BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Postgrado en Ciencias Matemáticas

DESIGUALDADES LOCALIZADAS PARA POLINOMIOS DE BERNSTEIN

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

Presenta:

Miriam Cisneros Martínez

Director de tesis:

Dr. Jorge Bustamante González

Puebla, Puebla. 2015

BUAP

DR. JOSÉ ENRIQUE BARRADAS GUEVARA
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

MIRIAM CISNEROS MARTÍNEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 22 de MAYO de 2015, con la tesis titulada:

"Desigualdades localizadas para polinomios de Bernstein"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E
H. Puebla de Z. a 28 de mayo de 2015

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Ccp Archivo
DR JEBG/mtrv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicatoria

A mis padres Rosa Elia y Rodrigo

A mis hermanos Jerzi, Irasema, Yanel,
Rodrigo, Alondra y Daniel.

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial a mis padres, Rosa Elia y Rodrigo por la confianza que me han dado, por ser mi apoyo durante todo este tiempo y por creer en mí.

A mis hermanos por la ayuda y comprensión que me han brindado en esta etapa de mi vida.

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Jorge Bustamante González por el tiempo, el apoyo y sobre todo la paciencia que me brindó durante la realización de la presente tesis.

A mis sinodales, Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Maxim Ivanov Todorov y la Dra. Patricia Domínguez Soto, por el tiempo invertido en la revisión del presente trabajo y por las valiosas observaciones hechas al mismo.

A Itayetzin Torres e Iván Sepúlveda por el tiempo compartido y por sus consejos siempre tan acertados.

A todas las personas que estuvieron apoyándome, de una u otra manera, desde el inicio de la maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para la realización de mis estudios de maestría y a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado en estos últimos meses.

Miriam Cisneros Martínez
FCFM-BUAP
Puebla, Puebla,
Junio 2015

Introducción

En 1875 Weierstrass demostró que toda función continua sobre un intervalo compacto de la recta real es el límite (en norma uniforme) de una sucesión de polinomios. Posteriormente, Bernstein en 1912 [2] presentó una colección de operadores polinomiales lineales, con la ayuda de los cuales se puede obtener una demostración relativamente simple del teorema de Weierstrass. Los hoy conocidos como polinomios de Bernstein se construyen de la siguiente manera: dada una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define

$$B_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x), \qquad x \in [0,1],$$

donde

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Desde la aparición del trabajo original de Bernstein, se han escrito cientos de artículos dedicados a estudiar las propiedades de estos polinomios. Aquí no las vamos a recordar, pero se pueden consultar los textos [4], [5], [11], [12] y [15]. En particular, se han demostrado desigualdades directas e inversas, para estos polinomios, entre los que se encuentra el Teorema 0.1. Antes de enunciar el teorema, consideremos lo siguiente.

Sea $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $x \in [0,1]$. Para $f \in C[0,1]$, se define el módulo de continuidad de segundo orden de Ditzian-Totik, con peso φ como [14]:

$$\begin{aligned} \omega_\varphi^2(f,\delta) &= \sup_{0\le t\le\delta} \|\Delta_{t\varphi}^2 f\| \\ &= \sup_{0\le t\le\delta} \sup_{x\pm t\varphi(x)\in[0,1]} |f(x-t\varphi(x)) - 2f(x) + f(x+t\varphi(x))|. \end{aligned} \tag{2}$$

Teorema 0.1. *Existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que, cualesquiera sean $f \in C[0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$C_1 \omega_\varphi^2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \le \|f - B_n(f)\| \le C_2 \omega_\varphi^2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{3}$$

Se conocen al menos tres demostraciones para el teorema anterior (ver [9], [10], [13] y [14]). Todas ellas son complicadas. El presente trabajo está relacionado con algunos de los detalles en la prueba de Totik [14].

En [14] Totik presenta un *esquema* de demostración para los operadores de Szász-Mirakjan. Recordemos que los operadores de Szász-Mirakjan se definen mediante la expresión

$$S_n(f,x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}, \qquad f \in C[0,\infty).$$

Hacemos mención de que se trata de un esquema, puesto que los cálculos no se presentan con exactitud. La demostración depende de parámetros A, ϵ, β y $C = C(A)$. Sin embargo, no se da la elección exacta de los mismos, sólo se indica que los resultados se cumplen si A es lo suficientemente grande y ϵ es lo suficientemente pequeño. Con respecto a los polinomios de Bernstein, se menciona que se puede repetir la prueba del teorema correspondiente a los operadores de Szász-Mirakjan, con modificaciones menores ([14, pág. 1017]), pero no está claro cómo hay que modificar algunas desigualdades. En particular, la desigualdad que se presenta a continuación [14, pág. 1009],

$$\|\theta^2 S_n'' f\|_{[x_0,\infty)} \geq \frac{1}{x_0^2} \|\theta^2 S_n'' f\|_{[0,\infty)}, \qquad \theta(x) = \sqrt{x},$$

no tiene un análogo directo para los operadores de Bernstein, puesto que se obtendría lo siguiente

$$\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{[0,1]} \leq x_0^2 \|\varphi^2 B_n''(f)\|_{[\alpha,\beta]} < \|\varphi^2 B_n''(f)\|_{[\alpha,\beta]},$$

donde $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Asimismo, la demostración del teorema inverso (Teorema 0.1) depende de lo que Totik llamó **desigualdades localizadas**. Recordemos que las desigualdades típicas del tipo Bernstein acotan normas de derivadas en términos de la norma de las funciones. Por ejemplo, para el caso trigonométrico la desigualdad de Bernstein es la siguiente:

$$\|T_n'\| \leq n\|T_n\|,$$

donde T_n es un polinomio trigonométrico de grado n y se considera la norma uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Mientras que en las desigualdades localizadas, para $x \in (0,1)$ se quieren acotar las derivadas, pero considerando la norma uniforme en ciertos subintervalos de $[0,1]$ que dependen de x. La idea fundamental de Totik es que, en algunos subintervalos, las constantes asociadas a las desigualdades de tipo Bernstein son más pequeñas que cuando la norma se considera en todo el intervalo [0,1].

Para los operadores de Szász-Mirakjan se conoce que

$$\|\theta^2 S_n'' f\|_{[0,\infty)} \leq 2\|\theta^2 f''\|_{[0,\infty)}, \qquad f \in C^2[0,\infty)$$

y

$$\|\theta^3 S_n''' f\|_{[0,\infty)} \leq 6\|\theta^2 S_n''(f)\|_{[0,\infty)}, \qquad f \in C[0,\infty).$$

Pero en [14, pág. 999] se hace uso de la desigualdad

$$|\theta^2(x) S_n''(f,x)| \leq (1+\epsilon)\|\theta^2 f''\|_{[0,\infty)}, \qquad f \in C^2[0,\infty)$$

considerando $x \geq A/\sqrt{n}$, donde ϵ es lo suficientemente pequeño y A es lo suficientemente grande.

En particular, para llevar la prueba al caso de los polinomios de Bernstein se necesitan las desigualdades de la forma

$$|\varphi^2(x) B_n''(f,x)| \leq (1+\epsilon)\|\varphi^2 f''\|_{[0,1]}, \qquad f \in C^2[0,1], \tag{4}$$

y

$$|\varphi^4(x) B_n^{(iv)}(f,x)| \leq (2+\epsilon)n\|\varphi^2 f''\|_{[0,1]}, \qquad f \in C^2[0,1], \tag{5}$$

para $x \in [A/n, 1-A/n]$, con $A > 0$.

Otra observación importante de Totik es que, *bajo ciertas condiciones*, la norma de la derivada no se puede alcanzar muy cerca de los extremos del intervalo ([14, pág. 1017], "$|\varphi^2(x) B_n'' f(x)|$ can take its maximum only in some interval $[A/n, 1-A/n]$, $A > 0$ ").

Así, el problema es encontrar valores de ϵ y A para que se cumplan las desigualdades (4) y (5).

El objetivo de esta tesis es presentar pruebas detalladas de las desigualdades localizadas correspondientes a los polinomios de Bernstein y tratar de dar una expresión explícita para los parámetros que se deben usar.

El presente trabajo consta de dos capítulos. En el **Capítulo 1** se hace una breve revisión de algunos conceptos y estimados relacionados con la función φ, la segunda diferencia simétrica y los polinomos de Bernstein. En el **Capítulo 2** se presenta el resultado principal, es decir, el teorema referente a las desigualdades localizadas para polinomios de Bernstein. También, se encuentran los resultados auxiliares para la demostración del mismo. Por último, se presenta la **Conclusión** de esta tesis.

Resaltamos que los teoremas principales presentados aquí son nuevos. En el texto se explica con claridad cuáles son los resultados asociados a otros autores que se han utilizado (ver Proposiciones 1.6, 1.9, 1.10, 1.11 y 1.12).

Índice

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones y conceptos que utilizaremos a lo largo de este trabajo. También se enuncian algunos resultados relacionados con la función φ, descrita en la introducción, además se incluyen algunas representaciones para las derivadas de los polinomios de Bernstein.

1.1. Algunas propiedades relacionadas con la función $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$

Las desigualdades que se presentan en esta sección se pueden escribir de una manera más general, pero por conveniencia se presentan en la forma en que se usarán más adelante.

Lema 1.1. *Si* $0 < h < 1/(3\sqrt{2})$ *y* $2h \leq x \leq 1 - 2h$, *entonces*

$$S(x,h) := \frac{1}{\min\{\varphi^2(x), \varphi^2(x+h)\}} + \frac{1}{\min\{\varphi^2(x), \varphi^2(x-h)\}} \leq \frac{3}{\varphi^2(x)}.$$

Demostración.

Caso 1. Supongamos que $2x \leq 1 - h$. Notemos que, para $x \leq 1 - h$, tenemos $\varphi(x+h) < \varphi(x)$ si, y sólo si $1 - h < 2x$. Por lo tanto $\varphi(x) \leq \varphi(x+h)$.

Por otro lado, si $2h \leq x$, ya que φ^2 es cóncava, se tiene

$$\frac{1}{2}\varphi^2(x) \leq \frac{1}{2}\varphi^2(x) + \frac{1}{2}\varphi^2(x-2h) \leq \varphi^2\left(\frac{x}{2} + \frac{x-2h}{2}\right) = \varphi^2(x-h).$$

Por lo tanto

$$S(x,h) = \frac{1}{\varphi^2(x)} + \frac{1}{\varphi^2(x-h)} \leq \frac{3}{\varphi^2(x)}.$$

Caso 2. Supongamos ahora que $1+h \leq 2x$. Para $x \geq h$, se tiene que $\varphi(x-h) < \varphi(x)$ si, y sólo si $2x < 1+h$. Luego, $\varphi(x) \leq \varphi(x-h)$.

Por otra parte, como $0 < x \leq 1-2h$ y φ^2 es cóncava, se tiene

$$\frac{1}{2}\varphi^2(x) \leq \frac{1}{2}\varphi^2(x) + \frac{1}{2}\varphi^2(x+2h) \leq \varphi^2\left(\frac{x}{2} + \frac{x+2h}{2}\right) = \varphi^2(x+h),$$

por lo cual,

$$S(x,h) = \frac{1}{\varphi^2(x+h)} + \frac{1}{\varphi^2(x)} \leq \frac{3}{\varphi^2(x)}.$$

Caso 3. Finalmente, consideremos el caso $1-h < 2x < 1+h$. La función

$$Z_h(x) = 3h^2\left(x^2 + (1-x)^2\right) - x^2(1-x)^2 - 2h^2x(1-x), \quad x \in (0,1),$$

es simétrica con respecto al punto $1/2$ y es sencillo verificar que Z_h es decreciente en el intervalo $((1-h)/2, 1/2)$.

Así, del hecho que Z_h es decreciente en $((1-h)/2, 1/2)$, se sigue que

$$Z_h(x) \leq Z_h((1-h)/2) \quad \text{para} \quad 1-h \leq 2x \leq 1,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
3h^2&\left(x^2 + (1-x)^2\right) - x^2(1-x)^2 - 2h^2x(1-x) \\
&\leq \frac{3}{4}h^2((1-h)^2 + (1+h)^2) - \frac{1}{16}(1-h)^2(1+h)^2 \\
&\qquad - \frac{1}{2}h^2(1-h)(1+h) \\
&= \frac{31}{16}h^4 + \frac{9}{8}h^2 - \frac{1}{16} \leq 3h^4,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene debido a que $h \leq 1/(3\sqrt{2})$. Además,

$$\begin{aligned}
3h^2&\left(x^2 + (1-x)^2\right) - x^2(1-x)^2 - 2h^2x(1-x) \\
&= 2\varphi^2(x)(\varphi^2(x) - h^2) - 3(\varphi^4(x) - h^2(1-x)^2 - h^2x^2),
\end{aligned}$$

luego,

$$2\varphi^2(x)(\varphi^2(x) - h^2) - 3(\varphi^4(x) - h^2(1-x)^2 - h^2x^2) \leq 3h^4,$$

de donde

$$\begin{aligned} 2\varphi^2(x)(\varphi^2(x) - h^2) &\leq 3\left(\varphi^4(x) - h^2x^2 - h^2(1-x)^2 + h^4\right) \\ &= 3(x^2 - h^2)((1-x)^2 - h^2). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{2(\varphi^2(x) - h^2)}{(x^2 - h^2)((1-x)^2 - h^2)} \leq \frac{3}{\varphi^2(x)}.$$

Por otro lado, como $1 - h < 2x$, se sigue que $h - 2xh - h^2 < 0$, por lo que

$$x - x^2 + h - 2xh - h^2 < x - x^2,$$

esto es, $\varphi^2(x+h) < \varphi^2(x)$.

De manera análoga se demuestra que para $2x \leq 1 < 1 + h$ se cumple $\varphi^2(x-h) < \varphi^2(x)$.

De lo anterior, se sigue que

$$S(x,h) = \frac{1}{\varphi^2(x+h)} + \frac{1}{\varphi^2(x-h)} = \frac{2(\varphi^2(x) - h^2)}{(x^2 - h^2)((1-x)^2 - h^2)} \leq \frac{3}{\varphi^2(x)}.$$

$\square$

En el siguiente lema se presentan algunas cotas para los elementos $z \in [B^2/n, 1 - B^2/n]$, mismas que nos serán útiles para la demostración del Lema 1.3.

Lema 1.2. *Si $B \geq b \geq 4$, $n > 2B^2$ y $z \in [B^2/n, 1 - B^2/n]$, entonces*

$$z \leq \frac{b}{b-1}\left(z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}}\right), \quad 1 - z \leq \frac{b}{b-1}\left(1 - z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}}\right)$$

y

$$\frac{B}{n} + \frac{2\varphi(z)}{\sqrt{n}} < z < 1 - \frac{B}{n} - \frac{2\varphi(z)}{\sqrt{n}}.$$

Demostración. Sea $a = \sqrt{B/(B-1)}$. Como

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^2 = \frac{B^2}{n} \leq z,$$

tenemos $a^2/\sqrt{n} \le (a^2-1)\sqrt{z}$. Así,

$$\frac{a^2}{\sqrt{n}}\varphi(z) \le \frac{a^2\sqrt{z}}{\sqrt{n}} \le (a^2-1)z.$$

Por lo tanto

$$z \le a^2\left(z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}}\right) \le \frac{b}{b-1}\left(z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}}\right),$$

debido a que la función $h(s) = s/(s-1)$ $(s>1)$ decrece y $B \ge b$.

Asimismo, como $1 - z \in [B^2/n, 1 - B^2/n]$, la desigualdad anterior también se cumple para este elemento, luego

$$1 - z \le \frac{b}{b-1}\left(1 - z - \frac{\varphi(1-z)}{\sqrt{n}}\right) = \frac{b}{b-1}\left(1 - z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}}\right).$$

Para la segunda parte del lema, observemos que

$$\frac{B}{n} + \frac{2\varphi(z)}{\sqrt{n}} \le \frac{z}{B} + \frac{2\sqrt{z}}{B}\varphi(z) < \frac{3z}{B} \le z.$$

Para $h \in (0,1)$ y $x \in [0,1]$, sea

$$F_h(x) = x + h\varphi(x) \quad \text{y} \quad b_h = \frac{1}{1+h^2}.$$

Es conocido que la función F_h es estrictamente creciente en $[0, b_h]$ (ver [3]). Ahora bien, teniendo en cuenta que $z \le 1 - B^2/n < n/(n+4) = b_{2/\sqrt{n}}$, tenemos

$$\begin{aligned} z + \frac{2\varphi(z)}{\sqrt{n}} = F_{2/\sqrt{n}}(z) &\le F_{2/\sqrt{n}}(1 - B^2/n) \\ &= 1 - \frac{B^2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{B^2}{n}\left(1 - \frac{B^2}{n}\right)} \\ &= 1 - \frac{B^2}{n} + \frac{2B}{n}\sqrt{1 - \frac{B^2}{n}} < 1 - \frac{B}{n}, \end{aligned}$$

puesto que

$$\frac{B}{n} + \frac{2B}{n}\sqrt{1 - \frac{B^2}{n}} < \frac{3B}{n} < \frac{B^2}{n}.$$

Por tanto

$$z < 1 - \frac{B}{n} - \frac{2\varphi(z)}{\sqrt{n}}.$$

□

Lema 1.3. *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \tau \leq 1/2$, $B \geq b \geq 4$, *tales que* $4/3 \leq \lambda B$, $n > 2B^2$ *y* $z \in [B^2/n, 1 - B^2/n]$. *Si*

$$|z - y| \leq \lambda \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}},$$

entonces las siguientes relaciones se cumplen

$$\frac{z}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{z}{2},$$

$$(1-\tau)y,\ (1-\tau)y + \tau,\ y \pm \lambda \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} \in \left[\frac{B}{n}, 1 - \frac{B}{n}\right] \tag{1.1}$$

y

$$\frac{2b}{2b+\lambda}\varphi(y) \leq \varphi(z) \leq \min\left\{1 + \lambda^2,\ \sqrt{\frac{b}{b-1}}\right\}\varphi(y). \tag{1.2}$$

Demostración. Como $B \geq 4$, del Lema 1.2 se sigue que

$$\frac{z}{2} \leq \frac{(B-1)z}{B} \leq z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq z - \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq y$$

y

$$\frac{z}{2} + \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2}.$$

Por tanto

$$y \leq z + \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq z + \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} + \frac{z}{2},$$

lo cual prueba las primeras desigualdades.

Verifiquemos ahora las relaciones en (1.1). De las últimas desigualdades en el Lema 1.2 obtenemos

$$\frac{B}{n} + \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} = \frac{B}{n} + \frac{2\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} - \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq \frac{B}{n} + \frac{2\varphi(z)}{\sqrt{n}} - \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}}$$

$$\leq z - \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq y \leq z + \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}}$$

y

$$1 - \frac{B}{n} - \frac{2\varphi(z)}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq 1 - \frac{B}{n} - \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}}.$$

Como $z \geq B^2/n$,

$$\frac{B}{n} + \tau z + \frac{(1-\tau)\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq \frac{z}{B} + \frac{z}{2} + \frac{1}{B}\sqrt{\frac{B^2 z}{n}} \leq z.$$

Luego,

$$\frac{B}{n} \leq (1-\tau)\left(z - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi(z)\right) \leq (1-\tau)y. \tag{1.3}$$

Notemos ahora que si $z \in [B^2/n, 1 - B^2/n]$, entonces se tiene que $1 - z \in [B^2/n, 1 - B^2/n]$ y $|(1-z) - (1-y)| = |z - y|$. Entonces, la desigualdad (1.3) también se cumple si reemplazamos z y y por $1 - z$ y $1 - y$ respectivamente. Esto es,

$$\frac{B}{n} \leq (1-\tau)\left(1 - z - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi(z)\right) \leq (1-\tau)(1-y)$$

o

$$1 - (1-\tau)(1-y) \leq 1 - \frac{B}{n}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{B}{n} \leq (1-\tau)y < (1-\tau)y + \tau \leq 1 - \frac{B}{n}.$$

Para la última expresión en (1.1), notemos que si $|y - z| = \lambda\varphi(z)/\sqrt{n}$, entonces

$$z = y \pm \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \in [B^2/n, 1 - B^2/n] \subset [B/n, 1 - B/n].$$

Para la prueba de (1.2), si $y < z$, entonces $z - y \leq \lambda\varphi(z)/\sqrt{n}$. Del Lema 1.2, se obtiene lo siguiente

$$0 < \frac{B}{n} + \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} < z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} < z - \frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq y$$

y

$$\varphi(z) \leq \sqrt{1-y}\sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{b}{b-1}}\sqrt{1-y}\sqrt{z - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}}} \leq \sqrt{\frac{b}{b-1}}\varphi(y).$$

Por otro lado, si $y > z$, entonces $y - z \leq \lambda\varphi(z)/\sqrt{n}$. En este caso,

$$y \leq z + \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} \leq 1 - \frac{B}{n} - \frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}} < 1$$

y

$$\varphi(z) \le \sqrt{y}\sqrt{1-z} \le \sqrt{\frac{b}{b-1}}\sqrt{y}\sqrt{1-z-\frac{\varphi(z)}{\sqrt{n}}} \le \sqrt{\frac{b}{b-1}}\varphi(y).$$

Por lo tanto,

$$\varphi(z) \le \sqrt{\frac{b}{b-1}}\varphi(y).$$

Como

$$\frac{3}{4} \le \frac{2+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2},$$

si $n > 2B^2$, $4/3 \le \lambda B$ y $w \in [B^2/n, 1-B^2/n]$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi(w) &< \frac{\lambda}{B}\sqrt{\frac{B^2}{n}}\sqrt{w} \le \frac{4\lambda(2+\lambda^2)}{3B(1+\lambda^2)^2}w \\ &\le \frac{\lambda^2(2+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}w \le \left(1-\frac{1}{(1+\lambda^2)^2}\right)w.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{w}{(1+\lambda^2)^2} \le w - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi(w). \tag{1.4}$$

Supongamos que $|z-y| \le \lambda\varphi(z)/\sqrt{n}$.

a) Si $y < z$ usamos la desigualdad (1.4) con $w = z$. Como se tiene que $0 < z - \lambda\varphi(z)/\sqrt{n} \le y$, entonces

$$\varphi(z) \le \sqrt{1-y}\sqrt{z} \le \sqrt{1-y}(1+\lambda^2)\sqrt{z-\lambda\varphi(z)/\sqrt{n}} \le (1+\lambda^2)\varphi(y).$$

b) Si $y > z$ tomamos $w = 1-z$ en (1.4). Ya que $y - z \le \lambda\varphi(z)/n$, entonces

$$0 < \frac{1-z}{(1+\lambda^2)^2} \le 1-z-\frac{\lambda\varphi(1-z)}{\sqrt{n}} = 1-z-\frac{\lambda\varphi(z)}{\sqrt{n}} \le 1-y.$$

Por tanto

$$\varphi(z) \le \sqrt{y}\sqrt{1-z} \le (1+\lambda^2)\varphi(y).$$

Sólo nos resta verificar que $\varphi(z)$ está acotada inferiormente.

(i) Si $z < y$, entonces

$$y \le z + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi(z) < z + \frac{\lambda}{B}\sqrt{\frac{B^2 z}{n}} \le z + \frac{\lambda}{b}z \le \left(1+\frac{\lambda}{2b}\right)^2 z.$$

Así,

$$\varphi(y) \leq \sqrt{1-z}\sqrt{y} \leq \left(1+\frac{\lambda}{2b}\right)\varphi(z).$$

(ii) Por otro lado, si $z > y$, sea $v = 1-z$ y $w = 1-y$, luego $v < w$. Además, $v \in [B^2/n, 1-B^2/n]$ y

$$|v-w| = |z-y| \leq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\varphi(v).$$

Por tanto, de (i) tenemos

$$\varphi(y) = \varphi(w) \leq \left(1+\frac{\lambda}{2b}\right)\varphi(v) = \left(1+\frac{\lambda}{2b}\right)\varphi(z).$$

□

Necesitamos también, contar con condiciones necesarias que nos permitan tener una cota superior para la función φ^m con $m \in \mathbb{N}$, misma que se presenta a continuación.

Lema 1.4. *Sea $B > 0$ y fijemos $\epsilon,\ h,\ \beta \in (0,1)$ tales que*

$$0 < h \leq \beta < \frac{\epsilon}{2(4+\epsilon)}.$$

Si $x \in (0,1)$, $y \in [(1-2\beta)x, 1-(1-2\beta)(1-x)-2h]$ y $\xi \in [y, y+2h]$, entonces

$$\min\{\varphi(y), \varphi(y+2h)\} \leq \varphi(\xi) \quad \text{ y } \quad \varphi^m(x) \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)^{m/2}\varphi^m(\xi).$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

En particular, si $\beta \in (0,1/2)$, $\sqrt{6} \leq 2\beta B$, $x \in [B^2/n, 1-B^2/n]$ y

$$|z-x| \leq \varphi(x)\sqrt{6/n},$$

entonces $z \in (0,1)$ y

$$\varphi^m(x) \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)^{m/2}\varphi^m(z).$$

Demostración. Sea $\gamma = \min\{\varphi(y), \varphi(y+2h)\}$. Dado que φ es cóncava, es claro que $\gamma \leq \varphi(\xi)$. Más aún, de la restricción sobre β sabemos que

$$\frac{1}{1-2\beta} \leq 1+\frac{\epsilon}{4}.$$

Caso 1. Si $y \leq (1-2h)/2$, entonces $\varphi(y) \leq \varphi(1/2-h) = \varphi(1/2+h)$. Como φ es cóncava y $y < y+2h \leq 1/2+h$, se tiene

$$\varphi(y+2h) \geq \min\{\varphi(y), \varphi(1/2+h)\} = \varphi(y),$$

luego, $\gamma = \varphi(y)$. Además, se tienen las desigualdades siguientes

$$(1-2\beta)x \leq y < \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\frac{\varphi^2((1-2\beta)x)}{1-2\beta} = x(1-x) + 2\beta x^2.$$

Por tanto,

$$\varphi^2(x) \leq \frac{\varphi^2((1-2\beta)x)}{1-2\beta} \leq \frac{\varphi^2(y)}{1-2\beta} \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\gamma^2 \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\varphi^2(\xi).$$

Caso 2. Si $y > (1-2h)/2$, entonces $\varphi(y+2h) < \varphi(1/2+h) = \varphi(1/2-h)$. Debido a que φ es cóncava y $1/2-h < y < y+2h$, obtenemos

$$\varphi(y) > \min\{\varphi(1/2-h), \varphi(y+2h)\} = \varphi(y+2h),$$

luego, $\gamma = \varphi(y+2h)$. También, se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{2} < y+2h \leq 1-(1-2\beta)(1-x).$$

Considerando que $x + (1-2\beta)(1-x) \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi^2(x) &\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)(1-2\beta)(1-x)x \\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)(1-2\beta)(1-x)(1-(1-2\beta)(1-x)) \\
&= \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\varphi^2((1-2\beta)(1-x)) \\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\varphi^2(y+2h) = \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\gamma^2 \\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\varphi^2(\xi).
\end{aligned}$$

Hemos verificado lo siguiente

$$\varphi^2(x) \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\varphi^2(\xi).$$

Por lo tanto, para $m \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\varphi^m(x) \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)^{m/2} \varphi^m(\xi).$$

Para la última desigualdad, sea $y = x - \varphi(x)\sqrt{6/n}$ y $h = \varphi(x)\sqrt{6/n}$. Ya que $z \in [y, y + 2h]$, es suficiente verificar las desigualdades

$$(1 - 2\beta)x \leq y \quad \text{y} \quad y \leq 1 - (1 - 2\beta)(1 - x) - 2h.$$

Para la primera, usamos las condiciones $\sqrt{6} \leq 2\beta B$ y $B^2/n \leq x$ para obtener

$$\varphi(x)\sqrt{\frac{6}{n}} = \sqrt{1-x}\sqrt{x}\frac{\sqrt{6}}{B}\sqrt{\frac{B^2}{n}} \leq 2\beta x.$$

Por tanto $(1 - 2\beta)x \leq x - \varphi(x)\sqrt{6/n} = y$.

Para la segunda desigualdad, usamos $\sqrt{6} \leq 2\beta B$ y $x \leq 1 - B^2/n$. Luego,

$$2\beta x + \varphi(x)\sqrt{\frac{6}{n}} \leq 2\beta x + 2\beta\sqrt{\frac{B^2}{n}(1-x)} = 2\beta x + 2\beta(1-x) = 2\beta.$$

Así,

$$\begin{aligned} y &= 2\beta x + \varphi(x)\sqrt{\frac{6}{n}} + (1-2\beta)x - 2\varphi(x)\sqrt{\frac{6}{n}} \\ &\leq 2\beta + (1-2\beta)x - 2\varphi(x)\sqrt{\frac{6}{n}} = 1 - (1-2\beta)(1-x) - 2h. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y \in [(1 - 2\beta)x, 1 - (1 - 2\beta)(1 - x) - 2h].$$

Ahora, aplicando la primera parte de este lema, se obtiene que $z \in (0, 1)$ y

$$\varphi^m(x) \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)^{m/2} \varphi^m(z).$$

□

1.2. Segundas diferencias

Debido a que el módulo de continuidad de segundo orden está definido en términos de las segundas diferencias simétricas, es conveniente contar con algunas representaciones y estimados de las mismas.

Definición 1.5. *Para una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $h > 0$, la segunda diferencia simétrica se define mediante*

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x-h) - 2f(x) + f(x+h), \qquad x \pm h \in [0,1].$$

Se sigue de esta definición que

$$\left|\Delta_h^2 f(x)\right| \leq 4\|f\|. \tag{1.5}$$

Para $g \in C^2[0,1]$, $x \in (0,1)$ y $h > 0$ tal que $x \pm h \in [0,1]$, denotamos

$$I_1(g,x,h) = \int_x^{x+h} (x+h-s)g''(s)ds$$

e

$$I_2(g,x,h) = \int_{x-h}^{x} (x-h-s)g''(s)ds.$$

Luego, integrando por partes obtenemos la representación

$$\Delta_h^2 g(x) = \int_{-h/2}^{h/2}\int_{-h/2}^{h/2} g''(x+s+t)dsdt = I_1(g,x,h) - I_2(g,x,h). \tag{1.6}$$

Para estimar las segundas diferencias necesitamos la siguiente proposición (una demostración puede verse en [7, (6)]).

Proposición 1.6. *Si $x \in (0,1)$ y $t \in [0,1]$, entonces*

$$\left|\int_x^t \frac{(t-s)}{\varphi^2(s)}ds\right| \leq \frac{(t-x)^2}{\varphi^2(x)}.$$

Proposición 1.7. *Supongamos que $g \in C^2[0,1]$ y $x, h \in (0,1)$.*
(i) *Si $0 < h \leq 1/(3\sqrt{2})$ y $2h \leq x \leq 1-2h$, entonces*

$$|\Delta_h^2 g(x)| \leq \frac{3h^2}{2\varphi^2(x)}\|\varphi^2 g''\|_{[x-h,x+h]}.$$

(ii) *Si $0 < h < 1/2$ y $h \leq x \leq 1-h$, entonces*

$$|\Delta_h^2 g(x)| \leq \frac{2h^2}{\varphi^2(x)}\|\varphi^2 g''\|_{[x-h,x+h]}.$$

(iii) *Fijemos* $\epsilon, \beta \in (0,1)$ *tal que*

$$0 < h \leq \beta < \frac{\epsilon}{2(4+\epsilon)}.$$

Si $y \in [(1-2\beta)x, 1-(1-2\beta)(1-x)-2h]$, *entonces*

$$|\Delta_h^2 g(y+h)| \leq \frac{h^2(1+\epsilon/4)}{\varphi^2(x)} \|\varphi^2 g''\|_{[y,y+2h]}.$$

Demostración.
(i) Usamos la representación dada en (1.6) para obtener

$$|\Delta_h^2 g(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} (x+h-s) g''(s) \right| + \left| \int_{x-h}^{x} (x-h-s) g''(s) \right|$$

$$\leq \|\varphi^2 g''\|_{[x,x+h]} \int_x^{x+h} \left| \frac{x+h-s}{\varphi^2(s)} \right| ds + \|\varphi^2 g''\|_{[x-h,x]} \int_{x-h}^{x} \left| \frac{x-h-s}{\varphi^2(s)} \right| ds$$

$$\leq \|\varphi^2 g''\|_{[x-h,x+h]} \left(\int_x^{x+h} \frac{x+h-s}{\varphi^2(s)} ds + \int_{x-h}^{x} \frac{s+h-x}{\varphi^2(s)} ds \right)$$

$$\leq \|\varphi^2 g''\|_{[x-h,x+h]} \left(\frac{1}{\min\{\varphi^2(x), \varphi^2(x+h)\}} \int_x^{x+h} (x+h-s) ds \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\min\{\varphi^2(x), \varphi^2(x-h)\}} \int_{x-h}^{x} (s+h-x) ds \right)$$

$$\leq \frac{\|\varphi^2 g''\|_{[x-h,x+h]} h^2}{2} \left(\frac{1}{\min\{\varphi^2(x), \varphi^2(x+h)\}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\min\{\varphi^2(x), \varphi^2(x-h)\}} \right)$$

$$\leq \frac{3\|\varphi^2 g''\|_{[x-h,x+h]}}{2\varphi^2(x)} h^2,$$

en los cálculos anteriores se utilizó el Lema 1.1. Observemos que para poder aplicar este lema, las condiciones $h \leq 1/(3\sqrt{2})$ y $2h \leq x \leq 1-2h$ fueron necesarias.

(ii) Usando (1.6) y la Proposición 1.6 obtenemos

$$|\Delta_h^2 g(x)| \leq \|\varphi^2 g''\|_{[x+h,\, x-h]} \left(\int_x^{x+h} \frac{x+h-s}{\varphi^2(s)} ds + \int_{x-h}^{x} \frac{s+h-x}{\varphi^2(s)} ds \right)$$

$$\leq \frac{2}{\varphi^2(x)} h^2 \|\varphi^2 g''\|_{[x+h,\, x-h]}.$$

(iii) Considerando (1.6), tenemos que existe un punto $\xi_k \in [y, y+2h]$ tal que

$$|\Delta_h^2 g(y+h)| = h^2 |g''(\xi_k)| \leq h^2 \frac{\|\varphi^2 g''\|_{[y,y+2h]}}{\varphi^2(\xi_k)}$$

$$\leq \frac{h^2(1+\epsilon/4)}{\varphi^2(x)} \|\varphi^2 g''\|_{[y,y+2h]},$$

donde la última desigualdad se sigue del Lema 1.4. □

1.3. Algunas propiedades de los polinomios de Bernstein

En esta sección se presentan algunas identidades relacionadas con la base de Bernstein, así como también expresiones para los polinomios de Bernstein de funciones específicas, las cuales nos serán de utilidad en la demostración del Teorema 2.5. Estas representaciones son conocidas, por ejemplo, (1.11) y (1.12) son la ecuación (2.1) [5, pág. 305]. Incluimos las demostraciones para conveniencia del lector.

Sea $p_{n,k}(x)$ como se definió anteriormente y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. De aquí en adelante consideraremos $p_{n,k}(x) = 0$ si $k < 0$ o $k > n$. Necesitamos algunas ecuaciones relacionadas con los polinomios de Bernstein.

Es conocido que

$$B_n(P, x) = P(x), \tag{1.7}$$

para todo polinomio P de grado no mayor que uno.

Denotemos $e_k(x) = x^k$, $k \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.8. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}_0$, se define el momento centrado de orden m como*

$$S_{n,m}(x) = B_n((e_1 - x)^m, x).$$

Para nuestro propósito nos será útil tener expresiones para los momentos $S_{n,2}, S_{n,3}$ y $S_{n,4}$, las cuales se presentan en la Proposición 1.9. Para una demostración de tales expresiones, ver [11, págs. 6 y 14].

Proposición 1.9. *Para $n \geq 4$ y $x \in [0,1]$ tenemos*

$$S_{n,2}(x) = \frac{x(1-x)}{n}, \quad S_{n,3}(x) = \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}$$

y

$$S_{n,4}(x) = \frac{x(1-x)}{n^2}\left[\left(3 - \frac{6}{n}\right)x(1-x) + \frac{1}{n}\right].$$

Nos interesa contar con expresiones para los polinomios de Bernstein de las funciones e_2, e_3 y e_4. Las identidades que presentamos son más o menos bien conocidas aunque no aparecen en los textos en la forma explícita que aquí presentamos. De hecho, están ocultas en las fórmulas que se dan para los momentos.

Proposición 1.10. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$, entonces*

$$B_n(e_2, x) = x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n}, \tag{1.8}$$

$$B_n(e_3, x) = x^3 + \frac{\varphi^2(x)((3n-2)x+1)}{n^2} \tag{1.9}$$

y

$$B_n(e_4, x) = x^4 + 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2 + \frac{\varphi^2(x)\Big[(7n-6)\varphi^2(x) - 4nx^2 + 1\Big]}{n^3}. \tag{1.10}$$

Demostración. La igualdad (1.8) se puede encontrar en [11, Pág. 14]. Verifiquemos (1.9). Tenemos

$$\begin{aligned} S_{n,3}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^3 p_{n,k}(x) \\ &= B_n(e_3,x) - 3xB_n(e_2,x) + 3x^2B_n(e_1,x) - x^3 \\ &= B_n(e_3,x) - 3x\left(x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n}\right) + 3x^3 - x^3 \\ &= B_n(e_3,x) - \frac{3x\varphi^2(x)}{n} - x^3 \end{aligned}$$

y de la Proposición 1.9, se tiene

$$\begin{aligned}
B_n(e_3,x) &= x^3 + S_{n,3}(x) + \frac{3x\varphi^2(x)}{n}\\
&= x^3 + \frac{\varphi^2(x)(1-2x)}{n^2} + \frac{3x\varphi^2(x)}{n}\\
&= x^3 + \frac{\varphi^2(x)}{n^2}\Big((3n-2)x+1\Big).
\end{aligned}$$

Para (1.10) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
S_{n,4}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^4 p_{n,k}(x)\\
&= B_n(e_4,x) - 4xB_n(e_3,x) + 6x^2B_n(e_2,x) - 4x^3B_n(e_1,x) + x^4\\
&= B_n(e_4,x) - x^4 - 4x\frac{\varphi^2(x)((3n-2)x+1)}{n^2} + 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2\\
&= B_n(e_4,x) - x^4 - \frac{\varphi^2(x)(4(3n-2)x^2+4x)}{n^2} + 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2.
\end{aligned}$$

Así, usando la Proposición 1.9 obtenemos

$$\begin{aligned}
B_n(e_4,x) &= x^4 - 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2 + S_{n,4}(x) + \frac{\varphi^2(x)(4(3n-2)x^2+4x)}{n^2}\\
&= x^4 - 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n^2}\left[\left(3-\frac{6}{n}\right)\varphi^2(x) + \frac{1}{n}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + 4(3n-2)x^2 + 4x\right]\\
&= x^4 - 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n^3}\Big[(3n-6)\varphi^2(x) + 12n^2x^2 - 8nx^2\\
&\qquad\qquad + 4nx + 1\Big]\\
&= x^4 - 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n^3}\Big[(3n-6)\varphi^2(x) + 4n\varphi^2(x) + 12n^2x^2\\
&\qquad\qquad - 4nx^2 + 1\Big]\\
&= x^4 - 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n^3}\Big[(7n-6)\varphi^2(x) + 12n^2x^2\\
&\qquad\qquad - 4nx^2 + 1\Big]\\
&= x^4 + 6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n^3}\Big[(7n-6)\varphi^2(x) - 4nx^2 + 1\Big].
\end{aligned}$$

Con lo que concluimos la demostración de esta proposición. □

Proposición 1.11. *Para $x \in (0,1)$ y $n > 1$, tenemos:*

$$\varphi^2(x)p'_{n,k}(x) = (k-nx)p_{n,k}(x), \qquad k \in \{0,1,\dots,n\}. \tag{1.11}$$

$$p'_{n,k}(x) = n\Big(p_{n-1,k-1}(x) - p_{n-1,k}(x)\Big), \qquad k \in \{0,1,\dots,n-1\}. \tag{1.12}$$

$$p''_{n,k}(x) = n(n-1)\Big(p_{n-2,k-2}(x) - 2p_{n-2,k-1}(x) + p_{n-2,k}(x)\Big), \tag{1.13}$$

con $k \in \{0,1,\dots,n-2\}$.

Además, para $k \in \{0,1,\dots,n\}$ se cumple

$$\varphi^4(x)p''_{n,k}(x) = n\left((n-1)\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 - \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right)p_{n,k}(x) \tag{1.14}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi^6(x)p'''_{n,k}(x) &= ((k-nx)^3 - 3(1-2x)(k-nx)^2)p_{n,k}(x) \\ &+((2-3\varphi^2(x)(2+n))(k-nx) + 2(1-2x)n\varphi^2(x))p_{n,k}(x). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Demostración. Un cálculo directo nos da

$$\begin{aligned} \varphi^2(x)p'_{n,k}(x) &= \varphi^2(x)\binom{n}{k}\Big(kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\Big) \\ &= k(1-x)p_{n,k}(x) - (n-k)xp_{n,k}(x) \\ &= (k-nx)p_{n,k}(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p'_{n,k}(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \frac{n!}{k!(n-k-1)!}x^k(1-x)^{n-k-1} \\ &= np_{n-1,k-1}(x) - np_{n-1,k}(x). \end{aligned}$$

Para $k \in \{0,1,\dots,n-2\}$, tenemos

$$\begin{aligned} p''_{n,k}(x) &= n\Big(p'_{n-1,k-1}(x) - p'_{n-1,k}(x)\Big) \\ &= n(n-1)\Big(p_{n-2,k-2}(x) - 2p_{n-2,k-1}(x) + p_{n-2,k}(x)\Big). \end{aligned}$$

Ahora, verificaremos (1.14) para $0 \leq k \leq n$,

$$
\begin{aligned}
\varphi^4(x)p''_{n,k}(x) &= \varphi^2(x)\left(\varphi^2(x)p'_{n,k}(x)\right)' - \varphi^2(x)(1-2x)p'_{n,k}(x) \\
&= \varphi^2(x)\left((k-nx)p_{n,k}(x)\right)' - \varphi^2(x)(1-2x)p'_{n,k}(x) \\
&= (k-nx-1+2x)\varphi^2(x)p'_{n,k}(x) - n\varphi^2(x)p_{n,k}(x) \\
&= \Big((k-nx-1+2x)(k-nx) - n\varphi^2(x)\Big)p_{n,k}(x) \\
&= \Big((k-nx)^2 - (1-2x)(k-nx) - n\varphi^2(x)\Big)p_{n,k}(x) \\
&= n\left((n-1)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 + \frac{k^2}{n^2} - \frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x).
\end{aligned}
$$

Para verificar la última identidad usaremos una idea similar a la que se usó para probar (1.14). Esto es,

$$
\begin{aligned}
\varphi^6(x)p'''_{n,k}(x) &= \varphi^2(x)\Big(\varphi^4(x)p''_{n,k}(x)\Big)' - 2\varphi^4(x)(1-2x)p''_{n,k}(x) \\
&= \varphi^2(x)\left(\Big((k-nx)^2 - (1-2x)(k-nx) - n\varphi^2(x)\Big)p_{n,k}(x)\right)' \\
&\quad -2(1-2x)\Big((k-nx)^2 - (1-2x)(k-nx) - n\varphi^2(x)\Big)p_{n,k}(x) \\
&= 2\varphi^2(x)(1-n)(k-nx)p_{n,k}(x) \\
&\quad +\Big((k-nx)^2 - (1-2x)(k-nx) - n\varphi^2(x)\Big)(k-nx)p_{n,k}(x) \\
&\quad -2(1-2x)\Big((k-nx)^2 - (1-2x)(k-nx) - n\varphi^2(x)\Big)p_{n,k}(x) \\
&= 2\varphi^2(x)(1-n)(k-nx)p_{n,k}(x) \\
&\quad +\Big((k-nx)^3 - (1-2x)(k-nx)^2 - n\varphi^2(x)(k-nx) \\
&\quad -2(1-2x)\Big((k-nx)^2 - (1-2x)(k-nx) - n\varphi^2(x)\Big)\Big)p_{n,k}(x) \\
&= \Big((k-nx)^3 - 3(1-2x)(k-nx)^2 \\
&\quad + \left((2-3n)\varphi^2(x) + 2(1-2x)^2\right)(k-nx) \\
&\quad +2(1-2x)n\varphi^2(x)\Big)p_{n,k}(x)
\end{aligned}
$$

$$= \Big((k-nx)^3 - 3(1-2x)(k-nx)^2$$
$$+(2-3\varphi^2(x)(2+n))(k-nx) + 2(1-2x)n\varphi^2(x)\Big)p_{n,k}(x).$$

$\square$

Para lograr resultados inversos para los operadores de Bernstein hay que considerar diferentes fórmulas asociadas con las derivadas. Por ejemplo, Berens y Lorentz utilizaron tres expresiones diferentes (ver [1, pág. 705]).

En la proposición que sigue se muestran expresiones equivalentes para algunas de las derivadas de los polinomios de Bernstein, las demostraciones no se presentan aquí, sin embargo, se pueden consultar en las referencias indicadas.

Proposición 1.12. *Si $n > 2, x \in (0,1)$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, entonces*

$$B_n''(f,x) = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k+1}{n}\right) p_{n-2,k}(x) \quad [11,\ \text{pág. } 12],\ [1,\ \text{pág. } 705]$$

$$= \frac{n^2}{x(1-x)}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi^2\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \quad [1,\ \text{pág. } 705],$$

$$B_n'''(f,x) = n(n-1)(n-2)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) R_n^*(x,k)$$

$$= n(n-1)(n-2)\sum_{k=0}^{n-2} \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k+1}{n}\right)\Big(p_{n-3,k-1}(x) - p_{n-3,k}(x)\Big)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{x(1-x)}\sum_{k=0}^{n-2} \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k+1}{n}\right)\left(\frac{k}{n-2} - x\right) p_{n-2,k}(x) \quad [6,\ \text{pág. } 90]$$

y

$$B_n^{(iv)}(g,x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\sum_{k=0}^{n-2} \Delta_{1/n}^2 g\left(\frac{k+1}{n}\right) R_n(x,k) \quad [14,\ \text{pág. } 1017],$$

donde

$$R_n^*(x,k) = p_{n-3,k-3}(x) - 3p_{n-3,k-2}(x) + 3p_{n-3,k-1}(x) - p_{n-3,k}(x)$$

y

$$R_n(x,k) = p_{n-4,k-2}(x) - 2p_{n-4,k-1}(x) + p_{n-4,k}(x). \tag{1.16}$$

Proposición 1.13. *Si $4 \leq 2A < n$ y $x \in [A/n, 1-A/n]$, entonces*

$$B_n(|e_1 - x|^3, x) \leq \frac{2\varphi^3(x)}{n^{3/2}}.$$

Demostración. De la Proposición 1.9 y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
B_n(|e_1 - x|^3, x) &\leq \Big(B_n((e_1-x)^2, x) B_n((e_1-x)^4, x)\Big)^{1/2} \\
&= \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}} \left(\frac{\varphi^2(x)}{n^2}\left[\left(3 - \frac{6}{n}\right)\varphi^2(x) + \frac{1}{n}\right]\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\varphi^2(x)}{n^{3/2}} \left(\left(3 - \frac{6}{n}\right)\varphi^2(x) + \frac{2}{A}\frac{A}{n}\left(1 - \frac{A}{n}\right)\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\varphi^2(x)}{n^{3/2}} \left(\left(3 - \frac{6}{n}\right)\varphi^2(x) + \frac{2\varphi^2(x)}{A}\right)^{1/2} \\
&= \frac{\varphi^3(x)}{n^{3/2}} \left(3 - \frac{6}{n} + \frac{2}{A}\right)^{1/2} \leq \frac{2\varphi^3(x)}{n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.14. *Sean $n > 2A \geq 8$, $y \in [A/n, 1-A/n]$. Fijemos números positivos a, b y c. Si*

$$m(x) = \frac{a}{\varphi^2(y)}(x-y)^2 - \frac{b\sqrt{n}}{\varphi^3(y)} \mid x - y \mid^3 - \frac{cn}{\varphi^4(y)}(x-y)^4,$$

entonces

$$B_n(m, y) \geq \frac{1}{n}\left(a - 2b - \frac{7c}{2}\right).$$

Demostración. Observemos que

$$\frac{1}{n} = \frac{2}{A}\frac{A}{n}\frac{1}{2} \leq \frac{2}{A}\frac{A}{n}\left(1 - \frac{A}{n}\right) \leq \frac{2}{A}y(1-y).$$

De las Proposiciones 1.9 y 1.13, tenemos

$$\begin{aligned}
B_n(m, y) &= \frac{a}{\varphi^2(y)} B_n((x-y)^2, y) - \frac{b\sqrt{n}}{\varphi^3(y)} B_n(|x-y|^3, y) \\
&\qquad - \frac{cn}{\varphi^4(y)} B_n((x-y)^4, y) \\
&= \frac{a}{n} - \frac{b\sqrt{n}}{\varphi^3(y)} B_n(|x-y|^3, y) - \frac{c}{n\varphi^2(y)}\left[\left(3 - \frac{6}{n}\right) y(1-y) + \frac{1}{n}\right] \\
&\geq \frac{a}{n} - \frac{b\sqrt{n}}{\varphi^3(y)} \frac{2\varphi^3(y)}{n^{3/2}} - \frac{c}{n\varphi^2(y)}\left[3\varphi^2(y) + \frac{2\varphi^2(y)}{A}\right] \\
&= \frac{a}{n} - \frac{2b}{n} - \frac{c}{n}\left(3 + \frac{2}{A}\right) \geq \frac{1}{n}\left(a - 2b - \frac{7c}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Desigualdades de tipo Bernstein

Como hemos mencionado anteriormente, la demostración del Teorema 0.1 depende de las desigualdades localizadas para polinomios de Bernstein, luego, en este capítulo nos enfocaremos en la demostración de algunos resultados en los que se involucran desigualdades del tipo Bernstein, así como también resultados auxiliares que nos ayudarán para poder verificar el Teorema 2.9.

2.1. Variaciones a un estimado de Bernstein

En las argumentaciones de Totik es de extrema importancia un lema que se presenta sin demostración. El trabajo original sólo hace referencia a un teorema que se formula en [8, pág. 200], pero en [8] el teorema no se demuestra (sólo se indica que la prueba se puede ver en algunos textos de probabilidad). Además, dicho lema, en la forma en que está presentado en el trabajo de Totik, no puede ser utilizado para encontrar valores específicos de los paramétros A y ϵ. Con el fin de darle más claridad al lector presentamos los Lemas 2.1 y 3.1 de [14].

Lema 2.1. *Sean $x > 0$, $M = [x]$ (la parte entera de x) y*

$$l_k(x) = \frac{e^{-x}x^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces

1. *El mayor* $l_k(x)$ *es* $l_M(x)$*. Los términos* $l_{M-1}(x)$ *y* $l_M(x)$ *son iguales cuando* x *es un entero.*

2. *Si* $k = M + h$ *y* $0 < \delta < 1$*, entonces*

$$\sum_{|h|>\delta M} l_k(x) = O(e^{-\gamma x}),$$

donde $\gamma = \delta^2/3$*.*

3. *Si* $1/2 < \zeta < 2/3$*, entonces*

$$\sum_{|h|>M^\zeta} l_k(x) = O(e^{-x^\eta}),$$

donde η *es cualquier número menor que* $2\zeta - 1$*.*

4. *Si* $\lambda > 0$*, entonces*

$$\sum_{|h|>\lambda\sqrt{M}} l_k(x) < \epsilon,$$

para $M \geq M_0(\epsilon)$ *y* $\lambda \geq \lambda_0(\epsilon)$*.*

5. *Si* $|h| \leq M^\zeta$*, entonces*

$$l_k(x) = \sqrt{\frac{c}{\pi M}} e^{-ch^2/M} \left\{ 1 + O\left(\frac{|h|+1}{x}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{x^2}\right) \right\}$$

donde $c = 1/2$*.*

6. *Los estimados en los apartados 2 y 3 siguen siendo válidos si* $l_k(x)$ *se multiplica por cualquier potencia fija de* k*.*

Lema 2.2. *Sean* $p_{n,k}(x)$ *como en (1) y* $M = [(n+1)x]$*. El valor mayor de los* $p_{n,k}(x)$ *es* $p_{n,M}(x)$*. Los términos* $p_{n,M-1}(x)$ *y* $p_{n,M}(x)$ *son iguales cuando* $(n+1)x$ *es un entero. Los enunciados 2-6 del Lema 2.1 se siguen cumpliendo cuando reemplazamos* $l_k(x)$ *con* $p_{n,k}(x)$*, considerando en la afirmación 5*

$$c = \frac{1}{2(1-x)}$$

y algún γ *en la número 2.*

Más aún, todos los estimados son uniformes conforme $nx(1-x)$ *tiende a infinito.*

Nótese que los resultados anteriores están en términos de O, luego no pueden ser utilizados para encontrar estimados más concretos. Desde nuestro punto de vista creemos que el estudio se puede mejorar considerando los resultados que presentamos en esta sección.

La primera desigualdad del Lema 2.4, aparece en el trabajo de Bernstein [2]. Otra demostración se puede ver en [11, Teorema 1.5.3]. Presentamos una demostración detallada para mostrarle al lector que sólo se usan argumentos analíticos (no probabilísticos) y porque parte de sus argumentos se usarán en la prueba de la segunda parte. Hasta donde sabemos la segunda desigualdad es nueva.

Lema 2.3. *Para cada* $n \in \mathbb{N}_0$ *se cumple*

$$2 \times 3^n \leq (n+2)!.$$

Demostración. La prueba se hará por inducción. Para $n = 0$, la desigualdad se cumple.
Supongamos que la desigualdad se cumple hasta n y verifiquemos para $n+1$. Así,

$$\begin{aligned} 2 \times 3^{n+1} &\leq (n+2)! \cdot 3 \\ &\leq (n+3)!. \end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad es válida para toda $n \in \mathbb{N}_0$. □

Lema 2.4. *Fijemos* $x \in (0,1)$.
(i) *Si* $\alpha \in (0,3]$, *entonces*

$$\sum_{|k-nx| \geq \alpha nx(1-x)} p_{n,k}(x) \leq 2 \exp\left\{-\frac{\alpha^2 nx(1-x)}{4}\right\}.$$

(ii) *Si* $A \geq 2$, $\alpha \in (0, 3/2]$, $n > 2A$ *y* $x \in [A/n, 1-A/n]$, *entonces*

$$\sum_{|k-nx| \geq \alpha nx(1-x)} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 p_{n,k}(x) \leq \frac{2\sqrt{2}\varphi^2(x)}{n} \exp\left\{-\frac{\alpha^2 nx(1-x)}{8}\right\}.$$

Demostración.
(i) Denotemos

$$\Psi_n(v,x) = \sum_{k=0}^{n} e^{v(k-nx)} p_{n,k}(x) = \left(xe^{v(1-x)} + (1-x)e^{-vx}\right)^n$$

y

$$\Phi_n(v,x) = \sum_{k=0}^{n} e^{v|k-nx|} p_{n,k}(x).$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
xe^{v(1-x)} + (1-x)e^{-vx} &= 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{v^j}{j!}\Big(x(1-x)^j + (1-x)(-x)^j\Big) \\
&\leq 1 + x(1-x)\sum_{j=2}^{\infty} \frac{|v|^j}{j!}\Big((1-x)^{j-1} + x^{j-1}\Big) \\
&\leq 1 + x(1-x)\sum_{j=2}^{\infty} \frac{|v|^j}{j!} \\
&= 1 + x(1-x)|v|^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|v|^i}{(i+2)!}.
\end{aligned}
$$

Observemos que, cuando $| v |\leq 3/2$, se sigue del Lema 2.3 lo siguiente

$$
\begin{aligned}
xe^{v(1-x)} + (1-x)e^{-vx} &\leq 1 + x(1-x)\frac{v^2}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{| v |^i}{3^i} \\
&= 1 + x(1-x)\frac{v^2}{2}\frac{1}{1-| v/3 |} \\
&\leq 1 + x(1-x)v^2 \leq e^{x(1-x)v^2}.
\end{aligned}
$$

De las últimas relaciones obtenemos

$$
\Phi_n(v,x) \leq \Psi_n(v,x) + \Psi_n(-v,x) \leq 2e^{nx(1-x)v^2}, \qquad | v |\leq 3/2. \quad (2.1)
$$

Sean

$$
C = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{\alpha^2 nx(1-x)}{4}\right\} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{\alpha}{2}.
$$

Tomando en cuenta (2.1) sabemos que

$$
\begin{aligned}
&\{k : 0 \leq k \leq n, \, | k - nx |\geq \alpha nx(1-x)\} \\
&\qquad = \left\{k : 0 \leq k \leq n, \, | k - nx |\geq \frac{\alpha^2 nx(1-x)}{4v} + nx(1-x)v\right\} \\
&\qquad = \Big\{k : 0 \leq k \leq n, \, \exp(v \mid k - nx \mid) \geq 2C\exp\Big(nx(1-x)v^2\Big)\Big\} \\
&\qquad \subset \{k : 0 \leq k \leq n, \, \exp(v \mid k - nx \mid) \geq C\Phi_n(v,x)\}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{|k-nx|\geq \alpha nx(1-x)} p_{n,k}(x) &\leq \sum_{\exp(v|k-nx|)\geq C\Phi_n(v,x)} p_{n,k}(x)\\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(v \mid k-nx \mid)}{C\Phi_n(v,x)} p_{n,k}(x)\\ &= \frac{1}{C} = 2\exp\left\{-\frac{\alpha^2 nx(1-x)}{4}\right\}.\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la primera parte del lema.

(ii) Sea

$$F_n(v,x) = \sum_{k=0}^{n} e^{v|k-nx|}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 p_{n,k}(x).$$

Se sigue de la Proposición 1.9 y de (2.1) que, para $\mid v \mid \leq 3/4$,

$$\begin{aligned}F_n(v,x) &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} e^{2v|k-nx|} p_{n,k}(x) \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^4 p_{n,k}(x)\right)^{1/2}\\ &= \left(\Phi_n(2v,x)S_{n,4}(x)\right)^{1/2}\\ &\leq \sqrt{2}e^{2n\varphi^2(x)v^2}\left(\frac{\varphi^2(x)}{n^2}\left[\left(3-\frac{6}{n}\right)\varphi^2(x)+\frac{1}{n}\right]\right)^{1/2}\\ &\leq \frac{\sqrt{2}\varphi(x)}{n}e^{2n\varphi^2(x)v^2}\left(\left(3-\frac{6}{n}\right)\varphi^2(x)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{A}{n}\right)\right)^{1/2}\\ &\leq \frac{\sqrt{2}\varphi(x)}{n}e^{2n\varphi^2(x)v^2}\left(\left(3-\frac{6}{n}\right)\varphi^2(x)+\frac{2}{A}\varphi^2(x)\right)^{1/2}\\ &= \frac{\varphi^2(x)}{n}\sqrt{2}e^{2n\varphi^2(x)v^2}\left(3-\frac{6}{n}+\frac{2}{A}\right)^{1/2}\\ &\leq 2\sqrt{2}\frac{\varphi^2(x)}{n}\, e^{2n\varphi^2(x)v^2}.\end{aligned}$$

Así

$$\frac{nF_n(v,x)}{2\sqrt{2}\varphi^2(x)} \leq e^{2n\varphi^2(x)v^2}. \tag{2.2}$$

Sea
$$D=\frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left\{\frac{\alpha^2nx(1-x)}{8}\right\}\qquad \text{y}\qquad v=\frac{\alpha}{4}.$$
Considerando (2.2) tenemos

$$\begin{aligned}
&\{k:0\le k\le n,\ \mid k-nx\mid\ge \alpha nx(1-x)\}\\
&=\left\{k:0\le k\le n,\ \mid k-nx\mid\ge \frac{\alpha^2nx(1-x)}{8v}+2nx(1-x)v\right\}\\
&=\left\{k:0\le k\le n,\ \exp(v\mid k-nx\mid)\ge 2\sqrt{2}D\exp\left(2nx(1-x)v^2\right)\right\}\\
&\subset\left\{k:0\le k\le n,\ \exp(v\mid k-nx\mid)\ge \frac{Dn}{\varphi^2(x)}F_n(v,x)\right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\begin{aligned}
&\sum_{|k-nx|\ge\alpha nx(1-x)}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2p_{n,k}(x)\\
&\qquad\le \sum_{\exp(v|k-nx|)\ge DnF_n(v,x)/\varphi^2(x)}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2p_{n,k}(x)\\
&\qquad\le \frac{\varphi^2(x)}{DnF_n(x,v)}\sum_{k=0}^{n}\exp(v\mid k-nx\mid)\left(x-\frac{k}{n}\right)^2p_{n,k}(x)\\
&\qquad=\frac{\varphi^2(x)}{Dn}=\frac{2\sqrt{2}\varphi^2(x)}{n}\exp\left\{-\frac{\alpha^2nx(1-x)}{8}\right\}.
\end{aligned}$$

□

2.2. Desigualdades con norma

En esta sección se presentan algunos estimados para la norma de algunas derivadas de los polinomios de Bernstein.

La primera desigualdad en (2.4) ha aparecido en diferentes artículos con otras constantes (por ejemplo, ver [7, (43)] y [6, Lema 8.5]). Para una prueba de la segunda ver [6, Lema 8.4]. Otro estimado puntual fue dado en [13, Lema 3.3].

Teorema 2.5. *Si* $n \geq 4$, $f \in C[0,1]$ *y* $g \in C^2[0,1]$, *entonces*

$$\|\varphi^3 B_n'''(f)\| \leq 10n^{3/2}\|f\|, \tag{2.3}$$

$$\|\varphi^2 B_n''(g)\| \leq 2\|\varphi^2 g''\| \quad y \quad \|\varphi^3 B_n'''(g)\| \leq \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\|\varphi^2 g''\|. \tag{2.4}$$

En particular, si $\|f - B_n(f)\| < \|\varphi^2 B_n''(f)\|/(4n)$, *entonces*

$$\|\varphi^3 B_n'''(f)\| \leq 5\sqrt{n}\|\varphi^2 B_n''(f)\|. \tag{2.5}$$

Demostración. Para probar (2.3) consideraremos dos casos:
Caso 1. Supongamos que $\varphi^2(x) \leq 1/n$. Para $f \in C[0,1]$ tenemos

$$\Big(\varphi^2(x)B_n''(f,x)\Big)' = (1-2x)B_n''(f,x) + \varphi^2(x)B_n'''(f,x).$$

Además, de las Proposiciones 1.12 y 1.11, se sigue que

$$\begin{aligned}(1-2x)B_n''(f,x) + \varphi^2(x)B_n'''(f,x) &= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^2\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}'(x) \\ &= n^2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^2\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)p_{n,k}(x).\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\varphi^2(x)B_n'''(f,x) = &-(1-2x)B_n''(f,x) \\ &+n^2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^2\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)p_{n,k}(x).\end{aligned}$$

De las Proposiciones 1.11 y 1.9, (1.5) y la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\varphi^3(x)B_n'''(f,x)\right| &\leq |\varphi(x)(1-2x)B_n''(f,x)| \\ &\quad +n^2\varphi(x)\left|\sum_{k=1}^{n-1} \varphi^2\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_{1/n}^2 f\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)p_{n,k}(x)\right| \\ &\leq |\varphi(x)B_n''(f,x)| + 4n^2\varphi(x)\|f\|\left|\sum_{k=1}^{n-1} \varphi^2\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)p_{n,k}(x)\right| \\ &= n(n-1)\varphi(x)\|f\| \sum_{k=1}^{n} |p_{n-2,k-2}(x) - 2p_{n-2,k-1}(x) + p_{n-2,k}(x)|\end{aligned}$$

$$+4n^2\varphi(x)\|f\|\sum_{k=1}^{n-1}\varphi^2\left(\frac{k}{n}\right)|k-nx|p_{n,k}(x)$$

$$\leq \frac{4n^2}{\sqrt{n}}\|f\|+\frac{4n^2}{\sqrt{n}}\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n-1}\varphi^4\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)\sum_{k=1}^{n-1}(k-nx)^2p_{n,k}(x)\right)^{1/2}$$

$$\leq 4n^{3/2}\|f\|\left(1+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\varphi^4\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)\cdot n^2\frac{\varphi^2(x)}{n}\right)^{1/2}\right)$$

$$\leq 4n^{3/2}\|f\|\left(1+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\varphi^4\left(\frac{k}{n}\right)p_{n,k}(x)\right)^{1/2}\right)$$

$$\leq 4n^{3/2}\|f\|\left(1+\Big(B_n(\varphi^4,x)\Big)^{1/2}\right).$$

Ahora, sólo resta acotar superiormente el término $B_n(\varphi^4,x)$. De la Proposición 1.10, se sigue que

$$\begin{aligned}
B_n(\varphi^4,x) &= B_n(e_2,x)-2B_n(e_3,x)+B_n(e_4,x)\\
&= x^2+\frac{\varphi^2(x)}{n}-2\left(x^3+\frac{\varphi^2(x)[(3n-2)x+1]}{n^2}\right)+x^4\\
&\quad +6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2+\frac{\varphi^2(x)[(7n-6)\varphi^2(x)-4nx^2+1]}{n^3}\\
&= x^2-2x^3+x^4+\frac{\varphi^2(x)}{n}-\frac{2\varphi^2(x)[(3n-2)x+1]}{n^2}\\
&\quad +6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2+\frac{\varphi^2(x)[(7n-6)\varphi^2(x)-4nx^2+1]}{n^3}\\
&\leq \varphi^4(x)+\frac{\varphi^2(x)}{n}+6\frac{\varphi^2(x)}{n}x^2+\frac{\varphi^2(x)[(7n-6)\varphi^2(x)+1]}{n^3}\\
&\leq \frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^2}+\frac{7n+1}{n^4}\leq 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|\varphi^3(x)B_n'''(f,x)\right|\leq 10n^{3/2}\|f\|.$$

Caso 2. Supongamos ahora que $\varphi^2(x) \geq 1/n$. Primero, notemos que $B_n(|t-x|, x) \leq \varphi(x)/\sqrt{n}$. Luego, si $f \in C[0,1]$, de las Proposiciones 1.9 y 1.13 junto con (1.15), se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
|\varphi^3(x)B_n'''(f,x)| &\leq \|f\|\varphi^3(x)\sum_{k=0}^{n}|p_{n,k}'''(x)| = \frac{\|f\|}{\varphi^3(x)}\sum_{k=0}^{n}|\varphi^6 p_{n,k}'''(x)| \\
&\leq \frac{\|f\|}{\varphi^3(x)}\sum_{k=0}^{n}\Big(|k-nx|^3+3|1-2x|(k-nx)^2+\Big(|2-3(n+2)\varphi^2(x)|\Big)|k-nx| \\
&\qquad +2n\varphi^2(x)|1-2x|\Big)p_{n,k}(x) \\
&= \frac{\|f\|}{\varphi^3(x)}\Big(n^3B_n(|e_1-x|^3,x)+3n^2|1-2x|B_n((e_1-x)^2,x) \\
&\qquad +n(3(n+2)\varphi^2(x)-2)B_n(|e_1-x|,x) \\
&\qquad +2n\varphi^2(x)|1-2x|\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x)\Big) \\
&\leq \frac{\|f\|}{\varphi^3(x)}\Big(\frac{2n^3\varphi^3(x)}{n^{3/2}}+\frac{3n^2\varphi^2(x)}{n}+\frac{n(3(n+2)\varphi^2(x)-2)\varphi(x)}{\sqrt{n}}+2n\varphi^2(x)\Big) \\
&= \|f\|\left(2n^{3/2}+\frac{5n}{\varphi(x)}+\frac{\sqrt{n}(3n\varphi^2(x)+6\varphi^2(x)-2)}{\varphi^2(x)}\right) \\
&\leq \|f\|\left(2n^{3/2}+5n^{3/2}+3n^{3/2}\right) = 10n^{3/2}\|f\|.
\end{aligned}
$$

La primera desigualdad en (2.4), se sigue de las Proposiciones 1.12 y 1.7. Esto es,

$$
\begin{aligned}
|\varphi^2(x)B_n''(g,x)| &= \left|\varphi^2(x)n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\Delta_{1/n}^2 g\left(\frac{j+1}{n}\right)p_{n-2,j}(x)\right| \\
&\leq n^2\sum_{k=1}^{n-1}\varphi^2\left(\frac{k}{n}\right)\left|\Delta_{1/n}^2 g\left(\frac{k}{n}\right)\right|p_{n,k}(x) \\
&\leq 2\sum_{k=1}^{n-1}\|\varphi^2 g''\|_{I(k)}p_{n,k}(x) \leq 2\|\varphi^2 g''\|,
\end{aligned}
$$

donde $I(k) = [(k-1)/n, (k+1)/n]$.

Finalmente, supongamos que $\|f - B_n(f)\| < \|\varphi^2 B_n''(f)\|/(4n)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\varphi^3 B_n'''(f)\| &\le \|\varphi^3 B_n'''(B_n(f) - f)\| + \|\varphi^3 B_n'''(B_n(f))\| \\
&\le 10n^{3/2}\|f - B_n(f)\| + \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\
&\le 5\sqrt{n}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.
\end{aligned}$$

□

2.3. Resultados auxiliares

Para simplificar la exposición de los resultados correspondientes a esta sección usamos los siguientes supuestos. Para $0 \le a < b \le 1$, $\|f\|_{[a,b]}$ es la norma calculada en el intervalo $[a, b]$.

Fijamos parámetros ϵ, β, A y n tales que : $\epsilon \in (0, 1/10]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \beta < \frac{\epsilon}{2(4+\epsilon)}, \quad A \ge \frac{16}{\beta^2} \ln\left(\frac{24\sqrt{2}}{\epsilon}\right) \quad \text{y} \quad n > \text{máx}\left\{2A^2, \left(\frac{12}{\epsilon}\right)^2\right\}. \tag{2.6}$$

Para un punto $x \in (0, 1)$, denotamos

$$T(x, \beta) = [(1 - 2\beta)x, 1 - (1 - 2\beta)(1 - x)],$$

$$R(x, \beta) = [0, (1 - 2\beta)x + 2/n] \bigcup [1 - (1 - 2\beta)(1 - x) - 2/n, 1], \tag{2.7}$$

y

$$Q(n, x, \beta) = \left\{k \in \mathbb{N} : \ (1 - 2\beta)x \le \frac{k}{n} \le 1 - (1 - 2\beta)(1 - x) - \frac{2}{n}\right\}. \tag{2.8}$$

Utilizaremos también la notación

$$E_n = \left[\frac{A^2}{n}, 1 - \frac{A^2}{n}\right].$$

Por último, para $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, denotamos

$$f(n, k) = \left|\Delta^2_{1/n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|, \quad 1 \le k \le n - 2. \tag{2.9}$$

En general, los siguientes lemas se cumplen para cuando $\alpha \in [0, 2]$.

Lema 2.6. *Sean ϵ, β, A y n elementos que satisfacen (2.6). Si $g \in C^2[0,1]$ y $x \in (0,1)$, entonces*

$$n(n-1) \sum_{k \in Q(n,x,\beta)} g(n,k) \left| \frac{k}{n-2} - x \right|^{\alpha} p_{n-2,k}(x) \leq \frac{(1+\epsilon/4)M_1}{(n-2)^{\alpha/2}\varphi^{2-\alpha}(x)},$$

con $M_1 = \|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)}$ y $\alpha = 0, 1, 2$.

Demostración. Sea $A(k) = [k/n, (k+2)/n]$. Supongamos que $\alpha = 0$. Luego, tomando $y = k/n$ y $h = 1/n \leq \beta$ en (iii) de la Proposición 1.7 tenemos

$$\begin{aligned} & n(n-1)\varphi^2(x) \sum_{k \in Q(n,x,\beta)} g(n,k) p_{n-2,k}(x) \\ & \leq n(n-1)\varphi^2(x) \frac{(1+\epsilon/4)}{n^2\varphi^2(x)} \sum_{k \in Q(n,x,\beta)} \|\varphi^2 g''\|_{A(k)} p_{n-2,k}(x) \\ & \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) M_1. \end{aligned}$$

Para $\alpha = 2$ usamos la Proposición 1.9 y (iii) en la Proposición 1.7 para obtener

$$n(n-1)(n-2) \sum_{k \in Q(n,x,\beta)} g(n,k) \left(x - \frac{k}{n-2} \right)^2 p_{n-2,k}(x)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{n^2} \frac{(1+\epsilon/4)M_1}{\varphi^2(x)} \sum_{k \in Q(n,x,\beta)} \left(x - \frac{k}{n-2} \right)^2 p_{n-2,k}(x) \\ & \leq \frac{(1+\epsilon/4)M_1(n-1)(n-2)}{n\varphi^2(x)} \sum_{k=0}^{n-2} \left(x - \frac{k}{n-2} \right)^2 p_{n-2,k}(x) \\ & = \frac{(1+\epsilon/4)M_1(n-1)(n-2)}{n(n-2)} \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) M_1. \end{aligned}$$

El caso $\alpha = 1$ se tiene de la desigualdad de Hölder, la Proposición 1.9 y (iii) de la Proposición 1.7

$$n(n-1)(n-2)\varphi(x) \sum_{k \in Q(n,x,\beta)} g(n,k) \left| \frac{k}{n-2} - x \right| p_{n-2,k}(x)$$

$$\leq \frac{n(n-1)(n-2)}{n^2\varphi(x)}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)M_1\sum_{k=0}^{n-2}\left|\frac{k}{n-2}-x\right|p_{n-2,k}(x)$$

$$\leq \frac{n-2}{\varphi(x)}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)M_1\left(\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{k}{n-2}-x\right)^2 p_{n-2,k}(x)\sum_{k=0}^{n-2}p_{n-2,k}(x)\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{n-2}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)M_1.$$

□

Lema 2.7. *Sean ϵ, β, A y n elementos que satisfacen (2.6). Si $g \in C^2[0,1]$ y $x \in [A/n, 1-A/n]$, entonces*

(i) $$n(n-1)\sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} g(n,k)\left|\frac{k}{n-2}-x\right|^{\alpha} p_{n-2,k}(x) \leq \frac{(n-3)^{-\alpha/2}\epsilon M_2}{4\varphi^{2-\alpha}(x)},$$

con $M_2 = \|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}$, $\alpha = 0,1,2$ y $0 \leq k \leq n-2$.

(ii) $$n^2\sum_{k=1}^{n-3} g(n,k)\alpha(n,k)p_{n-2,k}(x) \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)M_1 + \frac{\epsilon}{2}M_2,$$

donde $M_1 = \|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)}$ y

$$\alpha(n,k) = \min\left\{\varphi^2\left(\frac{k}{n}\right), \varphi^2\left(\frac{k+2}{n}\right)\right\}, \quad 1 \leq k \leq n-3.$$

Demostración. En la demostración de este lema usaremos las siguientes notaciones:

$$A(k) = [k/n, (k+2)/n] \qquad \text{y} \qquad M = -2 + n(1-(1-2\beta)(1-x)).$$

(i) Sea $\alpha = 0$. Si $k \notin Q(n,x,\beta)$, entonces

$$\frac{k}{n} < (1-2\beta)x \qquad \text{o} \qquad 1-(1-2\beta)(1-x)-\frac{2}{n} < \frac{k}{n}.$$

Supongamos que $0 \leq k < n(1-2\beta)x$. Note que $A \leq nx$ y $2 \leq A\beta$, luego

$$k+2 < 2+nx(1-2\beta) \leq nx\left(\frac{2}{A}+1-2\beta\right) \leq n(1-\beta)x.$$

Más aún,

$$2\beta x - \frac{1}{n} \geq 2\beta x - \frac{x}{A} \geq \beta x.$$

De los enunciados (i) y (ii) de la Proposición 1.7, tenemos

$$
\begin{aligned}
n(n-1)\varphi^2(x) & \sum_{0\le k<n(1-2\beta)x} g(n,k)p_{n-2,k}(x) \\
&= n(n-1)\varphi^2(x)g(n,0)p_{n-2,0}(x) \\
&\qquad + n(n-1)\varphi^2(x)\sum_{1\le k<n(1-2\beta)x} g(n,k)p_{n-2,k}(x) \\
&\le 2n(n-1)\frac{\|\varphi^2 g''\|_{A(0)}}{n^2\varphi^2(1/n)}x(1-x)^{n-1} \\
&\qquad + n(n-1)\varphi^2(x)\sum_{1\le k<n(1-2\beta)x} \frac{3\|\varphi^2 g''\|_{A(k)}}{2n^2\varphi^2((k+1)/n)}p_{n-2,k}(x) \\
&= 2nx(1-x)^{n-1}\|\varphi^2 g''\|_{A(0)} \\
&\quad + \frac{3}{2}\sum_{1\le k<n(1-2\beta)x} \frac{n(n-1)(n-2)!x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}}{(k+1)(n-k-1)k!(n-2-k)!}\|\varphi^2 g''\|_{A(k)} \\
&\le M_2\left\{2nx(1-x)^{n-1} + \frac{3}{2}\sum_{1\le k<n(1-2\beta)x}\frac{n!x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!}\right\} \\
&\le 2M_2 \sum_{0\le k<n(1-2\beta)x} p_{n,k+1}(x) \\
&\le 2M_2 \sum_{0\le j<n(1-2\beta)x+1} p_{n,j}(x) \\
&= 2M_2 \sum_{2\beta x-1/n<x-j/n} p_{n,j}(x) \\
&\le 2M_2 \sum_{\beta x(1-x)\le x-j/n} p_{n,j}(x).
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que $1-(1-2\beta)(1-x)-2/n<k/n$, de donde

$$-2+n(1-(1-2\beta)(1-x))<k\le n-2.$$

Así, $A(k)\subset R(x,\beta)$.

Notemos que

$$A = n\cdot\frac{A}{n}\le n(1-x),$$

y como $\beta A > 1$, se sigue que

$$nx + n\beta(1-x) \leq -1 + nx + \beta A + n\beta(1-x) \leq -1 + nx + 2n\beta(1-x)$$
$$= -1 + n - n(1-x) + 2n\beta(1-x) = -1 + n - n(1-2\beta)(1-x).$$

De la Proposición 1.7 obtenemos

$$\begin{aligned}
n(n-1)\varphi^2(x) &\sum_{M<k\leq n-2} g(n,k)p_{n-2,k}(x) \\
&= n(n-1)\varphi^2(x) \sum_{M<k\leq n-3} g(n,k)p_{n-2,k}(x) \\
&\qquad + n(n-1)\varphi^2(x)g(n,n-2)p_{n-2,n-2}(x) \\
&= \sum_{M<k\leq n-3} g(n,k)\frac{n!}{k!(n-k-2)!}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} \\
&\qquad + n(n-1)x^{n-1}(1-x)g(n,n-2) \\
&\leq 2M_2\left\{nx^{n-1}(1-x) + \sum_{M<k\leq n-3} p_{n,k+1}(x)\right\} \\
&= 2M_2 \sum_{M<k\leq n-2} p_{n,k+1}(x) \\
&= 2M_2 \sum_{M+1<j\leq n-1} p_{n,j}(x) \\
&\leq 2M_2 \sum_{nx+n\beta(1-x)<j\leq n-1} p_{n,j}(x).
\end{aligned}$$

Hemos probado que

$$n(n-1)\varphi^2(x) \sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} g(n,k)p_{n-2,k}(x) \leq 2M_2 \sum_{|k-nx|>\beta nx(1-x)} p_{n,k}(x).$$

Tomemos $\alpha = \beta$ en el enunciado (i) del Lema 2.4, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{|k-nx|\geq\beta nx(1-x)} p_{n,k}(x) &\leq 2\exp\left\{-\frac{\beta^2 nx(1-x)}{4}\right\} \\
&\leq 2\exp\left\{-\frac{\beta^2 A(1-A/n)}{4}\right\},
\end{aligned}$$

y del hecho de que $n > 2A$,

$$\frac{1}{8}A \leq \frac{1}{4}A\left(1 - \frac{A}{n}\right).$$

Además, de las condiciones sobre A, tenemos la desigualdad que sigue

$$4e^{-A\beta^2/8} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Por tanto

$$n(n-1)\varphi^2(x)\sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} g(n,k)p_{n-2,k} \leq 4M_2 e^{-A\beta^2/8} \leq \frac{\epsilon}{4}M_2.$$

Para el caso $\alpha = 2$, notemos que si $x \in [A/n, 1 - A/n]$, entonces

$$\begin{aligned}
S_{n,4}(x) &= \frac{\varphi^2(x)}{n^2}\left[\left(3 - \frac{6}{n}\right)\varphi^2(x) + \frac{1}{n}\right] \\
&\leq \frac{\varphi^2(x)}{n^2}\left[\left(3 - \frac{6}{n}\right)\varphi^2(x) + \frac{1}{A}\min\{x, 1-x\}\right] \\
&\leq \frac{\varphi^2(x)}{n^2}\left[\left(3 - \frac{6}{n}\right)\varphi^2(x) + \frac{2}{A}\varphi^2(x)\right] \\
&\leq \frac{\varphi^4(x)}{n^2}\left(3 + \frac{2}{A}\right) \leq \frac{4\varphi^4(x)}{n^2}.
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, supongamos que $0 \leq k < n(1-2\beta)x$. Luego, de (i) y (ii) de la Proposición 1.7 se tiene

$$n(n-1)(n-3)\sum_{0\leq k<n(1-2\beta)x} g(n,k)\left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= n(n-1)(n-3)g(n,0)x^2 p_{n-2,0}(x) \\
&\quad + n(n-1)(n-3)\sum_{1\leq k<n(1-2\beta)x} g(n,k)\left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x) \\
&\leq 2n(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(0)} x^2(1-x)^{n-2} \\
&+ \frac{3}{2}\sum_{1\leq k<n(1-2\beta)x} \frac{n(n-1)(n-3)}{(k+1)(n-k-1)}\|\varphi^2 g''\|_{A(k)}\left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)
\end{aligned}$$

$$\leq 2M_2 \Big\{ n(n-3)x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+ \sum_{1\leq k<n(1-2\beta)x} \frac{n(n-1)(n-3)}{(k+1)(n-k-1)} \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x) \Big\}$$

$$= 2M_2 \sum_{0\leq k<n(1-2\beta)x} \frac{n(n-1)(n-3)}{(k+1)(n-k-1)} \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x).$$

Consideremos ahora el caso $-2 + n(1-(1-2\beta)(1-x)) < k \leq n-2$.

$$n(n-1)(n-3) \sum_{M<k\leq n-2} g(n,k) \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)$$

$$= n(n-1)(n-3) \sum_{M<k\leq n-3} g(n,k) \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)$$

$$+ n(n-1)(n-3)g(n,n-2)x^{n-2}(1-x)^2$$

$$\leq \frac{3}{2} \sum_{M<k\leq n-3} \frac{n(n-1)(n-3)}{(k+1)(n-k-1)} \|\varphi^2 g''\|_{A(k)} \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)$$

$$+ 2n(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(n-2)} x^{n-2}(1-x)^2$$

$$\leq 2M_2 \sum_{M<k\leq n-2} \frac{n(n-1)(n-3)}{(k+1)(n-k-1)} \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x).$$

De los cálculos anteriores y de la desigualdad de Hölder se sigue que

$$I = n(n-1)(n-3) \sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} g(n,k) \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)$$

$$\leq 2M_2 \sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} \frac{n(n-1)(n-3)}{(k+1)(n-k-1)} \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)$$

$$\leq 2n(n-3)M_2 \left(\sum_{k\notin Q(n,x\beta)} \left(x - \frac{k}{n-2}\right)^4 p_{n-2,k}(x) \right.$$

$$\left. \times \sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} \frac{(n-1)^2 p_{n-2,k}(x)}{(k+1)^2(n-k-1)^2} \right)^{1/2}$$

$$\leq 2n(n-3)M_2 \left(S_{n-2,4}(x) \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} \frac{(n-1)^2 p_{n-2,k}(x)}{(k+1)^2(n-k-1)^2} \right)^{1/2}$$

$$\leq 2n(n-3)M_2 \left(\frac{4\varphi^4(x)}{(n-2)^2} \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} \frac{n(n-1) p_{n-2,k}(x)}{(k+1)^2(n-k-1)^2} \right)^{1/2}$$

$$\leq 4nM_2 \left(\varphi^4(x) \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} \frac{n(n-1) p_{n-2,k}(x)}{(k+1)^2(n-k-1)^2} \right)^{1/2}$$

$$= 4nM_2 \left(\varphi^2(x) \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} \frac{p_{n,k+1}(x)}{(k+1)(n-k-1)} \right)^{1/2}.$$

Verifiquemos la desigualdad

$$(k+2)(n-k) \leq 2(k+1)(n-k-1), \qquad 1 \leq k \leq n-3. \tag{2.10}$$

Para $k = 1$, se reduce a la desigualdad $3(n-1) \leq 4(n-2)$, la cual se cumple para $n \geq 5$. Si $2 \leq k \leq n-3$, entonces

$$k^2 + 2k + 2 \leq k(k+3) \leq kn.$$

Esta última desigualdad es equivalente a (2.10). Luego, hemos probado que

$$(k+2)(n-k) \leq 2\frac{(n+1)^2}{n^2}(k+1)(n-k-1), \qquad 1 \leq k \leq n-3.$$

Notemos que la última desigualdad también se cumple para $k = 0$ y $k = n-2$.

En base a lo anterior tenemos

$$I \leq 4nM_2 \left(\frac{2\varphi^2(x)}{n^2} \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} \frac{(n+1)^2}{(k+2)(n-k)} p_{n,k+1}(x) \right)^{1/2}$$

$$\leq 6M_2 \left(\varphi^2(x) \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} \frac{(n+1)(n+2)}{(k+2)(n-k)} p_{n,k+1}(x) \right)^{1/2}$$

$$= 6M_2 \left(\sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} p_{n+2,k+2}(x) \right)^{1/2}.$$

Por otra parte, si $k \notin Q(n, x, \beta)$, entonces

$$|(k+2) - (n+2)x| \geq \beta(n+2)x(1-x).$$

En efecto, si $0 \leq k < n(1-2\beta)x$ tenemos

$$k+2 < 2+(n+2)x(1-2\beta) \leq (n+2)x(2/A+1-2\beta) \leq (n+2)(1-\beta)x,$$

donde hemos usado el hecho $2/A - \beta < 0$. Así

$$k+2-(n+2)x \leq -(n+2)\beta x(1-x).$$

Consideremos ahora $n - n(1-2\beta)(1-x) - 2 < k \leq n-2$. Tomando en cuenta que $\beta A > 2$ y $(n+2)(1-x) \geq A$, obtenemos

$$\begin{aligned}
(n+2)x + (n+2)\beta(1-x) &\leq -2 + (n+2)x + \beta A + (n+2)\beta(1-x) \\
&\leq -2 + (n+2)x + 2(n+2)\beta(1-x) \\
&= -2+(n+2)-(n+2)(1-x)+2(n+2)\beta(1-x) \\
&= n - (n+2)(1-2\beta)(1-x) < k+2,
\end{aligned}$$

de donde

$$(n+2)\beta x(1-x) < k+2-(n+2)x.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I &\leq 6M_2 \left(\sum_{|(k+2)-(n+2)x| \geq \beta(n+2)x(1-x)} p_{n+2,k+2}(x) \right)^{1/2} \\
&\leq 6\sqrt{2} M_2 \exp\left(-\frac{1}{8}\beta^2(n+2)x(1-x) \right) \\
&\leq 6\sqrt{2} M_2 \exp\left(-\frac{n+2}{8n}\beta^2 A \left(1 - \frac{A}{n}\right) \right) \\
&\leq 6\sqrt{2} M_2 \exp\Big(-\frac{\beta^2 A}{16} \Big) \leq \frac{\epsilon}{4} M_2,
\end{aligned}$$

donde, hemos usado el Lema 2.4 junto con las condiciones

$$\frac{16}{\beta^2}\ln\left(\frac{24\sqrt{2}}{\epsilon}\right) \leq A \quad \text{y} \quad n > 2A^2.$$

La desigualdad para $\alpha = 1$ se obtiene de las dos anteriores junto con la desigualdad de Hölder, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
&n(n-1)(n-2)\varphi(x) \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} g(n,k)\left|x - \frac{k}{n-2}\right| p_{n-2,k}(x) \\
&\leq \frac{(n-2)}{\sqrt{n-3}}\left(n(n-1)\varphi^2(x) \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} g(n,k) p_{n-2,k}(x)\right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(n(n-1)(n-3) \sum_{k \notin Q(n,x,\beta)} g(n,k)\left(x - \frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x)\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{(n-2)\epsilon}{4\sqrt{n-3}} M_2.
\end{aligned}$$

(ii) Finalmente, tomando $y = x = k/n$ y $h = 1/n$ en (iii) de la Proposición 1.7 tenemos para $k \in Q(n,x,\beta)$ lo siguiente

$$g(n,k)\ \alpha(n,k) \leq \frac{(1+\epsilon/4)}{n^2\varphi^2(k/n)}\alpha(n,k)\|\varphi^2 g''\|_{A(k)} \leq \frac{(1+\epsilon/4)}{n^2}M_1,$$

mientras que para $k \notin Q(n,x,\beta)$ usamos (i) de Proposición 1.7, con $x = (k+1)/n$ y $h = 1/n$, para obtener

$$g(n,k)\ \alpha(n,k) \leq \frac{3\alpha(n,k)}{2n^2\varphi^2((k+1)/n)}\|\varphi^2 g''\|_{A(k)} \leq \frac{3}{2n^2}M_2.$$

Más aún, si $k \notin Q(n,x,\beta)$, entonces $|k-(n-2)x| \geq \beta(n-2)x(1-x)$. En efecto, si $0 \leq k < n(1-2\beta)x$ entonces $2\beta x < x - k/n$. Luego, como $x \geq A/n$ y $\beta A > 2$, se tiene

$$\begin{aligned}
x - \frac{k}{n-2} &= x - \frac{k}{n} - \frac{2k}{n(n-2)} \\
&\geq 2\beta x - \frac{2k}{n(n-2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \beta x + \frac{\beta A}{n} - \frac{2k}{n(n-2)}\\
&= \beta x + \frac{1}{n}\left(\frac{n\beta A - 2(k+\beta A)}{n-2}\right)\\
&\geq \beta x + \frac{1}{n}\left(\frac{n\beta A - (2\beta A + \beta A(n-3))}{n-2}\right) \geq \beta x,
\end{aligned}$$

por tanto

$$x - \frac{k}{n-2} \geq \beta x(1-x).$$

Supongamos ahora que $1-(1-2\beta)(1-x)-2/n < k/n$ y recordemos que $1-x \geq A/n$ y $\beta A > 2$, luego

$$\begin{aligned}
2\beta(1-x) = (1-x)(1-(1-2\beta)) &= 1-(1-2\beta)(1-x)-x\\
&\leq \frac{k}{n} + \frac{2}{n} - x \leq \frac{k}{n-2} + \frac{2}{n} - x,
\end{aligned}$$

así

$$2\beta(1-x) - \frac{2}{n} \leq \frac{k}{n-2} - x.$$

De donde

$$\beta(1-x) \leq \beta(1-x) + \left(\beta(1-x) - \frac{2}{n}\right) \leq \frac{k}{n-2} - x.$$

Con lo cual queda demostrado el enunciado.

Ahora, del Lema 2.4 y de los últimos estimados se tiene

$$\begin{aligned}
n^2 \sum_{k=1}^{n-3} g(n,k)\alpha(n,k)p_{n-2,k}(x) &\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) M_1 \sum_{k\in Q(n,x,\beta)} p_{n-2,k}(x)\\
&\quad + \frac{3}{2} M_2 \sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} p_{n-2,k}(x)\\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) M_1 + \frac{3}{2} M_2 \sum_{|k-(n-2)|\geq\beta(n-2)x(1-x)} p_{n-2,k}(x)\\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) M_1 + 3M_2 \exp\left\{-\frac{\beta^2(n-2)x(1-x)}{4}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) M_1 + 3M_2 \exp\left\{-\frac{\beta^2(n-2)A(1-A/n)}{4n}\right\} \\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) M_1 + 3M_2 \exp\left\{-\frac{(n-2)\beta^2 A}{8n}\right\} \\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) M_1 + \frac{\epsilon}{4} M_2 \exp\left\{\frac{\beta^2 A}{4n}\right\}. \\
&\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) M_1 + \frac{\epsilon}{2} M_2.
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.8. *Si $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > A$, entonces*

$$\left(1 - \frac{A}{n}\right)^n \leq e^{-A}.$$

Demostración. Sea $\delta = e^{-A}$. Debido a que la función $1-\delta^y$ es cóncava en $[0,1]$, se sigue de [3] que

$$h(y) = \frac{1-\delta^y}{y}, \qquad y \in (0,1],$$

decrece. Por tanto

$$h(1/n) = n\left(1-\delta^{1/n}\right) \leq \lim_{y\to 0^+} h(y) = -\ln\delta \lim_{y\to 0^+} \delta^y = -\ln\delta = A.$$

□

2.4. Desigualdades localizadas

En esta sección presentamos el teorema principal de este trabajo, referente a las desigualdades localizadas para los polinomios de Bernstein.

Teorema 2.9. *Fijemos $\epsilon, \beta, A \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ según (2.6).*
Si $g \in C^2[0,1]$ y $x \in [A/n, 1-A/n]$, entonces

$$\varphi^2(x)|B_n''(g,x)| \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)} + \frac{\epsilon}{4}\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)},$$

$$|\varphi^3(x)B_n'''(g,x)| \leq \sqrt{n}\left(\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)} + \frac{\epsilon}{2}\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}\right) \quad (2.11)$$

y

$$\varphi^4(x)\left|B_n^{(iv)}(g,x)\right| \le n\epsilon\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)} + n\left(2+\frac{\epsilon}{2}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)}.$$

En particular, si $f \in C[0,1]$ *y* $\|f - B_n(f)\| < \|\varphi^2 B_n''(f)\|/(4n)$, *entonces*

$$|\varphi^3(x)B_n'''(f,x)| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\left\{\left(7+\frac{\epsilon}{2}\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{R(x,\beta)} + (5+\epsilon)\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{T(x,\beta)}\right\}.$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.12 y de los Lemas 2.6 y 2.7 que

$$\begin{aligned}|\varphi^2(x)B_n''(g,x)| &\le \varphi^2(x)n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} g(n,k)p_{n-2,k}(x)\\ &\le \varphi^2(x)n(n-1)\left\{\sum_{k\in Q(n,x,\beta)} g(n,k)p_{n-2,k}(x)\right.\\ &\qquad\left. + \sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} g(n,k)p_{n-2,k}(x)\right\}\\ &\le \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)} + \frac{\epsilon}{4}\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}.\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la primera desigualdad.

De la Proposición 1.12, (iii) del Lema 2.6 y del Lema 2.7 se sigue que

$$\begin{aligned}&|\varphi^3(x)B_n'''(g,x)|\\ &= n(n-1)(n-2)\varphi(x)\left|\sum_{k=0}^{n-2}\Delta_{1/n}^2 g\left(\frac{k+1}{n}\right)\left(\frac{k}{n-2}-x\right)p_{n-2,k}(x)\right|\\ &\le n(n-1)(n-2)\varphi(x)\sum_{k=0}^{n-2} g(n,k)\left|\frac{k}{n-2}-x\right|p_{n-2,k}(x)\\ &\le n(n-1)(n-2)\varphi(x)\sum_{k\in Q(n,x,\beta)} g(n,k)\left|\frac{k}{n-2}-x\right|p_{n-2,k}(x)\end{aligned}$$

$$+n(n-1)(n-2)\varphi(x)\sum_{k\notin Q(n,x,\beta)} g(n,k)\left|\frac{k}{n-2}-x\right| p_{n-2,k}(x)$$

$$\leq \sqrt{n-2}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)} + \frac{n-2}{\sqrt{n-3}}\frac{\epsilon}{4}\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}$$

$$\leq \sqrt{n-2}\left\{\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)} + \frac{\epsilon}{2}\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}\right\}.$$

Para la penúltima desigualdad, sea

$$\alpha(n,k) = \min\left\{\varphi^2\left(\frac{k}{n}\right), \varphi^2\left(\frac{k+2}{n}\right)\right\}, \qquad 1\leq k\leq n-3.$$

Denotemos

$$Q(x) = Q(n,x,\beta),$$
$$R(x) = \{k : 1\leq k\leq n-3, k\notin Q(x)\},$$

y

$$S(x) = \{k : 0\leq k\leq n-2, k\notin Q(x)\}.$$

Notemos que

$$\left|\frac{k}{n-2}(k-(n-2))\right| \leq n\varphi^2\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{n^2}{n-2}\varphi^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

y

$$\left|\frac{k}{n-2}(k-(n-2))\right| \leq \left|\frac{n(k+2)}{n-2}\left(\frac{k+2}{n}-1\right)\right| = \frac{n^2}{n-2}\varphi^2\left(\frac{k+2}{n}\right)$$

Por lo tanto

$$\left|\frac{k}{n-2}(k-(n-2))\right| \leq \frac{n^2}{n-2}\alpha(n,k).$$

De la Proposición 1.12 se sigue que

$$B_n^{(iv)}(g,x) = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2_{1/n} g\left(\frac{k+1}{n}\right) p''_{n-2,k}(x).$$

Usando las Proposiciones 1.7 y 1.11 junto con los Lemas 2.6 y 2.7 tenemos

$$\varphi^4(x)\left|B_n^{(iv)}(g,x)\right| \leq n(n-1)\varphi^4(x) g(n,0)|p''_{n-2,0}(x)|$$

$$+n(n-1)\sum_{k=1}^{n-3} g(n,k)|\varphi^4(x)p''_{n-2,k}(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad +n(n-1)\varphi^4(x)g(n,n-2)|p''_{n-2,n-2}(x)| \\
&\leq \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(0)}}{n^2\varphi^2(1/n)}\varphi^4(x)(1-x)^{n-4} \\
&\quad +n(n-1)\sum_{k=1}^{n-3} g(n,k)\left|(n-2)(n-3)\left(x-\frac{k}{n-2}\right)^2\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{k}{n-2}\Big(k-(n-2)\Big)\right| p_{n-2,k}(x) \\
&\quad +\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(n-2)}}{n^2\varphi^2((n-1)/n)}\varphi^4(x)x^{n-4} \\
&\leq 2n(n-2)(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(0)}x^2(1-x)^{n-2} \\
&\quad +n(n-1)(n-2)(n-3)\sum_{k=1}^{n-3} g(n,k)\left(x-\frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x) \\
&\quad +n(n-1)\sum_{k=1}^{n-3} g(n,k)\left|\frac{k}{n-2}(k-(n-2))\right| p_{n-2,k}(x) \\
&\quad +2n(n-2)(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(n-2)}x^{n-2}(1-x)^2 \\
&\leq 2n(n-2)(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(0)}x^2(1-x)^{n-2} \\
&\quad +n(n-1)(n-2)(n-3)\sum_{k\in Q(x)\cup R(x)} g(n,k)\left(x-\frac{k}{n-2}\right)^2 p_{n-2,k}(x) \\
&\quad +\frac{n^3(n-1)}{(n-2)}\sum_{k=1}^{n-3} g(n,k)\alpha(n,k)p_{n-2,k}(x) \\
&\quad +2n(n-2)(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{A(n-2)}x^{n-2}(1-x)^2 \\
&\leq 2n(n-2)(n-3)\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}\Big(x^2(1-x)^{n-2}+x^{n-2}(1-x)^2\Big) \\
&\quad +(n-3)\Big(1+\frac{\epsilon}{4}\Big)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)}+\frac{(n-2)\epsilon}{4}\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)} \\
&\quad +\frac{n(n-1)}{(n-2)}\left(\Big(1+\frac{\epsilon}{4}\Big)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)}+\frac{\epsilon}{2}\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}\right).
\end{aligned}
$$

Notemos que la función $x^2(1-x)^{n-2}$ decrece en $(2/n,1)$. Además, sabemos que $2<A<n/2$, luego

$$x^2(1-x)^{n-2} \le \frac{A^2}{n^2}\left(1-\frac{A}{n}\right)^{n-2} \le \frac{A^2e^{-A}}{n^2(1-A/n)^2} \le \frac{4A^2e^{-A}}{n^2},$$

donde, hemos usado el Lema 2.8.

Por otra parte, la función $x^{n-2}(1-x)^2$ es creciente en $(0,1-2/n)$. Debido a que $2<A<n/2$, se sigue que

$$x^{n-2}(1-x)^2 \le \left(1-\frac{A}{n}\right)^{n-2}\frac{A^2}{n^2} \le \frac{4A^2e^{-A}}{n^2}.$$

De las últimas dos desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned} &2n(n-2)(n-3)\Big(x^2(1-x)^{n-2}+x^{n-2}(1-x)^2\Big)\\ &\le 16n(n-2)(n-3)\frac{A^2e^{-A}}{n^2} \le 16(n-3)A^2e^{-A}. \end{aligned}$$

Ya que la función y^3e^{-y} decrece para $y\ge 3$, se tiene

$$\frac{y^3}{e^y} \le \frac{27}{e^3} \le \frac{9}{4}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2n(n-2)(n-3)\Big(x^2(1-x)^{n-2}+x^{n-2}(1-x)^2\Big) &\le 4\cdot\frac{9}{A}(n-3)\\ &\le \frac{\epsilon}{4}(n-3), \end{aligned}$$

porque

$$\frac{9}{A} \le \frac{9\beta^2}{16} \le \frac{\epsilon}{16}.$$

Considerando las desigualdades probadas arriba, tenemos

$$\begin{aligned} &\varphi^4(x)\left|B_n^{(iv)}(g,x)\right|\\ &\le \frac{n-3}{4}\epsilon\|\varphi^2g''\|_{R(x,\beta)} + \frac{(n-2)^2+2n(n-1)}{4(n-2)}\epsilon\|\varphi^2g''\|_{R(x,\beta)}\\ &\quad+\left(\frac{(n-3)(n-2)+n(n-1)}{n-2}\right)\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2g''\|_{T(x,\beta)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)+(n-2)^2+2n(n-1)}{4(n-2)}\epsilon\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)}$$

$$+\left(n-\frac{n-3}{n-2}\right)\left(2+\frac{\epsilon}{2}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)}$$

$$\le n\epsilon\|\varphi^2 g''\|_{R(x,\beta)} + n\left(2+\frac{\epsilon}{2}\right)\|\varphi^2 g''\|_{T(x,\beta)},$$

donde la última desigualdad se sigue de

$$(n-3)(n-2)+(n-2)^2+2n(n-1) = 4n(n-2)+10-3n \le 4n(n-2).$$

Por último, si $\|f - B_n(f)\| < \|\varphi^2 B_n''(f)\|/(4n)$, usamos (2.3) y (2.11) para obtener lo siguiente

$$|\varphi^3(x)B_n'''(f,x)| \le |\varphi^3(x)B_n'''(B_n(f)-f,x)| + |\varphi^3(x)B_n'''(B_n(f),x)|$$

$$\le 10n^{3/2}\|f-B_n(f)\| + \sqrt{n}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{T(x,\beta)}$$

$$+\sqrt{n}\frac{\epsilon}{2}\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{R(x,\beta)}$$

$$\le 10n^{3/2}\frac{\|\varphi^2 B_n''(f)\|}{4n} + \sqrt{n}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{T(x,\beta)}$$

$$+\sqrt{n}\frac{\epsilon}{2}\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{R(x,\beta)}$$

$$\le \frac{5\sqrt{n}}{2}\left(\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{T(x,\beta)} + \|\varphi^2 B_n''(f)\|_{R(x,\beta)}\right)$$

$$+\sqrt{n}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\|\varphi^2 B_n''(f))\|_{T(x,\beta)}+\sqrt{n}\frac{\epsilon}{2}\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{R(x,\beta)}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{2}\left\{\left(7+\frac{\epsilon}{2}\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{T(x,\beta)}\right.$$

$$\left.+(5+\epsilon)\|\varphi^2 B_n''(f)\|_{R(x,\beta)}\right\}.$$

$\square$

2.4.1. Una aplicación

Para $g \in C^2[0,1]$, tenemos

$$|g(t) - g(x) - g'(x)(t-x)| \leq \frac{(t-x)^2}{\varphi^2(x)} \|\varphi^2 g''\|. \tag{2.12}$$

En efecto,

$$g(t) - g(x) - g'(x)(t-x) = \int_x^t g''(s)(t-s)ds,$$

luego, de la Proposición 1.6 se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\int_x^t g''(s)(t-s)ds\right| &\leq \|\varphi^2 g''\| \left|\int_x^t \frac{t-s}{\varphi^2(s)} ds\right| \\ &\leq \frac{(x-t)^2}{\varphi^2(x)} \|\varphi^2 g''\|.\end{aligned}$$

Proposición 2.10. *Fijemos ϵ, β, A y $n \in \mathbb{N}$ tales que se satisfacen las condiciones (2.6). Si $f \in C[0,1]$ satisface*

$$\|f - B_n(f)\| < \frac{\|\varphi^2 B_n''(f)\|}{4n} \tag{2.13}$$

y

$$(1-\epsilon)\|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq \|\varphi^2 B_n''(f)\|_{E_n}, \tag{2.14}$$

entonces

$$\frac{\epsilon^3}{4 \cdot 49} \frac{3}{2n} \|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq \|f - B_n(f)\|.$$

Demostración. Supongamos que la desigualdad no se cumple, esto es

$$\|f - B_n(f)\| < \frac{\epsilon^3}{4 \cdot 49} \frac{3}{2n} \|\varphi^2 B_n''(f)\| = \frac{\epsilon c^2}{4} \frac{3}{2n} \|\varphi^2 B_n''(f)\|, \tag{2.15}$$

donde $c = \epsilon/7$.

Debido a que la demostración de esta proposición es extensa, se ha dividido en 8 pasos.

Paso 1. De (2.15) se tiene

$$\|B_n \circ B_n(f) - B_n(f)\| \leq \|f - B_n(f)\| < \frac{\epsilon c^2}{4} \frac{3}{2n} \|\varphi^2 B_n''(f)\|. \tag{2.16}$$

Más aún, de (2.14), se sigue que existe $x_0 \in E_n$ tal que

$$(1-\epsilon)\|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq |\varphi^2(x_0)B_n''(f,x_0)|.$$

En lo que sigue fijaremos este punto x_0 y supondremos, sin pérdida de generalidad, que $B_n''(f,x_0) > 0$.

Paso 2. Necesitamos una cota inferior de $B_n''(f)$ en una vecindad de x_0. Probaremos que si $|x_0 - z| \leq c\varphi(x_0)\sqrt{6/n}$, entonces $z \in (0,1)$ y

$$B_n''(f,z) \geq \frac{1-2\epsilon}{\varphi^2(x_0)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|. \tag{2.17}$$

Primero notemos que

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 B_n(f,x) &= \Delta_h^2 B_n(B_n(f),x) + \Delta_h^2 B_n(f - B_n(f),x) \\ &\leq \Delta_h^2 B_n(B_n(f),x) + 4\|B_n(f - B_n(f))\|, \end{aligned} \tag{2.18}$$

debido a que $\sqrt{6} \leq 2\beta A$ y $|x_0 - z| \leq \varphi(x_0)\sqrt{6/n}$, tomando $m = 3$, $B = A$, $x = x_0$ y $h = \varphi(x_0)\sqrt{6/n}$ en la última parte del Lema 1.4 tenemos que $z \in (0,1)$ y

$$\varphi^3(x_0) \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)^{3/2}\varphi^3(z). \tag{2.19}$$

De (2.5), (2.13) y (2.19), se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi^3(x_0)|B_n'''(f,v)| &\leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)^{3/2}|\varphi^3(v)B_n'''(f,v)| \\ &\leq 5\sqrt{n}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)^{3/2}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq 7\sqrt{n}\|\varphi^2 B_n''(f)\|, \end{aligned}$$

siempre que $|x_0 - v| \leq \varphi(x_0)\sqrt{6/n}$.

Si $|x_0 - z| \leq c\varphi(x_0)/\sqrt{n}$, existe un punto ξ entre x_0 y z para el cual se cumple que $|x_0 - \xi| \leq \varphi(x_0)\sqrt{6/n}$ y

$$\begin{aligned} (1-\epsilon)\|\varphi^2 B_n''(f)\| &\leq \varphi^2(x_0)B_n''(f,x_0) \\ &= \varphi^2(x_0)\Big(B_n''(f,x_0) - B_n''(f,z)\Big) + \varphi^2(x_0)B_n''(f,z) \\ &= \frac{1}{\varphi(x_0)}\varphi^3(x_0)B_n'''(f,\xi)(x_0 - z) + \varphi^2(x_0)B_n''(f,z) \\ &\leq 7c\|\varphi^2 B_n''(f)\| + \varphi^2(x_0)B_n''(f,z) \end{aligned}$$

$$= \epsilon\|\varphi^2 B_n''(f)\| + \varphi^2(x_0) B_n''(f,z),$$

de donde

$$\frac{1-2\epsilon}{\varphi^2(x_0)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq B_n''(f,z).$$

Paso 3. Sea $I_3 = [x_0 - c\varphi(x_0)\sqrt{3/2n}, x_0 + c\varphi(x_0)\sqrt{3/2n}]$. Existe un punto $x_1 \in I_3$ tal que

$$B_n''(B_n(f),x_1) \geq \frac{1-4\epsilon}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|. \tag{2.20}$$

Se tiene que, existe un punto $z \in I_3$ tal que

$$\Delta^2_{c\varphi(x_0)\sqrt{3/2n}} B_n(f,x_0) = \frac{3c^2\varphi^2(x_0)}{2n} B_n''(f,z) \geq \frac{3(1-2\epsilon)c^2}{2n}\|\varphi^2 B_n''(f)\|,$$

donde hemos usado (2.17). Luego, de (2.16) y (2.18) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2n}(1-3\epsilon)c^2\|\varphi^2 B_n''(f)\| &= \frac{3}{2n}(1-2\epsilon)c^2\|\varphi^2 B_n''(f)\| - \frac{3c^2}{2n}\epsilon\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\
&\leq \Delta^2_{c\varphi(x_0)\sqrt{3/2n}} B_n(f,x_0) - \frac{3c^2}{2n}\epsilon\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\
&\leq \Delta^2_{c\varphi(x_0)\sqrt{3/2n}} B_n(B_n(f),x_0) \\
&\quad +4\|B_n(B_n(f)) - B_n(f)\| - \frac{3c^2}{2n}\epsilon\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\
&\leq \Delta^2_{c\varphi(x_0)\sqrt{3/2n}} B_n(B_n(f),x_0).
\end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio, existe $x_1 \in I_3$ tal que

$$\Delta^2_{c\varphi(x_0)\sqrt{3/2n}} B_n(B_n(f),x_0) = \frac{3c^2}{2n}\varphi^2(x_0) B_n''(B_n(f),x_1),$$

así,

$$B_n''(B_n(f),x_1) \geq \frac{1-3\epsilon}{\varphi^2(x_0)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Necesitamos pasar de x_0 a x_1. Para esto, usamos el último enunciado en el Lema 1.4 con $B = A$, $x = x_0$ y $z = x_1$ obteniendo

$$\varphi^2(x_0) \leq \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)\varphi^2(x_1).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} B_n''(B_n(f),x_1) &\geq \frac{1-3\epsilon}{(1+\epsilon/4)\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\ &= \left(1-\frac{13\epsilon}{4+\epsilon}\right)\frac{1}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\ &\geq \frac{1-4\epsilon}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|. \end{aligned}$$

Esto prueba (2.20).

Paso 4. Sea $I_4 = [x_1-\varphi(x_1)\sqrt{\epsilon/n}, x_1+\varphi(x_1)\sqrt{\epsilon/n}]$. Existe un punto $\xi \in I_4$ tal que

$$|B_n'''(B_n(f),\xi)| \leq 7\frac{\sqrt{n}\sqrt{\epsilon}}{\varphi^3(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|. \tag{2.21}$$

Podemos suponer que $B_n'''(B_n(f))$ no tiene ceros en el intervalo I_4, de otra manera, la afirmación es trivial. Entonces $B_n''(B_n(f))$ es una función estrictamente monótona en I_4.

Si denotamos $x_1^- = x_1 - \sqrt{\epsilon}\varphi(x_1)/\sqrt{n}$ y $x_1^+ = x_1 + \sqrt{\epsilon}\varphi(x_1)/\sqrt{n}$, entonces

$$B_n''(B_n(f),x_1) < \max\left\{B_n''(B_n(f),x_1^-), B_n''(B_n(f),x_1^+)\right\}.$$

Como $x_1 \in [A/n, 1-A/n]$, si $|y-x_1| \leq \varphi(x_1)\sqrt{\epsilon/n}$, tomando $B=\sqrt{A}$ y $x = x_1$ en el Lema 1.4 tenemos

$$\varphi^2(x_1) \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)\varphi^2(y).$$

Mientras que de (1.1) (con $\lambda = \sqrt{\epsilon}$, $z = x_0$, $y = x_1$ y $B = A$) obtenemos $x_1^{\pm} \in [A/n, 1-A/n]$. Entonces, podemos aplicar el Teorema 2.9 a $x_1^{\pm}$ y $g = B_n(f)$,

$$B_n''(B_n(f),x_1^{\pm}) \leq \frac{1+\epsilon/2}{\varphi^2(x_1^{\pm})}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq \frac{(1+\epsilon/2)(1+\epsilon/4)}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Si $B_n''(B_n(f),x_1) < B_n''(B_n(f),x_1^-)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_n''(B_n(f),x_1^-) - B_n''(B_n(f),x_1) \\ &\leq \left(\frac{(1+\epsilon/2)(1+\epsilon/4)}{\varphi^2(x_1)} - \frac{1-4\epsilon}{\varphi^2(x_1)}\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\| \end{aligned}$$

$$= \frac{\epsilon(19/4+\epsilon/8)}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq \frac{7\epsilon}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

La última desigualdad implica que debe de haber al menos un punto ξ en el intervalo $[x_1 - \sqrt{\epsilon}\varphi(x_1)/\sqrt{n}, x_1]$ para el cual

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\epsilon}\varphi(x_1)}{\sqrt{n}}|B_n'''(B_n(f),\xi)| &= B_n''(B_n(f),x_1^-) - B_n''(B_n(f),x_1)\\ &\leq \frac{7\epsilon\|\varphi^2 B_n''(f)\|}{\varphi^2(x_1)}.\end{aligned}$$

De manera similar, si $B_n''(B_n(f),x_1) < B_n''(B_n(f),x_1^+)$ existe un elemento $\xi' \in [x_1, x_1 + \sqrt{\epsilon}\varphi(x_1)/\sqrt{n}]$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\epsilon}\varphi(x_1)}{\sqrt{n}}|B_n'''(B_n(f),\xi')| &= B_n''(B_n(f),x_1^+) - B_n''(B_n(f),x_1)\\ &\leq \frac{7\epsilon\|\varphi^2 B_n''(f)\|}{\varphi^2(x_1)}.\end{aligned}$$

Por tanto, de ambos casos se obtiene que existe $\xi \in I_4$ tal que

$$|B_n'''(B_n(f),\xi)| \leq \frac{7\sqrt{n}\sqrt{\epsilon}}{\varphi^3(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Paso 5. Si x_1 es el punto en el Paso 3, entonces

$$|B_n'''(B_n(f),x_1)| \leq \frac{19\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Sea ξ el punto en el Paso 4. Existe un punto z entre x_1 y ξ para el cual

$$\begin{aligned}|B_n'''(B_n(f),x_1)| &\leq |B_n'''(B_n(f),x_1) - B_n'''(B_n(f),\xi)| + |B_n'''(B_n(f),\xi)|\\ &= |x_1-\xi||B_n^{(iv)}(B_n(f),z)| + |B_n'''(B_n(f),\xi)|.\end{aligned}$$

Ya que $x_1 \in [A/n, 1-A/n]$ y

$$|x_1 - z| \leq |x_1 - \xi| \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{n}}\varphi(x_1) \leq \sqrt{\frac{6}{n}}\varphi(x_1),$$

tomando $B = \sqrt{A}$ y $x = x_1$ en el Lema 1.4 tenemos

$$\varphi^4(x_1) \leq \left(1+\frac{\epsilon}{4}\right)^2 \varphi^4(z).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
|x_0 - z| &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - z| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \xi| \\
&\leq c\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{\epsilon}\varphi(x_1)}{\sqrt{n}}, \\
&\leq \left(c\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\epsilon}\left(1 + \frac{c\sqrt{3/2}}{8}\right)\right)\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{n}} \leq \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

donde, hemos usado (1.2) con $B = A$, $z = x_0$, $b = 4$ y $\lambda = c\sqrt{3/2}$.

Por tanto, se sigue de (1.1) (con $\lambda = 1$) que $z \in [A/n, 1 - A/n]$. Entonces podemos aplicar el Teorema 2.9 (tomando $g = B_n(f)$) y (2.21) para obtener

$$\begin{aligned}
|B_n'''(B_n(f), x_1)| &\leq |x_1 - \xi||B_n^{(iv)}(B_n(f), z)| + |B_n'''(B_n(f), \xi)| \\
&\leq \frac{|x_1 - \xi|}{\varphi^4(z)}(2 + 3/2\epsilon)n\|\varphi^2 B_n''(f)\| + |B_n'''(B_n(f), \xi)| \\
&\leq \frac{\varphi(x_1)2(1+\epsilon)n\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{n}\varphi^4(z)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| + 7\frac{\sqrt{n}\sqrt{\epsilon}}{\varphi^3(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\
&\leq \frac{2(1+\epsilon)(1+\epsilon/4)^2\sqrt{n}\sqrt{\epsilon}}{\varphi^3(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \\
&\qquad + 7\frac{\sqrt{n}\sqrt{\epsilon}}{\varphi^3(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|. \\
&\leq 19\frac{\sqrt{n}\sqrt{\epsilon}}{\varphi^3(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.
\end{aligned}$$

Paso 6. Si $(1 - \sqrt{\epsilon})x_1 < x < 1 - (1 - \sqrt{\epsilon})(1 - x_1)$, entonces

$$|B_n'''(B_n(f), x)| \leq \left(19\frac{\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)} + \frac{2(1+\epsilon)}{(1-\sqrt{\epsilon})^2}\frac{|x - x_1|n}{\varphi^4(x_1)}\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Si tomamos $B = A$, $z = x_0$, $y = x_1$, $\lambda = c\sqrt{3/2}$ y $\tau = \sqrt{\epsilon}$ en el Lema 1.3 obtenemos $[(1-\sqrt{\epsilon})x_1, 1-(1-\sqrt{\epsilon})(1-x_1)] \subset [A/n, 1-A/n]$. Ahora, aplicando el Teorema 2.9, tenemos que existe w entre x_1 y x tal que

$$\begin{aligned}
| B_n'''(B_n(f), x) | &\leq | B_n'''(B_n(f), x_1) | + | B_n'''(B_n(f), x_1) - B_n'''(B_n(f), x) | \\
&= | B_n'''(B_n(f), x_1) | + | B_n^{(iv)}(B_n(f), w) || x - x_1 |
\end{aligned}$$

$$\leq \left(19 \frac{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)} + 2(1+\epsilon)\frac{\mid x - x_1 \mid \, n}{\varphi^4(w)} \right) \|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Ahora, verifiquemos que si $x \in [(1-\sqrt{\varepsilon})x_1, 1-(1-\sqrt{\varepsilon})(1-x_1)]$ y z está entre x_1 y x, entonces

$$\varphi(x_1) \leq \frac{\varphi(z)}{\sqrt{1-\sqrt{\varepsilon}}}. \tag{2.22}$$

Si $z < x_1 \leq 1/2$, entonces

$$\varphi(x_1) \leq \frac{\varphi((1-\sqrt{\epsilon})x_1)}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}} \leq \frac{\varphi(z)}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}}.$$

Si $x_1 \leq 1/2$ y $x_1 \leq z \leq 1 - x_1$, entonces

$$\varphi(x_1) \leq \varphi(z) \leq \frac{\varphi(z)}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}}.$$

Si $x_1 \leq 1/2$ y $1 - x_1 < z$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(x_1) = \varphi(1-x_1) &\leq \frac{\varphi((1-\sqrt{\epsilon})(1-x_1))}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}} \\ &= \frac{\varphi(1-(1-\sqrt{\epsilon})(1-x_1))}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}} \leq \frac{\varphi(z)}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}}.\end{aligned}$$

Relaciones similares se cumplen para cuando $1/2 < x_1$.

Tomando en cuenta (2.22) obtenemos

$$\mid B_n'''(B_n(f), x) \mid \leq \left(19 \frac{\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)} + \frac{2(1+\epsilon)}{(1-\sqrt{\epsilon})^2} \frac{\mid x - x_1 \mid \, n}{\varphi^4(x_1)} \right) \|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Paso 7. Si

$$m(x) = \frac{1-4\epsilon}{\varphi^2(x_1)} \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{55\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)} \frac{|x-x_1|^3}{6} - \frac{n(1+\epsilon)}{(1-\sqrt{\epsilon})^2} \frac{(x-x_1)^4}{12\varphi^4(x_1)}$$

y

$$h(x) = \begin{cases} m(x)\|\varphi^2 B_n''(f)\|, & \text{si } x \in [(1-\sqrt{\epsilon})x_1, 1-(1-\sqrt{\epsilon})(1-x_1)], \\ -\frac{8(x-x_1)^2}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$B_n(B_n(f),x) - B_n(B_n(f),x_1) - B_n'(B_n(f),x_1)(x-x_1) \geq h(x). \quad (2.23)$$

Integrando la desigualdad en el Paso 6 y de (2.20) obtenemos

$$B_n''(B_n(f),x) = \int_{x_1}^{x} B_n'''(B_n(f),s)ds + B_n''(B_n(f),x_1)$$

$$\geq \left(\frac{1-4\epsilon}{\varphi^2(x_1)} - 55\frac{\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)}|x-x_1| - \frac{1+\epsilon}{(1-\sqrt{\epsilon})^2}\frac{(x-x_1)^2}{\varphi^4(x_1)}n\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\| \quad (2.24)$$

para $x \in [(1-\sqrt{\epsilon})x_1, 1-(1-\sqrt{\epsilon})(1-x_1)]$.

Usando (2.24) obtenemos

$$B_n'(B_n(f),x) = \int_{x_1}^{x} B_n''(B_n(f),s)ds + B_n'(B_n(f),x_1)$$

$$\geq \left\{\frac{1-4\epsilon}{\varphi^2(x_1)}(x-x_1) - \frac{55\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)}\frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{n(1+\epsilon)}{(1-\sqrt{\epsilon})^2\varphi^4(x_1)}\frac{(x-x_1)^3}{3}\right\}\|\varphi^2 B_n''(f)\| + B_n'(B_n(f),x_1).$$

Luego,

$$B_n(B_n(f),x) \geq \left\{\frac{1-4\epsilon}{\varphi^2(x_1)}\frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{55\sqrt{\epsilon}\sqrt{n}}{\varphi^3(x_1)}\frac{|x-x_1|^3}{6} - \frac{n(1+\epsilon)}{(1-\sqrt{\epsilon})^2}\frac{(x-x_1)^4}{12\varphi^4(x_1)}\right\}\|\varphi^2 B_n''(f)\| + B_n'(B_n(f),x_1)(x-x_1) + B_n(B_n(f),x_1).$$

Por tanto,

$$B_n(B_n(f),x) - B_n(B_n(f),x_1) - B_n'(B_n(f),x_1)(x-x_1) \geq m(x)\|\varphi^2 B_n''(f)\|, \quad (2.25)$$

para todo $x \in [(1-\sqrt{\epsilon})x_1, 1-(1-\sqrt{\epsilon})(1-x_1)]$.

En otro caso, usamos el estimado (2.12), con $g = B_n(B_n(f))$, combinado con (2.4) para deducir que

$$|B_n(B_n(f),x) - B_n(B_n(f),x_1) - B_n'(B_n(f),x_1)(x-x_1)|$$

$$\leq 4\frac{(x-x_1)^2}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(B_n(f))\| \leq 8\frac{(x-x_1)^2}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.$$

Con lo que queda demostrado (2.23).

Paso 8. *La contradicción.*
Sea

$$A = \left\{k : 0 \leq k \leq n, \frac{k}{n} \notin [(1-\sqrt{\epsilon})x_1, 1-(1-\sqrt{\epsilon})(1-x_1)]\right\}$$

y

$$B = \left\{k : 0 \leq k \leq n, \left|\frac{k}{n} - x_1\right| > \sqrt{\epsilon}x_1(1-x_1)\right\}.$$

Nótese que $A \subset B$.

Sea h la función definida en el Paso 7. Entonces,

$$\begin{aligned}
B_n(h, x_1) &= \|\varphi^2 B_n''(f)\| B_n(m, x_1) - \|\varphi^2 B_n''(f)\| \sum_{k\in A} m(k/n) p_{n,k}(x_1) \\
&\quad - \frac{8}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \sum_{k\in A}\left(\frac{k}{n} - x_1\right)^2 p_{n,k}(x_1) \\
&\geq \|\varphi^2 B_n''(f)\| B_n(m, x_1) - \|\varphi^2 B_n''(f)\| \frac{1-4\epsilon}{2\varphi^2(x_1)} \sum_{k\in A}\left(\frac{k}{n} - x_1\right)^2 p_{n,k}(x_1) \\
&\quad - \frac{8}{\varphi^2(x_1)}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \sum_{k\in A}\left(\frac{k}{n} - x_1\right)^2 p_{n,k}(x_1) \\
&\geq \|\varphi^2 B_n''(f)\| B_n(m, x_1) \\
&\quad - \|\varphi^2 B_n''(f)\| \left(\frac{1-4\epsilon}{2\varphi^2(x_1)} + \frac{8}{\varphi^2(x_1)}\right) \sum_{k\in B}\left(\frac{k}{n} - x_1\right)^2 p_{n,k}(x_1).
\end{aligned}$$

De (ii) en el Lema 2.4, con $\alpha = \sqrt{\epsilon}$ y $x = x_1$ y de la condición sobre β se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{B_n(h, x_1)}{\|\varphi^2 B_n''(f)\|} &\geq B_n(m, x_1) - \frac{\sqrt{2}}{n}(1 - 4\epsilon + 16)\exp\left\{-\frac{\epsilon n x_1(1-x_1)}{8}\right\} \\
&\geq B_n(m, x_1) - \frac{\sqrt{2}}{n}(1 - 4\epsilon + 16)\exp\left\{-\frac{\epsilon A(1-A/n)}{8}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq B_n(m, x_1) - \frac{\sqrt{2}}{n}(1 - 4\epsilon + 16)\exp\left\{-\frac{\epsilon A}{16}\right\} \\
&\geq B_n(m, x_1) - \frac{\sqrt{2}}{n}(17 - 4\epsilon)\left(\frac{\epsilon}{24\sqrt{2}}\right)^{1/\beta} \\
&\geq B_n(m, x_1) - \frac{17}{n}\frac{\epsilon}{24},
\end{aligned}
$$

porque

$$
\ln\left(\frac{24\sqrt{2}}{\epsilon}\right)^{1/\beta} = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{24\sqrt{2}}{\epsilon}\right) = \frac{\beta}{16}\frac{16}{\beta^2}\ln\left(\frac{24\sqrt{2}}{\epsilon}\right) \leq \frac{\beta}{16}A \leq \frac{\epsilon A}{16}.
$$

Del Corolario 1.14, con

$$
a = \frac{1 - 4\epsilon}{2}, \quad b = \frac{55\sqrt{\epsilon}}{6} \quad \text{y} \quad c = \frac{(1+\epsilon)}{12(1-\sqrt{\epsilon})^2}
$$

sabemos que

$$
B_n(h, x_1) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{1-4\epsilon}{2} - \frac{110\sqrt{\epsilon}}{6} - \frac{7(1+\epsilon)}{24(1-\sqrt{\epsilon})^2}\right)\|\varphi^2 B_n''(f)\|.
$$

Si $\epsilon < 10^{-6}$, entonces

$$
B_n(h, x_1) \geq \frac{3}{16n}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.
$$

Luego, de (2.25) obtenemos

$$
\begin{aligned}
B_n(B_n \circ B_n(f), x) - B_n(B_n(B_n(f), x_1), x) - B_n((B_n'(B_n(f), x_1)(x - x_1), x)& \\
\geq B_n(m(x)\|\varphi^2 B_n''(f)\|, x),&
\end{aligned}
$$

evaluando en $x = x_1$ tenemos

$$
B_n(B_n \circ B_n(f), x_1) - B_n(B_n(f), x_1) \geq B_n(h, x_1) \geq \frac{3}{16n}\|\varphi^2 B_n''(f)\|.
$$

Esto nos da

$$
\frac{3}{16n}\|\varphi^2 B_n''(f)\| \leq \|B_n \circ B_n \circ B_n(f) - B_n \circ B_n(f)\| \leq \|f - B_n(f)\|
$$

y esto contradice (2.15).

Por tanto, con esto concluimos la demostración. $\square$

Conclusión

Con el fin de cumplir con el objetivo de la presente tesis, nos vimos en la necesidad de presentar varios resultados previos (ver Lemas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 2.8, Proposiciones 1.7 y 1.13, Corolario 1.14 y Teorema 2.5). Consideramos importante mencionar que el proceso de demostración de tales resultados no fue sencillo.

Los resultados principales que se obtuvieron son los siguientes:

- Se encontraron condiciones más precisas sobre los parámetros ϵ, β, A y n (ver (2.6)). Para poder lograr ésto se optó por no utilizar los lemas a los que hace referencia Totik en [14]. En lugar de ello se demostró el Lema 2.4.

- Se presentaron los Lemas 2.6 y 2.7, los cuales son importantes para la demostración del Teorema 2.9.

- Se obtuvo una demostración detallada del teorema referente a las desigualdades localizadas para los polinomios de Bernstein: Teorema 2.9.

- Se demostró también la Proposición 2.10, en la cual se puede apreciar una aplicación del Teorema 2.9.

Con base en lo anterior, podemos decir que el objetivo de esta tesis fue alcanzado satisfactoriamente.

Bibliografía

[1] Berens H. y Lorentz G. G., *Inverse theorems for Bernstein polynomials*, Indiana Univ. Math. J., 21(8), 693-708, 1972.

[2] Bernstein S. N., *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Comm. of the Kharkov Math. Soc., 13, 1-2, 1912.

[3] Bustamante J., *Estimates of positive linear operators in terms of second-order moduli*, J. Math. Anal. Appl., 345, 203-212, 2008.

[4] DeVore R., *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*, Springer Lec. Notes in Math. 293, Springer-Verlag, ISBN: 3-540-06038-3, 1972.

[5] DeVore R. A., Lorentz G. G., *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, ISBN: 3-540-50627-6, 1993.

[6] Ditzian Z. e Ivanov K. G., *Strong converse inequalities*, J. Anal. Math., 61, 61-111, 1993.

[7] Felten M., *Local and global approximation theorems for positive linear operators*, J. Approx. Theory, 94, 396-419, 1998.

[8] Hardy G. H., *Divergent Series*, Clarendron Press, ISBN: 0 19 853309 8, 1949.

[9] Knoop H. B. y Zhou X. L., *The lower estimate for linear positive operators (II)*, Results Math., 25, 315-330 ,1994.

[10] Knoop H. B. y Zhou X. L., *The lower estimate for linear positive operators, I*, Constr. Approx., 11, 53-66, 1995.

[11] Lorentz G. G., *Bernstein polynomials*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, ISBN: 0-8284-0323-6, 1986.

[12] Păltănea R., *Approximation Theory Using Positive Linear Operators*, Birkhäuser, ISBN-13: 978-0-8176-4350-8, 2004.

[13] Sangüesa C., *Lower estimates for centered Bernstein-type operators*, Constr. Approx., 18, 145-159, 2002.

[14] Totik V., *Approximation by Bernstein polynomials*, Amer. J. Math., 116, 995-1018, 1994.

[15] Vidensky V. S., *Bernstein polynomials*, State Pedagogical Institute of Leningrad, 1990 (en ruso).