



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Masa de objetos compactos mediante corrimientos de  
frecuencia de fotones emitidos por cuerpos en órbitas  
circulares ecuatoriales

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

José Rafael Fernández Moreno

Asesorado por

Dra. Adriana González Juárez

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla Pue.

24 de noviembre de 2025





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Masa de objetos compactos mediante corrimientos de  
frecuencia de fotones emitidos por cuerpos en órbitas  
circulares ecuatoriales

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

José Rafael Fernández Moreno

Asesorado por

Dra. Adriana González Juárez

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla Pue.

24 de noviembre de 2025



**Título:** Masa de objetos compactos mediante corrimientos de frecuencia de fotones emitidos por cuerpos en órbitas circulares ecuatoriales

**Estudiante:** JOSÉ RAFAEL FERNÁNDEZ MORENO

COMITÉ

---

Gerardo Torres del Castillo  
Presidente

---

Iraís Rubalcava García  
Secretario

---

Alfredo Herrera Aguilar  
Vocal

---

Mercedes Paulina Velázquez Quesada  
Suplente

---

Dra. Adriana González Juárez  
Asesora

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Co-asesor



# Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres, a quienes les debo todo. Gracias por permitirme llegar hasta aquí. A a mi madre por formarme como soy y motivarme a seguir en los peores momentos; y a mi padre, por mostrarme que tipo de persona quiero ser y por escucharme siempre. Todo lo que soy y seré es gracias a ustedes.

Agradezco también a la Dra. Adriana por toda la paciencia que me ha tenido y por el apoyo constante que me ha dado a lo largo de este proceso.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Cinemática de partículas en la vecindad de un agujero negro</b>	<b>7</b>
2.1. Partículas masivas . . . . .	9
2.2. Partículas sin masa . . . . .	11
<b>3. Corrimiento de frecuencia de fotones en presencia de un campo gravitacional intenso</b>	<b>13</b>
3.1. Rapidez del corrimiento . . . . .	16
3.2. Introducción de un segundo emisor . . . . .	18
3.3. El radio de las órbitas a partir de observables . . . . .	19
3.4. La Masa del objeto compacto a partir de observables . . . . .	20
3.5. Distancia al objeto compacto . . . . .	21
3.6. Los Cocientes $\frac{M}{D}$ y $\frac{r_e}{D}$ . . . . .	23
3.7. Corrimiento de frecuencia debido al movimiento peculiar de la galaxia . . . . .	23
3.7.1. Corrimiento de frecuencia considerando movimiento peculiar en cualquier dirección . . . . .	25
<b>4. Análisis de las expresiones analíticas encontradas</b>	<b>27</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>35</b>



# Resumen

Se presentaron expresiones analíticas para determinar el radio orbital de partículas de gas alrededor de un objeto compacto, la masa del objeto compacto y su distancia al observador, a partir de un análisis relativista general del corrimiento de frecuencia de fotones emitidos por partículas en órbitas circulares. El método se basa en la cinemática de la Relatividad General, considerando tanto la dinámica orbital de partículas de prueba como la propagación de fotones en un campo gravitacional intenso. A partir de la cuadrivelocidad de los emisores y el cuádrimomento de los fotones se construyen dos escalares relativistas: el corrimiento de frecuencia y su derivada temporal (la rapidez de corrimiento). Estos invariantes son observables que permiten escribir las expresiones de los parámetros del sistema. Las expresiones consideran un sistema emisor estático, pero se generalizaron para contemplar el movimiento peculiar (constante) que algunas galaxias portadoras de candidatos a agujeros negros supermasivos tienen. Se usan datos del candidato a agujero negro supermasivo en la galaxia NGC 4258 para verificar las expresiones obtenidas y se proponen dos métodos para su aplicación observacional en la estimación de las propiedades de estos objetos.



# Capítulo 1

## Introducción

Un agujero negro se define físicamente a partir del horizonte de eventos, una superficie que surge de algunas soluciones a las ecuaciones de Einstein en Relatividad General. Estas soluciones son métricas que modelan el campo gravitacional. Si consideramos una distribución de masa esférica, encontramos que la métrica debe depender, en principio, de la distancia al objeto masivo central  $r$ . En general, puede haber dos tipos de singularidades en la métrica: una singularidad física en el centro  $r = 0$  que puede o no estar presente, y al menos una singularidad que puede removerse con cambios de coordenadas en una superficie alrededor del centro. Esta superficie corresponde al horizonte de eventos. En esta singularidad coordenada, el término de la métrica que acompaña la parte espacial (específicamente la radial  $g_{rr}$ ) no está definido. La solución más simple es la solución de Schwarzschild, que corresponde al espacio-tiempo exterior a un objeto masivo sin carga, esférico y estático. En este caso, la singularidad coordenada corresponde (en unidades geometrizadas) al radio de Schwarzschild  $r_{Schw} = 2M$ . Para objetos extremadamente compactos, esta superficie se manifiesta como el horizonte de eventos. Es esta propiedad la que define los agujeros negros, pues a partir del horizonte de eventos se pierde toda información para un observador distante debido a que la curvatura del espacio-tiempo es tan intensa que ni siquiera la luz es capaz de escapar.

Los agujeros negros son objeto de estudio en la astrofísica por dos razones: se desea saber si existen en la naturaleza y entender su formación sumaría a comprender aspectos de la evolución de algunos sistemas astrofísicos. Existen distintos tipos de agujeros negros: primordiales, estelares y supermasivos. Los agujeros negros primordiales son objetos que se cree tuvieron su origen debido a fluctuaciones gravitacionales en las primeras etapas del universo debido a la anisotropía del mismo. Ya que la Relatividad General es una teoría clásica, estos objetos deben tener un radio de Schwarzschild mayor a la longitud de Planck ( $10^{-33}cm$ , pues para longitudes menores debe considerarse la mecánica cuántica), masas mayores a  $10^{-5}g$  y una carga de hasta  $\pm 30$  veces la carga del electrón. Según su carga, podrían unirse electrones o protones libres y formar átomos electrónicos o protónicos respectivamente [1].

Los agujeros negros estelares emergen en las etapas finales de la vida de algunas estrellas masivas (masa  $\gtrsim 1,4M_{\odot}$  [2]) y hay dos procesos de formación reportados en la literatura [3]: por implosión, cuando una estrella masiva colapsa en un agujero negro sin pasar por la fase de supernova, o de una explosión que resulta en una estrella de neutrones, pero sin la energía suficiente para desprenderse de la envoltura estelar, provocando que una gran parte de ella caiga de nuevo en la joven estrella de neutrones, llevándola a la formación tardía de un agujero negro. Además, existen distintos modelos teóricos acerca de la formación y evolución de los agujeros negros estelares, los cuales predicen que pueden formarse con o sin una eyección significativa de materia, dependiendo de la masa inicial, metalicidad, momento angular, etc.

Otro caso de interés son los agujeros negros de masa intermedia ( $10^2 - 10^4 M_\odot$ ), que deberían formarse en cúmulos globulares. Al estudiar su formación, se espera entender más aspectos acerca de la formación de los agujeros negros supermasivos, que aún es incierta [3].

Las observaciones nos permiten identificar objetos oscuros masivos en el centro de varias galaxias, pero solo tenemos argumentos indirectos para determinar si son agujeros negros supermasivos. Algunas teorías apuntan a que las galaxias activas (galaxias con una fuente de energía muy intensa en su centro, con líneas de emisión prominentes que pueden ser extremadamente anchas) contienen un agujero negro supermasivo basándose en que la mejor alternativa, es decir, un cúmulo estelar ultra-compacto, no sería viable durante un periodo de tiempo prolongado [4]. Sin embargo, a partir de la distribución de masa, la presencia de velocidades relativistas en órbitas a cientos de radios de Schwarzschild, e incluso el tipo de galaxia observada, se han rechazado alternativas (cúmulos de estrellas de baja masa, enanas marrones, remanentes estelares, etc.) y, por lo tanto, hallado fuertes candidatos a agujeros negros con masas  $10^6 \sim 10^{11}$  (por ejemplo, los objetos en el centro de las galaxias  $M32 \simeq 2 \times 10^6 M_\odot$ ,  $M87 \simeq 3 \times 10^9 M_\odot$  [6] y  $A85 \simeq 10^{11} M_\odot$  [5]).

La búsqueda se ha concentrado en núcleos galácticos activos que pueden ser propulsados por cuásares o agujeros negros. A diferencia de las galaxias normales, cuya emisión en la parte óptica e infrarroja proviene principalmente de radiación térmica, las galaxias activas emiten a lo largo de todo el espectro electromagnético. Esta emisión se origina principalmente en una región muy pequeña del centro llamada núcleo activo galáctico (AGN por sus siglas en inglés). Entre los motores de AGNs (fuentes de energía) destacan los cuásares (que incorporan la mayoría de las propiedades de los otros tipos de AGNs) como algunas de las fuentes más luminosas del universo que emiten en el espectro óptico y ultravioleta con líneas de emisión prominentes y anchas, algunas de ellas debido a átomos ionizados. Se sugiere que esta radiación podría no tener un origen exclusivamente térmico. La generación termonuclear de energía tiene una eficiencia muy baja para explicar la intensidad de emisión de los AGNs. El único mecanismo conocido con una eficiencia mayor es la conversión de energía gravitacional. Este proceso ocurre a través de la caída de materia, principalmente gas, hacia un agujero negro central, fenómeno llamado acreción mediante el cual la energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética. Si la caída de gas sobre el objeto compacto no es detenida, el gas entrará en él sin poder radiar su energía. Debido a la fricción con otras partículas de gas y a la transferencia de momento angular resultante, el gas se acumula en un disco orientado perpendicularmente a la dirección del momento angular. Este es el disco de acreción, en el que la energía cinética se transforma en energía interna (calor) mediante la fricción y luego se emite en forma de radiación. Observaciones en algunas galaxias Seyfert (un tipo de AGN que ópticamente se asemejan a galaxias espirales con un núcleo extraordinariamente brillante) respaldan la existencia de un disco de acreción, donde la forma de sus líneas de emisión puede deberse a una combinación del efecto Doppler y la influencia de un intenso campo gravitacional [4].

Las galaxias con más evidencia dinámica estelar tienden a ser inactivas. Por otro lado, las observaciones de dinámica de gas cerca del centro han dado mejores argumentos para señalar candidatos a agujeros negros supermasivos. La presencia de máseres de agua en órbitas keplerianas a cientos de radios de Schwarzschild, como es el caso de NGC 4258, es una gran herramienta para definir candidatos a agujeros negros.

Las estimaciones de masa de los candidatos a agujeros negros supermasivos se hacen estudiando la dinámica de los objetos cercanos. Entre estos objetos, se puede aprovechar la presencia de máseres de agua para medir su corrimiento de frecuencia. En las ecuaciones que describen la cinemática con efectos relativistas (considerando órbitas circulares) solo se puede hallar la relación  $M/r_e$ , donde  $r_e$  es el radio de la órbita en la que está el emisor. Por esto no se puede estimar la masa usando solo el corrimiento de frecuencia, sino que solo se nos permite conocer  $M/r_e$ .

Al intentar hallar expresiones analíticas para los parámetros del objeto compacto no se puede hallar una para la masa sin introducir otra observable: la rapidez del corrimiento. Uno de los objetivos de este trabajo es hallar una expresión analítica para la masa  $M$  y para el radio de las órbitas  $r_e$ . Al tratar la suma y la resta de los corrimientos de frecuencia de fotones emitidos por dos emisores que comparten órbita pero en posiciones opuestas respecto a la línea de visión, como parámetros independientes, se puede simplificar la expresión analítica de  $r_e$  y así, al desacoplar las cantidades, obtener una expresión para  $M$ .

En el capítulo 2 se introducen los conceptos y expresiones fundamentales de la cinemática en Relatividad General, con el fin de describir el movimiento orbital de partículas de prueba masivas alrededor de un objeto compacto, así como la dinámica de fotones emitidos por estas. En el capítulo 3 se define el corrimiento de frecuencia de fotones debido a la presencia de un campo gravitacional intenso. A partir de este escalar relativista, se introduce la rapidez de corrimiento como su derivada temporal, y se emplean ambos invariantes (junto a la introducción de un segundo corrimiento de frecuencia correspondiente a una posición estratégica) para obtener expresiones analíticas del radio de las órbitas circulares que siguen los emisores, la masa del objeto compacto y su distancia al observador. Además, dichas expresiones se generalizan para considerar el movimiento peculiar que presentan varias galaxias portadoras de candidatos a agujeros negros. En el capítulo 4 se hace una verificación de las expresiones obtenidas y se presentan dos propuestas para usarlas con el fin de determinar los parámetros físicos de candidatos a agujeros negros. Las conclusiones se presentan en el capítulo 5.



## Capítulo 2

# Cinemática de partículas en la vecindad de un agujero negro

La Relatividad General tiene como fundamento el principio de equivalencia, el cual establece que un observador en caída libre en un campo gravitacional experimenta localmente las mismas condiciones que un observador en un sistema inercial en ausencia de gravedad. Al intentar hallar una descripción relativista de la gravedad, Einstein llegó a la conclusión de que la gravedad entendida como fuerza no tiene sentido, sino que es consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo. Al interpretar el espacio-tiempo como una variedad pseudo Riemanniana se llega a la ecuación de Einstein para un campo gravitacional [7]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  el escalar de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  la métrica que describe el campo gravitatorio y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento propuesto por Einstein. Dado que las componentes del tensor de Ricci dependen de la métrica y sus derivadas, las ecuaciones de Einstein representan 16 ecuaciones para 16 incógnitas, que debido a la simetría del tensor de Ricci y la métrica se reducen a 10 ecuaciones para 10 incógnitas (4, si consideramos una métrica diagonal como se hará más adelante). Cuando estudiamos las ecuaciones para el vacío se toma  $T_{\mu\nu} = 0$  ya que no hay materia. Para describir el espacio-tiempo deformado por la presencia de una distribución de masa esférica estática, la métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.2)$$

Si se considera una masa esférica sin carga, y se desprecia la expansión del universo, se llega a la solución más sencilla: la solución de Schwarzschild. Esta es una métrica diagonal de la forma (2.2) tal que en unidades geometrizadas ( $c = 1, G = 1$ )

$$f = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (2.3)$$

En Relatividad General, el movimiento de partículas es descrito por geodésicas que dependen de la métrica que modela el espacio-tiempo. Estas están descritas por la ecuación:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (2.4)$$

donde  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  son los símbolos de Christoffel, que dependen de las componentes de la métrica y sus derivadas. Las curvas geodésicas son aquellas en que se transporta paralelamente su vector tangente.

Las líneas rectas pueden entenderse como casos particulares de geodésicas, ya que en un espacio-tiempo plano el movimiento libre sigue líneas rectas. Las ecuaciones de las geodésicas pueden obtenerse de las ecuaciones de Euler-Lagrange para una partícula libre. Considere el siguiente lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (2.5)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\delta_\alpha^\mu \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \delta_\alpha^\nu) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \frac{d}{d\lambda} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \end{aligned}$$

donde, ya que la métrica es simétrica, las dos contracciones entre corchetes representan lo mismo. El primer término se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu) &= \ddot{x}^\mu g_{\alpha\mu} + \dot{x}^\mu \frac{dg_{\alpha\mu}}{d\lambda} \\ &= \ddot{x}^\mu g_{\mu\alpha} + \dot{x}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \\ &= \ddot{x}^\mu g_{\mu\alpha} + \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu}). \end{aligned}$$

Al sustituir esto en las ecuaciones de movimiento y contraer con  $g^{\sigma\alpha}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\sigma\alpha} \left[ \ddot{x}^\mu g_{\mu\alpha} + \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \right] \\ &= \ddot{x}^\sigma + \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ya que los símbolos de Christoffel se pueden escribir como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right), \quad (2.7)$$

entonces las ecuaciones de movimiento (2.6) equivalen a las de las geodésicas (2.4).

Otra forma de simplificar la resolución de las ecuaciones de las geodésicas es utilizando las simetrías del espacio-tiempo representadas por los vectores de Killing, que permiten identificar cantidades conservadas a lo largo de la trayectoria. Para la métrica de Schwarzschild hallamos cuatro vectores de Killing que representan las simetrías temporal y esférica del espacio-tiempo. Sin embargo, debido a la simetría esférica, el movimiento siempre puede restringirse a un plano (generalmente el plano ecuatorial,  $\theta = \pi/2$ ), en cuyo caso solo dos vectores de Killing son relevantes:  $\xi = (1, 0, 0, 0)$  y  $\psi = (0, 0, 0, 1)$ , el vector de Killing temporal y el vector de Killing azimutal, respectivamente. Estos vectores satisfacen la ecuación

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (2.8)$$

donde  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante, un operador que extiende la noción de derivada a variedades diferenciables (con curvatura o con coordenadas curvilíneas), definida de modo que la derivada

covariante de un tensor resulte en otro tensor. Para un tensor cualquiera con componentes  $A^{\nu\dots}$ , su derivada covariante toma la siguiente forma:

$$\nabla_{\mu}A^{\nu\dots} = \partial_{\mu}A^{\nu\dots} + \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}A^{\sigma\dots} + \dots - \Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma}A^{\nu\dots\sigma} + \dots \quad (2.9)$$

Al usar estos vectores se pueden definir cantidades conservadas al contraerlos con las cuadrivelocidades (o el cuadrimomento del fotón). Las cantidades conservadas asociadas a los vectores de Killing de la métrica de Schwarzschild se corresponden con las que se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\varphi$  y  $t$ , dado que la métrica no depende explícitamente de estas coordenadas. Así, tenemos las dos siguientes ecuaciones más una que dependerá de si consideramos una partícula con o sin masa.

$$\Xi_{\mu}U^{\mu} = \text{constante}_{\Xi} \quad \iff \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\gamma}} \right) = 0,$$

donde  $\Xi = \xi, \psi$  es uno de los vectores de Killing,  $U^{\mu}$  la cuadrivelocidad de la partícula (o el cuadrimomento  $P^{\mu}$  para el fotón) y  $\gamma = t, \varphi$ .

Por último, ya que se tiene simetría esférica, se considera el movimiento en el plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , por lo tanto:

$$U^{\theta} = 0. \quad (2.10)$$

A continuación se estudiarán estas ecuaciones de movimiento para partículas masivas con órbitas circulares y para un fotón restringido al plano ecuatorial.

## 2.1. Partículas masivas

En Relatividad General el tiempo es tratado como una coordenada más, por lo que se determinan las cuadrivelocidades derivando respecto al tiempo propio  $\tau$ , que se define a partir del intervalo como:

$$c^2 d\tau^2 \equiv -ds^2, \quad (2.11)$$

usando una métrica de la forma  $(-, +, +, +)$ , donde  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$  es el intervalo.

Para una partícula masiva, la cuadrivelocidad se define como:

$$U^{\mu} = (U^t, U^r, U^{\theta}, U^{\varphi}), \quad U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}. \quad (2.12)$$

Al trabajar con partículas masivas de prueba (es decir, su masa es despreciable en comparación con el objeto central y no modifica la geometría del espacio-tiempo), se puede usar la métrica de Schwarzschild y sus vectores de Killing para obtener las siguientes cantidades conservadas:

$$E = -\xi_{\mu}U^{\mu} = -g_{tt}U^t = fU^t, \quad (2.13)$$

$$L_z = \psi_{\mu}U^{\mu} = g_{\varphi\varphi}U^{\varphi} = r^2U^{\varphi}, \quad (2.14)$$

donde  $E$  y  $L_z$  son la energía y momento angular por unidad de masa, respectivamente. La primera corresponde al vector de Killing temporal  $\xi$ , mientras que la componente axial del momento angular corresponde al vector de Killing azimutal  $\psi$ .

La cuadrivelocidad para partículas masivas (2.12) está normalizada. Ya que la contracción entre dos 1-tensores (vectores) es un invariante bajo cambio de coordenadas, se puede considerar una región del espacio-tiempo localmente plana donde se pueda definir un sistema de coordenadas tal que la métrica (en unidades del SI) tome la siguiente forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (2.15)$$

Con esta métrica, el tiempo propio se puede escribir como

$$cd\tau = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2}$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt \quad (2.16)$$

donde  $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  es la velocidad de un sistema de referencia inercial con respecto a otro. De la definición de la cuadvirvelocidad (2.12)

$$U^\mu = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

$$\implies U^2 = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left( c^2 - \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right) = -c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = -c^2$$

En unidades geometrizadas se sigue que  $U^2 = -1$ .

Usando las expresiones obtenidas de los vectores de Killing para las cantidades conservadas (2.13) y (2.14) se obtiene:

$$-1 = g_{tt}(U^t)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(U^\varphi)^2$$

$$= -f \left( \frac{E}{f} \right)^2 + f^{-1}(U^r)^2 + r^2(U^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{L_z}{r^2} \right)^2.$$

Recordando que estamos trabajando en el plano ecuatorial, ( $\theta = \frac{\pi}{2} \implies U^\theta = 0$ )

$$(U^r)^2 + \frac{L_z^2}{r^2} f = E^2 - f \implies \frac{E^2}{2} = \frac{1}{2}(U^r)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_z^2}{r^2} + 1 \right) \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (2.17)$$

expresión a la que se asocia un potencial efectivo para que tome forma de la conservación de energía:

$$\frac{E^2}{2} = \frac{(U^r)^2}{2} + V_{eff}, \quad (2.18)$$

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left( \frac{L_z^2}{r^2} + 1 \right) \left( 1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.19)$$

Se consideran órbitas circulares, así, para que sean estables se debe satisfacer  $\partial_r V_{eff} = 0$ . De esto se obtiene:

$$\partial_r V_{eff} = -\frac{L_z^2}{r^3} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) + \frac{M}{r^2} \left( \frac{L_z^2}{r^2} + 1 \right) = -\frac{L_z^2}{r^3} + \frac{3ML_z^2}{r^4} + \frac{M}{r^2} = 0,$$

$$\implies L_z^2 = \frac{Mr}{1 - \frac{3M}{r}},$$

que se sustituye en (2.17) tomando  $U^r = 0$  para obtener:

$$E = \frac{1 - \frac{2M}{r}}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}.$$

Al sustituir ambas cantidades en (2.13) y (2.14) se obtiene

$$U^t = \dot{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}, \quad (2.20)$$

$$U^\varphi = \dot{\varphi} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\frac{M}{r}}{1 - \frac{3M}{r}}}. \quad (2.21)$$

Estas ecuaciones (2.20) y (2.21) dan las componentes de la cuadrivelocidad, que describen el movimiento de partículas masivas que orbitan alrededor de un objeto compacto (específicamente, órbitas circulares).

## 2.2. Partículas sin masa

Para partículas sin masa que se mueven a la velocidad de la luz no se puede definir el tiempo propio de la misma forma que con las partículas masivas. En este caso, se introduce un parámetro afín  $\lambda$  a lo largo de la geodésica nula. Así, se define el cuadrimento del fotón como:

$$P^\mu = a \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (2.22)$$

donde  $a$  es una constante que se elige de forma tal que, en un sistema de referencia inercial, las componentes del cuadrimento toman la siguiente forma:

$$P^\mu = (E_\gamma, \vec{p}).$$

De la misma forma que en el caso de las partículas masivas, se pueden usar los vectores de Killing para obtener dos cantidades conservadas:

$$E_\gamma = -\xi_\mu P^\mu = -g_{tt} P^t = f P^t,$$

$$L_\gamma = \psi_\mu P^\mu = g_{\varphi\varphi} P^\varphi = r^2 P^\varphi,$$

en este caso se tendrían la energía y la componente azimutal del momento angular.

Para partículas que se mueven a la velocidad de la luz tenemos  $P^2 = 0$ . Definiendo una región del espacio-tiempo localmente plana (en unidades del SI):

$$\begin{aligned} P^\mu &= a \left( c \frac{dt}{d\lambda}, \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right) = a \left( c \frac{dt}{d\lambda}, \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\vec{x}}{dt} \right); \\ \implies P^2 &= g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = \left( a \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \left( c^2 - \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right) = \left( a \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 (c^2 - c^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando las expresiones para las cantidades conservadas en (2.23), tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= g_{tt}(P^t)^2 + g_{rr}(P^r)^2 + g_{\theta\theta}(P^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(P^\varphi)^2 \\ &= -f \left( \frac{E_\gamma}{f} \right)^2 + f^{-1}(P^r)^2 + r^2 \left( \frac{L_\gamma}{r^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones de movimiento para el fotón son:

$$(P^r)^2 = E_\gamma^2 - \frac{L_\gamma^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (2.24)$$

$$P^t = \frac{E_\gamma}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (2.25)$$

$$P^\varphi = \frac{L_\gamma}{r^2}. \quad (2.26)$$

Además, recordemos que  $P^\theta = 0$  cuando se restringe el movimiento al plano ecuatorial.

Las ecuaciones vistas en este capítulo describen la cinemática de las partículas masivas y sin masa en Relatividad General. A continuación se usarán para definir un invariante relativista observable.



## Capítulo 3

# Corrimiento de frecuencia de fotones en presencia de un campo gravitacional intenso

Considere un objeto emisor en órbita circular alrededor de un objeto compacto central. Los fotones emitidos desde este objeto emisor están bajo la influencia gravitacional del objeto compacto, por lo que sufren un cambio de frecuencia debido a los efectos gravitacionales (corrimiento al rojo), además del corrimiento debido al movimiento del emisor (corrimiento cinemático al rojo o al azul). La frecuencia de un fotón emitido desde un cuerpo con cuadrivelocidad  $U^\mu$  se obtiene a partir de la relación de Einstein entre energía y frecuencia  $E_\gamma = \hbar\omega$ :

$$\hbar\omega_p = (-P_\mu U^\mu)|_p, \quad (3.1)$$

donde  $p$  se refiere al punto  $e$  de emisión o  $d$  de detección. Esta relación se obtiene considerando un sistema de referencia inercial en el que la cuadrivelocidad del emisor solo tiene la componente temporal; en dicho sistema, la contracción con el cuadrimomento del fotón resulta en la energía del fotón emitido.

En general, la contracción de dos 1-tensores es un escalar invariante. Así, la frecuencia medida en un punto, definida mediante la contracción del cuadrimomento y la cuadrivelocidad en (3.1) es un escalar del que se puede construir otro invariante relativista: el corrimiento de frecuencia del fotón  $z$  que se define como

$$z \equiv \frac{\omega_e - \omega_d}{\omega_d} \implies 1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_d} = \frac{(P_\mu U^\mu)|_e}{(P_\nu U^\nu)|_d}. \quad (3.2)$$

Al considerar órbitas circulares se tiene  $U^r|_e = 0$ , el movimiento restringido al plano ecuatorial nos permite tomar  $U^\theta|_e = 0$ , además, suponemos un detector estático muy alejado del objeto compacto, i. e.,  $U^\mu|_d = (1, 0, 0, 0)$ . Usando las ecuaciones, obtenidas en el Capítulo 2, de las ecuaciones de movimiento para el fotón (2.24), (2.25) y (2.26), y las cantidades conservadas (2.20) y (2.21), en el corrimiento de frecuencia debido a un objeto compacto cuyo campo gravitacional es descrito por la métrica de Schwarzschild, se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{(g_{tt}P^tU^t + g_{\varphi\varphi}P^\varphi U^\varphi)|_e}{(g_{tt}P^tU^t)|_d} \\ &= \frac{\left(-f\left(\frac{E_\gamma}{f}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3M}{r}}}\right) + r^2\left(\frac{L_\gamma}{r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{M}{1-\frac{3M}{r}}}\right)\right)|_e}{\left(-f\left(\frac{E_\gamma}{f}\right)\right)|_d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\frac{E_\gamma}{\sqrt{1-\frac{3M}{r_e}} + \frac{L_\gamma}{r_e} \sqrt{\frac{M}{r_e} \frac{1-\frac{3M}{r_e}}{1-\frac{2M}{r_e}}}}{-E_\gamma}}{1+z} \\
 1+z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3M}{r_e}}} \left( 1 - \frac{b_\gamma}{r_e} \sqrt{\frac{M}{r_e}} \right), \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

donde  $b_\gamma = \frac{L_\gamma}{E_\gamma}$  es el **parámetro de deflexión de la luz**, que representa cuánto se deforma la trayectoria del fotón debido a la interacción gravitacional con el objeto compacto y tiene unidades de longitud, por lo que puede interpretarse como la posición aparente del emisor en el firmamento. El primer término de (3.3) corresponde al efecto gravitacional generado por la masa del objeto compacto, mientras que el segundo, el término dominante, corresponde al movimiento del emisor. El parámetro de deflexión de la luz aparece en la ecuación de movimiento del fotón (2.24):

$$\left( \frac{P^r}{E_\gamma} \right)^2 - 1 = -\frac{b_\gamma^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \implies b_\gamma = \pm r \sqrt{\frac{1 - \left( \frac{P^r}{E_\gamma} \right)^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)}}.$$

Para las mediciones se busca el valor máximo de  $z$ , en (3.3) esto ocurre al maximizar  $b_\gamma$ . Los puntos donde  $b_\gamma$  tiene un extremo (máximo o mínimo) son los mismos puntos donde  $P^r = 0$ , por lo tanto, el corrimiento en esos puntos es dado por:

$$1+z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3M}{r_e}}} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{M}{r_e} \frac{1-\frac{3M}{r_e}}{1-\frac{2M}{r_e}}} \right). \tag{3.4}$$

Los puntos donde el parámetro de deflexión se hace extremo coinciden con aquellos en los que el radio-vector del emisor es perpendicular a la tangente a la órbita que apunta hacia el detector. En estos puntos  $r_e \approx D\delta$  (siempre que  $\delta \ll 1$ ), donde  $D$  es la distancia al objeto compacto y  $\delta$  el ángulo en que se encuentra el emisor con respecto a la posición del agujero negro en el firmamento.

Note que  $M$  y  $r_e$  están acopladas en (3.4). En la próxima sección se introducirá otra cantidad observable para desacoplar y lograr estimar la masa del objeto compacto.

Para estimar la masa de un agujero negro usando estos puntos de emisión con máximo corrimiento, se observan cuerpos que emiten luz con corrimiento al rojo y al azul. Sean

$$R = 1 + z_R = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3M}{r_e}}} \left( 1 + \sqrt{\frac{M}{r_e} \frac{1-\frac{3M}{r_e}}{1-\frac{2M}{r_e}}} \right), \tag{3.5}$$

$$B = 1 + z_B = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3M}{r_e}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{M}{r_e} \frac{1-\frac{3M}{r_e}}{1-\frac{2M}{r_e}}} \right), \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 RB &= \frac{1}{1-\frac{3M}{r_e}} \left( 1 - \frac{M}{r_e} \frac{1-\frac{3M}{r_e}}{1-\frac{2M}{r_e}} \right) = \frac{1}{1-\frac{2M}{r_e}}; \\
 \implies \frac{M}{D} &= \frac{\delta}{2} \left( \frac{RB-1}{RB} \right). \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Los objetos que se observan son sistemas de megamáseres de agua en el disco de acreción de núcleos galácticos activos (AGN por sus siglas en inglés). En los AGN de tipo 2, el motor central está

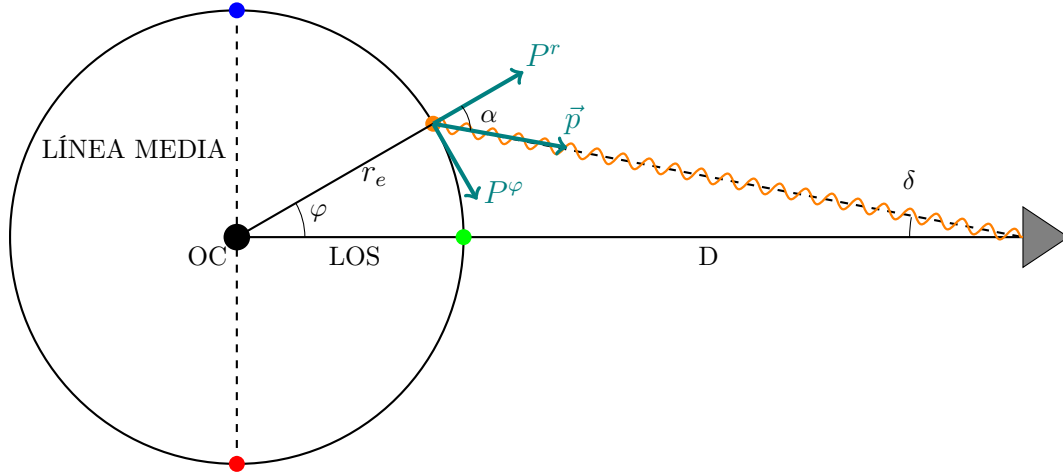


Figura 3.1: Sistema de Megamáseres de frente. La línea que une el objeto compacto (OC) con el observador es la línea de visión (LOS por sus siglas en inglés). Considerando un emisor en cualquier punto de la órbita, al definir el vector bidimensional  $\vec{p}$  como la proyección del cuadrivector  $P$  en el plano ecuatorial se puede escribir  $P^r$  en términos de  $p = |\vec{p}|$  y el ángulo  $\alpha$ .

oculto por el disco de acreción, oscureciendo la emisión óptica y ultravioleta (UV). Sin embargo, los máseres de agua emiten en frecuencias de radio (22,2 GHz) sobre el disco. Estos máseres se asocian al disco de acreción y suelen mostrar un espectro con un patrón de triple pico: el grupo central (líneas sistémicas), agrupado alrededor de la velocidad sistémica de la galaxia, y los otros dos (líneas de alta velocidad) desplazados casi simétricamente del grupo central hacia el rojo y azul por cientos de km/s [8]. En general, los máseres corridos al rojo y al azul no están a la misma distancia del objeto compacto, por lo que se debe implementar un ajuste estadístico.

Al buscar generalizar (3.4) para cualquier posición  $\varphi$  se proyecta el cuadrímomento  $P$  sobre el plano ecuatorial para tener el vector bidimensional  $\vec{p} = P^r e_r + P^\varphi e_\varphi$ .

Ya que localmente el espacio-tiempo es plano, se puede considerar una geometría euclidiana, permitiendo expresar  $p^2$  como:

$$p^2 = (P^r)^2 + r_e^2 (P^\varphi)^2 \quad (3.8)$$

$$P^r = p \cos \alpha \quad (3.9)$$

Al usar las ecuaciones de movimiento del fotón (2.24) y (2.26) en (3.8) se obtiene:

$$p^2 = E_\gamma^2 - \frac{L_\gamma^2}{r_e^2} \left(1 - \frac{2M}{r_e}\right) + r_e^2 \left(\frac{L_\gamma}{r_e^2}\right)^2 = E_\gamma^2 + \frac{2ML_\gamma^2}{r_e^3}. \quad (3.10)$$

Por otro lado, al sustituir (3.9) y (2.26) en (3.8):

$$p^2 = p^2 \cos^2 \alpha + \frac{L_\gamma^2}{r_e^2}$$

$$\implies p^2 (1 - \cos^2 \alpha) = p^2 \sin^2 \alpha = \frac{L_\gamma^2}{r_e^2}$$

$$\implies p^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{L_\gamma^2}{r_e^2}. \quad (3.11)$$

Al igualar (3.10) y (3.11) se puede encontrar otra expresión para el parámetro de deflexión  $b_\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 E_\gamma^2 + \frac{2ML_\gamma^2}{r_e^3} &= \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \frac{L_\gamma^2}{r_e^2} \\
 1 &= \frac{L_\gamma^2}{E_\gamma^2 r_e^2} \left( \frac{1 - \frac{2M}{r_e} \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} \right) = \frac{b_\gamma^2}{r_e^2} \left( \frac{1 - \frac{2M}{r_e} \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} \right) \\
 \implies b_\gamma &= \pm r_e \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \alpha}{1 - \frac{2M}{r_e} \text{sen}^2 \alpha}}. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Al sustituir (3.12) en (3.3) se obtiene el corrimiento de frecuencia para un emisor con órbitas circulares en cualquier posición alrededor del objeto compacto. Observe que el parámetro de deflexión tiene dependencia de  $\alpha$ . Además, siguiendo con la suposición de que el espacio alrededor del emisor es aproximadamente plano, es decir, la geometría euclidiana es válida, se cumple  $\alpha = \varphi + \delta$  (ver Figura 3.1) y, ya que para los sistemas de másers observados  $\delta \ll 1$ , entonces podría hacerse la aproximación  $\alpha \approx \varphi$ . Sin embargo, ya que el parámetro  $\alpha$  también contiene la información sobre la distancia al objeto compacto, es conveniente mantenerlo por ahora. Así,

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r_e}}} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{\frac{M}{r_e}} \text{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_e} \text{sen}^2 \alpha}} \right).$$

Aquí el signo  $\pm$  permite escribir una expresión para el corrimiento al rojo (signo  $+$ ) y otra para el corrimiento al azul (signo  $-$ ). En adelante se usará la notación  $\tilde{M} = M/r_e$ . Así, el corrimiento toma la forma:

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}}} \left( 1 + \frac{\sqrt{\tilde{M}} \text{sen} \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}} \right). \tag{3.13}$$

Observe que en (3.13) el signo  $\pm$  ha sido considerado en la función  $\text{sen} \alpha$  al ser impar.

### 3.1. Rapidez del corrimiento

Se tienen ahora 3 cantidades a estimar:  $M$ ,  $r_e$  y  $\alpha$ ; pero solo se puede observar  $z$ , además  $M$  y  $r_e$  están acoplados. Recordando que uno de los objetivos principales de este trabajo es desacoplar estas dos cantidades, se introduce un nuevo invariante: la derivada del corrimiento de frecuencia  $z$  respecto al tiempo propio del emisor, denominada rapidez de corrimiento [9]. Ya que  $z$  es un escalar relativista, entonces su derivada también lo es, pues ambos son invariantes relativistas y, por lo tanto, es posible usarla independientemente del punto del espacio-tiempo. Así

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dz}{dt} = (U^t) \frac{dz}{dt}. \tag{3.14}$$

La derivada respecto al tiempo propio es dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}}} \left( 1 + \frac{\sqrt{\tilde{M}} \text{sen} \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}} \right) \right] \\
 &= \frac{\dot{\alpha} \sqrt{\tilde{M}}}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}}} \left[ \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}} + \frac{\text{sen} \alpha}{(1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} (2\tilde{M} \text{sen} \alpha \cos \alpha) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\dot{\varphi} \sqrt{\tilde{M}} \cos \alpha}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}} (1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \left[ (1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha) + 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\tilde{M}} \cos \alpha}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}} (1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \dot{\varphi},
 \end{aligned}$$

donde se usó la aproximación  $\dot{\alpha} \approx \dot{\varphi}$  ya que cuando  $\delta \ll 1$  se satisface  $\alpha \approx \varphi$ . Además,  $\dot{\varphi}$  está dado por (2.21). Por lo tanto,

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\tilde{M}}{r_e (1 - 3\tilde{M})} \frac{\cos \alpha}{(1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.15)$$

o al usar (3.14):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\tilde{M}}{r_e \sqrt{1 - 3\tilde{M}}} \frac{\cos \alpha}{(1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.16)$$

En (3.15) y (3.16),  $r_e$  aparece independiente de  $M$  por primera vez, lo que se puede considerar un desacoplamiento parcial de  $r_e$ . Esto es importante porque se usará más adelante para hallar una expresión para  $M$ .

En este punto se desconoce  $\tilde{M}$ ,  $\alpha$  y  $r_e$ , mientras que se tiene como observables explícitas a  $z$  y  $\frac{dz}{dt}$ . A continuación se buscará ocultar la dependencia de una de las tres incógnitas. De (3.13):

$$\begin{aligned}
 &\frac{(\sqrt{1 - 3\tilde{M}} (1 + z) - 1)^2}{\tilde{M}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha} \\
 &\implies \frac{F}{1 + 2\tilde{M}F} = \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

donde

$$F = \frac{(\sqrt{1 - 3\tilde{M}} (1 + z) - 1)^2}{\tilde{M}}. \quad (3.18)$$

Se sustituye (3.17) en (3.16) como sigue:

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{r_e \sqrt{1 - 3\tilde{M}}}{\tilde{M}} \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\left( 1 - 2\tilde{M} \frac{F}{1 + 2\tilde{M}F} \right)^3} \\
 &= \frac{1 - \frac{F}{1 + 2\tilde{M}F}}{(1 + 2\tilde{M}F)^{-3}} \\
 &= (1 + 2\tilde{M}F)^3 - F (1 + 2\tilde{M}F)^2 \\
 &\implies \frac{r_e^2 (1 - 3\tilde{M})}{\tilde{M}^2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = (1 - F) + (3 - 2F)(2F\tilde{M}) + (3 - F)(2F\tilde{M})^2 + (2F\tilde{M})^3. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Al sustituir (3.18) en (3.19) se obtiene una ecuación de grado 5 en  $\tilde{M}$  con potencias semienteras de  $1 - 3\tilde{M}$ . Una ecuación de este orden no tiene solución analítica. Con el fin de obtener una expresión

más sencilla, se toma en consideración un segundo corrimiento de frecuencia. La diferencia con el procedimiento que da como resultado (3.7) es que se intenta generalizar la medición para considerar los emisores en cualquier posición alrededor del objeto compacto, obteniendo condiciones menos restrictivas para la observación.

### 3.2. Introducción de un segundo emisor

La complejidad de la ecuación (3.13) se debe a los términos dentro de las raíces cuadradas, ya que al intentar escribir el  $\text{sen } \alpha$  en términos de una función  $F$ , esta irá acompañada de  $\sqrt{1 - 3\tilde{M}}$ . Hay dos formas equivalentes en (3.13) de despejar el término que depende de  $\alpha$  y, a la vez, deshacerse de las raíces cuadradas usando el corrimiento de frecuencia de fotones emitidos desde dos puntos en la misma órbita circular: el producto o la diferencia de corrimientos opuestos respecto a la línea de visión, como se definirá a continuación.

Se define la siguiente notación para parámetros de distintos emisores:

$$\tilde{M}_A = \frac{M}{r_{eA}}, \quad \hat{m}_A = 1 - 3\tilde{M}_A, \quad \alpha_A$$

donde  $A$  indica el emisor tomado en cuenta. Así, el corrimiento de frecuencia viene dado por:

$$1 + z_A = \frac{1}{\sqrt{\hat{m}_A}} \left( 1 + \frac{\sqrt{\tilde{M}_A} \text{sen } \alpha_A}{\sqrt{1 - 2\tilde{M}_A \text{sen}^2 \alpha_A}} \right). \quad (3.20)$$

Dado algún emisor con corrimiento de frecuencia  $z_1$ , se considera un segundo emisor en la misma órbita, es decir, con  $r_{e1} = r_{e2} = r_e$ , pero opuesto respecto a la línea de visión, esto es, en la posición  $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\alpha$ . Se puede retomar la notación en (3.5) y (3.6) para definir:

$$R = 1 + z_1 = \frac{1}{\sqrt{\hat{m}}} \left( 1 + \frac{\sqrt{\tilde{M}} \text{sen } \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}} \right), \quad (3.21)$$

$$B = 1 + z_2 = \frac{1}{\sqrt{\hat{m}}} \left( 1 - \frac{\sqrt{\tilde{M}} \text{sen } \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}} \right), \quad (3.22)$$

donde  $\tilde{M} = \tilde{M}_1 = \tilde{M}_2$  y, por lo tanto,  $\hat{m} = \hat{m}_1 = \hat{m}_2$ .

Usando el corrimiento de frecuencia de ambos emisores se puede obtener una expresión que contenga la posición orbital sin raíces cuadradas usando el producto de la siguiente manera:

$$RB = \frac{1}{\hat{m}} \left( 1 - \frac{\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha} \right). \quad (3.23)$$

Una forma equivalente es con la diferencia de los corrimientos de frecuencia de los mismos emisores:

$$R - B = \frac{2}{\sqrt{\hat{m}}} \left( \frac{\sqrt{\tilde{M}} \text{sen } \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}} \right). \quad (3.24)$$

Note que si se toma como  $R$  un corrimiento al rojo, entonces la diferencia  $R - B$  es, naturalmente, positiva.

Ya que ambas expresiones llevan al mismo resultado, se usará la segunda por ser más eficiente. Así, se puede escribir

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha} = Q \implies \text{sen}^2 \alpha = \frac{Q}{1 + 2\tilde{M}Q}, \quad (3.25)$$

donde

$$Q = \frac{\hat{m}(R - B)^2}{4\tilde{M}}. \quad (3.26)$$

Observe que se puede escribir el  $\text{sen}^2 \alpha$  de la misma forma que en (3.17), sólo cambiando la función  $F$  por  $Q$  propuesta en (3.26). Así, basta con sustituir (3.26) en la ecuación común (3.19) a los casos en que se considera un emisor o dos opuestos. Dado que  $\cos \alpha$  es una función par, la rapidez del corrimiento es compartida:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{r_{e1}} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{r_{e2}} = \frac{dz}{dt}. \quad (3.27)$$

A partir de la (3.19) se puede escribir la rapidez de corrimiento de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left( r_e \frac{dz}{dt} \right)^2 &= \frac{\tilde{M}}{\hat{m}} \left[ \tilde{M} (1 + 2\tilde{M}Q)^3 - \tilde{M}Q (1 + 2\tilde{M}Q)^2 \right] \\ &= \frac{\tilde{M}}{\hat{m}} (1 + 2\tilde{M}Q)^2 \left[ \tilde{M} (1 + 2\tilde{M}Q) - \tilde{M}Q \right] \\ &= \frac{\tilde{M}}{\hat{m}} (1 + 2\tilde{M}Q)^2 \left[ \tilde{M} - (1 - 2\tilde{M}) \tilde{M}Q \right] \\ &= \frac{\tilde{M}}{\hat{m}} \left[ 1 + 2\frac{\hat{m}(R - B)^2}{4} \right]^2 \left[ \tilde{M} - (1 - 2\tilde{M}) \frac{\hat{m}(R - B)^2}{4} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Esta expresión se usará para hallar una forma analítica de  $r_e$  en términos de las observables  $R$  y  $B$ .

### 3.3. El radio de las órbitas a partir de observables

Un fotón emitido desde la línea de visión tendría un corrimiento de frecuencia con sólo el término gravitacional. Dicho corrimiento de frecuencia es proporcional a la suma de dos corrimientos opuestos respecto a la línea de visión que comparten órbita, es decir, la suma de  $R$  y  $B$ :

$$(1 + z)_{LOS} = \frac{R + B}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}}}. \quad (3.29)$$

La suma satisface la siguiente relación con la masa del objeto compacto:

$$\begin{aligned} \frac{(R + B)^2}{4} &= \frac{1}{1 - 3\tilde{M}}, \\ \implies \tilde{M} &= \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{4}{(R + B)^2} \right) = \frac{(R + B)^2 - 4}{3(R + B)^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Además, se tiene que

$$\hat{m} = 1 - 3\tilde{M} = \frac{4}{(R + B)^2}$$

Esta relación puede sustituirse directamente en (3.28) para expresar el radio de las órbitas en términos de observables.

$$\begin{aligned}
\left(r_e \frac{dz}{dt}\right)^2 &= \frac{\tilde{M}}{\hat{m}} \left[1 + 2 \frac{\hat{m}(R-B)^2}{4}\right]^2 \left[\tilde{M} - \left(1 - 2\tilde{M}\right) \frac{\hat{m}(R-B)^2}{4}\right] \\
&= \left(\frac{(R+B)^2 - 4}{12}\right) \left[1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right]^2 \left[\frac{(R+B)^2 - 4}{3(R+B)^2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3(R+B)^2}\right) \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right] \\
&= \left(\frac{(R+B)^2 - 4}{12}\right) \left[1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right]^2 \left[\frac{(R+B)^2 - (R-B)^2}{3(R+B)^2} - \left(1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right) \frac{4}{3(R+B)^2}\right] \\
&= \left(\frac{(R+B)^2 - 4}{9(R+B)^2}\right) \left[1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right]^2 \left[\frac{(R+B)^2 - (R-B)^2}{4} - \left(1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right)\right] \\
\Rightarrow \left(r_e \frac{dz}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}}{3(R+B)}\right)^2 [(R+B)^2 - 4] \left[\frac{(R+B)^2 - (R-B)^2}{4} - \left(1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

A partir de donde se puede escribir

$$r_e = \left(1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right) \sqrt{\frac{(R+B)^2 - 4}{9(R+B)^2} \left[\frac{(R+B)^2 - (R-B)^2}{4} - \left(1 + 2 \frac{(R-B)^2}{(R+B)^2}\right)\right]} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{-1}.$$

Note que el primer término del último corchete también puede escribirse como  $RB$ , pero puede resultar más conveniente tratar con sumas y diferencias de corrimientos de frecuencia como parámetros en sí. También se puede escribir:

$$r_e = \frac{(R+B)^2 + 2(R-B)^2}{3(R+B)^4} \sqrt{((R+B)^2 - 4) [(R+B)^2(RB-1) - 2(R-B)^2]} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{-1}. \quad (3.31)$$

La expresión para  $r_e$  (3.31) servirá para obtener expresiones analíticas para dos parámetros más: la masa del objeto compacto y la distancia al observador.

### 3.4. La Masa del objeto compacto a partir de observables

El cociente de la masa del objeto compacto y el radio de las órbitas a partir de los corrimientos de frecuencias  $R$  y  $B$  es dado en (3.30). La masa del objeto compacto puede encontrarse simplemente como:

$$\begin{aligned}
M &= \tilde{M} r_e = \frac{(R+B)^2 - 4}{3(R+B)^2} r_e, \\
M &= \frac{(R+B)^2 + 2(R-B)^2}{9(R+B)^6} \sqrt{((R+B)^2 - 4)^3 [(R+B)^2(RB-1) - 2(R-B)^2]} \left(\frac{dz}{dt}\right)^{-1}. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Esta expresión permite determinar la masa de un objeto compacto a partir del corrimiento de frecuencia de fotones emitidos por partículas en órbitas circulares alrededor de dicho objeto. Los emisores considerados están sujetos a dos restricciones: deben compartir la misma órbita y encontrarse en posiciones angulares opuestas con respecto a la línea de visión, según se definió anteriormente.

En la práctica, los emisores observados alrededor de los candidatos a agujeros negros suelen ser máseres que no se encuentran a la misma distancia del objeto central, por lo que se debe aplicar un ajuste estadístico. Además, ya que el corrimiento de frecuencia  $z$  presenta valores pequeños, se busca maximizar su magnitud. Para ello, puede emplearse el método descrito en el capítulo 3, que conduce a la expresión (3.7). Sin embargo, incluso en este caso no se puede asegurar con certeza que los emisores observados estén en las posiciones de máximo corrimiento. La ventaja de usar la expresión (3.32) es que permite determinar directamente la masa del objeto compacto sin la necesidad de otros experimentos. Un análisis estadístico puede facilitarse tomando algún corrimiento de frecuencia central como referencia y escribiendo la suma y diferencia de  $R$  y  $B$  a partir de (3.29).

### 3.5. Distancia al objeto compacto

El corrimiento de frecuencia considerando órbitas circulares es dado por la expresión (3.13):

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}}} \left( 1 + \frac{\sqrt{\tilde{M}} \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha}} \right).$$

Observe que toda la información referente a la posición del observador (y la que corresponde a la posición angular del emisor) está contenida en el parámetro  $\alpha$ . Para obtener la expresión para  $r_e$  (3.31) se “ocultó” el parámetro  $\alpha$  mediante la introducción de la rapidez de corrimiento para que ocupe su lugar. La estimación de la distancia al observador del objeto compacto parte de la suposición (hecha anteriormente) de que la geometría del espacio-tiempo en las proximidades de los emisores y del observador es plana.

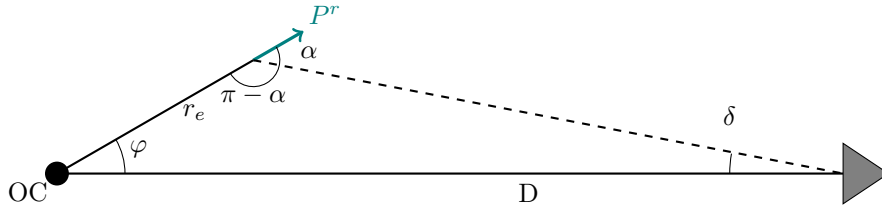


Figura 3.2: Triángulo que forman el objeto compacto, el emisor y el observador.

Note que el emisor y observador forman, junto al objeto compacto, un triángulo como se ve en 3.2. Si se considera que el espacio alrededor del emisor es localmente plano, entonces el ángulo que forma con los otros dos vértices es  $\pi - \alpha$ . Naturalmente, este triángulo satisface la ley de senos, según la cual

$$\frac{D}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{r_e}{\operatorname{sen}(\delta)}. \quad (3.33)$$

Y, dado que  $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ , se puede usar (3.33) para escribir:

$$D = \frac{r_e \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \delta}. \quad (3.34)$$

Así, con el propósito de obtener  $\sin \alpha$  se retoma la diferencia de corrimientos de frecuencia (3.24):

$$(R - B)^2 = \frac{4}{\hat{m}} \left( \frac{\tilde{M} \sin^2 \alpha}{1 - 2\tilde{M} \sin^2 \alpha} \right)$$

Y, al igual que en (3.25) y (3.26) se puede escribir el  $\sin^2 \alpha$  como:

$$\sin^2 \alpha = \frac{Q}{1 + 2\tilde{M}Q}, \quad Q = \frac{\hat{m}(R - B)^2}{4\tilde{M}}.$$

Además, aprovechando (3.30), se tiene

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{\hat{m}(R - B)^2}{4\tilde{M} \left( 1 + 2\frac{\hat{m}(R - B)^2}{4} \right)} \\ &= \frac{(R - B)^2}{\tilde{M}(R + B)^2 \left( 1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2} \right)} \\ &= \frac{3(R - B)^2}{((R + B)^2 - 4) \left( 1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2} \right)} \\ \implies \sin \alpha &= (R - B) \sqrt{\frac{3}{((R + B)^2 - 4) \left( 1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2} \right)}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.31) y (3.35) en (3.34), se obtiene:

$$\begin{aligned} D &= \frac{R - B}{\sin(\delta) \frac{dz}{dt}} \frac{1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2}}{3(R + B)} \left\{ \frac{3}{\left( 1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2} \right)} \left[ \frac{(R + B)^2 - (R - B)^2}{4} - \left( 1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{R - B}{R + B} \sqrt{\frac{1}{3} \left( 1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2} \right) \left[ \frac{(R + B)^2 - (R - B)^2}{4} - \left( 1 + 2\frac{(R - B)^2}{(R + B)^2} \right) \right]} \left( \delta \frac{dz}{dt} \right)^{-1}. \\ D &= \frac{R - B}{(R + B)^3} \sqrt{\frac{((R + B)^2 + 2(R - B)^2) [(R + B)^2(RB - 1) - 2(R - B)^2]}{3}} \left( \delta \frac{dz}{dt} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Esto último ya que  $\delta \ll 1$  y, por lo tanto, se satisface  $\sin \delta \approx \delta$ .

También podría ser de interés la expresión para la posición orbital de los emisores a partir de (3.35):

$$\alpha = \arcsen \sqrt{\frac{3(R - B)^2(R + B)^2}{((R + B)^2 - 4)((R + B)^2 + 2(R - B)^2)}} \quad (3.37)$$

En resumen, se aprovechó el corrimiento de frecuencia, que es un escalar relativista y, por lo tanto, invariante del punto del espacio-tiempo, para obtener expresiones analíticas de tres parámetros físicos a partir de observables. La introducción de la rapidez de corrimiento permite que dichas expresiones no dependan explícitamente de la posición angular del emisor.

### 3.6. Los Cocientes $\frac{M}{D}$ y $\frac{r_e}{D}$

Debido a que aún no se dispone de medidas para la rapidez de corrimiento, se puede obtener dos relaciones a partir de las expresiones halladas. La relación masa-distancia es:

$$\frac{M}{D} = \frac{\delta}{9(R+B)^3(R-B)} \sqrt{3((R+B)^2 - 4)^3 [(R+B)^2 + 2(R-B)^2]}. \quad (3.38)$$

Por otro lado, el cociente entre el radio de las órbitas y la distancia al observador es:

$$\frac{r_e}{D} = \delta \sqrt{\frac{((R+B)^2 - 4) [(R+B)^2 + 2(R-B)^2]}{3(R+B)^2(R-B)^2}}. \quad (3.39)$$

A continuación se considerará el movimiento peculiar que puede tener el sistema emisor para darle un tono más general a las expresiones anteriores.

### 3.7. Corrimiento de frecuencia debido al movimiento peculiar de la galaxia

Además del corrimiento al rojo gravitacional y el corrimiento cinemático debido al movimiento de los emisores a través de las órbitas, se debe tomar en cuenta el movimiento que puede tener todo el sistema. El movimiento que pueden tener los sistemas puede deberse a la expansión del universo o a efectos locales. Si solo se consideran efectos locales, se pueden agregar a las expresiones para el corrimiento fácilmente.

Considere un objeto compacto en recesión respecto al observador lejano con velocidad constante. El corrimiento de frecuencia se define como:

$$1 + z_{total} = \frac{\omega_e \omega_e'}{\omega_d \omega_d'} = (1 + z_{Schw}) (1 + z_{boost}), \quad (3.40)$$

$$1 + z_{boost} = \frac{\omega_e'}{\omega_d'}, \quad (3.41)$$

donde  $z_{Schw}$  es el corrimiento de frecuencia gravitacional para un emisor con órbitas circulares alrededor de un objeto compacto que se obtiene a partir de la métrica de Schwarzschild, y  $z_{boost}$  es el corrimiento de frecuencia cinemático debido a un *boost* relativista especial. En otras palabras, el último corresponde al movimiento peculiar.

Suponiendo que el sistema formado por los emisores y el objeto compacto está muy alejado del observador, se puede suponer que el espacio entre ellos es plano, por lo que es posible elegir un sistema de coordenadas que satisfaga una métrica como (2.15), por lo que el intervalo (en unidades del SI) toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2$$

Considere una onda plana en un marco de referencia inercial descrita por:

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \exp[i(\vec{k}_d \cdot \vec{r}_d - \omega_d t_d)], \quad (3.42)$$

donde  $\omega_e$  es la frecuencia medida en ese sistema de coordenadas y el vector de onda  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{v}$  ( $v$  es la velocidad de propagación de la onda) apunta en la dirección en que se propaga la onda.

**Corrimiento de frecuencia de fotones en presencia de un campo gravitacional intenso**  
 3.7 Corrimiento de frecuencia debido al movimiento peculiar de la galaxia

---

Considere otro sistema de coordenadas:

$$x_e^\mu = \Lambda_\nu^\mu x_d^\nu, \quad (3.43)$$

que, para otro sistema inercial, las componentes del *boost*  $\Lambda_\nu^\mu$  son constantes y dependen de la velocidad que un sistema tiene respecto al otro. Suponga que el sistema de coordenadas  $x_d^\mu$  tiene al sistema detector fijo en el origen, y que el sistema de coordenadas  $x_e^\mu$ , que contiene al sistema emisor fijo en el origen, se mueve respecto a  $x_d^\mu$  con una velocidad  $v_\bullet$  en la dirección  $x_e^1$  y con el resto de coordenadas espaciales alineadas. Entonces, las componentes del boost son:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v_\bullet}{c}.$$

Se define el siguiente objeto:

$$K^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \quad (3.44)$$

con el que se puede escribir la fase de una onda como:

$$K^\mu x_\mu = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t. \quad (3.45)$$

Vea que se puede cambiar del sistema de coordenadas  $x_d^\mu$  a  $x_e^\mu$  en la fase usando el boost como sigue:

$$K_{d\mu} x_d^\mu = K_{d\mu} \Lambda_\nu^\mu x_e^\nu.$$

Que no solo sigue siendo constante, sino que aún tiene forma de la fase de una onda plana. Se deduce que la frecuencia y el vector de onda se transforman como las componentes del cuadrivector de posición, es decir, se transforman como cuadrivector usando el boost. De esta forma, el cuadrivector de onda se define como  $K^\mu$ . La componente temporal de este objeto se transforma como sigue:

$$K_e^0 = \Lambda_\nu^0 K_d^\nu = \gamma \left( \frac{\omega_d}{c} - \beta k_d^1 \right).$$

Si la emisión es en la dirección opuesta al movimiento, entonces  $|\vec{k}_d| = -k_d^1 = \frac{\omega}{c}$ . Por lo tanto, se tiene

$$\frac{\omega_e}{c} = \gamma \left( \frac{\omega_d}{c} + \beta \frac{\omega_d}{c} \right)$$

$$\implies \frac{\omega_e}{\omega_d} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1 + z_{boost}. \quad (3.46)$$

Este es el corrimiento de frecuencia de un fotón debido al movimiento peculiar cuando el fotón es emitido en la dirección del desplazamiento.

A pesar de que los objetos que orbitan el objeto compacto no están fijos a ningún sistema de referencia inercial, se toma como aproximación (3.40). De este modo, el corrimiento total se obtiene a partir del corrimiento al rojo o al azul según sea el caso, y el factor constante (3.46):

$$(1 + z_{total})_R = R_t = R \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

**Corrimiento de frecuencia de fotones en presencia de un campo gravitacional intenso**  
**3.7 Corrimiento de frecuencia debido al movimiento peculiar de la galaxia**

---

$$(1 + z_{total})_B = B_t = B \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Puede ver que la suma, resta y la derivada temporal del corrimiento de frecuencia gravitacional son proporcionales al corrimiento de frecuencia total que considera movimiento peculiar en la dirección de propagación:

$$R_t + B_t = \kappa(R_{Schw} + B_{Schw}) \quad , \quad R_t - B_t = \kappa(R_{Schw} - B_{Schw}) \quad , \quad \frac{dz_t}{dt} = \kappa \frac{dz_{Schw}}{dt} \quad ,$$

donde  $\kappa$  es el valor constante

$$\kappa = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad , \quad (3.47)$$

que no debe confundirse con la constante en (2.1).

Pueden escribirse las expresiones anteriores para la masa del objeto compacto (3.32), el radio de las órbitas (3.31), y la distancia hacia el observador (3.36) de la siguiente manera:

$$r_e = \frac{(R_t + B_t)^2 + 2(R_t - B_t)^2}{3(R_t + B_t)^4} \sqrt{((R_t + B_t)^2 - 4\kappa^2) \Phi} \left( \frac{dz_t}{dt} \right)^{-1} \quad (3.48)$$

$$M = \frac{(R_t + B_t)^2 + 2(R_t - B_t)^2}{9(R_t + B_t)^6} \sqrt{((R_t + B_t)^2 - 4\kappa^2)^3 \Phi} \left( \frac{dz_t}{dt} \right)^{-1} \quad (3.49)$$

$$D = \frac{R_t - B_t}{(R_t + B_t)^3} \sqrt{\frac{((R_t + B_t)^2 + 2(R_t - B_t)^2) \Phi}{3}} \left( \delta \frac{dz_t}{dt} \right)^{-1} \quad (3.50)$$

donde el factor

$$\Phi = (R_t + B_t)^2(R_t B_t - \kappa^2) - 2\kappa^2(R_t - B_t)^2 \quad , \quad (3.51)$$

se repite en todas las expresiones

De forma similar, sus cocientes toman la siguiente forma:

$$\frac{M}{D} = \frac{\delta}{3(R_t + B_t)^3} \sqrt{\frac{((R_t + B_t)^2 - 4\kappa^2)^3 [(R_t + B_t)^2 + 2(R_t - B_t)^2]}{3(R_t - B_t)^2}} \quad , \quad (3.52)$$

$$\frac{r_e}{D} = \delta \sqrt{\frac{((R_t + B_t)^2 - 4\kappa^2) [(R_t + B_t)^2 + 2(R_t - B_t)^2]}{3(R_t + B_t)^2(R_t - B_t)^2}} \quad (3.53)$$

De nuevo, parece ser que hasta no tener datos de la rapidez de corrimiento, es más conveniente usar los cocientes.

### 3.7.1. Corrimiento de frecuencia considerando movimiento peculiar en cualquier dirección

La generalización del corrimiento debido a un boost (3.46) para cualquier dirección solo cambia la forma del término  $\kappa$  (3.47). En general, puede hacerse que las partes espaciales de los sistemas de coordenadas  $x_e^\mu$  y  $x_d^\nu$  apunten a la misma dirección, pero no siempre se puede hacer que estén alineados. Sin embargo, siempre se pueden escoger de forma tal que la propagación de la luz se restrinja a un plano que, en general, no es el plano ecuatorial. Considere que los respectivos sistemas de referencia están definidos de tal forma que el sistema emisor  $SE$  se mueve respecto al sistema detector  $SD$  en la dirección  $x_d^1$  como se muestra en la imagen 3.3.

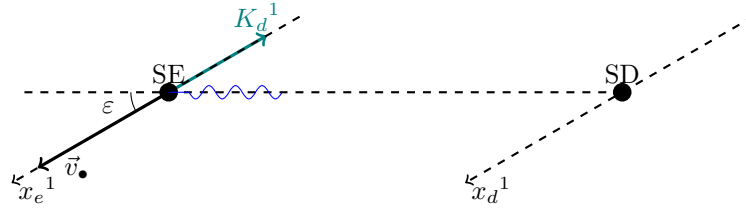


Figura 3.3: Sistema emisor con movimiento peculiar en cualquier dirección.

De la definición de (3.44), se deduce que

$$K_d^1 = -|\vec{k}_d| \cos \varepsilon = -\frac{\omega_d}{c} \cos \varepsilon. \quad (3.54)$$

Por lo tanto, el cambio de coordenadas (3.43) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_e}{c} &= \gamma \left( \frac{\omega_d}{c} - \beta K_d^1 \right) = \gamma (1 + \beta \cos \varepsilon) \frac{\omega_d}{c} \\ \implies 1 + z_{boost} &= \frac{\omega_e}{\omega_d} = \frac{1 + \beta \cos \varepsilon}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Puede ver que cuando  $\varepsilon = 0$  se recupera la expresión anterior para el corrimiento de frecuencia debido al movimiento de recesión (3.46). Esta expresión, a diferencia de la anterior (3.46), no es constante ya que  $\varepsilon$  varía con el tiempo conforme el sistema emisor se desplaza respecto al sistema detector. Sin embargo, recordando que estas expresiones solo son válidas cuando se puede suponer que el espacio entre ambos sistemas es plano, puede considerarse que estos están muy lejos entre sí y, por lo tanto, tomar  $\varepsilon$  como constante debido a lo poco que evoluciona en el tiempo.

Las expresiones que consideran el movimiento peculiar presentan una estructura análoga a las que solo contemplan los efectos gravitacionales del objeto compacto, diferenciándose únicamente por la inclusión del término  $\kappa$ , relacionado con dicho movimiento. Dado que estas nuevas expresiones se reducen a las anteriores en el límite de la velocidad peculiar nula, y considerando que el procedimiento para su verificación es el mismo, se considera redundante realizar una validación independiente. Por lo tanto, en el siguiente capítulo se llevará a cabo la verificación de las primeras expresiones obtenidas para el radio de las órbitas de los objetos alrededor del objeto compacto (suponiendo órbitas circulares) (3.31), la masa del objeto compacto (3.32) y su distancia al observador (3.36), así como propuestas para usar los cocientes (3.38) y (3.39).

## Capítulo 4

# Análisis de las expresiones analíticas encontradas

Para poner a prueba las expresiones obtenidas conviene acotar la rapidez de corrimiento para saber cómo se comporta a lo largo de las órbitas, pues gracias a la rapidez de corrimiento es posible desacoplar  $M$  y  $r_e$  y así, obtener una expresión analítica para  $r_e$ , de la que surgen el resto. También convendrá usar un valor de prueba para  $\tilde{M}$ .

La rapidez de corrimiento se escribe en (3.16) como:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\tilde{M}}{r_e \sqrt{1 - 3\tilde{M}}} \frac{\cos \alpha}{\left(1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}},$$

que se anula en los puntos de máximo corrimiento. Por esto, las expresiones para el radio de las órbitas (3.31), la masa del objeto compacto (3.32) y la distancia al observador (3.36) no son válidas para emisores en las posiciones donde el corrimiento de frecuencia se maximiza.

La primera fracción del producto es constante en cualquier punto de la órbita ya que solo depende de  $r_e$  que, recordando que se consideran órbitas circulares, se mantiene constante y, por lo tanto, también  $\tilde{M}$ . Por otro lado, el factor

$$\frac{\cos \alpha}{\left(1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}}$$

depende del evento de emisión del fotón, es decir, la posición del máser cuando se emite el fotón. Puede verse a partir de este factor que la rapidez de corrimiento es una función par y periódica. Además, el signo de la rapidez de corrimiento depende del signo de la función  $\cos \alpha$ , así que los valores máximos y mínimos son iguales en magnitud pero opuestos en signo. Estos valores máximos y mínimos se alcanzan al evaluar en  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \pi$ , respectivamente, pues en esos puntos el numerador alcanza sus valores máximos y mínimos, mientras que el denominador se minimiza (más adelante se verá que el denominador siempre es positivo). En estas posiciones, el factor que depende de la posición toma los valores:

$$\frac{\cos 0}{\left(1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 0\right)^{\frac{3}{2}}} = 1 \quad , \quad \frac{\cos \pi}{\left(1 - 2\tilde{M} \operatorname{sen}^2 \pi\right)^{\frac{3}{2}}} = -1.$$

Así que la rapidez de corrimiento está acotada por:

$$-\frac{\tilde{M}}{r_e \sqrt{1-3\tilde{M}}} \leq \frac{dz}{dt} \leq \frac{\tilde{M}}{r_e \sqrt{1-3\tilde{M}}}. \quad (4.1)$$

Naturalmente, los emisores en  $\alpha = \pi$  están ocultos a la vista para un disco visto de canto. Por otro lado, los emisores en  $\alpha = 0$  se encuentran en la línea de visión, entre el objeto compacto y el observador.

En resumen, la rapidez de corrimiento se anula en los puntos de la órbita con mayor corrimiento de frecuencia cinemático (aquellos puntos de la órbita cuyo radio vector es normal a la recta tangente a la curva de la órbita), y se maximiza para los fotones emitidos desde la línea de visión. Dado que los emisores son excitados de forma que emiten radialmente, solo se considerarán los emisores del lado del disco de acreción que está de la línea media hacia el observador, esto es, solo se consideran valores positivos de la rapidez de corrimiento. Por esta razón, se omitió el valor absoluto que suele acompañar la raíz cuadrada de un valor al cuadrado en la rapidez de corrimiento cuando aparece en las expresiones (3.31), (3.32) y (3.36), y ya que el resto de elementos son definidos positivos ( $R > B$ ).

Puede verse en las imágenes 3.1 y 4.1 que se satisface la siguiente relación. Sea válida la geometría euclidiana en las vecindades de  $r_e$  y del observador  $D$ , se forman tres triángulos rectángulos de interés.

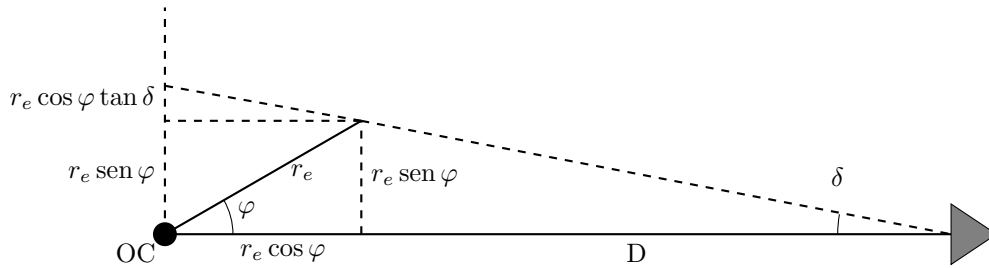


Figura 4.1: Vea que la altura del triángulo más grande es igual a  $D \tan \varphi$ .

Se puede ver que:

$$D \tan \delta = r_e \sin \varphi + r_e \cos \varphi \tan \delta, \\ \implies D \sin \delta = r_e (\sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \sin \delta) = r_e \sin(\varphi + \delta),$$

donde se cumple  $D \gg r_e$  y, por lo tanto,  $\delta \rightarrow 0$ . Así, se tiene

$$r_e \approx \frac{D\delta}{\sin \varphi}. \quad (4.2)$$

En la línea media ( $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ) se cumple

$$r_e \approx D\delta, \quad (4.3)$$

mientras que en la vecindad del punto de la órbita que está en la línea de visión ( $\varphi \rightarrow 0$  sin llegar al punto):

$$r_e \approx \frac{D\delta}{\varphi}. \quad (4.4)$$

Podemos usar esto para obtener  $\tilde{M}$  a partir de algún valor de  $\frac{M}{D}$ . Para máseres en los puntos de la órbita donde el corrimiento cinético se maximiza (es decir, la línea media), se cumple:

$$\tilde{M} = \frac{M}{r_e} = \frac{M}{D\delta}. \quad (4.5)$$

## Análisis de las expresiones analíticas encontradas

Al usar la relación de  $\frac{M}{D}$  para NGC 4258 se puede hacer una estimación. Tenemos [10]:

$$\frac{M}{D} = 0,5326 \times 10^7 \frac{M_{\odot}}{Mpc}, \quad (4.6)$$

Considerar que en unidades geometrizadas las constantes  $G$  (constante de gravitación universal) y  $c$  (velocidad de la luz) están normalizadas, pero en unidades del SI tienen los valores [11]:

$$1G \cdot M_{\odot} = 1,32712442099 \times 10^{20} \frac{m^3}{s^2}, \quad 1c = 299792458 \frac{m}{s}. \quad (4.7)$$

Además,

$$1Mpc = 3,086 \times 10^{22} m \quad (4.8)$$

Al hacer las conversiones correspondientes a (4.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{MG}{Dc^2} &= (0,5326 \times 10^7) \frac{M_{\odot} G}{Mpc \cdot c^2} = (0,5326 \times 10^7) \left( \frac{1,32712442099 \times 10^{20} \frac{m^3}{s^2}}{(3,086 \times 10^{22} m) \left(299792458 \frac{m}{s}\right)^2} \right) \\ &= \left( \frac{(0,5326) (1,32712442099)}{(3,086) (299792458)^2} \right) \times 10^5. \\ \frac{MG}{Dc^2} &= 2,54844623 \times 10^{-13} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Se tienen dos casos para  $\tilde{M}$ : los máseres altamente corridos al rojo o azul, para los que se puede hacer la aproximación (4.3); y el grupo central que pertenece a las líneas de emisión sistémicas, para los que se debe usar (4.4). Al recordar que no se puede identificar  $\alpha$  con el sistema visto de canto, se usó por simplicidad los máseres con alto corrimiento cinético, es decir, los extremos. Por definición, el corrimiento Doppler óptico [12] se toma como:

$$z = \frac{v}{c}.$$

Sin embargo, esta definición no tiene la propiedad de invariante relativista que caracteriza al corrimiento de frecuencia. Aún así, se identifican como máseres corridos al rojo aquellos cuya velocidad medida es considerablemente mayor que la velocidad sistémica de la galaxia; como máseres corridos al azul, aquellos con velocidades considerablemente menores; y como máseres sistémicos, aquellos cuya velocidad es comparable a la velocidad sistémica de la galaxia. La velocidad sistémica de la galaxia NGC 4258 reportada es [13]:

$$v_{\bullet} = 473,3 \frac{km}{s} \quad (4.10)$$

Se tomará un máser altamente corrido al rojo con velocidad relativista y posición [14] que se muestran en la tabla 4.1.

$v_{LSR} (km \cdot s^{-1})$	$v_{rel} (km \cdot s^{-1})$	$\Delta x (mas)$	$\Delta y (mas)$
1464.157	1467.702	4.458	0.784

Tabla 4.1: Parámetros del máser con corrimiento al rojo tomado en cuenta

De donde se puede obtener el ángulo  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

La conversión de *mas* a *rad* está dada por:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180}{\pi} 3600 \text{ arcsec} = \frac{648000}{\pi} (10^3 \text{ mas})$$

$$\implies 1 \text{ mas} = \frac{\pi}{648} \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

De modo que para un valor de  $\tilde{M}$  dado por (4.5) en  $M_\odot/Mpc$  y con el ángulo en *mas*, se transforma a las unidades del SI con:

$$\tilde{M}_{SI} = \frac{MG}{r_e c^2} = \frac{1}{\delta} \left( \frac{(0,5326) (1,32712442099) (648)}{(3,086) (299792458)^2 \pi} \right) \times 10^{11}. \quad (4.11)$$

Tomando de ejemplo el máser anteriormente mencionado y la relación  $M/D$  (4.6):

$$\tilde{M}_{SI} = \frac{1}{\sqrt{(4,458)^2 + (0,784)^2}} \left( \frac{(0,5326) (1,32712442099) (648)}{(3,086) (299792458)^2 \pi} \right) \times 10^{11}$$

$$= 1,16130521 \times 10^{-5}. \quad (4.12)$$

Es debido a que en unidades del SI,  $\tilde{M} \ll 1$ , que el denominador en la rapidez de corrimiento siempre es positivo.

Por otro lado, es importante recordar que no se está trabajando sólo con un corrimiento de frecuencia, sino que se requieren dos corrimientos con restricciones entre sí (opuestos respecto a la línea de visión y en la misma órbita). Es de interés la suma y resta de los corrimientos de frecuencia hacia el rojo y hacia el azul. La suma, en particular, no depende de la posición orbital de los emisores, pues de (3.29) vemos que:

$$R + B = \frac{2}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}}}.$$

Mientras que, la diferencia cumple (3.24):

$$R - B = \frac{2}{\sqrt{1 - 3\tilde{M}}} \left( \frac{\sqrt{\tilde{M}} \text{sen } \alpha}{\sqrt{1 - 2\tilde{M} \text{sen}^2 \alpha}} \right), \quad (4.13)$$

y sí depende de la posición orbital.

El valor  $R + B$  que es constante a lo largo de la órbita elegida, satisface:

$$R + B = 2,00003452.$$

Nótese que no solo se ha eliminado la dependencia explícita de la posición angular  $\alpha$  de las expresiones para  $M$ ,  $r_e$  y  $D$ , sino que, gracias a las ecuaciones (3.34) y (3.35) también es posible estimar la posición angular que un emisor debería tener en el firmamento, suponiendo que el objeto compacto está centrado en el origen del sistema de coordenadas. Se consideraron dos estrategias para realizar esta estimación. En la primera, se parte del corrimiento de frecuencia que presentaría un emisor arbitrario para estimar su posición angular y, posteriormente, el cociente entre la masa del objeto compacto y la distancia al observador. En la segunda, se fija inicialmente una posición angular arbitraria, se calcula el corrimiento de frecuencia correspondiente, y a partir de este se estiman dichos cocientes.

Se puede obtener la diferencia de corrimientos a partir de la suma y de un corrimiento de frecuencia arbitrario. Considerando un emisor con velocidad y corrimientos:

$$v_1 = 1000 \frac{km}{s} \implies z_1 = 0,003333564. \quad (4.14)$$

De donde la diferencia de corrimiento toma la forma:

$$|R - B|_1 = |(R_1 + B_1) - 2R_1| = 0,00663676. \quad (4.15)$$

Se toma el valor absoluto ya que en las expresiones halladas la diferencia de corrimientos siempre aparece al cuadrado, con excepción de la expresión para  $D$  (3.36), pero ahí la diferencia surge de la raíz cuadrada de  $\text{sen}^2 \alpha$  (3.35), donde sí aparece al cuadrado y, por lo tanto, se toma el valor positivo. De hecho, se usa el  $\text{sen} \alpha$  como sigue: de las expresiones (3.34) y (3.35) se tiene

$$\text{sen} \delta_1 = \frac{r_e}{D} \text{sen} \alpha = \frac{\frac{M}{D}}{\tilde{M}} \sqrt{\frac{3(R_1 - B_1)^2(R_1 + B_1)^2}{((R_1 + B_1)^2 - 4)((R_1 + B_1)^2 + 2(R_1 - B_1)^2)}} = 2,16811877 \times 10^{-8}.$$

Por lo tanto, el cociente de la masa del objeto compacto y la distancia al observador, obtenido a partir de (3.38) toma el siguiente valor:

$$\left(\frac{MG}{Dc^2}\right)_1 = 2,54844623 \times 10^{-13}.$$

Y el cociente del radio de las órbitas y la distancia al observador (3.39):

$$\left(\frac{r_e}{D}\right)_1 = 2,19446723 \times 10^{-8}.$$

Con este último valor igual a:

$$\frac{r_e}{D} = \frac{\frac{M}{D}}{\tilde{M}} = 2,19446723 \times 10^{-8}.$$

Ahora, la siguiente estimación se hizo a partir de elegir una posición y estimar la diferencia de corrimientos usando (4.13). Sea un emisor en la siguiente posición orbital  $\alpha$ , entonces le corresponde la diferencia de corrimientos:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3} \implies R_2 - B_2 = 0,00590262. \quad (4.16)$$

Y al obtener  $\text{sen} \delta$  de la misma forma que en el caso anterior, con la diferencia de que se conoce  $\alpha$ , se encuentra:

$$\text{sen} \delta_2 = \frac{\frac{M}{D}}{\tilde{M}} \text{sen} \frac{\pi}{3} = 1,90046437 \times 10^{-8}.$$

Por último, se encuentran los cocientes correspondientes:

$$\left(\frac{M}{D}\right)_2 = 2,54844663 \times 10^{-13} \quad , \quad \left(\frac{r_e}{D}\right)_2 = 2,19446723 \times 10^{-8} \quad (4.17)$$

El primer método para hacer estimaciones, que consiste en hacer observaciones directas, parece más prometedor para encontrar los parámetros  $M$ ,  $r_e$  o  $D$  de forma individual siempre y cuando se tengan valores para la rapidez de corrimiento. En el segundo método, que consiste en variar el parámetro  $\alpha$ , no se necesita de la rapidez de corrimiento para estimar los dos cocientes, sino que solo es necesario tener algún valor para  $\tilde{M}$ , que puede obtenerse a partir de observar el corrimiento

de un emisor central (aunque no puede otorgarse un valor para la rapidez de corrimiento sin el radio de la órbita  $r_e$ ). En el primero no se necesita más que dos corrimientos que satisfagan la condición (3.29), que puede enunciarse como: la suma de un corrimiento al rojo  $R = 1 + z_R$  y un corrimiento al azul  $B = 1 + z_B$ , debe ser igual a dos veces el corrimiento de un emisor en la línea de visión. Aunque no pueda distinguirse si los corrimientos de frecuencia  $R$  y  $B$  están en la misma órbita, puede hacerse un análisis estadístico, con la ventaja de tomar los emisores de casi todo el disco, salvo aquellos donde el corrimiento de frecuencia se maximiza o minimiza, pues en estos puntos la rapidez de frecuencia se anula, y en la línea de visión la diferencia de corrimientos  $R - B$  también se anula, imposibilitando una estimación de  $D$  observando el corrimiento de un emisor en la línea de visión.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El principal aporte de este trabajo es la expresión hallada para la masa  $M$ , que a diferencia de la presentada en trabajos previos [9] es válida para cualquier punto de una órbita circular. Para ello, se consideró la suma y la diferencia de corrimientos de frecuencia correspondientes a dos emisores ubicados en posiciones opuestas dentro de la misma órbita circular. Una limitante del método, es que la posición orbital de un emisor en el disco de acreción no es observable directamente, y no se dispone de un método para estimarla. Sin embargo, puede ocultarse la dependencia explícita del parámetro  $\alpha$ , al combinar la suma y resta de corrimientos de frecuencia opuestos con el producto  $r_e \frac{dz}{dt}$  sin que la información que proporciona  $\alpha$  se pierda.

Se logró hallar una expresión analítica para la masa  $M$  del objeto compacto que se estudia, el radio de las órbitas de los objetos observados  $r_e$ , y la distancia entre el observador y el objeto compacto  $D$ . Dado que se trata de un sistema astrofísico en evolución, es posible estimar la derivada temporal del corrimiento de frecuencia a partir de observaciones sucesivas, aproximando  $\frac{dz}{dt} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t}$ .

Debido a la forma que tienen las expresiones para el radio de las órbitas  $r_e$  (3.31), la masa del objeto compacto  $M$  (3.32), y la distancia al observador (3.36), están sujetas a dos restricciones. En primer lugar, al depender de la rapidez de corrimiento, no es posible estimar de forma independiente ninguno de los tres parámetros sin contar con valores de esta observable. En segundo lugar, estas expresiones no pueden evaluarse en los lugares donde el corrimiento de frecuencia se maximiza o minimiza, pues en estos puntos de la órbita la rapidez de corrimiento se anula, y los tres parámetros son inversamente proporcionales a la rapidez de corrimiento. A pesar de estas limitaciones, es posible obtener los cocientes  $\frac{M}{D}$  y  $\frac{r_e}{D}$  si se cuenta con una estimación de  $\tilde{M}$ , mediante la variación del parámetro  $\alpha$ , como se mostró en el método descrito en el capítulo 4. No obstante, el método original, que consiste en hacer observaciones directas con la posibilidad de usar de referencia el corrimiento de frecuencia de un emisor que se pueda identificar como central, resulta más general y, en principio, más directo para realizar estimaciones pese a las restricciones.

La expresión analítica para  $D$  presenta una singularidad al evaluarse usando el punto de la órbita que coincide con línea de visión (LOS), debido a la diferencia de corrimientos de frecuencia  $R-B$  se anula en ese punto. Además, a la hora de observar no puede distinguirse con seguridad la posición problemática en el firmamento, por lo que la estimación de  $D$  se dificulta al considerar corrimientos de frecuencia correspondientes a los puntos cercanos a esa posición. Esto puede resolverse estimando la masa usando los puntos de emisión sistémicos y estimando la relación masa-distancia en cualquier otro punto (por ejemplo, los de mayor corrimiento), al sustituir un resultado en otro.

Considerando orbitas circulares ecuatoriales, este método no se limita al estudio de candidatos a agujeros negros, sino a cualquier sistema astrofísico con un campo gravitacional que puede ser

modelado por la métrica de Schwarzschild y orbitado por partículas de prueba, por ejemplo: objetos compactos rodeados por gas (como nubes de vapor de agua) o estrellas, supernovas de remanente esférico, entre otros.

# Bibliografía

- [1] S. W. HAWKING, *Gravitationally collapsed objects of very low mass*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 152, 75–78 (1971).
- [2] D. DASGUPTA, R. LAHA, A. RAY, *Low Mass Black Holes from Dark Core Collapse*, Physical Review Letters. 126, 141105 (2021).
- [3] F. MIRABEL, *The formation of stellar black holes*, New Astronomy Reviews. 78, 1-15 (2017).
- [4] P. SCHNEIDER, *Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction*, Springer (2017).
- [5] O. LÓPEZ-CRUZ, C. AÑORVE, M. BIRKINSHAW, D. M. WORRALL, H. J. IBARRA-MEDEL, W. A. BARKHOUSE, J. P. TORRES-PAPAQUI, V. MOTTA, *The Brightest Cluster Galaxy in A85: The largest core known so far*, The Astrophysical Journal Letters. 795, L31 (2014).
- [6] J. KORMENDY, D. RICHSTONE, *Inward Bound – The search for supermassive black holes in galactic nuclei*, Annual Reviews Astronomics Astrophysics. 33, 581-624 (1995).
- [7] M. P. HOBSON, G. EFSTATHIOU, A. N. LASENBY, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press (2006).
- [8] A. TARCHI, *AGN and Megamasers*, in Proceedings of the International Astronomical Union, Vol. 8, Symposium S287, p. 1 (2012).
- [9] M. MOMENNIA, P. BANERJEE, A. HERRERA-AGUILAR, U. NUCAMENDI, *Schwarzschild black hole and redshift rapidity: a new approach towards measuring cosmic distances*, The European Physical Journal C. 84, 583 (2024).
- [10] U. NUCAMENDI, A. HERRERA-AGUILAR, R. LIZARDO-CASTRO, O. LÓPEZ-CRUZ, *Towards the Gravitational Redshift Detection in NGC 4258 and the Estimation of its Black Hole Mass-to-Distance Ratio*, The Astrophysical Journal Letters . 917, L14 (2021).
- [11] CODATA TASK GROUP ON FUNDAMENTAL CONSTANTS, *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2022*, Reviews of Modern Physics. 97, 025002 (2025).
- [12] D. W. PESCE, J. A. BRAATZ, M. J. REID, A. G. RIESS, D. SCOLNIC, J. J. CONDON, F. GAO, C. HENKEL, C. M. V. IMPELLIZZERI, C. Y. KUO, K. Y. LO, *The Megamaser Cosmology Project. XIII. Combined Hubble Constant Constraints*, The Astrophysical Journal Letters. 891, L1 (2020).
- [13] M. J. REID, D. W. PESCE, A. G. RIESS, *An Improved Distance to NGC 4258 and Its Implications for the Hubble Constant*, The Astrophysical Journal Letters. 886, L27 (2019).
- [14] A. L. ARGON, L. J. GREENHILL, M. J. REID, J. M. MORAN, E. M. L. HUMPHREYS, *Toward a New Geometric Distance to the Active Galaxy NGC 4258. I. VLBI Monitoring of Water Maser Emission*, The Astrophysical Journal. 659, 1040-1062 (2007).