



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Aspectos cuánticos de sistemas mecánicos no  
conservativos

**Tesis**

presentada para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias (Física Aplicada)**

por

Nephtalí Eliceo Martínez Pérez

asesorado por

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue., a 31 de mayo de 2017



**Título:** Aspectos cuánticos de sistemas mecánicos no conservativos

**Estudiante:** NEPHTALÍ ELICEO MARTÍNEZ PÉREZ

JURADO

---

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada  
Presidente

---

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Secretario

---

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla  
Vocal

---

Dr. Alfredo Herrera Aguilar  
Suplente

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Asesor



## Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor de tesis por su gran labor guiando el rumbo de este trabajo y su disposición para resolver cualquier duda, a los excelentes profesores que he tenido en los cursos de maestría y licenciatura, a mi familia por su apoyo incondicional así como al CONACYT por el apoyo económico que me proporcionó durante la realización de mis estudios de maestría.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. El sistema de Caldirola-Kanai</b>	<b>7</b>
2.0.1. Variables físicas . . . . .	7
2.1. Oscilador amortiguado unidimensional . . . . .	8
2.2. Cuantización canónica . . . . .	10
2.3. El Principio de Incertidumbre . . . . .	12
<b>3. El sistema de Bateman</b>	<b>15</b>
3.1. Cuantización canónica . . . . .	16
3.1.1. Eigenfunciones de $H_B$ . . . . .	16
3.1.2. Eigenvalores de energía . . . . .	17
<b>4. Acción de Galley</b>	<b>19</b>
4.1. Límite físico . . . . .	20
4.2. Formulación hamiltoniana . . . . .	21
4.3. Transformaciones canónicas . . . . .	22
4.3.1. Transformaciones continuas . . . . .	24
4.4. Oscilador armónico amortiguado . . . . .	24
4.5. Acerca de la cuantización canónica . . . . .	26
<b>5. Sistema de Galley cuántico</b>	<b>27</b>
5.1. Evolución temporal . . . . .	28
5.2. Oscilador amortiguado . . . . .	28
5.2.1. Conmutadores dependientes del tiempo . . . . .	29
5.2.2. Eigenvalores de energía . . . . .	30
5.3. Implementación física . . . . .	32
<b>6. Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>A. Identidad de Jacobi</b>	<b>37</b>
A.1. Paréntesis básicos constantes . . . . .	38
<b>B. Variables físicas</b>	<b>39</b>

<b>C. Partícula amortiguada</b>	<b>41</b>
C.1. Hamiltoniana dependiente del tiempo . . . . .	41
C.2. Hamiltoniana de Galley . . . . .	42

# Capítulo 1

## Introducción

Las fuerzas *potenciales* son de la forma  $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\partial U/\partial \dot{\vec{r}}) - \partial U/\partial \vec{r}$ , donde  $U = U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  y representan interacciones de *acción a distancia*. Aquellas que no se pueden expresar de esta manera son *no potenciales* y representan interacciones *de contacto* [1]. Las fuerzas conservativas son tales que  $U$  no depende ni de velocidades ni del tiempo, es decir,  $\vec{F} = \nabla U$ . Las fuerzas, tanto potenciales como no potenciales, que dependen de posiciones, velocidades y del tiempo son, en general, *no conservativas* [2]. La fricción lineal  $\vec{F} = \gamma \dot{\vec{r}}$  es un ejemplo de fuerza no conservativa no potencial. Una fuerza externa dependiente del tiempo es no conservativa pero sí es potencial  $\vec{F}(t) = \nabla(\vec{r} \cdot \vec{F}(t))$  [3]. En este trabajo trataremos exclusivamente fuerzas no conservativas no potenciales.

Una consecuencia inmediata de la acción de las fuerzas no conservativas es la variación de la energía mecánica del sistema. La definición elemental de la energía mecánica de un sistema de  $n$  partículas puntuales es [3]

$$E \equiv \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |\dot{\vec{r}}_i|^2 + V(\vec{r}). \quad (1.1)$$

Para los sistemas conservativos se cumple, en general, que  $E = \sum_{I=1}^N \dot{q}^I \partial L / \partial \dot{q}^I - L$  y  $E = H$  donde  $L$  y  $H$  son la lagrangiana y la hamiltoniana del sistema, respectivamente, y las  $q^I$  son las coordenadas generalizadas. Sin embargo, en los siguientes capítulos se describirán sistemas no conservativos en el contexto del formalismo hamiltoniano para los que estas relaciones no son válidas y se debe recurrir a la definición básica (1.1).

Las fuerzas no potenciales, establecidas experimentalmente, son, en general, excluidas en las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la mecánica clásica. Esto no se considera un defecto de dichas formulaciones bajo el argumento de que las interacciones no potenciales son el resultado conjunto de una cantidad enorme de interacciones potenciales entre los componentes fundamentales de la materia [1, 4]. Los modelos *sistema-ambiente* [5, 6, 7] se basan en esta idea. Éstos recrean una dinámica no conservativa a partir de un sistema conservativo formado por un subsistema con pocos grados de libertad interactuando con otro con una cantidad mucho mayor, o infinita, de grados de libertad, este último denominado *ambiente*.

En general, las fuerzas no conservativas no afectan el número de constricciones y, por lo

tanto, tampoco el número de coordenadas generalizadas [2], esto permite incluir fuerzas no conservativas, a mano, en las ecuaciones de Euler-Lagrange o de Hamilton convencionales. Por ejemplo, a nivel lagrangiano

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^I} = \mathcal{D}_I, \quad (1.2)$$

donde las  $\mathcal{D}_I$  son las fuerzas no conservativas expresadas en coordenadas generalizadas. Las ecuaciones de Hamilton correspondientes son (suponiendo que el sistema es regular)

$$\dot{q}^I = \frac{\partial H}{\partial p_I}, \quad \dot{p}_I = -\frac{\partial H}{\partial q^I} + \mathcal{D}_I, \quad (1.3)$$

o, usando el paréntesis de Poisson

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \sum_{I=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_I} \mathcal{D}^I + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.4)$$

donde  $F(q^I, p_I, t)$  una función arbitraria del espacio fase y del tiempo.

El sistema no conservativo en el que estamos interesados principalmente es el oscilador amortiguado. Éste admite una representación en el formalismo estándar con la hamiltoniana de Caldirola-Kanai,  $H_{CK}(q, p, t)$ , la cual depende explícitamente del tiempo [8, 9]. No obstante, esta hamiltoniana es de las llamadas *no estándar*, porque la dependencia temporal aparece no sólo en el potencial sino en el término cinético, incluso en la definición del momento canónico.

También contamos con la hamiltoniana de Bateman [10] o de Bateman-Feshbach-Morse [11],  $H_B(x, p_x, y, p_y)$ , ésta no depende del tiempo pero incorpora un grado de libertad adicional. Las ecuaciones de movimiento del sistema de Bateman corresponden a dos osciladores, uno amortiguado y otro ‘amplificado’, este último con un coeficiente de fricción negativo. El sistema de Bateman es considerado, usualmente, como el *sistema-ambiente* más simple [5], con la energía total (conservada) dada por  $H_B$ . Sin embargo, nuestro punto de vista es que esta interpretación no es la más adecuada. Por ejemplo, la energía total, en ausencia de interacciones, debería ser la suma de las energías de los sistemas independientes representados por  $x$  y  $y$ , pero ocurre que, si una de ellas es cero, también  $H_B$  es cero.

Por otra parte, tenemos el formalismo lagrangiano de Galley [7, 12]. Éste se presenta en el contexto de un principio variacional especialmente formulado para problemas de valores iniciales. Lo remarcable de la teoría de Galley es que permite incorporar interacciones no potenciales mucho más complejas que el amortiguamiento lineal. De hecho, se puede ver como una generalización del sistema de Bateman, con la diferencia de que en este formalismo se reconoce que sólo las funciones de ciertas coordenadas representan cantidades físicas.

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de la teoría cuántica correspondiente a estas formulaciones hamiltonianas para sistemas no conservativos. El considerar esta clase de interacciones en un contexto cuántico no debe resultar demasiado extraño. De hecho, si

aceptamos la idea de que los efectos no conservativos tienen un origen fundamentalmente conservativo, debería existir una equivalencia, en cuanto al sistema no conservativo con-  
 cierne, entre una descripción basada en un modelo *sistema-ambiente* y una descripción  
 efectiva con pocos grados de libertad.

Ahora bien, uno podría preguntarse acerca de la posibilidad de incluir interacciones no  
 potenciales en el formalismo estándar de la mecánica cuántica sin tener que recurrir a la  
 cuantización de alguno de los sistemas que hemos mencionado. En este sentido, se consi-  
 deró en [13] la posibilidad de implementar la cuantización de ciertos sistemas disipativos  
 modificando las ecuaciones de Heisenberg en forma análoga a (1.4), esto es

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \frac{[\mathbf{F}(t), \mathbf{H}(t)]}{i\hbar} + \sum_{I=1}^N \frac{[\mathbf{q}^I(t), \mathbf{F}(t)]}{i\hbar} \mathcal{D}_I(t), \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{H}(t)$  es el operador hamiltoniano conservativo (pero ahora dependiente del tiem-  
 po) y  $\mathcal{D}_I(t) \equiv \mathcal{D}_I(\mathbf{x}^I(t), \mathbf{p}_J(t))$  son los operadores que a nivel clásico corresponden a  
 fuerzas no conservativas. Sin embargo, se mostró en [14] que, cuando las  $\mathcal{D}_I$  corresponden  
 a interacciones no potenciales, estas ecuaciones son incompatibles con los conmutadores  
 básicos

$$[\mathbf{q}^I(t), \mathbf{q}^J(t)] = 0, \quad (1.6)$$

$$[\mathbf{q}^I(t), \mathbf{p}_J(t)] = i\hbar\delta_J^I, \quad (1.7)$$

$$[\mathbf{p}_I(t), \mathbf{p}_J(t)] = 0. \quad (1.8)$$

En efecto, derivando (1.7) respecto al tiempo y usando (1.5) y la identidad de Jacobi se  
 encuentra

$$0 = [\mathbf{x}^I(t), \mathcal{D}^J(t)]. \quad (1.9)$$

Esta ecuación implica, dado que  $\{\mathbf{q}^J(t)\}$  es un conjunto completo de operadores que con-  
 mutan, que las  $\mathcal{D}_I(t)$  dependen sólo de los operadores de posición,  $\mathcal{D}_I(t) = \mathcal{D}_I(\mathbf{q}^J(t))$ .  
 Haciendo lo mismo con (1.8) se obtiene

$$0 = [\mathcal{D}_I(t), \mathbf{p}_J(t)] + [\mathbf{p}_I(t), \mathcal{D}_J(t)]. \quad (1.10)$$

Esta expresión implica que  $\partial\mathcal{D}_J/\partial q^I = \partial\mathcal{D}_I/\partial q^J$ , que es la condición necesaria y suficiente  
 para la existencia de un función  $V(q^J)$  tal que  $\mathcal{D}_I = -\partial V/\partial q^I$ .

En resumen, las ecuaciones (1.5) y los conmutadores básicos constantes sólo son com-  
 patibles cuando las interacciones son todas potenciales. Este análisis sugiere que, cuando  
 el sistema es no conservativo, los conmutadores de los operadores de Heisenberg son, en  
 general, dependientes del tiempo. De hecho, esta característica parece ineludible pues apa-  
 rece incluso en la imagen de Schrödinger en el caso del sistema de Caldirola-Kanai. La  
 cuantización que proponemos de la teoría de Galley, al igual que otros esquemas de cuanti-  
 zación en la imagen de Heisenberg, por ejemplo [15], incorporan este resultado de manera  
 consistente.

El orden de este trabajo es como sigue. En el Capítulo 2 se recopilan y discuten algunos  
 resultados tanto clásicos como cuánticos del sistema de Caldirola-Kanai. Además, se pre-  
 senta la solución de Schuch [16] al problema de la violación del Principio de Incertidumbre.

En el Capítulo 3 se retoman algunos resultados acerca de la cuantización canónica del sistema de Bateman y discutimos algunos aspectos relacionados con la interpretación física de la teoría.

En el Capítulo 4 se presenta la formulación lagrangiana de la mecánica para sistemas no conservativos de Galley. Aclaremos un aspecto controversial del formalismo, el llamado *límite físico*, y desarrollamos la formulación hamiltoniana. Cabe aclarar que Galley perfiló en [7] una hamiltoniana que, sin embargo, no corresponde a una transformada de Legendre de la lagrangiana y produce resultados inconsistentes.

En el Capítulo 5 se propone un esquema de cuantización no canónico del formalismo hamiltoniano desarrollado en el Capítulo 4. Este esquema de cuantización es similar a la imagen de Heisenberg de la mecánica cuántica y se presenta como una salida a las dificultades que observamos en la cuantización canónica.

Finalmente, queremos señalar que este trabajo, como la gran mayoría de la literatura consultada, se apega al aspecto teórico del problema. No obstante algunas aplicaciones prácticas, tales como, circuitos RLC mesoscópicos y efecto túnel con disipación se tratan en [17] y [6] respectivamente.

# Capítulo 2

## El sistema de Caldirola-Kanai

Sea  $L(q^I, \dot{q}^I)$  un sistema conservativo con  $N$  grados de libertad  $I = 1, 2, \dots, N$ . Ahora considere la lagrangiana

$$\tilde{L}(q^I, \dot{q}^I, t) = e^{\gamma t} [L(q^I, \dot{q}^I) + q^I f_I(t)], \quad (2.1)$$

donde las  $f_I(t)$  son funciones sólo del tiempo y  $\gamma > 0$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son equivalentes a<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) + \gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} - \frac{\partial L}{\partial q^I} = f_I(t). \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones diferenciales inhomogéneas llevan un término proporcional a las velocidades generalizadas provisto que  $L$  sea cuadrática en  $\dot{q}^I$ .

Por ejemplo, sea  $\tilde{L} = e^{\gamma t} (\frac{m}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - V(r))$ . La ecuación de movimiento es  $\dot{\vec{p}} + \gamma \vec{p} + \hat{r} \frac{dV}{dr} = 0$ , donde  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ . Un resultado inmediato es la dependencia temporal del momento angular  $\vec{J}(t) = e^{-\gamma t} \vec{J}(t_0)$ . En [19] se realizó un estudio acerca de las órbitas de este problema.

La formulación hamiltoniana se obtiene de la manera usual:  $\tilde{H} \equiv \tilde{p}_I \dot{q}^I - \tilde{L}$  donde  $\tilde{p}_I \equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^I}$ . Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{q}^I = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_I}, \quad \dot{\tilde{p}}_I = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^I}. \quad (2.3)$$

### 2.0.1. Variables físicas

Motivados por la referencia [16], que se retomará en la Sección 2.3, denominamos *físicas* a las variables  $(q^I, p_I \equiv \partial L / \partial \dot{q}^I = e^{-\gamma t} \tilde{p}_I)$ , en distinción de las *canónicas*  $(q^I, \tilde{p}_I)$ . Estas coordenadas no están relacionadas por una transformación canónica debido a que  $\{q^I, p_J\}_{q\tilde{p}} = e^{-\gamma t} \delta_J^I$ .

---

<sup>1</sup>Las ecuaciones E-L originales están multiplicadas por un factor  $e^{\gamma t}$ . En casos como el del oscilador amortiguado (no forzado), con este factor dependiente del tiempo la ecuación de Euler-Lagrange tiene la forma autoadjunta [18]

**CAPÍTULO 2. EL SISTEMA DE CALDIROLA-KANAI**  
**2.1. OSCILADOR AMORTIGUADO UNIDIMENSIONAL**

---

Podemos escribir las ecuaciones dinámicas en las variables físicas mediante una transformación general de coordenadas

$$q^I \rightarrow q^I, \quad \tilde{p}_I \rightarrow p_I = e^{-\gamma t} \tilde{p}_I, \quad t \rightarrow t. \quad (2.4)$$

La regla de la cadena conduce a

$$\frac{\partial}{\partial q^I} \rightarrow \frac{\partial}{\partial q^I}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_I} \rightarrow e^{-\gamma t} \frac{\partial}{\partial p_I}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \gamma \sum_I p_I \frac{\partial}{\partial p_I}. \quad (2.5)$$

Sea  $F$  una función del espacio fase canónico y del tiempo,  $F(q^I, \tilde{p}_I, t) = F(q^I, e^{-\gamma t} p_I, t)$ . Usado (2.3) y (2.5),

$$\frac{dF}{dt} = \sum_I \left[ \frac{\partial F}{\partial q^I} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_I} - \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_I} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^I} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_I \left[ \frac{\partial F}{\partial q^I} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_I} e^{-\gamma t} - \frac{\partial F}{\partial p_I} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^I} e^{-\gamma t} - \gamma p_I \frac{\partial F}{\partial p_I} \right] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Notando que  $e^{-\gamma t} \tilde{H} = (e^{-\gamma t} \tilde{p}_I) \dot{q}^I - L = p_I \dot{q}^I - L = H(q^I, p_I)$  ( $H$  es la hamiltoniana conservativa) obtenemos finalmente

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{qp} - \gamma \sum_I p_I \frac{\partial F}{\partial p_I} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.7)$$

donde  $\{, \}_{qp}$  denota el paréntesis de Poisson en las coordenadas  $(q^I, p_I)$ .

## 2.1. Oscilador amortiguado unidimensional

En este caso

$$\tilde{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) e^{\gamma t}. \quad (2.8)$$

La hamiltoniana correspondiente es

$$H_{CK} = e^{-\gamma t} \frac{\tilde{p}^2}{2m} + e^{\gamma t} \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 \quad (2.9)$$

y se conoce, principalmente en el contexto cuántico, como el sistema de Caldirola-Kanai [8]. De acuerdo con el capítulo anterior, la energía mecánica del oscilador no está dada directamente por la hamiltoniana sino por

$$E \equiv \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 = e^{-\gamma t} H_{CK}. \quad (2.10)$$

Antes de revisar la teoría cuántica de este sistema veamos algunos resultados clásicos interesantes.

## CAPÍTULO 2. EL SISTEMA DE CALDIROLA-KANAI

### 2.1. OSCILADOR AMORTIGUADO UNIDIMENSIONAL

#### Transformación canónica

Este problema se puede convertir en uno mucho más conocido mediante la transformación canónica dependiente del tiempo [20]

$$Q = e^{\frac{\gamma}{2}t}q, \quad P = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\tilde{p} + m\frac{\gamma}{2}e^{\frac{\gamma}{2}t}q, \quad (2.11)$$

La nueva hamiltoniana es

$$K = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}Q^2 \quad (2.12)$$

y, dependiendo del valor de  $\omega$ , puede corresponder a un oscilador armónico simple, una partícula libre o una partícula amortiguada. Esta transformación nos permite identificar inmediatamente una constante de movimiento

$$K = e^{-\gamma t} \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}q^2 e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{2}\tilde{p}q = \frac{m}{2}e^{\gamma t} (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2 + \gamma q\dot{q}). \quad (2.13)$$

#### La ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación correspondiente al problema (2.9) es

$$\frac{e^{-\gamma t}}{2m} \left( \frac{\partial S_{CK}}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 e^{\gamma t} q^2 + \frac{\partial S_{CK}}{\partial t} = 0. \quad (2.14)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en [21], pasamos a la variable  $u = e^{\frac{\gamma}{2}t}q$ , entonces

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_{CK}}{\partial u} \right)^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 u^2 + \frac{\partial S_{CK}}{\partial t} + \frac{\gamma}{2}u \frac{\partial S_{CK}}{\partial u} = 0. \quad (2.15)$$

Sustituyendo  $S_{CK}(u, t) = h(u) - \xi t$  en esta expresión se encuentra

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dh}{du} + m\frac{\gamma}{2}u \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}u^2 = \xi. \quad (2.16)$$

Esta ecuación se puede integrar directamente para hallar  $h(u)$ . El resultado final, para  $\omega > 0$ , es

$$\begin{aligned} S_{CK}(u, t, \xi) &= - \int \sqrt{2m\xi - m^2\omega^2 u^2} du - \frac{m\gamma}{4}u^2 - \xi t \\ &= -\frac{\xi}{\omega} \left[ \sin^{-1} \left( \frac{m\omega}{\sqrt{2m\xi}} u \right) + \frac{m\omega}{\sqrt{2m\xi}} u \left( 1 - \frac{m\omega^2}{2\xi} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{m\gamma}{4}u^2 - \xi t. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando la expresión  $\partial S_{CK}/\partial \xi = -t_0$ , donde  $t_0$  es una constante, se encuentra

$$q(t) = q(t_0)e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} \cos[\omega(t-t_0)] \quad (2.18)$$

donde hemos definido  $\xi = \frac{m}{2}\omega^2 q^2(t_0)e^{\gamma t_0}$ . Además, se verifica que

$$\tilde{p}(t) \equiv \frac{\partial S_{CK}}{\partial q} = e^{\frac{\gamma}{2}t} \frac{\partial S_{CK}}{\partial u} = m\dot{q}(t)e^{\gamma t}. \quad (2.19)$$

## 2.2. Cuantización canónica

Los operadores de posición  $\mathbf{q}$  y momento  $\tilde{\mathbf{p}}$  canónicos satisfacen, por definición,  $[\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}] = i\hbar$ . La ecuación de Schrödinger es, en la representación de las posiciones,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\gamma t} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + e^{\gamma t} \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 \right] \psi(q, t). \quad (2.20)$$

Para resolver esta ecuación vamos a seguir aproximadamente el procedimiento descrito en [21]. Otros métodos interesantes se describen en [20, 22, 23, 24].

Primero realizamos el cambio de variables  $(q, t) \rightarrow (y = e^{\gamma t/2} q, t)$ . Entonces la ecuación (2.20) se transforma en

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} y^2 \right] \psi(y, t) = i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{2} y \frac{\partial}{\partial y} \right] \psi(y, t). \quad (2.21)$$

Sustituyendo  $\psi(y, t) = e^{\frac{\xi t}{i\hbar}} \phi(y)$ , donde  $\xi$  una constante, y simplificando se obtiene

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} y^2 - \frac{i\hbar\gamma}{2} y \frac{d}{dy} \right] \phi(y) = \xi \phi(y) \quad (2.22)$$

o, en términos de la variable adimensional  $z = \left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} y$ ,

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + i\frac{\gamma}{\omega_0} z \frac{d}{dz} + \left( \frac{2\xi}{\hbar\omega_0} - z^2 \right) \right] \phi(z) = 0. \quad (2.23)$$

Para que las funciones de onda sean normalizables se impone la condición de frontera  $\lim_{x \rightarrow \infty} |\phi| = 0$ . Entonces se proponen soluciones de la forma

$$\phi(z) = \exp[-\kappa z^2/2] \theta(z). \quad (2.24)$$

La única condición sobre  $\kappa$  es que su parte real sea positiva. Sustituyendo (2.24) en (2.23) se obtiene la ecuación para  $\theta(z)$ ,

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - 2z \left( \kappa - i\frac{\gamma}{2\omega_0} \right) \frac{d}{dz} + \left( \frac{2\xi}{\hbar\omega_0} - \kappa + \left( \kappa^2 - i\frac{\gamma}{\omega_0} \kappa - 1 \right) z^2 \right) \right] \theta(z) = 0. \quad (2.25)$$

En el caso  $2\omega_0 > \gamma$  podemos elegir  $\kappa = \frac{1}{\omega_0} (\omega + i\frac{\gamma}{2})$ , donde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$ . Con esta elección la ecuación se reduce a

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{\omega}{\omega_0} \frac{d}{dz} + \left( \frac{2\xi}{\hbar\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0} - i\frac{\gamma}{2\omega_0} \right) \right] \theta(z) = 0 \quad (2.26)$$

o bien

$$\left[ \frac{d^2}{dv^2} - 2v \frac{d}{dv} + 2n \right] \theta(v) = 0 \quad (2.27)$$

**CAPÍTULO 2. EL SISTEMA DE CALDIROLA-KANAI**  
2.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

donde  $v = (\omega/\omega_0)^{\frac{1}{2}} z$  y  $2n = 2\xi/\hbar\omega - 1 - i\gamma/2\omega$ . Cuando  $n$  es un entero positivo o cero las soluciones de esta ecuación son los polinomios de Hermite  $H_n$ . Entonces

$$\xi_n = (n + 1/2) \hbar\omega + i\hbar\gamma/4 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Las funciones de onda son ortogonales y se normalizan con un factor que no depende del tiempo

$$\psi_n(q, t) = \left( \frac{m\omega e^{\gamma t}}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{-i(n+1/2)\omega t}}{\sqrt{2^n n!}} \exp \left[ - \left( 1 + i \frac{\gamma}{2\omega} \right) \frac{m\omega}{2\hbar} e^{\gamma t} q^2 \right] H_n \left[ \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\gamma t}{2}} q \right]. \quad (2.29)$$

Las  $\psi_n(q, t)$  no son eigenfunciones del operador hamiltoniano. Esto se puede verificar calculando los elementos de matriz

$$\begin{aligned} \langle \psi_m(t) | \mathbf{H}_{CK} | \psi_n(t) \rangle &= \frac{\hbar\omega_0^2}{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right) \delta_{nm} + \frac{\hbar}{2} \left( i \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4\omega} \right) \sqrt{(m+2)(m+1)} e^{-2i\omega t} \delta_{n-2,m} \\ &\quad - \frac{\hbar}{2} \left( i \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{4\omega} \right) \sqrt{(n+2)(n+1)} e^{2i\omega t} \delta_{n+2,m}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por otro lado, de acuerdo con (2.10), el operador energía es (en la imagen de Schrödinger)

$$\mathbf{E}(t) = e^{-\gamma t} \mathbf{H}_{CK}. \quad (2.31)$$

Las eigenfunciones de energía (y también del hamiltoniano) son

$$\phi_n(q, t) = \left( \frac{m\omega_0 e^{\gamma t}}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp \left( - \frac{m\omega_0}{2\hbar} q^2 e^{\gamma t} \right) H_n \left( \left( \frac{m\omega_0}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\gamma t}{2}} q \right). \quad (2.32)$$

Estos eigenestados no son estacionarios porque, aunque  $\mathbf{E}(t)$  es proporcional al operador hamiltoniano, las soluciones de (2.20) no son eigenfunciones de  $\mathbf{H}_{CK}$ . Por otro lado, el espectro de energía es discreto y se atenúa con el tiempo [22]

$$E_n(t) = \hbar\omega_0 e^{-\gamma t} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.33)$$

En  $t = 0$  los estados de energía coinciden con los estados estacionarios del oscilador armónico simple de frecuencia  $\omega_0$ .

Ahora considere un estado arbitrario  $\psi(t)$ , el teorema de Ehrenfest nos dice que

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{q} \rangle = \frac{e^{-\gamma t}}{m} \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle = -m\omega_0^2 e^{\gamma t} \langle \mathbf{q} \rangle, \quad (2.34)$$

entonces

$$\frac{d^2 \langle \mathbf{q} \rangle}{dt^2} + \gamma \frac{d \langle \mathbf{q} \rangle}{dt} + \omega_0^2 \langle \mathbf{q} \rangle = 0, \quad (2.35)$$

es decir, el valor medio del operador de posición satisface la ecuación de movimiento clásica (en los estados  $\psi_n(t)$  trivialmente).

### 2.3. El Principio de Incertidumbre

En los estados  $\psi_n(t)$  los valores medios de los operadores de posición y momento son cero, mientras que

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle_{\psi_n(t)} = \frac{\hbar}{m\omega} e^{-\gamma t} (n + 1/2), \quad \langle \tilde{\mathbf{p}}^2 \rangle_{\psi_n(t)} = m\hbar \frac{\omega_0^2}{\omega} e^{\gamma t} (n + 1/2). \quad (2.36)$$

Por lo tanto

$$\sigma_{\mathbf{q}} \sigma_{\tilde{\mathbf{p}}} = \frac{\hbar \omega_0}{\omega} (n + 1/2) \quad (2.37)$$

donde  $\sigma_{\mathbf{F}} \equiv (\langle \mathbf{F}^2 \rangle - \langle \mathbf{F} \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ . En general, el conmutador  $[\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}] = i\hbar$  implica la relación de incertidumbre [25]

$$\sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\tilde{\mathbf{p}}} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.38)$$

En este problema el operador correspondiente al momento físico está dado por  $\mathbf{p} = m[\mathbf{q}, \mathbf{H}_{CK}]$  y se relaciona con el momento canónico a través de  $\mathbf{p} = e^{-\gamma t} \tilde{\mathbf{p}}$ . Entonces

$$[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar e^{-\gamma t} \quad (2.39)$$

y, por lo tanto,

$$\sigma_{\mathbf{q}} \sigma_{\mathbf{p}} \geq \frac{\hbar}{2} e^{-\gamma t}. \quad (2.40)$$

En la literatura se hace inmediatamente la observación de que este resultado constituye una violación del Principio de incertidumbre de la mecánica cuántica. Ahora bien, desde el punto de vista matemático no hay ninguna inconsistencia, las variables canónicas  $\mathbf{q}$  y  $\tilde{\mathbf{p}}$  satisfacen una relación de incertidumbre generalizada [25]. El problema viene, en todo caso, del establecimiento del Principio de Incertidumbre como un hecho empírico. Sólo en este sentido se puede interpretar este resultado como una violación de un principio fundamental de la mecánica cuántica.

Ante esta situación, algunos autores han implementado otros métodos de cuantización en busca de desigualdades compatibles con el Principio de incertidumbre [26]. Por otro lado, Schuch [16] ha sugerido que este problema se debe a una confusión entre las variables físicas y canónicas. Para él, no es la  $\psi(q, t)$  del sistema de Caldirola-Kanai la que debe interpretarse físicamente sino una  $\psi_f(q, t)$ , la función de onda física, definida en el espacio de Hilbert donde los operadores de posición y momento satisfacen  $[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar$ . Las funciones de onda está relacionadas por medio de

$$\psi_f(x, t) = [\psi(x, t)] e^{-\gamma t}. \quad (2.41)$$

Podemos dilucidar (2.41) a partir de consideraciones clásicas. Empecemos notando que se puede proceder a resolver la ecuación (2.14) sustituyendo  $S_{CK} = e^{\gamma t} S_f^2$ , esto conduce a

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_f}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 + \gamma S_f + \frac{\partial S_f}{\partial t} = 0. \quad (2.42)$$

## CAPÍTULO 2. EL SISTEMA DE CALDIROLA-KANAI

### 2.3. EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

---

Excepto por el término proporcional a  $\gamma$ , esta ecuación tiene la forma de la ecuación  $H - J$  para el oscilador armónico simple. Si definimos  $p \equiv \partial S_f / \partial q$ , entonces  $\tilde{p} = \partial S_{CK} / \partial q = e^{\gamma t} p$ , la misma relación entre momento canónico y físico. Entonces podemos considerar a (2.42) como la ecuación H-J para el oscilador amortiguado en coordenadas físicas.

Ahora bien, si las funciones de onda de Caldirola-Kanai y física se expresan como  $\psi(q, t) = \exp(\mathcal{S}_{CK}(q, t)/i\hbar)$  y  $\psi_f(q, t) = \exp(\mathcal{S}_f(q, t)/i\hbar)$  respectivamente, la consistencia en el régimen clásico sugiere que las fases están relacionadas por medio de  $\mathcal{S}_{CK} = e^{\gamma t} \mathcal{S}_f$ . Esta observación conduce inmediatamente a (2.41).

Uno puede preguntarse ahora qué ecuación satisface la función de onda física. En [16] se presenta a  $\psi_f(q, t)$  como solución de la ecuación de Schrödinger no lineal

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} q\psi - i\hbar\gamma\psi \ln \psi, \quad (2.43)$$

también conocida como ecuación de Schrödinger-Langevin [26, 27]. Sin embargo, si sustituimos  $\psi(x, t) = [\psi_f(x, t)]^{e^{\gamma t}}$  en (2.20) no obtenemos directamente (2.43), a menos que se cumpla la condición  $\psi_f(\partial^2 \psi_f / \partial q^2) = (\partial \psi_f / \partial q)^2$  o, equivalentemente  $\partial^2 \mathcal{S}_{CK} / \partial q^2 = 0$ , sin embargo, en general, esto no ocurre [28] y las razones por las que deba ser así en este caso no son claras.

---

<sup>2</sup>En [21] se presenta también la solución de la ecuación (2.14) por este camino.

**CAPÍTULO 2. EL SISTEMA DE CALDIROLA-KANAI**  
**2.3. EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE**

---

# Capítulo 3

## El sistema de Bateman

La lagrangiana de Bateman no depende explícitamente del tiempo pero incorpora otro grado de libertad<sup>1</sup>[10]

$$L_B = m \left[ \dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2} (xy - \dot{x}y) - \omega_0^2 xy \right]. \quad (3.1)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \ddot{y} - \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (3.2)$$

Aunque en la lagrangiana no es evidente, las ecuaciones de movimiento muestran que  $x$  y  $y$  son, en principio, las coordenadas de sistemas independientes. La elección de determinados valores iniciales puede crear una interdependencia entre  $x(t)$  y  $y(t)$ , lo cual se puede ver como una reducción de los grados de libertad. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones (3.2) admite una solución tal que  $y(t) = e^{\gamma t} x(t)$ . De hecho, si sustituimos  $y = e^{\gamma t} x$  en la lagrangiana de Bateman se obtiene, módulo una derivada total, la lagrangiana de Caldirola-Kanai [9, 10].

Por otro lado, la hamiltoniana está dada por

$$H_B = \frac{p_x p_y}{m} + \frac{\gamma}{2} (y p_y - x p_x) + m \omega^2 x y \quad (3.3)$$

donde

$$p_x = m\dot{y} - \frac{\gamma}{2} y, \quad p_y = m\dot{x} + \frac{\gamma}{2} x. \quad (3.4)$$

Una forma de relacionar el sistema de Bateman con el de Caldirola-Kanai, en la formulación hamiltoniana, es por medio de la transformación canónica dependiente del tiempo [5]<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + e^{-\gamma t} y - \frac{\gamma}{2m\omega^2} e^{-\gamma t} p_x \right), & Y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y - e^{\gamma t} x + \frac{\gamma}{2m\omega^2} p_x \right), \\ P_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} p_x + e^{\gamma t} p_y - m \frac{\gamma}{2} e^{\gamma t} x \right), & P_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( p_y - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{-\gamma t} p_x + m \frac{\gamma}{2} x \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Esta lagrangiana es invariante bajo las transformaciones  $x \rightarrow X = e^{-\alpha} x$ ,  $y \rightarrow Y = e^{\alpha} y$ , donde  $\alpha$  es una constante. La cantidad conservada correspondiente es  $x\dot{y} - \dot{x}y - \gamma xy$ . Esta simetría está relacionada con el grupo  $SU(1, 1)$  [29]. Las simetrías de la ecuación de movimiento del oscilador amortiguado y la acción del sistema de Caldirola-Kanai se estudian en [30]

La nueva hamiltoniana

$$K = e^{-\gamma t} \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} X^2 e^{\gamma t} - \left( e^{\gamma t} \frac{P_y^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} Y^2 e^{-\gamma t} \right). \quad (3.6)$$

corresponde a dos sistemas de Caldirola-Kanai (sin interacción) con coeficientes de fricción  $\pm\gamma$ . Uno puede deshacerse del sistema con coeficiente de fricción negativo (suponiendo que  $\gamma > 0$ ) imponiendo  $Y = 0 = P_y$ .

### 3.1. Cuantización canónica

Los conmutadores fundamentales son

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= 0, & [\mathbf{x}, \mathbf{p}_x] &= i\hbar, & [\mathbf{x}, \mathbf{p}_y] &= 0, \\ [\mathbf{y}, \mathbf{p}_x] &= 0, & [\mathbf{y}, \mathbf{p}_y] &= i\hbar, & [\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y] &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

El operador hamiltoniano correspondiente, ordenado simétricamente, es

$$\mathbf{H}_B = \frac{\mathbf{p}_x \mathbf{p}_y}{m} + m\omega^2 \mathbf{x} \mathbf{y} + \frac{\gamma}{4} (\mathbf{y} \mathbf{p}_y + \mathbf{p}_y \mathbf{y} - \mathbf{x} \mathbf{p}_x - \mathbf{p}_x \mathbf{x}). \quad (3.8)$$

#### 3.1.1. Eigenfunciones de $\mathbf{H}_B$

Para resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo seguiremos, esencialmente, las referencias [5, 31]. En primer lugar, notemos que la hamiltoniana (3.8) se puede escribir como la suma de dos operadores que conmutan:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{p}_x \mathbf{p}_y}{m} + m\omega^2 \mathbf{x} \mathbf{y}, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{\gamma}{2} (\mathbf{p}_y \mathbf{y} - \mathbf{x} \mathbf{p}_x + i\hbar). \quad (3.9)$$

Entonces un eigenket  $\phi$  de  $\mathbf{H}_B$  con eigenvalor  $\xi$  también satisface

$$\mathbf{H}_0 \phi = \hbar\omega n \phi, \quad \mathbf{H}_1 \phi = \hbar\gamma \lambda \phi, \quad (3.10)$$

tal que  $\xi = \hbar\omega n + \hbar\gamma \lambda$ , donde  $n$  y  $\lambda$  son adimensionales.

Es conveniente usar la representación definida en el espacio de funciones complejas  $f(x, p_y)$  por:  $\mathbf{x}f \equiv xf$ ,  $\mathbf{p}_x f \equiv -i\hbar \partial f / \partial x$ ,  $\mathbf{y}f \equiv i\hbar \partial f / \partial p_y$ ,  $\mathbf{p}_y f \equiv p_y f$ . Entonces las expresiones (3.10) equivalen a

$$i \left( m\omega x \frac{\partial}{\partial p_y} - \frac{p_y}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = n \phi, \quad (3.11)$$

$$i \left( x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + 1 \right) \phi = 2\lambda \phi, \quad (3.12)$$

---

<sup>2</sup>El generador de esta transformación se presenta en el siguiente capítulo en el contexto de la hamiltoniana de Galley.

o, en términos de  $z_{\pm} = x \pm ip_y/m\omega$ ,

$$z_- \frac{\partial \phi}{\partial z_-} - z_+ \frac{\partial \phi}{\partial z_+} = n\phi, \quad (3.13)$$

$$z_+ \frac{\partial \phi}{\partial z_+} + z_- \frac{\partial \phi}{\partial z_-} = (-2i\lambda - 1)\phi. \quad (3.14)$$

La solución general de (3.13) es

$$\phi(z_+, z_-) = z_+^{-n} g(z_+ z_-) \quad (3.15)$$

donde  $g$  es una función arbitraria. Sustituyendo (3.15) en (3.14) se obtiene la expresión

$$2z_+ z_- g'(z_+ z_-) = (n - 2i\lambda - 1)g(z_+ z_-) \quad (3.16)$$

que permite determinar  $g$ . El resultado final es

$$\phi_{n\lambda}(z_+, z_-) = \left( \frac{z_-}{z_+} \right)^{\frac{n}{2}} (z_+ z_-)^{-i\lambda - \frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

Los valores de  $n$  y  $\lambda$  dependen del régimen de amortiguamiento. Por ejemplo, cuando  $\omega > 0$ ,  $n$  y  $\lambda$  se eligen reales para que el espectro de  $\mathbf{H}_B$  corresponda al de un operador hermítico<sup>3</sup>. En este caso  $z_- = z_+^*$ , entonces, usando  $z_{\pm} = r e^{\pm i\theta}$  en (3.17) se encuentra

$$\phi_{n\lambda} = e^{-in\theta} r^{-2i\lambda - 1} = \exp \left[ -in \tan^{-1} (p_y/m\omega x) \right] (x^2 + p_y^2/m^2\omega^2)^{-i\lambda - \frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

El espectro de  $\mathbf{H}_B$  es, en este caso, continuo, infinita y numerablemente degenerado

$$\xi = \hbar\omega n + \hbar\gamma\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Los casos de sobreamortiguamiento y amortiguamiento crítico se analizan con detalle en [5]. Se encuentra, por ejemplo, que los espectros del hamiltoniano también son continuos e infinita pero no numerablemente degenerados.

### 3.1.2. Eigenvalores de energía

El sistema de Bateman es visto, usualmente, como un modelo *sistema-ambiente* con la energía total (conservada) dada por  $H_B$ . Bajo esta interpretación, el sistema cuántico tiene un espectro de energía (3.19) que no está acotado por debajo. De acuerdo con [5], esto no es un problema en tanto el sistema se mantenga aislado y la energía inicial sea positiva.

Ciertamente  $H_B$  es una cantidad conservada con unidades de energía, pero no nos es claro su significado físico. Como se señaló anteriormente, las ecuaciones de movimiento (3.2) corresponden a dos sistemas independientes que, en el límite  $\gamma = 0$ , corresponden a

---

<sup>3</sup>La cuantización de Feshbach-Tikochinsky [32] aprovecha la estructura del grupo  $SU(1,1)$  que posee este sistema. Sin embargo, este método conduce exclusivamente a eigenvalores de  $\mathbf{H}_B$  complejos.

**CAPÍTULO 3. EL SISTEMA DE BATEMAN**  
3.1. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

dos osciladores armónicos de frecuencia  $\omega_0$ . Con base en esta observación y, de acuerdo con la ecuación (1.1), definimos la energía mecánica total

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega_0^2 (x^2 + y^2) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_+^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\gamma}{2} (yp_x - xp_y) \quad (3.20)$$

donde  $\omega_+^2 = \omega_0^2 + (\gamma/2)^2$ . Ahora bien, bajo la dinámica no conservativa dictada por las ecuaciones de Euler-Lagrange o de Hamilton,  $E$  no se conserva

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{m} (p_x^2 - p_y^2) + \gamma^2 (xp_y + yp_x) - m\frac{\gamma^3}{4} (x^2 - y^2). \quad (3.21)$$

Esto no es una contradicción porque no estamos interpretando al sistema de Bateman como un *sistema-ambiente*, en cuyo caso sí debería ser conservativo.

El operador correspondiente a (3.20) se puede escribir como

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{\gamma}{2\omega_+}\right) \left(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{\gamma}{2\omega_+}\right) \left(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \frac{1}{2}\right) \quad (3.22)$$

donde los operadores

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \left[ \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y} + i(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{2} - \frac{\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y - i(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y)}{2m\omega_+} \right], \quad (3.23)$$

$$\mathbf{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \left[ \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y} - i(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{2} - \frac{\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y + i(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y)}{2m\omega_+} \right], \quad (3.24)$$

$$\mathbf{b} = \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \left[ \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y} - i(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{2} + \frac{\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y + i(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y)}{2m\omega_+} \right], \quad (3.25)$$

$$\mathbf{b}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \left[ \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y} + i(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{2} + \frac{\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y - i(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y)}{2m\omega_+} \right], \quad (3.26)$$

satisfacen  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1$ ,  $[\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger] = 1$  mientras que el resto de conmutadores son cero. Entonces, los eigenvalores de  $\mathbf{E}$  son

$$E_{nm} = \hbar\omega_+ \left[ \left(1 - \frac{\gamma}{2\omega_+}\right) n + \left(1 + \frac{\gamma}{2\omega_+}\right) m + 1 \right], \quad (3.27)$$

donde  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ . Este espectro es positivo y, en el límite  $\gamma = 0$ , corresponde a la suma de las energías de dos osciladores independientes de frecuencia  $\omega_0$ . Por esta razón, desde nuestro punto de vista,  $\mathbf{E}$  es mejor candidato que  $\mathbf{H}_B$  para representar la energía total del sistema formado por los osciladores  $x$  y  $y$  involucrados en la lagrangiana de Bateman de acuerdo con las ecuaciones (3.2).

En el siguiente capítulo vamos a presentar un formalismo que generaliza el sistema de Bateman. Además, señalaremos algunos detalles que, en nuestra opinión, dificultan la interpretación de la teoría cuántica de este sistema.

# Capítulo 4

## Acción de Galley

Enseguida se describe un formalismo clásico para la descripción lagrangiana de sistemas no conservativos [7, 12]. El método se basa en la duplicación de las coordenadas y velocidades generalizadas,  $(q^I, \dot{q}^I) \rightarrow (q_1^I, \dot{q}_1^I, q_2^I, \dot{q}_2^I)$ . Sea  $L(q^I, \dot{q}^I)$  un sistema conservativo con  $n$  grados de libertad. La correspondiente *lagrangiana no conservativa* se define como

$$\Lambda(q_1^I, \dot{q}_1^I, q_2^I, \dot{q}_2^I) \equiv L(q_1^I, \dot{q}_1^I) - L(q_2^I, \dot{q}_2^I) + K(q_1^I, \dot{q}_1^I, q_2^I, \dot{q}_2^I), \quad (4.1)$$

donde  $K$  es antisimétrica bajo  $(q_1^I, \dot{q}_1^I) \leftrightarrow (q_2^I, \dot{q}_2^I)$  y funciona como el potencial de las fuerzas no conservativas. Las ecuaciones de movimiento se obtienen por medio de un principio variacional. Se define la *acción*  $S$  como

$$S[q_1^I, q_2^I] = \int_{t_i}^{t_f} \Lambda(q_1^I, \dot{q}_1^I, q_2^I, \dot{q}_2^I) dt. \quad (4.2)$$

El *Principio de acción estacionaria compatible con valores iniciales* de Galley establece que la evolución dinámica del sistema es tal que hace extrema a la acción,  $\delta_q S = 0$ . Para eliminar los términos de frontera que surgen de realizar la variación de la acción y establecer las ecuaciones de movimiento se imponen las siguientes condiciones

$$\delta q_1^I(t_i) = 0, \quad \delta q_2^I(t_i) = 0 \quad (4.3)$$

$$q_1^I(t_f) = q_2^I(t_f), \quad \dot{q}_1^I(t_f) = \dot{q}_2^I(t_f), \quad \delta q_1^I(t_f) = \delta q_2^I(t_f). \quad (4.4)$$

Las ecuaciones (4.4) constituyen la *condición de igualdad*. Entonces se obtiene el sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_a^I} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_a^I} = 0 \quad a = 1, 2 \quad I = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q_a, \dot{q}_a)}{\partial \dot{q}_a^I} \right) - \frac{\partial L(q_a, \dot{q}_a)}{\partial q_a^I} = D_a^I \quad a = 1, 2 \quad I = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

donde las  $D_a^I$  son las fuerzas no conservativas,

$$D_{aI} = (-1)^a \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_a^I} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_a^I} \right]. \quad (4.7)$$

## 4.1. Límite físico

Galley postula el *límite físico* para deshacerse de los grados de libertad adicionales. Este paso consiste en identificar  $(q_1^I, \dot{q}_1^I)$  con  $(q_2^I, \dot{q}_2^I)$  a nivel de las ecuaciones de movimiento. Con esta operación se obtiene un conjunto de ecuaciones de movimiento [cf. Ec. (1.2)] con las fuerzas no conservativas dadas por  $D_I = (D_{aI})_{PL}$  (el subíndice  $PL$  indica la aplicación del límite físico).

Presentado de esta manera, el límite físico parece una forma no muy elegante de obtener las ecuaciones de movimiento no conservativas. Pero, resulta que esta maniobra ya está, de cierto modo, prevista en el principio de acción estacionaria. Veamos esto con un ejemplo simple. Sea  $\Lambda = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) + \frac{m\gamma}{2}(\dot{q}_1 q_2 - q_1 \dot{q}_2)$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.6) forman un conjunto de ecuaciones diferenciales simétrico bajo  $(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2) \rightarrow (q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1)$ ,

$$\ddot{q}_1 + \gamma \dot{q}_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \gamma \dot{q}_1 = 0, \quad (4.8)$$

La solución de este sencillo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas es

$$\begin{aligned} q_1(t) &= Ae^{-\gamma t} + Be^{\gamma t} + C + D \\ q_2(t) &= Ae^{-\gamma t} - Be^{\gamma t} + C - D. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora, imponiendo  $q_1(t_f) = q_2(t_f)$ , como requiere el principio variacional, se obtiene  $D = -Be^{\gamma t_f}$ . Por otro lado, la condición  $\dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f)$  conduce a  $B = 0$ , entonces  $D = 0$  y, finalmente,

$$q_1(t) = q_2(t) = Ae^{-\gamma t} + C \equiv q(t) \quad (4.10)$$

Nótese que para obtener esta solución no ha sido necesario aplicar el límite físico tal como lo prescribe Galley, el cual transformaría el sistema (4.8) en una sola ecuación

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} = 0. \quad (4.11)$$

Una inconveniencia que podría surgir al tratar de resolver un problema de esta manera sería la complejidad del sistema de  $2N$  ecuaciones acopladas (4.6). Esto se puede solventar usando las *coordenadas*  $\pm$

$$q_{\pm}^I = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1^I \pm q_2^I). \quad (4.12)$$

En particular, las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema que estamos usando como ejemplo serían

$$m \frac{d}{dt} (\dot{q}_+ + \gamma q_+) = 0, \quad m \frac{d}{dt} (\dot{q}_- - \gamma q_-) = 0. \quad (4.13)$$

La ecuación de  $q_+$  se puede identificar inmediatamente con la de una partícula con amortiguamiento lineal. La ecuación de  $q_-$  bien podría describir a  $q_+(-t)$  pero, en concordancia con el hecho de que  $q_1(t) = q_2(t)$ , se le debe asignar la solución trivial.

Con excepción de las lagrangianas cuadráticas, las ecuaciones de Euler-Lagrange en las coordenadas  $\pm$  no quedan desacopladas como en este ejemplo, no obstante,  $q_-^I(t)$  y  $\dot{q}_-^I(t)$  deben ser siempre cero, entonces, sustituyendo estas soluciones en las ecuaciones de  $q_+^I$  se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema no conservativo. Por ejemplo, sea

$$\Lambda = -m\dot{\vec{r}}_+ \cdot \dot{\vec{r}}_- + m\frac{\gamma}{2}(\dot{\vec{r}}_+ \cdot \vec{r}_- - \dot{\vec{r}}_- \cdot \vec{r}_+) + \sqrt{2}k(\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_+ - 2\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_- + \vec{r}_- \cdot \vec{r}_-)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}k(\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_+ + 2\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_- + \vec{r}_- \cdot \vec{r}_-)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

La ecuación de movimiento de  $\vec{r}_+$  es

$$0 = -m\ddot{\vec{r}}_+ - m\gamma\dot{\vec{r}}_+ + \sqrt{2}k(\vec{r}_- - \vec{r}_+)(\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_+ - 2\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_- + \vec{r}_- \cdot \vec{r}_-)^{-\frac{3}{2}} - \sqrt{2}k(\vec{r}_+ + \vec{r}_-)(\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_+ + 2\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_- + \vec{r}_- \cdot \vec{r}_-)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.15)$$

Sustituyendo  $\vec{r}_- = 0 = \dot{\vec{r}}_-$  y haciendo el reescalamiento  $\vec{r}_+/\sqrt{2} = \vec{r}$  se obtiene

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + k\frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad (4.16)$$

que es la ecuación del problema de Kepler en tres dimensiones con fricción lineal.

Una de las ventajas las coordenadas  $\pm$  es que las  $q_+^I$  tienen una interpretación física directa, son las coordenadas generalizadas del sistema no conservativo. No así con las coordenadas  $q_1^I$  o  $q_2^I$ , cuyo contenido físico depende que las condiciones de frontera especialmente diseñadas para este principio variacional.

En este punto finaliza lo que se hemos retomado del formalismo de Galley [7]. Galley da una descripción más detallada de esta formulación para sistemas no conservativos y su expansión a campos clásicos en [12]. El resto de este capítulo es trabajo propio que se ha hecho, principalmente la formulación hamiltoniana, con el objetivo de tener más herramientas para poder construir una teoría cuántica.

## 4.2. Formulación hamiltoniana

Sean  $\vec{x}_1 = (q_1^I, \dot{q}_1^I)$  y  $\vec{x}_2 = (q_2^I, \dot{q}_2^I)$ . Se definen los momentos canónicos

$$\pi_{1I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \equiv \frac{\partial \Lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}{\partial \dot{q}_1^I}, \quad \pi_{2I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \equiv -\frac{\partial \Lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}{\partial \dot{q}_2^I}, \quad (4.17)$$

los cuales satisfacen  $\pi_{1I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \pi_{2I}(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$ . En efecto, debido a su antisimetría, la lagrangiana  $\Lambda(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  es de la forma  $f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) + g(\vec{x}_1)h(\vec{x}_2) - g(\vec{x}_2)h(\vec{x}_1)$ , entonces

$$\pi_{1I}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\partial f(\vec{x}_1)}{\partial \dot{q}_1^I} + \frac{\partial g(\vec{x}_1)}{\partial \dot{q}_1^I}h(\vec{x}_2) - g(\vec{x}_2)\frac{\partial h(\vec{x}_1)}{\partial \dot{q}_1^I} = -\frac{\partial \Lambda(\vec{x}_2, \vec{x}_1)}{\partial \dot{q}_1^I} \equiv \pi_{2I}(\vec{x}_2, \vec{x}_1). \quad (4.18)$$

La hamiltoniana  $\mathcal{H}$  se define como la transformada de Legendre de  $\Lambda$  con respecto a las velocidades generalizadas:

$$\mathcal{H} \equiv \pi_{1I}\dot{q}_1^I - \pi_{2I}\dot{q}_2^I - \Lambda. \quad (4.19)$$

Definida de esta manera,  $\mathcal{H}$  resulta antisimétrica bajo  $(q_1^I, \pi_{1I}, q_2^I, \pi_{2I}) \rightarrow (q_2^I, \pi_{2I}, q_1^I, \pi_{1I})$ . Ahora, suponiendo que  $\Lambda$  no depende del tiempo explícitamente

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1^I} dq_1^I - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2^I} dq_2^I - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_1^I} d\pi_1^I - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_2^I} d\pi_2^I &= d(-\mathcal{H}) = d\left(\Lambda - \dot{q}_1^I \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_1^I} - \dot{q}_2^I \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_2^I}\right) \\ &= \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1^I} dq_1^I + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2^I} dq_2^I - \dot{q}_1^I d\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_1^I}\right) - \dot{q}_2^I d\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_2^I}\right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

igualando la derivadas parciales en esta última expresión y usando (4.5) se obtienen las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_1^I = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{1I}}, \quad \dot{q}_2^I = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{2I}}, \quad \dot{\pi}_{1I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1^I}, \quad \dot{\pi}_{2I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2^I}. \quad (4.21)$$

Las ecuaciones de Hamilton se pueden resumir en la expresión general

$$\frac{dF}{dt} = \{F, \mathcal{H}\}_G + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.22)$$

donde  $F$  es una función arbitraria que depende de coordenadas, momentos y posiblemente del tiempo. El paréntesis  $\{, \}_G$  se define como

$$\{A, B\}_G \equiv \sum_{I=1}^N \left[ \frac{\partial A}{\partial q_1^I} \frac{\partial B}{\partial \pi_{1I}} - \frac{\partial A}{\partial \pi_{1I}} \frac{\partial B}{\partial q_1^I} - \left( \frac{\partial A}{\partial q_2^I} \frac{\partial B}{\partial \pi_{2I}} - \frac{\partial A}{\partial \pi_{2I}} \frac{\partial B}{\partial q_2^I} \right) \right]. \quad (4.23)$$

Este paréntesis satisface las mismas propiedades que el paréntesis de Poisson usual. Los paréntesis básicos son:

$$\{q_a^I, q_a^J\}_G = 0, \quad \{q_a^I, \pi_{aJ}\}_G = (-1)^{a+1} \delta_J^I, \quad \{\pi_{aI}, \pi_{aJ}\}_G = 0, \quad (4.24)$$

donde  $I, J = 1, \dots, n$  y  $a = 1, 2$ .

### 4.3. Transformaciones canónicas

Debido a que el paréntesis  $\{, \}_G$  no coincide con la definición usual del paréntesis de Poisson debemos reescribir el formalismo estándar para ajustarlo al lenguaje que estamos utilizando. En esta sección se realizará esto para las transformaciones canónicas con base en la referencia [33].

Se busca un cambio de coordenadas  $(q_1^I, \pi_{1I}, q_2^I, \pi_{2I}) \rightarrow (Q_1^I, \Pi_{1I}, Q_2^I, \Pi_{2I})$  tal que las ecuaciones de movimiento mantengan la forma (4.21), es decir,

$$\dot{Q}_1^I = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \Pi_{1I}}, \quad \dot{\Pi}_{1I} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_1^I}, \quad \dot{Q}_2^I = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \Pi_{2I}}, \quad \dot{\Pi}_{2I} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_2^I}, \quad (4.25)$$

donde  $\mathcal{K}$  es la hamiltoniana. Nos vamos a restringir a transformaciones que satisfacen<sup>1</sup>

$$(-1)^{a+1} \{Q_a^I, \Pi_{bJ}\}_G = \delta_{ab} \delta_J^I, \quad \{Q_a^I, Q_b^J\}_G = 0, \quad \{\Pi_{aI}, \Pi_{bJ}\}_G = 0, \quad (4.26)$$

así como

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_1^I}{\partial t} &= \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{H})}{\partial \Pi_{1I}}, & \frac{\partial Q_2^I}{\partial t} &= \frac{\partial(\mathcal{H} - \mathcal{K})}{\partial \Pi_{2I}}, \\ \frac{\partial \Pi_{1I}}{\partial t} &= \frac{\partial(\mathcal{H} - \mathcal{K})}{\partial Q_1^I}, & \frac{\partial \Pi_{2I}}{\partial t} &= \frac{\partial(\mathcal{K} - \mathcal{H})}{\partial Q_2^I},\end{aligned}\tag{4.27}$$

con  $I = 1, \dots, N$  y  $a, b = 1, 2$ .

Las condiciones (4.26) equivalen a

$$\begin{aligned}\sum_{c=1}^2 \sum_{I=1}^N (-1)^{b+c} \left( \frac{\partial Q_c^I}{\partial q_a^J} \frac{\partial \Pi_{cI}}{\partial \pi_{bL}} - \frac{\partial \Pi_{cI}}{\partial q_a^J} \frac{\partial Q_c^I}{\partial \pi_{bL}} \right) &= \delta_{ab} \delta_L^J, \\ \sum_{c=1}^2 \sum_{I=1}^N (-1)^c \left( \frac{\partial Q_c^I}{\partial q_a^J} \frac{\partial \Pi_{cI}}{\partial q_b^L} - \frac{\partial \Pi_{cI}}{\partial q_a^J} \frac{\partial Q_c^I}{\partial q_b^L} \right) &= 0, \\ \sum_{c=1}^2 \sum_{I=1}^N (-1)^c \left( \frac{\partial Q_c^I}{\partial \pi_{aJ}} \frac{\partial \Pi_{cI}}{\partial \pi_{bL}} - \frac{\partial \Pi_{cI}}{\partial \pi_{aJ}} \frac{\partial Q_c^I}{\partial \pi_{bL}} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{4.28}$$

(4.27) y (4.28) garantizan la existencia de la función generatriz  $F$

$$\sum_{a=1}^2 \sum_{I=1}^N [(\pi_{aI} dq_a^I - \Pi_{aI} dQ_a^I) (-1)^{a+1}] + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt = dF,\tag{4.29}$$

de la cual podemos obtener la relación entre las nuevas coordenadas y las originales por medio de

$$\Pi_{aI} = \frac{\partial F}{\partial Q_a^I} (-1)^a, \quad \pi_{aI} = \frac{\partial F}{\partial q_a^I} (-1)^{a+1}.\tag{4.30}$$

Así como

$$\mathcal{K} - \mathcal{H} = \frac{\partial F}{\partial t}.\tag{4.31}$$

Si la transformación no involucra al tiempo explícitamente se puede elegir  $\mathcal{K} = \mathcal{H}(Q_a^I, \Pi_{aI})$ .

Con las ecuaciones (4.31) y (4.30) podemos enunciar inmediatamente la ecuación de Hamilton-Jacobi. Suponemos la existencia de una transformación canónica tal que la nueva hamiltoniana es cero y, por lo tanto, las nuevas coordenadas son constantes de movimiento. Estas condiciones conducen a

$$\mathcal{H} \left( q_a^I, \frac{\partial S}{\partial q_a^I} (-1)^{a+1}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.\tag{4.32}$$

La función generatriz, denotada en este caso como  $S = S(q_a^I, t)$ , depende de  $2n+1$  variables pues las otras  $2n$  son constantes de integración.

---

<sup>1</sup>Aunque pueden existir transformaciones que no cumplen estas condiciones y aun así mantener la forma de las ecuaciones de movimiento [33].

### Las coordenadas $\pm$

Para un sistema unidimensional tenemos

$$q_{\pm} \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 \pm q_2), \quad \pi_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \pm \pi_2). \quad (4.33)$$

Esta es una transformación canónica muy simple generada por  $F(q_1, q_2, \pi_+, \pi_-) = \pi_1 q_1 - q_2 \pi_2 = (\pi_+ + \pi_-)q_1/\sqrt{2} - q_2(\pi_+ - \pi_-)/\sqrt{2}$ . Los paréntesis básicos son

$$\begin{aligned} \{q_+, q_-\}_G &= 0, & \{q_+, \pi_-\}_G &= i\hbar, & \{q_+, \pi_+\}_G &= 0, \\ \{q_+, \pi_+\}_G &= 0, & \{q_-, \pi_+\}_G &= -i\hbar, & \{\pi_+, \pi_-\}_G &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como se explicó en la Sección 4.1,  $q_+$  y  $\pi_+$  son las coordenadas relacionadas directamente con el sistema no conservativo. Nótese que, similarmente a lo que ocurre con el sistema de Bateman, estas variables tienen un paréntesis nulo.

#### 4.3.1. Transformaciones continuas

Consideremos una transformación canónica dependiente del parámetro  $\alpha$ ,

$$Q_a^I = Q_a^I(q_a^J, \pi_{aJ}, t, \alpha), \quad \Pi_{aI} = \Pi_{aI}(q_a^J, \pi_{aJ}, t, \alpha), \quad (4.35)$$

con la condición de que  $\alpha = 0$  representa la transformación identidad.

Derivando (4.29) con respecto a  $\alpha$ , evaluando en  $\alpha = 0$  y acomodando se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{a,I=1}^{2,N} (-1)^a \left[ \left. \frac{\partial \Pi_{aI}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} dq_a^I - \left. \frac{\partial Q_a^I}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} d\pi_a^I \right] + \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} dt = \\ d \left( \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial Q_a^I}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \pi_a^I \right) \equiv dG(q_a^I, \pi_{aI}, t), \end{aligned}$$

entonces

$$\left. \frac{\partial Q_a^I}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial G}{\partial \pi_{aI}} (-1)^{a+1}, \quad \left. \frac{\partial \Pi_{aI}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial G}{\partial q_a^I} (-1)^a, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (4.36)$$

Podemos ver las soluciones de las ecuaciones de las ecuaciones de Hamilton  $(q_1^I(t), \pi_{1I}(t), q_2^I(t), \pi_{2I}(t))$ , con  $t$  vista como un parámetro, corresponden a una transformación canónica continua para la cual  $G = \mathcal{H}$ .

## 4.4. Oscilador armónico amortiguado

La lagrangiana de Galley es

$$\Lambda = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \omega_0^2 q_1^2) - \frac{m}{2}(\dot{q}_2^2 - \omega_0^2 q_2^2) + \frac{m\gamma}{2}(\dot{q}_1 q_2 - q_1 \dot{q}_2), \quad (4.37)$$

Usando la definición (4.19) obtenemos la hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{\pi_1^2 - \pi_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 - q_2^2) + \frac{\gamma}{2}(q_1\pi_2 - q_2\pi_1) = \frac{\pi_+\pi_-}{m} - m\omega^2 q_+ q_- - \frac{\gamma}{2}(q_+\pi_- + \pi_+ q_-) \quad (4.38)$$

donde

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2. \quad (4.39)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{q}_+ &= \frac{\pi_+}{m} - \frac{\gamma}{2}q_+, & \dot{\pi}_+ &= -m\omega^2 q_+ - \frac{\gamma}{2}\pi_+, \\ \dot{q}_- &= -\frac{\pi_-}{m} + \frac{\gamma}{2}q_-, & \dot{\pi}_- &= m\omega^2 q_- + \frac{\gamma}{2}\pi_-. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como hemos mencionado antes, sólo  $q_+$  y  $\pi_+$  describen al sistema no conservativo, que en este caso se trata del oscilador armónico amortiguado unidimensional. La energía  $E$  del oscilador, como se definió al inicio, está dada por

$$E \equiv \frac{m}{2}\dot{q}_+^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}q_+^2 = \frac{\pi_+^2}{2m} - \frac{\gamma}{2}q_+\pi_+ + \frac{m\omega_+^2}{2}q_+^2 \quad (4.41)$$

y satisface [3],

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma m \dot{q}_+^2 = -\gamma \frac{\pi_+^2}{m} + \gamma^2 q_+ \pi_+ - \gamma \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 m q_+^2 \quad (4.42)$$

### Ecuación de Hamilton-Jacobi

Conviene escribir la hamiltoniana (4.38) como

$$\mathcal{H} = \omega (P_+ P_- - Q_+ Q_-) - \frac{\gamma}{2} (Q_+ P_- + P_+ Q_-) \quad (4.43)$$

donde

$$Q_{\pm} = \sqrt{m\omega} q_{\pm}, \quad P_{\pm} = \frac{\pi_{\pm}}{\sqrt{m\omega}}. \quad (4.44)$$

En lugar de resolver (4.32) para determinar  $S'(Q_+, Q_-)$ , resolveremos la ecuación de su transformada de Legendre  $S(Q_+, P_+)$ . La forma de la ecuación es la misma,  $\mathcal{H} + \partial S / \partial t = 0$ , pero ahora debemos sustituir  $P_- = \partial S / \partial Q_+$  y  $Q_- = \partial S / \partial P_+$ , esto nos conduce a

$$\omega \left( P_+ \frac{\partial S}{\partial Q_+} - Q_+ \frac{\partial S}{\partial P_+} \right) - \frac{\gamma}{2} \left( Q_+ \frac{\partial S}{\partial Q_+} + P_+ \frac{\partial S}{\partial P_+} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.45)$$

Consideremos el caso  $\omega^2 > 0$ . Usando el cambio de variables  $Q_+ = r \cos \theta$ ,  $P_+ = r \sin \theta$  se encuentra

$$-\omega \frac{\partial S}{\partial \theta} - \frac{\gamma}{2} r \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.46)$$

La solución de esta ecuación es

$$S = -\frac{\xi + \lambda}{\omega}\theta + \frac{2}{\gamma}\lambda \ln r - \xi t = -\frac{\xi + \lambda}{\omega} \tan^{-1} \left( \frac{P_+}{Q_+} \right) + \frac{2}{\gamma}\lambda \ln \sqrt{Q_+^2 + P_+^2} - \xi t. \quad (4.47)$$

Derivando  $S$  parcialmente con respecto a  $\xi$  y  $\lambda$  e igualando a las constantes  $-t_0$  y  $a$  respectivamente se obtiene

$$Q_+ = Ae^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} \cos[\omega(t-t_0)], \quad P_+ = -Ae^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} \sin[\omega(t-t_0)], \quad (4.48)$$

donde definimos  $A \equiv e^{\frac{\gamma}{2}a}$ .

### Hamiltoniana dependiente del tiempo

El sistema (4.38) se puede relacionar con el de Caldirola-Kanai usando, esencialmente, la misma transformación canónica (3.5). En el lenguaje de la Sección 4.3 tenemos<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} Q_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( q_+ - e^{-\gamma t} q_- - \frac{\gamma}{2m\omega^2} e^{-\gamma t} \pi_- \right), & Q_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( q_- + e^{\gamma t} q_+ - \frac{\gamma}{2m\omega^2} \pi_+ \right), \\ \Pi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \pi_- + e^{\gamma t} \pi_+ - m \frac{\gamma}{2} e^{\gamma t} q_+ \right), & \Pi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \pi_+ - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} e^{-\gamma t} \pi_- + m \frac{\gamma}{2} q_- \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Tomando en cuenta que los pares conjugados canónicamente son  $(Q_+, \Pi_-)$  y  $(Q_-, \Pi_+)$ , la nueva hamiltoniana corresponde a dos sistemas independientes de Caldirola-Kanai con coeficientes de fricción  $\pm\gamma$ :

$$H' = e^{-\gamma t} \frac{\Pi_-^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} Q_+^2 e^{\gamma t} - \left( e^{\gamma t} \frac{\Pi_+^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} Q_-^2 e^{-\gamma t} \right). \quad (4.50)$$

## 4.5. Acerca de la cuantización canónica

Ésta se efectúa promoviendo las cantidades clásicas a operadores y postulando

$$\begin{aligned} [q_1, q_2] &= 0, & [q_1, \pi_1] &= i\hbar, & [q_1, \pi_2] &= 0, \\ [q_2, \pi_1] &= 0, & [q_2, \pi_2] &= -i\hbar, & [\pi_1, \pi_2] &= 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Nótese que la hamiltoniana de Bateman (3.3) y la de Galley (4.38) son muy parecidas. De hecho coinciden si identificamos  $(x, y, p_x, p_y)$  con  $(q_+, -q_-, \pi_-, \pi_+)$ . Aunque el formalismo clásico es distinto, resulta que, con esta elección de los conmutadores básicos, las descripciones cuánticas de estos sistemas son completamente equivalentes.

La principal inconveniencia que observamos en la cuantización canónica tiene que ver con la prescripción, natural en el formalismo de Galley, de asociar cantidades físicas a operadores de la forma  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(q_+, \pi_+)$ . Debido a que  $[q_+, \pi_+] = 0$ , no se recupera, en el límite  $\gamma = 0$ , la descripción cuántica estándar del sistema conservativo. En el siguiente capítulo vamos a presentar un formalismo de carácter cuántico con el que se intenta dar salida a este problema.

---

<sup>2</sup>El generador de esta transformación es  $F(q_+, q_-, Q_+, \Pi_+) = 2m\omega^2 q_+ q_- / \gamma - m\omega_0^2 e^{-\gamma t} q_-^2 / \gamma + \sqrt{2} q_- \Pi_+ - 2\sqrt{2} m\omega_0^2 Q_+ q_- / \gamma + Q_+ \Pi_+ e^{\gamma t} + 2\sqrt{2} m\omega^2 Q_+ q_+ e^{\gamma t} / \gamma - 2m\omega_0^2 Q_+^2 e^{\gamma t} / \gamma - m\omega^2 e^{\gamma t} q_+^2 / \gamma$ , con  $\Pi_- = \partial F / \partial Q_+$ ,  $\pi_- = -\partial F / \partial q_+$ ,  $Q_- = \partial F / \partial \Pi_+$ ,  $\pi_+ = \partial F / \partial q_-$ .

# Capítulo 5

## Sistema de Galley cuántico

Ahora vamos a describir una formulación cuántica del sistema de Galley en el que la evolución temporal se implementa de una forma no convencional pero, consistente con otros métodos de cuantización en la imagen de Heisenberg, por ejemplo, el descrito en [15] e incluso con la descripción basada en el sistema de Caldirola-Kanai.

En primer lugar, las cantidades clásicas se promueven a operadores, los cuales actúan sobre cierto espacio de Hilbert  $\mathfrak{H}$  que se especificará más adelante. Se postulan las *reglas de conmutación canónicas* [25]

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] &= 0, & [\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1] &= i\hbar, & [\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_2] &= 0, \\ [\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_1] &= 0, & [\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_2] &= i\hbar, & [\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2] &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

Estos conmutadores básicos son compatibles con la elección de  $\mathbf{q}_+$  y  $\boldsymbol{\pi}_+$ , donde

$$\mathbf{q}_\pm = \pm \frac{\mathbf{q}_1 \pm \mathbf{q}_2}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\pi}_\pm = \frac{\boldsymbol{\pi}_1 \pm \boldsymbol{\pi}_2}{\sqrt{2}}, \quad (5.2)$$

como los operadores de posición y momento del sistema no conservativo debido a que  $[\mathbf{q}_+, \boldsymbol{\pi}_+] = i\hbar$ .

El que la definición del paréntesis clásico  $\{, \}_G$  no coincida con la expresión usual del paréntesis de Poisson sugiere la posibilidad de que la evolución temporal de los operadores no se relacione directamente con el conmutador sino con una estructura alterna que denotamos como  $\{, \}$ .

Sea  $\mathfrak{D}$  el conjunto de operadores lineales sobre  $\mathfrak{H}$ , entonces  $\{, \} : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  satisface, por definición, las siguientes propiedades

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = -\{\mathbf{B}, \mathbf{A}\}, \quad (5.3)$$

$$\{\mathbf{A} + c\mathbf{B}, \mathbf{C}\} = \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\} + c\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}, \quad c \in \mathbb{C} \quad (5.4)$$

$$\{\mathbf{AB}, \mathbf{C}\} = \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}\mathbf{B} + \mathbf{A}\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}. \quad (5.5)$$

Adicionalmente, se definen los casos particulares

$$\{\mathbf{A}_1(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1), \mathbf{B}_1(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1)\} \equiv [\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1], \quad (5.6)$$

$$\{\mathbf{A}_1(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1), \mathbf{B}_2(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_2)\} \equiv 0, \quad (5.7)$$

$$\{\mathbf{A}_2(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_2), \mathbf{B}_2(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_2)\} \equiv [\mathbf{B}_2, \mathbf{A}_2]. \quad (5.8)$$

En el Apéndice A se muestra que  $\{, \}$  satisface, con operadores arbitrarios, la identidad de Jacobi.

## 5.1. Evolución temporal

Los operadores dependientes del tiempo, tales que  $\mathbf{F}(0) = \mathbf{F}$ , se definen por medio de la serie

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} + \frac{\{\mathbf{F}, \mathcal{H}\}}{i\hbar}t + \frac{1}{2!} \frac{\{\{\mathbf{F}, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}}{(i\hbar)^2}t^2 + \dots \quad (5.9)$$

El operador hamiltoniano es invariante  $\mathcal{H}(\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t), \boldsymbol{\pi}_1(t), \boldsymbol{\pi}_2(t)) = \mathcal{H}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2)$ . Derivando (5.9) con respecto al tiempo se obtiene

$$i\hbar \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \{\mathbf{F}(t), \mathcal{H}\}. \quad (5.10)$$

Esta ecuación diferencial es útil en conjunto con los paréntesis básicos

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)\} &= 0, & \{\mathbf{q}_1(t), \boldsymbol{\pi}_1(t)\} &= i\hbar, & \{\mathbf{q}_1(t), \boldsymbol{\pi}_2(t)\} &= 0, \\ \{\mathbf{q}_2(t), \boldsymbol{\pi}_1(t)\} &= 0, & \{\mathbf{q}_2(t), \boldsymbol{\pi}_2(t)\} &= -i\hbar, & \{\boldsymbol{\pi}_1(t), \boldsymbol{\pi}_2(t)\} &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

No es necesario postular (5.11) separadamente. Podemos conocer el valor de estos paréntesis en  $t = 0$  con la definición de  $\{, \}$  y los conmutadores básicos. Luego, usando (5.9) se muestra, en el Apéndice A, que estos valores son válidos en  $t \neq 0$ .

Antes de continuar con la discusión de este formalismo veamos un ejemplo de su funcionamiento.

## 5.2. Oscilador amortiguado

El operador hamiltoniano es, de (4.38),

$$\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{\pi}_+ \boldsymbol{\pi}_-}{m} - m\omega^2 \mathbf{q}_+ \mathbf{q}_- - \frac{\gamma}{2} (\boldsymbol{\pi}_+ \mathbf{q}_- + \boldsymbol{\pi}_- \mathbf{q}_+) \quad (5.12)$$

donde  $\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$ . (5.10) conduce a

$$\dot{\mathbf{q}}_+(t) = \frac{\boldsymbol{\pi}_+(t)}{m} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{q}_+(t), \quad \dot{\boldsymbol{\pi}}_+(t) = -m\omega^2 \mathbf{q}_+(t) - \frac{\gamma}{2} \boldsymbol{\pi}_+(t), \quad (5.13)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_-(t) = -\frac{\boldsymbol{\pi}_-(t)}{m} + \frac{\gamma}{2} \mathbf{q}_-(t), \quad \dot{\boldsymbol{\pi}}_-(t) = m\omega^2 \mathbf{q}_-(t) + \frac{\gamma}{2} \boldsymbol{\pi}_-(t), \quad (5.14)$$

que son idénticas a las ecuaciones clásicas. Las soluciones dependen del valor de  $\omega$ :

1. Amortiguamiento débil ( $\omega > 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= [\mathbf{x}_+ \cos(\omega t) + \boldsymbol{\pi}_+ \sin(\omega t)/m\omega] e^{-\frac{\gamma t}{2}}, \\ \boldsymbol{\pi}_+(t) &= [-m\omega \mathbf{x}_+ \sin(\omega t) + \boldsymbol{\pi}_+ \cos(\omega t)] e^{-\frac{\gamma t}{2}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

2. Amortiguamiento crítico ( $\omega = 0$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_+(t) &= [\mathbf{x}_+ + t\boldsymbol{\pi}_+/m] e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \\ \boldsymbol{\pi}_+(t) &= \boldsymbol{\pi}_+ e^{-\frac{\gamma}{2}t}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

3. Sobreamortiguamiento ( $\omega = \pm i\sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2} = \pm i\Omega$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_+(t) &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_+ + \frac{\boldsymbol{\pi}_+}{m\Omega} \right) e^{(\Omega - \frac{\gamma}{2})t} + \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_+ - \frac{\boldsymbol{\pi}_+}{m\Omega} \right) e^{-(\Omega + \frac{\gamma}{2})t}, \\ \boldsymbol{\pi}_+(t) &= \frac{1}{2} (m\Omega\mathbf{x}_+ + \boldsymbol{\pi}_+) e^{(\Omega - \frac{\gamma}{2})t} - \frac{1}{2} (m\Omega\mathbf{x}_+ - \boldsymbol{\pi}_+) e^{-(\Omega + \frac{\gamma}{2})t}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Las expresiones para  $\mathbf{q}_-(t)$  y  $\boldsymbol{\pi}_-(t)$  son idénticas excepto por el signo de  $\gamma$ .

Alternativamente, la expresión (5.9) conduce a

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_+(t) &= \mathbf{q}_+ + t \left( \frac{\boldsymbol{\pi}_+}{m} - \frac{\gamma}{2}\mathbf{q}_+ \right) + \frac{t^2}{2} \left( \left( -\omega^2 + \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \right) \mathbf{q}_+ - \gamma \frac{\boldsymbol{\pi}_+}{m} \right) \\ &\quad + \frac{t^3}{3!} \left( \left( \frac{3}{2}\gamma\omega^2 - \left( \frac{\gamma}{2} \right)^3 \right) \mathbf{q}_+ + \left( -\omega^2 + 3 \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \right) \frac{\boldsymbol{\pi}_+}{m} \right) + \dots,\end{aligned}\tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_+(t) &= \boldsymbol{\pi}_+ + t \left( -m\omega^2\mathbf{q}_+ - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\pi}_+ \right) + \frac{t^2}{2} \left( \left( -\omega^2 + \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \right) \boldsymbol{\pi}_+ + m\gamma\omega^2\mathbf{q}_+ \right) \\ &\quad + \frac{t^3}{3!} \left( m \left( \omega^4 - 3\omega^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \right) \mathbf{q}_+ + \left( \frac{3}{2}\gamma\omega^2 - \left( \frac{\gamma}{2} \right)^3 \right) \boldsymbol{\pi}_+ \right) + \dots,\end{aligned}\tag{5.19}$$

que coinciden con las series de Taylor de  $\mathbf{q}_+(t)$  y  $\boldsymbol{\pi}_+(t)$  en (5.15).

### 5.2.1. Conmutadores dependientes del tiempo

Los operadores dependientes del tiempo del oscilador amortiguado (en cualquiera de los tres casos) satisfacen

$$\begin{aligned}[\mathbf{q}_+(t), \boldsymbol{\pi}_+(t)] &= i\hbar e^{-\gamma t}, & [\mathbf{q}_-(t), \boldsymbol{\pi}_-(t)] &= i\hbar e^{\gamma t}, \\ [\mathbf{q}_+(t), \mathbf{q}_-(t)] &= 0, & [\boldsymbol{\pi}_+(t), \boldsymbol{\pi}_-(t)] &= 0, \\ [\mathbf{q}_+(t), \boldsymbol{\pi}_-(t)] &= 0, & [\mathbf{q}_-(t), \boldsymbol{\pi}_+(t)] &= 0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

En primer lugar, podemos ver que, en general,  $[\mathbf{A}(\mathbf{q}_+(t), \boldsymbol{\pi}_+(t)), \mathbf{B}(\mathbf{q}_-(t), \boldsymbol{\pi}_-(t))] = 0$ . Entonces, el espacio de Hilbert del sistema de Galley es de la forma  $\mathfrak{H}_+ \otimes \mathfrak{H}_-$ , siendo  $\mathfrak{H}_+$  el espacio de estados físicos.

Por otro lado, en la introducción se abordó la incompatibilidad entre conmutadores constantes e interacciones no conservativas. Estas dos características están presentes en este formalismo pero de una manera consistente. El sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene derivando el lado izquierdo de (5.20), por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{q}_+(t), \boldsymbol{\pi}_+(t)] = \frac{1}{m}[\boldsymbol{\pi}_+(t), \boldsymbol{\pi}_+(t)] - \gamma[\mathbf{q}_+(t), \boldsymbol{\pi}_+(t)] - m\omega^2[\mathbf{q}_+(t), \mathbf{q}_+(t)],\tag{5.21}$$

admite el lado derecho como solución.

Cabe señalar que los operadores dependientes del tiempo de este ejemplo verifican los brackets (5.11).

### 5.2.2. Eigenvalores de energía

El operador de energía dependiente del tiempo es

$$\mathbf{E}_+(t) \equiv \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}_+(t)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} \mathbf{q}_+(t)^2 = \frac{\boldsymbol{\pi}_+^2(t)}{2m} - \frac{\gamma}{4} [\mathbf{q}_+(t), \boldsymbol{\pi}_+(t)]_+ + \frac{m\omega_+^2}{2} \mathbf{q}_+^2(t) \quad (5.22)$$

donde  $\omega_+^2 = \omega_0^2 + (\frac{\gamma}{2})^2$  y  $[\cdot, \cdot]_+$  denota el anticonmutador.  $\mathbf{E}_+(t)$  es, claramente, definido positivo.

Sustituyendo (5.15) en (5.22) obtenemos

$$\mathbf{E}(t) = \left[ B(t) \frac{\boldsymbol{\pi}_+^2}{2m} - C(t) \frac{\gamma}{4} [\mathbf{q}_+, \boldsymbol{\pi}_+]_+ + D(t) \frac{m\omega_0^2}{2} \mathbf{q}_+^2 \right] e^{-\gamma t}, \quad (5.23)$$

donde

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{\omega^2} \left[ \omega_0^2 - \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \cos(2\omega t) \right] - \frac{\gamma}{2\omega} \sin(2\omega t), \\ C(t) &= \cos(2\omega t) - \frac{\gamma}{2\omega} \sin(2\omega t), \\ D(t) &= 1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \cos(2\omega t) + \frac{\gamma\omega}{2\omega_0^2} \sin(2\omega t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

La ecuación de eigenvalores, en la representación de las posiciones ( $\mathbf{q}_+ f(q_+) \equiv q_+ f(q_+)$ ,  $\boldsymbol{\pi}_+ f(q_+) \equiv -i\hbar \partial f(q_+)/\partial q_+$ ), está dada por

$$\left[ B(t) \frac{d^2}{dq_+^2} - iC(t) \frac{m\gamma}{\hbar} q_+ \frac{d}{dq_+} + \left( \frac{2mE(t)e^{\gamma t}}{\hbar^2} - iC(t) \frac{\gamma m}{2\hbar} - D(t) \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} q_+^2 \right) \right] \psi = 0. \quad (5.25)$$

Pasando a la variable adimensional  $y = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} q_+$  obtenemos

$$B(t) \frac{d^2\psi}{dy^2} - 2iC(t)\alpha y \frac{d\psi}{dy} + \left( \frac{2E(t)}{\hbar\omega_0} e^{\gamma t} - iC(t)\alpha - D(t)y^2 \right) \psi = 0, \quad (5.26)$$

donde

$$\alpha = \frac{\gamma}{2\omega_0}, \quad (5.27)$$

Al igual que con las funciones de onda del sistema de Caldirola-Kanai, se propone  $\psi(y) = e^{-\frac{\kappa}{2}y^2} P(y)$ , siendo  $\kappa$  un número complejo con parte real positiva que puede depender del tiempo. La elección conveniente de  $\kappa$  es

$$\kappa = \sqrt{\frac{D(t)}{B(t)} - \frac{C^2(t)\alpha^2}{B^2(t)}} - i \frac{C(t)\alpha}{B(t)} = \frac{1}{B(t)} (1 - iC(t)\alpha), \quad (5.28)$$

donde se ha usado  $B(t)D(t) = 1 + \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} C^2(t)$ . Entonces, (5.26) se convierte en

$$B(t) \frac{d^2P}{dy^2} - 2y \frac{dP}{dy} + \left( \frac{2E(t)}{\hbar\omega_0} e^{\gamma t} - 1 \right) P = 0. \quad (5.29)$$

## CAPÍTULO 5. SISTEMA DE GALLEY CUÁNTICO

### 5.2. OSCILADOR AMORTIGUADO

Realizando el cambio de variable  $\sqrt{B(t)}z = y$ , esta última ecuación se transforma en

$$\frac{d^2P}{dz^2} - 2z\frac{dP}{dz} + \left( \frac{2E(t)}{\hbar\omega_0} e^{\gamma t} - 1 \right) P = 0, \quad (5.30)$$

la cual tiene la forma de la ecuación diferencial de Hermite. Las soluciones compatibles con la condición de frontera satisfacen  $\frac{2E(t)}{\hbar\omega_0} e^{\gamma t} - 1 = 2n$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces, los eigenvalores son

$$E_n(t) = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\gamma t}, \quad (5.31)$$

mientras que las eigenfunciones están dadas por

$$\psi_n(x, t) = A_n(t) \exp \left[ -\frac{m\omega_0}{2\hbar B(t)} (1 - iC(t)\alpha) q_+^2 \right] H_n \left[ \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar B(t)}} q_+ \right] \quad (5.32)$$

donde  $H_m$  es el polinomio de Hermite de orden  $m$  y los coeficientes de normalización satisfacen

$$|A_n(t)|^2 = \frac{\left( \frac{m\omega_0}{\hbar B(t)} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \quad (5.33)$$

Las eigenfunciones son periódicas  $T = \frac{\pi}{\omega}$ .

Para obtener las eigenfunciones de energía con amortiguamiento crítico tomamos el límite  $\gamma \rightarrow 2\omega_0$  en (5.23). Los coeficientes son ahora

$$B(t) = 1 - 2\omega_0 t + 2\omega_0^2 t^2, \quad (5.34)$$

$$C(t) = 1 - 2\omega_0 t, \quad (5.35)$$

$$D(t) = 2. \quad (5.36)$$

Los pasos que utilizamos en el caso anterior siguen siendo válidos porque  $B(t)D(t) = 1 + C^2(t)$ . Además,  $B(t) \neq 0$  para  $t$  real. Los eigenvalores son los mismos pero las eigenfunciones ya no son periódicas.

Finalmente, el operador de energía en el caso de sobreamortiguamiento se puede escribir en la forma (5.23) con los coeficientes siguientes

$$B(t) = \frac{\left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \cosh(2\Omega t) - \omega_0^2}{\Omega^2} - \frac{\gamma}{2\Omega} \sinh(2\Omega t) \quad (5.37)$$

$$C(t) = \cosh(2\Omega t) - \frac{\gamma}{2\Omega} \sinh(2\Omega t) \quad (5.38)$$

$$D(t) = 1 + \frac{\left( \frac{\gamma}{2} \right)^2}{\omega_0^2} \cosh(2\Omega t) - \frac{\gamma\Omega}{2\omega_0^2} \sinh(2\Omega t) \quad (5.39)$$

que también satisfacen  $B(t)D(t) = 1 + \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} C^2(t)$ .

### Operadores de creación y aniquilación

Una forma alternativa de obtener los resultados previos consiste en usar los operadores de creación y aniquilación

$$\mathbf{a}_+(t) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left[ \left(1 - i\frac{\gamma}{2\omega_0}\right) \mathbf{q}_+(t) + i\frac{\boldsymbol{\pi}_+(t)}{m\omega_0} \right] e^{\frac{\gamma t}{2}}, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{a}_+^\dagger(t) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left[ \left(1 + i\frac{\gamma}{2\omega_0}\right) \mathbf{q}_+(t) - i\frac{\boldsymbol{\pi}_+(t)}{m\omega_0} \right] e^{\frac{\gamma t}{2}}, \quad (5.41)$$

que satisfacen  $[\mathbf{a}(t), \mathbf{a}^\dagger(t)] = 1$ . Definimos el operador  $\mathbf{N}(t) \equiv \mathbf{a}^\dagger(t)\mathbf{a}(t)$ , el cual satisface,

$$[\mathbf{N}(t), \mathbf{a}(t)] = -\mathbf{a}(t), \quad [\mathbf{N}(t), \mathbf{a}^\dagger(t)] = \mathbf{a}^\dagger(t). \quad (5.42)$$

Sea  $|n, t\rangle$  un eigenvector de  $\mathbf{N}(t)$ , entonces se puede mostrar que

$$\mathbf{a}(t)|n, t\rangle = \sqrt{n}|n-1, t\rangle, \quad \mathbf{a}^\dagger(t)|n, t\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, t\rangle. \quad (5.43)$$

El mismo razonamiento que se usa en el caso del oscilador armónico simple conduce a que  $n$  debe ser un entero positivo o cero. Por otro lado,

$$\mathbf{E}_+(t) = \hbar\omega_0 e^{-\gamma t} \left( \mathbf{N}(t) + \frac{1}{2} \right), \quad (5.44)$$

de donde se concluye que  $|n, t\rangle$  también es un eigenvector  $\mathbf{E}(t)$  son eigenvalor  $\hbar\omega_0 e^{-\gamma t} (n + \frac{1}{2})$ . Nótese que estos son los mismos eigenvalores que se encontraron en la cuantización canónica del sistema de Caldirola-Kanai.

## 5.3. Implementación física

Como se dicho, el formalismo que proponemos en este capítulo es análogo a la imagen de Heisenberg de la mecánica cuántica. Los operadores, entre ellos los que representan observables, evolucionan con el tiempo. El vector de estado, por su parte, corresponde a la preparación del sistema [34]. Tenemos pendiente, entre otros aspectos, el desarrollo de la ‘imagen de Schrödinger’, es decir, una formulación alternativa en la que el vector de estado, y no los operadores, evoluciona con el tiempo. Las dos imágenes (suponiendo que existen) son complementarias y hay conceptos que resultan más sencillos de entender en una u otra. En particular, los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica, tales como preparaciones, pruebas, estados, mediciones, etc., se presentan por lo general en la imagen de Schrödinger [25, 34].

Encontramos que la evolución que describe la ecuación (5.10) no es unitaria, es decir, los operadores dependientes del tiempo no se pueden escribir como  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{U}^\dagger(t)\mathbf{F}\mathbf{U}(t)$ , donde  $\mathbf{U}(t)\mathbf{U}^\dagger(t) = \mathbf{U}^\dagger(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{1}$ . Esto no nos sorprende demasiado porque una evolución unitaria implicaría reversibilidad, la cual es una característica que no esperamos que esté presente en la dinámica que intentamos describir<sup>1</sup>, la de un sistema no conservativo.

---

<sup>1</sup>La evolución no unitaria se encuentra, por ejemplo, en modelos de átomos en interacción con campos electromagnéticos [25]. Sin embargo, aquí la situación es un tanto diferente dado que no estamos usando un modelo *sistema-ambiente*.

Por otro lado, los operadores correspondientes a la posición y el momento físicos (de acuerdo con la definición del Capítulo 2) están dados por

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_+(t), \quad \mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\pi}_+(t) - m\frac{\gamma}{2}\mathbf{q}_+(t), \quad (5.45)$$

y satisfacen,

$$[\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)] = i\hbar e^{-\gamma t} \quad (5.46)$$

Por sí mismo, este resultado no genera tanto conflicto. En tanto este conmutador no sea cero será imposible, al menos teóricamente, determinar la posición y el momento de manera simultánea [34], es decir, con un mismo experimento. En cambio, la relación de incertidumbre

$$\sigma_{\mathbf{q}}\sigma_{\mathbf{p}} \geq \frac{\hbar}{2}e^{-\gamma t}. \quad (5.47)$$

sí representa, en primera instancia, una violación del Principio de Incertidumbre, en el sentido que se explicó en la Sección 2.3. En este punto podríamos invocar una solución como la de Schuch porque, al igual que en el sistema de Caldirola-Kanai, las variables de la teoría de Galley no son las variables físicas (en el Apéndice B se muestra que el paso a las variables físicas no corresponde a una transformación canónica). Sin embargo, esto requiere la imagen de Schrödinger, pues debemos dar la relación entre la función de onda en el espacio físico y la función de onda en el espacio canónico [16]. Una posible interpretación de este resultado que, sin embargo, dejamos para un trabajo futuro, tiene que ver con la pérdida del carácter cuántico, donde entran en juego conceptos como *decoherencia* y *correlación clásica* [35].

Ahora debemos comentar acerca del espectro de energía dependiente del tiempo que obtuvimos. Cuando la evolución corresponde a una transformación unitaria el espectro de un operador no cambia  $\mathbf{A}\phi_n = \lambda_n\phi_n \rightarrow [\mathbf{U}^\dagger(t)\mathbf{A}\mathbf{U}(t)][\mathbf{U}^\dagger(t)\phi_n] = \lambda_n[\mathbf{U}^\dagger(t)\phi_n]$ . En nuestro caso, la evolución no es unitaria y los eigenvalores dependen del tiempo. Entendemos la distorsión del espectro de energía como resultado de la interacción con los agentes externos (que no estamos modelando) responsables de la dinámica no conservativa. Los eigenvectores de energía forman una base del espacio de Hilbert que es continuamente deformada. Cabe señalar que la dimensión de este espacio no cambia con respecto al caso conservativo.

Los resultados que hemos obtenido, entre ellos el espectro de energía (5.31) y el conmutador dependiente del tiempo (5.46), concuerdan con los que se obtuvieron con la cuantización canónica del sistema de Caldirola-Kanai. Sin embargo, se han obtenido aquí en el contexto de operadores dependientes del tiempo. La imagen de Heisenberg del sistema de Caldirola-Kanai no es muy sencilla de implementar debido a la no conmutatividad del operador hamiltoniano en tiempo distintos [5, 23].

**CAPÍTULO 5. SISTEMA DE GALLEY CUÁNTICO**  
**5.3. IMPLEMENTACIÓN FÍSICA**

---

# Capítulo 6

## Conclusiones

Revisamos algunos resultados acerca de la cuantización canónica del sistema de Caldirola-Kanai y de Bateman. En el primer caso se obtienen resultados que se ajustan relativamente bien a lo que podríamos esperar del oscilador amortiguado cuántico. Por ejemplo, los valores medios del operador de posición y momento satisfacen las ecuaciones de movimiento clásicas. Por otro lado, el conmutador de estos operadores tiende a cero con el paso del tiempo, esto se ha entendido usualmente como una violación del Principio de Incertidumbre. Una explicación a este problema, basada (aunque no rigurosamente) en la conexión no unitaria entre la descripción cuántica en el espacio canónico y el espacio físico, fue descrita en la Sección 2.3.

Por otro lado, la hamiltoniana de Bateman no depende explícitamente del tiempo. Usualmente ésta se considera el modelo *sistema-ambiente* más simple, sin embargo, tal interpretación conduce a ciertas inconsistencias, como el hecho de que, en el caso conservativo, la energía total no es la suma de las energías de los dos sistemas independientes.

Entre los avances que se hicieron en este trabajo están el desarrollo del formalismo hamiltoniano de la teoría de Galley para sistemas no conservativos. Un cálculo que involucra prácticamente todo lo que presentamos en el capítulo 4 es la ecuación de Hamilton-Jacobi para el problema de oscilador amortiguado. Se ilustró que el límite físico es una consecuencia directa de las condiciones de frontera con que se realiza la variación de la acción. Se propuso un esquema de cuantización no canónico para este formalismo. La razón principal para no cuantizar canónicamente tiene que ver con la imposibilidad de asociar observables a los operadores cuyas contrapartes clásicas corresponden a las cantidades físicas.

Ha quedado pendiente la formulación en la imagen de Schrödinger. Nos interesa conocer cómo se modifica la ecuación de continuidad con la evolución no unitaria y compararla con la que se postula, por ejemplo, en el contexto de la ecuación de Schrödinger logarítmica (2.43). Otro aspecto por estudiar es la decoherencia y *clasicidad* del oscilador amortiguado cuántico. Con respecto a esto, se reporta en [24], que la matriz de densidad correspondiente a estados gaussianos del sistema de Caldirola-Kanai no manifiestan decoherencia en contraposición al sistema de Bateman.



# Apéndice A

## Identidad de Jacobi

Para mostrar que  $\{, \}$  satisface la identidad de Jacobi notemos que, como resultado de la definición, se cumple

1. Sean  $P = AB$ ,  $C$  y  $D$  operadores arbitrarios, entonces

$$\{P, \{C, D\}\} + \{C, \{D, P\}\} + \{D, \{P, C\}\} = (\{A, \{C, D\}\} + \{C, \{D, A\}\} + \{D, \{A, C\}\}) B \\ + A(\{B, \{C, D\}\} + \{C, \{D, B\}\} + \{D, \{B, C\}\}).$$

2. Si, en cambio,  $S = A + B$ , entonces

$$\{S, \{C, D\}\} + \{C, \{D, S\}\} + \{D, \{S, C\}\} = \{A, \{C, D\}\} + \{C, \{D, A\}\} + \{D, \{A, C\}\} \\ + \{B, \{C, D\}\} + \{C, \{D, B\}\} + \{D, \{B, C\}\}.$$

De esta manera, podemos reducir  $\{A, \{C, D\}\} + \{C, \{D, A\}\} + \{D, \{A, C\}\}$  con operadores arbitrarios a sumas y productos de

$$\{A_1, \{C_1, D_1\}\} + \{C_1, \{D_1, A_1\}\} + \{D_1, \{A_1, C_1\}\}, \quad (A.1)$$

$$\{A_1, \{C_1, D_2\}\} + \{C_1, \{D_2, A_1\}\} + \{D_2, \{A_1, C_1\}\}, \quad (A.2)$$

$$\{A_1, \{C_2, D_1\}\} + \{C_2, \{D_1, A_1\}\} + \{D_1, \{A_1, C_2\}\}, \quad (A.3)$$

$$\{A_1, \{C_2, D_2\}\} + \{C_2, \{D_2, A_1\}\} + \{D_2, \{A_1, C_2\}\}, \quad (A.4)$$

$$\{A_2, \{C_1, D_1\}\} + \{C_1, \{D_1, A_2\}\} + \{D_1, \{A_2, C_1\}\}, \quad (A.5)$$

$$\{A_2, \{C_1, D_2\}\} + \{C_1, \{D_2, A_2\}\} + \{D_2, \{A_2, C_1\}\}, \quad (A.6)$$

$$\{A_2, \{C_2, D_1\}\} + \{C_2, \{D_1, A_2\}\} + \{D_1, \{A_2, C_2\}\}, \quad (A.7)$$

$$\{A_2, \{C_2, D_2\}\} + \{C_2, \{D_2, A_2\}\} + \{D_2, \{A_2, C_2\}\}, \quad (A.8)$$

donde el subíndice 1 o 2 indica que dependen sólo de  $(q_1, \pi_1)$  o  $(q_2, \pi_2)$  respectivamente. Debido a (5.7), (A.2)-(A.7) son cero trivialmente. Por otro lado, usando (5.6) y (5.8), (A.1) y (A.8) se pueden escribir en términos de conmutadores y son cero idénticamente.

## A.1. Paréntesis básicos constantes

Sean  $A$  y  $B$  operadores de Schrödinger tales que  $\{\{A, B\}, \mathcal{H}\} = 0$ . Entonces, la definición de los operadores de Heisenberg (5.9) conduce a

$$\begin{aligned} \{A(t), B(t)\} &= \{A + \theta\{A, \mathcal{H}\} + \theta^2\{\{A, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}/2! + \dots, B + \theta\{B, \mathcal{H}\} + \theta^2\{\{B, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}/2! + \dots\} \\ &= \{A, B\} + \theta(\{A, \{B, \mathcal{H}\}\} + \{\{A, \mathcal{H}\}, B\}) + \theta^2(\{A, \{\{B, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}\} + \\ &\quad 2\{\{A, \mathcal{H}\}, \{B, \mathcal{H}\}\} + \{\{\{A, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}, B\})/2! + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde  $\theta = -it/\hbar$ . Ahora, usando la identidad de Jacobi, se encuentra, por ejemplo,

$$\{A, \{B, \mathcal{H}\}\} + \{\{A, \mathcal{H}\}, B\} = \{\{A, B\}, \mathcal{H}\} = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \{A, \{\{B, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}\} + 2\{\{A, \mathcal{H}\}, \{B, \mathcal{H}\}\} + \{\{\{A, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}, B\} \\ &= \{A, \{\{B, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\}\} + \{\{B, \mathcal{H}\}, \{\mathcal{H}, A\}\} + \{\{A, \mathcal{H}\}, \{B, \mathcal{H}\}\} + \\ &\quad \{B, \{\mathcal{H}, \{A, \mathcal{H}\}\}\} \\ &= -\{\mathcal{H}, \{A, \{B, \mathcal{H}\}\}\} - \{\mathcal{H}, \{B, \{\mathcal{H}, A\}\}\} \\ &= -\{\mathcal{H}, \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} + \{B, \{\mathcal{H}, A\}\}\} \\ &= \{\{\{A, B\}, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Es decir,

$$\{A(t), B(t)\} = \{A, B\} + \theta\{\{A, B\}, \mathcal{H}\} + \theta^2\{\{\{A, B\}, \mathcal{H}\}, \mathcal{H}\} + \dots = \{A, B\}. \quad (\text{A.12})$$

# Apéndice B

## VARIABLES FÍSICAS

La formulación hamiltoniana de la teoría de Galley contiene la dinámica que describen las ecuaciones no conservativas (1.4). Esto se puede mostrar del mismo modo que en la Sección 2.0.1 para la hamiltoniana de Caldirola-Kanai. Por simplicidad, consideraremos un sistema no conservativo unidimensional con un potencial  $K$  lineal en las velocidades y sin derivadas totales.

De la definición de los momentos conjugados canónicos (4.17) podemos ver que

$$p_1 \equiv \frac{\partial L(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = \pi_1 - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 \equiv \frac{\partial L(q_2, \dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2} = \pi_2 + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}. \quad (\text{B.1})$$

Las coordenadas  $(q_1, \pi_1, q_2, \pi_2)$  y  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  no están relacionadas por una transformación canónica porque, en general,  $\{p_1, p_2\} \neq 0$ , por ejemplo, en el caso del oscilador amortiguado,  $\{p_1, p_2\} = \gamma m$ .

Si las variables  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  son funcionalmente independientes podemos implementar la transformación general de coordenadas  $(q_1, \pi_1, q_2, \pi_2) \rightarrow (q_1, p_1, q_2, p_2)$ . Bajo esta transformación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial q_1} + \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) \frac{\partial}{\partial p_2}, & \frac{\partial}{\partial \pi_1} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial p_1}, \\ \frac{\partial}{\partial q_2} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial q_2} - \left( \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) \frac{\partial}{\partial p_1}, & \frac{\partial}{\partial \pi_2} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial p_2}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left( p_1 + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} - \left( p_2 - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) \dot{q}_2 - L(q_1, \dot{q}_1) + L(q_2, \dot{q}_2) - K \\ &= H(q_1, p_1) - H(q_2, p_2) + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 - K, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde  $\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_1, p_1)$  y  $\dot{q}_2 = \dot{q}_2(q_2, p_2)$  y  $H$  es la hamiltoniana conservativa asociada a  $L$ . Cuando  $K$  es homogénea lineal en las velocidades,  $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 - K = 0$  [3], sin embargo, es conveniente mantener la expresión (B.3) sin hacer esta simplificación.

Las ecuaciones de movimiento (4.21) equivalen a

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_1} - \frac{\partial K}{\partial p_1}, \\
 \dot{p}_1 + \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial K}{\partial q_1} - \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) \dot{q}_2 - \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) \left( -\frac{\partial H_2}{\partial p_2} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_2} - \frac{\partial K}{\partial p_2} \right), \\
 \dot{q}_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial p_2} - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_2} + \frac{\partial K}{\partial p_2}, \\
 \dot{p}_2 - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} &= -\frac{\partial H_2}{\partial q_2} + \left( \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) \dot{q}_1 + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} - \frac{\partial K}{\partial q_2} - \left( \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) \left( \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_1} - \frac{\partial K}{\partial p_1} \right),
 \end{aligned}$$

donde  $H_1 \equiv H(q_1, p_1)$  y  $H_2 \equiv H(q_2, p_2)$ . Por la definición (B.1) y las condiciones que hemos impuesto a  $K$  resulta que  $\dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_1, p_1)$  y  $\dot{q}_2 = \dot{q}_2(q_2, p_2)$ , con lo cual  $\frac{\partial}{\partial p_1} = \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}$  y  $\frac{\partial}{\partial p_2} = \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}$ . Entonces podemos simplificar las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_1} + \left( \frac{\partial K}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1}, \\
 \dot{q}_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H_2}{\partial q_2} - \left( \frac{\partial K}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2}.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Sea  $F$  una función del espacio fase  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &= \left( \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \right) \\
 &+ \frac{\partial F}{\partial p_1} \left\{ \left( \frac{\partial K}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} \right\} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \left\{ - \left( \frac{\partial K}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Aplicando el límite físico, esta vez a nivel de las ecuaciones de movimiento, esta expresión toma la forma (1.4).

# Apéndice C

## Partícula amortiguada

### C.1. Hamiltoniana dependiente del tiempo

El operador hamiltoniano es simplemente

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) = e^{-\gamma t} \frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} = e^{\gamma t} \mathbf{E}(t), \quad (\text{C.1})$$

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = e^{-\gamma t} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}. \quad (\text{C.2})$$

Sustituyendo  $\psi(x, t) = \phi(x)\theta(t)$  en esta ecuación obtenemos

$$\frac{d^2 \phi}{dq^2} + \frac{2mE_0}{\hbar^2} \phi = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} + \frac{iE_0 e^{-\gamma t}}{\hbar} \theta = 0. \quad (\text{C.3})$$

Entonces las funciones de onda son

$$\psi_{p_0}(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left[ i \left( \frac{p_0}{\hbar} q - \frac{E_0}{\hbar} \tau(t) \right) \right], \quad (\text{C.4})$$

donde  $p_0 = \sqrt{2mE_0}$  y  $\tau(t) = \gamma^{-1} (1 - e^{-\gamma t})$ . Las eigenfunciones del operador energía son ondas planas

$$\phi_{p_0}(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left( i \frac{p_0}{\hbar} q \right) \quad (\text{C.5})$$

con eigenvalores

$$E(t) = e^{-2\gamma t} \frac{p_0^2}{2m}. \quad (\text{C.6})$$

Consideremos un paquete de ondas gaussiano

$$\psi_G(q, t) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{a + 2i\hbar\tau(t)/am}} \exp \left( -\frac{q^2}{a^2(1 + 2i\hbar\tau(t)/a^2m)} \right). \quad (\text{C.7})$$

En este estado los valores medios de los operadores de posición y momento son cero mientras que

$$\langle \mathbf{q}^2 \rangle_{\psi_G} = \frac{a^2}{4} \left( 1 + \frac{4\hbar^2 \tau^2(t)}{a^4 m^2} \right), \quad \langle \tilde{\mathbf{p}}^2 \rangle_{\psi_G} = \frac{\hbar^2}{a^2}. \quad (\text{C.8})$$

Por lo tanto, la relación de incertidumbre en este estado es

$$\sigma_{\mathbf{q}} \sigma_{\tilde{\mathbf{p}}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 \tau^2(t)}{a^4 m^2}}. \quad (\text{C.9})$$

## C.2. Hamiltoniana de Galley

La hamiltoniana es

$$\mathcal{H}_{pa} = \frac{\boldsymbol{\pi}_+ \boldsymbol{\pi}_-}{m} + m \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \mathbf{q}_+ \mathbf{q}_- - \frac{\gamma}{2} (\boldsymbol{\pi}_+ \mathbf{q}_- + \boldsymbol{\pi}_- \mathbf{q}_+). \quad (\text{C.10})$$

Los operadores dependientes de tiempo son

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_+(t) &= \frac{\mathbf{q}_+}{2} (1 + e^{-\gamma t}) + \frac{\boldsymbol{\pi}_+}{m\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \\ \boldsymbol{\pi}_+(t) &= \frac{\boldsymbol{\pi}_+}{2} (1 + e^{-\gamma t}) + \frac{m\gamma}{4} \mathbf{q}_+ (1 - e^{-\gamma t}). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

El operador energía dependiente del tiempo es

$$\mathbf{E}(t) = \left( \frac{\boldsymbol{\pi}_+^2}{2m} - \frac{\gamma}{4} [\mathbf{q}_+, \boldsymbol{\pi}_+]_+ + \frac{m}{2} \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \mathbf{q}_+^2 \right) e^{-2\gamma t}. \quad (\text{C.12})$$

Las eigenfunciones de energía son

$$\phi_{p_0}(q_+, t) = (2\pi)^{-1} \exp \left( i \frac{m\gamma}{4\hbar} q_+^2 + i \frac{p_0}{\hbar} q_+ \right) \quad (\text{C.13})$$

con los eigenvalores dados por  $E_{p_0}(t) = \frac{p_0^2}{2m} e^{-2\gamma t}$ .

# Bibliografía

- [1] R. M. Santilli. *Foundations of Theoretical Mechanics II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics*. (Springer-Verlag, 1983).
- [2] R. M. Santilli. *Foundations of Theoretical Mechanics I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*. (Springer-Verlag, 1978).
- [3] J.V. José and E.J. Saletan. *Classical Dynamics: a Contemporary Approach*. (Cambridge University Press, 1998).
- [4] C. Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics 4th. Ed.* (University of Toronto Press, 1970).
- [5] J. Guerrero, et. al. “Symmetries of the quantum damped harmonic oscillator”. *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 475303 (2012).
- [6] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. “Quantum tunnelling in a dissipative system”. *Ann. Phys.* **149** 374-456 (1983).
- [7] C.R. Galley. “Classical Mechanics of Nonconservative Systems”. *Phys. Rev. Lett.* **110** 174301 (2013).
- [8] E. Kanai. “On the quantization of dissipative systems”. *Prog. Theor. Phys.* **3** 440-442 (1948).
- [9] L. Y. Bahar and H. G. Kwatny. “Generalized Lagrangian and conservation law for the damped harmonic oscillator”. *Am. J. Phys.* **49** 1062-1065 (1981).
- [10] H. Bateman. “On dissipative systems and related variational principles”. *Phys. Rev.* **38** 815-819 (1931).
- [11] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics Vol 1*. (McGraw-Hill, 1953).
- [12] C.R. Galley, et. al. “The principle of stationary nonconservative action for classical mechanics and field theories”. arXiv:1412.3082 [math-ph].
- [13] W. E. Brittin. “A note on the quantization of dissipative systems”. *Phys. Rev.* **77** 396-397 (1950).

- [14] N. Lemos. “The Heisenberg picture is not privileged for the canonical quantization of dissipative systems”. *Phys. Rev. D.* **24** 2338-2340 (1981).
- [15] M. Montesinos. “Heisenberg’s quantization of dissipative systems”. *Phys. Rev. A.* **68** 014101 (2003).
- [16] D. Schuch. “Nonunitary connection between explicitly time-dependent and nonlinear approaches for the description of dissipative quantum systems”. *Phys. Rev. A.* **55** 935-940 (1997).
- [17] I. A. Pedrosa. “Quantum description of a time-dependent mesoscopic RLC circuit”. *Phys. Scr.* **T151** 014042 (2012).
- [18] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. 6th. Ed. (Elsevier Academic Press, 2005).
- [19] B. Hamilton and M. Crescimanno. “Linear frictional forces cause orbits to neither circularize nor precess”. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 235205 (2008).
- [20] H. Gzyl. “Quantization of the damped harmonic oscillator”. *Phys. Rev. A.* **27** 2297-2299 (1983).
- [21] M. Razavy. *Classical and Quantum Dissipative Systems*. (Imperial College Press, 2006).
- [22] T. J. Li. “A concise quantum mechanical treatment of the forced damped harmonic oscillator. *Cent. Eur. J. Phys.* **6** 891-894 (2008).
- [23] V. Aldaya, et. al. “The quantum Arnold transformation”. *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 065302 (2011).
- [24] S. P. Kim, et. al. “Decoherence of Quantum Damped Oscillators”. *J. Korean Phys. Soc.* **43-4** 452-460 (2003).
- [25] M. Le Bellac. *Quantum Physics*. (Cambridge University Press. 2006).
- [26] C. I. Um, et. al. “The quantum damped harmonic oscillator”. *Phys. Rep.* **362** 63-192 (2002).
- [27] M. D. Kostin. “On the Schrödinger-Langevin Equation”. *J. Chem. Phys.* **57** 3589 (1972).
- [28] G.F. Torres del Castillo and C. Sosa Sánchez. “Solutions of the Schrodinger equation given by solutions of the Hamilton-Jacobi equation”. *Rev. Mex. Phys.* **62** 534-537 (2016).
- [29] R. Banerjee, and P. Mukherjee. “A canonical approach to the quantization of the damped harmonic oscillator”. *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 5591-5598 (2002).

- [30] J. M. Cervero and J. Villarroel. “SL(3,R) realisations and the damped oscillator”. *J. Phys. A. Math. Gen.* **17** 1777-1786 (1984).
- [31] G. Rideau, et. al. “Canonical Quantization of the Bateman-Morse-Feshbach damped oscillator”. *Lett. Math. Phys.* **23** 79-89 (1991).
- [32] H. Feshbach and Y. Tikochinsky. “Quantization of the damped harmonic oscillator”. *Transact. N.Y. Acad. Sci.* **38** (1977).
- [33] G.F. Torres del Castillo. “The generating function of a canonical transformation”. *Rev. Mex. Phys. E.* **57**(2) 158-163 (2011).
- [34] A. Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. (Kluwer Academic Publishers. 2002).
- [35] M. Morikawa. “Quantum decoherence and classical correlation in quantum mechanics”. *Phys. Rev. D.* **42** 2929-2932 (1990).