expresión, es decir, denotó: $4 + 8 = 12$, aún cuando la respuesta es correcta, recordemos que la instrucción exige el planteamiento de una ecuación.

Para los incisos (d), (e) y (f) se esperaba que los discentes dieran las respuestas: $Un\ número\ menos\ 3\ da\ como\ resultado\ dos$, $x - 3 = 7$ y $Pienso\ un\ número\ que\ al\ aumentarlo\ en\ 12,\ obtengo\ 18$, respectivamente. Mostrando de esta forma que habían obtenido un nivel estratégico, con respescto al uso de los vocablos de suma y resta, para el uso del lenguaje algebraico. Diez de los discentes para los incisos (d) y (e), si alcanzaron el nivel estratégico, dando respuestas correctas, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal y el planteamiento del enunciado, mientras que dos discentes obtuvieron un nivel autónomo. Para el caso del inciso (f), tres discentes obtuvieron un nivel autónomo, porque dieron como respuesta: $a\ x\ le\ quito$ 3 $y\ obtengo$ 2, $a\ x\ le\ aumento$ 12 $y\ obtengo$ 18, o bien, aritméticamente: 10 − 3 = 7.

Hacemos hincapié que las respuestas que se exigían en la instrucción era el planteamiento de una ecuación, y en el caso de la redacción del enunciado, aun cuando utilizan las palabras *quito* y *aumento*, simplemente están trasladando lo que ven visualmente pero no hacen como tal la formulación de un enunciado.

Para el caso del último inciso (g), diez discentes lograron el nivel estratégico, dando como respuesta $x + 11 = 45$, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal empleada. Mientras que el resto de discentes, obtuvo un nivel autónomo.

Conclusiones de la sesión 1. Desafíos matemáticos.

Podemos decir de manera general que la aplicación de la primera sesión reflejó un buen desempeño de los discentes, así como de una buena disposición para trabajar. Dentro del tiempo planeado para cada una de las secciones de la sesión se cumplió con el, aún cuando al principio tardaron un poco en entender la manera de escribir dentro del EVA de GeoGebra, a pesar de ello poco a poco fueron familiarizándose con la dinámica de trabajo, arrojando los resultados antes mostrados. Aún cuando se esperaban preguntas con respecto a los enunciados de la plataforma, por alguna situación de redacción, no hubo ninguna por parte de los discentes.

Por último, el hecho de estipular un tiempo para el desarrollo de las actividades, al inicio de la sesión, permitió a los discentes guardar sus avances dentro de la plataforma, y algunos que tuvieron más tiempo debido a su desempeño pudieron revisar de manera rápida de que iba la siguiente sesión, por lo que al finalizar se acercaron para comentar si quedaba registrado su inicio de sesión, a lo que se les replicó que -sí-, haciendo comentarios que entonces no podían revisar para contestar bien, al dia siguiente. Los discentes cerraron sus sesiones dentro de la plataforma y se dió por terminada la sesión del día.

Sesión 2. Negocios y más negocios

Empezaremos describiendo la sesión, la cual está estructurada en cuatro partes, en la primera parte *"considera los siguientes casos"* se le plantea al discente la problemática que presentan dos negocios, dichas actividades implican el uso del lenguaje algebraico con respecto a la multiplicación. La segunda parte *"Trabajemos juntos"* es una actividad que da continuidad a los planteados en la primera parte, pero con un grado mayor de dificultad. La tercera parte *"Algo más"*, involucra actividades referentes al uso de expresiones con fracciones, esto debido a que en la prueba diagnóstico se pudo observar que los discentes presentaban dificultades con este aspecto, y por último *¿Con qué finalizamos?"*, en esta parte se hace el cierre de la sesión con producciones propias del discente. Nuevamente se hace mención que dentro de cada una de las partes de la sesión se monitoreó el trabajo que iban realizando los discentes, esto con el fin de indagar si entendían el planteamiento de las actividades o bien, si tenían dudas con respecto a la redacción de éstas.

Considera los siguientes casos

La actividad se inició dándoles nuevamente la indicación de cómo se iba a trabajar la sesión completa, indicándoles que sería la misma dinámica que en la primera sesión, es decir, tendrían 40 minutos para trabajar y posteriormente guardar su avance en la plataforma. También se les recordó que tenían que entrar con la misma cuenta de usuario con la cual trabajaron en la sesión anterior.

Los discentes comenzaron con la primera actividad de esta sección de la sesión, leyendo la siguiente situación problemática:

≡ GeoGebra Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...
- Lo que debes recordar...
- Lenguaje algebraico
- Sesión 1. Desafíos mat...
- Sesión 2. Negocios y ...
- Sesión 3. Puntajes per...
- Post-test

Sesión 2. Negocios y más negocios

Considera los siguientes casos

1. José quiere montar una serigrafía, para ello necesita comprar una imprenta y materia prima como pintura y playeras. Después de estas compras se ha dado cuenta de que cuatro veces el capital que ha invertido representa $120,000. Como primer pedido, un equipo de futbol le ha encargado la impresión de sus playeras, les han gustado tanto que ha pedido el doble de juegos, en total ha cobrado $2,550 por el trabajo, del cual $1,000 corresponden a la materia prima.

Tarea 17

Del primer pedido que ha sacado Juan con las playeras de futbol, ¿cuánto ha sido su ganancia?

Marca todas las que correspondan

A ☐ $1,550.00
B ☐ $3,550.00
C ☐ $2,550.00

Tarea 18

Si designas con la literal x al número de juegos de playeras, ¿cómo expresarías el total que han pedido?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 19

¿Cuál fue el precio de venta de cada juego de playeras? Utiliza tus respuestas anteriores.

Marca todas las que correspondan

A ☐ $550.00
B ☐ $780.00
C ☐ $850.00

Tarea 20

¿Cómo expresarías el capital que ha invertido José en su negocio?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

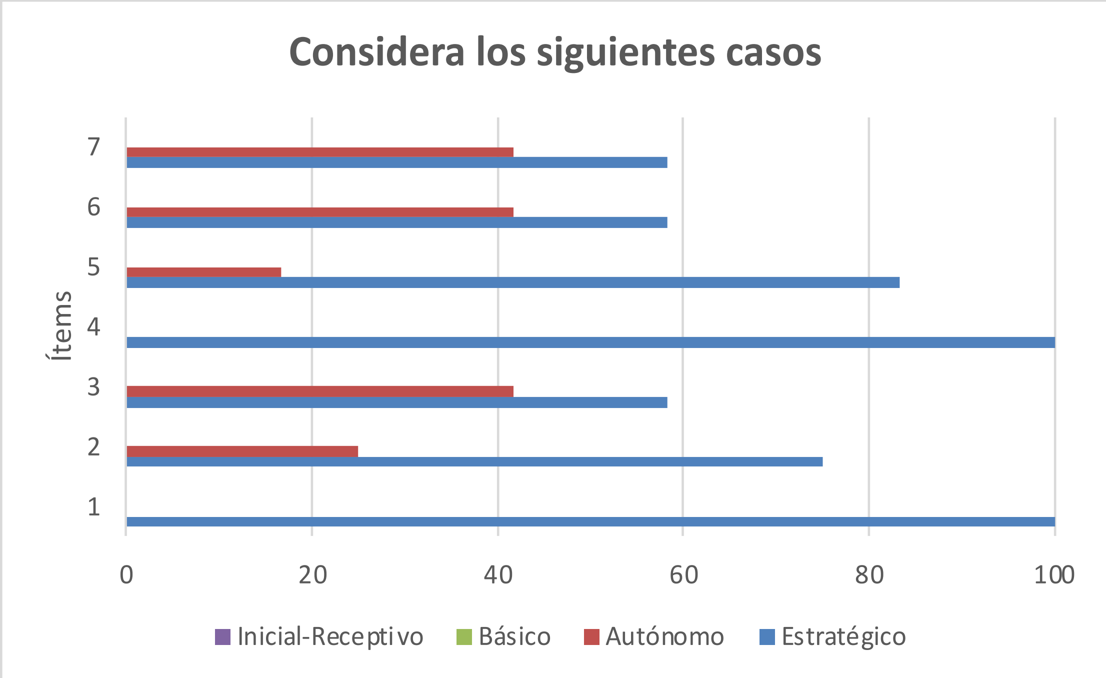


Figura 26. Respuestas de los incisos de la sección.

Para el inciso (a) se esperaba que con la información que se les proporciona en el planteamiento del problema, puedan hacer el cálculo aritmético de: $\$2{,}550 - \$1{,}000 = \$1550$. El 100% de los discentes identificó correctamente los datos y la operación aritmética que tenían que realizar, mostrando un nivel de competencia estratégico.

Para el inciso (b) se esperaba que el discente identificara que en total se han pedido tres juegos, y expresaran: $x + 2x$, o bien, $3x$. El 75% de los discentes expresaron de manera correcta el número de juegos de playeras, mostrando de esta forma que tienen un nivel estratégico. Mientras que el resto sólo logró identificar el doble de juegos, dejando una respuesta en nivel autónomo, es decir, $x + x$, o bien, $2x$.

Para el inciso (c) se esperaba que el discente expresara $3x = 2550$ y a partir de ello pudieran decir el precio de cada juego, equivalente a $\$850$. Siete discentes lograron expresar de manera correcta la ecuación que representa el precio de venta de cada juego de playeras, mostrando así un nivel estratégico, y por lo tanto dieron el costo de cada juego. Mientras que el resto del grupo expresó $3x = 1550$, por lo que el precio de venta de cada juego que dieron fue de $516.66, esto puede deberse a que la redacción del ítem menciona que utilice sus respuestas anteriores, y en el primer inciso dieron como respuesta la cantidad de $1550, sin embargo, tenían que comprender que el precio del juego involucra también la ganancia del negocio, por lo tanto se identifican en un nivel autónomo.

Para el inciso (d) se esperaba que el discente expresara $4x = 120{,}000$. El 100% lo hizo correctamente, considerando el capital invertido en la serigrafía, dando como respuesta $4x = 120{,}000$ o equivalentes como: $4v = 120{,}000$, $c + c + c + c = 120{,}000$, esto denotó que los discentes se encuentran en un nivel estratégico.

Para el segundo ítem, se les planteó la siguiente problemática:

Para el inciso (a) se esperaba que los discentes contestaran $2.75x,$ con base a la información proporcionada en el planteamiento del problema, para lo cual el 83% de los discentes expresó correctamente la respuesta esperada, identificándose así en un nivel estratégico. Mientras que el 17% dió una respuesta cuya definición los coloca en un nivel autónomo.

Para el inciso (b) se esperaba con base a su respuesta en el ítem anterior, pudieran expresar $2.75x + 35$. El 58% de los discentes proporcionó la respuesta esperada (Figura 27), sin embargo, el 42% de las repuestas de los discentes se consideró su en un nivel autónomo, ya que, haciendo omisión de su respuesta en el inciso anterior, expresaron: $35x + 2.75$, es decir invirtieron la información, pero lograron identificar los datos que tenían que estar presentes en la expresión. Esto se ve reflejado en la respuesta del siguiente inciso, ya que al expresar $35x + 2.75 = 65.25$, dieron como respuesta $1.78km$, siendo que la respuesta correcta es $11km$.

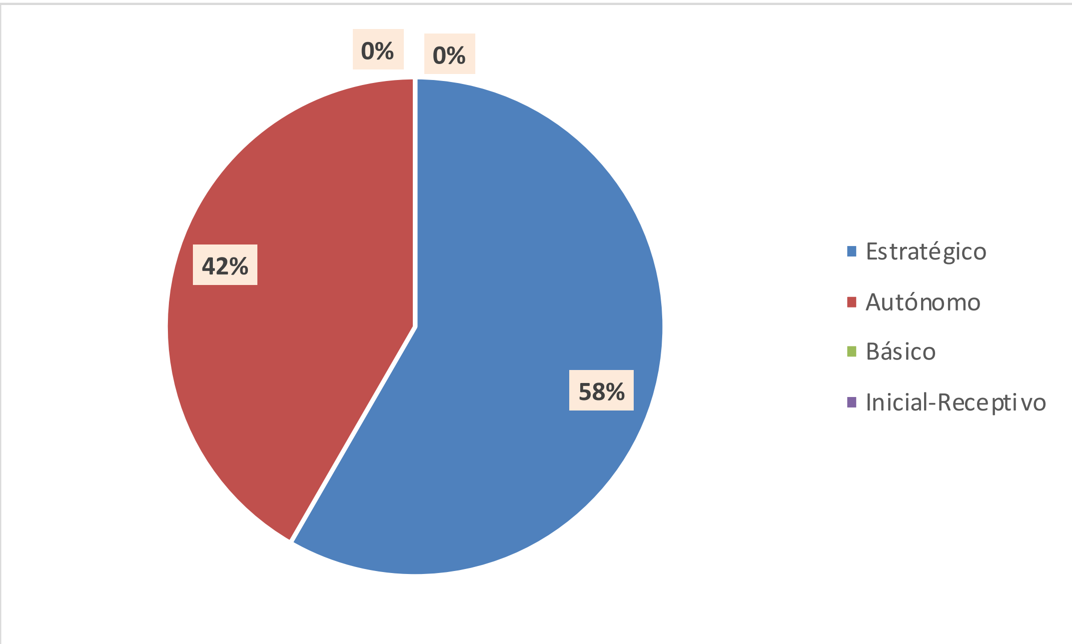


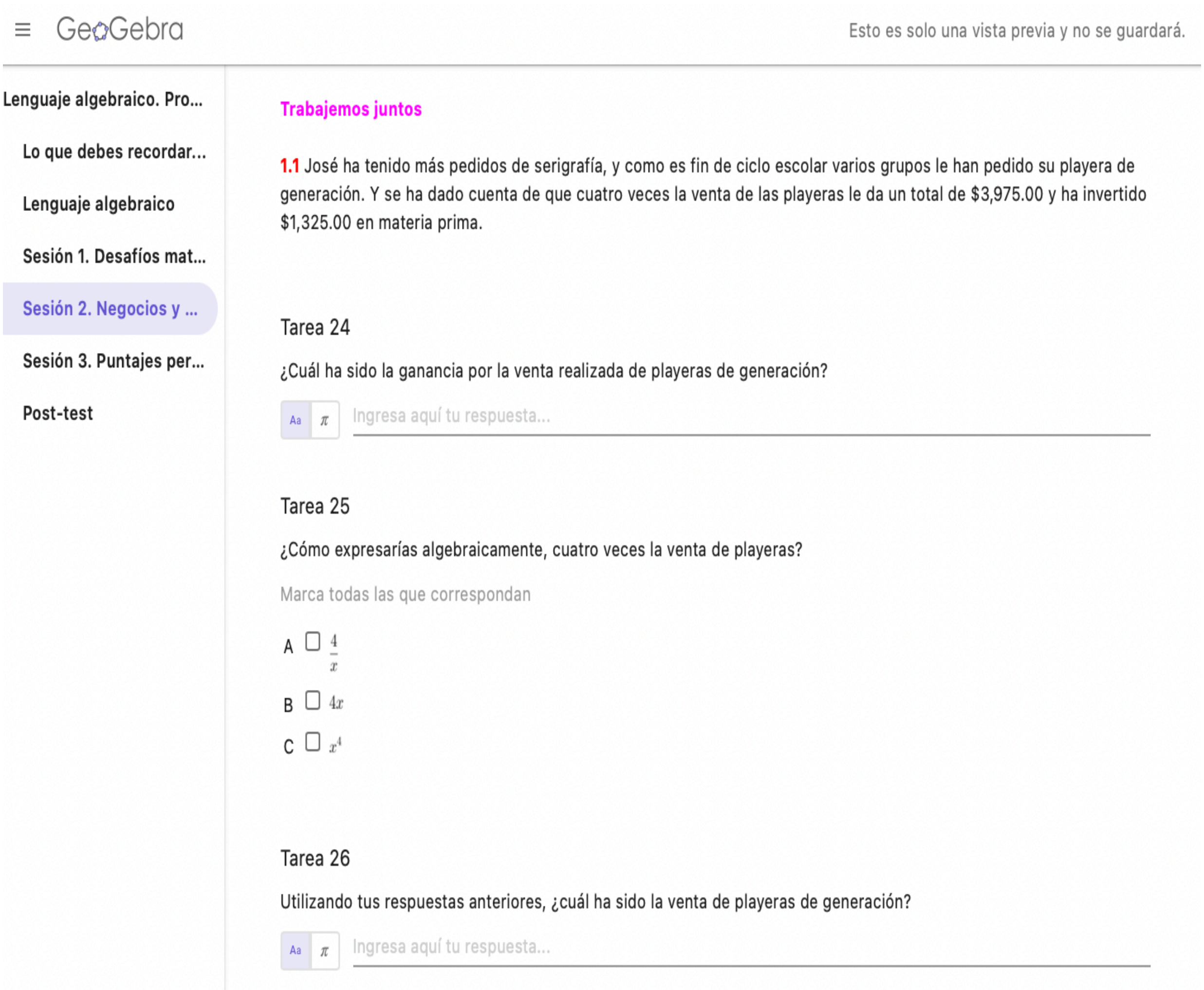
Figura 27. Respuesta al inciso (b) del ítem 2.

Después de haber realizado las actividades de esta sección, se continuo con:*"Trabajemos juntos"*.

Trabajemos juntos

En esta sección se dio un lapso de 15 minutos para completar las actividades, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática, cabe mencionar que fueron planteamientos dando continuidad a los de la primera sección, pero con un mayor grado de dificultad.



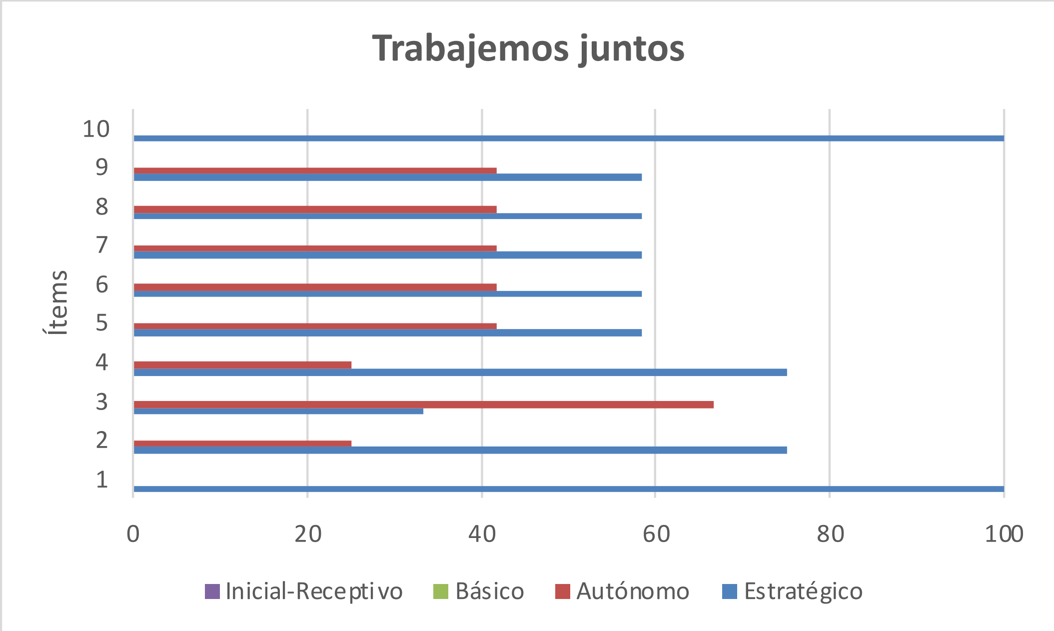


Figura 28. Respuestas de los incisos de la sección.

Para el inciso (a) se esperaba que los discentes dieran por respuesta: $\$2{,}650$, los cuales al 100% proporcionaron dicha respuesta, mostrando así un nivel estratégico. En el caso (b) se esperaba que los discentes dieran por respuesta $4x$, de los cuales el 75% dio dicha respuesta, mostrando un nivel estratégico, mientras que el resto del porcentaje de discentes se quedó en un nivel autónomo.

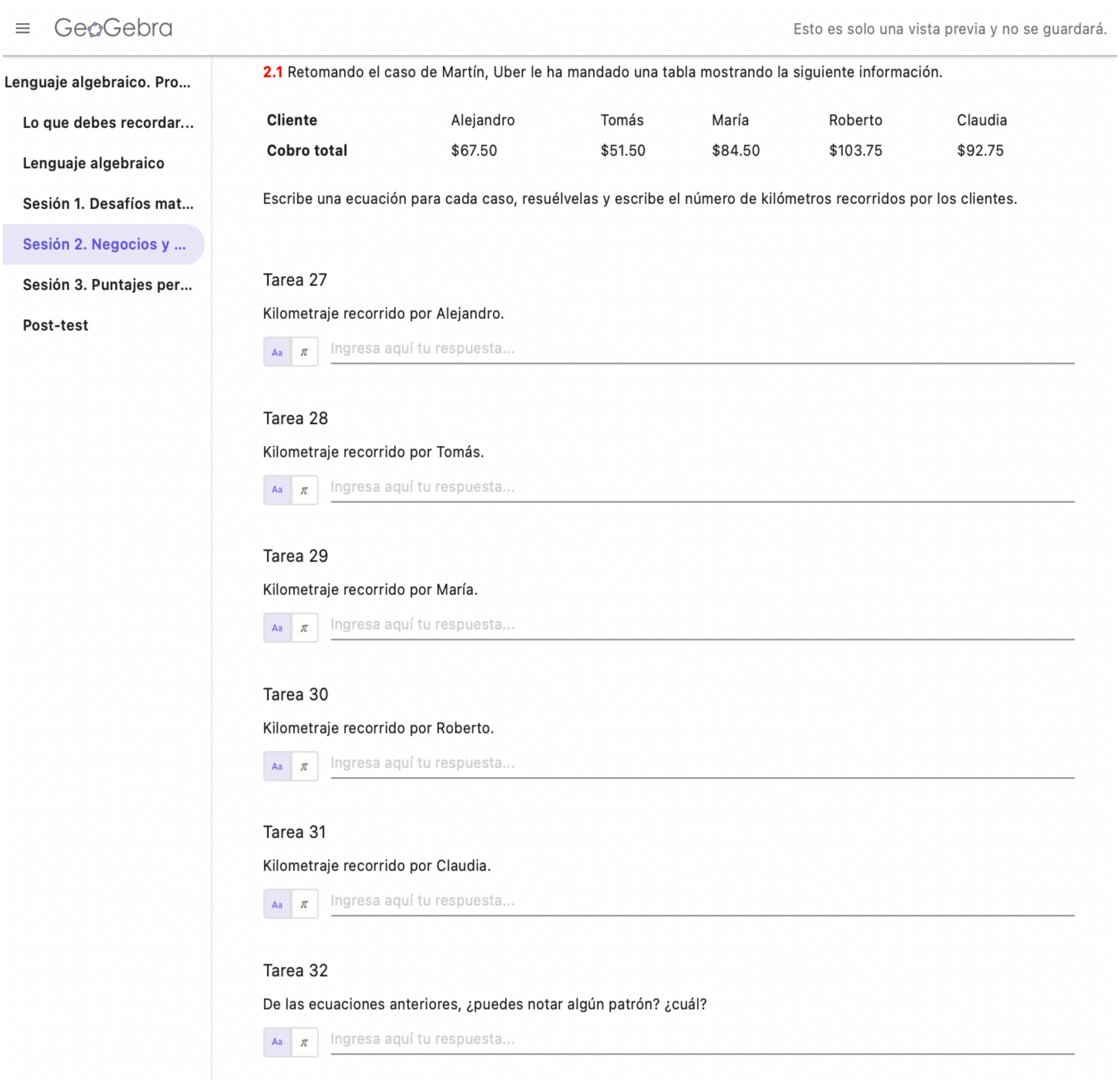
En este problema, se observó que entre algunos discentes comentaron que cuatro veces la venta se asemejaba al primer problema donde decía cuatro veces el capital, por lo que pudieron expresar con mayor claridad $4x$.

Para el inciso (c) se esperaba que los discentes expresaran $4x = 3975$ y que a partir de ello dieran la respuesta de $\$993.75$ correspondiente a la venta. Cuatro discentes dieron la respuesta correcta, por lo que tuvieron un nivel estratégico.

En este problema, nuevamente se escucharon comentarios con respecto a la igualdad de la ecuación, ya que esta vez consideraron el total de dinero que se recaudó con la impresión de las playeras, a raíz de sus respuestas en la sección anterior.

Sin embargo, fueron ocho discentes, es decir, la mayoría del grupo quien mostró un nivel autónomo, debido a que volvieron asociar la respuesta del inciso (a) en su expresión, por lo que su respuesta con respecto a la venta fue de $\$662.5$.

Los discentes tardaron 10 minutos en contestar esta actividad por lo que para el segundo ítem tuvieron más tiempo para contestar, enfrentando la siguiente problemática:


GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...
Lo que debes recordar...
Lenguaje algebraico
Sesión 1. Desafíos mat...
Sesión 2. Negocios y ...
Sesión 3. Puntajes per...
Post-test

2.1 Retomando el caso de Martín, Uber le ha mandado una tabla mostrando la siguiente información.

Cliente	Alejandro	Tomás	María	Roberto	Claudia
Cobro total	$67.50	$51.50	$84.50	$103.75	$92.75

Escribe una ecuación para cada caso, resuélvelas y escribe el número de kilómetros recorridos por los clientes.

Tarea 27

Kilometraje recorrido por Alejandro.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 28

Kilometraje recorrido por Tomás.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 29

Kilometraje recorrido por María.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 30

Kilometraje recorrido por Roberto.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 31

Kilometraje recorrido por Claudia.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 32

De las ecuaciones anteriores, ¿puedes notar algún patrón? ¿cuál?

Ingresa aquí tu respuesta...

Para los incisos (a), (b), (c), (d) y (e) se esperaba que los discentes dieran como respuesta la expresión $2.75x + 35$, asociando la igualdad a cada caso que se les presenta. En todos los incisos, siete discentes dieron la respuesta correcta, asociando correctamente la expresión con cada igualdad, además de ello resolviendo correctamente la expresión y dando los kilómetros que se recorrieron en cada caso, mostrando de esta forma un nivel estratégico.

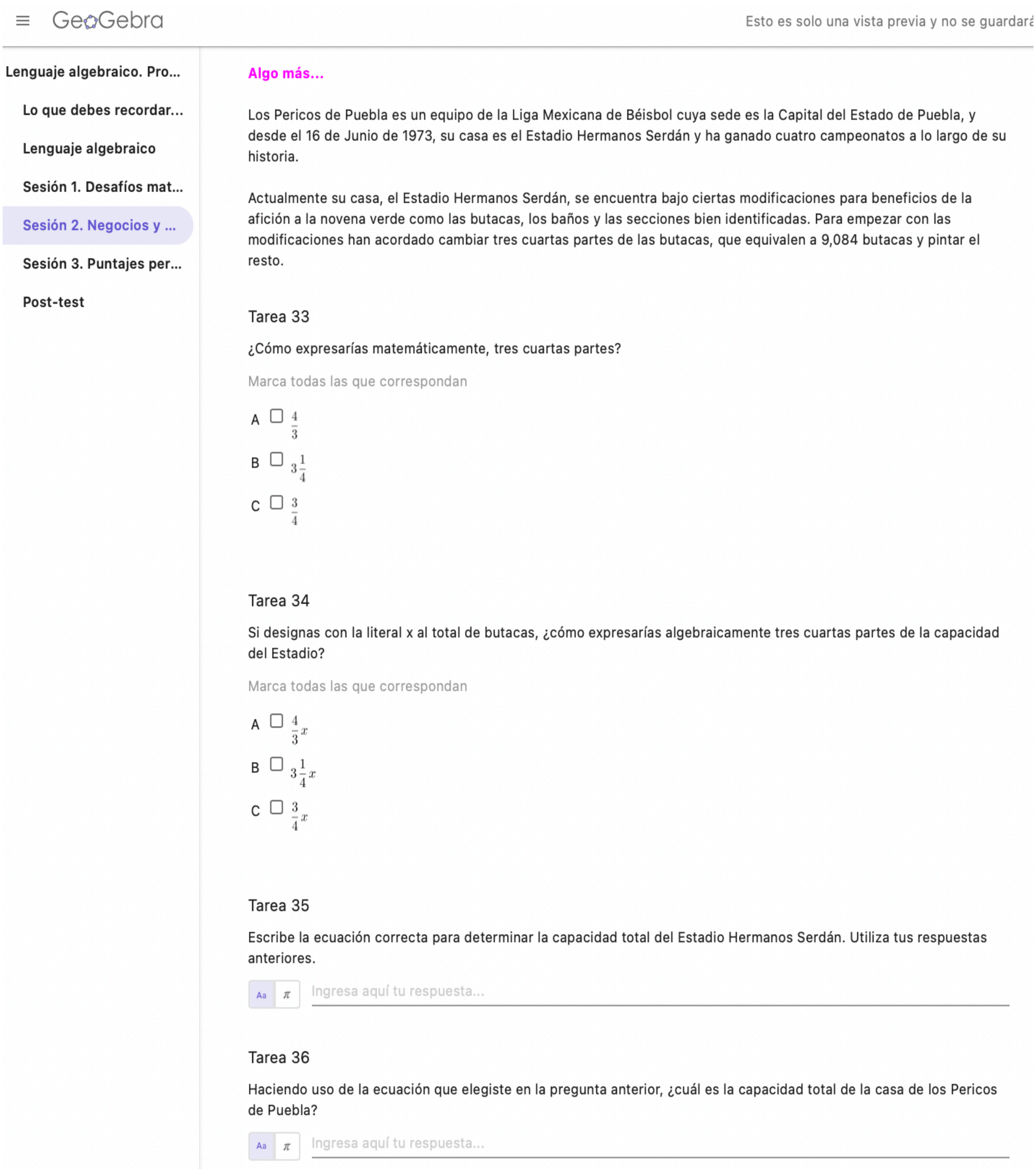
Sin embargo, cinco discentes mostraron un nivel autónomo ya que, si dieron la expresión esperada con las igualdades, pero en la resolución no llegaron al kilometraje de cada caso, debido a un cálculo aritmético. Aún cuando se observo que algunos discentes utilizaron papel y lápiz para hacer anotaciones, otros los hicieron mentalmente, por lo que este método pudo haberles dado una respuesta errónea.

Para el inciso (f) todos los discentes proporcionaron la respuesta esperada, notando el patrón correspondiente a la expresión $2.75x + 35$.

Después de haber realizado las actividades de esta sección, siguieron trabajando para continuar con la siguiente sección: *"Algo más..."*.

Algo más...

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática, en la cual se trabajaba con fracciones ya que en la prueba diagnóstico se notó que si tenían dificultades con expresar cocientes. En dicha actividad los discentes se tomaron 12 minutos.



GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará

Lenguaje algebraico. Pro...

Lo que debes recordar...

Lenguaje algebraico

Sesión 1. Desafíos mat...

Sesión 2. Negocios y ...

Sesión 3. Puntajes per...

Post-test

Algo más...

Los Pericos de Puebla es un equipo de la Liga Mexicana de Béisbol cuya sede es la Capital del Estado de Puebla, y desde el 16 de Junio de 1973, su casa es el Estadio Hermanos Serdán y ha ganado cuatro campeonatos a lo largo de su historia.

Actualmente su casa, el Estadio Hermanos Serdán, se encuentra bajo ciertas modificaciones para beneficios de la afición a la novena verde como las butacas, los baños y las secciones bien identificadas. Para empezar con las modificaciones han acordado cambiar tres cuartas partes de las butacas, que equivalen a 9,084 butacas y pintar el resto.

Tarea 33

¿Cómo expresarías matemáticamente, tres cuartas partes?

Marca todas las que correspondan

A ☐ $\frac{4}{3}$

B ☐ $3\frac{1}{4}$

C ☐ $\frac{3}{4}$

Tarea 34

Si designas con la literal x al total de butacas, ¿cómo expresarías algebraicamente tres cuartas partes de la capacidad del Estadio?

Marca todas las que correspondan

A ☐ $\frac{4}{3}x$

B ☐ $3\frac{1}{4}x$

C ☐ $\frac{3}{4}x$

Tarea 35

Escribe la ecuación correcta para determinar la capacidad total del Estadio Hermanos Serdán. Utiliza tus respuestas anteriores.

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 36

Haciendo uso de la ecuación que elegiste en la pregunta anterior, ¿cuál es la capacidad total de la casa de los Pericos de Puebla?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Para los incisos (a) y (b) se esperaba que los discentes dieran como respuestas $3\ /\ 4$ y $3/4x$, respectivamente. El 100% de los discentes no tuvieron dificultad en expresar correctamente las respuestas de cada inciso, mostrando de esta forma un nivel estratégico.

Para los incisos (c) y (d) se esperaba que los discentes dieron como respuestas $3/4x\ =\ 9{,}084$ y su resolución de $12{,}112$ butacas, respectivamente. En este caso, once discentes dieron la respuestas correctas para el inciso (c), por lo que la mayoría presentó un nivel estratégico. Mientras que para el inciso (d), el 58% de los discentes, presentó un nivel autónomo. Aunque el mayor procentaje de discentes, se agrupo en este nivel, no hubo otro porcentaje en los niveles inferiores.

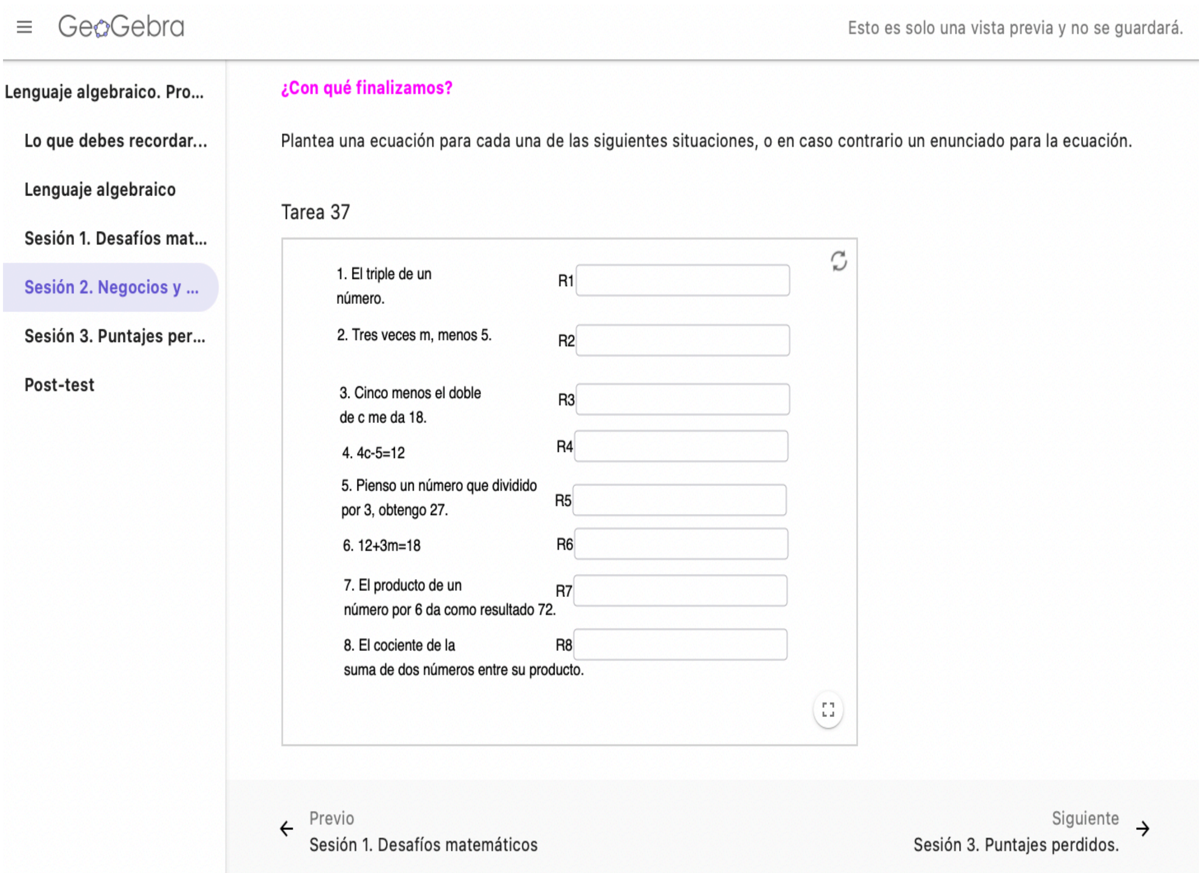
Nuevamente, se observó discusiones con respecto a la resolución de la ecuación por causa de los cálculos aritméticos, ya que al ser una fracción se les dificultó dar resolución a la ecuación.

Esta actividad en específico no les llevo mucho tiempo dar resolución, por lo que inmediatamente pasaron a la siguiente sección: *Con qué finalizamos?”.*

¿Con qué finalizamos?

Se dió un lapso de 10 minutos para completar las actividades de esta sección, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática:



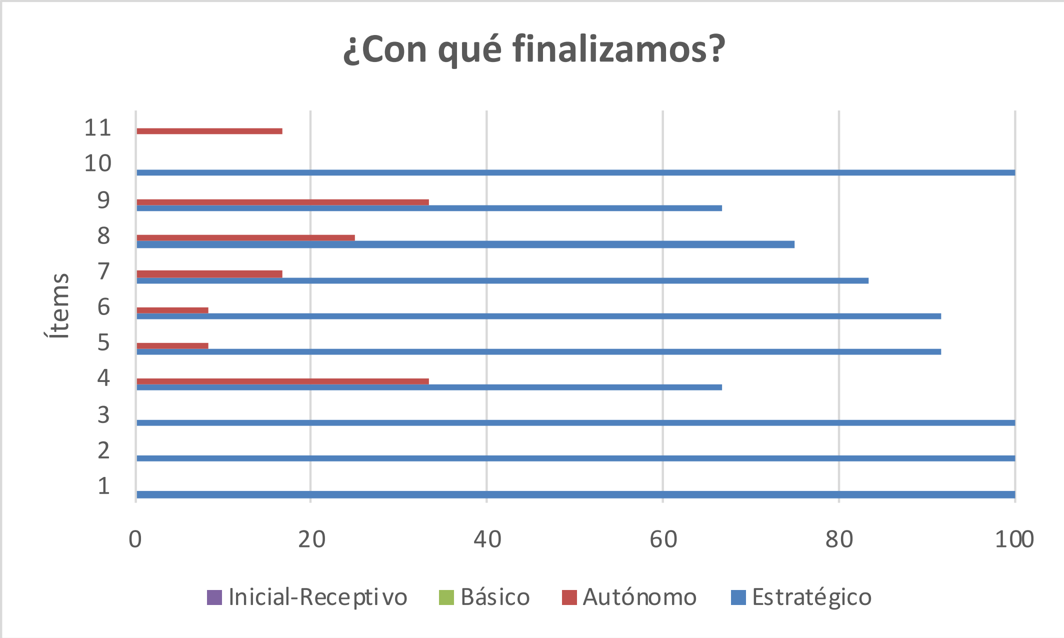


Figura 29. Respuestas de los incisos de la sección.

Para los incisos (a), (b) y (c), contestaron correctamente, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal, mostrando un nivel estratégico. Y en el caso del inciso (d) ocho discentes obtuvieron un nivel estratégico, mientras que cuatro se quedaron en el autónomo.

Para los incisos (e) y (f) los discentes mostraron un nivel estratégico en su mayoría, mientras que sólo el 8%, respectivamente, alcanzaron un nivel autónomo.

En los incisos (d) e (i), ocho discentes alcanzaron el nivel estratégico, mientras que cuatro se quedaron en el nivel autónomo. Cabe mencionar que para el inciso (i) se observó que los discentes discutieron sus respuestas por la forma de redacción, entre las cuales se destacan: "*el cociente de un número entre tres + 6=25*" y "*la tercera parte de un número más seis da veinticinco*". Cabe destacar que esta vez se considera correcta la respuesta proporcionada y no en proceso, porque utilizaron el lenguaje con el cual se pretendía que el discente se familiarizara, haciendo uso de la palabra *cociente*.

Para los inciso (g) y (h), el 83% y el 75% de los discentes obtuvieron un nivel estratégico, respectivamente. Mientras que para estos incisos, el 17% y el

25% alcanzaron un nivel autónomo, en ambos incisos no hubo discentes que se encontraran en un nivel básico o inicial-receptivo.

En el caso específico del inciso (h), los discentes mostraron un nivel autónomo, esto se consideró así porque dejaron expresado: $a + a\,/,$ o bien, $xx/x + x$, es decir no comprendieron que se trataba de dos números diferentes, denotando la misma literal, además en el segundo caso, el orden si afecta el resultado de la ecuación.

Conclusiones de la sesión 2. Negocios y más negocios

Podemos decir que de manera general la aplicación de la segunda sesión reflejó un buen desempeño de los discentes, así como de una mejor disposición para trabajar. En la primera sección de actividades se había planeado un tiempo de 10 minutos y estuvimos dentro del tiempo estipulado, a diferencia de la primera sesión de trabajo, tardaron menos tiempo en comprender los planteamientos de los problemas, así como del uso del EVA, se les notó menos ansiedad que en la primera sesión ya que sabían como unirse a la plataforma de GeoGebra y como ir desarrollando la escritura con las herramientas que proporciona dicha plataforma educativa, asímismo fueron más hábiles en entender y familiarizarse con la dinámica de trabajo, arrojando los resultados antes mostrados. Se observó durante la sesión, una mayor retroalimentación con sus mismos compañeros, aterrizando con mayor fluidez sus ideas. Esto es muy importante destacarlo porque como se hizo mención anteriormente, debían tener presente la ganancia que se percibía en los negocios, de manera que el discente se involucrara en la devolución del problema. Debido a que las actividades fluyeron con mayor rapidez que en la primera sesión, todos los discentes lograron expresar algebraicamente enunciados coloquiales y viceversa, haciendo uso de los nuevos términos que deseábamos, haciendo referencia a la operación de multiplicación, y aunque algunas respuestas pudieron haber sido mejores se hizo notar el uso del lenguaje algebraico para las operaciones de multiplicación y división que se pretendía con las actividades.

Sesión 3. Puntajes perdidos

Empezaremos describiendo la sesión que fue diseñada, la cual tenía como finalidad que los discentes trabajaran de manera lúdica utilizando precisamente los términos que se habían trabajado en las sesiones anteriores, está estructurada en dos partes, en la primera parte *“considera lo siguiente”* se le plantea al discente el contexto del problema, el cual hace referencia a un juego que está en tendencia llamado *Preguntados*.

≡ GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...

Lo que debes recordar...

Lenguaje algebraico

Sesión 1. Desafíos mat...

Sesión 2. Negocios y ...

Sesión 3. Puntajes per...

Post-test

Sesión 3. Puntajes perdidos.

Para comenzar

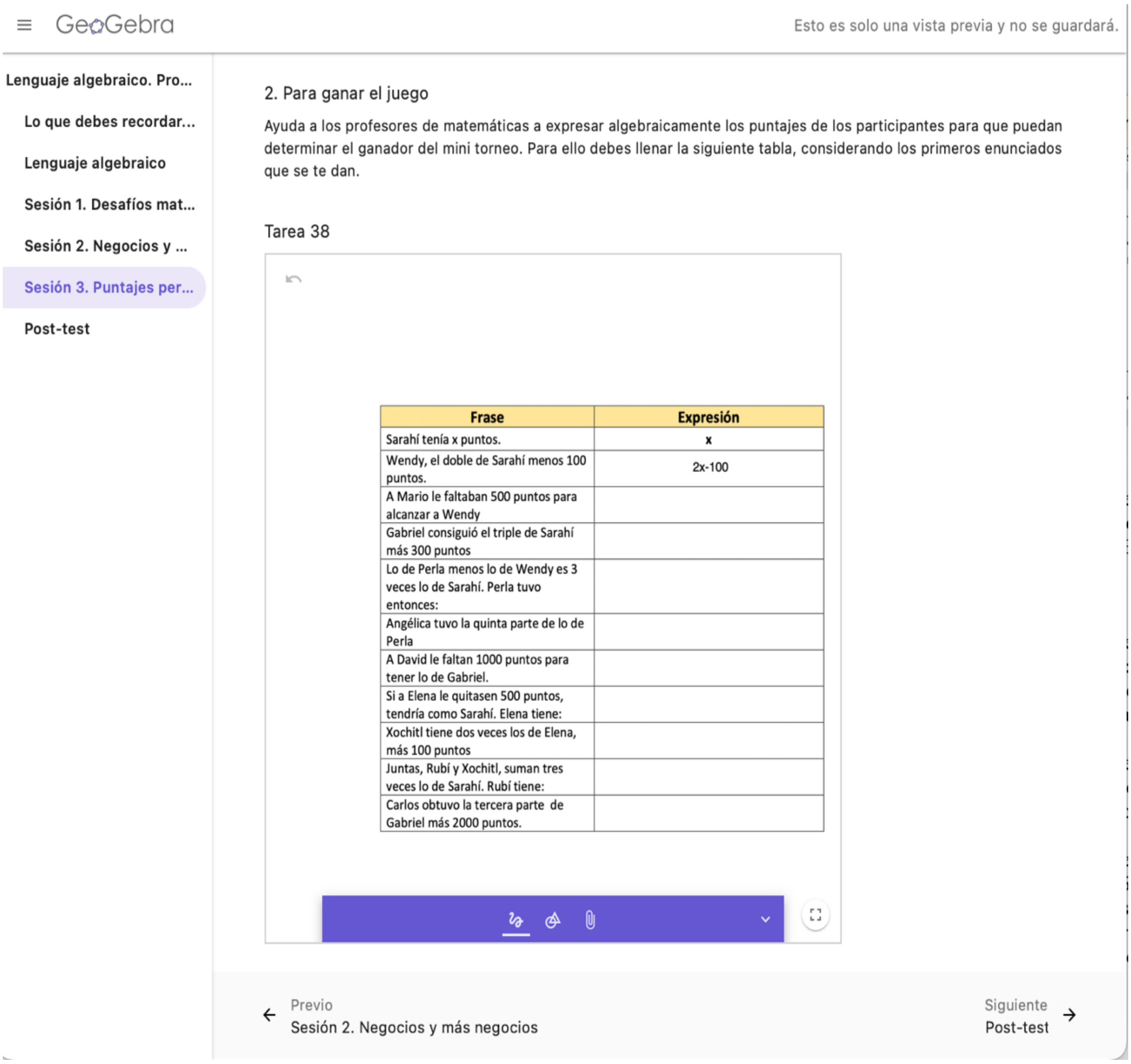
En las sesiones anteriores has estudiado algunas formas de expresar algebraicamente enunciados coloquiales, así como las palabras que representan a la misma operación aritmética de suma, resta, multiplicación o división.

1. Considera lo siguiente

En el juego de "Preguntados" como en cualquier otro, se debe llevar el registro del puntaje para elegir un ganador. En el colegio "La Salle" hicieron un mini torneo de este juego y han asignado a los profesores de Matemáticas para llevar el puntaje, pero en una distracción han perdido las puntuaciones de los participantes, sin embargo, son capaces de recordar lo siguiente:

Frase
Sarahí tenía x puntos.
Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos.
A Mario le faltaban 500 puntos para alcanzar a Wendy
Gabriel consiguió el triple de Sarahí más 300 puntos
Lo de Perla menos lo de Wendy es 3 veces lo de Sarahí. Perla tuvo entonces:
Angélica tuvo la quinta parte de lo de Perla
A David le faltan 1000 puntos para tener lo de Gabriel.
Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí. Elena tiene:
Xochitl tiene dos veces los de Elena, más 100 puntos
Juntas, Rubí y Xochitl, suman tres veces lo de Sarahí. Rubí tiene:
Carlos obtuvo la tercera parte de Gabriel más 2000 puntos.

La segunda parte *“Para ganar”* le brinda al discente las instrucciones para ganar el juego.



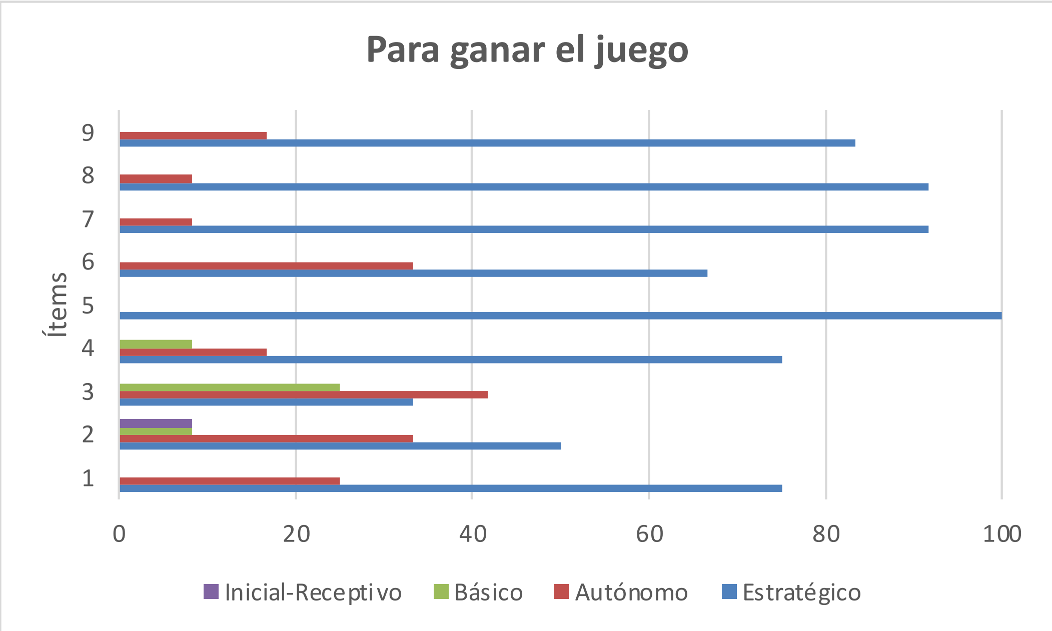
Frase	Expresión
Sarahí tenía x puntos.	x
Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos.	2x-100
A Mario le faltaban 500 puntos para alcanzar a Wendy	
Gabriel consiguió el triple de Sarahí más 300 puntos	
Lo de Perla menos lo de Wendy es 3 veces lo de Sarahí. Perla tuvo entonces:	
Angélica tuvo la quinta parte de lo de Perla	
A David le faltan 1000 puntos para tener lo de Gabriel.	
Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí. Elena tiene:	
Xochitl tiene dos veces los de Elena, más 100 puntos	
Juntas, Rubí y Xochitl, suman tres veces lo de Sarahí. Rubí tiene:	
Carlos obtuvo la tercera parte de Gabriel más 2000 puntos.	

Desarrollo de la sesión

Al inicio de la sesión se les pidió a los discentes que leyeran el planteamiento del problema propuesto dentro de la plataforma. Transcurrido el tiempo se les preguntó si tenían alguna duda con respecto a la problemática, a lo que respondieron que no. Asímismo se les indicó el tiempo que tenían disponible para terminar la sesión, que fue de 40 minutos, nuevamente con el proposito de que les diera tiempo de guardar sus avances y cerrar su sesión.

Dado que se les brindaba a los discentes las expresiones correspondientes a los dos primeros planteamientos, esto para tener una variable literal congruente en todos los planteamientos posteriores y no hubiera tanta variabilidad dentro del uso de literales.

Para la primera expresión: Sarahí tenía x puntos, se les mostró la expresión: x. En el segundo planteamiento, Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos, se les mostró la expresión: $2x - 100$.



Figuro 30. Respuestas a los incisos de la sesión.

Ahora bien, a partir de dichas expresiones, para el primer inciso nueve discentes mostraron un nivel estratégico con el uso del lenguaje algebraico, y sólo tres estudiantes alcanzarón el nivel autónomo, en este inciso no hubo nivel básico o inicial-receptivo.

Para el segundo inciso, el 50% de los discentes lograron un nivel estratégico, mientras que el 33% obtuvo un nivel autónomo. Sin embargo, en este inciso si hubo discentes que se encontraron en los niveles básico e inicial-receptivo.

En el tercer inciso, cinco discentes alcanzaron un nivel autónomo, mientras que tres de ellos, alcanzaron un nivel básico, dando expresiones que tenían datos relevantes del planteamiento coloquial pero que por transposición no lograron hacerlo correctamente. Este inciso, igual que el siguiente (d), son los que muestran más variabilidad en el nivel de competencia obtenido por los discentes, tal y como se muestran en las Figura 31 y Figura 32, respectivamente.

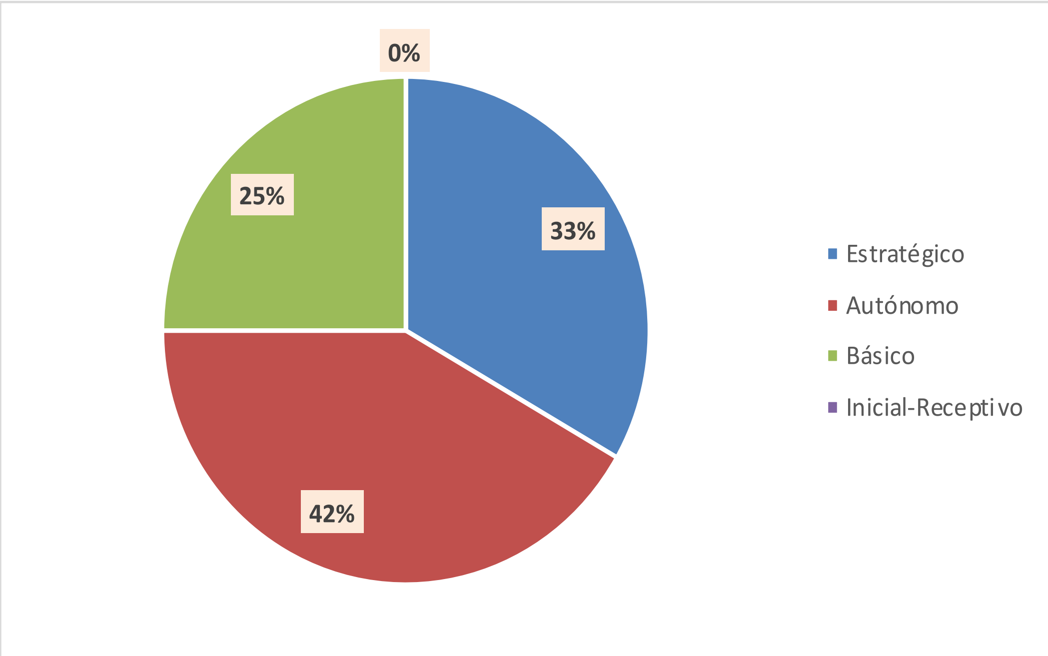


Figura 31. Respuestas al inciso (c) de la tercera sesión de trabajo.

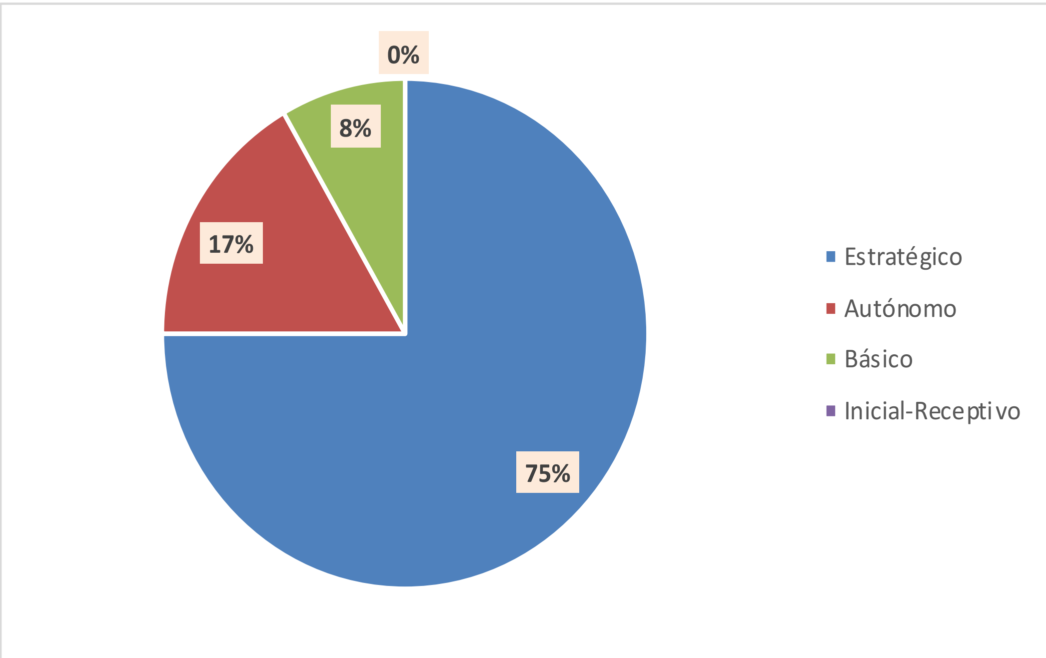


Figura 32. Respuestas al inciso (d) de la tercera sesión de trabajo.

Se pudo observar que entre más avanzavan los discentes en los incisos comenzaban a presentar un grado más de dificultad, sin embargo, para el inciso (e), los doce discentes lograron un nivel estratégico con la expresión que plantearon para dicho enunciado.

Para el inciso (f) cuya enunciado refiere: Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí, ocho discentes dieron una expresión correcta por lo que se colocaron en un nivel estratégico, mientras que el resto se posicionó en un nivel autónomo, hubo ausencia de discentes en nivel básico e inicial-receptivo.

Para los incisos (g) y (h), los porcentajes fueron los mismos, el 92% obtuvo un nivel estratégico, y el 8% se posicionó en un nivel autónomo, respectivamente. Por último, para el inciso (i), diez discentes se posicionaron en un nivel estratégico y sólo dos, en e autónomo.

Conclusiones de la sesión 3. Puntajes perdidos

Podemos decir que de manera general la aplicación de la tercera sesión reflejó un buen desempeño de los discentes, así como de una mejor disposición para trabajar. Para trabajar la primera parte se les dio a los discentes un lapso de 8 minutos para que leyeran el planteamiento del problema, manteniéndonos siempre dentro del tiempo estipulado para concretar la sesión completa, en esta sesión se notó aún más la interacción que tenían con el uso de la plataforma de GeoGebra y sus bondades para escribir expresiones algebraicas haciendo uso de sus herramientas digitales, arrojando los resultados antes mostrados.

Esta sesión en particular, hizo que los discentes utilizaran más papel y lápiz para desarrollar sus expresiones algebraicas y de esta forma poder dar sus respuestas dentro de la plataforma. Ya que el interés propio de la investigación es ver como el uso de un EVA fortalece las competencias del discente con respecto al uso del lenguaje algebraico, fueron estas respuestas las que se consideraron para poder determinar en que nivel se encontraba cada uno de ellos.

6.3 Aplicación del post-test y entrevista semiestructurada

En esta última fase del trabajo de campo en el nivel bachillerato, nos apoyaremos en los datos recogidos durante la aplicación de la propuesta didáctica en el EVA de GeoGebra así como en las producciones que han realizado los discentes, sus impresiones y los comportamientos esperados.

Describimos a continuación los resultados obtenidos en el pos-test, así como el desarrollo de entrevistas semiestructuradas con algunos discentes que desde la prueba diagnóstico, dejaron ver deficiencias en el uso del lenguaje algebraico, con la finalidad de enriquecer más el trabajo de invetigación, permitiéndonos replantear algunos ítems para futuras líneas de investigación.

6.3.1 Aplicación del post-test

El pos-test (Véase Anexo) fue aplicado con la intención de evaluar el efecto que habría tenido la puesta en escena de la propuesta didáctica que se había diseñado en la plataforma de GeoGebra para fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico en discentes de bachillerato, enfocándonos en el uso específico de los términos sinónimos de las operaciones aritméticas que ya conocían como suma, resta, multiplicación y división. Se aplicó a un total de 12 discentes de sexto semestre del área técnica.

La aplicación del pos-test, así como el de las sesiones se acopló de acuerdo con el horario que tenían los discentes con respecto a la materia (Tabla 6), por lo que el pos-test se aplicó el viernes 07 de julio a las 10:30 hrs con una duración de 40 minutos. A continuación, en la Tabla 7 se muestran los resultados obtenidos, donde:

A. Respuesta correcta.
B. Respuesta en proceso.
C. Respuesta incorrecta.

Cabe mencionar que esta escala, es sólo asociativa al post-test, no mide la competencia que tiene el discente ni el nivel de dominio del lenguaje algebraico, por eso sólo califica si es correcta o errónea su respuesta, o bien si existe un vago conocimiento sobre el uso del lenguaje algebraico, de tal forma que su respuesta se encuentre en proceso.

Tabla 7. Tabla general de resultados obtenidos en el post-test.

Ítem	1										2		
Respuesta	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a	b	c
A	100%	92%	83%	75%	67%	42%	75%	83%	83%	100%	92%	50%	42%
B	0%	8%	17%	25%	33%	58%	25%	17%	17%	0%	8%	50%	58%
C	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Como se puede observar en la tabla anterior, un porcentaje muy alto de estudiantes ha tenido una respuesta correcta en casi todos los incisos, a excepción de los incisos (b) y (c) del ítem 2, los cuales aún mantienen un porcentaje alto en dar una respuesta en proceso. Además de ello, hacemos notar que ya no hay respuestas incorrectas, como lo había en la prueba diagnóstico.

Hacemos una breve reseña con respecto a los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica donde, en el inciso (a) sólo el 25% había dado una respuesta correcta, y ahora se tiene un 100%, recordando que asimilaban que la palabra aumentado se refería a un exponente. Para el inciso (d) hubo un 75% de respuestas correctas y un 25% en proceso, aumentando el porcentaje de acertividad y de discentes en proceso.

En el inciso (f) recordemos que ningún discente había dado la respuesta correcta, y en este caso en específico, y aunque el porcentaje de los discentes era equitativo tanto en respuestas en proceso como en incorrectas, ahora se obtuvo un 42% de respuestas correctas y un 58% de respuestas en proceso, este inciso recordemos que habla sobre el trabajo de cocientes, por lo que destacamos con el profesor que aun cuando se obtuvieron mejores resultados que en la prueba diagnóstico se debía seguir trabajando sobre este concepto para seguir sesgando las dificultades que aún presentan los discentes.

En el caso del segundo ítem cabe mencionar que los incisos (b) y (c) implican el hecho de trabajar con tres ecuaciones lineales, por lo que implica un proceso más allá del que se plantea en el objetivo del presente trabajo, sin embargo, parte precisamente del modelado de las situaciones, haciendo la traducción del lenguaje coloquial al algebraico.

En el inciso (a) con respecto a la prueba diagnósticol aumento un 92% de respuestas correctas, desapareciendo por completo el porcentaje de respuestas incorrectas. Para el caso de los incisos (b) y (c), cuyo porcentaje de respuestas en proceso eran del 58% y 75%, respectivmente, en el pos-test disminuyó a 50% y 58%, dada cada caso, cabe destacar que desaparece también el porcentaje de respuestas incorrectas.

Con el fin de visualizar las respuestas de los estudiantes en el pos-test se presenta la siguiente Figura 33, en la cual se puede visualizar de manera general que han desaparecido las respuestas incorrectas.

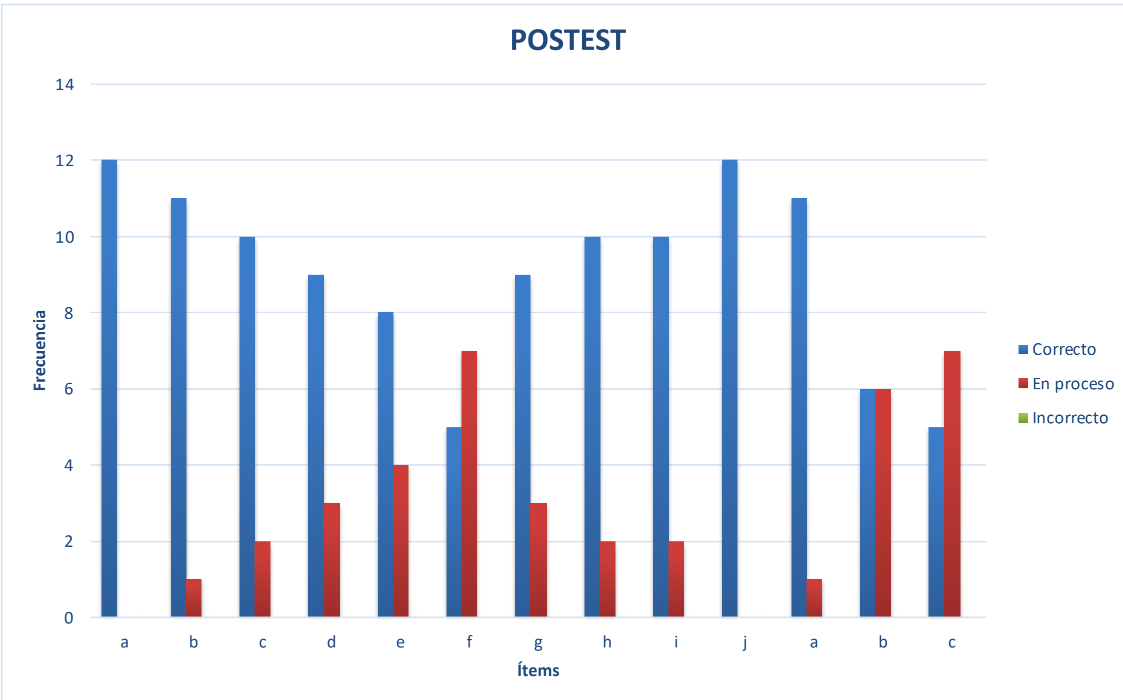


Figura 33. Resultados del post-test en discentes de bachillerato.

Después de haber mostrado los resultados anteriores podemos decir que de manera general la propuesta didáctica del uso de un EVA, en este caso particular de GeoGebra, ha cumplido con su objetivo el cual era fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico en discentes de bachillerato de las operaciones básicas aritméticas.

Como añadiduría, se han seleccionado cinco casos que desde la prueba diagnóstica causaron interés al propósito de la investigación, de los cuales se deriva el siguiente apartado.

6.3.2 Entrevista semiestructurada

En este apartado se muestran cinco casos que desde la prueba diagnóstico resultaron de interés para el propósito de esta investigación, Mostrando en primera instancia los resultados de su prueba diagnóstico versus su prueba post-test, por lo que al ver una interacción positiva con la propuesta se seleccionaron para complementar la información con una entrevista semiestructurada.

Caso 1

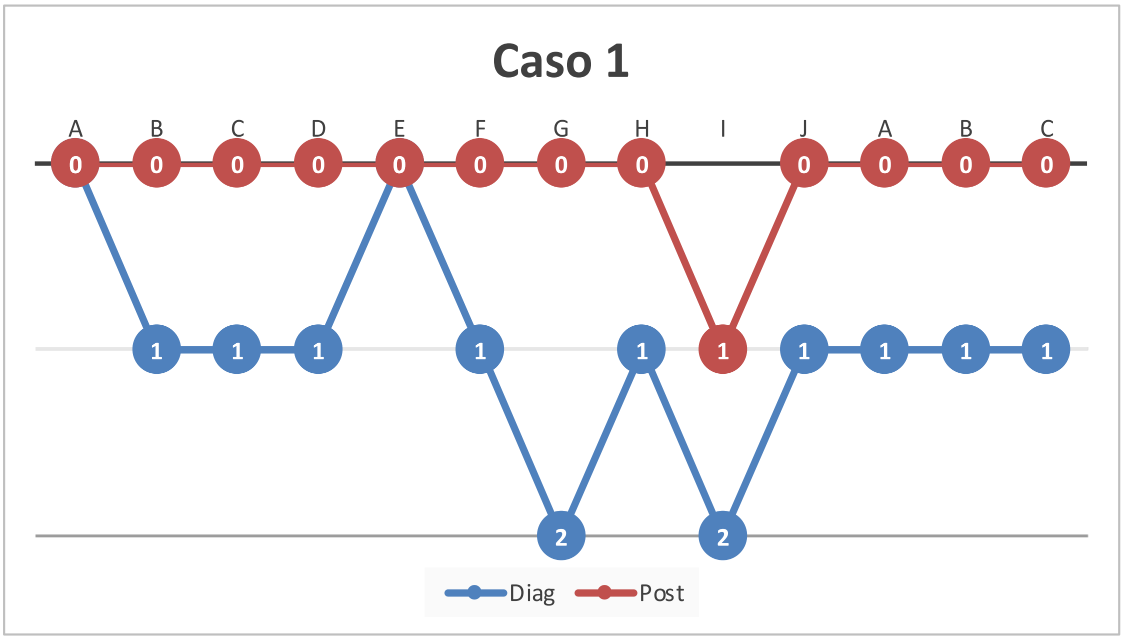


Figura 34. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 1.

El primer sujeto es un discente de sexo masculino de 17 años de edad, y que presenta deficiencias en lo general con el uso del lenguaje algebraico, particularmente presentaba limitaciones en los incisos G e I, ya que sus respuestas fueron erróneas en la prueba diagnóstico. Dichos incisos hacían referencia a el trabajo sobre cocientes y perímetros/áreas de polígonos, sin embargo, al finalizar la intervención éste tuvo una mejoría con respecto a estos temas.

Su trabajo durante el desarrollo de las sesiones, llamó nuestra atención debido a que las intervenciones que tuvo con el resto de sus compañeros fue correcta, sin embargo, en el post-test cuando intentó traducir el inciso del perímetro del rectángulo, su respuesta se quedó en proceso, por lo que al cuestionarle sobre si se sentía inseguro en algún aspecto con respecto al lenguaje algebraico, su respuesta fue que los polígonos siempre lo han confundido, debido a que cuando curso el cuarto semestre, su profesora de matemáticas se enfocó mucho en que aprendieran las fórmulas de la parabola, la elipse, y otras cónicas, sin permitirle comprender de dónde es que salían cada una de ellas, por lo que el memorizar no le permitió aprender, además de que siempre lo ha confundido la geometría.

En segunda instancia se le cuestionó sobre su estrategia de planteamiento, en este momento se volvió a leer el enunciado *"El perímetro de un rectángulo mide 24cm y su base midel el triple de su altura*", a lo que el sujeto lo repitió en voz alta y con su dedo indice lo fue dibujando sobre la mesa, como haciendo una representación mental de su equivalente en una expresión algebraica. Al hacer este gesto respondió correctamente, sin embargo, añadió: *siento que estoy mal porque debería dibujarlo para poder ver si estoy bien.* De acuerdo a esta respuesta, Busto (2009) menciona que las expresiones simbólicas y las representaciones geométricas constituyen un método de enseñanza eficaz, originando de esta manera una habilidad en el discente para un adecuado razonamiento sobre casos particulares de construcciones geométricas.

En cuanto al uso que había tenido de algún EVA mencionó que la profesora de cuarto semestre los hizo trabajar en GeoGebra por lo que la plataforma le era familiar, y no tuvo mayor problema en hacer uso del material que habíamos propuesto, aunque nos sugería que utilizaramos más ejercicios de figuras geométricas para que así fuera más rápido aprender sobre ese tema.

Caso 2

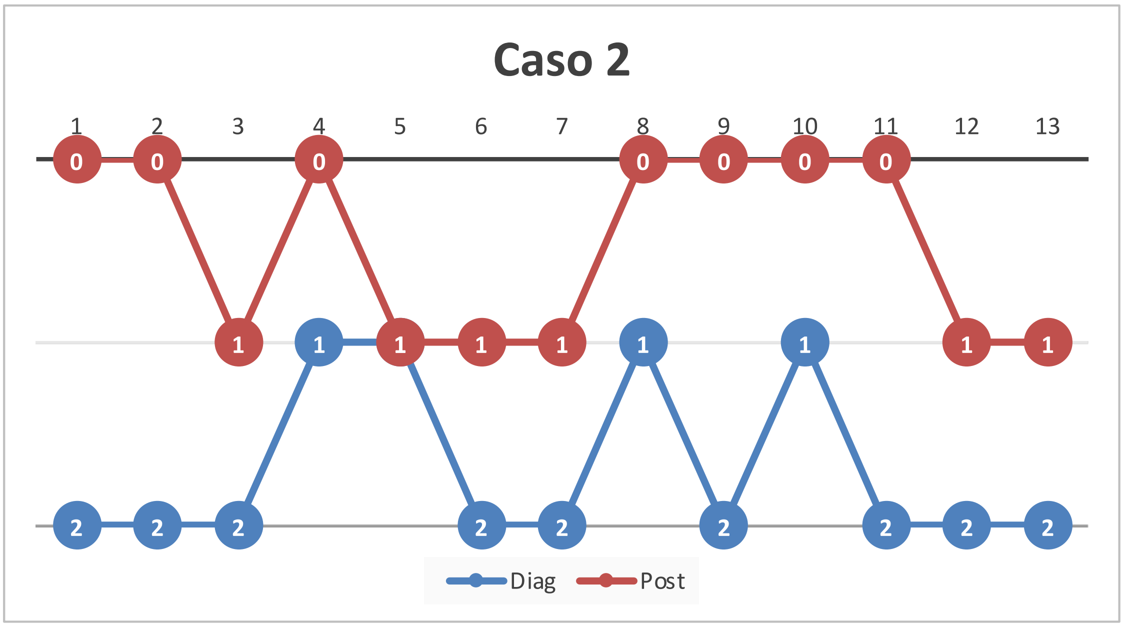


Figura 35. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 2.

El segundo sujeto es un discente de sexo masculino de 18 años de edad, que presenta un alto grado de deficiencias en cuanto al lenguaje algebraico, realmente es un caso que llama la atención porque recordemos que es un grupo de área técnica, por lo que se esperaba otro tipo de resultados. Como se puede ver, el sujeto en cuestión en su prueba diagnóstico deja ver deficiencias en el uso del lenguaje algebraico, casi en la mayoría de los incisos, pues sólo tres incisos quedaron en una respuesta en proceso.

Los incisos que respondió de manera incorrecta en su prueba diagnóstico hacian referencia al uso del lenguaje de multiplicación y de divisiones, asímismo el planteamiento de expresiones algebraicas en la segunda parte de la prueba fueron erróneas, por lo que sus resultados aritméticos también lo fueron.

Durante el desarrollo de la primera sesión correspondiente a la suma y resta, el sujeto obtuvo un nivel de competencia autónomo y estratégico, sin embargo, en la segunda parte de la sesión el total de sus respuestas lo posicionaron en un nivel básico, recordemos que en esta sección el discente tenía que escoger una expresión que diera respuesta a la situación que enfrentaba Juan, y a partir de ella dar finalmente una respuesta aritmética, por lo que si escogía mal, por ende su respuesta sería incorrecta. Al cuestionarle sobre su estrategia para elegir su expresión algebraica, mencionó que había elegido esa por que contenía los datos que proporcionaba el problema. Acerca de este aspecto, Clement (1982) y MacGregor & Stacey (1993) dirían que el sujeto está haciendo una traducción sintáctica, es decir, no esta involucrando un proceso metacognitivo que relacione las cantidades conocidas y desconocidas, sino que simplemente esta realizando una conversión cambiando palabras clave por símbolos.

En el desarrollo de la segunda sesión que corresponde a la multiplicación y división, se posicionó en un nivel estratégico y autónomo, por lo que pudo adquirir dicha competencia, y esto se vió reflejado también en la tercera sesión.

Despúes de la intervención el sujeto ha obtenido un nivel distinto dentro del uso del lenguaje algebraico, aún cuando sus respuestas no son del todo correctas, ya hay un proceso en sus respuestas más adecuado. Al cuestionarle sobre si se sentía inseguro en alguno de los aspectos del uso del lenguaje algebraico, mencionó que sentía debía practicar más sobre terminos como el doble, triple, la tercera parte, etc. ya que pensaba que lo confundían mucho, sobre todo cuando se les añadía más contexto, por lo que se le pidió explicara esta última parte, a lo que replicó, *si me piden poner el doble de un número, lo puedo poner, pero si además me dicen el doble de la edad de Karla que es 15 años mayor que Juan, ahí es donde me confundo*. Al respecto, Martínez (2019) nos dice que los discentes traducen literalmente enunciados, pero que no identifican el tipo de operaciones que deben realizar, por lo que tienden a generalizar procedimientos. De ahí que el discente, pueda sentirse inseguro en cuanto a la traducción de otros elementos en la expresión algebraica. Esto último se pudo observar en la segunda parte del post-test, en donde el sujeto logró plantear expresiones algebraicas relacionadas con los datos proporcionados pero no logró concluir un valor aritmético correcto.

En cuanto al uso de la propuesta hecha en GeoGebra mencionó que ya conocía el EVA ya que en cuarto semestre su profesora, había hecho uso de este programa para enseñarles las cónicas.

Caso 3

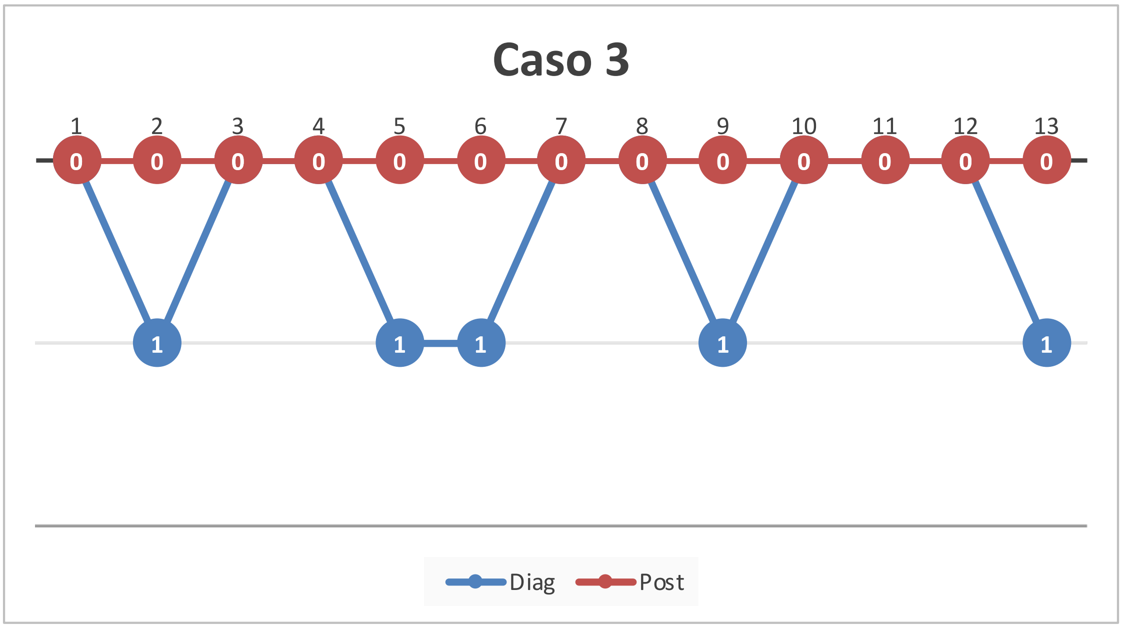


Figura 36. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 3.

El tercer sujeto es una discente de sexo femenino de 17 años de edad, la cual llamó la atención de nuestra investigación ya que en su prueba diagnóstico, obtuvo unas cuantas respuestas en proceso, mientras que el resto las contestó correctamente. Los incisos en los cuales dejó una respuesta en proceso fueron aquellos relacionados con el concepto de multiplicación, y sus términos homlógos.

El desempeño que mostró el sujeto durante las sesiones fue idóneo, y coadyuvó en la adquisición de la competencia del uso del lenguaje algebraico, posicionándola en un nivel estratégico.

En su caso, particularmente se le vió tomando notas de la introducción que se hace en el EVA, sobre todo el cuadro que menciona los homólogos de los términos de las operaciones básicas aritméticas al lenguaje algebraico.

Al respecto, se le cuestionó si en el pasado había tenido dificultades en aprender el lenguaje algebraico, a lo que respondió que no, ya que en su antigüa escuela había tenido un profesor en la secundaria que le había enseñado las ecuaciones, pero que al hacer la prueba diagnóstico se había confundido un poco. En tanto a la estrategia usada para resolver las ecuaciones algebraicas, respondió: *al principio de las actividades en GeoGebra venía un esquema que copié a una tarjeta y estuve utilizando como acordeón, y eso me gustó mucho en su propuesta.*

Con respecto al uso de algún EVA, mencionó que en su antigüa escuela su profesor de matemáticas ya les había puesto actividades en GeoGebra y en Khan Academy, por lo que el sujeto, ya estaba familiarizado con el uso de EVA.

Caso 4

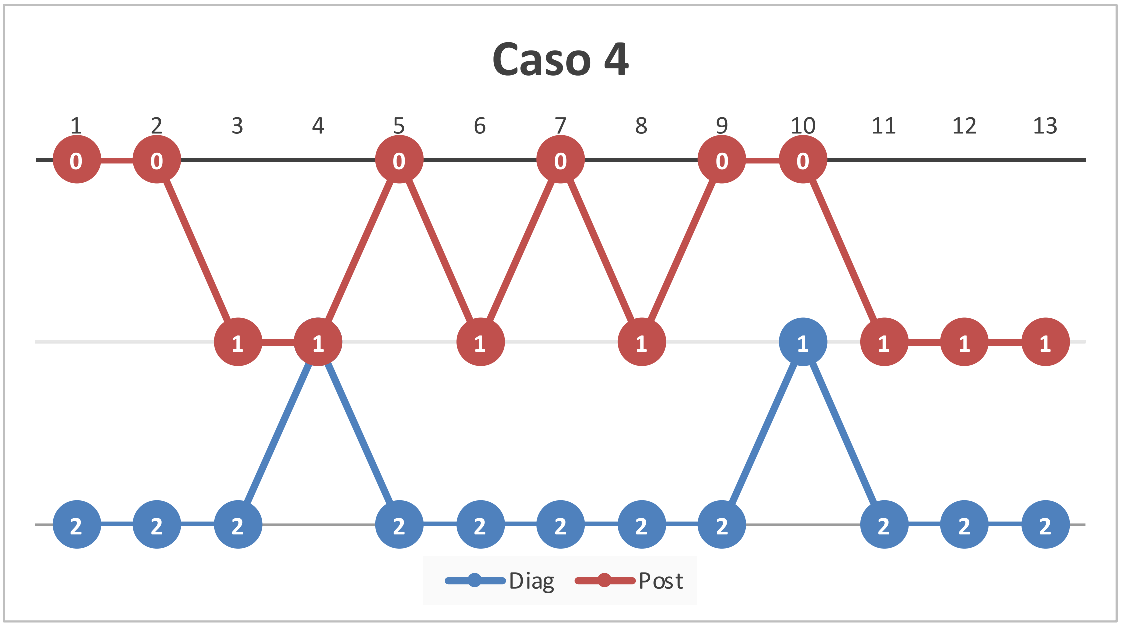


Figura 37. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 4.

El cuarto sujeto es una discente de sexo femenino de 18 años de edad, la cual como se puede observar la Figura 37, en su prueba diagnóstico sólo obtuvo dos respuesta en proceso, mientras que el resto fueron erróneas, y aún cuando en su prueba post-test hubo respuestas en proceso ya no hubo respuestas erróneas, por lo que llamó nuestra atención para realizarle una entrevista.

Su desempeño en la primera sesión correspondiente a la suma y resta, el sujeto se posicionó en un nivel básico y autónomo, que de acuerdo a la categorización, utiliza la variable propuesta para la formulación de la expresión algebraica y hace uso de ella. En la segunda sesión, referente a la multiplicación y división, el sujeto se posicionó en un nivel de competencia autónomo y estratégico, por lo que si hubo un cambio, ya que ahora no sólo formulaba expresiones algebraicas sino que también hacia uso de ellas para obtener valores aritméticos correctos.

Al cuestionarle sobre las dificultades que ha presentado al aprender el lenguaje algebraico, enmarcó que ella solía confundirse cuando le decían el doble porque colocaba exponentes y hacer esa diferencia le costaba. Logró identificar los elementos que conforman una expresión algebraica como los son variables, coeficientes, etc. En tanto a las estrategias que utilizó para plantear y resolver problemas de la segunda parte del post-test comentó: *recordé los ejercicios que haciamos al finalizar cada sesión, las redacciones eran muy similares a los que venían en la prueba, por eso pude poner una ecuación.* Tal y como lo menciona Martínez (2019), el sujeto generalizó el procedimiento y además lo mecanizó, aunque logró posicionarse en un nivel estratégico en las sesiones, la prueba post-test permitió ver que mecanizó el hecho de plantear una ecuación por la similitud de los términos, pero no logró obtener un valor aritmético correcto para el problema, por ello es que sus respuestas quedaron en proceso.

Al preguntarle sobre el EVA, comentó al igual que sus otros compañeros que la profesora del cuarto semestre había estado trabajando con ellos en GeoGebra, por lo que no le resultaba extraña la plataforma educativa.

Caso 5

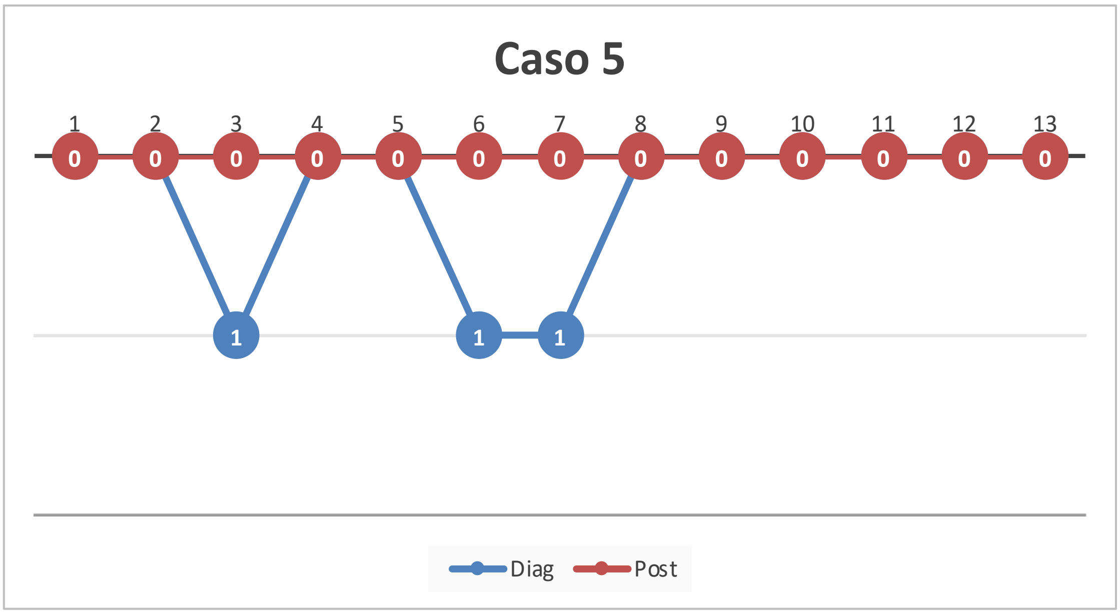


Figura 38. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 5.

El quinto sujeto es una discente de sexo femeninom de 17 años de edad, en cuyo caso, como se puede obervar en la Figura 38, en su prueba diagnóstico sólo obtuvo tres respuestas en proceso, y el resto fueron correctas. En contraste con su prueba post-test esta obtuvo todas las respuestas correctas. Durante el trabajo de campo, nos comentó el profesor a cargo del grupo, que este sujeto en particular tenía un alto desempeño académico, y que incluso había participado en olimpiadas de la zona escolar, por lo que al profesor no le soprendía que hubiese refinado sus competencias con respecto al uso del lenguaje algebraico.

Cuando se le cuestionó acerca de sus estrategias para el plateamiento de expresiones algebraicas, mencionó: *cuando estaba en la secundaria y comencé a ver álgebra, mis papás me enviaron con una profesora por las tardes, y ella me enseñó a traducir enunciados.* Posterior a esto, se le preguntó de qué manera le había enseñado esa profesora, y contestó: *primero me ponía a leerlo en voz alta, luego en una tabla tenía que anotar los valores que conocía y los que no, para* *ya despues escribir la ecuación.* Esta forma de trabajar, se asemeja a la investigación que hizo Marquina (2014), en la cual menciona que hay ocho pasos para traducir enunciados verbales a lenguaje algebraico.

En cuanto al uso de algún EVA, mencionó que no era la primera vez que trabajaba en plataformas educativas, pues en el colegio se trabaja así desde la secundaria, por lo que al preguntar qué otros entornos conocía mencionó, khan academy, matlab y youtube, pues solia consultar videos sobre temas que se le dificultaban.

CAPÍTULO VII

Aplicación y análisis de la propuesta en GeoGebra para nivel superior

En este capítulo se muestra el desarrollo de la aplicación, es decir, la fase de experimentación, en donde se aplicó la propuesta didáctica diseñada cuyo objetivo es disminuir las dificultades que presentan los discentes con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, con el apoyo de un entorno virtual de aprendizaje (EVA), en específico con el uso de términos sinónimos de las operaciones que ya conocen como sumatoria, diferencia, multiplicación y división. La aplicación de la propuesta nos permitió recoger la información respecto al desempeño, dificultades y competencias desarrolladas de los discentes del nivel medio superior y superior en cada una de las sesiones que se llevaron a cabo dentro de la plataforma de GeoGebra. A continuación se muestra el proceso para el nivel superior.

7.1 Aplicación de la prueba diagnóstica

La propuesta didáctica está contemplada para estudiantes de educación superior, universidad, por lo que recurrimos a una escuela de ese nivel educativo. Una vez preparadas las sesiones y la prueba diagnóstico, se solicitó a la Facultdad de Estadística e Informática de la Universidad Veracruzana nos permitiera probar la propuesta didáctica con su grupo de nuevo ingreso. Se acordó que por tiempos pertinentes al programa de estudio se aplicara en la semana del 08 al 11 de Agosto del 2023.

Esto debido que su programa ofrece un curso de regularización a los discentes de nuevo ingreso, por lo que les pareció pertinente que se aplicara la propuesta a este grupo.

La prueba diagnóstico fue aplicada el día 08 de Agosto del año 2023 y fue aplicado con la intención de conocer el grado de conocimientos previos que tenían consigo los discentes con respecto a la traducción de enunciados coloquiales a expresiones algebraicas (Véase Anexo).

Se aplicó a un total de 36 discentes de nuevo ingreso en la carrera de Estadística, dado que el grupo era demasiado extenso para el equipo de computo con el cual cuenta la Facultad, se sugirió dividir el grupo por la mitad, así se le daría oportunidad a todos los discentes de formar parte de la experimentación, aprovechando al máximo la propuesta que llevabamos. Para no discriminar a ningún discente, el profesor encargado de la clase dividió el grupo conforme al número de lista, en pares e impares.

La aplicación de la prueba diagnóstico, así como de las sesiones se acopló de acuerdo al horario que tenían los discentes con respecto a la materia Cálculo aplicado a la estadística I, y conforme al espacio libre que tuviera el equipo de computo. Por lo tanto, para el primer grupo conformado por el número de lista par (Grupo_1) se aplicó el día lunes a las 7:00hrs con una duración de 40 minutos, mientras que al segundo grupo conformado por el número de lista impar (Grupo_2) se les aplicó a las 14:00hrs, de esta manera quedaron estipulados los horarios de trabajo para ambos grupos.

A continuación, en la Tabla 8 y Tabla 9 se muestran los resultados obtenidos, donde:

A. Respuesta correcta.
B. Respuesta en proceso.
C. Respuesta incorrecta.

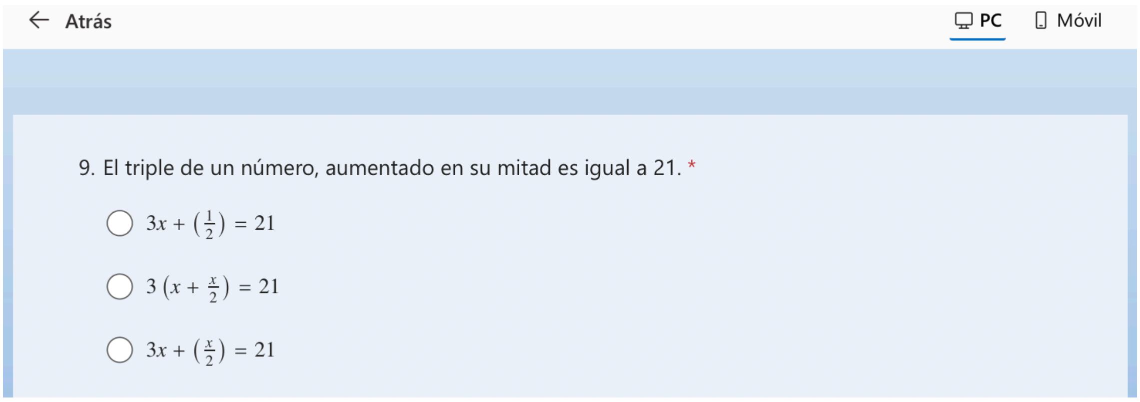
Cabe mencionar que esta escala, es sólo asociativa a la prueba diagnóstico, no mide la competencia que tiene el discente ni el nivel de dominio del lenguaje algebraico, por eso sólo califica si es correcta o errónea su respuesta, o bien si existe un vago conocimiento sobre el uso del lenguaje algebraico, de tal forma que su respuesta se encuentre en proceso.

Tabla 8. Tabla general de resultados obtenidos en la prueba diagnóstico del grupo 1.

Ítem	1										2		
Respuesta	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***	***j***	***a***	***b***	***c***
A	33%	17%	17%	67%	17%	0%	33%	33%	17%	44%	50%	17%	**6%**
B	**50%**	44%	72%	33%	78%	**56%**	44%	56%	22%	44%	33%	**67%**	72%
C	17%	39%	11%	0%	6%	**44%**	22%	11%	**61%**	11%	17%	17%	22%

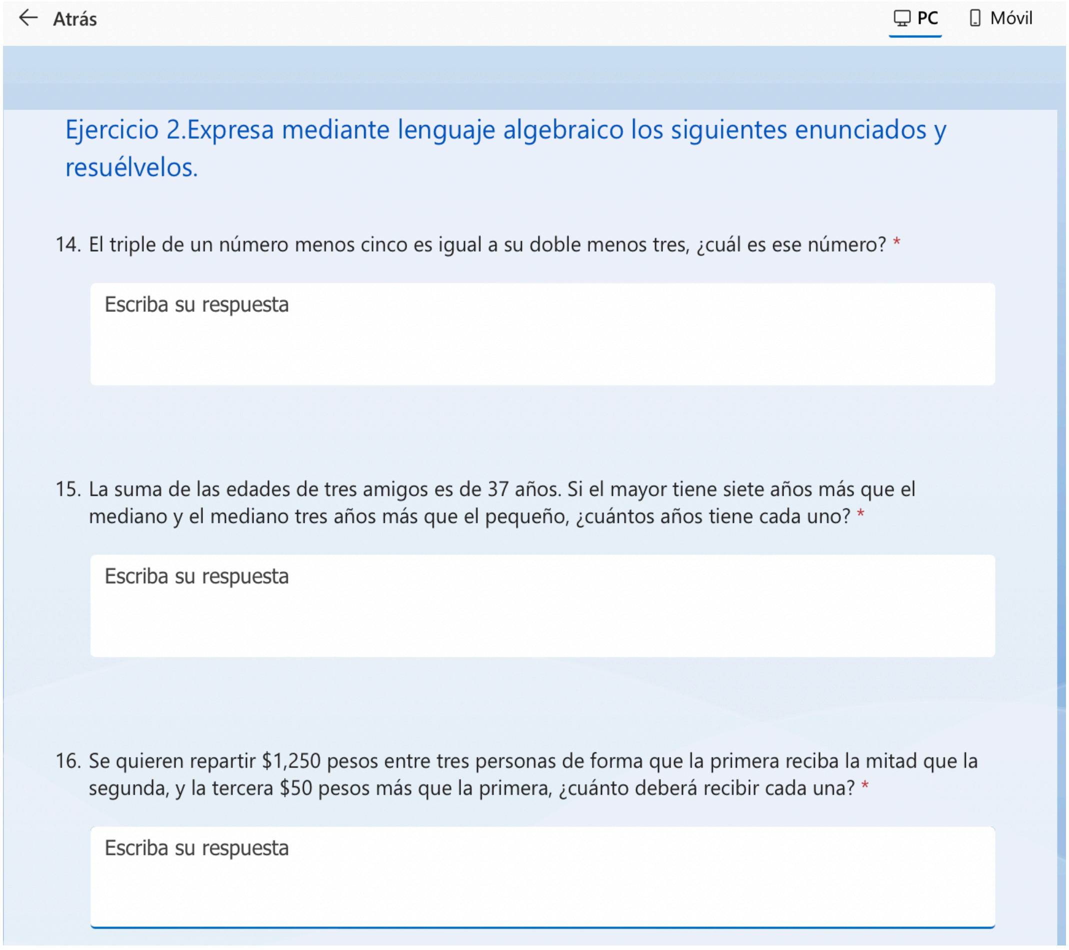
Como se puede observar en la tabla anterior, un porcentaje muy alto de los discentes del Grupo 1, tiene una respuesta en proceso, y aunque lo deseable es que los porcentajes más altos los tuvieran las respuestas correctas, debido a que son discentes de una carrera del área técnica, podemos observar que incluso en el inciso (a), considerado uno de los más sencillos de resolver, el 50% tuvo una respuesta en proceso.

En el inciso (f), no hubo ninguna respuesta correcta, sin embargo, la población tuvo una diferencia del 6% entre una respuesta en proceso o errónea. Este inciso mencionaba el uso de fracciones.



Para el caso del inciso (i) el 61% de los discentes, dio una respuesta incorrecta, este inciso habla sobre el perímetro de un polígono, por lo que existen deficiencias con respecto a este tema.

Con respecto al segundo ítem, en este no sólo requería que el discente tradujera enunciados coloquiales a expresiones algebraicas y viceversa, sino que que también tenían que resolver dichas expresiones para dar solución al problema planteado.


Atrás PC Móvil

Ejercicio 2.Expresa mediante lenguaje algebraico los siguientes enunciados y resuélvelos.

14. El triple de un número menos cinco es igual a su doble menos tres, ¿cuál es ese número? *

Escriba su respuesta

15. La suma de las edades de tres amigos es de 37 años. Si el mayor tiene siete años más que el mediano y el mediano tres años más que el pequeño, ¿cuántos años tiene cada uno? *

Escriba su respuesta

16. Se quieren repartir $1,250 pesos entre tres personas de forma que la primera reciba la mitad que la segunda, y la tercera $50 pesos más que la primera, ¿cuánto deberá recibir cada una? *

Escriba su respuesta

En este sentido, podemos notar que en el inciso (a) no tuvieron mayor problema ya que el 50% de los estudiantes si pudo expresar y resolver correctamente el problema, sin embargo en los siguientes dos incisos (b) y (c), la mayoría de los discentes se quedaron en el proceso, esto debido a que planteaban expresiones en donde utilizaban algunos datos proporcionados por el planteamiento del problema pero de manera incorrecta, dando por resultado respuestas erróneas. Además de ello, en el inciso (c) sólo el 6% de la población del Grupo 1, pudo resolverlo correctamente.

Para el Grupo 2, se obtuvieron los siguientes resultados en la prueba diagnóstico, los cuales se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Tabla general de resultados obtenidos en la prueba diagnóstico del Grupo 2.

Ítem	1										2		
Respuesta	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*a*	*b*	*c*
A	42%	26%	32%	63%	21%	**11%**	37%	53%	21%	47%	42%	16%	**11%**
B	37%	42%	47%	32%	79%	47%	47%	37%	21%	42%	42%	**63%**	63%
C	21%	32%	21%	5%	0%	42%	16%	11%	**58%**	11%	16%	21%	26%

Como se puede observar en la tabla anterior, existe más variabilidad con respecto a las respuestas proporcionadas, por el Grupo 2.

A diferencia del Grupo 1, en el inciso (f) si hubo un porcentaje de respuestas correctas del 11%, aunque la mayoría de los discentes se quedó en el proceso de dar una respuesta correcta, recordemos que este inciso abordaba el uso de fracciones.

Para el inciso (i) el grupo presenta dificultades con el uso del lenguaje algebraico para figuras geométricas, pues el 58% tuvo una respues incorrecta.

Retomando que los incisos del ítem 2, exige el planteamiento y solución de expresiones algebraicas para las diferentes problemáticas planteadas, el 63% de los discentes para el inciso (b) tuvieron una respuesta en proceso, mientras que para el inciso (c), si hubo cierto porcentaje acertivo, aunque fue muy poco comparado con aquellos discentes que dieron una respuesta en proceso y errónea.

Con el fin de visualizar las respuestas de los estudiantes en la prueba diagnóstico, se presenta la siguiente Figura 39.

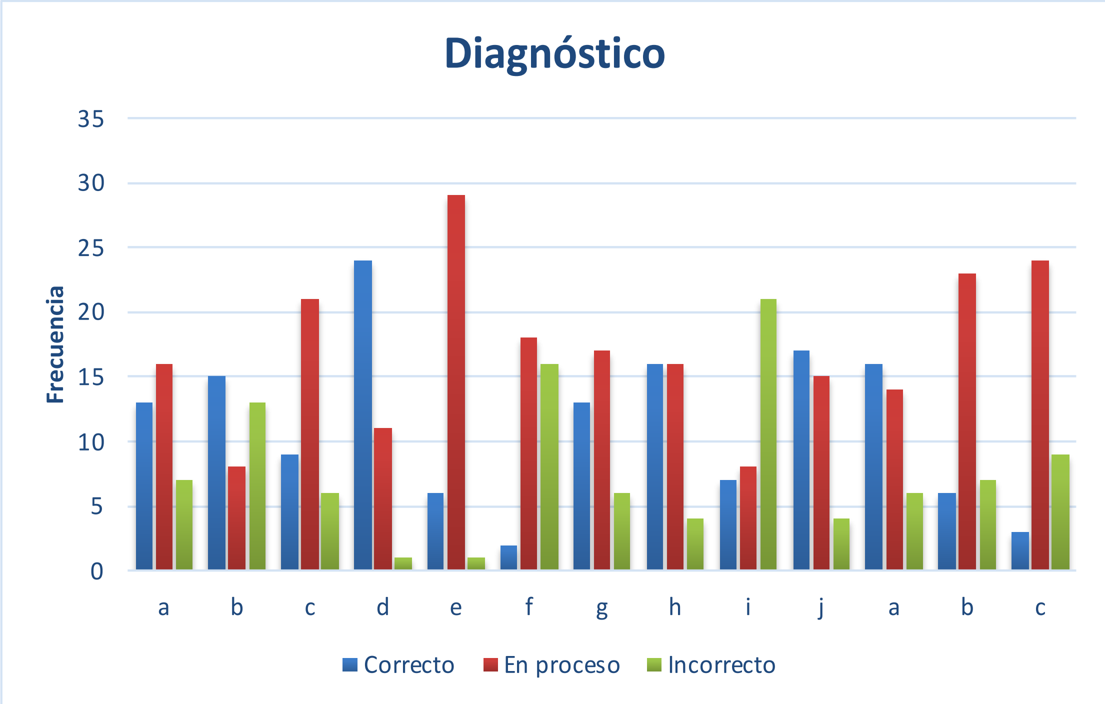


Figura 39. Resultados de la prueba diagnóstico en discentes de universidad para el Grupo 1.

Uno de los hallazgos que surgieron durante la aplicación de la prueba diagnóstico, es que en las preguntas de datos generales como la edad, género y grupo, no se contempló que en este último dato, podría tener más de una respuesta pues los discentes al ver las opciones preguntaron si podían colocar su bachillerato de procedencia, en este sentido, había algunos discentes que venían del CTIS de Banderilla, otros del CBTIS de Xalapa y otros de bachilleratos generales, tal y como se muestra en la Figura 40.

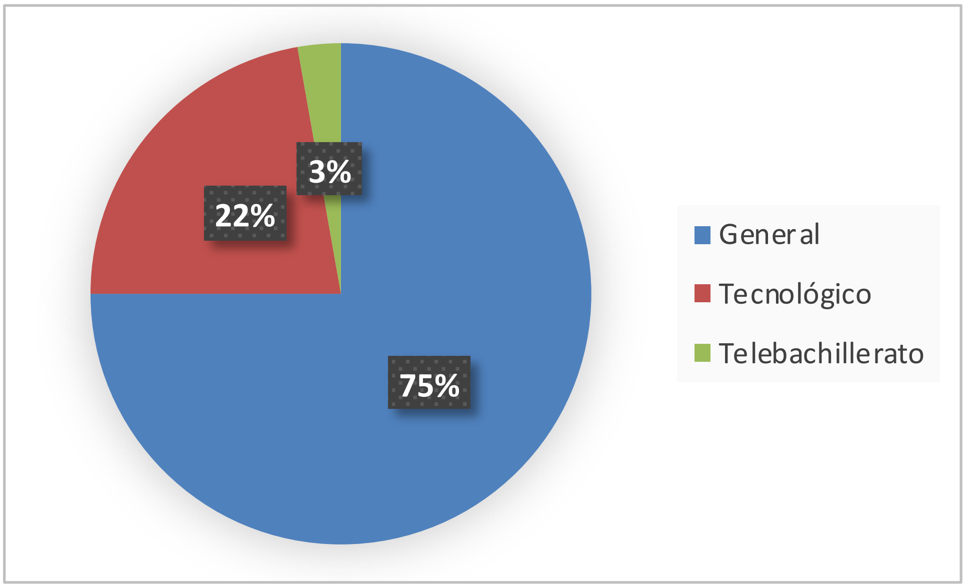


Figura 40. Relación del bachillerato de procedencia.

Como se puede observar, el 75% de la población procede de un plan de bachillerato general, un 22% de un modelo tecnológico (CTIS o CBTIS) como ya se había mencionado por los mismos discentes y un 3% procede de un telebachillerato. Es prudente hacer mención de este hallazgo porque los resultados podrían tener cierta variabilidad adicional, de acuerdo al modelo educativo con el cual se desarrolla cada bachillerato.

En este sentido, creemos conveniente mencionar las otras características de este grupo, el cual un 64% cuenta con 18 años de edad y el 47% de su población es de género femenino.

Después de haber obtenido los resultados anteriores en la prueba diagnóstico, se procedió a explicar a los discentes la funcionalidad del uso del material didáctico en GeoGebra, teniendo como objetivo disminuir las dificultades que presentaron los discentes haciendo uso del lenguaje algebraico propuesto para las operaciones básicas aritméticas, obteniendo los resultados que se describen en el siguiente apartado.

7.2 Desarrollo y análisis de las sesiones

En este apartado se describe el desarrollo de las actividades que se diseñaron y plantearon en el EVA de GeoGebra, fueron tres sesiones de 50 minutos y los respectivos horarios establecidos por la Universidad Veracruzana para la asignatura de Cálculo aplicado a la estadística I, tal y como se muestra en la siguiente Tabla 10.

Tabla 10. Fechas y horarios de aplicación.

Grupo	Actividad	Fecha	Hora
1	Sesión 1	Martes, 08 de Agosto 2023	7:00hrs
	Sesión 2	Miércoles, 09 de Agosto 2023	8:00hrs
	Sesión 3	Jueves, 10 de Agosto 2023	7:00hrs
	Post-test	Viernes, 11 de Agosto 2023	10:00hrs
2	Sesión 1	Martes, 08 de Agosto 2023	14:00hrs
	Sesión 2	Miércoles, 09 de Agosto 2023	13:00hrs
	Sesión 3	Jueves, 10 de Agosto 2023	14:00hrs
	Post-test	Viernes, 11 de Agosto 2023	12:00hrs

Se describe el horario de cada una de las sesiones porque se debe tener en cuenta que el rendimiento que tiene el discente a las 7:00hrs podría ser diferente al de las 10:00hrs suponiendo que sea debido a la carga curricular previa que hay tenido durante su jornada estudiantil.

A partir de esto, se realizó la recogida de información, para ello se llevó un diario de campo para ir describiendo la interacción que se suscitaba durante el desarrollo de las sesiones, así mismo como se propone en la propuesta indicativa del capítulo anterior, la escala de medición para medir el nivel de competencia que presenta el discentes dentro de las sesiones es la siguiente:

A. Nivel Estratégico.
B. Nivel Autónomo.
C. Nivel Básico.

D. Nivel Inicial-Receptivo

Cabe mencionar que se contó con el apoyo del profesor de la asignatura de la Facultad, esto para tener un mayor control sobre la población pero a su vez para observar el desarrollo de la interacción que pudieran tener con el EVA, sus compañeros y su profesor.

7.2.1 Análisis de las sesiones

Teniendo como información que el objetivo de la presente invetigación es fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico en discentes del nivel superior en un entorno virtual de aprendizaje, se presentan los resultados obtenidos en cada una de las actividades planteadas en GeoGebra. Así como una breve reseña de los logros y/o dificultades que presentaron los discentes en el desarrollo de estas, dando pauta a enriquecer esta investigación.

Sesión 1. Desafíos matemáticos

Empezaremos describiendo la sesión, la cual está estructurada en tres partes, la primera parte *“considera los siguientes desafíos”* se le plantea al discente el desarrollo de dos desafíos matemáticos que implican el uso del lenguaje algebraico y uso de propiedades geométricas que, como se planteo en capítulos anteriores, es una de las dificultades que suelen presentar los discentes con respecto al uso del lenguaje algebraico, además se pudo observar en la prueba diagnóstico que nuestra población estudiantil presentaba dificultades en este aspecto. La segunda parte *“Trabajemos juntos”* es una actividad para trabajar colectivamente en el desarrollo de ejercicios que dan continuidad a los planteados en la primera parte, pero con diferentes planteamientos, y por último la tercera parte *“¿Con qué finalizamos?”,* en esta parte se hace el cierre de la sesión con producciones propias del discente. Cabe mencionar que dentro de cada una de las partes se monitoreó el trabajo que iban realizando los discentes, esto con el fin de indagar si entendían el planteamiento de las actividades o bien, si tenían dudas con respecto a la redacción de éstas.

Es de suma importancia, hacer mención que para la realización de la prueba diagnóstico, así como para el uso del EVA en GeoGebra, se les pidió a los discentes crear una cuenta para el uso exclusivo de dichas actividades. Dichas cuentas tenían que tener la siguiente estructura:

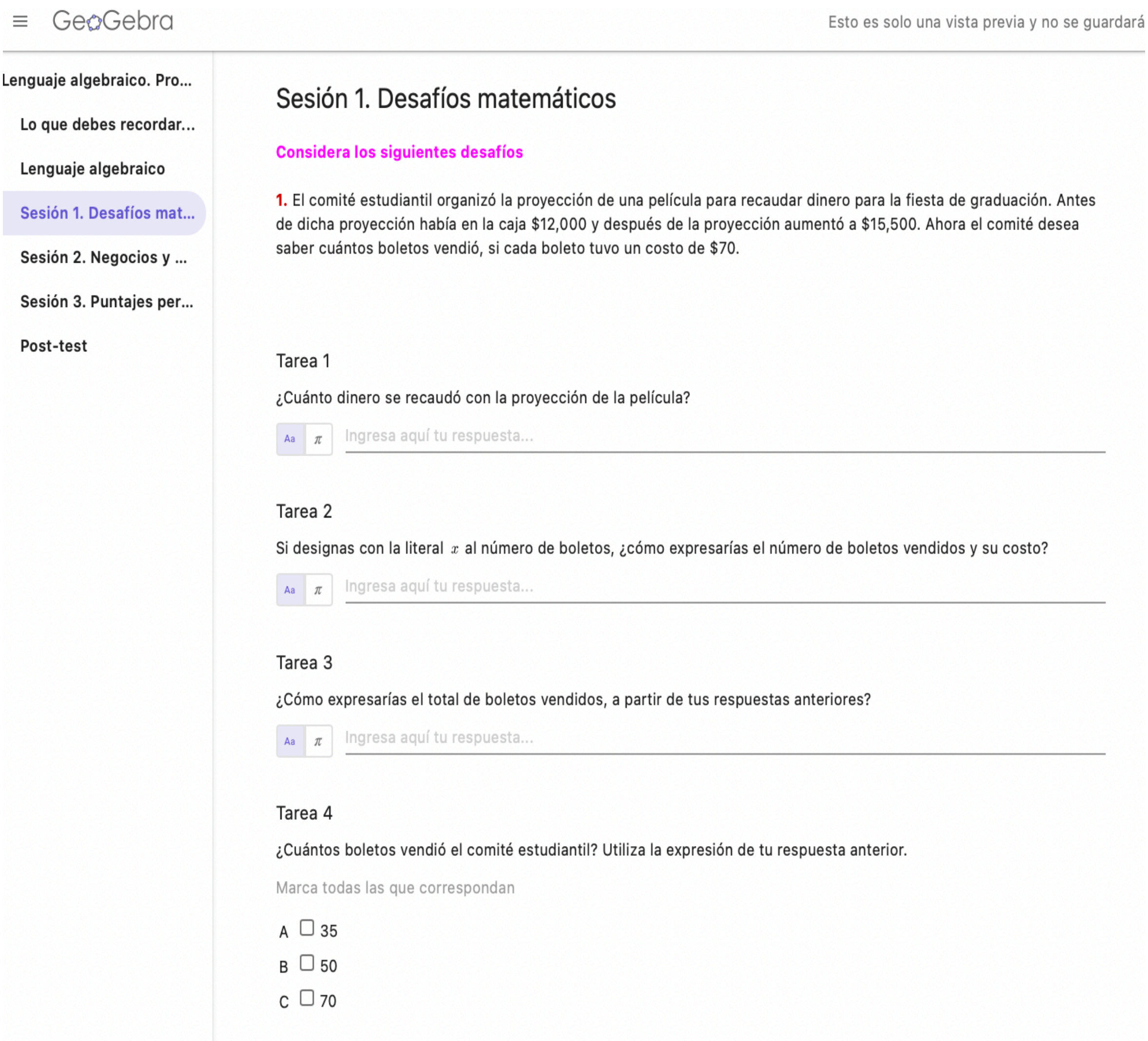
- Usuario(No.Lista)_Univ@hotmail.com

Esto con la finalidad, de tener un control sobre las respuestas que proporcionaba cada uno de los discentes, así como para la sección de entrevistas semiestructuradas facilitar la identificación de aquellos casos interesantes a la investigación.

Considera los siguientes desafíos

La actividad se inició dándoles la indicación de cómo se iba a trabajar la sesión completa dentro de GeoGebra haciendo mención sobre el tiempo de trabajo con el cual contaban (40min), aún cuando el tiempo de clase es de 50min. se les pidió terminar en ese lapso de tiempo para que les diera tiempo de cerrar y enviar sus respuestas dentro de la plataforma, así como para cerrar sus sesiones. También se les indicó que cualquier consulta que hicieran sobre la marcha de las actividades serian contestadas con otra pregunta, a excepción que fuera sobre el uso técnico de la plataforma.

Los discentes comenzaron con la primera actividad de esta sección de la sesión, leyendo la siguiente situación problemática:



En esta actividad los discentes tardaron aproximadamente 15 minutos en leer y contestar las preguntas. Una de las virtudes que tiene el uso de GeoGebra es que no permite avanzar al discente a siguientes actividades, sino ha dado una respuesta a todas las tareas planteadas, por lo que no habrá respuestas en blanco. Sin embargo, esto también da pauta a que el discente conteste de manera errónea, o bien, correcta de forma al azar.

Durante el desarrollo de esta sección, algunos discentes aún tratandose del uso de una plataforma educativa, hicieron uso de papel y lápiz para dar respuesta a la problemática que se les presentó, tal y como se muestra en la Figura 41. Sin embargo, como es el fin de la investigación fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico para las operaciones básicas aritméticas en un EVA, se consideraron sólo las respuestas que anotaban dentro de GeoGebra.

Figura 41. Discentes haciendo uso de lápiz y papel.

A continuación se describen los resultados obtenidos por los discentes en la primera sección de desafios matemáticos, los cuales se pueden observar en la Figura 42.

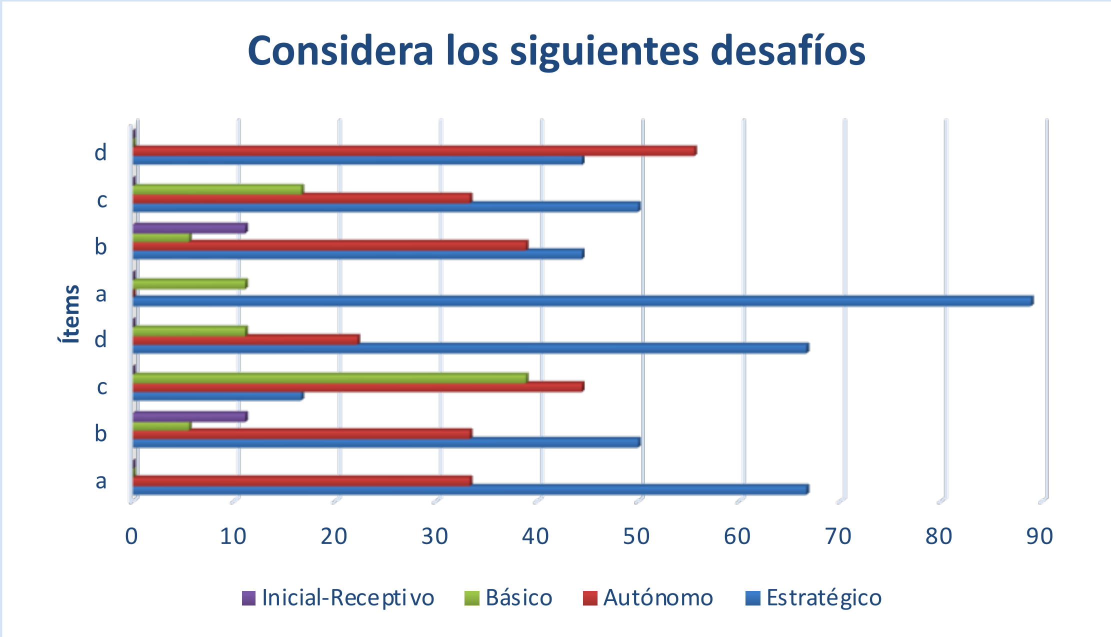


Figura 42. Respuestas de los incisos de la sección.

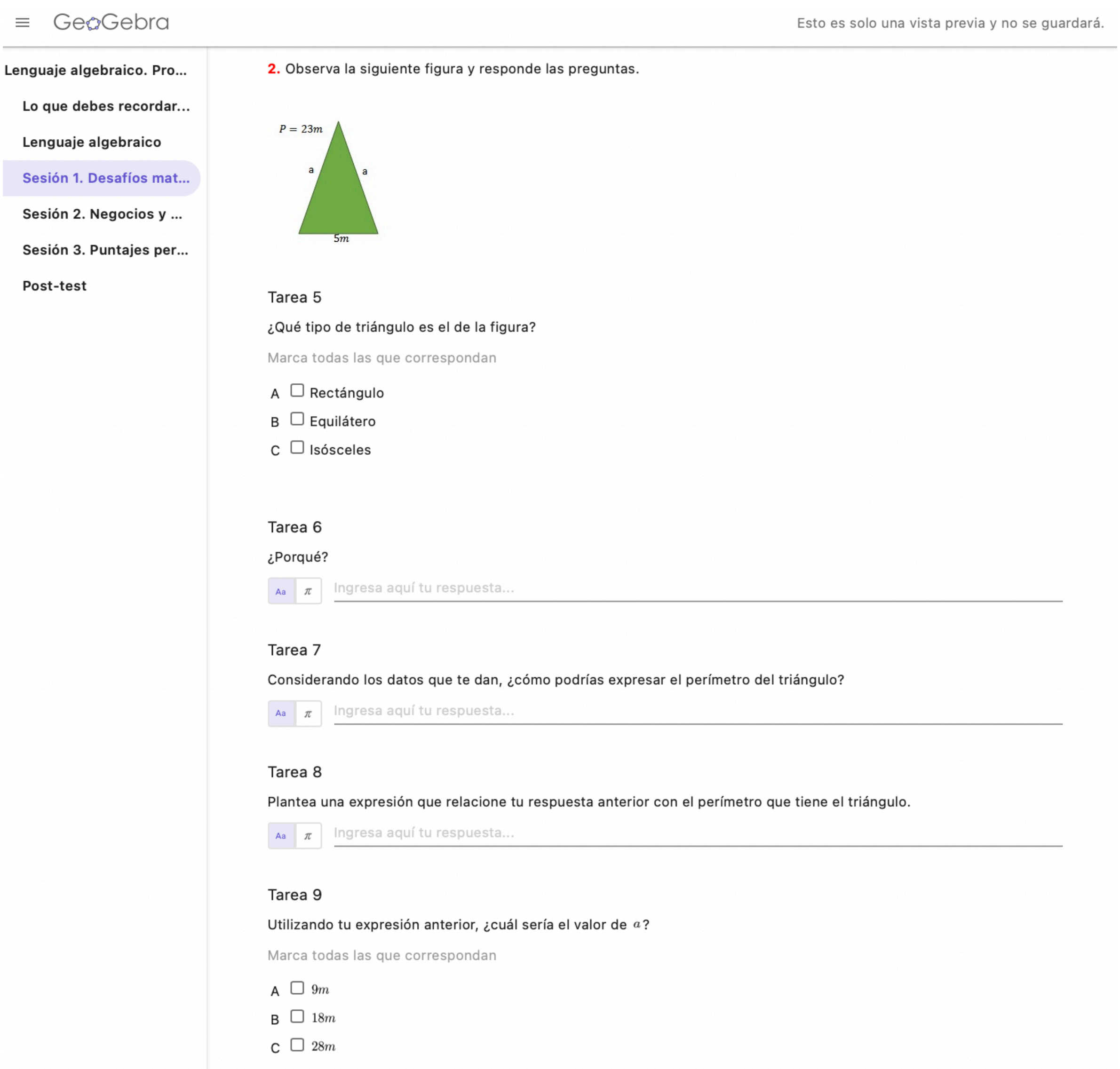
Para el inciso (a) se pudo observar en la revisión de las respuestas proporcionadas que el 67% de los discentes tuvieron un nivel estratégico, mientras que el 33% tuvo un nivel autónomo.

Para el inciso (b) se pudo observar que la mitad de los discentes tuvieron un nivel estratégico, dando la respuesta esperada de $70x$. El 33% del grupo obtuvo un nivel autónomo, mientras que alumnos obtuvieron unnive inicial-receptivo.

Para el caso del inciso (c) el cual se esperaba que los discentes comenzaran ya con la formulación de la expresión, es decir, $70x$ = 3500. Se destaca que el 44% de los discentes dejaron su respuesta en un nivel autónomo, es decir que aún cuando ya tenían las respuestas de los ítems anteriores no lograron asociar ambas respuestas en una expresión completa, ya que dejaron expresadas respuestas como: $70 \times 50 = 3500$ o bien, $x = 50 \times 70$. También se puede observar que un 39% de los discentes, proporcionó una respuesta de nivel básico, esto por que dieron respuestas tales como: $3500, 70x$ o bien, 70.

Por último, para el inciso (d) entraba en acción el discente al dar como respuesta 50 boletos vendidos, veinticuatro discentes de ambos grupos, dieron la respuesta correcta, mostrando un nivel estratégico, ocho discentes más dejaron su respuesta en un nivel autónomo, y cuatro discentes más se posicionaron en el nivel básico.

En la segunda actividad demoraron aproximadamente 15 minutos, en donde se les planteó la siguiente situación problemática:



Esta actividad se planteó de acuerdo con el estado del arte, en donde se mostraba un déficit en el tema relacionado con la geometría, caso particular del cálculo de perímetros y áreas, así mismo, en la prueba diagnóstico se pudo corroborar que los discentes, si presentaban dicha deficiencia, obteniendo los resultados que se describen a continuación.

Para el inciso (a) el 89% de los discentes contestaron correctamente, por lo que presentan un nivel estratégico. Es decir, lograron identificar que correspondía a un triángulo isósceles, sin embargo, cuatro discentes del grupo dieron como respuesta que se trataba de un triángulo rectángulo, aunque en la justificación de su respuesta, proporcionaron la misma característica, de que poseía dos lados de la misma longitud, por lo que suponemos una confusión en el nombre únicamente, ya que conocían las características que lo distinguían, esto los posicionó en un nivel básico.

Para el inciso (b) se esperaba que los discentes haciendo uso de sus conocimientos previos con respecto al cálculo del perímetro, formularan la expresión: $P = a + a + 5$ o bien, una equivalente, $P = 2a + 5$. El 44% de los discentes dieron una respuesta de nivel estratégico, es decir expresaron alguna de las antes mencionadas y el 39% de ellos dieron una respuesta de nivel autónomo, considerando que dieron respuestas como: $a + a + 5$ y “sumando sus lados”, sin igualar al perímetro. También se destaca que el 11% de los discentes dieron una respuesta de nivel básico e inicial-receptivo, por lo que supondríamos no recordaban como se calculaba el perímetro.

Para el inciso (c) es esperaba que los discentes desarrollaran la expresión completa de $23 = a + a + 5$ o bien, una equivalente, $23 = 2a + 5$. Diecinueve discentes contestaron alguna de las opciones antes mencionadas, mostrando un nivel estratégico. Doce discentes más, dejaron su respuesta en un nivel autónomo donde incluso ponían las magnitudes correspondientes.

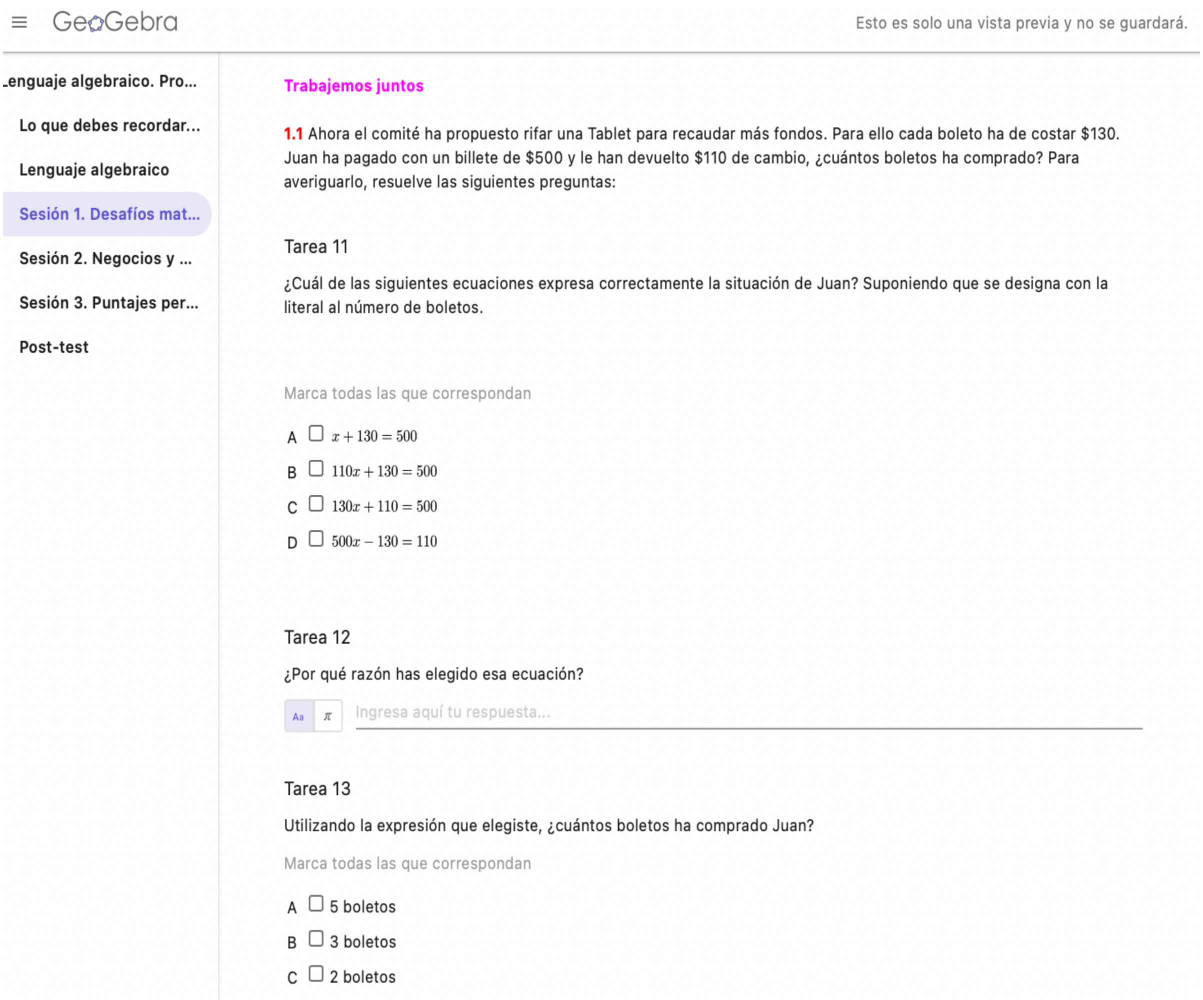
Para el inciso (d) se esperaba que los discentes realizaran la acción de trabajar con la expresión algebraica que ya habían formulado, dando como respuesta 9m, eso mostraría un nivel estratégico. En tal situación el 44% de los discentes obtuvieron dicho nivel. Mientras que el 56% del grupo no lograron llegar al resultado correcto por lo que mostraron un nivel autónomo.

Después de haber concluido las actividades de esta sección de la sesión, los discentes continuaron con la siguiente: “Trabajemos juntos”. En este punto, se les cuestionó si habían tenido alguna duda con respecto al uso de la plataforma, por lo que dijeron que no, aunque si un poco tardado meter expresiones algebraicas, e incluso que la interacción con la plataforma era algo muy novedoso, pues en su centro educativo antecesor no había tenido oportunidad de interactuar con material digital para el apoyo de la asignatura de Matemáticas.

Trabajemos juntos

Para esta sección se dió un lapso de 15 minutos para completar las actividades, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática, cabe mencionar que fueron planteamientos dando continuidad a los de la primera sección, pero con un mayor grado de dificultad.



GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

- Lenguaje algebraico. Pro...
- Lo que debes recordar...
- Lenguaje algebraico
- Sesión 1. Desafíos mat...
- Sesión 2. Negocios y ...
- Sesión 3. Puntajes per...
- Post-test

Trabajemos juntos

1.1 Ahora el comité ha propuesto rifar una Tablet para recaudar más fondos. Para ello cada boleto ha de costar $130. Juan ha pagado con un billete de $500 y le han devuelto $110 de cambio, ¿cuántos boletos ha comprado? Para averiguarlo, resuelve las siguientes preguntas:

Tarea 11

¿Cuál de las siguientes ecuaciones expresa correctamente la situación de Juan? Suponiendo que se designa con la literal al número de boletos.

Marca todas las que correspondan

- A ☐ $x + 130 = 500$
- B ☐ $110x + 130 = 500$
- C ☐ $130x + 110 = 500$
- D ☐ $500x - 130 = 110$

Tarea 12

¿Por qué razón has elegido esa ecuación?

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 13

Utilizando la expresión que elegiste, ¿cuántos boletos ha comprado Juan?

Marca todas las que correspondan

- A ☐ 5 boletos
- B ☐ 3 boletos
- C ☐ 2 boletos

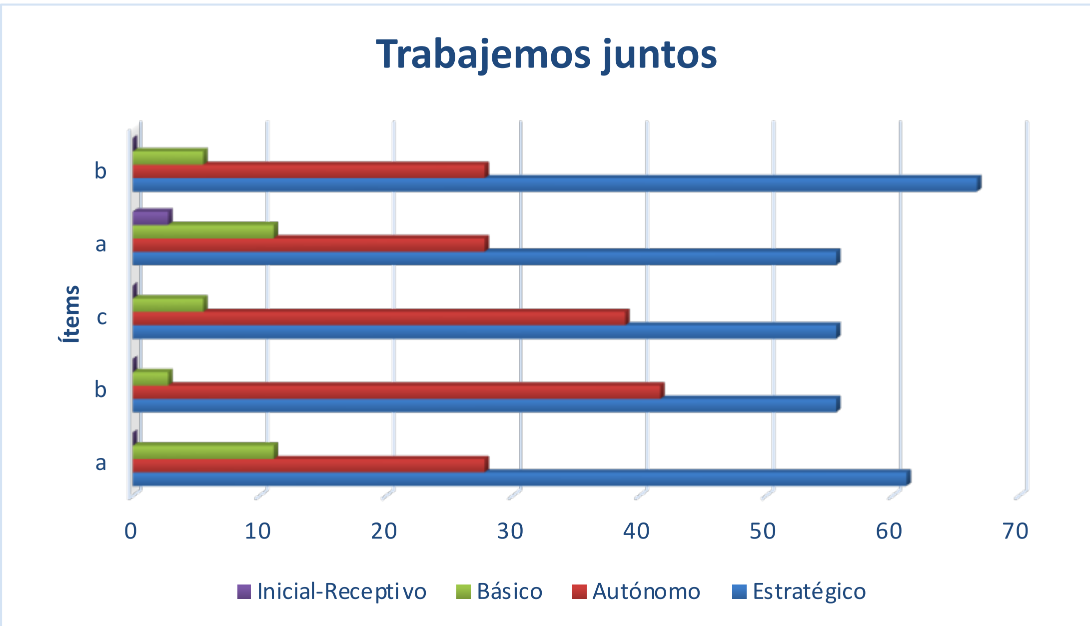


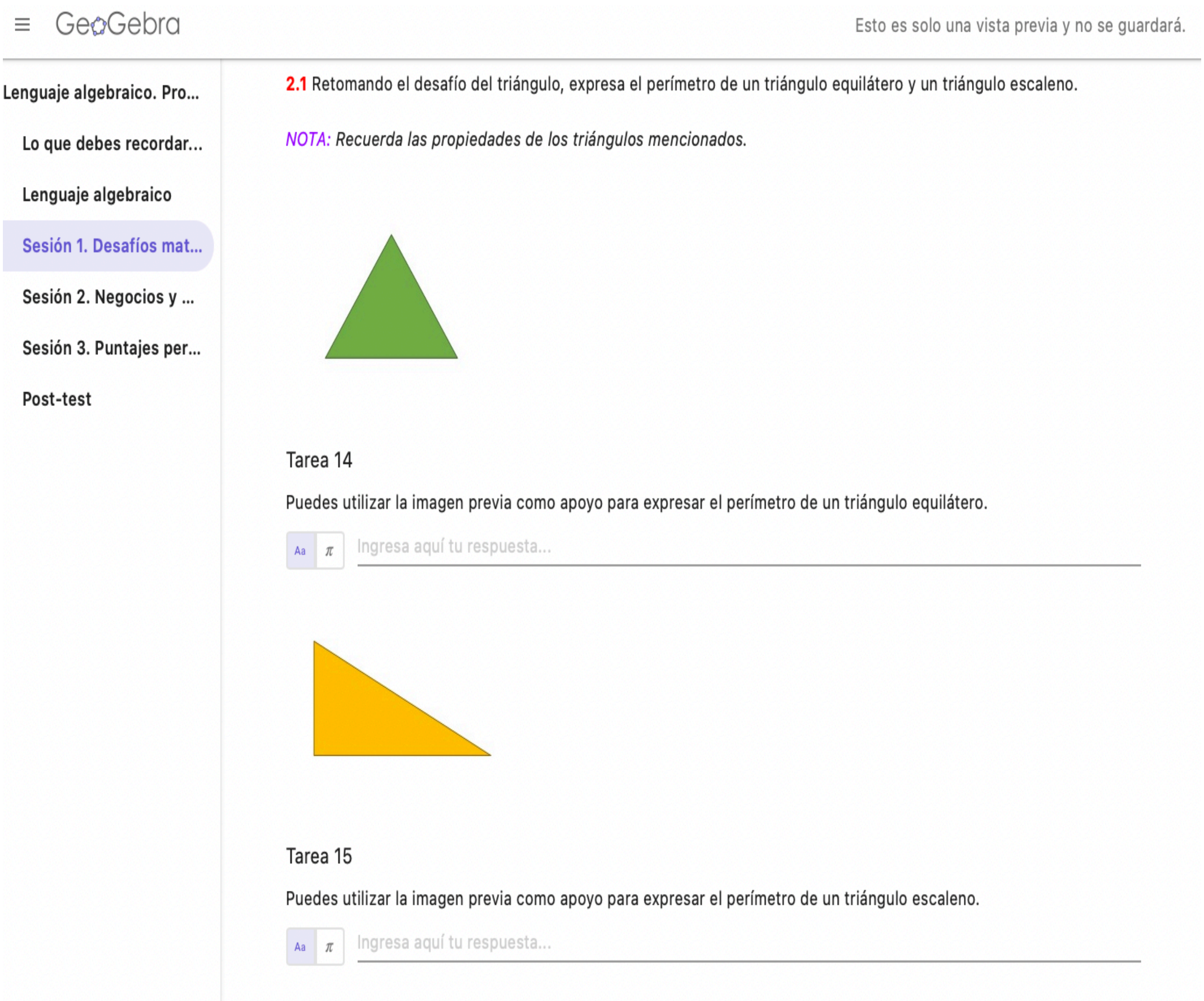
Figura 43. Respuestas de los incisos de la sección.

Para el inciso (a) se esperaba que los discentes eligieran en base a la información proporcionada la expresión $130x + 110 = 500$. Veintidos discentes eligieron correctamente la expresión, mostrando un nivel estratégico, mientras que diez mostraron tener un nivel autónomo y cuatro más, un nivel básico. Para justificar porque fueron respuestas en estos niveles, al ser de elección múltiple y estar ya formuladas, fue porque eligieron la expresión $110x + 130 = 500$, en cuya justificación expresada en el inciso (b), se pudo observar que confundieron el precio del boleto con el cambio proporcionado, pero estaban conscientes de que ambos valores tendrían que dar el total del billete de $500.

Para el inciso (c) veinte discentes del grupo contestaron correctamente desarrollando la expresión que eligieron dando como respuesta 3 boletos, mostrando de esta forma un nivel estratégico. El resto del grupo ha dejado una respuesta de nivel autónomo y básico, ya que al elegir erróneamente la expresión el resultado fue incorrecto, o bien, porque el desarrollo de la expresión para dar la solución quedó inconcluso por cálculos aritméticos.

De esta última respuesta, pudimos observar que el grupo necesitaba reforzar la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $ax + b = c$ por lo que esta actividad permitió que el profesor de la asignatura pudiera ver los déficits con los cuales debe trabajar, por lo que hasta el momento pudimos ver que la justificación del trabajo se estaba cumpliendo.

La siguiente situación problemática mencionaba:



En esta actividad se pretendía que con base en la actividad anterior donde se anotaban los datos necesarios para calcular el perímetro del triángulo isósceles, ellos pudieran hacer algo semejante.

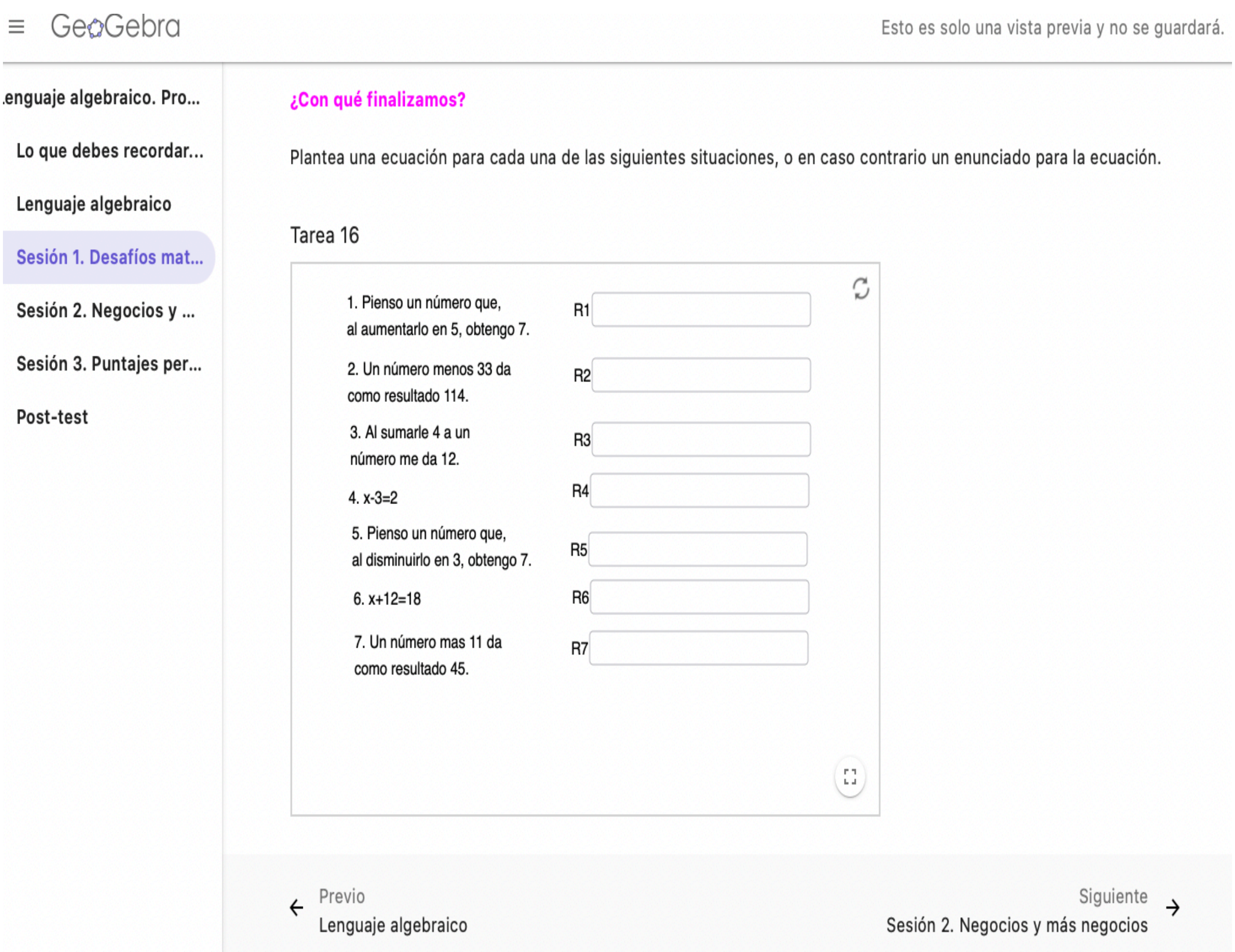
Para el inciso (a) veinte discentes del grupo lograron expresar de manera correcta el perímetro de los triángulos que se les presentó, dando expresiones como: $P = x + x + x$, $P = l + l + l$, o bien, $P = a + a + a$ para el caso del triángulo equilátero, mientras que para el triángulo escaleno, formularon expresiones como: $P = x + y + z$ y $P = a + b + c$, cabe mencionar que en todas las expresiones que formularon asociaron la P a $Perímetro$.

Los otros diez discentes no lograron expresar correctamente el perímetro, dando como respuestas: $a + a + a, x + x + x$, mostrando un nivel autónomo, cuatro discentes más, escribieron con magnitudes, como $5m + 5m + 5m$ para el caso del triángulo equilátero.

Para el inciso (b), se obtuvieron respuestas muy parecidas al anterior, el 67% de los estudiantes se mantuvo en un nivel estratégico, mientras que el 6% del grupo, para el triángulo escaleno, dejó expresado únicamente magnitudes, mostrando un nivel básico.

¿Con qué finalizamos?

En esta sección se utilizó el resto del tiempo especificado para esta primera sesión para completar las actividades, obteniendo los resultados que a continuación se describen.



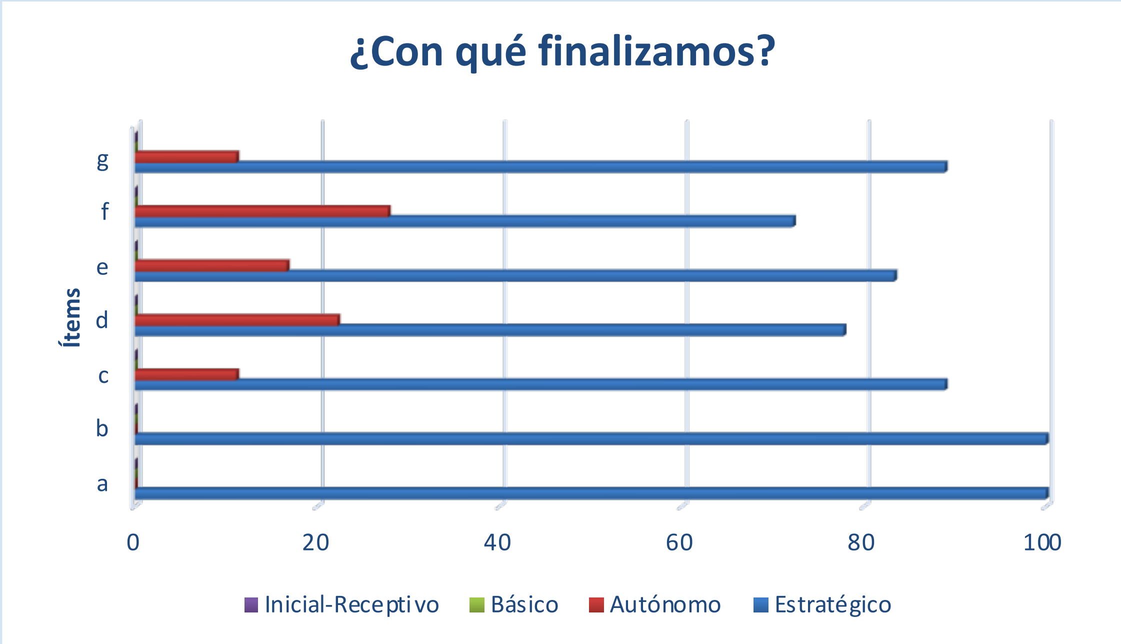


Figura 44. Respuestas de los incisos de la sección.

Para los incisos (a) y (b) se esperaba que dieran las respuestas: $x + 5 = 7$ y $x - 33 = 144$, respectivamente, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal, todos los discentes dieron una respuesta correcta, mostrando un nivel estratégico.

Para el inciso (c) se esperaba que los discentes dieran como respuesta $x + 4 = 12$, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal. El 89% de los discentes dieron una respuesta correcta mostrando así un logro de un nivel estratégico. Mientras que sólo cuatro discentes se quedaron en el nivel autónomo, debido a que completaron aritméticamente la expresión, es decir denotaron: $4 + 8 = 12$, aún cuando la respuesta es correcta, recordemos que la instrucción exige el planteamiento de una ecuación.

Para los incisos (d), (e) y (f) se esperaba que los discentes dieran las respuestas: Un $número$ $menos$ 3 da $como$ $resultado$ dos, x − 3 = 7 y $Pienso$ un $número$ que al $aumentarlo$ en 12, $obtengo$ 18, respectivamente. Mostrando de esta forma que habían obtenido un nivel estratégico, con respescto al uso de los vocablos de suma y resta, para el uso del lenguaje algebraico. Para el inciso (d) y (f), el 78% y 72% de los discentes, respectivamente, alcanzaron este nivel, dando respuestas correctas con sus diferentes variaciones con respecto a la literal, mientras que ocho y diez discentes, respectivamente, obtuvieron un nivel autónomo. En el caso del inciso (e), el 83% de los discentes obtuvieron un nivel estratégico, mientras que seis discentes obtuvieron un nivel autónomo, porque dieron como respuesta: $a\ x\ le\ quito$ 3 $y\ obtengo$ 2, $a\ x\ le\ aumento$ 12 $y\ obtengo$ 18, o bien, aritméticamente: 10 − 3 = 7.

Hacemos hincapié que las respuestas que se exigían en la instrucción era el planteamiento de una ecuación, y en el caso de la redacción del enunciado, aun cuando utilizan las palabras *quito* y *aumento*, simplemente están trasladando lo que ven visualmente pero no hacen como tal la formulación de un enunciado.

Para el caso del último inciso (g), el 89% de los discentes lograron el nivel estratégico, dando como respuesta $x + 11 = 45$, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal empleada. Mientras que el resto de discentes, obtuvo un nivel autónomo.

Conclusiones de la sesión 1. Desafíos matemáticos.

Podemos decir de manera general que la aplicación de la primera sesión reflejó un buen desempeño de los discentes, así como de una buena disposición para trabajar. Dentro del tiempo planeado para cada una de las secciones de la sesión se cumplió con el, aún cuando al principio tardaron un poco en entender la manera de escribir dentro del EVA de GeoGebra, a pesar de ello poco a poco fueron familiarizándose con la dinámica de trabajo, arrojando los resultados antes mostrados. Aún cuando se esperaban preguntas con respecto a los enunciados de la plataforma, por alguna situación de redacción, no hubo ninguna por parte de los discentes.

Por último, el hecho de estipular un tiempo para el desarrollo de las actividades, al inicio de la sesión, permitió a los discentes guardar sus avances dentro de la plataforma, y algunos que tuvieron más tiempo debido a su desempeño pudieron revisar de manera rápida de que iba la siguiente sesión. Cabe mencionar que el desempeño que desarrollaron los estudiantes que venían de un bachillerato tecnológico fue más eficiente a la hora de interactuar con el EVA, y al cuestionarles sobre dicha eficiencia, mencionaron que ellos durante casí toda su estadía en el bachillerato tecnológico habían estado trabajado con GeoGebra, por lo que la interacción que tenían con este EVA les era ya muy familiar. A diferencia del alumno cuya procedencia era de una telebachillerato, el cual recien en su último semestre interactúo muy esporádicamente con este u cualquier otro EVA para las matemáticas en general.

Figura 45. Discentes de nivel superior.

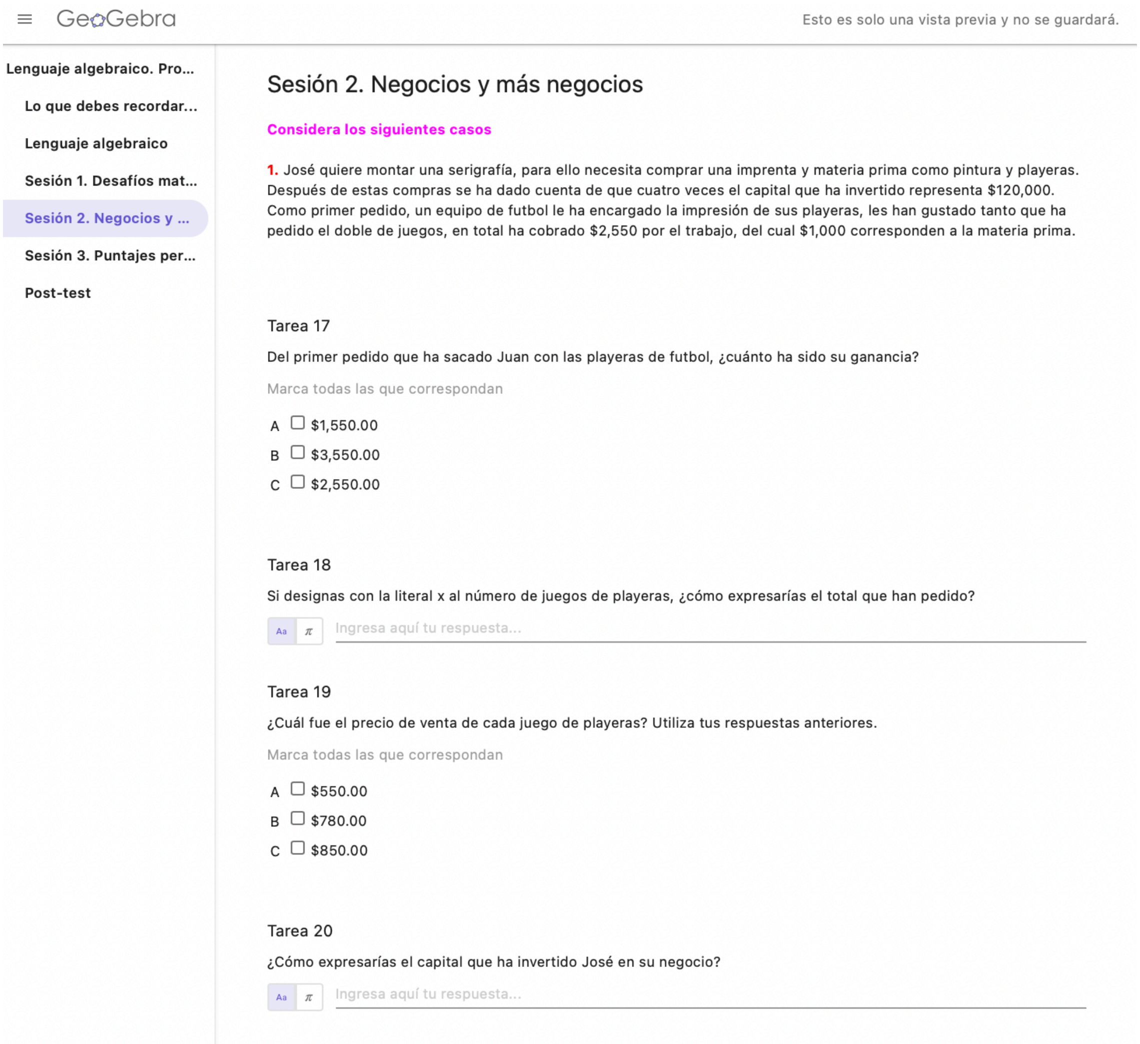
Sesión 2. Negocios y más negocios

Empezaremos describiendo la sesión, la cual está estructurada en cuatro partes, en la primera parte *"considera los siguientes casos"* se le plantea al discente la problemática que presentan dos negocios, dichas actividades implican el uso del lenguaje algebraico con respecto a la multiplicación. La segunda parte *"Trabajemos juntos"* es una actividad que da continuidad a los planteados en la primera parte, pero con diferentes planteamientos y un grado mayor de dificultad. La tercera parte *"Algo más"*, involucra actividades referentes al uso de expresiones con fracciones, esto debido a que en la prueba diagnóstico se pudo observar que los discentes presentaban dificultades con este aspecto, y por último *¿Con qué finalizamos?"*, en esta parte se hace el cierre de la sesión con producciones propias del discente. Nuevamente se hace mención que dentro de cada una de las partes de la sesión se monitoreó el trabajo que iban realizando los discentes, esto con el fin de indagar si entendían el planteamiento de las actividades o bien, si tenían dudas con respecto a la redacción de éstas.

Considera los siguientes casos

La actividad se inició dándoles nuevamente la indicación de cómo se iba a trabajar la sesión completa, indicándoles que sería la misma dinámica que en la primera sesión, es decir, tendrían 40 minutos para trabajar y posteriormente guardar su avance en la plataforma. También se les recordó que tenían que entrar con la misma cuenta de usuario con la cual trabajaron en la sesión anterior.

Los discentes comenzaron con la primera actividad de esta sección de la sesión, leyendo la siguiente situación problemática:



GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...

Lo que debes recordar...

Lenguaje algebraico

Sesión 1. Desafíos mat...

Sesión 2. Negocios y ...

Sesión 3. Puntajes per...

Post-test

Sesión 2. Negocios y más negocios

Considera los siguientes casos

1. José quiere montar una serigrafía, para ello necesita comprar una imprenta y materia prima como pintura y playeras. Después de estas compras se ha dado cuenta de que cuatro veces el capital que ha invertido representa $120,000. Como primer pedido, un equipo de futbol le ha encargado la impresión de sus playeras, les han gustado tanto que ha pedido el doble de juegos, en total ha cobrado $2,550 por el trabajo, del cual $1,000 corresponden a la materia prima.

Tarea 17

Del primer pedido que ha sacado Juan con las playeras de futbol, ¿cuánto ha sido su ganancia?

Marca todas las que correspondan

A ☐ $1,550.00

B ☐ $3,550.00

C ☐ $2,550.00

Tarea 18

Si designas con la literal x al número de juegos de playeras, ¿cómo expresarías el total que han pedido?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 19

¿Cuál fue el precio de venta de cada juego de playeras? Utiliza tus respuestas anteriores.

Marca todas las que correspondan

A ☐ $550.00

B ☐ $780.00

C ☐ $850.00

Tarea 20

¿Cómo expresarías el capital que ha invertido José en su negocio?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

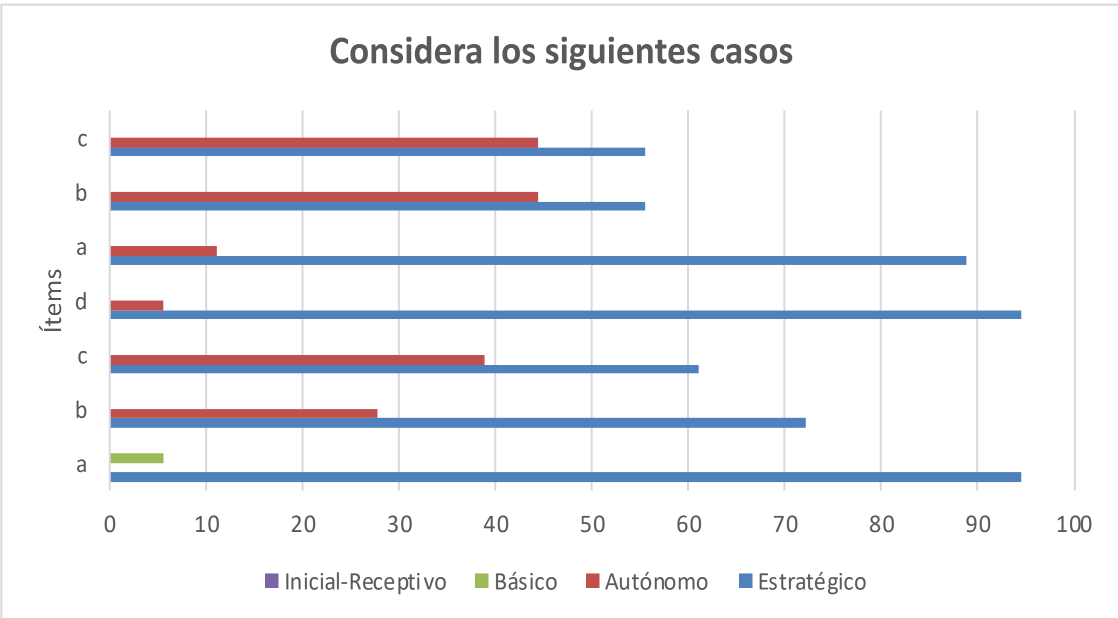


Figura 46. Respuesta de los incisos de la sección.

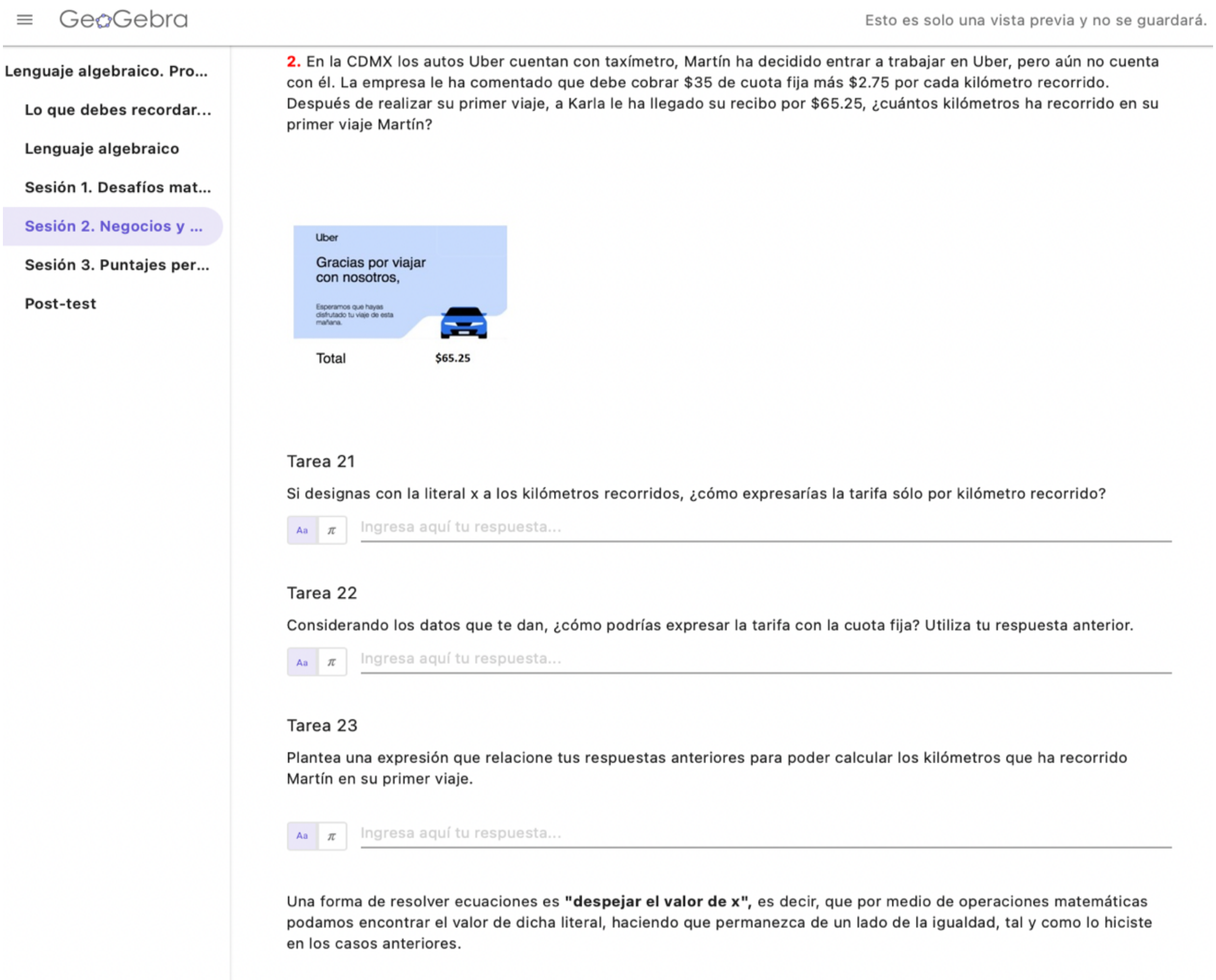
Para el inciso (a) se esperaba que con la información que se les proporciona en el planteamiento del problema, puedan hacer el cálculo aritmético de: $\$2{,}550 - \$1{,}000 = \$1550$. El 94% de los discentes identificaron correctamente los datos y la operación aritmética que tenían que realizar, mostrando un nivel de competencia estratégico, el resto del porcentaje de discentes se quedaron en nivel básico.

Para el inciso (b) se esperaba que el discente identificara que en total se han pedido tres juegos, y expresaran: $x + 2x$, o bien, $3x$. El 72% de los discentes expresaron de manera correcta el número de juegos de playeras, mostrando de esta forma que tienen un nivel estratégico. Mientras que el resto sólo logró identificar el doble de juegos, dejando una respuesta en nivel autónomo, es decir, $x + x$, o bien, $2x$.

Para el inciso (c) se esperaba que el discente expresara $3x = 2550$ y a partir de ello pudieran decir el precio de cada juego, equivalente a $\$850$. Veintidos discentes lograron expresar de manera correcta la ecuación que representa el precio de venta de cada juego de playeras, mostrando así un nivel estratégico, y por lo tanto dieron el costo de cada juego. Mientras que el resto del grupo expresó $3x = 1550$, por lo que el precio de venta de cada juego que dieron fue de $516.66, esto puede deberse a que la redacción del ítem menciona que utilice sus respuestas anteriores, y en el primer inciso dieron como respuesta la cantidad de $1550, sin embargo, tenían que comprender que el precio del juego involucra también la ganancia del negocio, por lo tanto se identifican en un nivel autónomo.

Para el inciso (d) se esperaba que el discente expresara $4x = 120{,}000$. El 94% de los discentes lo hizo correctamente, considerando el capital invertido en la serigrafía, dando como respuesta $4x = 120{,}000$ o equivalentes como: $4v = 120{,}000$, $c + c + c + c = 120{,}000$, esto denotó que los discentes se encuentran en un nivel estratégico.

Para el segundo ítem, se les planteó la siguiente problemática:


GeoGebra
Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...
Lo que debes recordar...
Lenguaje algebraico
Sesión 1. Desafíos mat...
Sesión 2. Negocios y ...
Sesión 3. Puntajes per...
Post-test

2. En la CDMX los autos Uber cuentan con taxímetro, Martín ha decidido entrar a trabajar en Uber, pero aún no cuenta con él. La empresa le ha comentado que debe cobrar $35 de cuota fija más $2.75 por cada kilómetro recorrido. Después de realizar su primer viaje, a Karla le ha llegado su recibo por $65.25, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en su primer viaje Martín?

Tarea 21

Si designas con la literal x a los kilómetros recorridos, ¿cómo expresarías la tarifa sólo por kilómetro recorrido?

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 22

Considerando los datos que te dan, ¿cómo podrías expresar la tarifa con la cuota fija? Utiliza tu respuesta anterior.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 23

Plantea una expresión que relacione tus respuestas anteriores para poder calcular los kilómetros que ha recorrido Martín en su primer viaje.

Ingresa aquí tu respuesta...

Una forma de resolver ecuaciones es **"despejar el valor de x"**, es decir, que por medio de operaciones matemáticas podamos encontrar el valor de dicha literal, haciendo que permanezca de un lado de la igualdad, tal y como lo hiciste en los casos anteriores.

Para el inciso (a) se esperaba que los discentes contestaran $2.75x$, con base a la información proporcionada en el planteamiento del problema, para lo cual el 89% de los discentes expresó correctamente la respuesta esperada, identificándose así en un nivel estratégico. Mientras que el 11% dió una respuesta cuya definición los coloca en un nivel autónomo.

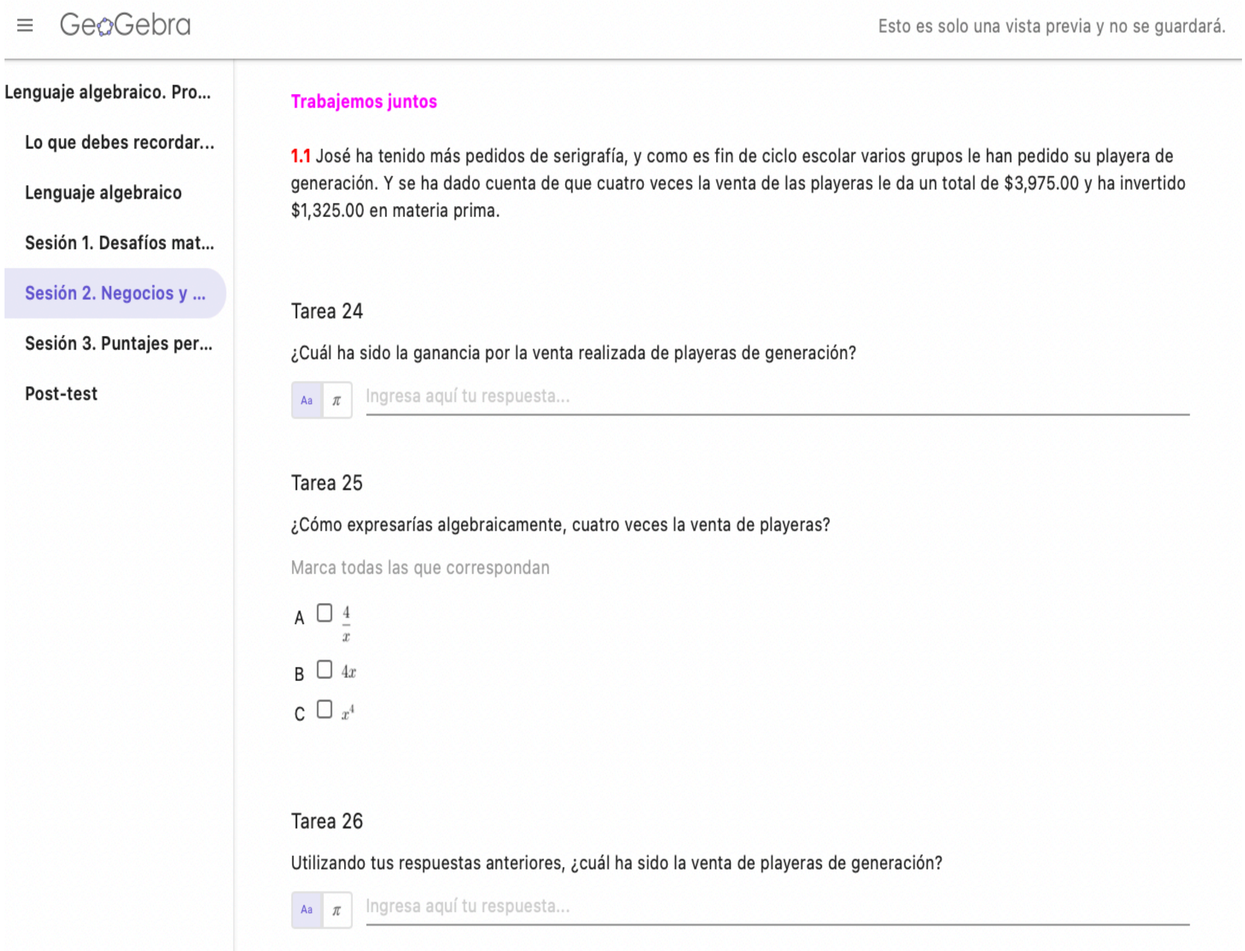
Para el inciso (b) se esperaba con base a su respuesta en el ítem anterior, pudieran expresar $2.75x + 35$. El 56% de los discentes proporcionó la respuesta esperada, sin embargo, el 44% de las repuestas de los discentes se consideró en un nivel autónomo, ya que, haciendo omisión de su respuesta en el inciso anterior, expresaron: $35x + 2.75$, es decir invirtieron la información, pero lograron identificar los datos que tenían que estar presentes en la expresión. Esto se ve reflejado en la respuesta del siguiente inciso, ya que al expresar $35x + 2.75 = 65.25$, dieron como respuesta $1.78km$, siendo que la respuesta correcta es $11km$.

Después de haber realizado las actividades de esta sección, se continuo con:*“Trabajemos juntos”*.

Trabajemos juntos

En esta sección se dio un lapso de 15 minutos para completar las actividades, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática, cabe mencionar que fueron planteamientos dando continuidad a los de la primera sección, pero con un mayor grado de dificultad.



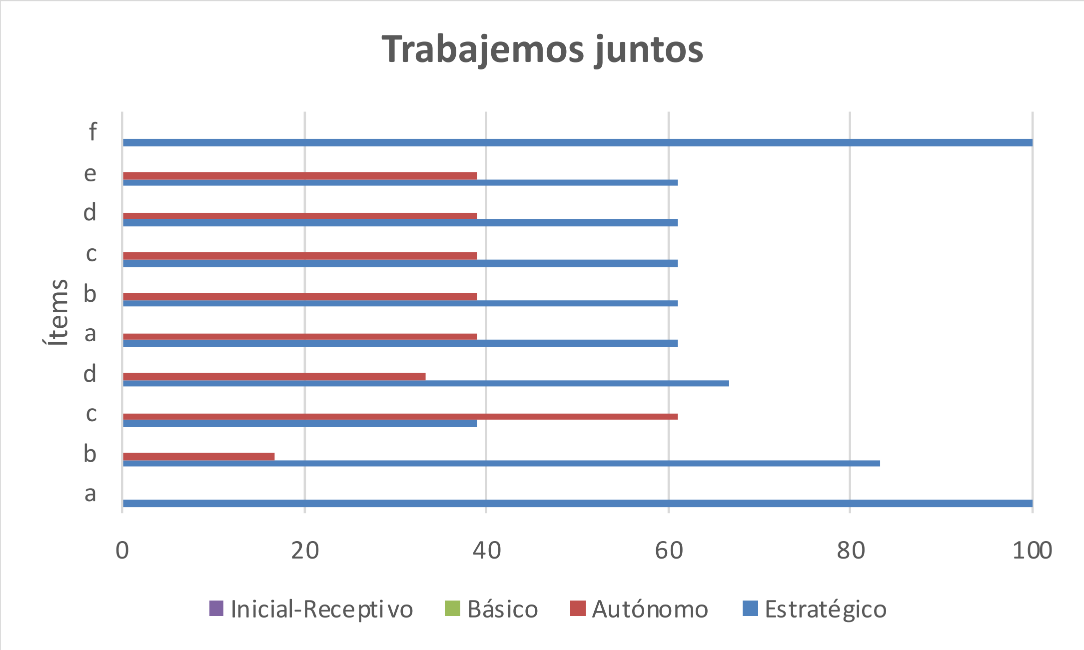


Figura 47. Respuesta de los incisos de la sección.

Para el inciso (a) se esperaba que los discentes dieran por respuesta: $\$2{,}650$, los cuales al 100% proporcionaron dicha respuesta, mostrando así un nivel estratégico. En el caso (b) se esperaba que los discentes dieran por respuesta $4x$, de los cuales el 83% dio dicha respuesta, mostrando un nivel estratégico, mientras que el resto del porcentaje de discentes se quedó en un nivel autónomo.

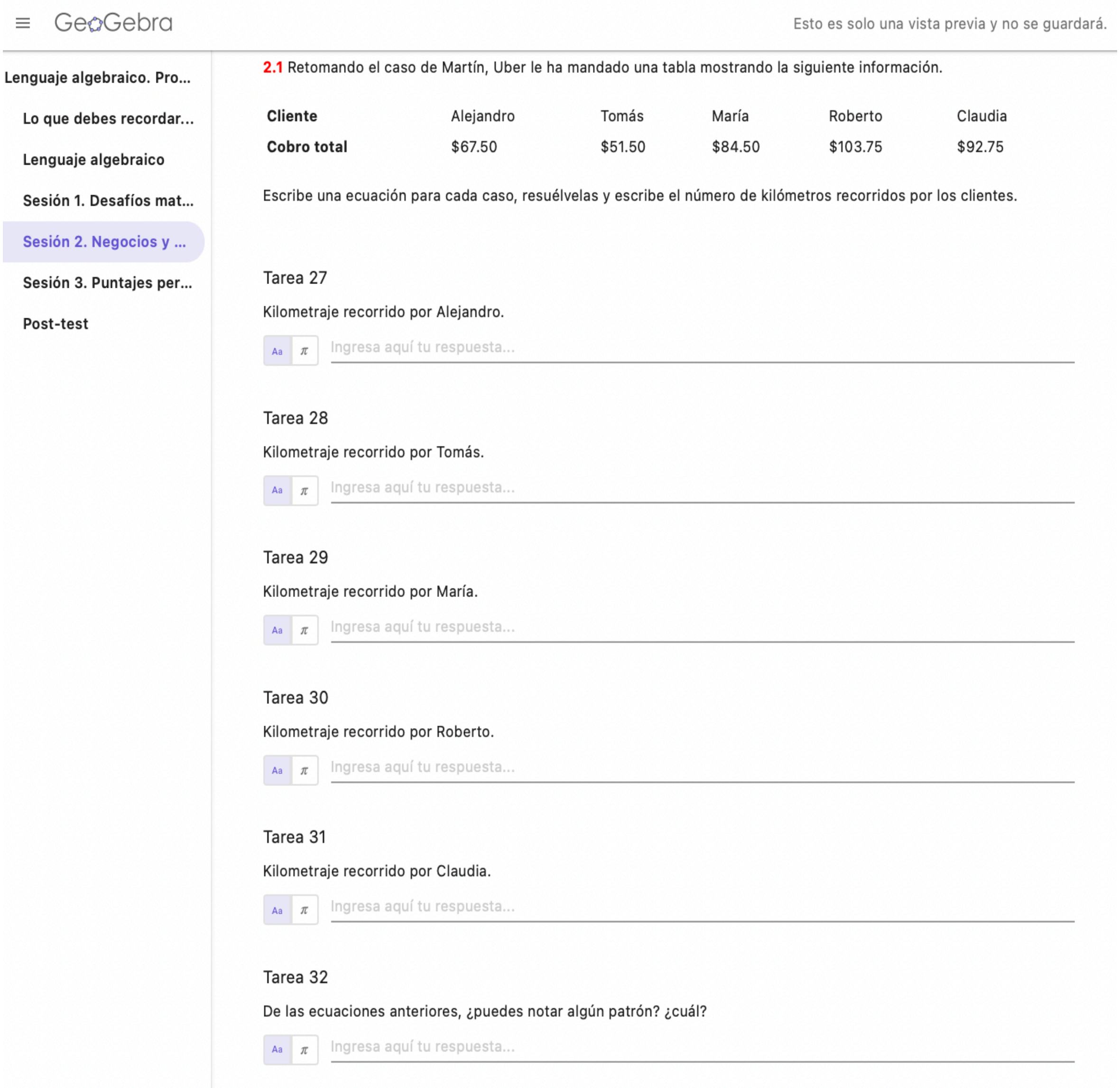
En este problema, se observó que entre algunos discentes comentaron que el planteamiento se asemejaba al primer problema donde decía cuatro veces el capital, por lo que pudieron expresar con mayor claridad $4x$.

Para el inciso (c) se esperaba que los discentes expresaran $4x = 3975$ y que a partir de ello dieran la respuesta de $\$993.75$ correspondiente a la venta. Catorce discentes dieron la respuesta correcta, por lo que tuvieron un nivel estratégico.

En este problema, nuevamente se escucharon comentarios con respecto a la igualdad de la ecuación, ya que esta vez consideraron el total de dinero que se recaudó con la impresión de las playeras, a raíz de sus respuestas en la sección anterior.

Sin embargo, fueron veintidos discentes, es decir, la mayoría del grupo quien mostró un nivel autónomo, debido a que volvieron asociar la respuesta del inciso (a) en su expresión, por lo que su respuesta con respecto a la venta fue de $\$662.5$.

Los discentes tardaron 10 minutos en contestar esta actividad por lo que para el segundo ítem tuvieron más tiempo para contestar, enfrentando la siguiente problemática:


GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...

Lo que debes recordar...

Lenguaje algebraico

Sesión 1. Desafíos mat...

Sesión 2. Negocios y ...

Sesión 3. Puntajes per...

Post-test

2.1 Retomando el caso de Martín, Uber le ha mandado una tabla mostrando la siguiente información.

Cliente	Alejandro	Tomás	María	Roberto	Claudia
Cobro total	\$67.50	\$51.50	\$84.50	\$103.75	\$92.75

Escribe una ecuación para cada caso, resuélvelas y escribe el número de kilómetros recorridos por los clientes.

Tarea 27

Kilometraje recorrido por Alejandro.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 28

Kilometraje recorrido por Tomás.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 29

Kilometraje recorrido por María.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 30

Kilometraje recorrido por Roberto.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 31

Kilometraje recorrido por Claudia.

Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 32

De las ecuaciones anteriores, ¿puedes notar algún patrón? ¿cuál?

Ingresa aquí tu respuesta...

Para los incisos (a), (b), (c), (d) y (e) se esperaba que los discentes dieran como respuesta la expresión $2.75x + 35$, asociando la igualdad a cada caso que se les presenta. En todos los incisos, veintidos discentes dieron la respuesta correcta, asociando correctamente la expresión con cada igualdad, además de ello resolviendo correctamente la expresión y dando los kilómetros que se recorrieron en cada caso, mostrando de esta forma un nivel estratégico.

Sin embargo, el 39% de los discentes mostraron un nivel autónomo ya que, si dieron la expresión esperada con las igualdades, pero en la resolución no llegaron al kilometraje de cada caso, debido a un cálculo aritmético. Aún cuando se observo que algunos discentes utilizaron papel y lápiz para hacer anotaciones, otros los hicieron mentalmente, por lo que este método pudo haberles dado una respuesta errónea.

Para el inciso (f) todos los discentes proporcionaron la respuesta esperada, notando el patrón correspondiente a la expresión $2.75x + 35$.

Después de haber realizado las actividades de esta sección, siguieron trabajando para continuar con la siguiente sección: *"Algo más..."*.

Algo más...

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática, en la cual se trabajaba con fracciones ya que en la prueba diagnóstico se notó que si tenían dificultades con expresar cocientes. En dicha actividad los discentes se tomaron 12 minutos.

≡ GeoGebra Esto es solo una vista previa y no se guardará

Algo más...

Los Pericos de Puebla es un equipo de la Liga Mexicana de Béisbol cuya sede es la Capital del Estado de Puebla, y desde el 16 de Junio de 1973, su casa es el Estadio Hermanos Serdán y ha ganado cuatro campeonatos a lo largo de su historia.

Actualmente su casa, el Estadio Hermanos Serdán, se encuentra bajo ciertas modificaciones para beneficios de la afición a la novena verde como las butacas, los baños y las secciones bien identificadas. Para empezar con las modificaciones han acordado cambiar tres cuartas partes de las butacas, que equivalen a 9,084 butacas y pintar el resto.

Tarea 33

¿Cómo expresarías matemáticamente, tres cuartas partes?

Marca todas las que correspondan

A ☐ $\frac{4}{3}$

B ☐ $3\frac{1}{4}$

C ☐ $\frac{3}{4}$

Tarea 34

Si designas con la literal x al total de butacas, ¿cómo expresarías algebraicamente tres cuartas partes de la capacidad del Estadio?

Marca todas las que correspondan

A ☐ $\frac{4}{3}x$

B ☐ $3\frac{1}{4}x$

C ☐ $\frac{3}{4}x$

Tarea 35

Escribe la ecuación correcta para determinar la capacidad total del Estadio Hermanos Serdán. Utiliza tus respuestas anteriores.

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Tarea 36

Haciendo uso de la ecuación que elegiste en la pregunta anterior, ¿cuál es la capacidad total de la casa de los Pericos de Puebla?

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

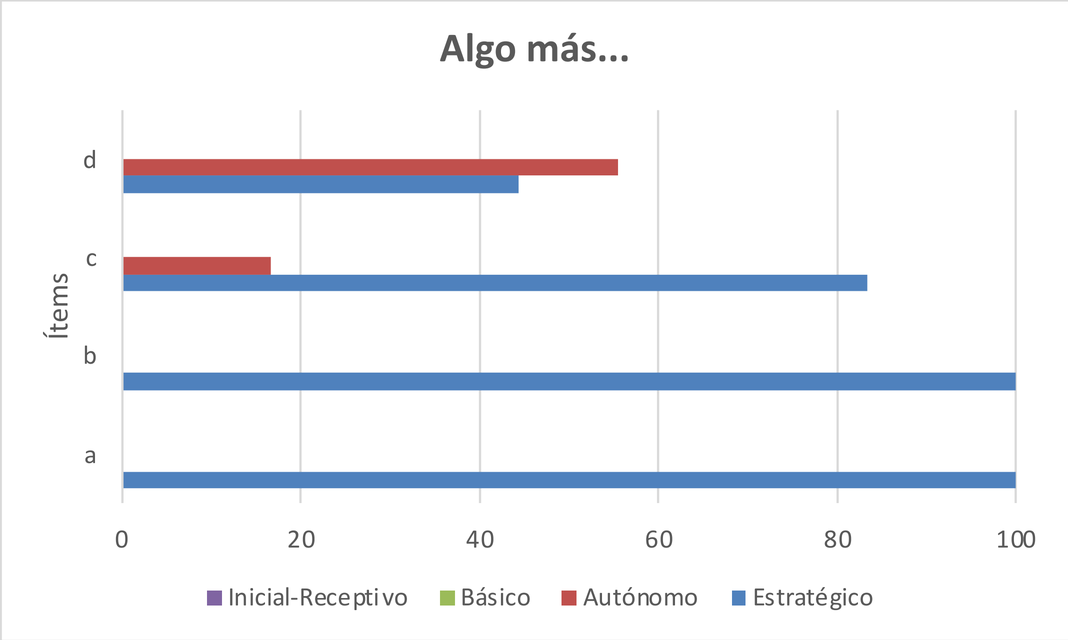


Figura 48. Respuesta de los incisos de la sección.

Para los incisos (a) y (b) se esperaba que los discentes dieran como respuestas $3 \,/\, 4$ y $3/4x$, respectivamente. El 100% de los discentes no tuvieron dificultad en expresar correctamente las respuestas de cada inciso, mostrando de esta forma un nivel estratégico.

Para los incisos (c) y (d) se esperaba que los discentes dieron como respuestas $3/4x \;=\; 9{,}084$ y su resolución de $12{,}112$ butacas, respectivamente. En este caso, un 83% de los discentes dieron la respuesta correcta para el inciso (c), por lo que la mayoría presentó un nivel estratégico. Mientras que para el inciso (d), el 56% de los discentes, presentó un nivel autónomo. Aunque el mayor procentaje de discentes, se agrupo en este nivel, no hubo otro porcentaje en los niveles inferiores.

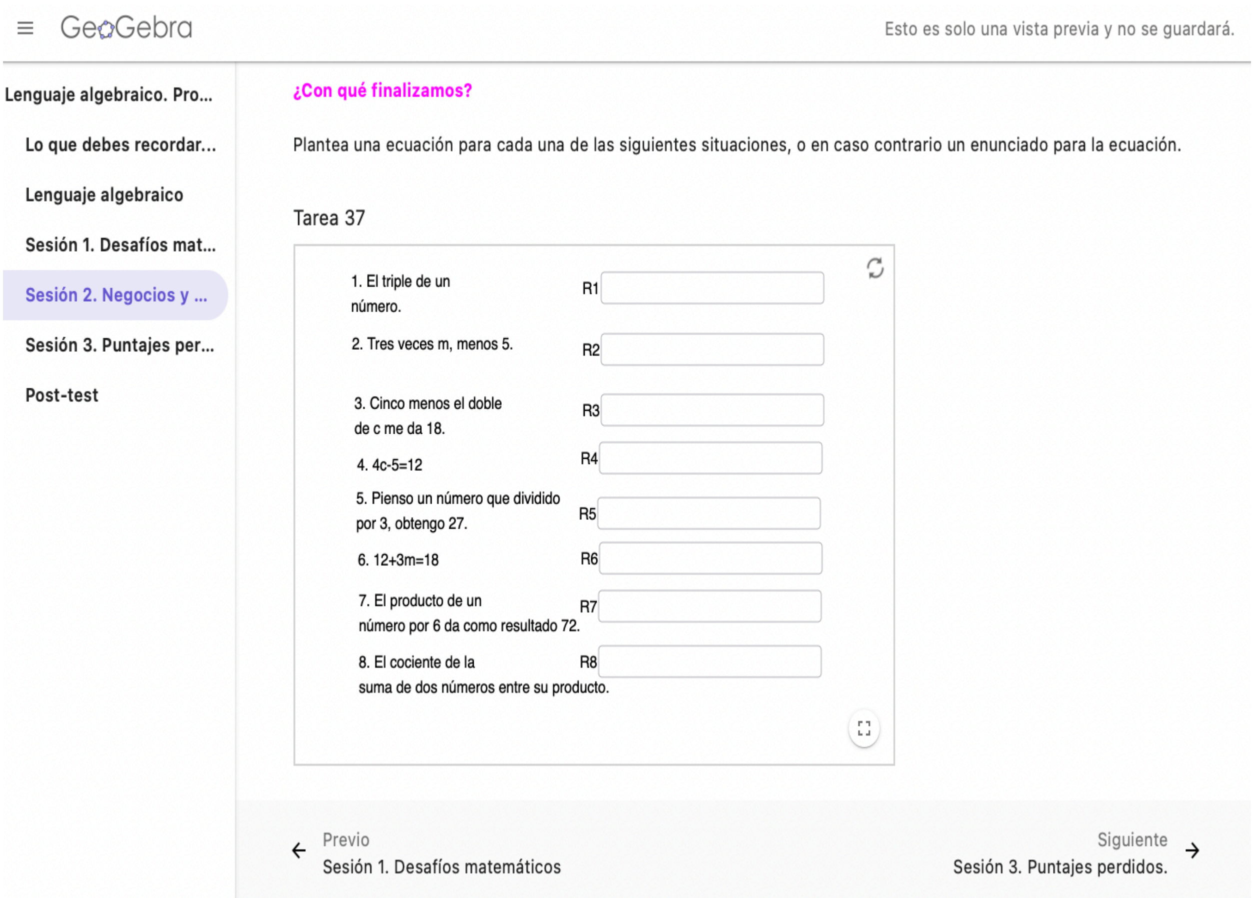
Nuevamente, se observó discusiones con respecto a la resolución de la ecuación por causa de los cálculos aritméticos, ya que al ser una fracción se les dificultó dar resolución a la ecuación.

Esta actividad en específico no les llevo mucho tiempo dar resolución, por lo que inmediatamente pasaron a la siguiente sección: *Con qué finalizamos?”.*

¿Con qué finalizamos?

Se dió un lapso de 10 minutos para completar las actividades de esta sección, obteniendo los resultados que a continuación se describen.

Los discentes se enfrentaron a la siguiente situación problemática:



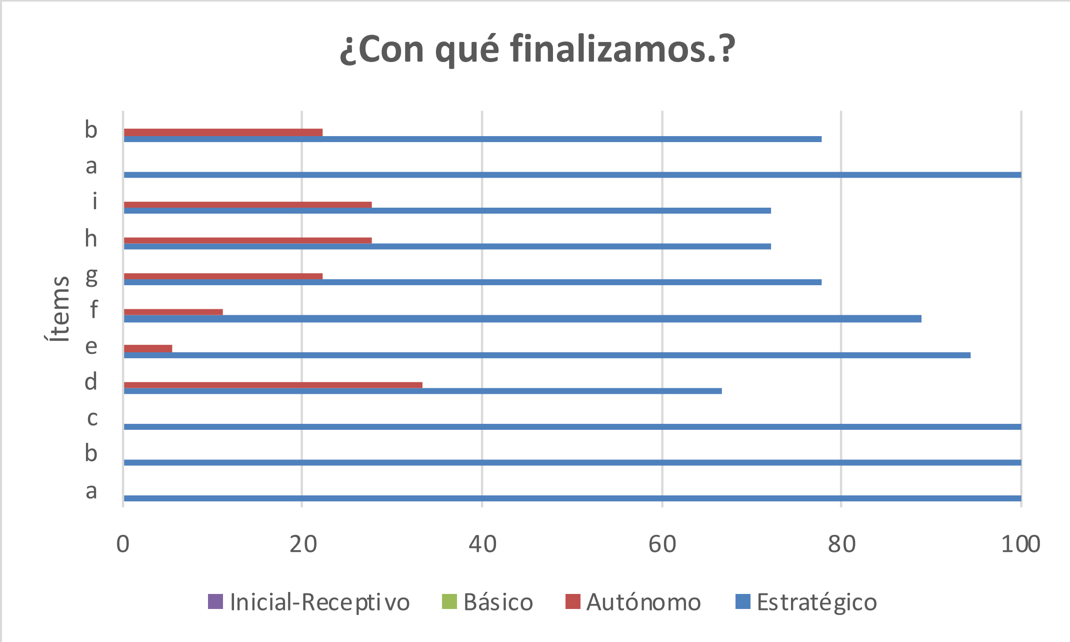


Figura 49. Respuesta de las incisos de la sección.

Para los incisos (a), (b) y (c), contestaron correctamente, con sus diferentes variaciones con respecto a la literal, mostrando un nivel estratégico. Y en el caso del inciso (d) el 67% de los discentes obtuvieron unnivel estratégico, y sólo doce discentes obtuvieron un nivel autónomo.

Para los incisos (e) y (f) los discentes mostraron un nivel estratégico en su mayoría, mientras que sólo el 6% y 11%, respectivamente, alcanzaron un nivel autónomo.

En los incisos (h) e (i), veintiseis discentes alcanzaron el nivel estratégico, mientras que el resto se quedaron en el nivel autónomo. Cabe mencionar que para el inciso (i) se observó que los discentes discutieron sus respuestas por la forma de redacción, entre las cuales se destacan: "*el cociente de un número entre tres + 6=25*" y "*la tercera parte de un número más seis da veinticinco*". Cabe destacar que esta vez se considera correcta la respuesta proporcionada y no en proceso, porque utilizaron el lenguaje con el cual se pretendía que el discente se familiarizara, haciendo uso de la palabra *cociente*.

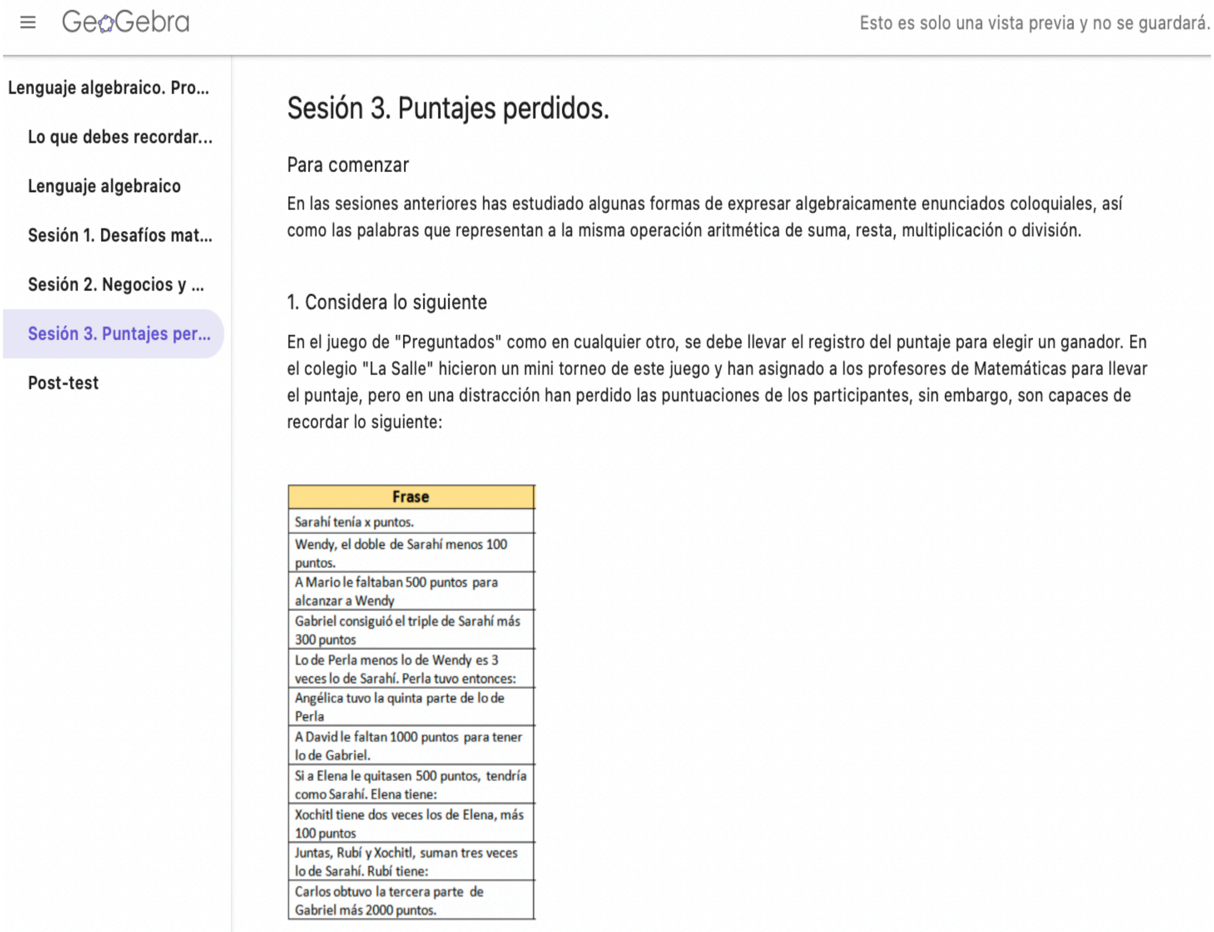
Para el inciso (g) el 78% de los discentes obtuvieron un nivel estratégico. Sólo ocho discentes se posicionaron en el nivel autónomo, considerado así porque dejaron expresado: $a + a\,/,$ o bien, $xx/x + x$, es decir no comprendieron que se trataba de dos números diferentes, denotando la misma literal, además en el segundo caso, el orden si afecta el resultado de la ecuación.

Conclusiones de la sesión 2. Negocios y más negocios

Podemos decir que de manera general la aplicación de la segunda sesión reflejó un buen desempeño de los discentes, así como de una mejor disposición para trabajar. En la primera sección de actividades se había planeado un tiempo de 10 minutos y estuvimos dentro del tiempo estipulado, a diferencia de la primera sesión de trabajo, tardaron menos tiempo en comprender los planteamientos de los problemas, así como del uso del EVA, se les notó menos ansiedad que en la primera sesión ya que sabían como unirse a la plataforma de GeoGebra y como ir desarrollando la escritura con las herramientas que proporciona dicha plataforma educativa, así mismo fueron más hábiles en entender y familiarizarse con la dinámica de trabajo, arrojando los resultados antes mostrados. Se observo durante la sesión, una mayor retroalimentación con sus mismos compañeros, aterrizando con mayor fluidez sus ideas. Esto es muy importante destacarlo porque como se hizo mención anteriormente, debían tener presente la ganancia que se percibía en los negocios, de manera que el discente se involucrara en la devolución del problema. Debido a que las actividades fluyeron con mayor rapidez que en la primera sesión, todos los discentes lograron expresar algebraicamente enunciados coloquiales y viceversa, haciendo uso de los nuevos términos que deseábamos, haciendo referencia a la operación de multiplicación, y aunque algunas respuestas pudieron haber sido mejores se hizo notar el uso del lenguaje algebraico para las operaciones de multiplicación y división que se pretendía con las actividades. Durante esta sesión se pudo observar particularmente el desempeño dentro del EVA al discente cuyo modelo educativo antecesor, fue un telebachillerato, desarrollar las actividades con más fluidez, aunque tropezando con pequeños detalles propios de la nomenclatura propia de GeoGebra.

Sesión 3. Puntajes perdidos

Empezaremos describiendo la sesión que fue diseñada, la cual tenía como finalidad que los discentes trabajaran de manera lúdica utilizando precisamente los términos que se habían trabajado en las sesiones anteriores, está estructurada en dos partes, en la primera parte *"considera lo siguiente"* se le plantea al discente el contexto del problema, el cual hace referencia a un juego que está en tendencia llamado *Preguntados*.



GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...

Lo que debes recordar...

Lenguaje algebraico

Sesión 1. Desafíos mat...

Sesión 2. Negocios y ...

Sesión 3. Puntajes per...

Post-test

Sesión 3. Puntajes perdidos.

Para comenzar

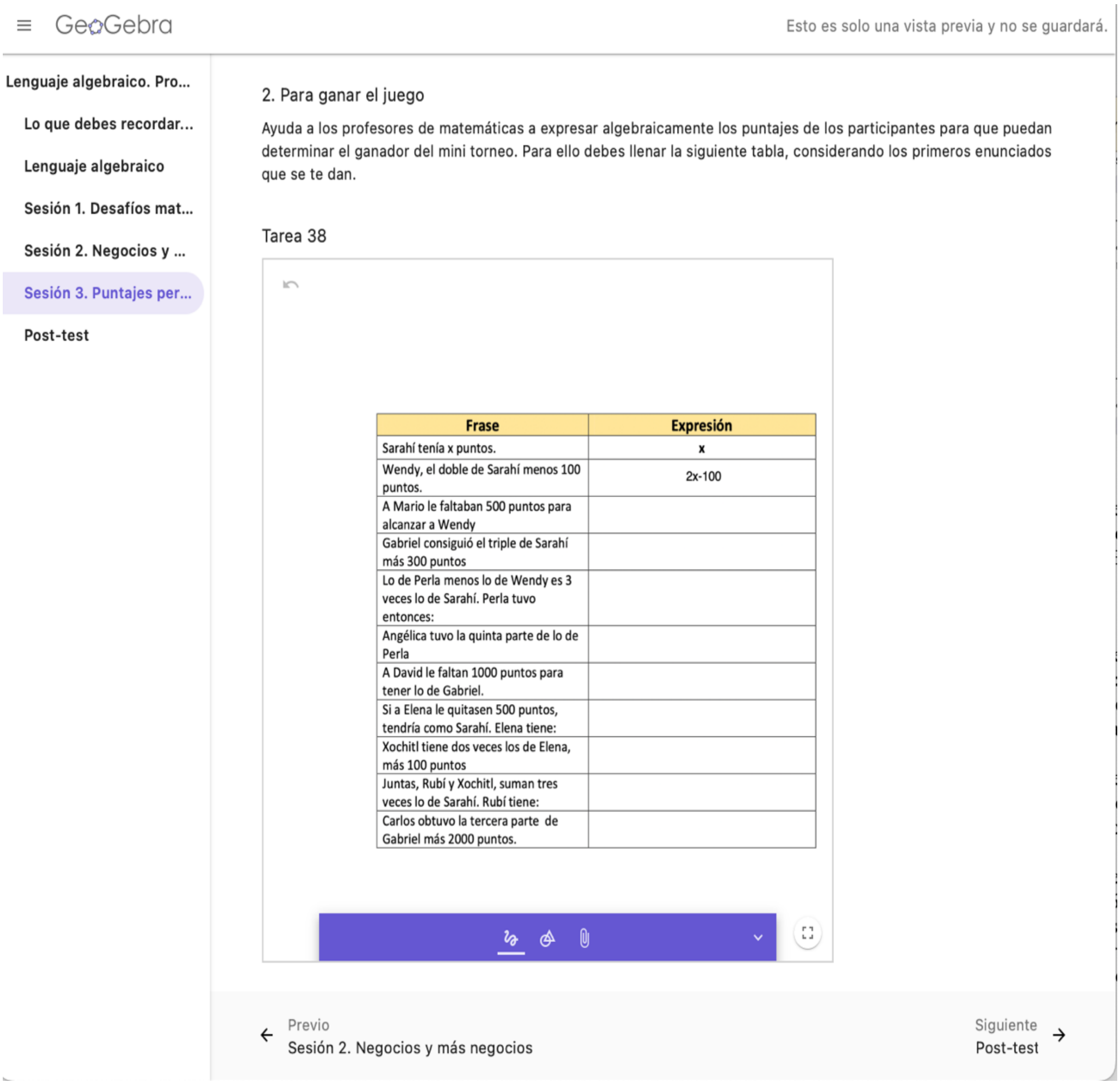
En las sesiones anteriores has estudiado algunas formas de expresar algebraicamente enunciados coloquiales, así como las palabras que representan a la misma operación aritmética de suma, resta, multiplicación o división.

1. Considera lo siguiente

En el juego de "Preguntados" como en cualquier otro, se debe llevar el registro del puntaje para elegir un ganador. En el colegio "La Salle" hicieron un mini torneo de este juego y han asignado a los profesores de Matemáticas para llevar el puntaje, pero en una distracción han perdido las puntuaciones de los participantes, sin embargo, son capaces de recordar lo siguiente:

Frase
Sarahí tenía x puntos.
Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos.
A Mario le faltaban 500 puntos para alcanzar a Wendy
Gabriel consiguió el triple de Sarahí más 300 puntos
Lo de Perla menos lo de Wendy es 3 veces lo de Sarahí. Perla tuvo entonces:
Angélica tuvo la quinta parte de lo de Perla
A David le faltan 1000 puntos para tener lo de Gabriel.
Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí. Elena tiene:
Xochitl tiene dos veces los de Elena, más 100 puntos
Juntas, Rubí y Xochitl, suman tres veces lo de Sarahí. Rubí tiene:
Carlos obtuvo la tercera parte de Gabriel más 2000 puntos.

La segunda parte *"Para ganar"* le brinda al discente las instrucciones para ganar el juego.



≡ GeoGebra

Esto es solo una vista previa y no se guardará.

Lenguaje algebraico. Pro...

Lo que debes recordar...

Lenguaje algebraico

Sesión 1. Desafíos mat...

Sesión 2. Negocios y ...

Sesión 3. Puntajes per...

Post-test

2. Para ganar el juego

Ayuda a los profesores de matemáticas a expresar algebraicamente los puntajes de los participantes para que puedan determinar el ganador del mini torneo. Para ello debes llenar la siguiente tabla, considerando los primeros enunciados que se te dan.

Tarea 38

Frase	Expresión
Sarahí tenía x puntos.	x
Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos.	2x-100
A Mario le faltaban 500 puntos para alcanzar a Wendy	
Gabriel consiguió el triple de Sarahí más 300 puntos	
Lo de Perla menos lo de Wendy es 3 veces lo de Sarahí. Perla tuvo entonces:	
Angélica tuvo la quinta parte de lo de Perla	
A David le faltan 1000 puntos para tener lo de Gabriel.	
Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí. Elena tiene:	
Xochitl tiene dos veces los de Elena, más 100 puntos	
Juntas, Rubí y Xochitl, suman tres veces lo de Sarahí. Rubí tiene:	
Carlos obtuvo la tercera parte de Gabriel más 2000 puntos.	

Previo
Sesión 2. Negocios y más negocios

Siguiente
Post-test

Desarrollo de la sesión

Al inicio de la sesión se les pidió a los discentes que leyeran el planteamiento del problema propuesto dentro de la plataforma. Transcurrido el tiempo se les preguntó si tenían alguna duda con respecto a la problemática, a lo que respondieron que no. Asímismo se les indicó el tiempo que tenían disponible para terminar la sesión, que fue de 40 minutos, nuevamente con el proposito de que les diera tiempo de guardar sus avances y cerrar su sesión.

Dado que se les brindaba a los discentes las expresiones correspondientes a los dos primeros planteamientos, esto para tener una variable literal congruente en todos los planteamientos posteriores y no hubiera tanta variabilidad dentro del uso de literales.

Para la primera expresión: Sarahí tenía x puntos, se les mostró la expresión: x. En el segundo planteamiento, Wendy, el doble de Sarahí menos 100 puntos, se les mostró la expresión: $2x - 100$.

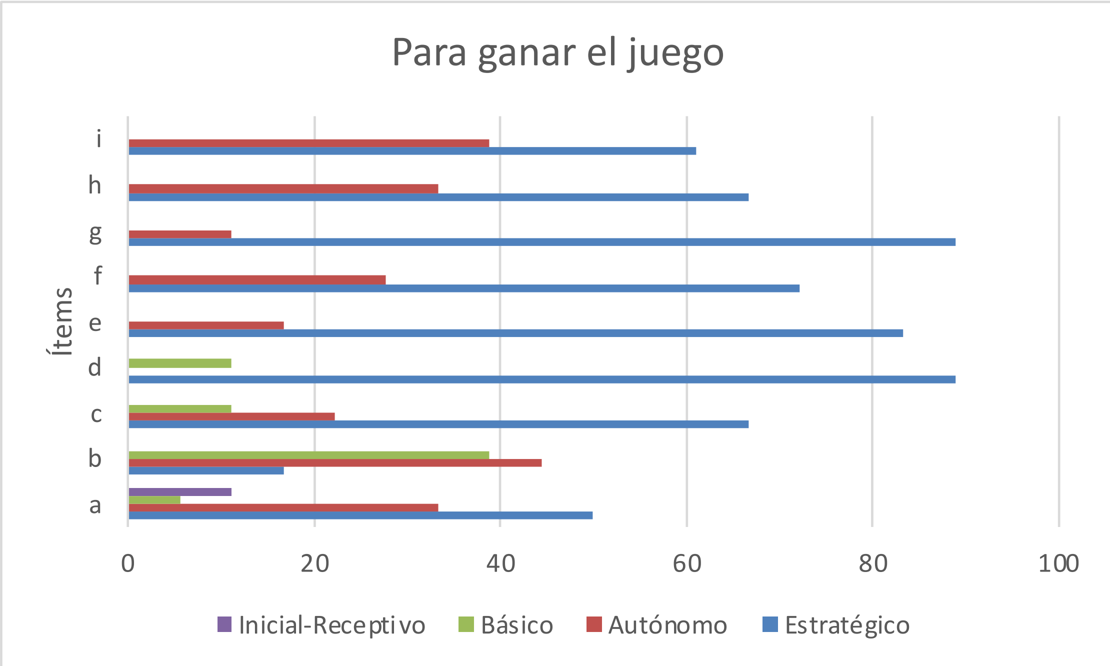


Figura 50. Respuesta de los incisos de la sección.

Ahora bien, a partir de dichas expresiones, para el primer inciso el 50% de los discentes mostraron un nivel estratégico con el uso del lenguaje algebraico, el 33% alcanzaron un nivel autónomo y seis más se quedaron en un nivel básico o incial-receptivo.

Para el segundo inciso, el 17% de los discentes lograron un nivel estratégico, mientras que el 44% obtuvo un nivel autónomo. Sin embargo, en este inciso si hubo discentes que se encontraron en básico, ocupando un 39%.

En el tercer inciso, ocho discentes alcanzaron un nivel autónomo y cuatro más, alcanzaron un nivel básico, dando expresiones que tenían datos relevantes del planteamiento coloquial pero que por transposición no lograron hacerlo correctamente.

Se pudo observar que entre más avanzavan los discentes en los incisos comenzaban a presentar un grado más de dificultad, sin embargo, para el inciso (e), el 83% lograron un nivel estratégico con la expresión que plantearon para dicho enunciado.

Para el inciso (f) cuya enunciado refiere: Si a Elena le quitasen 500 puntos, tendría como Sarahí, 72% discentes dieron una expresión correcta por lo que se colocaron en un nivel estratégico, mientras que el resto se posicionó en un nivel autónomo, hubo ausencia de discentes en nivel básico e inicial-receptivo.

Para los incisos (g) y (h), los porcentajes fueron del 89% y 67% obtuvieron un nivel estratégico, respectivamante, y el 11% y 33% se posicionó en un nivel autónomo, respectivamente. Por último, para el inciso (i), veintidos discentes se posicionaron en un nivel estratégico y catorce en el autónomo.

Conclusiones de la sesión 3. Puntajes perdidos

Podemos decir que de manera general la aplicación de la tercera sesión reflejó un buen desempeño de los discentes, así como de una mejor disposición para trabajar. Para trabajar la primera parte se les dio a los discentes un lapso de 8 minutos para que leyeran el planteamiento del problema, manteniéndonos siempre dentro del tiempo estipulado para concretar la sesión completa, en esta sesión se notó aún más la interacción que tenían con el uso de la plataforma de GeoGebra y sus bondades para escribir expresiones algebraicas haciendo uso de sus herramientas digitales, arrojando los resultados antes mostrados.

Esta sesión en particular, hizo que los discentes utilizaran más papel y lápiz para desarrollar sus expresiones algebraicas y de esta forma poder dar sus respuestas dentro de la plataforma. Ya que el interés propio de la investigación es ver como el uso de un EVA fortalece las competencias del discente con respecto al uso del lenguaje algebraico, fueron estas respuestas las que se consideraron para poder determinar en que nivel se encontraba cada uno de ellos.

También se pudo observar un desempeño satisfactorio del discente que procedía de un telebachillerato, ya que al inicio del trabajo de la primera sesión mostró cierta dificultad con la interacción que podía tener en este EVA, sin embargo en esta última sesión de trabajo tuvo una mejoría y se vió más cómodo trabajando en GeoGebra, sobre sus impresiones y su interactividad se le cuestionó en la entrevista, por lo que esos resultados se muestran a continuación.

7.3 Aplicación del post-test y entrevista semiestructurada

En esta última fase del trabajo de campo en el nivel superior nos apoyaremos en los datos recogidos durante la aplicación de la propuesta didáctica en el EVA de GeoGebra así como en las producciones que han realizado los discentes, sus impresiones y los comportamientos esperados.

Describimos a continuación los resultados obtenidos en el pos-test, así como el desarrollo de entrevistas semiestructuradas con algunos discentes que desde la prueba diagnóstico, dejaron ver deficiencias en el uso del lenguaje algebraico, con la finalidad de enriquecer más el trabajo de invetigación, permitiéndonos replantear algunos ítems para futuras líneas de investigación.

7.3.1 Aplicación del post-test

El pos-test (Véase Anexo) fue aplicado con la intención de evaluar el efecto que habría tenido la puesta en escena de la propuesta didáctica que se había diseñado en la plataforma de GeoGebra para fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico en discentes de educación superior, enfocándonos en el uso específico de los términos sinónimos de las operaciones aritméticas que ya conocían como suma, resta, multiplicación y división. Se aplicó a un total de 36 discentes de la carrera de Estadística.

La aplicación del pos-test, así como el de las sesiones se acopló de acuerdo con el horario que tenían los discentes con respecto a la materia (Tabla 10), por lo que el pos-test se aplicó el viernes 11 de Agosto a las 7:00hrs y 12:00hrs respectivamente con respecto a los Grupo 1 y 2, con una duración de 40 minutos. A continuación, en la Tabla 11 se muestran los resultados obtenidos para el Grupo 1, donde:

A. Respuesta correcta.
B. Respuesta en proceso.
C. Respuesta incorrecta.

Cabe mencionar que esta escala, es sólo asociativa al post-test, no mide la competencia que tiene el discente ni el nivel de dominio del lenguaje algebraico, por eso sólo califica si es correcta o errónea su respuesta, o bien si existe un vago conocimiento sobre el uso del lenguaje algebraico, de tal forma que su respuesta se encuentre en proceso.

Tabla 11. Tabla general de resultados obtenidos en el post-test para el Grupo 1.

Ítem	**1**										**2**		
Respuesta	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	*g*	***h***	***i***	***j***	***a***	***b***	***c***
A	83%	67%	67%	**89%**	67%	44%	50%	83%	67%	94%	94%	50%	28%
B	17%	33%	33%	11%	33%	**56%**	**50%**	17%	33%	6%	6%	50%	72%
C	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Como se puede observar en la tabla anterior, un porcentaje muy alto de estudiantes ha tenido una respuesta correcta en casi todos los incisos, a excepción de los incisos (f) y (g) , los cuales aún mantienen un porcentaje alto en dar una respuesta en proceso. Además de ello, hacemos notar que ya no hay respuestas incorrectas, como lo había en la prueba diagnóstico.

Hacemos una breve reseña con respecto a los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica donde, en el inciso (a) sólo el 33% había dado una respuesta correcta, y ahora se tiene un 83%, recordando que asimilaban que la palabra aumentado se refería a un exponente. Para el inciso (d) hubo un 89% de respuestas correctas y un 11% en proceso, aumentando el porcentaje de acertividad y de discentes en proceso.

En el inciso (f) recordemos que ningún discente había dado la respuesta correcta, y en este caso en específico, y aunque el porcentaje de los discentes era casi equitativo tanto en respuestas en proceso como en incorrectas, ahora se obtuvo un 44% de respuestas correctas y un 56% de respuestas en proceso, este inciso recordemos que habla sobre el trabajo de cocientes, por lo que destacamos con el profesor que aun cuando se obtuvieron mejores resultados que en la prueba diagnóstico se debía seguir trabajando sobre este concepto para seguir sesgando las dificultades que aún presentan los discentes.

En el caso del segundo ítem cabe mencionar que los incisos (b) y (c) implican el hecho de trabajar con tres ecuaciones lineales, por lo que implica un proceso más allá del que se plantea en el objetivo del presente trabajo, sin embargo, parte precisamente del modelado de las situaciones, haciendo la traducción del lenguaje coloquial al algebraico.

En el inciso (a) con respecto a la prueba diagnósticol aumento un 94% de respuestas correctas, desapareciendo por completo el porcentaje de respuestas incorrectas. Para el caso de los incisos (b) y (c), cuyo porcentaje de respuestas en proceso eran del 67% y 72%, respectivmente, en el pos-test disminuyó a 50% y 58%, dada cada caso, cabe destacar que desaparece también el porcentaje de respuestas incorrectas.

Con el fin de visualizar las respuestas de los estudiantes en el pos-test se presenta la siguiente Figura 51, en la cual se puede visualizar de manera general que han desaparecido las respuestas incorrectas.

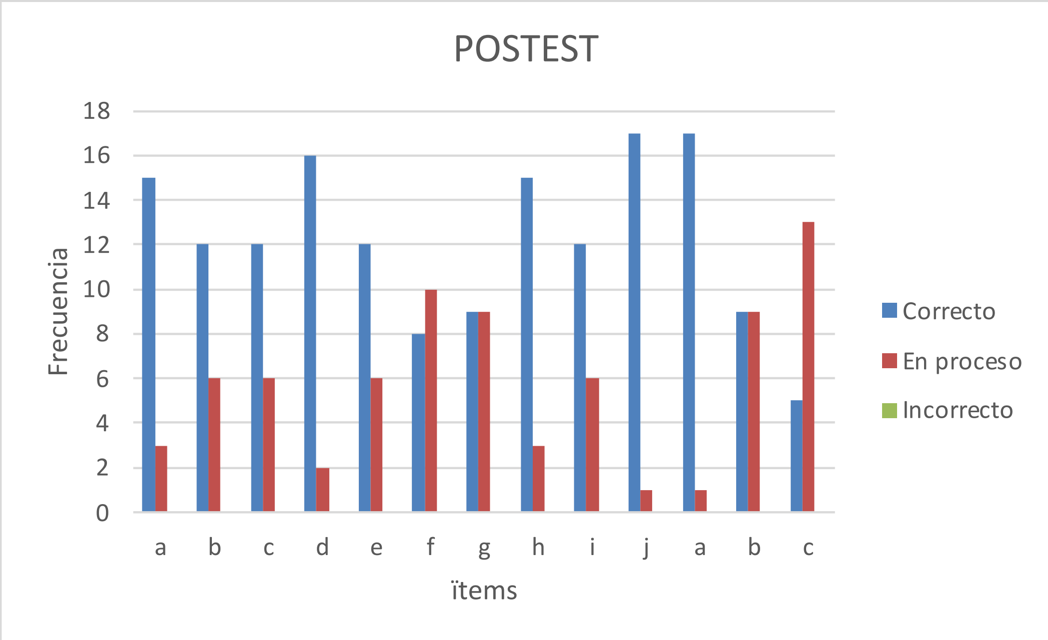


Figura 51. Resultados del post-test en discentes de educación superior para el Grupo 1.

Para el caso del Grupo 2, se muestran los resultados que obtuvieron en la Tabla 12.

Tabla 12. Tabla general de resultados obtenidos en el post-test para el Grupo 2.

Ítem	**1**										**2**		
Respuesta	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	*g*	***h***	***i***	***j***	***a***	***b***	***c***
A	84%	63%	74%	89%	74%	53%	53%	84%	63%	95%	100%	68%	47%
B	16%	37%	26%	11%	26%	47%	47%	16%	37%	5%	0%	32%	53%
C	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Como se puede observar en la tabla anterior, han desaparecido las respuestas incorrectas, alcanzando un porcentaje más alto de las otras dos categorías: correcta o en proceso.

Comparando los resultados que obtuvo el Grupo 2 en la prueba diagnóstico a esta postest, se enmarca que en su mayoría el porcentaje de respuestas correctas aumentó, así como el de respuestas en proceo.

Después de haber mostrado los resultados anteriores podemos decir que de manera general la propuesta didáctica del uso de un EVA, en este caso particular de GeoGebra, ha cumplido con su objetivo el cual era fortalecer las competencias del uso del lenguaje algebraico en discentes de educación superior de las operaciones básicas aritméticas.

7.3.2 Entrevista semiestructurada

En este apartado se muestran tres casos que desde la prueba diagnóstico resultaron de interés para el propósito de esta investigación, mostrando en primera instancia los resultados de su prueba diagnóstico versus su prueba post-test, por lo que al ver una interacción positiva con la propuesta se seleccionaron para complementar la información con una entrevista semiestructurada.

Caso 1

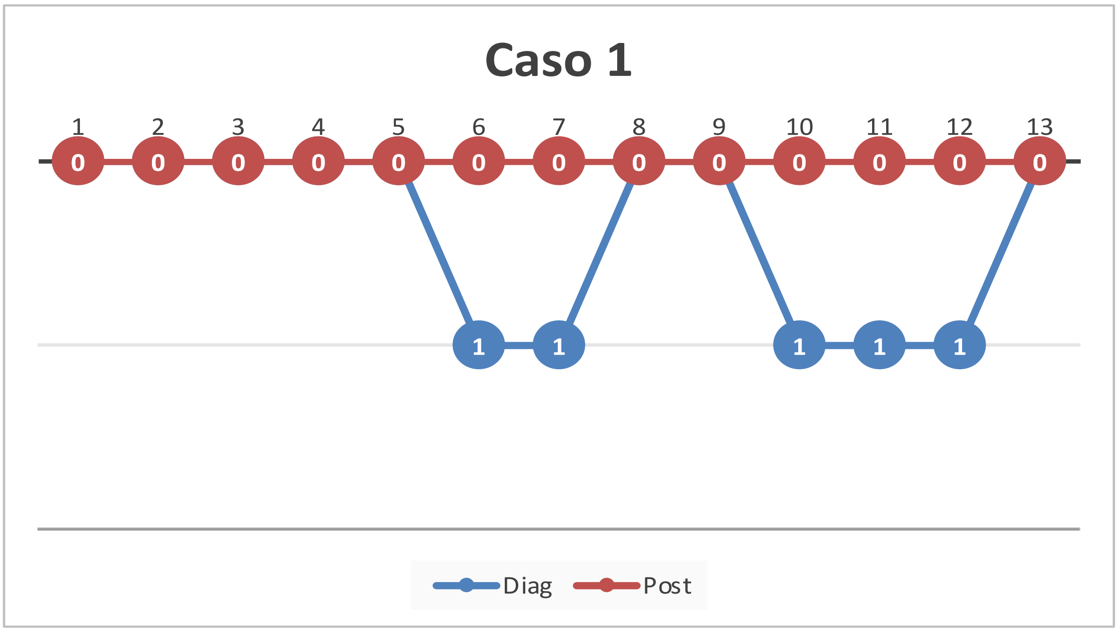


Figura 52. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 1.

El primer sujeto es un discente de sexo masculino de 19 años de edad procedente de un bachillerato tecnológico, como se puede observar en la Figura 52 en la prueba diagnóstico el sujeto sólo obtuvo cinco incisos con respuesta en proceso, estos hacían referencia a términos homólogos de multiplicación y división. Sin embargo, después de la aplicación de la propuesta, el sujeto obtuvo todas las respuestas correctas en su prueba post-test.

El desempeño del sujeto durantes de las sesiones lo posicionarion en un nivel de competencia autónomo y estratégico en la mayoría de los incisos, por lo que se le cuestionó sobre sus estrategias al plantear y resolver las expresiones algebraicas, mencionó que durante su estadía en el CBTIS(Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicioa) sus profesores se encargaron de reforzar mediante cuadernillos de ejercicios los temas relacionados a las matemáticas en general. *Recuerdo que el profesor Jaime, nos dejó 200 ejercicios para entregar al otro día, y era sobre el álgebra.*

Al cuestionarlo sobre el uso de algún EVA, mencionó que también en la mayoría de sus materias estuvo trabajando con diferentes plataformas educativas, no sólo en matemáticas sino también en química e incluso en lectura. Por lo que el trabajar en GeoGebra le fue muy familiar, tanto para utilizar los comandos como el tablero para insertar las expresiones algebraicas.

Caso 2

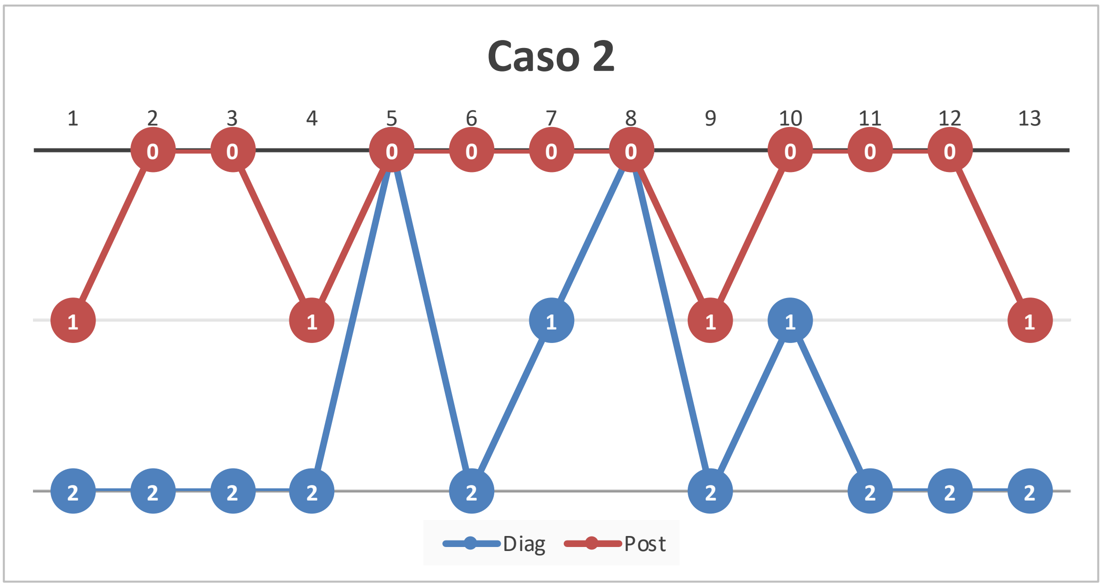


Figura 53. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 2.

El segundo sujeto es una discente de sexo femenino de 18 años de edad procedente de una bachillerato general, en cuyo caso como se puede observar en la Figura 53 en su prueba diagnóstico obtuvo en su mayoría respuestas erróneas, mejorando su competencia en el uso del lenguaje algebraico después de la intervención de la propuesta, dando como resultado sólo cuatro incisos con respuestas en proceso y el resto de manera correcta.

El desempeño del sujeto durante el desarrollo de las actividades de las sesiones lo llevo a posicionarse en un nivel autónomo y estratégico, una de las estrategias que se notó durante el desarrollo de las actividades, es que junto con otro compañero hicieron cuentas sobre papel antes de colocar sus respuestas en la plataforma. Por lo que al cuestionarle sobre dicha estrategia mencionó: *hice los procedimientos aparte porque no podía hacerlos mentalmente como mis otros compañeros, pero no fui la única, ¿acaso los tuve mal?* A lo que se le replicó que no es que estuvieran mal, o bien, simplemente necesitaba saber porqué había utilizado esa estrategia.

En cuanto al uso de algún EVA mencionó que algunos profesores del bachillerato utilizaron GeoGebra: *mi profesora de dibujo técnico nos ponía hacer figuras animadas en GeoGebra, utilizando plots. Y recuerdo que en tercero de secundaria también mi profesor Irving nos ponía ejercicios de parábolas en esa página.* Por lo que suponemos que la estrategia además de evocar conocimientos previos del álgebra taambién lo hizo con respecto al uso de EVA.

Caso 3

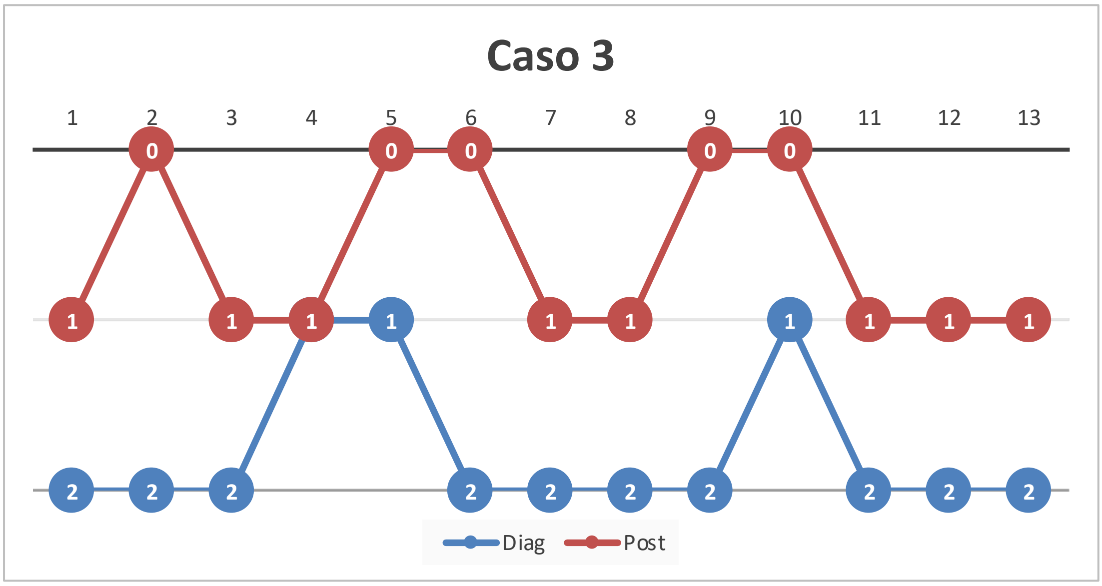


Figura 54. Contraste de la prueba diagnóstico y el post-test del Caso 3.

El tercer sujeto es un discente de sexo masculino de 19 años de edad procedente de un telebachillerato, cuyo caso nos llamó la atención porque su modelo educativo dista del resto del grupo, aunque no olvidemos que las competencias con respecto al uso del lenguaje algebraico es igual para los tres modelos educativos.

En este caso, el sujeto en su prueba diagnóstica sólo obtuvo tres respuestas en proceso, mientras que el resto fueron erróneas. Los incisos correspondientes a estas respuestas en proceso fueron los que hacían referencia a la traducción de una expresión algebraica al lenguaje coloquial, además del término homólogo de la multiplicación.

Su desempeño durante las sesiones dejó notar que no estaba familiarizado con el uso de GeoGebra, ya que en el transcurso de la primera sesión el sujeto tuvo dificultades para ingresar dentro de las herramientas que posee la plataforma, las expresiones algebraicas, e incluso el mismo mencionó que no en su centro educativo anterior, no había tenido oportunidad de trabajar con apoyo digital. En este sentido, se le preguntó con qué frecuencia había utilizado su profesor apoyo digital para enseñarle matemáticas, a lo cual respondió:

-Yo egresé de un telebachillerato, mi apoyo visual eran las clases que nos transmitían por televisión en el salón de clase, apenas en el último semestre empezamos a utilizar computadora o nuestro celular para hacer gráficas, pero el profe sólo nos daba la expresión y nosotros teniamos que sacar la gráfica y copiarla a la libreta.

Al cuestionarle sobre sus inseguridades en algún tema, replicó:

-Usted ya lo vió, la verdad si me siento inseguro porque mis otros compañeros le saben mover bien a la computadora, no dudo que yo también pueda hacerlo pero definitivamente estoy en desventaja con ellos.

En tanto a la propuesta y sus recomendaciones:

-Me ha gustado aprender un poco más sobre GeoGebra y ver que tiene más cosas para hacer además de gráficas, el picarle y ver que podía meter ecuaciones me emocionó, aunque no me gustó que no hay como chance de escribir las operaciones, osea sólo se debe meter la final, final (-¿cómo?); *si la final, final, la ecuación final o el resultado final.*

En este sentido, la mejoría que tuvo el discente no sólo fue en cuestión del uso del lenguaje algebraico, sino también del uso de apoyos digitales, la interacción que tuvo con dispositivo digital y el poder visualizar de manera oportuna que durante esta nueva estadía en el nivel superior deberá superar con mayor fluidez las desventajas y la brecha digital que tiene con el resto de sus compañeros. Al respecto, Guzmán (2020) menciona que cuando un sujeto compite por trabajos modernos con respecto a competencias informáticas, entra en un circuito de marginación tecnológica, puesto que el uso y adquisición de dispositivos digitales es intuitivo, sin lograr un uso efectivo de lo que tienen a su alcance, tal y como mencionó el sujeto, pues su profesor a pesar de utilizar GeoGebra sólo los ponía a copiar la gráfica en sus cuadernos, sin darles posibilidad de comprender porqué razón salía dicha gráfica, o qué pasaría si cambiaban algunos valores numéricos.

7.4 Contraste de las competencias del uso del lenguaje algebraico entre ambos niveles

Después de haber observado los diferentes casos especiales que llamaron nuestra atención, con respecto al objetivo de la investigación, ahora tocaba el turno de hacer un contraste entre ambos niveles, sobre todo en las dificultades que por literatura se presentan con mayor frecuencia en los discentes. Para ello consideraremos los incisos correspondientes a la formulación de expresiones algebraicas relacionadas al cálculo de perímetros/áreas de polígonos.

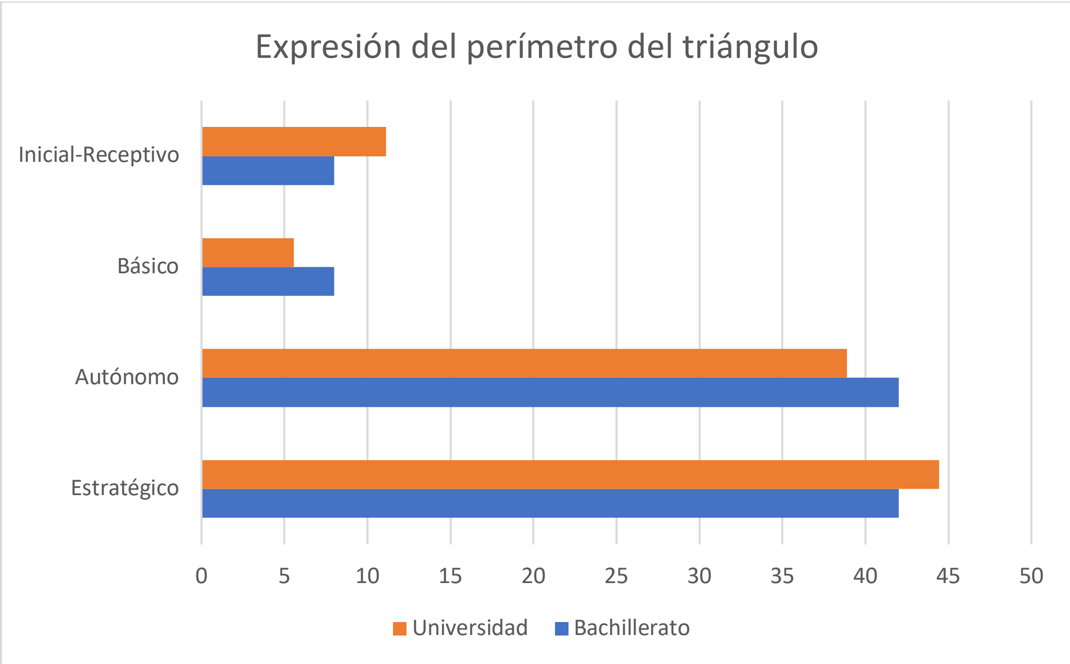


Figura 55. Contraste de competencias entre Bachillerato y Universidad para la expresión del perímetro.

En cuanto al planteamiento de la expresión algebraica con los datos proporcionados, ambos niveles lograron proporcionar una expresión posicionándose en un nivel de competencia autónomo y estratégico. En el caso del grado superior, con un 44% de los discentes obtuvieron un nivel estratégico.

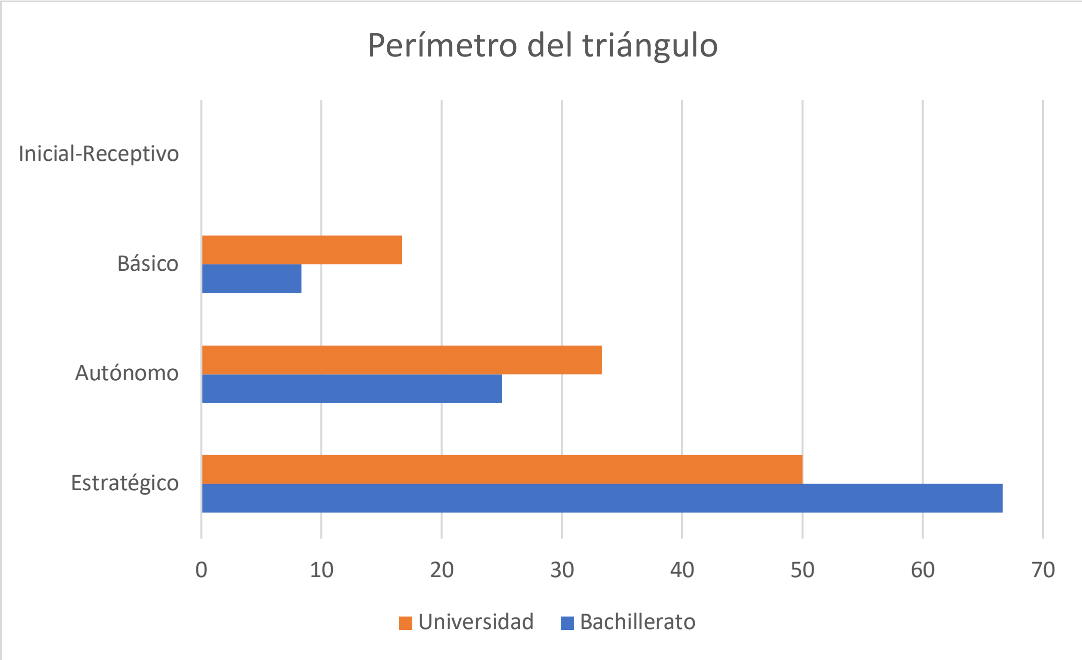


Figura 56. Contraste de competencias entre Bachillerato y Universidad para la expresión del perímetro.

En cuanto al planteamiento de la expresión algebraica considerando el dato del perímetro, ningún grado académico se posicionó en el nivel inicial-receptivo, por lo que estos se distibuyeron con mayor peso en los niveles autónomo y estratégico. Recordemos que en este inciso en particular, el discente debía proporcionar una expresión algebraica que permitiria calcular el perímetro del polígono en cuestión. En este caso, fue el bachillerato con un 67% quien se posicionó en un nivel estratégico, mientras que un 33% del grado superior se posicionó en un nivel autónomo, lo que indica que los discentes deben seguir trabajando en este aspecto de polígonos.

En la Figura 57, se podrá observar el contraste que existió entre ambos niveles, al dar ya un valor aritmético, cuya finalidad del uso del lenguaje algebraico, además de poder transitar entre ambos lenguajes, coloquial y algebraico, es dar una solución al planteamiento de problemas contextuales de la vida real.

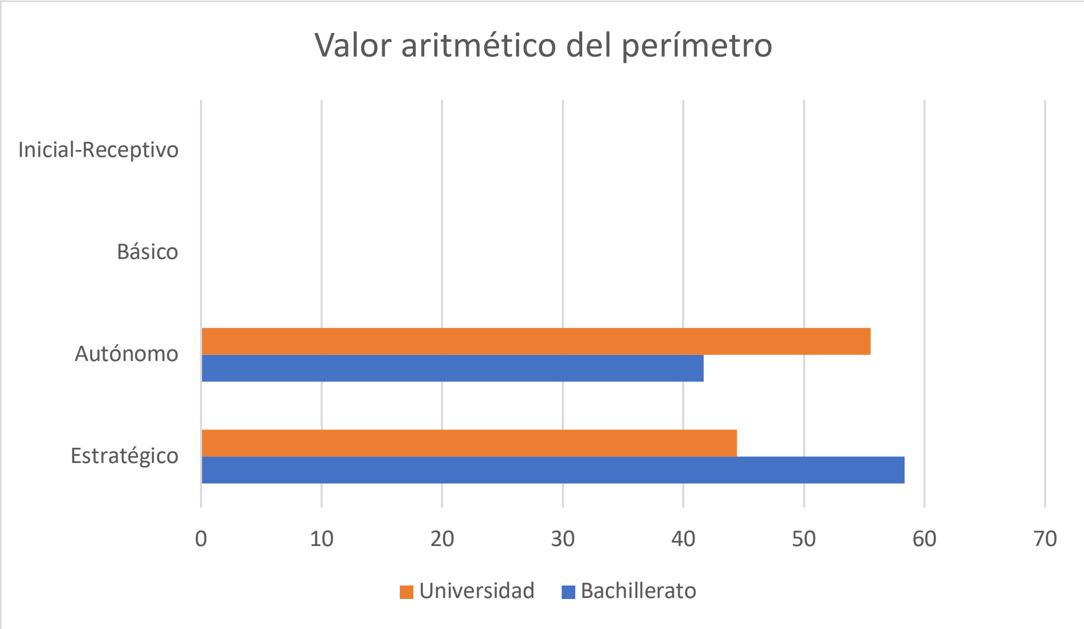


Figura 57. Contraste de competencias entre Bachillerato y Universidad para el valor aritmético del perímetro.

De la figura 57, podemos discernir que ninguno de los grados obtivo un nivel inicial-receptivo o básico, por lo que ambos niveles se posicionaron entre los niveles superiores. En el caso del bachillerato fue mayor el nivel de su competencia con un 58% de respuestas en nivel estratégico, mientras que el grado universitario se contrasto con un 56% pero en nivel autónomo.

Queremos suponer que al estar mayor distribuido el grupo en la universidad, y dado que estos se han formado bajo distintos modelos educativos ha influido en los resultados de desempeño, permitiendo observar dichos contrastes. Aún pese a estos resultados, la propuesta ha cumplido con su objetivo de reducir las dificultades que presentan los discentes en ambos niveles con el uso del lenguaje algebraico.

Conclusiones

La emergencia sanitaria que suscitó en el año 2020, sobre el COVID-19, nos orilló a trasladar el trabajo hacia nuestros hogares, forjando así el llamado homeoffice, algunas aplicaciones como uber eats, amazon o mercado libre tomaron mayor auge debido a que podía surtinos de comida y productos de limpieza y aseo personal a la puerta de nuestros hogares. Sin embargo, nadie previó cómo sería el tan complejo trabajo educativo que esto ocasionaria.

Podemos abordar diferentes miradas de cómo sobrevivimos a esta etapa de contingencia, lo que no podemos dejar de cuestionar es qué tan avanzados o atrasados estamos en cuestion de modelos educativos que nos permitan enseñar através de las pantallas o de los medios digitales que tenemos a nuestro alrededor y dentro de nuestras posibilidades.

Si bien la enseñanza de todas en general tuvo un atraso en cuanto se propiciaron activiades a través de medios digitales, y todas ellas tuvieron sus precariedades, no podemos omitir que las matemáticas han sido siempre una asignatura dificil de enseñar por su naturaleza tan abstracta. Ahora bien, hemos sido testigos desde diferentes actores: maestros, padres de familia y alumnos, que enseñar y aprender matemáticas a través de medio digitales cuesta el triple de trabajo y el triple de estrategias extra para cimentar nuevos conceptos pero también ha sido una fuente de información para los discentes, ayudándolos a disolver dudas que en el aula no quedan resueltas, ya sea con herramientas en diferentes plataformas educativas o de medios visuales como lo son las redes sociales enfocadas a contenidos educativos.

Las competencias que adquirieron los discentes durante esta contingencia, está muy por debajo del nivel que exige nuestra sociedad tan cambiante y exigente, por lo que la ayuda de diferentes plataformas educativas nos pueden ayudar a fortalecer dichas competencias.

Claro que la adquisición de estas competencias, ocurre de manera escalonado y sectorizada, tal y como lo pudimos observar a manera mundial, no todos tenían el acceso a dispositivos digitales que les permitieran seguir con su habitual enseñanza, mucho menos el acceso a internet, en cuyo caso si lo tenían era a través de la compra de datos por medio del celular, por lo que requería una inversión mensual, semanal e incluso, diaria para poder estar al pendiente de sus clases y tareas dentro de las diferentes asignaturas, todas tan exigentes como los programas educativos lo requerían. La brecha digital existe, y esta influye en mayor cantidad y calidad en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Aunque algunos profesores de esta asignatura alrededor del mundo empezaban a utilizar herramientas como GeoGebra, Khan Academy, MathLab, entre otras plataformas, la realidad es que sólo eran eso, herramientas de uso esporádico y con ciertas limitaciones de uso, ya que no estaban capacitados para saber y hacer uso de todas las bondades que éstas les brindaban.

A pesar de ello, los profesores de matemáticas se aventuraron a trasladar su práctica docente al uso de estas herramientas, tratando de aprender lo más rápido posible sobre sus virtudes, a la par de parecer lo más expertos posible frente a sus discentes, quienes se encontraban al otro lado de una pantalla, en el mejor de los casos poniendo atención a cada mínimo detalle sobre sus usos, pero en el peor de los casos conectados con la cámara apagada haciendo cualquier otra cosa menos poniendo atención.

En general el aprendizaje de las matemáticas se volvió un reto durante esa emergencia sanitaria, cuanto más el aprendizaje del álgebra. En cuyo caso, como ya se ha abordado a lo largo de capítulos anteriores, la construcción de este lenguaje en el bagaje de conocimientos de los discentes se ha consolidado a través de los años, y no sólo en una pequeña emergencia, o en una sóla sesión a través de herramientas tecnológicas.

El hecho de proponer herramientas tecnológicas que propicien y favorezcan el aprendizaje de las matemáticas, en particular, del lenguaje algebraico nos da pauta a crear más conciencia tanto en profesores, discentes y sobre todo en las autoridades correspondientes a fortalecer el uso y capacitación de dichas bondades para sesgar las deficiencias en ésta área en particular, cuya comprensión y aprendizaje podría hacer un gran cambio en la formación de personas con mayor competencia de razonamiento y de un pensamiento matemático más abstracto.

Abordar el aprendizaje del álgebra desde su principal vértebra por naturaleza, el lenguaje, puede hacer la diferencia como se ha podido observar con la propuesta que presentamos, pues a raíz del uso de generalidades en los libros de texto, el alumno empieza con una gran barrera a sumergirse en esta rama de las matemáticas, y digo sumergirse no porque se empape de nuevos conocimientos, sino porque se hunde en nuevos vocablos que el no comprende, por lo que en lugar aprender a seguir la corriente de este nuevo lenguaje, es arrasado por un borbardeo de nuevos términos que el no logra asimilar y que lo llevan a tener rezago escolar, convirtiéndose este rezago escolar luego en temor hacia las matemáticas en general y muy particularmente, hacia el álgebra.

A partir de la pregunta central al inicio de esta tesis, de la revisión literaria como parte de un trabajo heurístico con respecto a las dificultades que presentaban los discentes entre el transito de un lenguaje coloquial al algeraico, los enfoques y teorías que apoyaron a crear y refinar esta propuesta educativa mediante el uso de un EVA como lo fue GeoGebra, de acuerdo a sus bondades tecnoloógicas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, así como el trabajo de campo que se llevó a cabo con ambos grupos de lso dos diferentes pero no tan distantes niveles educativos, se convirtieron punto nodal de esta investigación, dando como resultados lo descrito anteriormente y con lo cual podría definir particularmente de acuerdo con los objetivos planteados, las siguientes conclusiones.

En relación con el primer objetivo particular: *Definir las competencias a observar en el lenguaje algebraico.* Este obejtivo se cumplió al realizar una revisión al estado del arte sobre la evaluación del lenguaje algebraico para los niveles medio superior y superior. Al revisar los modelos educativos estos nos proporcionaban las competencias con las cuales debería de contar el discente de cada nivel educativo, respectivamente. Por lo anterior, se cumplió con dicho objetivo y a su vez nos dio pauta para diseñar el instrumento de recogida de información en un Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA). Ahora bien, es de suma importancia no dejar de lado, que tan solo en el nivel medi superior, existen tres modelos educativos diferentes, el de los tecnológicos, el del general y el del telebachillerato, que aún cuando los tres tienen un mismo perfil de egreso, sus objetivos a lo largo de la estadía del discente en cada uno de los centros escolares, varía.

En relación con el segundo objetivo específico: *Diseñar un instrumento que nos permita evaluar dichas competencias.* Este objetivo se cumplió al considerar el enfoque socioformativo como método de evaluar competencias, por lo que también se cumplió este objetivo, permitiéndonos diseñar conforme a las competencias que se evaluaron para cada nivel educativo, medio superior y superior, respectivamente. Dicho instrumento de evaluación nos permitió analizar la información recogida a traves de las diferentes plataformas de trabajo.

El poder diseñar este instrumento a través de la revisión heurística con el enfoque socioformativo, y visualizar que a pesar de que Tobón, ya había propuesto esta guía, el llenarla presentó todo un reto pues teníamos que visualizar que puntos ibamos a considerar para ubicar en cada nivel el desarrollo de los discentes durantes las diferentes actividades, las cuales tenían que estar en concordancia con el perfil de egreso de cada uno de los niveles, en el caso del nivel medio superior, pero también en concordancia con el plan de estudios de ingreso de los discentes del nivel superior, así como de la experiencia educativa a la cual estaría enfocada su evaluación.

En relación con el tercer objetivo específico: *Establecer las diferentes representaciones semióticas con respecto a las operaciones básicas aritméticas.* Este objetivo se cumplió dándole vida a este trabajo, pues el hecho de haber trasladado la propuesta conformada por tres sesiones y haberla aplicado en un EVA nos permitió en primera instancia fortalecer el uso del lenguaje algebraico en discentes de nivel medio superior y superior, cuando menos para las cuatro operaciones básicas aritméticas: suma, resta, multiplicación y división.

En este sentido, estamos consientes de que existen más operaciones que se necesitan en el uso del lenguaje algebraico como lo son las potencias y raíces, sin embargom consideramos que de no tener las bases sólidas con respecto a otros términos homólogos a las operaciones básicas no podrían avanzar en la adquisición de nuevos y más estructurados conceptos dentro del lenguaje algebraico. A pesar de ello, este trabajo da pauta para que se sigan desarrollando y añadiendo más sesiones de trabajo donde se puedan abordar otros términos como los antes mencionados, y de los cuales la revisión bibliográfica hace también mención.

La fase de experimentación (prueba piloto) nos permitió recoger los datos que nos dieron pauta a mostrar los resultados del capítulo anterior, esto nos dejó ver que aún había ítems que teníamos que corregir para futuras líneas de investigación, y además que podríamos mejorar para una mejor transición entre ambos lenguajes, coloquial y algebraico.

Plantear a los discentes problemas contextualizados que les eran familiares permitió que tuvieran una buena devolución del problema, ya que una de las partes que más degustamos fue la discusión que se daba entre ellos, ya que en tanto a los problemas que hablaban de los negocios, ellos mismos decían que era importante tomar en cuenta la ganancia, sino se iría a la quiebra, son expresiones que dan gusto escuchar porque significa que el pensamiento del discente no sólo esta automatizado en dar una resolución algorítmica de las ecuaciones, sino de darle un sentido al resultado que estaban obteniendo.

Este aspecto en particular, tiene un gran énfasis, ya que por naturaleza las matemáticas están implicitas en nuestro día a día, quiza no tan esquematizado como lo es el uso del álgebra, pero si que es cierto, que el dar un valor numérico tiene una razón y un significado, y este debe estar contextualizado. Además de que debe ser coherente, pues cuando resolvemos problemas que como resultado aritmético dan puntos decimales o fracciones, no siempre es tan literal ese valor, sino que se debe dar en razón del problema, por ejemplo, cuando contamos personas, u objetos, estos no se pueden dividir, por lo que el redondeo nos ayuda a dar un significado coherente a esos valores.

En relación con el cuarto objetivo específico: *Desarrollar un ambiente virtual para simular las representaciones semióticas de las competencias del uso del lenguaje algebraico.* Este objetivo en particular fue el que más se nos dificultó durante todo el proceso del trabajo de campo, ya que las sesiones planteadas se tuvieron que trasladar a un EVA, el cual fuera interactivo para los discentes, pero que a su vez no se les hiciera aburrido, sino que su desempeño fluyera con ligereza, de tal forma que pudiran desarrollar todas las actividades propuestas. Y aunque por razones de logística se recorrieron las fechas de aplicación de dicha herramienta matemática, al final se pudo aplicar y obtener los resultados antes mostrados.

En relación con el último objetivo específico: *Mudar el ambiente virtual asincrónicamente*. Este objetivo en particular no se cumplió ya que necesitaba que las actividades se pudieran subir a una nube de trabajo, de tal forma que sin importar que hubiese o no conexión a internet, los discentes pudieran trabajar de manera remota. Por lo que no pudimos lograr este objetivo en particular, sin embargo no fue impedimento para que se pudiera desarrollar el trabajo de campo y enriquecerlo aún más.

Por lo que, de manera general y bajo la perspectiva de nuestro objetivo general:

Diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje virtual que permita fortalecer las competencias del lenguaje algebraico en discentes de educación media superior y superior.

Podemos concluir que los resultados obtenidos y mostrados anteriormente, nos dan pauta para creer que nuestra propuesta didáctica tiende a disminuir las dificultades que presentan los discentes de secundaria con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, fortaleciendo de esta manera las competencias para el uso del lenguaje algebraico, cuando menos para las operaciones básicas aritméticas: suma, resta, multiplicación y división. Permitiendo a los discentes no sólo la formulación de expresiones algebraicas sino también dándoles solución, resaltando que se formuló para trabajar con ecuaciones de primer grado de la forma $a + x = b$, $ax = b$ y $ax + b = c$.

También que el diseño de propuestas didácticas con respecto a un marco teórico, favorecen precisamente dicha transición, ya que se analiza desde la parte teórica de qué manera justificar el uso de ciertas preguntas, así como el grado de dificultad, ya que recordemos que el enfoque socioformativo finalmente tiene una perspectiva constructivista, y que por tanto el discente es el responsable de ir construyendo su conocimiento, sin dejar de lado la labor del profesor al diseñar problemas que permitan al discente hacer una buena devolución de él y sobre todo un trabajo metacognitivo que lo lleven a adquirir nuevos conceptos en su bagaje conceptual y pensamiento algebraico.

Se recomienda a la comunidad docente, tomar en cuenta las dificultades que presenta su grupo de discentes y tomar en cuenta la teoría que mejor se acople a los objetivos que pretende con su grupo, en nuestro caso fue el disminuir las dificultades que presentaba la población estudiantil de bachillerato y universitario con respecto a la transición del lenguaje coloquial al algebraico, con uso de vocablos equivalentes a las operaciones aritméticas con las cuales ya estaban familiarizados los discentes, pero existen muchas otras problemáticas en la didáctica de la matemáticas, no sólo en el tema del álgebra, también aritméticas, como las que aquí pudimos observar, de magnitudes, de conceptos, etc.

Esta pequeña propuesta aún se puede refinar más y extender a cubrir más temas que van hilados, como el trabajo de sistemas de ecuaciones, o la resolución de ecuaciones de segundo grado, por lo que pretendemos que futuras líneas de investigación se pueda trabajar con ellas, así como seguir observando las producciones hechas por los discentes hacia el plano cartesiano, dándole aún más significado al trabajo de las ecuaciones de primer grado.

Otro de los puntos a tratar, y como se pudo observar en el capítulo anterior, fue el modelo educativo del cual egresan los discentes del nivel medio superior, esto con el fin de homologar a un grupo de reciente inserción hacia el nivel superior, ya que como pudimos notar, a pesar de que en todos estos modelos las competencas a solidificar en los discentes son las mismas, de acuerdo al perfil de egreso, la realidad es que si distan mucho los programas educativos entre un tecnológico y un telebachillerato, sobre todo porque estos últimos, como pudimos ser testigos, no cuentan con un dispositivo digital tan a la mano como para mantenerse actualizados sobre las diferentes herramientas digitales que brotan día a día, y a medida que exige nuestra sociedad cambiante.

Ahora bien, si aunado a esto, analizamos no sólo las competencias con respecto a las matemáticas sino con especial énfasis a las habilidades con las cuales egresa un discente de tecnológico, en cuyo título dice *"técnico en"* salen con un perfil desable para las empresas, mientras que un discente de bachillerato general o telebahillerato, sólo con un diploma, agranda entonces la brecha que pudiera existir entre estos modelos educativos. A diferencia del grado superior, quienes salen de manera general con un grado profesional, independiente del perfil de egreso deseable para cada carrera.

Se menciona esto, porque quizá convendría enriquecer y fortalecer el uso de herramientas digitales a los docentes, de tal forma que el incluir actividades que desarrollen las competencias matemáticas en entornos virtuales de aprendizaje en el nivel medio superior, no se convierta en un reto sino que permita construir y proponer más herramientas que den paso a fortalecer las matemáticas en los tres modelos educativos, así como el de la lectura, siendo estos dos pilares, las principales dificultades que presentan los alumnos en el desarrollo de su lenguaje, tanto coloquial como algebraico.

Bibliografía

Aboites, V. & Aboites, G. (2008). *Filosofía de la matemática en el nivel medio superior.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 11. No. 1, pp.9-47. México

Alemán de Sánchez, A. (2002): *"La enseñanza de la matemática asistida por computador",* artículo publicado en Internet, Panamá.

Alfonso, G. (2009). *Álgebra: Notación, historia y aplicaciones.* Innovación y experiencias educativas. Revista Digital. 21

Alvárez, A. A., García, R. F. & Santos, H. S.(1992). *Competencia en el uso del lenguaje algebraico en escuelas secundarias y normales del Estado de México.* Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. pp. 73-78. México.

Amador, K. (2018). *La formación en competencias en discentes de psicología de la BUAP.* México

Aray, C., Párraga, O. & Chun, R. (2019). *La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí.* ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales. Vol. 4, No. 1, pp. 20-31

Arrieche, M. (2003). L*ínea de investigación perspectivas del enfoque ontosemiótico-antropológico para la didáctica de la Matemática (LIPESA).* Paradigma, Vol. 24, Núm. 2, pp. 151-160

Ausubel, D. (). *Significado y aprendizaje significativo.* Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Trillas. México.

Ausubel, D. (). *Teoría del aprendizaje significativo.* Consultado http://www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/ausubel/index.html el 12 de Abril de 2022.

Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. Recuperado el 26 de Febrero del 2021 de:
http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_444_marco_curricular_comun_SNB.pdf

Bautista, R. (2020). Desarrollo del proceso de comunicación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con la mediación de software matemático interactivo. Revista Q. Vol. 11 No. 22 pp. 128-148

Belén, M. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros docentees de educación secundaria en el marco del* *enfoque ontosemiótico.* Tesis Doctoral. Departamentos de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Beneitone, P., Esquetini, C. Gonzáles, J., Maletá, M.M., Siufi, G. & Wagenaar, R. (2007). *Tuning América Latina. Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina.* Universidad de Deusto.

Beyer, K. & Walter, O. (2001). *Algunos aspectos epistemológicos de la matemática: ¿Es la matemática un lenguaje?.* Educere. Vol. 5, No. 14, pp.236-240. Venezuela.

Brito, J. (). *Antropología simbólica, semiótica y educación.* Antropología para la Educación: Itinerarios epistemológicos y derivas interdisciplinares. Capítulo 3. Pp. 59-84.

Busto, P.A., Giraldo, W.J. & Poveda, A. (2009). *Caracterización de los elementos epistemológicos que usan algunos docentees al tratar el álgebra geométrica en algunas clases de grado octavo.* 10° Encuentro Colombiando de Matemática Educativa. Colombia.

Caballeto, C. (2009). *¿Qué aprendizaje promueve el desarrollo de competencias? una midada desde el aprendizaje significativo.* Revista Qurriculum, Vol. 22, pp. 11-34

Calero, M. (2009). *Aprendizaje sin límites.* Constructivismo. México DF, México: Alfaomega Grupo Editor.

Camargo, L & Acosta, M. (2012). *La geometría, su enseñanza y su aprendizaje.* Tecné, Episteme y Didaxis: TED. No. 32 pp. 4-8

Cantoral, R., Montiel, G. & Reyes-Gasperini, D. (2015). *El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de latinoamEérica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 18 No. 1 pp. 5-17

Caputo, S. y Macías, D. *Análisis de los errores de los discentes de la asignatura “Algebra I” al elaborar demostraciones.* Descargado el 11 de Abril de 2018 de: http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.

Cardona, S., Velez, J. & Tobón, S. (2016). *Metodología de Proyectos Formativos aplicada a un curso de Lógica Matemática.*

Carrera, E. (2017). *Etnografía del habla. Perspectiva de una dimensión semiótica de la antropología.* Revista Nuevas Tendenciaas en Antropología. Núm. 8, pp. 73-86

Casas, F. (2013). *De camino a una antropología semiótica: lectura teológica del signo.* RAM 4.1 pp. 35-55

Caserio, M. & Vozzi, A.M. (2015). *El impacto del lenguaje matemático en el aprendizaje. Una experiencia con discentes del nivel superior.* XIV CIAEM-IIACME. México

Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar.* XVI Simposio de la Sociedad Español de Investigación en Educación Matemática. Universidad de Granada.

CCh (2013). *Plan de estudios*. Recuperado el 28 de septiembre de 2022, de: http:// www.cch.unam.mx/plandeestudios

Cid, A. (2002). *El estudio de los objetos y la semiótica*. Cuicuilco. Vol. 9, Núm. 25, pp. 0. Escuela Nacional de Antropología e Historia. México.

Cisneros, M. (2014). *Como escribir la investigación académca.* Bogotá, Ediciones de la U.

Chevallard, Y. (1991). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l‟activité mathématique.* Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Collete, J.P.(1985). *Historia de las matemáticas I*. Siglo Veintiuno Editores.

Comunicación y Educación. (2002).*El Proceso Didáctico como Proceso de Comunicación.* Obtenido de: file://F:\tics\Artículos%20para%20web\Comunicación.htm

Conalep (2013). *PBT en Informática.* Conalep, Gustavo BAZ. Recuperado el 28 de septiembre de 2022, de: http://Conalep-gustavobaz.dyndns.org/index.php/aspirantes/ informatica

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007a). *La dimensión meta-didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.* Relime, 38(2), 49-77.

D'Amore, B. & Godino, J. (2007b). *El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 10, Núm. 2, pp. 191-218.

D'Amore, B. & Fandiño, M. (2017). *Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática.* Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Del Barrio, J. A., Castro, A., Ibáñez, A., Borragán, A.(2009). *El proceso de comunicación en la enseñanza*. International Journal of Developmental and Educational Psychology, vol. 2, núm. 1, pp. 387-395 Asociación Nacional de

Psicología Evolutiva y Educativa de la Infancia, Adolescencia y Mayores Badajoz, España

Díaz, A. & Hernández, R. (1999). *Constructivismo y aprendizaje significativo*. Estrategías docentes para un aprendizaje significativo. pp. 13-33. Mc Graw Hill. México

Díaz B.A (2006). *El enfoque de competencias en la educación. 'Una alternativa o undisfraz de cambio'.* Perfiles educativos 28(111): 7–36.

Echeverry, C. A. (2004). *El aprendizaje basado en la solución de problemas*. Diplomado en Didáctica Universitaria. Medellín, Col.: Universidad de Medellín.

Fernández, G. F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas.* Enseñanza de las ciencias, 26(3), pp. 327-342.

Font, V. (2009). *Epistemología y didáctica de las matemáticas*. Colección Digital Eudoxus. Barcelona.

Font, V. (2018). *Competencias y conocimientos del docente de matemáticas. Un modelo basado en el enfoque ontosemiótico.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Sección 4. El pensamiento del docente, sus prácticas y elementos para su formación profesional. Vol. 31, Núm. 1.

Gallego, D. & Nevot, A. (2007). *Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Revista Complutense de Educación. Vol. 19, No. 1 pp. 95-112

Gamboya, R. & Ballesteros, E. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los discentes.* Revista Electrónica Educare, vol. XIV, núm. 2, julio-diciembre, 2010, pp. 125-142 Universidad Nacional Heredia, Costa Rica

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por discentes de primer ingreso en nivel licenciatura.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

García, J.A. (2015). *El lenguaje ordinario: la clave para el aprendizake de las matemáticas basado en problemas.* Revista Actualidades Investigativas en Educación. Vol. 15, No. 1 pp.1-24

Gárriga, M. J. J. (2011). *El lenguaje algebraico: un estudio con discentes de tercer curso de educación secundaria obligatoria*. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad Zaragoza.

Gascón, J. (1993). *Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico.* Recherches en didactique des mathématiques, *13*(3), 295-332.

Gascón, J. (2014). *Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas.* Educación Matemática, pp.99-123. México

Gavilán, B. P. (2011). *Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿Puede ayudar el aprendizaje cooperativo?* Revista de Investigación en la Escuela, 73, 95-108. Descargado el 12 de Mayo del 2018 de: https://idus.us.es/handle/11441/60190

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325-355.

Godino, J., Font, V. & Wilhelmi, M. (2008). *Análisis didáctido de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico*. Publicaciones, Vol. 38. Pp. 25-48.

Godino, J. D. (2012). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática.* En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., & Giacomone, B. (2016). *Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica.* Avances de Investigación en Educación Matemática, 10, 91-110.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. & Font, V. (2017). *Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del docente de Matemáticas*. Bolema. Vol. 31, Núm. 57, pp. 90-113, Río Claro.

Godino, J. D. (2018). *Bases epistemológicas e instruccionales del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática.* Consultado en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_epins_EOS.pdf el 18 de 23 de Abril del 2022.

Gómez, C. (1989). *La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado.* Comunicación, Lenguaje y Educación. Vol. 3, pp. 5-15.

Guzmán, G. F.J. (2020). *Capital tecnológico y habitus digital de estudiantes en una universidad intercultural de México.* Tesis doctoral. Benemérita Universidad Autonoma de Puebla.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2009). *Panorama Educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación*

Media Superior. Recuperado el 4 de diciembre de 2013, de: http://www.inee.edu.mx/sitioinee10/ Publicaciones/IndicadoresEducativos/P1B108PNRMEMS2009.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2011). *La educación media superior en México.* México, D. F.: inee.

IPN (2004). *Materiales para la reforma* (1). Un nuevo modelo educativo para el IPN. México, D. F.: ipn.

IPN (2013). *CECyT Juan de Dios Bátiz Paredes. Técnico en sistemas digitales.* Mapa Curricular. Recuperado el 28 de septiembre de 2022, de: http://www.cecyt9.ipn.mx/ ofertaEducativa/Paginas/TecnicoDS.aspx

Jiménez, A. & Riaño, I. E. (2019). *Lengua materna y comunicación en la construcción del pensamiento matemático.* Bolema, Rio Claro (SP), Vol. 33 No. 63 pp. 248-268

Juárez, F. (2020). *Las competencias en la Educación Superior en México. Evaluación del dominio de competencias genéricas interpersonales en discentes de la Licenciatura en Enseñanza del Inglés de la BUAP.* México.

Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it?* The Mathematics Educator, 8, 139-151.

Kirshner, D. (2001). *The Structural Algebra Option Revisited, en Sutherland, R. Rojano, T., Lins, R. y Bell, A. (eds.).* Perspectives on School Algebra, pp. 83-98. Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kolmos, A. (2004). *Estrategias para desarrollar currículos basados en la formulación de problemas y organizados en base a proyectos*. Educar, 33, 77-96. Disponible en: http://www.raco.cat/index.php/Educar/article/viewFile/20789/20629

López, O. & García, S. (2008). *La enseñanza de la Geometría.* Materiales para apoyar la práctica educativa. INEE. México

Maier, H. (1999). *El conflicto para los discentes entre lenguaje matemático y lenguaje común.* Educación Matemática. Vol. 11 No. 3, pp. 133-135. México.

Malacara, Z. (2019). *Las matemáticas: un lenguaje para describir la naturaleza.* Entretextos. Labor de Punto. Vol. 10. No. 30 pp. 7-16

Marquina, Q. J. R., Moreno, G. A., Acevedo, B. A. A. (2014). *Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general.* Educere. 18 (59), pp. 119-132

Martínez Ruiz, X., y Rosado Moreno, D. (2013). *Gestión educativa y prospectiva humanística.* Secretaría Académica, Colección Editorial Paideia Siglo XXI. México, D. F.

Moreira. M. (1997). *Aprendizaje significativo: un concepto subyacente.* Actas del encuentro internacional sobre el aprendizaje significativo. pp. 19-44. España.

Moreira, Marco Antonio. (2005). *Aprendizaje significativo crítico (Critical meaningful learning).* Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, 83-102.

Moreira, M. (2012). *¿Al final, qué es aprendizaje significativo?.* Revista Qurriculum. Vol. 25, pp. 29-56

Moreno, H. (2017). *Encrucijada del discurso matemático escolar contemporáneo: conocimientos profesionales del docente, tecnologías digitales y prácticas socioculturales.* Avances en la educación matemática basada en la investigación. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. pp. 63-78

Mourshed, M., Farrell, D., y Barton, D. (2013). *Education to employment: Designing a system that works.* Nueva York, NY: McKinsey & Company. Recuperado el 17 de enero de 2014, de: http://mckinseyonsociety.com/downloads/reports/Education/ Education-to-Employment_FINAL.pdf

Oliveras, M. L., & Godino, J. D. (2015). *Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo.* Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8(2), 432-449.

OREALC/UNESCO Santiago. (2013). *Análisis curricular del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo TERCE.* Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe.

Picado, M. & Espinoza, J. (2017). *Las explicaciones matemáticas de un docente al enseñar los conceptos básicos de función.* Avances en la educación matemática basada en la investigación. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. pp. 27-44

Pino, L. (2017). *Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo.* Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Piñero, G. (2019). *La ontología de la matemática. Una defensa del convencionalimso como solución al problema de la existencia de los objetos matemáticos.* Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires.

Radatz, H. (1979). *Error analysis in mathematics education.* Journal for Research in Mathematics Education, (9), 163-172.

Radford, L. (2000). *Signs and Meanings in Student´s Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis.* Educational Studies in Mathematics, 42, pp. 237-268

Radillo, M. (2011). *Obstáculos y errores en el aprendizaje de la geometría euclidiana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en el nivel licenciatura.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. México. Pp.429- 439

Restrepo Gómez, B. (2005). *Aprendizaje Basado en Problemas (aBp): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria.* Educación y Educadores, *8*, 9-19.

Rey, J., Quiroga, P. & Martínez, G. (2012). *Generalización y simbolización de procesos de medición: una herramienta en la iniciación al álgebra.* Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa pp. 966.972

Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas.* En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.

Rodríguez, M. (2004). *La teoría del aprendizaje significativo.* España

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). *Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. PNA, 9 (4), 273-293*

Rodríguez, J. & Rivera, M. (2017). *Actividades matemáticas con un enfoque socioemocional para el programa de bachillerato virtual de la Universidad Autónoma de Guerrero.* Avances en la educación matemática basada en la investigación. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. pp. 79-94

Rojas, R. (2018). *El lenguaje de las matemátics. Historias se sus símbolos*. Fondo de Cultura Económica. CONACYT. México.

Ros, M. (2016). *Pensamiento y lenguaje matemático en el contexto de educación infantil: un acercamiento interpretativo.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Ruíz, Z. A. (1990). *Matemáticas y filosofía*. Estudios logicistas. Universidad de Costa Rica.

Ruíz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. EUNED.

Ruíz, Y. (2011). *Aprendizaje de las matemáticas*. Temas para la educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza. No. 14. Federación de la Enseñanza de CC. OO. De Andalucia.

Serres, V. Y. (2011). *Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza.* Sapiens. Revista Universitario de Investigación. 12, 122-142

SEP. (Julio de 2011). Lineamientos de evaluación del aprendizaje. Recuperado el 20 de Febrero de 2015, de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/00-otros/l-eval-aprendizaje.pdf

SEP, y CopeeMs (2018). *Reporte de la encuesta nacional de deserción en el nivel medio superior.* México, D. F.: sep.
unaM (2013). *Planes y Programas de estudio*. Escuela Nacional Preparatoria. Recupera- do el 28 de diciembre de 2022, de: http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/

Serrano, J. M. y Pons, R. M. (2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13(1). Consultado el 19 de Octubre del 2022. En: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412011000100001

Suárez, Y. (2013).Estrategias comunicativas en la clase de matemáticas. I CEMACYC. República Dominicana

Tarazona, J. (2005). *Reflexiones acerca del aprendizaje basado en problemas*. Revista Colombiana de Obstetricia y Ginecología, *56*(2), 147-154.

Tobón, S. (2010). *Formación integral y competencias*. Tercera Ed. Bogotá: ECOE Ediciones, p. 328.

Tobón, S. (2013a). *Formación integral y competencias.* Pensamiento complejo, curriculo, didáctica y evaluación. (Cuarta ed.). Bogotá, Colombia: ECOE EDICIONES.

Tobón, S. (2013b). *Metodología de gestión curricular: una perspectiva socioformativa*. México: Trillas.

Tobón, S. (2014a). *Rúbricas socioformativas (mapas de aprendizaje)* (e-book ed.). México: CIFE.

Tobón, S. (2014b). *Proyectos formativos, teoría y metodología.* (Primera ed.). México, México: Pearson.

Tobón, S. (2014c). *Sintesís de los principales instrumentos de recolección de información en una investigación.* (E-book ed.). México: CIFE.

Torres, W. (2011). *El enfoque ontosemiótico para la investigación en educación matemática: una reflexión crítica.* Cuaderno de investigación en la educación. Núm. 26, pp. 54-69

UNESCO (2004). *El enfoque modular en la enseñanza técnica*. Santiago, OREALC.

Vargas, A. & Rivera, M. (2017). *Reflexión sobre el conocimiento geométrico del docente de matemáticas: la construcción de cajas.* Avances en la educación matemática basada en la investigación. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Pp. 9-25

Viera, T. (2003). *El aprendizaje verbal significativo de Ausubel. Algunas consideraciones desde el enfoque histórico cultural.* Universiddes, Num. 26. pp. 37-43. Unión de Universidades de América Latina y el Caribe. México.

ANEXOS

Anexo 1. Prueba diagnóstico y post-test

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Filosofía y Letras
Doctorado en Investigación e Innovación Educativa

Estimado alumno, la siguiente prueba no tiene ningún valor curricular dentro de tu evaluación, forma parte de un trabajo de investigación educativa. Por favor resuelve lo que se te pide de manera correcta, tu participación honesta y sincera, es de suma importancia para la relevancia de este trabajo. Recuerda que no puedes hacer uso de tu celular, formulario o calculadora.

Grado: ________________ Edad: _________ Genero: F M

Ejercicio 1. Expresa en forma algebraica los siguientes enunciados matemáticos o viceversa.

Lenguaje verbal	**Lenguaje algebraico**
El triple de un número, aumentado en 5 es 110.	
La suma de dos números enteros y consecutivos es igual a 17.	
El doble de la suma de un número y su mitad es igual a 54.	
	$x - 4 = 15$
El doble de la edad de Ana dentro de 4 años será 14.	
El triple de un número, aumentado en su mitad es igual a 21.	
	$\frac{x+3}{2} = 6$
	$\frac{x}{2} + 3 = 6$
El perímetro de un rectángulo mide 24cm y su base mide el triple de su altura.	
Juan tiene 3 monedas más que María.	

Ejercicio 2. Expresa mediante lenguaje algebraico los siguientes enunciados y resuélvelos.

a. El triple de un número menos cinco es igual a su doble menos tres, ¿cuál es ese número?

b. La suma de las edades de tres amigos es de 37 años. Si el mayor tiene siete años más que el mediano y el mediano tres años más que el pequeño, ¿cuántos años tiene cada uno?

c. Se quieren repartir 1,250 pesos entre tres personas de forma que la primera reciba la mitad que la segunda, y la tercera 50 pesos más que la primera, ¿cuánto deberá recibir cada una?

Anexo 2. Guión de entrevista

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Filosofía y Letras
Doctorado en Investigación e Innovación Educativa

Guión de entrevista

Objetivo: El objetivo de esta entrevista es descubir y develar el significado que los informantes atribuyen a los diferentes vocablos del lenguaje algebraico. Además de puntualizar el desarrollo de alguna de las competencias que se estan evaluando, con apoyo del EVA en GeoGebra.

Con la finalidad de sistematizar y optimizar la información se han generado dos categorías que buscan indagar de manera organizada sobre los aspectos antes mencionados.

Grado: _________________ Edad: _________ Genero: F ☐ M ☐

Categoría 1: Aprendizaje del lenguaje algebraico

1. ¿Qué dificultades has enfrentado al aprender el lenguaje algebraico?
2. ¿Cuáles son los elementos básicos del lenguaje algebraico? (variables, coeficientes, términos, etc.)
3. De tus cursos anteriores, ¿has resuelto problemas relacionados al lenguaje algebraico? En caso de ser positiva la respuesta, describir cómo ha sido su desempeño en dichas actividades.
4. ¿Hay algún aspecto del lenguaje algebraico en el que aún te sientes inseguro o requieras más práctica?
5. ¿Cómo crees que esta intervención ha impactado en tu actitud hacia las matemática en general y particularmente, en el álgebra?
6. Con respecto al enunciado sobre el uso de fracciones, ¿cuál fue tu estrategia de planteamiento y resolución de la ecuación algebraica?
7. Con respecto al enunciado sobre el uso de figuras geométricas, ¿cuál fue tu estrategia de planteamiento y resolución de la ecuación

Categoría 2: Uso de algún EVA para el aprendizaje de las matemáticas

1. ¿Has trabajado antes en alguna plataforma educativa? En caso de ser positiva la respuesta, mencionar en cuál. De lo contrario, ¿porqué?
2. ¿Has escuchado algo sobre GeoGebra? En caso de ser positiva la respuesta, mencionar alguna de sus características. De lo contrario, ¿porqué?
3. ¿Con qué frecuencia tu profesor (a) utilizaba un EVA para el aprendizaje de las matemáticas?
4. Con respecto a las actividades que hiciste, ¿qué fue lo que más te agrado y/o desagrado?
5. ¿Tienes alguna sugerencia o comentario sobre cómo podríamos mejorar la propuesta en GeoGebra?

Anexo 3. Diario de campo

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Filosofía y Letras
Doctorado en Investigación e Innovación Educativa

Diario de campo

Comenzare describiendo el grupo, el cual está conformado por 12 discentes de nivel medio supeior inscritos en el área terminal denominada técnica. La edad de los discentes oscila entre los 17 y 18 años. Los discentes se muestran interesados por mi visita y me hacen preguntas sobre el motivo de mi presencia. En un breve espacio que el profesor hizo al inicio de la clase, hice una concisa presentación oral (sin apoyo visual) sobre el motivo de mi presencia en el salón.

En primera instancia se emocionaron, pues estarían trabajando en el centro de computo, y luego reiteraron la indicación de que su desempeño no sería considerado para su calificación. Por lo que después de confirmar dicha característica de las sesiones, el profesor recalcó que a pesar de ello, debían mostrar su mejor desempeño en las actividades. Eso fue toda la interacción que tuve con los discentes por el día de hoy, el próximo Lunes será la aplicación de la prueba diagnóstico, por lo que ellos deberán estar presentes en el centro de cómputo, con el fin de no perder tiempo en trasladarnos hacia allá.

Lunes 03 de Julio 2023.

El día de hoy se llevó a cabo la sesión de la prueba diagnóstico, por lo que los jóvenes ya se encontraban en el centro de cómputo, esperando instrucciones. En primera instancia, se les solicitó crear una cuenta que tuviera el formato: Usuario(No.Lista)_Bach@hotmail.com, esto para tener un control sobre los sujetos para futuras referencias en la entrevista semiestructurada, siempre y cuando su desempeño resultara interesante para los fines de la investigación. Una vez creada la cuenta, se procedio a entrar a la plataforma de Forms para contestar la prueba diagnóstico, la cual estaba distribuida en dos secciones, la primera de opción múltiple y la segunda, de planteamiento y resolución de problemas. Además se les dio la indicación de que el tiempo con el que contaban para responder era de 40 minutos.

El papel del profesor durante las sesiones es para mantener el orden del grupo, además de interactuar y observar los puntos a reforzar con su grupo. Los alumnos le tienen respeto y mantienen una buena comunicación con el, por lo que en caso de que tengan duda con respecto a los problemas planteados en la plataforma, podrán externarla sin inconvenientes, creando así un ambiente de confianza. En las primeras respuestas, los discentes se enfocaron en contestar las preguntas sin mayor problema, pues eran de opción múltiple. En tanto a la segunda etapa de la prueba, algunos discentes cuestionaron si podían ir a su salón por su libreta ya que necesitaban hacer cuentas, por lo que se les pidió a los que llevaban libreta les proporcionaran una hoja a sus compañeros para que de esa manera no perdieran tiempo en ir y venir. En este punto, me di cuenta que no había contemplado ese aspecto, de que los alumnos pudieran utilizar su libreta a pesar de que fuera una actividad en equipo de cómputo. Después de este hecho, los alumnos comenzaron a realizar sus cuentas para resolver los planteamientos propuestos. En torno a esto, para meter su respuesta dentro de la plataforma, tuvieron dudas de cómo escribir expresiones matemáticas dentro de ella, por lo que se abrió un espacio de 5 minutos explicando de manera general cómo se realizaba dicho proceso. Posterior a ello, la sesión transcurrió sin mayor problema, terminaron la prueba diagnóstico y se retiraron a su aula de clases.

Anexo 4. Consentimiento informado

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Filosofía y Letras
Doctorado en Investigación e Innovación Educativa

A través de este documento, solicitamos de la manera más respetuosa y cordial su valiosa colaboración para contribuir como participante en el proyecto de tesis titulado

“El desarollo de las competencias del lenguaje algebraico en el tránsito del nivel medio superior al superior en ambientes virtuales de aprendizaje”

cuya investigadora **Mtra. Mónica Pérez García** con número de matrícula **221560619** se encuentra asesorada por el **Dr. Marco A. Velázquez Albo,** ambos adscritos a la Facultad de Filosofía y Letras de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), dicha labor de investigación responde a un proyecto de tesis del programa denominado **Doctorado en Investigación e Innovación Educativa (DIIE)** con adscripción al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).**

Queremos comentarle que el motivo de su selección como participante de este proyecto responde una serie de características y atributos con las que Usted cuenta, por su trayectoria académica y desempeño en la asignatura de Matemáticas. **Este proyecto no esta asociado de ninguna manera a la asignatura, por lo que su participación no tendrá ningún efecto en la calificación o en las actividades de la misma.** Así mismo, la participación en la investigación es voluntaria y puede salir del proyecto cuando así lo desee previa notificación al profesor y a la responsable del proyecto.

Es necesario compartir con Usted que la investigación persigue fortalecer las competencias del lenguaje algebraico en alumnos de educación media superior y superior en ambientes virtuales, a raíz de la situación sanitaria que se presentó durante los últimos dos años. Por lo que su colaboración ayudará a la generación de conocimiento tangible en esta área de las Matemáticas, denominada álgebra.

Por lo anterior, precisamos detallar la parte metodológica de su colaboración en este proyecto de investigación:

1) Se determinará el nivel inicial de dominio del lenguaje algebraico, por lo que deberá responder una prueba diagnóstica.
2) Realizará actividades en línea de manera autónoma durante la duración del semestre que le ayudarán en el autoaprendizaje del lenguaje algebraico.
3) Al concluir las actividades en línea, concordantes con el cierre de semestre, se le aplicará una prueba de dominio contrastante.

4) En caso de que su desempeño sea de interés al proyecto, será elegible a una entrevista, en cuyo caso, se realizará dentro de las instalaciones educativas y en el horario de la asignatura de Matemáticas, con la garantía de que su ausencia no afectará de manera negativa su desempeño académico.
   NOTA: Dicha entrevista tendrá una duración de 30 a 40 minutos aproximadamente, solicitando cordialmente permita al investigador grabar de manera auditiva su participación y tomar nota, garantizando el anonimato de su colaboración y que la información recolectada no tendrá otro uso o fin ajeno a la presente investigación.

La información recolectada, en cada una de las etapas descritas con anterioridad, darán soporte empírico al estudio, por lo que será utilizada de manera crítica y asertiva en la comprensión del fenómeno estudiado validando el trabajo de investigación. Es por ello que, si Usted así lo dispone (manteniendo la garantía de anonimato), los resultados serán susceptibles de ser empleados en ponencias, presentados en congresos, publicados en artículos o en revistas especializadas o cualquier otro medio de difusión y divulgación científica, sin fines de lucro.

A razón de esto, es importante definir que Usted como participante no obtendrá ninguna clase de beneficio económico, en especie o algún otro aliciente de diversa índole. Su participación se encuentra condicionada a su voluntad de colaborar con la investigación educativa, así como su disponibilidad de tiempo.

Por último, esta investigación cumple satisfactoriamente con todos los estándares, requisitos y parámetros que impone el comité de ética de la BUAP, por lo que ha sido aprobado para su aplicación. Es preciso señalar que las únicas personas con autorización para la revisión y análisis de las respuestas del particiante son el entrevistador y el director de tesis. Toda la información será procesada de manera muy cautelosa, siendo esta resguarda bajo las normas estipuladas por el Comité de Ética de la BUAP.

Para los padres o tutores:

La colaboración de su hijo es de vital importancia para este proyecto de investigación, su participación contribuirá a la generación de conocimiento científico y al entendimiento de la realidad social y académica que viven otros adolescentes en el proceso de aprendizaje del lenguaje algebraico. Le solicito le acompañe en la lectura de este documento, comente con él/ella la importancia de su colaboración y firmen en conjunto este acuerdo de participación.

Acuerdo de Participación
Alumno

Yo ____, he leído el procedimiento descrito arriba. La investigadora me ha explicado de forma clara y detallada mi papel como participante dentro de este proyecto, despejando todas mis dudas. Voluntariamente doy mi consentimiento para ser parte de él comprometiéndome a realizar las actividades que de él se deriven, con la garantía de que podré desistir de mi participación cuando lo estime conveniente en cualquiera de las etapas, y que se respetará la buena fe e intimidad de la información que suministre, así como mi integridad física y psicológica. ______________________________ Firma

Acuerdo de Participación
Padre o Tutor

Yo ____, he leído el procedimiento descrito arriba y estoy de acuerdo con la información contenida en este documento. El cual describe puntualmente la participación de mi hijo (a) en el proyecto de investigación sobre el aprendizaje del lenguaje algebraico. Garantizando que pueda desistir de su participación cuando lo estimemos conveniente en cualquiera de las etapas, y que se respetará la buena fe e intimidad de la información que suministre su desempeño, así como su integridad física y psicológica. ______________________________ Firma

<u>Información adicional:</u>

En caso de duda sobre la naturaleza de la investigación, le invito a ponerse en contacto para proporcionar información adicional.

Responsable del proyecto de investigación.

Mtra. Mónica Pérez García
monica.perezga@viep.com.mx
2221 00 34 07