



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

CONSTRUCCIÓN DEL
ESPACIO DE ELEMENTOS
DE CONTACTO DE \mathbb{R}^2

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:
RAFAEL TONATIUH FUERTE PÉREZ



DIRECTORES DE TESIS:
DR. MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ARIZA
DR. CARLOS GUILLÉN GALVÁN

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

He de agradecer en lo general a todos aquellos profesores de la facultad que con su apoyo intelectual o emocional me transmitieron su conocimiento ya sea de las ciencias que ellos mismos estudian o de la vida misma. En lo particular, y no por ello hacer de menos a lo general, debo agradecer al profesor Soriano Soriano Celestino, con quien estudié y trabajé en todos sus cursos de cálculo y análisis en los espacios euclidianos, y por tanto quien me llevó al camino del análisis matemático. También al profesor Velázquez Castillo Fernando, cuya experiencia y atenciones me hicieron querer aún más a la matemática pero sobre todo sentirme orgulloso de mi universidad y trabajar duro, manteniendo inmutable el corazón ante el paso del tiempo como si se tratara siempre de los días de juventud y rebeldía, en el sentido de que la universidad no debe ser un feudo de privilegiados y que la comunidad universitaria sólo puede crecer con el apoyo mutuo entre compañeros alumnos y maestros. Agradezco mucho al profesor Badillo Márquez Jaime cuyas enseñanzas me han marcado profundamente en tantas áreas y que me iluminó en la ciencia y el humanismo, y en quien encontré un mentor y un gran amigo que me enseñó a estudiar, a respetar y comprender tanto a compañeros alumnos como profesores. Palabras me faltarían para describir todo el respeto y cariño que les tengo. Agradezco a mis amigos, que aunque con el paso de los años nos ha llevado a rumbos distintos, su amistad tiene un gran significado en cada etapa desde mi adolescencia hasta la etapa adulta, y que de nombrarlos terminaría haciendo un apéndice. Sin embargo quisiera hacer notar de entre mis amigos de licenciatura, a Manuel, Aleyda, Pedro, Ángel, Adal, y Alonzo quienes fueron grandes compañeros de equipo y con quienes disfruté mucho compartir aquellos días en que tomábamos las clases de cálculo y nos motivábamos los unos a los otros para dar lo mejor de nosotros, sobre todo mi profunda admiración a Alonzo Moreno y mi agradecimiento por los días en que nos sentábamos a estudiar y me ayudaba a estudiar muy fuerte para no

IV

quedarme atrás. Agradezco a Juárez Flores Daniel Luciano, quien me abrió las puertas al laboratorio y de quien aprendí mucho sobre la experimentación. Quiero agradecer a Jessica Figueroa Álvarez, que aunque ya había dado asesorías, es a ella quien considero mi primer alumna, debido a que había una sintonía que me impulsaba a entregar una educación de calidad, al mismo tiempo de disfrutar el transmitir conocimiento a pesar de la distancia. He de agradecer fuertemente a mi madrina Olga Guadalupe Félix Beltrán, no sólo por su apoyo en los momentos más difíciles, sino por el espacio que me abrió para iniciar con una disciplina en el estudio universitario. También a mi padrino Enrique Barradas Guevara, ya que si alguien plantó la idea de que decidiera estudiar matemáticas, sin duda fue él en el momento en que mencionó “grupo abeliano”. Agradezco a mi padrino el profesor Guillermo Martínez Peña, su pasión por la física y su arduo trabajo siempre han sido una gran inspiración. Agradezco todo el apoyo incondicional de Mirna Fuentes López, y todas las atenciones hacia conmigo y mi familia. Agradezco a mis asesores de tesis. Por un lado, al profesor Carlos Guillén Galván, ya que desde que tomé su clase de geometría diferencial, marcó la dirección del área que más me gusta en la matemática, además de descubrir con él el mundo de la teoría de grafos. Y por otro lado, agradezco a mi asesor de tesis Miguel Ángel García Ariza, de quien sentía profunda admiración desde que él estaba en la licenciatura y terminó siendo, hasta la fecha, mi último gran mentor, pues si bien durante la licenciatura tuve grandes maestros, Miguel me enseñó nuevas áreas del conocimiento así como hacerme comprender cosas que creía saber, abordar nuevos problemas, pensar para hacer matemáticas, y no hacer más que incrementar la admiración hacia su trabajo y su calidad humana, por ello, la mejor manera de agradecerle es honrarlo con sus enseñanzas, le agradezco por toda su paciencia y también por la amistad que me ha brindado. Uno de los eventos que cambiaron mi vida y que ocurrió en la facultad fue no tener casillero y debido a ello encontrarme con Marijosse Martínez Fernández, le agradezco con todo mi corazón el haber compartido muchos de los mejores momentos, dentro y fuera de la institución. En ella he encontrado a la mejor amiga y mejor compañera de vida, agradezco su paciencia y comprensión cuando me ausentaba del mundo al estudiar, también por todo el amor que me ha brindado, el cual me otorga fuerzas para seguir adelante cada día. Pero sobre todo agradezco a mi familia. A mi padre Rafael Forte Velázquez, quien fue el primer modelo a seguir y de quien heredé su formación cultural. A mis hermanos, América Eréndira Forte Pérez y Ángel Cuauhtemoc Forte Pérez, de quienes recuerdo que de niños me gustaba jugar a ser

su maestro y enseñarles a leer o contar, y que terminaron siendo ellos quienes más me han enseñado. Ambos han sido mi brújula moral e intelectual y ejemplos para seguirme superando, sólo ustedes saben lo mucho que me han apoyado, y lo mucho que los quiero y siento siempre a mi lado. Por último quiero agradecer a mi madre María de los Ángeles Pérez Azcona. Si bien mi padre sostenía que lo más importante era la familia, ha sido mi madre quien nos ha mantenido profundamente unidos, es la persona que más admiro, por todo el trabajo que ha hecho para sacarnos adelante y que no nos falte nada. Gracias mamá siempre guardo en mis recuerdos y corazón el día en que me enseñaste a contar, fuiste mi primer maestra. Todo lo bueno que hay en mí comenzó contigo mamá.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Vectores tangentes y campos	1
1.2. Formas diferenciales	13
2. Resultados preliminares	19
2.1. Los reales extendidos y la circunferencia	20
2.2. Variedades suaves	23
2.3. S^1 es una variedad suave	24
2.4. Suavidad inducida	26
3. El espacio de elementos de contacto	31
3.1. Los elementos	31
3.2. El espacio de elementos de contacto es suave	40

Introducción

Los antecedentes de la Geometría de Contacto se remontan a un tercio antes del siglo XX, cuando el matemático Sophus Lie introdujo la notación de transformación de contacto (Berührungstransformation) como una herramienta geométrica para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Sophus Lie define a un elemento de contacto de \mathbb{R}^2 o elemento de línea (Linienelement) como un punto $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ y una recta que pasa por ese punto.

Siempre que la pendiente p de esta línea sea finita, la ecuación de esta línea se puede escribir de la forma

$$dz - pdx = 0 \tag{1}$$

y el espacio de elementos de contacto se puede identificar con \mathbb{R}^3 con coordenadas (x, z, p) [1].

El trabajo de esta tesis consiste en interpretar estos conceptos introducidos por Lie empleando la matemática actual.

Podemos tener una noción intuitiva sobre esta geometría (la geometría de contacto en \mathbb{R}^2) que surge de la definición de Lie, para ello tomemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dz}{dx} = p,$$

si pensamos esta ecuación como si se tratara de una fracción y pudiéramos “despejar”, entonces podríamos llegar a la misma forma que tiene la ecuación (1), pero el lado izquierdo de la ecuación diferencial es un símbolo para expresar la derivada de la variable z con respecto a la variable x . Entonces surge la pregunta ¿existirá un camino para poder tratar a la operación derivada como una “fracción” en el sentido de poder “despejar”, o de qué otra manera podemos llegar a la forma $dz - pdx$?, tendremos que esperar hasta el final

del capítulo 1 para poder contestar a esta pregunta y ver qué tipo de objeto matemático es $dz - p dx$. Por ahora lo que ganaríamos hasta aquí, con este tratamiento intuitivo, es que p es la derivada de la variable z respecto a x .

Supongamos por el momento que podemos hacer esta clase de “despejes” y apliquemos esta idea en un ejemplo.

Dada la ecuación diferencial $z' + z = 0$, es decir, $\frac{dz}{dx} + z = 0$, entonces $\frac{dz}{dx} = -z$, por lo que $p = -z$. Si tomamos un punto en el plano xz , digamos el punto $A = (2, 3)$, entonces, de acuerdo con Lie, la pendiente p de la línea que pasa por el punto A toma el valor de $p = -3$.

Por otro lado, si tomamos el punto $A = (2, 3)$, entonces $z = -3x + 9$ es la ecuación de la línea recta que pasa por el punto $(2, 3)$ con pendiente igual a -3 , que es el mismo valor obtenido con el desarrollo anterior. Luego de esta recta tomemos un segmento finito que pase por el punto A . Tomando distintos puntos con sus respectivos valores para p (las pendientes), construimos el campo direccional asociado a la ecuación diferencial dada. Además al resolver la ecuación diferencial obtenemos la función $\phi(x) = e^{-x}C$, con C una constante, por lo que, al hacer $C = 1$ obtenemos la ecuación $z_1 = e^{-x}$, entonces la solución particular de una ecuación diferencial tiene un significado geométrico, más aún, la solución de una ecuación diferencial se puede formar a partir de su campo direccional puesto que los “elementos de línea” (tener un punto y una pendiente) son tangentes a las curvas solución en cada punto (Figura 1).

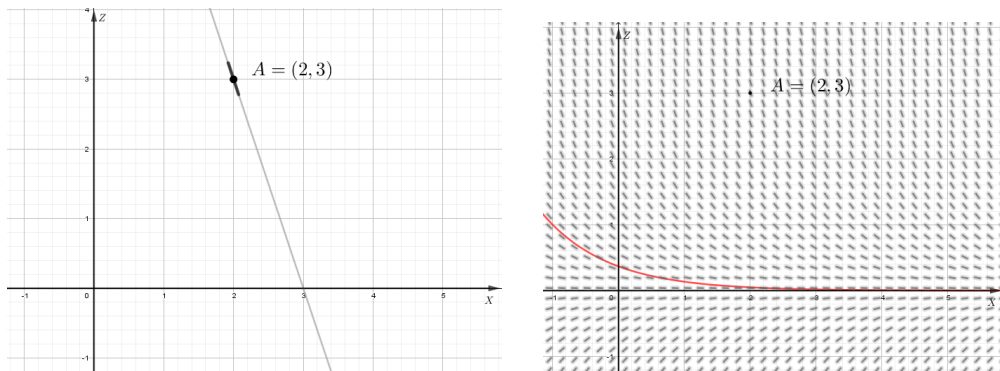


Figura 1: Pendiente correspondiente a un punto fijo, y campo direccional de $\frac{dz}{dx} = -z$.

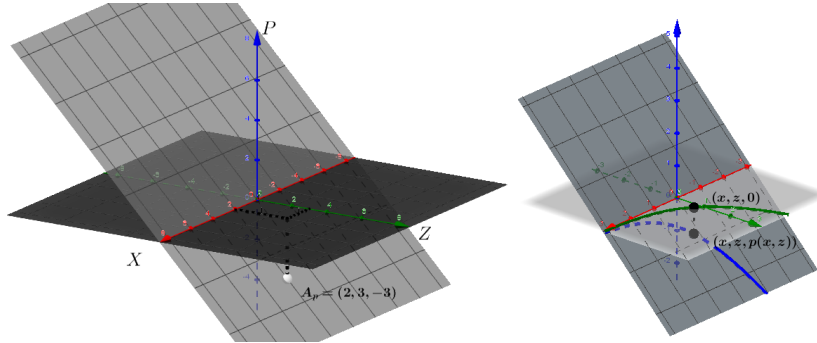


Figura 2: Superficie correspondiente a la ecuación diferencial $\frac{dz}{dx} = -z$.

Si con la pareja de puntos (x, z) junto con la pendiente p obtenemos la solución de una ecuación diferencial, ahora con la terna de puntos de la forma (x, z, p) , donde p es igual a la magnitud de la pendiente en cada punto del plano, entonces obtenemos la representación geométrica de una ecuación diferencial, es decir, la superficie $p(x, z) = -z$ representa justamente la ecuación diferencial. Notemos entonces la relación geométrica que hay entre la curva de una solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dz}{dx}$, que vive en \mathbb{R}^2 , y la curva que está contenida en la superficie correspondiente a la ecuación diferencial en el espacio de dimensión 3 (Figura 2) .

Como podemos pensar en que la superficie es consecuencia de subir o bajar los puntos del plano xz de acuerdo a la altura determinada por la pendiente de las semirectas en esos puntos, entonces, en particular, podemos darle altura a todos los puntos que forman la solución de la ecuación diferencial hasta hacer “contacto” con la superficie en \mathbb{R}^3 .

De la definición dada por Sophus Lie, el espacio de elementos de contacto lo identifica con \mathbb{R}^3 , con el trabajo de esta tesis se verá el por qué. Para ello necesitamos trabajar con algún conjunto que se parece mucho de manera local a \mathbb{R}^3 . En el capítulo 2 se presenta una definición de variedad, esto con el objetivo de identificar las similitudes con algún espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Como cada elemento de contacto queda determinado por cada uno de los puntos del plano cartesiano, revisaremos el concepto de campo vectorial, y posteriormente conocer otro tipo de campos (campos escalares, distribuciones, campos de funcionales), que nos permitirá construir el espacio de elementos de contacto.

Se identificará al espacio de elementos de contacto con el espacio de todas

las líneas “pequeñas” de pendiente p en cada punto de \mathbb{R}^2 . Además permitiremos pendientes infinitas, por lo que p puede tomar valores en los reales extendidos. Ya sea que p tome valores en la recta o en los reales extendidos, los elementos del espacio de elementos de contacto quedan determinados por ternas cuyas primeras dos entradas son las del punto y la última es correspondiente a p , por ello que se considere a \mathbb{R}^3 si la pendiente es finita, o bien que se considere a $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \times \{\infty\})$ si la pendiente es infinita. Además, como el capítulo 2 nos permite identificar a los reales extendidos con la circunferencia, entonces, tomar un punto y una pendiente es equivalente a dar un punto en el plano \mathbb{R}^2 y otro en el círculo. Ahí mismo probamos que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ es una variedad suave. Entonces, la identificación de este conjunto con el espacio de elementos de contacto permite concluir que este último es una variedad suave de dimensión 3, como probamos en el Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

La finalidad de este capítulo es presentar los conceptos que servirán para la construcción del espacio de elementos de contacto.

Aprovecharemos la estructura algebraica de los espacios euclidianos para reinterpretar la idea de tomar un punto y una pendiente [1]. Por ello, nos motivaremos en el concepto de campo vectorial, el cual toma un punto y lo transforma en un vector. Así, el concepto de campo vectorial nos dará una noción para el estudio de otro tipo de campos que aparecen en este mismo capítulo y que nos ayudarán a la interpretación geométrica de los elementos del espacio de elementos de contacto.

Veremos cómo construir en cada punto un espacio vectorial llamado espacio cotangente a \mathbb{R}^2 en un punto, para posteriormente reunir a todos los espacios cotangentes en lo que se le conoce como haz cotangente. La importancia de la construcción del haz cotangente radica en que la construcción del espacio de elementos de contacto será análoga [2].

1.1. Vectores tangentes y campos

Cuando se trabaja en la rama del análisis matemático, los elementos en el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 son puntos de la forma $P = (x^1, x^2)$ donde $x^1 \in \mathbb{R}$, y $x^2 \in \mathbb{R}$ son las *coordenadas* del punto, que usualmente escribimos $x^1 = x$, y $x^2 = y$. Si dejamos a un lado al análisis, \mathbb{R}^2 tiene además estructura de un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales \mathbb{R} . En lo que sigue, para distinguir entre puntos y vectores, continuaremos identificando a los puntos por sus *coordenadas* $P = (x, y)$, mientras que a los vectores los

identificaremos con matrices columna, es decir, con la notación $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Intuitivamente, un vector en \mathbb{R}^2 puede ser representado geoméricamente como un segmento de línea orientado, o “flecha”, que parte del origen del sistema de coordenadas hasta el punto cuyos valores en las coordenadas son los mismos valores que el de las componentes del vector en cuestión. Para obtener una definición que sea tanto práctica como precisa, describiremos a una “flecha” en \mathbb{R}^2 dando su punto inicial p y el cambio, o vector \mathbf{v} , necesario para alcanzar su punto final $p + \mathbf{v}$.

Definición 1.1.1.

Un **vector tangente** \mathbf{v}_p a \mathbb{R}^2 en el punto p consta de dos puntos de \mathbb{R}^2 : su parte vectorial \mathbf{v} y su punto de aplicación p .

Geoméricamente representaremos \mathbf{v}_p como la flecha que va del punto p al punto $p + \mathbf{v}$ (Figura 1.1).

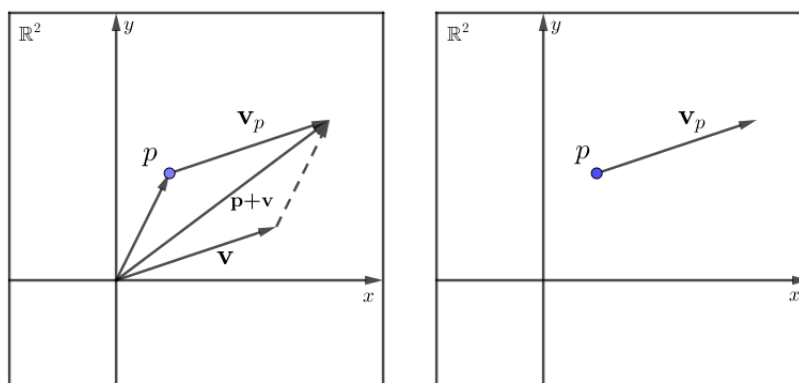


Figura 1.1: Construcción de un vector tangente.

Recordemos que para que un elemento sea reconocido como un vector, de manera geométrica éste tiene que pasar por el origen, entonces para que nuestros vectores tangentes efectivamente sean objetos de un espacio vectorial

veamos la siguiente definición.

Definición 1.1.2.

Sea un punto $p \in \mathbb{R}^2$, definimos el **espacio tangente de \mathbb{R}^2 en p** , denotado por $T_p(\mathbb{R}^2)$, al conjunto de todos los vectores tangentes que tienen a p como punto de aplicación.

Así, tener un espacio tangente de \mathbb{R}^2 en un punto p , es hacer una “copia” de \mathbb{R}^2 tomando al punto p como su origen de coordenadas (Figura 1.2).

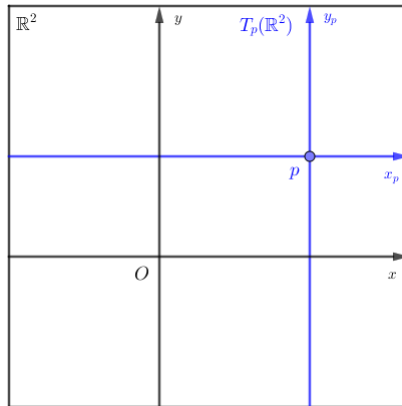


Figura 1.2: Espacio Tangente a \mathbb{R}^2 en el punto p .

Definimos una suma en $T_p(\mathbb{R}^2)$ como

$$\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p = (\mathbf{v} + \mathbf{w})_p$$

y para $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^2$ definimos un producto de un vector tangente por un escalar como:

$$a(\mathbf{v}_p) = (a\mathbf{v})_p.$$

Estas operaciones en cada espacio tangente $T_p(\mathbb{R}^2)$ lo convierten en un espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^2 mismo. De hecho se sigue inmediatamente de las definiciones anteriores que para un punto fijo p , la función

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^2)$$

$$\mathbf{v} \longmapsto T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_p$$

es un isomorfismo lineal, es decir, es una transformación lineal de \mathbb{R}^2 a $T_p(\mathbb{R}^2)$ que es uno-a-uno y sobre. En consecuencia \mathbb{R}^2 tiene diferentes espacios vectoriales tangentes en todos y cada uno de sus puntos cuyos orígenes son esos puntos, es decir, en cada punto tenemos una copia de \mathbb{R}^2 como espacio vectorial.

Estos conceptos pueden extenderse de manera natural a los espacios \mathbb{R}^n . Así pues, los espacios tangentes a algún \mathbb{R}^n en algún punto p son la copia de ese \mathbb{R}^n con origen en el punto p .

Como el espacio tangente a \mathbb{R}^n en el punto p es un espacio vectorial entonces la suma de sus objetos es cerrada, es decir, la suma de puntos en este espacio tangente da otro punto que sigue estando en este mismo espacio.

La cerradura es una propiedad que no ocurre si, en lugar de trabajar con los \mathbb{R}^n , trabajamos con \mathbb{S}^2 , la esfera unitaria, esto es, no podemos sumar puntos en la esfera y obtener puntos en la esfera. Lo que sí puede ocurrir es que, dado un punto sobre la esfera, podemos obtener el espacio tangente a la esfera en dicho punto. En términos geométricos, en un punto de la esfera podemos construir el plano tangente a la esfera en ese punto, el cual es un espacio vectorial y por tanto obtener nuevos objetos en ese plano (Figura 1.3).

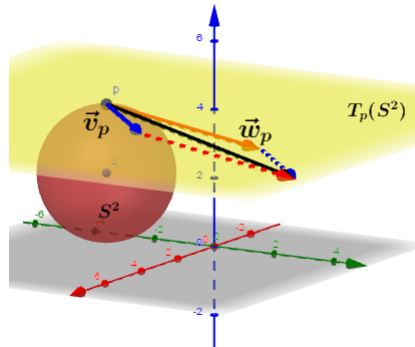


Figura 1.3: Espacio tangente a \mathbb{S}^2 en el punto p .

Ya que podemos construir un espacio tangente para cada punto en \mathbb{R}^2 , ahora nos interesará reunir a estos espacios asociados a cada punto del plano, lo cual nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.1.3.

Llamaremos **haz tangente a \mathbb{R}^2** , denotado por $T\mathbb{R}^2$, a la unión de todos los espacios tangentes en \mathbb{R}^2 , esto es:

$$T\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} T_p\mathbb{R}^2$$

Ahora continuaremos con un concepto que nos permita tomar puntos y que los convierta en vectores tangentes.

Definición 1.1.4.

Un **campo vectorial** es una función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$ tal que

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 : V(p) = \mathbf{v}_p$$

Entonces, un campo vectorial es un objeto que toma puntos y que devuelve vectores tangentes.

Por ejemplo, intuitivamente, cerca de la superficie terrestre, el campo gravitacional puede ser modelado a través de vectores que apuntan en la dirección negativa del eje y de un plano cartesiano, como si fueran dirigidas al centro de la Tierra (Figura 1.4).

Para formar el campo vectorial correspondiente al campo gravitacional terrestre, tomamos puntos $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. El valor medible cerca de la superficie terrestre de la aceleración debida a la gravedad es $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$. Si tomamos un punto ¿Cuál es el vector que nos indica que apunta hacia abajo y de magnitud 9.8?

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} T_p\mathbb{R}^2$$

$$p \mapsto V(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.8 \end{bmatrix}_p$$

Así como existe un objeto que toma puntos y nos devuelve vectores tangentes, al cual hemos llamado campo vectorial, también podemos considerar al objeto matemático que toma puntos y nos devuelve un valor escalar. A tal

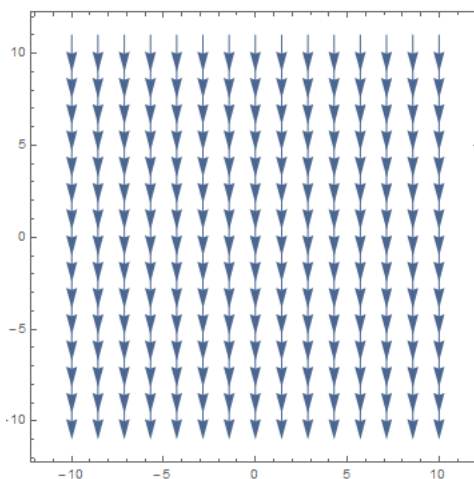


Figura 1.4: Campo vectorial correspondiente al campo gravitacional cerca de la superficie terrestre.

objeto lo llamaremos campo escalar, en otras palabras, un campo escalar es una función que toma puntos en su dominio y los mapea en escalares.

Y no sólo existen campos que toman puntos para luego transformarlos en vectores tangentes o escalares. También podemos tomar puntos y asignarles algún subespacio vectorial. Esto nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.1.5.

Llamaremos **distribución** a la función que a cada punto le asigna un subespacio del espacio tangente a su correspondiente punto.

Hasta este punto hemos visto que aunque existen diversos tipos de campos, además del campo vectorial, el concepto de campo nos permite tomar un punto y asignarle algún otro objeto matemático (vector tangente, escalar, subespacio, etc).

Continuando con los campos vectoriales, afirmamos que existe un *álgebra natural* de campos vectoriales.

Para describir tal álgebra, tomemos como heurística la noción de adición de funciones de valores reales f y g . Es posible realizar la suma de f y g puesto que es posible sumar sus valores en cada punto. Lo mismo es verdadero para campos vectoriales V y W . En cada punto p , sus valores $V(p)$ y

$W(p)$ están sobre el mismo espacio vectorial (el espacio tangente $T_p(\mathbb{R}^2)$), por tanto podemos sumar $V(p)$ y $W(p)$. Por consiguiente podemos considerar una operación de adición entre V y W , campos vectoriales, si sumamos sus valores en cada punto, esto es

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 : (V + W)(p) = V(p) + W(p).$$

Dado que este esquema ocurre una y otra vez vale la pena enunciarlo como el siguiente:

Principio puntual

Si se puede realizar una determinada operación sobre los valores de dos funciones en cada punto, entonces esa operación puede extenderse a las funciones mismas; simplemente aplíquelo a sus valores en cada punto.

Por ejemplo, si enunciamos el principio puntual para extender la operación de multiplicación por escalar (en los espacios tangentes de \mathbb{R}^2). Si f es una función de valor real en \mathbb{R}^2 y V es un campo vectorial en \mathbb{R}^2 , entonces fV es definida como el campo vectorial en \mathbb{R}^2 tal que

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 : (fV)(p) = f(p)V(p).$$

Al introducir al espacio tangente en un punto fijo en \mathbb{R}^2 , junto con este aparece de manera canónica otro espacio, del cual daremos la siguiente definición.

Definición 1.1.6.

Sea un punto $p \in \mathbb{R}^2$, definimos el **espacio cotangente de \mathbb{R}^2 en p** , denotado por $T_p^*(\mathbb{R}^2)$, como el espacio dual del espacio tangente en p , $T_p(\mathbb{R}^2)$. A los elementos del espacio cotangente los llamaremos **covectores tangentes en p** o simplemente covectores.

Los elementos del espacio cotangente ¹ son funciones lineales en $T_p^*(\mathbb{R}^2)$, es decir, cada elemento, digamos $\alpha \in T_p^*(\mathbb{R}^2)$, es una transformación lineal

$$\alpha : T_p(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

¹Cabe aclarar que la representación visual del espacio cotangente (Figura 1.5) es só-

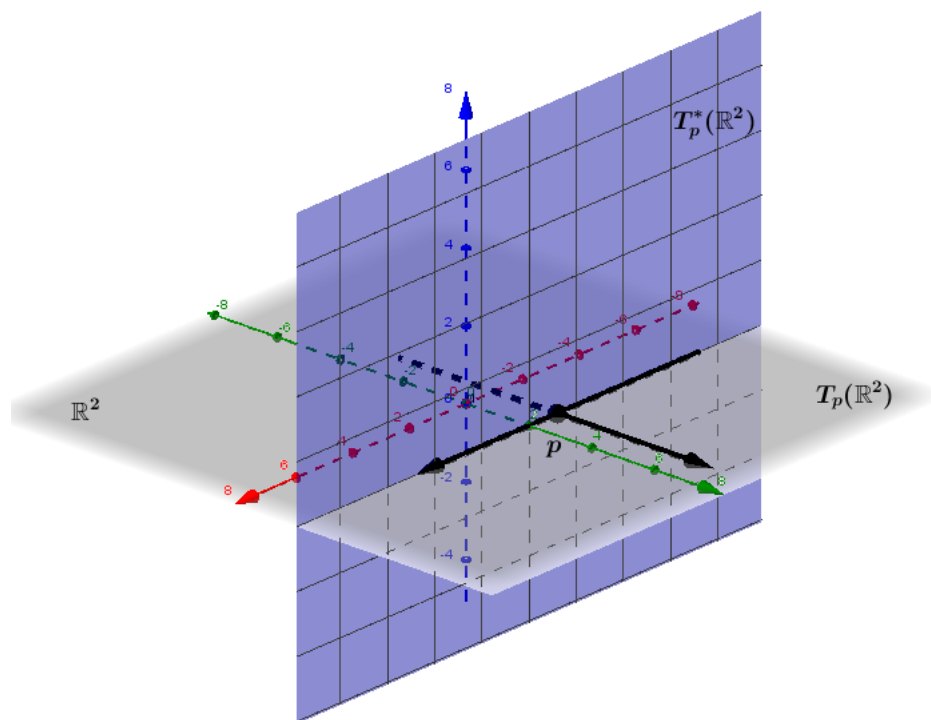


Figura 1.5: Espacios tangente y cotangente a un punto p .

Definición 1.1.7.

Llamaremos **haz cotangente a \mathbb{R}^2** , denotado por $T^*\mathbb{R}^2$, a la unión de todos los espacios cotangentes en \mathbb{R}^2 , esto es:

$$T^*\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} T_p^*\mathbb{R}^2$$

Nos apoyaremos en la definición del haz cotangente para construir un nuevo tipo de campo, es decir, un objeto que a cada punto le asigne un funcional lineal.

lo una interpretación geométrica que, aunque limitada, nos ayuda para visualizar a sus elementos por sus coordenadas. No es que el espacio tangente y cotangente sean perpendiculares entre sí.

Definición 1.1.8.

Una 1-forma φ en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es una función que asigna a cada punto $p \in U$ un funcional lineal $\varphi_p \in T_p^*(\mathbb{R}^2)$, esto es

$$\varphi : U \longrightarrow T^*\mathbb{R}^2$$

Así pues con las 1-formas obtenemos un campo de funcionales.

¿Cómo se pueden ver a las 1-formas? en otras palabras ¿qué información geométrica nos pueden dar las 1-formas? Como las 1-formas involucran funcionales, y estas viven en algún espacio cotangente, mismo que está anclado a un punto fijo, entonces las funcionales serán covectores (matrices fila) de algún espacio cotangente. En consecuencia, algebraicamente, estaríamos hablando de que una representación para los covectores son el de una matriz fila que dependerá de algún punto de \mathbb{R}^2 .

Por ejemplo, sea

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto [2x \quad y]_{(x,y)} \end{aligned}$$

entonces, evaluando en el punto $(1, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_{(1,1)} &= [2(1) \quad (1)]_{(1,1)} \\ &= [2 \quad 1]_{(1,1)} \end{aligned}$$

es decir, obtenemos el funcional $\varphi_{(1,1)} = [2 \quad 1]_{(1,1)}$.

Sea $\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_p \in T_p\mathbb{R}^2$, con $p = (1, 1)$, entonces

$$\mathbf{v}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{(1,1)}$$

Por lo que el funcional que actúa sobre el vector tangente resulta en

$$\begin{aligned}\varphi_{(1,1)}\mathbf{v}_{(1,1)} &= [2 \quad 1]_{(1,1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{(1,1)} \\ &= 3\end{aligned}$$

es decir, $\varphi_{(1,1)}\mathbf{v}_{(1,1)} = 3$, por lo que en efecto, el funcional que actúa sobre el vector tangente da como resultado un escalar.

Aunque conocemos cómo actúan estos objetos de manera algebraica, aún no hemos obtenido información geométrica. Aprovechando que tenemos las matrices renglón correspondientes a los funcionales, en este caso

$$\varphi_{(1,1)} : T_{(1,1)}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

por el teorema de la dimensión tenemos que

$$\dim(T_{(1,1)}\mathbb{R}^2) = \dim(\text{Ker}(\varphi_{(1,1)})) + \dim(\text{Rang}(\varphi_{(1,1)})),$$

de donde

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_{(1,1)})) = 1.$$

Más aún

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\varphi_{(1,1)}) &= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(1,1)} \in T_{(1,1)}\mathbb{R}^2 : [2 \quad 1]_{(1,1)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(1,1)} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(1,1)} \in T_{(1,1)}\mathbb{R}^2 : v = -2u \right\}\end{aligned}$$

Notemos que esto nos dice geoméricamente que el núcleo de la 1-forma $\phi = [2x \quad y]$ en el punto $p = (1, 1)$ tiene la “forma” de una línea recta de pendiente -2 , y cuyo origen es el punto p (Figura 1.6). Además $\text{Ker}(\varphi_{(1,1)})$ es subespacio de $T_{(1,1)}\mathbb{R}^2$.

Si este proceso se hace para cada punto, lo que se gana es una imagen de la distribución de estos núcleos, uno para cada punto, es decir obtenemos la representación gráfica del campo de funcionales (Figura 1.7).

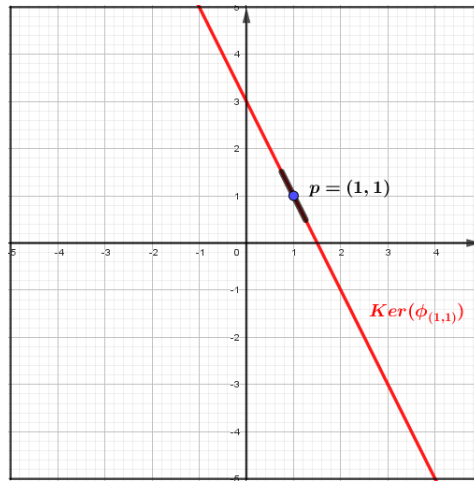


Figura 1.6: Representación geométrica de la 1-forma $\varphi = [2x \ y]$ en el punto $p = (1, 1)$.

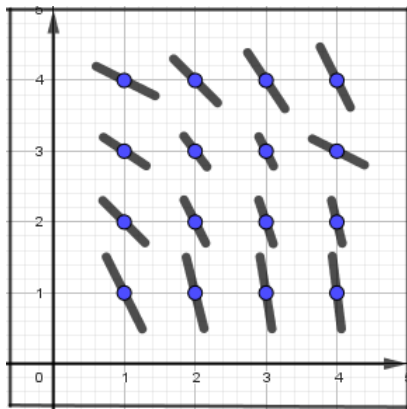


Figura 1.7: Distribución en el primer cuadrante de \mathbb{R}^2 debido a la 1-forma $\varphi = [2x \ y]$.

Ahora que hemos identificado la información geométrica que nos proporcionan estas 1-formas, continuaremos el estudio de como se relacionan entre éstos y otros objetos como funciones y campos vectoriales. Si φ y ψ son formas lineales, entonces para cada vector tangente \mathbf{v}_p definimos la suma de 1-formas como

$$(\varphi + \psi)(\mathbf{v}_p) = \varphi(\mathbf{v}_p) + \psi(\mathbf{v}_p).$$

Si f es una función de valores reales y φ es una 1-forma, entonces $f\varphi$ es la 1-forma tal que, por el principio puntual, resulta en

$$(f\varphi)(\mathbf{v}_p) = f(p)\varphi(\mathbf{v}_p), \quad \text{para cada vector tangente } \mathbf{v}_p.$$

Si V es un campo vectorial, y φ es una 1-forma, entonces la acción de la 1-forma sobre el campo vectorial resulta en un campo escalar, es decir, para cada punto p el resultado de $\varphi(V)$ es el número $\varphi_p(V(p))$.

Por ejemplo, sea el campo vectorial

$$\begin{aligned} V : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T\mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{bmatrix} x^2 \\ x - y \end{bmatrix}_{(x,y)} \end{aligned}$$

y sea la forma lineal φ como en el ejemplo anterior. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(V) &= [2x \quad y] \begin{bmatrix} x^2 \\ x - y \end{bmatrix} \\ &= 2x^3 + xy - y^2 \end{aligned}$$

es decir, $\varphi(V) = 2x^3 + xy - y^2$, la cual es una función de valor real, es decir, un campo escalar.

Al combinar los conceptos que involucran a estos campos vemos que $\varphi(V)$ es lineal tanto para φ como para V . Esto es, si f y g son funciones de valores reales entonces

$$(f\varphi + g\psi)(V) = f\varphi(V) + g\psi(V)$$

y

$$\varphi(fV + gV) = f\varphi(V) + g\varphi(V).$$

1.2. Formas diferenciales

Hemos visto propiedades algebraicas y geométricas de las 1-formas, ahora quisiéramos relacionar los conceptos del cálculo con estos objetos. Lo primero que podemos observar es que si φ es una 1-forma y V es un campo vectorial, entonces $\varphi(V)$ es diferenciable siempre que V lo sea. Como en la sección anterior vimos que a través del principio puntual podemos relacionar una función de valores reales con las 1-formas, ahora veremos cómo obtener un nuevo campo de funcionales que además sean diferenciables. Consideremos al conjunto \mathbb{R}^3 . En los cursos de cálculo multivariable se nos menciona que si f es una función diferenciable en las variables x, y, z , entonces la diferencial total de f tiene la expresión

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

sin embargo, no se nos define claramente su significado. Por ello veremos como con las formas diferenciales podemos dar una definición de lo que significa esta expresión.

Definición 1.2.1.

Si f es una función diferenciable de valores reales en \mathbb{R}^3 , entonces la **diferencial** de f , denotada por df , es la 1-forma

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

De la definición podemos observar que si tenemos un punto $p \in \mathbb{R}^3$, y si $x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función proyección que asigna a cada punto su primer coordenada, entonces

$$dx = \left[\frac{\partial x}{\partial x} \quad \frac{\partial x}{\partial y} \quad \frac{\partial x}{\partial z} \right] = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Análogamente

$$dy = [0 \quad 1 \quad 0],$$

y

$$dz = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Por otra parte, si φ es una 1-forma arbitraria

$$\begin{aligned}\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow T^*\mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto [f \quad g \quad h]_p\end{aligned}$$

donde $f, g, y h$ son funciones de valor real entonces

$$\begin{aligned}[f \quad g \quad h] &= [f \quad 0 \quad 0] + [0 \quad g \quad 0] + [0 \quad 0 \quad h] \\ &= f [1 \quad 0 \quad 0] + g [0 \quad 1 \quad 0] + h [0 \quad 0 \quad 1]\end{aligned}$$

es decir, cualquier 1-forma puede expresarse como

$$\varphi = f dx + g dy + h dz.$$

En consecuencia, la 1-forma df se puede expresar como al inicio de esta sección.

Ahora vamos a definir un producto entre 1-formas para ello consideremos el siguiente conjunto

$$\Lambda^2(T_p^*(\mathbb{R}^3)) = \{\phi : T_p(\mathbb{R}^3) \times T_p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R} : \phi \text{ es bilineal y alternante}\}$$

es decir, el conjunto de todas las funciones que van del producto cartesiano entre espacios tangentes a \mathbb{R}^3 en el punto p a los reales, que son lineales en cada variable y que cumplen $\phi(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) = -\phi(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p)$.

Cuando $\varphi_{1_p}, \varphi_{2_p} \in T_p^*(\mathbb{R}^3)$, se puede obtener un elemento $\varphi_{1_p} \wedge \varphi_{2_p} \in \Lambda^2(T_p^*(\mathbb{R}^3))$ si definimos la función \wedge , llamada producto exterior, de manera que

$$(\varphi_{1_p} \wedge \varphi_{2_p})(\mathbf{v}_{p_1}, \mathbf{v}_{p_2}) = \det(\varphi_{i_p}(\mathbf{v}_{p_j})), \quad i, j \in \{1, 2\}$$

En particular, si $\varphi_{1_p} = dx_p, \varphi_{2_p} = dy_p, \varphi_{3_p} = dz_p$, al tomar los vectores tangentes unitarios $e_{p_1}, e_{p_2}, e_{p_3}$ en $T_p(\mathbb{R}^3)$, entonces $\det(\varphi_{i_p}(e_{p_j}))$ es igual a 1 si $i = j$ o 0 si $i \neq j$. Por lo que podemos encontrar la matriz asociada a las formas bilineales $dx_p \wedge dy_p, dz_p \wedge dx_p, dy_p \wedge dz_p$, esto es

$$(dx_p \wedge dy_p) \quad \text{tiene asociada la matriz} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_p,$$

$$(dz_p \wedge dx_p) \text{ tiene asociada la matriz } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_p,$$

$$(dy_p \wedge dz_p) \text{ tiene asociada la matriz } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_p.$$

Notemos que el conjunto de estas matrices es linealmente independiente.

En seguida presentamos una definición que nos permite identificar campos de formas bilineales alternantes.

Definición 1.2.2.

Una 2-forma ω , o forma diferencial de grado 2, en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ es una función que asigna a cada punto $p \in U$ un elemento $\omega_p \in \Lambda^2(T_p^*(\mathbb{R}^3))$.

Ahora, si φ_1, φ_2 son 1-formas, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es una 2-forma puesto que, por el principio puntual, podemos extender el producto exterior de funcionales lineales, esto es

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)_p = \varphi_{1p} \wedge \varphi_{2p}.$$

Sean $p \in \mathbb{R}^3$, \mathbf{u}_p y \mathbf{v}_p vectores en $T_p^*(\mathbb{R}^3)$, y sea ω una 2-forma tal que al punto p le asigna el funcional bilineal alternante ω_p cuya representación matricial está dada por

$$\omega_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_p,$$

donde las a_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3\}$ son funciones de valores reales, entonces

$$\begin{aligned} \omega_p(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) &= \mathbf{u}_p^t \omega_p \mathbf{v}_p \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_p. \end{aligned}$$

Por otro lado, ω_p debe cumplir $\omega_p(\mathbf{u}_p, \mathbf{v}_p) = -\omega_p(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p)$, entonces

$$\begin{aligned} -\omega_p(\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) &= -\mathbf{v}_p^t \omega_p \mathbf{u}_p \\ &= - \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_p. \end{aligned}$$

Como consecuencia de estas relaciones podemos expresar a ω_p como

$$\omega_p = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}_p$$

es decir

$$\omega_p = a_{12}(p) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_p + a_{13}(p) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_p + a_{23}(p) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_p,$$

por lo que el conjunto de formas bilineales alternantes tiene dimensión 3, y que además podemos expresarlo como combinación una lineal, a saber

$$\omega_p = a_{12}(p)(dx \wedge dy)_p + a_{13}(p)(dz \wedge dx)_p + a_{23}(p)(dy \wedge dz)_p.$$

Además, por el principio puntual, como ω es arbitraria, se tiene que toda 2-forma se puede expresar de la manera

$$\omega = a_{12}(dx \wedge dy) + a_{13}(dx \wedge dz) + a_{23}(dy \wedge dz),$$

donde a_{ij} son funciones reales diferenciables en \mathbb{R}^3 , con $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Este resultado nos indica que un marco ² para las 2-formas está conformado por $dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz$. Por lo que, así como ocurrió con las 1-formas, si ω es una 2-forma en \mathbb{R}^3 , entonces ésta se puede expresar en términos de las diferenciales dx, dy, dz y funciones de valores reales.

En el lenguaje de las formas diferenciales, convendremos en llamar 0-forma a las funciones de valor real. Ya hemos visto que al operar d sobre una 0-forma nos da como resultado una 1-forma, misma que puede ser expresada

²En cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ se le puede asignar una base para las 2-formas.

como combinación lineal de dx, dy, dz . A continuación daremos una definición con la cual operar d con una 1-forma y que nos de como resultado una 2-forma.

Definición 1.2.3.

Si $\omega = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$ es una 1-forma en \mathbb{R}^3 , entonces la derivada exterior de ω , denotada por $d\omega$, tiene por expresión

$$d\omega = da_1 \wedge dx + da_2 \wedge dy + da_3 \wedge dz.$$

Además, para la 1-forma dx , en \mathbb{R}^3 , se tiene que

$$\begin{aligned} d(dx) &= \left(\frac{\partial(1)}{\partial x} dx + \frac{\partial(1)}{\partial y} dy + \frac{\partial(1)}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &= 0 \wedge dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Análogamente $d(dy) = 0 = d(dz)$.

Hasta aquí, al considerar \mathbb{R}^3 , y al tomando $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ funciones de variable real en \mathbb{R}^3 , hemos obtenido las formas diferenciales:

- 0-forma, funciones de valor real en \mathbb{R}^3 .
- 1-forma, objetos que se pueden expresar como $a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$.
- 2-forma, objetos que se pueden expresar como $a_{12} dx \wedge dy + a_{13} dx \wedge dz + a_{23} dy \wedge dz$.

Si ahora consideramos a \mathbb{R}^2 , de manera análoga se puede definir la derivada exterior de una 1-forma $\varphi = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$ como

$$d\varphi = da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) (dx_1 \wedge dx_2).$$

A su vez, se tienen los siguientes tipos de formas diferenciales (donde a_i, a_{ij} , con $i, j \in \{1, 2\}, i < j$, son funciones reales en \mathbb{R}^2):

- 0-forma, funciones de valor real en \mathbb{R}^2 .

- 1-forma, objetos que se pueden expresar como $a_1 dx_1 + a_2 dx_2$.
- 2-forma, objetos que se pueden expresar como $a_{12} dx_1 \wedge dx_2$

Si regresamos a la ecuación de Sophus Lie, ahora podemos identificar que lo que aparece del lado izquierdo en la ecuación de la definición dada por Lie (1), es decir $dz - pdx$, es un objeto bien definido llamado 1-forma en \mathbb{R}^2 .

En este capítulo hemos visto distintas formas diferenciales definidas en espacios vectoriales como \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . Sin embargo, estos objetos también se pueden encontrar en espacios vectoriales tangentes a otro tipo de conjuntos, los cuales abordaremos en el siguiente capítulo, en los que se pueden emplear los conceptos del cálculo.

Capítulo 2

Resultados preliminares

El capítulo anterior reúne los conceptos que permiten la construcción (puntual) de espacios vectoriales sobre espacios euclidianos como \mathbb{R}^2 . La analogía en la construcción del espacio de elementos de contacto respecto a lo abordado sobre el espacio cotangente, recae en el hecho de tomar un punto en \mathbb{R}^2 , y sobre éste anclar un conjunto. Este conjunto en esencia es \mathbb{S}^1 , pero para llegar a este resultado necesitamos de un “puente” que relacione las propiedades del conjunto que construiremos y la esfera de dimensión 1. Tal puente es una función biyectiva. Por ello abordaremos la construcción de una función, llamada proyección estereográfica, misma que nos ayudará en la obtención de una función, para la cual sólo nos interesará probar que es biyectiva.

Por otro lado, nos encargaremos de ver lo que es una variedad suave, pues quisiéramos garantizar la existencia de una estructura que nos permita usar los conceptos del cálculo en ciertos conjuntos. Justamente \mathbb{S}^1 es uno de estos conjuntos, por lo que probaremos que la esfera unitaria de dimensión uno es una variedad suave. El capítulo concluye con un teorema que tiene como hipótesis los resultados previos a éste, y al relacionarlos entre sí, nos proporciona una herramienta matemática con la cual, teniendo una función biyectiva cuyo dominio sea una variedad suave, y contradominio un conjunto arbitrario, entonces podemos inducir una estructura suave al contradominio.

2.1. Los reales extendidos y la circunferencia

Una interpretación geométrica para el espacio de elementos de contacto requerirá de ver qué tanto se parece localmente una circunferencia (la 1-esfera unitaria) a la recta real. Una manera de realizar esto matemáticamente es por medio de una función llamada proyección estereográfica, y si bien se puede probar que la 1-esfera unitaria es homeomorfa a los reales extendidos, solo necesitaremos probar que la función proyección sea biyectiva.

Supongamos que tenemos una 1-esfera centrada en el origen de radio unitario, denotada por \mathbb{S}^1 , una recta horizontal ubicada a una altura $y = -1$, $(p_1, p_2) \in \mathbb{S}^1$, $(q, -1) \in \mathbb{R}^2$, $N = (0, 1)$, donde N es llamado el polo norte de la 1-esfera (Figura 2.1). Una función proyección estereográfica f que envía la circunferencia con el polo norte eliminado hacia la recta $y = -1$, de acuerdo con esta configuración se define de la siguiente manera:

$$f(p_1, p_2) = \left(\frac{2p_1}{1 - p_2}, -1 \right).$$

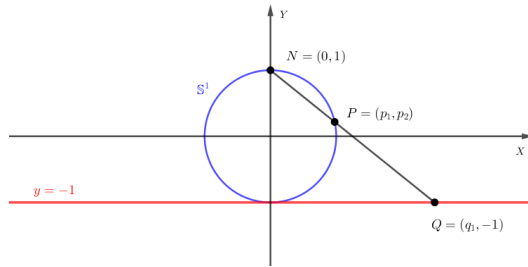


Figura 2.1: Configuración para la construcción de la proyección estereográfica.

Si reemplazamos a todos los puntos de \mathbb{S}^1 en f , vemos que la función define naturalmente el siguiente mapeo:

$$f : (\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \{-1\}.$$

Omitimos el polo norte del dominio de f puesto que $f(0, 1) = \left(\frac{0}{0}, -1 \right)$. Asimismo, una función g que envía la recta de regreso a la circunferencia agujerada, de acuerdo con nuestra configuración, se define de la siguiente manera:

$$g(q_1, -1) = \left(\frac{4q_1}{q_1^2 + 4}, \frac{q_1^2 - 4}{q_1^2 + 4} \right).$$

Si reemplazamos todos los puntos de \mathbb{R}^2 en g vemos que la función define naturalmente el siguiente mapeo:

$$g : \mathbb{R} \times \{-1\} \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \setminus \{N\})$$

Los denominadores de g siempre serán mayores que cero porque todos son iguales a la suma de términos positivos, por lo que g está bien definida para todos los puntos de su dominio.

Ahora, queremos probar que f y g son funciones biyectivas. Resulta que no hay necesidad de probar individualmente la inyectividad y la sobreyectividad porque una función es biyectiva si y sólo si es invertible.

Por lo tanto, para demostrar que f es invertible y, en última instancia, que f es biyectiva, necesitamos demostrar que $g = f^{-1}$. Esto se hace mostrando que $g(f((p_1, p_2))) = (p_1, p_2)$ y $f(g(q_1, -1)) = (q_1, -1)$

$$\begin{aligned} g(f((p_1, p_2))) &= \left(\frac{4\left(\frac{2p_1}{1-p_2}\right)}{\left(\frac{2p_1}{1-p_2}\right)^2 + 4}, \frac{\left(\frac{2p_1}{1-p_2}\right)^2 - 4}{\left(\frac{2p_1}{1-p_2}\right)^2 + 4} \right) \\ &= \left(\frac{\left(\frac{8p_1}{1-p_2}\right)}{\left(\frac{4p_1^2}{(1-p_2)^2}\right) + \frac{4(1-p_1)^2}{(1-p_1)^2}}, \frac{\frac{4p_1^2}{(1-p_2)^2} - \frac{4(1-p_1)^2}{(1-p_1)^2}}{\frac{4p_1^2}{(1-p_2)^2} + \frac{4(1-p_1)^2}{(1-p_1)^2}} \right) \\ &= \left(\frac{2p_1(1-p_2)}{(p_1^2 + p_2^2) + 1 - 2p_2}, \frac{(p_1^2 - p_2^2) - 1 + 2p_2}{(p_1^2 + p_2^2) + 1 + 2p_2} \right), \end{aligned}$$

como $(p_1, p_2) \in \mathbb{S}^1$, sabemos que $p_1^2 + p_2^2 = 1$. Esto también significa que $p_1^2 = 1 - p_2^2$. Entonces, nuestra ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} \left(\frac{2p_1(1-p_2)}{1 + 1 - 2p_2}, \frac{(1 - p_2^2 - p_2^2) - 1 + 2p_2}{(p_1^2 + p_2^2) + 1 + 2p_2} \right) &= \left(\frac{2p_1(1-p_2)}{2(1-p_2)}, \frac{2p_2(1-p_2)}{2(1-p_2)} \right) \\ &= (p_1, p_2). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
f(g((q_1, -1))) &= \left(\frac{2\left(\frac{4q_1}{q_1^2+4}\right)}{1 - \left(\frac{q_1^2-4}{q_1^2+4}\right)}, -1 \right) \\
&= \left(\frac{\left(\frac{8q_1}{q_1^2+4}\right)}{\frac{q_1^2+4}{q_1^2+4} - \frac{q_1^2-4}{q_1^2+4}}, -1 \right) \\
&= (q_1, -1).
\end{aligned}$$

Así, hemos probado que $g = f^{-1}$, lo que significa que f es invertible en los puntos en los que la función está naturalmente definida. Por lo tanto la función

$$f : (\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \{-1\}$$

es biyectiva.

Una vez probada la biyectividad para la circunferencia agujereada podemos definir la siguiente función

$$\tilde{f}(p_1, p_2) = \begin{cases} (\pi_1 \circ f)(p_1, p_2), & (p_1, p_2) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ \infty, & (p_1, p_2) = N \end{cases}$$

donde $\pi_1 : (\mathbb{R} \times \{-1\}) \longrightarrow \mathbb{R}$, es tal que $\pi_1((p_1, -1)) = p_1$.

Esta función \tilde{f} ahora define el siguiente mapeo biyectivo de la circunferencia completa a los reales extendidos:

$$\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\}). \quad (2.1)$$

Por otra parte, podemos redefinir nuestra función inversa, como la siguiente función por partes:

$$\tilde{g}(q) = \begin{cases} (g \circ \tau_1)(q), & q \in \mathbb{R} \\ N, & q = \infty \end{cases}$$

donde $\tau_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \{-1\}$, es la función tal que $\tau_1(q) = (q, -1)$.

Esta función define el siguiente mapeo que va de los reales extendidos a la circunferencia:

$$\tilde{g} : (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

de tal manera que $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$.

En el próximo capítulo, emplearemos a esta función \tilde{f} .

2.2. Variedades suaves

En el capítulo anterior trabajamos con conjuntos que tienen estructura de espacio vectorial. Ahora introduciremos una estructura que nos permite estudiar los conceptos del cálculo en conjuntos. Este tipo de conjunto reciben el nombre de variedad, que en términos simples, es un conjunto que se parece localmente a algún espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Ahora formalicemos lo dicho. Supongamos que M es un espacio topológico. Decimos que M es una variedad topológica de dimensión n (Figura 2.2) si cumple con las siguientes propiedades:

- M es un espacio Hausdorff: Para cada par de puntos $p, q \in M$, existen subconjuntos abiertos ajenos $U, V \subset M$ tales que $p \in U$ y $q \in V$.
- M es segundo numerable: Existe una base numerable para la topología M .
- M es localmente euclidiano de dimensión n : Cada punto tiene una vecindad que es homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

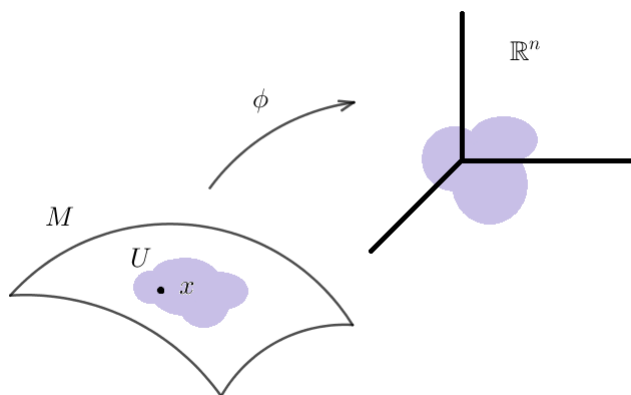


Figura 2.2: Variedad.

Si M es una variedad topológica de dimensión n , una *carta coordenada* en M es una pareja (U, φ) , donde U es un subconjunto abierto de M y la función $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ es un homeomorfismo de U a un subconjunto abierto $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Aunque esta nueva definición permite el estudio de propiedades topológicas de las variedades, aún no se ha hecho mención del cálculo. Ahora queremos otro tipo de variedad que, en términos simples, se vea localmente como algún espacio euclidiano, y en donde poder hacer cálculo. Para dar sentido al concepto de derivada introducimos un nuevo tipo de variedad llamada *variedad suave*, donde la palabra “suave” quiere decir C^∞ , o infinitamente diferenciable. Vamos a definir una variedad suave como una variedad con alguna estructura adicional además de su topología, lo que nos permitirá decidir qué funciones en la variedad son suaves.

Sea M una variedad topológica de dimensión n . Si $(U, \varphi), (V, \psi)$ son dos cartas coordenadas tales que $U \cap V \neq \emptyset$, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces el mapeo composición $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ (llamado el *mapeo de transición* de φ a ψ) es una composición de homeomorfismos, y por tanto es un homeomorfismo.

Se dice que dos cartas (U, φ) y (V, ψ) son *suavemente compatibles* si ocurre que $U \cap V = \emptyset$ o si el mapeo de transición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo.

Definimos un *atlas* para M como la colección de cartas cuyos dominios cubren a M . Un atlas \mathcal{A} es llamado *atlas suave* si cualesquiera dos cartas en \mathcal{A} son suavemente compatibles.

Un atlas suave \mathcal{A} sobre M es maximal si este no contiene un atlas suave estrictamente más grande, esto es, cada carta que es suavemente compatible con cada carta en \mathcal{A} ya está en \mathcal{A} .

Una estructura suave en una n -variedad topológica M es un atlas maximal. Una *variedad suave* es una pareja (M, \mathcal{A}) donde M es una variedad topológica y \mathcal{A} es una estructura suave en M .

2.3. \mathbb{S}^1 es una variedad suave

Probaremos que la 1-esfera, $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, es una variedad suave. Para ello probaremos que \mathbb{S}^1 cumple que:

- i) es Hausdorff
- ii) es segundo numerable
- iii) es localmente Euclidiano
- iv) tiene estructura suave.

i) \mathbb{S}^1 es Hausdorff ya que este es un subconjunto de un espacio Hausdorff, a saber \mathbb{R}^2 con la topología usual.

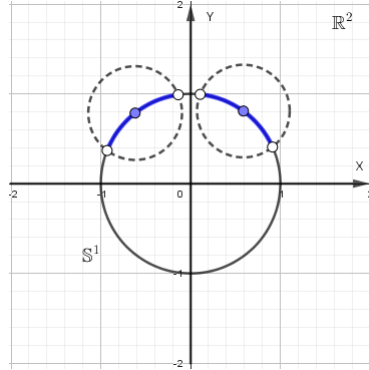


Figura 2.3: Abiertos en \mathbb{S}^1 con la topología de subespacio.

ii) Similarmente, \mathbb{S}^1 es segundo numerable porque es un subespacio de un espacio que es segundo numerable. Sólo restringimos las bases contables de \mathbb{R}^2 a las intersecciones con \mathbb{S}^1 .

iii) Vamos a demostrar que \mathbb{S}^1 es localmente Euclideano, es decir, falta demostrar que existe una cubierta abierta y que los conjuntos abiertos en esa cubierta abierta son homeomorfos a \mathbb{R} . Damos las cartas como se aprecia en la Figura 2.4. Notemos que todas las $\varphi_i, i = 1, 2, 3, 4$ son biyectivas y bicontinuas en su dominio, a saber U_i . Como $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^4 U_i$, estos forman una cubierta abierta de \mathbb{S}^1 , entonces para cada $P \in \mathbb{S}^1$, existe un homeomorfismo que mapea P en \mathbb{R}^1 . Lo cual significa que \mathbb{S}^1 es localmente Euclideano, de dimensión 1.

iv) Afirmamos que

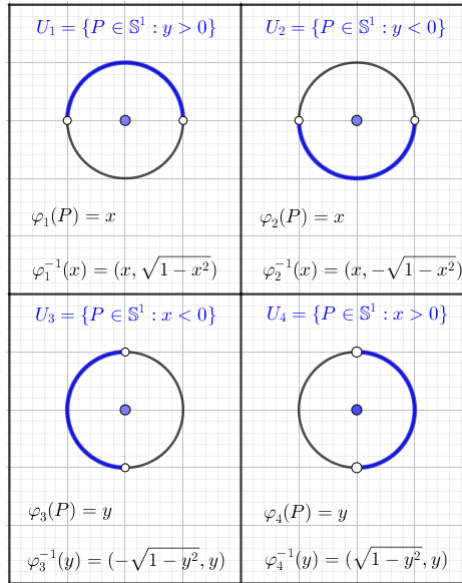
$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$$

es un atlas para \mathbb{S}^1 .

Notemos que φ_1, φ_2 y φ_3, φ_4 son C^∞ -compatibles por vacuidad, puesto que $U_1 \cap U_2 = U_3 \cap U_4 = \emptyset$.

Por otra parte consideremos (U_1, φ_1) y (U_4, φ_4) , entonces se tiene que $U_1 \cap U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x, y > 0\}$.

Para $P = (x, y) \in \mathbb{S}^1, \varphi_1(P) = x, \varphi_1^{-1}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \varphi_4(P) = y, \varphi_4^{-1}(s) = (\sqrt{1-s^2}, s)$ se tiene que

Figura 2.4: Cartas para \mathbb{S}^1 .

$$\begin{aligned}
 (\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1})(t) &= \varphi_4((t, \sqrt{1-t^2})) \\
 &= \sqrt{1-t^2}.
 \end{aligned}$$

como $\sqrt{1-t^2}$ es C^∞ en el intervalo $(0, 1)$, entonces φ_1 y φ_4 son C^∞ -compatibles.

Así, al proceder de manera análoga en los casos restantes, llegamos a que \mathcal{A} es atlas C^∞ , lo cual nos permite concluir que \mathbb{S}^1 es variedad suave. ■

2.4. Estructura suave inducida sobre un conjunto arbitrario

El siguiente resultado es de suma importancia para la construcción del espacio de elementos de contacto, pues a través de éste podremos dotar de una estructura al conjunto que construiremos.

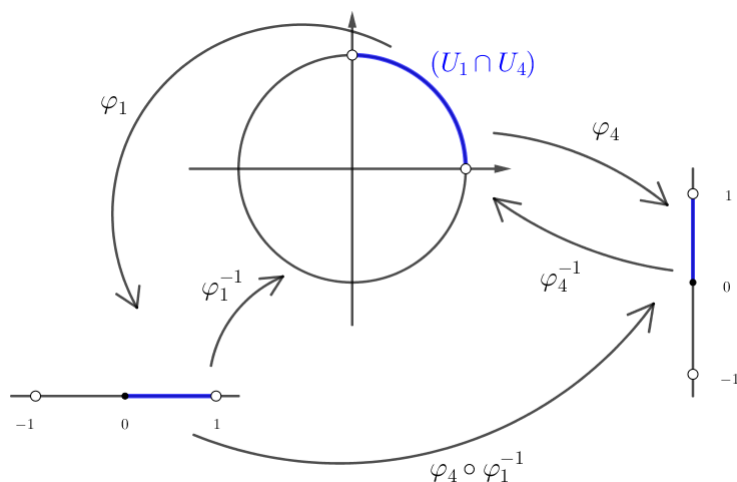


Figura 2.5: Función de transición $\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1}$.

Teorema 2.4.1.

Si (M, \mathcal{T}) es una variedad suave, B es un conjunto y $F : M \rightarrow B$ es una función biyectiva entonces existe una única estructura suave en B tal que F es un difeomorfismo.

Demostración:

Sean (M, \mathcal{T}) una variedad suave, y B un conjunto arbitrario.

Por hipótesis $F : M \rightarrow B$ es una función biyectiva, en particular es sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología sobre B relativa a la cual F es una aplicación cociente [4]. Dado que F es biyectiva entonces

$$\mathcal{T}_B := \{W \subset B : F^{-1}(W) \in \mathcal{T}\},$$

es la topología cociente inducida por F en B y es la topología más grande tal que la función es continua (Figura 2.6). En nuestro caso F se vuelve un homeomorfismo.

Sea $\mathcal{A}_M := \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ es un atlas que cubre a M . Definimos

$$\mathcal{A}_B := \{(F(U_i), \varphi_i \circ F^{-1}) : i \in I\}.$$

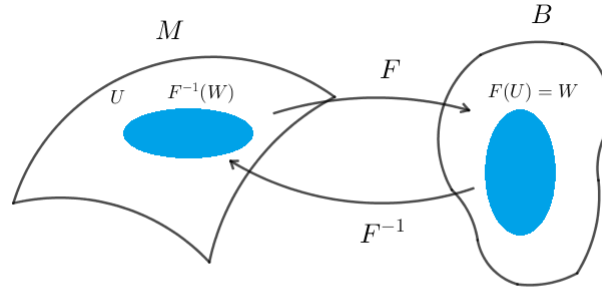


Figura 2.6: Conjuntos abiertos en el conjunto B .

Como M es variedad, sabemos que

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

En consecuencia

$$B = \bigcup_{i \in I} F(U_i),$$

de donde se siguen los siguientes casos:

Caso 1:

Si $(F(U_i), \varphi_i \circ F^{-1})$ y $(F(U_j), \varphi_j \circ F^{-1})$ son tales que $F(U_i) \cap F(U_j) = \emptyset$ para cada $i, j \in I, i \neq j$, entonces $\varphi_i \circ F^{-1}, \varphi_j \circ F^{-1}$ son C^∞ -compatibles por vacuidad.

Caso 2:

Sean $(F(U_i), \varphi_i \circ F^{-1})$ y $(F(U_j), \varphi_j \circ F^{-1})$ tales que $F(U_i) \cap F(U_j) \neq \emptyset$ para algunos $i, j \in I, i \neq j$. Si $\psi_i := \varphi_i \circ F^{-1}$ y $\psi_j := \varphi_j \circ F^{-1}$, vamos a demostrar que $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ es suave. Como M es variedad suave, entonces la función

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

es suave.

Por otra parte

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} &= \varphi_j \circ F^{-1} \circ F \circ \varphi_i^{-1} \\ &= \varphi_j \circ F^{-1} \circ (\varphi_i \circ F^{-1})^{-1} \\ &= \psi_j \circ \psi_i^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ es suave (Figura 2.7).

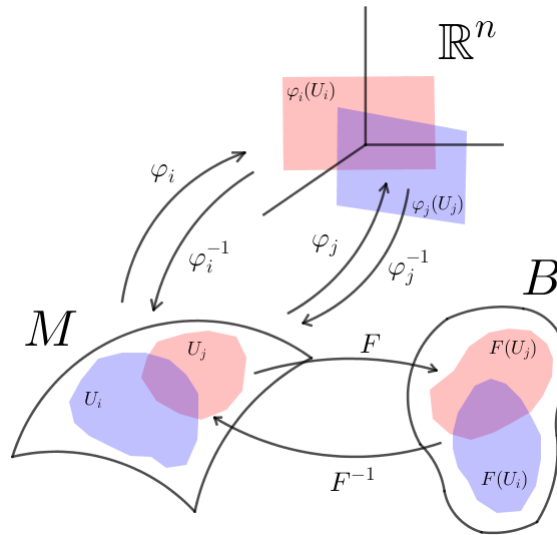


Figura 2.7: Diagrama función de transición.

Por tanto \mathcal{A}_B es un atlas para B . En conclusión B es una variedad suave. ■

Si aplicamos este resultado usando $M = \mathbb{S}^1$, $B = (\mathbb{R} \times \{\infty\})$, y $F = \tilde{f}$, donde \tilde{f} es la función construida a partir de la proyección estereográfica (2.1), se tiene que $(\mathbb{R} \times \{\infty\})$ es una variedad suave, en otras palabras, podemos inducir una estructura suave a los reales extendidos. Este mismo ejemplo nos servirá para inducir una estructura suave al conjunto que se irá construyendo, cuyos elementos son, valga la redundancia, los elementos de contacto.

Capítulo 3

El espacio de elementos de contacto de \mathbb{R}^2

3.1. Los elementos del espacio de elementos de contacto

Recordemos que Sophus Lie define un elemento de contacto de \mathbb{R}^2 como un punto $A = (x, z) \in \mathbb{R}^2$ y una recta de pendiente p que pasa por ese punto, donde la ecuación de la línea se puede escribir en la forma $dz - p dx = 0$.

Podemos identificar la forma del lado izquierdo de la ecuación anterior con una 1-forma en \mathbb{R}^3 , a saber, $\eta := dz - p dx$

Por otro lado, Lie también menciona que el espacio de elementos de contacto se puede identificar con \mathbb{R}^3 , donde sus elementos son de la forma (x, z, p) .

El objetivo de esta tesis es dar una interpretación en el lenguaje matemático moderno a lo que Sophus Lie escribió hace más de un siglo.

Consideremos \mathbb{R}^2 , y algún punto $A = (x, z) \in \mathbb{R}^2$. Entonces podemos construir los espacios tangente y cotangente de \mathbb{R}^2 en A .

Notemos que $\dim T_A \mathbb{R}^2 = 2 = \dim T_A^* \mathbb{R}^2$, es decir, tienen la misma dimensión como espacios vectoriales.

Así, si α es una 1-forma en \mathbb{R}^2 , entonces, para p y q funciones de valor real definidas en \mathbb{R}^2 , podemos expresar a α como

$$\alpha = pdz + qdx.$$

Además se obtiene el funcional

$$\alpha_A = p_A dz_A + q_A dx_A.$$

Al tener funcionales, podemos dar una interpretación geométrica de sus respectivos núcleos. Así para funcionales $\alpha_A, \beta_A \in T_A^*\mathbb{R}^2$, se tiene que, geoméricamente, $\text{Ker}(\alpha_A)$ y $\text{Ker}(\beta_A)$ son líneas rectas que pasan por el punto A.

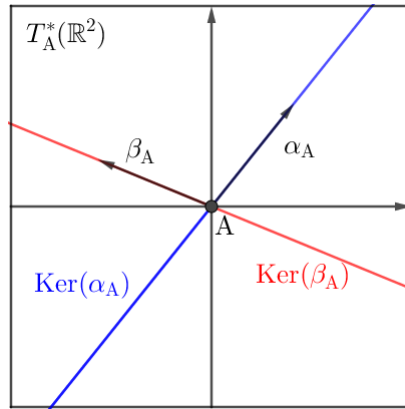


Figura 3.1: Funcionales α_A y β_A con sus respectivos núcleos.

Notemos que para funcionales distintos, no siempre ocurre que sus núcleos sean iguales (ver Figura 3.1), podría ocurrir que sí. Para dar una idea geométrica de lo que ocurre, vamos a cambiar la interpretación del espacio cotangente como lo habíamos abordado en el capítulo 1, y esta vez vamos a representar (como un recurso) el espacio cotangente como una línea anclada al punto A, pero sin perder de vista su dimensión (Figura 3.2).

Con este cambio de perspectiva podemos pensar a $T^*\mathbb{R}^2$ como un espacio lleno de líneas, una para cada punto del plano. Por lo que al cubrir al plano con todos sus puntos, se tiene que todas las líneas forman el haz cotangente a \mathbb{R}^2 . En particular para alguna línea, cada punto sobre esta representa una funcional, y junto al funcional le acompaña una línea, la cual representa al núcleo de la funcional (Figura 3.3).

Dados los núcleos correspondientes a las funcionales (y por tanto una infinidad de rectas finitas), entonces diferentes funcionales pueden estar acom-

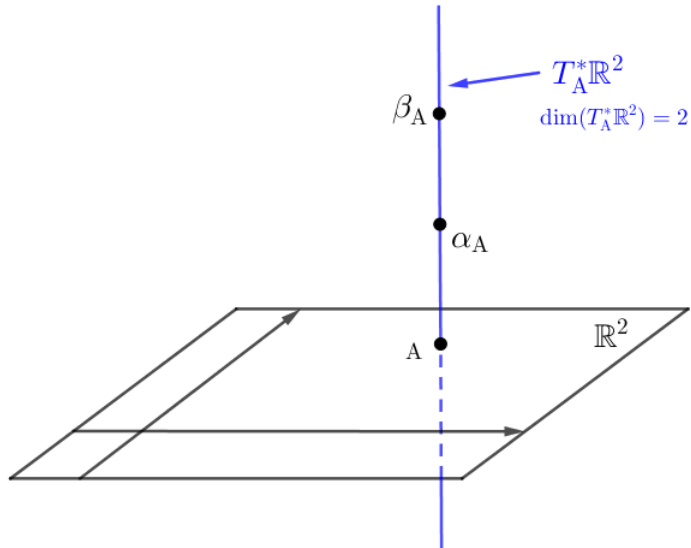


Figura 3.2: Espacio cotangente a \mathbb{R}^2 en un punto A y funcionales α_A y β_A .

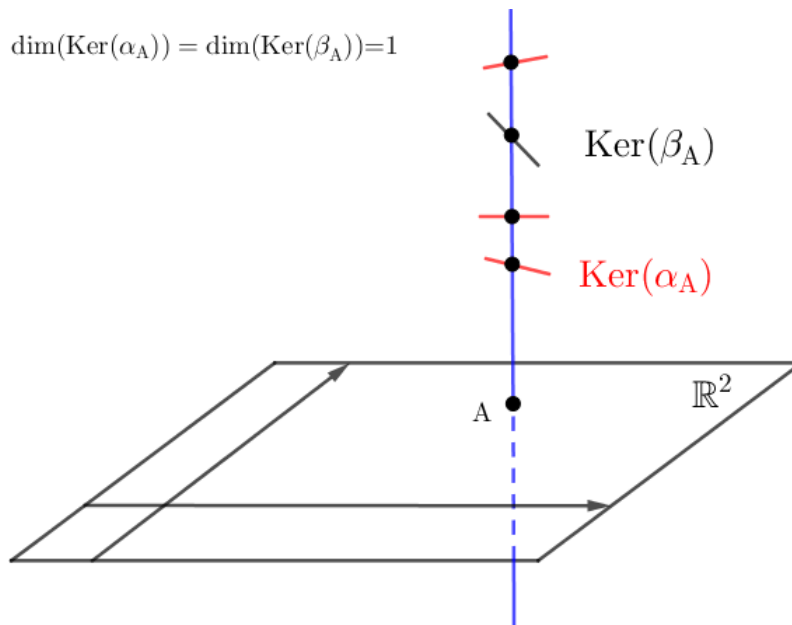


Figura 3.3: Funcionales α_A y β_A con sus respectivos núcleos.

pañadas del mismo núcleo. Para resolver el problema de los infinitos núcleos,

basta con identificar cuáles son los que tienen el mismo núcleo. Para ello daremos la siguiente definición.

Definición 3.1.1.

Sean α, β , 1-formas tales que para cada $A \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\alpha_A, \beta_A \neq 0$. Denotaremos por $\alpha_A \sim \beta_A$ el hecho de que α_A tiene el mismo núcleo que β_A es decir

$$\alpha_A \sim \beta_A \iff \text{Ker}(\alpha_A) = \text{Ker}(\beta_A), \quad \text{para cada } A.$$

La relación \sim definida anteriormente, es una relación de equivalencia, esto se sigue directamente de tener una igualdad entre conjuntos.

Ahora vamos a caracterizar a los núcleos de las funcionales. Para esto vamos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1.

Si α, β son 1-formas, tales que para cada $A \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_A, \beta_A \neq 0$, entonces

$$[\alpha_A] = \{ \beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \},$$

donde $[\alpha_A]$ denota la clase de equivalencia de α_A dada por la relación \sim anterior.

Demostración:

Como queremos probar una igualdad entre conjuntos, primero vamos a demostrar que $[\alpha_A]$ está contenido en $\{ \beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$. Tomemos $\lambda_A \in [\alpha_A]$. Sea $\mathcal{B} = \{v\}$ base para $\text{Ker}(\lambda_A)$, y sea $u \in T_A\mathbb{R}^2 \setminus \text{Ker}(\lambda_A)$ u y v son linealmente independientes, por tanto $\{u, v\}$ es base para $T_A\mathbb{R}^2$.

Sea $w \in T_A\mathbb{R}^2$, entonces existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $w = a_1u + a_2v$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda_A(w) &= \lambda_A(a_1u + a_2v) \\ &= a_1\lambda_A(u) + a_2\lambda_A(v) \\ &= a_1\lambda_A(u), \end{aligned}$$

es decir, $\lambda_A(w) = a_1\lambda_A(u)$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}\alpha_A(w) &= \alpha_A(a_1u + a_2v) \\ &= a_1\alpha_A(u) + a_2\alpha_A(v) \\ &= a_1\alpha_A(u),\end{aligned}$$

es decir, $\alpha_A(w) = a_1\alpha_A(u)$, así

$$a_1 = \frac{\alpha_A(w)}{\alpha_A(u)},$$

entonces

$$\lambda_A(w) = \alpha_A(w)k,$$

donde $k = \frac{\lambda_A(u)}{\alpha_A(u)} \in \mathbb{R}$ con $\alpha_A(u) \neq 0$ (pues no pertenece a $\text{Ker}(\lambda_A) = \text{Ker}(\alpha_A)$). Por consiguiente, se tiene que

$$\lambda_A = k\alpha_A, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

es decir,

$$\lambda_A \in \{\beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Por lo tanto

$$[\alpha_A] \subset \{\beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Ahora probaremos que $\{\beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subset [\alpha_A]$. Sea $\lambda_A \in \{\beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, entonces

$$\lambda_A = k\alpha_A, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Vamos a demostrar que $\text{Ker}(\lambda_A) = \text{Ker}(\alpha_A)$. Como queremos probar una igualdad de conjuntos, procederemos a hacer una prueba por contenciones. Primero probemos que $\text{Ker}(\lambda_A)$ está contenido en $\text{Ker}(\alpha_A)$. Sea $u \in \text{Ker}(\lambda_A)$, entonces

$$\lambda_A(u) = 0.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\alpha_A(u) &= k^{-1}\lambda_A(u) \\ &= k^{-1}0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

es decir, $\alpha_A(u) = 0$. Así $u \in \text{Ker}(\alpha_A)$. Por consiguiente $\text{Ker}(\lambda_A)$ está contenido en $\text{Ker}(\alpha_A)$.

Para demostrar la otra contención, la prueba es análoga. Sea $v \in \text{Ker}(\alpha_A)$, entonces

$$\alpha_A(v) = 0.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\lambda_A(v) &= k \alpha_A(v) \\ &= k0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

entonces $v \in \text{Ker}(\lambda_A)$. Por tanto $\text{Ker}(\alpha_A) \subset \text{Ker}(\lambda_A)$.

En consecuencia se ha probado que $\text{Ker}(\lambda_A) = \text{Ker}(\alpha_A)$, lo que prueba que $\{\beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} - \{0\}\} \subset [\alpha_A]$.

Por tanto, al tener la prueba de las contenciones, hemos demostrado que

$$[\alpha_A] = \{\beta_A \in T_A^*(\mathbb{R}^2) : \alpha_A = k\beta_A, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \blacksquare$$

Por ejemplo. Sea $A = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Hallaremos a todas las funcionales lineales

$$\beta_{(1,1)} \in T_{(1,1)}^*\mathbb{R}^2 \text{ tales que } \text{Ker}(\beta_{(1,1)}) = \text{gen}\left\{\left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right]_{(1,1)}\right\}.$$

$$\text{Sin pérdida de generalidad, sea } \mathbf{v}_A = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right]_{(1,1)} \in \text{gen}\left\{\left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right]_{(1,1)}\right\}.$$

Además, sea $\beta_{(1,1)} = [\beta_A^1 \quad \beta_A^2]_{(1,1)}$, por lo que

$$[\beta_A^1 \quad \beta_A^2]_{(1,1)} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right]_{(1,1)} = 0,$$

esto si y solo si

$$\beta_A^1 = \beta_A^2,$$

por consiguiente

$$\beta_{(1,1)} = [\beta_A^1 \quad \beta_A^1]_{(1,1)},$$

por tanto

$$\beta_{(1,1)} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}_{(1,1)}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

En conclusión

$$[\alpha_A] = \left\{ k \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}_A : k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Ahora tomando al conjunto $T_A^*\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y a la relación de equivalencia, podemos formar el conjunto de todas las clases de equivalencia (Figura 3.4), es decir, el conjunto

$$\frac{T_A^*\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}{\sim} = \left\{ [\alpha_A] \right\}_{\alpha_A \in T_A^*\mathbb{R}^2}$$

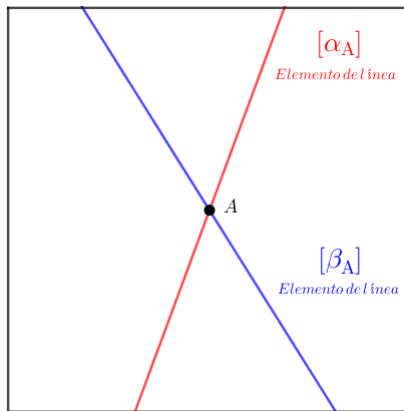


Figura 3.4: Representación gráfica de algunos elementos de $\frac{T_A^*\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$.

Definición 3.1.2.

El conjunto $\mathbb{P}(T_A^*\mathbb{R}^2) := \frac{T_A^*\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$ es la **proyectivización del espacio cotangente a \mathbb{R}^2** en el punto A.

Como Sophus Lie asocia una pendiente con la ecuación $dz - pdx = 0$, quisiéramos relacionar la idea de pendiente con una 1-forma. Para ello veamos el siguiente ejemplo. Si $\alpha = 4xdx + xzdz$ y $A = (-1, 1)$ (Figura 3.5), entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_A &= (4x)_A dx_A + (xz)_A dz_A \\
&= -4dx_A - dz_A \\
&= [-4 \quad -1]_A,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\alpha_A) &= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_A \in T_A \mathbb{R}^2 : [-4 \quad -1]_A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_A = 0 \right\} \\
&= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}_A \right\}.
\end{aligned}$$

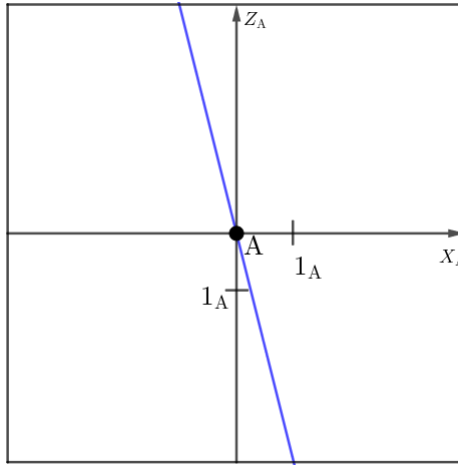


Figura 3.5: $\text{Ker}(\alpha_A)$ para $\alpha = 4xdx + xydy$.

Por lo que, a través del núcleo del funcional α_A asociamos una recta de pendiente p que tiene un valor de -4 . Ahora para una funcional hemos obtenido una pendiente, ¿habrá otra manera de obtener la pendiente? Tomemos $\beta_A = 3dx_A - 2dz_A$, por inspección, “ $\beta_A = -\frac{3}{2}dx_A + dz_A$ ” tiene la forma de la 1-forma de Lie, y por tanto la pendiente tendría el valor de $\frac{3}{2}$.

Ahora sea α una 1-forma tal que

$$\alpha_A = q_A dz_A + p_A dx_A,$$

donde q y p son funciones escalares, y q distinta de cero, entonces para $k = \frac{1}{q_A} \in \mathbb{R}$ y por el *principio puntual* se sigue que

$$\begin{aligned}\beta_A &= k \alpha_A \\ &= \frac{1}{q_A} (q_A dz_A + p_A dx_A) \\ &= dz_A + \frac{p_A}{q_A} dx_A \\ &= dz_A + P_A dx_A \in [\alpha_A],\end{aligned}$$

es decir

$$q_A dz_A + p_A dx_A \sim dz_A + P_A dx_A.$$

Por lo que hemos llegado a una estructura para las 1-formas, en la que podemos notar su similitud con el lado izquierdo de la ecuación $dz - pdx = 0$ dada por Lie.

Es por ello que en el ejemplo para $\beta_A = 3_A dx_A - 2_A dz_A$ el valor de la pendiente se obtenía si considerábamos “ $\beta_A = -(\frac{3}{2})dx_A + dz_A$ ”.

Notemos que, dado un funcional α_A , para tener un elemento de línea, es decir, dibujar el núcleo del funcional, necesitábamos un punto de anclaje $A \in \mathbb{R}^2$ y dos funciones coordenadas de valor real p y q

$$(A, p_A, q_A),$$

pero que al final se ha reducido a sólo tener al punto de anclaje y al cociente entre las funciones coordenadas

$$\left(A, \frac{p_A}{q_A} \right) \equiv (A, P_A).$$

Por tanto un punto de coordenadas (A, P_A) determina un funcional $\alpha_A = dz_A + P dx_A \in \mathbb{P}(T_A^* \mathbb{R}^2)$, con α una 1-forma.

En general, si $A = (x, z)$ es algún punto de \mathbb{R}^2 y p es una función de valor real tal que α es la 1-forma que se puede expresar como $dz + pdx$, entonces el conjunto elementos de contacto, el cual denotaremos como

$$\mathcal{C}\mathbb{R}^2 := \bigcup_{A \in \mathbb{R}^2} \mathbb{P}(T_A^* \mathbb{R}^2) = \bigcup_{A \in \mathbb{R}^2} \frac{T_A^* \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}{\sim},$$

queda determinado por las clases de equivalencia $[\alpha_A]$. En la siguiente sección veremos que tomar una clase de equivalencia en $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$ equivale a tomar puntos de la forma (x, z, p) y que viven en un espacio de dimensión tres, como nos decía Sophus Lie.

3.2. El espacio de elementos de contacto es una variedad suave

Una vez identificada la forma de los elementos en el conjunto de elementos de contacto, nos gustaría saber si este conjunto tiene alguna estructura, y en efecto se verá que tiene estructura suave.

Antes de continuar con el estudio de la estructura de $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$, consideraremos un caso más para el cual permitiremos que la pendiente asociada a la 1-forma sea infinita. Esto es, podemos tomar líneas verticales que pasan por el origen determinado por el punto A , donde la 1-forma adopta la expresión $\alpha = dx$, y por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(dx_A) &= \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_A \in \mathbb{R}^2 : [1 \ 0]_A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_A = 0 \right\} \\ &= \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A \right\}, \end{aligned}$$

es decir, si tomamos un elemento en el espacio de elementos de contacto digamos $w \in \mathcal{C}\mathbb{R}^2$, de tal manera que la “pendiente” es infinita, entonces $w = [dx_A]$ (Figura 3.6).

Al considerar pendientes infinitas, como recurso geométrico, tomaremos a una circunferencia con centro en A como representación de $T_A^*(\mathbb{R}^2)$ ¹. Esto es, en cada punto de la circunferencia podemos localizar un funcional tal que a su núcleo podemos asociarle una pendiente definida en los reales extendidos (Figura 3.7). Por lo que $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$ es la colección de todas estas circunferencias (Figura 3.8).

Ahora probaremos que el espacio de elementos de contacto es una variedad suave.

¹Cabe señalar que esta representación del espacio cotangente debe entenderse como un espacio que está sujeto al punto de anclaje en el plano, pero los puntos en el espacio cotangente son ajenos a los puntos en el plano, es decir, no hay que considerar la intersección de la circunferencia con el plano.

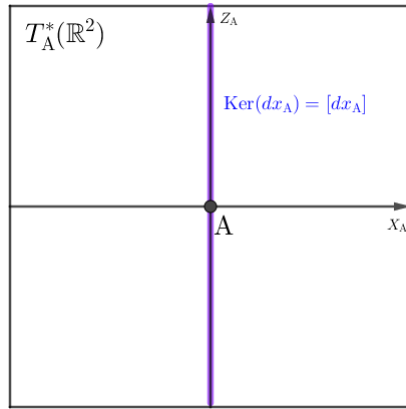


Figura 3.6: Representación geométrica para el caso de “pendiente” infinita $\text{Ker}(dx_A)$.

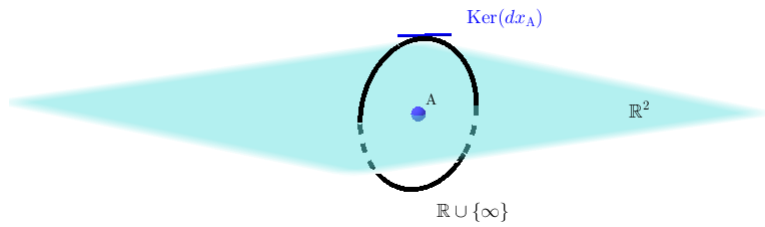


Figura 3.7: Representación geométrica para el caso de “pendiente” infinita $\text{Ker}(dx_A)$.

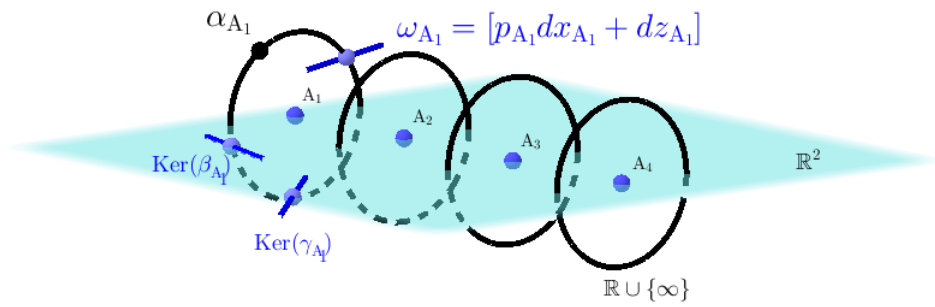


Figura 3.8: Representación geométrica del Espacio de elementos de contacto $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$.

Sea $A = (a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\omega_A = [p_A dx_A + dz_A]$ (o bien $\omega_A = [dx_A]$) es un elemento en el conjunto de elementos de contacto.

Sea $\varphi : \mathcal{C}\mathbb{R}^2 \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ tal que

$$\varphi(\omega_A) := (\bar{x}(\omega_A), \bar{z}(\omega_A), \bar{p}(\omega_A)),$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{x}(\omega_A) &:= x \circ \pi(\omega_A) = a^1, \\ \bar{z}(\omega_A) &:= z \circ \pi(\omega_A) = a^2,\end{aligned}$$

con π la función proyección tal que $\pi(\omega_A) = (a^1, a^2)$, y

$$x(a^1, a^2) = a^1, \quad z(a^1, a^2) = a^2,$$

y además

$$\bar{p}(\omega_A) := \begin{cases} p_A, & \omega_A = [dz_A - p_A dx_A] \\ \infty, & \omega_A = [dx_A] \end{cases}$$

Así φ es la función que permite identificar a los núcleos de las funcionales $dz_A - p_A dx_A$, con ternas ordenadas (a^1, a^2, p_A) o bien (a^1, a^2, ∞) .

Sea $\omega_B^* = (B, k) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, con $B = (b^1, b^2) \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$ ó $k \in \{\infty\}$.

Si $\psi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}) \longrightarrow \mathcal{C}\mathbb{R}^2$, es tal que

$$\psi(\omega_B^*) := \begin{cases} [dz_B - k dx_B], & k \in \mathbb{R} \\ [dx_B], & k \in \{\infty\} \end{cases}$$

entonces $\psi = \varphi^{-1}$ es la función inversa de φ , y por tanto la función ψ es biyectiva.

Por el capítulo 2, sabemos que \mathbb{S}^1 es una variedad suave, y como \mathbb{R}^2 también es una variedad suave, entonces el producto cartesiano entre estas variedades suaves también es suave, es decir, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ es suave [3].

También se ha probado en el capítulo 2 que la proyección estereográfica $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ es biyectiva.

Definimos

$$h := 1_{\mathbb{R}^2} \times \tilde{f} : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\}))$$

tal que

$$h((x, y), P) := (1_{\mathbb{R}^2}(x, y), \tilde{f}(P)).$$

h es una función biyectiva, pues sus funciones componentes son biyectivas.

Como las funciones h y ψ son funciones biyectivas, entonces la composición $\psi \circ h$ es una función biyectiva.

Como $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)$ es una variedad suave, $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$ es un conjunto, y $\psi \circ h$ es una función biyectiva, entonces por el **Teorema 2.4.1** existe una estructura suave en $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$ tal que $\psi \circ h$ es un difeomorfismo. Por consiguiente $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)$ es difeomorfo a $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$, es decir, $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathcal{C}\mathbb{R}^2$. Por lo tanto $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$ es variedad suave. Como

$$\dim(\mathbb{S}^1) = \dim(\mathbb{R}) = 1,$$

se sigue que

$$\dim((\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1)) = 3 = \dim(\mathcal{C}\mathbb{R}^2),$$

de aquí que el espacio de elementos de contacto, como afirmaba Lie, se vea localmente como \mathbb{R}^3 .

Por tanto, al conjunto cuyos elementos eran núcleos de funcionales lineales lo hemos dotado de una estructura suave o diferenciable de dimensión 3. Así podemos nombrar a $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$ como el espacio de elementos de contacto.

Conclusiones

Haciendo una comparación entre la construcción realizada en esta tesis y los elementos de contacto que menciona Sophus Lie, pudimos identificar al objeto $dz - p dx$ con las 1-formas. A su vez, podemos decir que: tomar un punto y una pendiente es equivalente a tomar un punto en $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$.

Así, en lugar de estudiar al objeto $dz - p dx$, lo que hacemos en realidad es estudiar los núcleos de las funcionales asociadas a este tipo de 1-formas.

Además, $\mathcal{C}\mathbb{R}^2$ es una variedad suave de dimensión 3. Por lo cual, a este conjunto podemos llamarlo propiamente como el espacio de elementos de contacto.

Bibliografía

- [1] Hansjörg Geiges: “A Brief History of Contact Geometry and Topology”, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, NL-2300 RA Leiden.
- [2] Barrett O’Neill: “Elementary Differential Geometry”, second edition, Academic Press, United States, 2006.
- [3] John M. Lee: “Introduction to Smooth Manifolds”, Version 3.0, Springer, New York, 2000.
- [4] James. R. Munkres: “Topología”, segunda edición, Pearson Education, Madrid, 2002.
- [5] Michael Spivak: “Calculus on Manifolds A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus”, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1998.
- [6] David E. Blair: “Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds”, second edition, Birkhäuser, United States, 2010.