



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dinámica de agentes activos bajo confinamiento, de 2D a
cuasi-1D

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Rodolfo Reyes Aguilar

Asesorado por

Dr. José Luis Carrillo Estrada

Dr. Roberto Ramírez Sánchez

Puebla Pue.
5 de junio de 2024

Título: Dinámica de agentes activos bajo confinamiento, de 2D a cuasi-1D

Estudiante: RODOLFO REYES AGUILAR

COMITÉ

Dra. Beatriz Bonilla Capilla
Presidente

Dr. José Eladio Flores Mena
Secretario

Dra. Patricia Mendoza Méndez
Vocal

Vocal

Dr. José Luis Carrillo Estrada
Dr. Roberto Ramírez Sánchez
Asesor

Agradecimientos

Primero quiero agradecer enormemente a mis padres, mi madre Liliana y mi padre Rolando quienes con su apoyo incondicional han hecho que yo sea capaz de concluir esta etapa de mi vida, este logro es reflejo de su esfuerzo. Agradezco a mi abuela Amalia, quien siempre ha tenido mucha fe en mi y me ha apoyado siempre que lo he necesitado. También quiero agradecer a mis hermanos Diego e Israel, que siempre han estado a mi lado y su apoyo moral ha tenido gran impacto en mí.

Me gustaría agradecer a Deisy Casas, por su comprensión, paciencia y amor, con quien he pasado grandes momentos. Su apoyo emocional ha sido invaluable durante este proceso.

Expreso un profundo agradecimiento a mis asesores de tesis, el Dr. José Luis Eustolio Carrillo Estrada y el Dr. Roberto Ramírez Sánchez, quienes con su experiencia y comprensión han contribuido enormemente a mi desarrollo. Su constante guía ha sido fundamental en este viaje. Cada conversación que tuvimos impactaba en mi generando una gran curiosidad, curiosidad que ahora me inspira a seguir a formándome. Les agradezco enormemente.

Le quiero dar un agradecimiento especial al Dr. Fernando Donado quien han contribuido enormemente en mi trabajo y de quien he aprendido mucho. De igual manera me siento agradecido de haber conocido a la Dra. Mónica Ledesma, a la Mtra. Citlalli Vidales y la Dra. Ángeles Escobar, a quienes siempre acudí en busca de ayuda en todo este proceso, han sido muy pacientes conmigo y he aprendido mucho gracias a ellas.

Este trabajo es el fruto del apoyo y cariño incondicional de personas excepcionales a quienes les tengo un profundo aprecio. Su presencia en mi vida ha sido invaluable, y este trabajo es un reflejo de su influencia positiva.

Me siento inmensamente afortunado de estar rodeado de personas tan maravillosas que me han ayudado a que alcanzara esta meta. Gracias por todo.

*Dedicado a mi madre M. Liliana Aguilar Emiciente.
Porque todos mis logros han sido gracias a tu amor y apoyo inquebrantables.
Te amo, mamá.*

Resumen

En este trabajo se estudió un sistema de materia activa compuesta de agentes inanimados autopropulsados (Hexbugs) en dos tipos de confinamiento, un canal circular cuyo ancho puede variar desde una celda cuasi unidimensional a una celda bidimensional circular, haciendo una analogía con la teoría del movimiento browniano.

Se analiza la dinámica de este sistema de entes activos tomando como parámetros el número de robots y el tamaño del área donde se pueden mover.

La caracterización del movimiento se hizo a través del desplazamiento cuadrático medio, extrayendo el exponente de difusión α que describe que tan cerca o lejos se encuentra la dinámica respecto al movimiento browniano, el coeficiente de difusión efectiva D y la velocidad media de los entes activos v , lo cual nos permite identificar equivalencias dinámicas entre ambos confinamientos. A través del teorema de equipartición se definió una temperatura efectiva que permite caracterizar en otros términos las condiciones dinámicamente equivalentes de este sistema de materia activa.

Índice general

1. Antecedentes	1
1.1. Materia activa	1
1.2. Movimiento browniano	2
1.2.1. Teorema de equipartición de energía	4
1.2.2. El enfoque de Langevin del movimiento Browniano	5
1.3. Difusión anómala	6
1.4. Robots como materia activa	7
2. Experimento	9
2.1. Diseño experimental	9
2.1.1. Robots Hexbugs	9
2.1.2. Celda de observación	10
2.2. Seguimiento de trayectorias	10
2.3. Desplazamiento Cuadrático Medio	13
2.4. Caracterización de la dinámica colectiva del sistema de robots	16
3. Resultados y discusión	17
3.1. Gráficas del DCM	17
3.1.1. 1 robot	17
3.1.2. Dinámica cooperativa	21
3.2. Fenómenos emergentes	26
3.3. Caracterización del movimiento	28
3.3.1. Celda circular.	28
3.3.2. Canal circular	30
3.4. Temperatura efectiva	33
3.5. Conclusiones	35
Bibliografía	37

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Materia activa

La investigación en materia activa es un campo de la Física de materia blanda relativamente joven, pero que recientemente ha llamado poderosamente la atención. La materia activa está compuesta por un gran número de entes que tienen la capacidad de tomar energía de su entorno y transformarla en energía cinética, convirtiéndose en objetos autopropulsados.[1]

Los primeros estudios sobre materia activa se remontan a principios del siglo XX, iniciando con los resultados obtenidos por Einstein sobre el movimiento browniano [2] en 1905, al igual que Marian Smoluchowski sobre el mismo tema[3] en 1906. El campo de la materia activa se estableció como disciplina independiente hasta la década de 1970, con el trabajo pionero de Vicsek sobre los modelos de autopropulsión, que describen el comportamiento de los sistemas de partículas que se mueven de forma autónoma, donde el más importante para el campo de la materia activa fue su artículo "Nuevo tipo de transición de fase en un sistema de partículas autoimpulsadas"[4], publicado en 1995 en la revista "Physical Review Letters".

Actualmente la materia activa es un campo de investigación en crecimiento con aplicaciones en física, química, biología e ingeniería. Los agentes activos al transducir energía se encuentran fuera de equilibrio térmico, y los hay de muchos tipos, aunque en su mayoría son agentes biológicos como pueden ser bandadas de pájaros, bancos de peces, bacterias, células, motores moleculares, o no biológicos como partículas coloidales (un ejemplo son las partículas Janus), partículas capaces de auto agruparse otros ejemplos pueden ser nano partículas ferrosas, y algunos que son de especial interés para esta investigación, las cuales son partículas autopropulsadas, en específico robots.

La investigación en materia activa busca comprender una amplia gama de objetivos, entre los que destacan:

- El auto ensamblaje.
- El movimiento colectivo.
- Encontrar patrones de formación.
- Identificar separación de fases.
- Identificar transiciones de fase.
- Comprender el surgimiento de fenómenos emergentes, tales como el flocking y el jamming.

La comprensión de estos fenómenos daría pie a generar distintas tecnologías, desde materiales inteligentes a dispositivos con aplicaciones médicas.

Aunque el estudio de la materia activa tiene especial interés en entender e identificar los fenómenos colectivos, también es importante entender la dinámica de dichos entes individualmente, ya que su comprensión ayuda a poder generar modelos teóricos o simulaciones.

1.2. Movimiento browniano

Robert Brown fue un botánico, médico y cirujano escocés, que en 1827 observó a través del microscopio cómo granos de polen y partículas inorgánicas suspendidas en un fluido, mostraban movimientos irregulares.[5]

Aunque Robert Brown no fue el primero en observar este tipo de comportamiento de partículas minúsculas sobre fluidos, si fue el primero en estudiarlas con rigurosidad, lo cual produjo que este tipo de movimiento fuera bautizado como movimiento browniano en su honor.

Aunque en un principio sospecho que podían ser manifestaciones de vida de lo que se trataba, debido a que experimentaba con materia orgánica, su experiencia y experimentos posteriores le ayudaron a deducir que no era vida lo que observaba ya que fue capaz de ver el mismo comportamiento con materia inorgánica, concluyendo que este comportamiento es característico de partículas microscópicas embebidas en un fluido.

En su momento Robert Brown no fue capaz de describir ni determinar las causas de dicho movimiento. Algunos años más tarde en 1863 Christian Weiner propondría una explicación basada en teoría molecular para el movimiento browniano, dando soporte a la existencia de átomos y moléculas.[6] Weiner proponía que la causa del movimiento errático era debido a los movimientos moleculares del propio fluido, descartando factores externos o la evaporación como causantes, concluyendo que el movimiento browniano debía ser causado por alguna fuerza interna del fluido, apuntando hacia la teoría moderna del movimiento browniano.

No fue hasta 1905 que Albert Einstein, quien siendo ignorante de los experimentos de Brown y las conclusiones de Weiner, planteo la hipótesis que lograría explicar el fenómeno.

Einstein propuso que el movimiento aleatorio de las partículas era ocasionado por las fluctuaciones térmicas del fluido, y aceptando la hipótesis atómica-molecular, describió el movimiento de la partícula gracias a las colisiones que tiene la partícula con las moléculas del fluido.[7]

Einstein explicó que la divergencia entre los valores de los desplazamientos medios en tiempo dados y los valores más altos (factor de orden de 1000) de la teoría cinética ($v \approx \sqrt{k_B T/m}$). La argumentación se baso en que la velocidad de la partícula browniana no es una magnitud definida, esto es debido a que entre dos medidas consecutivas, la partícula choca muchas veces cambiando su magnitud y su modulo, cancelándose en muchos casos.

Hay dos puntos principales en la solución que propuso Einstein:

1. El movimiento de los granos de polen es producido por un alto número de colisiones (frecuencia de colisión en líquidos $\sim 10^{12} s^{-1}$) con las moléculas del fluido.
2. El movimiento de las moléculas es tan complejo que solo se puede describir probabilísticamente en términos de un gran número de colisiones independientes.

Einstein encontró que la función de distribución de partículas $g(x,t)$ cumple con la ecuación diferencial de difusión de Fick

$$\frac{\partial g}{\partial t} = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

Donde D es el coeficiente de difusión y tiene unidades de (m^2/s) . La solución de dicha ecuación es

$$g(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp^{-x^2/4Dt}$$

El desplazamiento cuadrático medio en dirección x viene dado por $\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt$ [2].

Para hacer la derivación a n dimensiones hay que notar que cada coordenada es estadísticamente independiente, de forma que siguiendo el desarrollo para una dimensión con el resto de coordenadas tenemos que el DCM para n dimensiones es:

$$\langle \Delta r^2 \rangle = 2dDt. \tag{1.1}$$

Donde d es el número de dimensiones.

Un resultado interesante es el caso para 3 dimensiones, donde por la forma del DCM podemos deducir que la velocidad medida estaría dada por

$$\langle \Delta r^2 \rangle = 6Dt \implies \langle v \rangle = \sqrt{\frac{6D}{t}}$$

Que al comparar su valor con el de la teoría cinética de los gases, específicamente con el obtenido al aplicar el principio de equipartición $\langle x_i \partial H / \partial x_j \rangle = \delta_{ij} K_B T$, logramos observar cómo la velocidad obtenida a través del DCM es mucho menor. La gran diferencia entre estas comparaciones no nos toma por sorpresa, ya que para esa época se sabía por la ley de Stokes, que la fuerza de resistencia al movimiento de una partícula de radio a en un medio viscoso viene dada por la fórmula, $F = 6\pi a \eta v = \gamma v$, donde η es la viscosidad dinámica (Ns/m^2) con γ como un coeficiente que describe la fricción.

La relación entre la fricción y la difusión se concluye como $D = K_B T / \gamma$ conocida como ley de Stokes-Einstein.

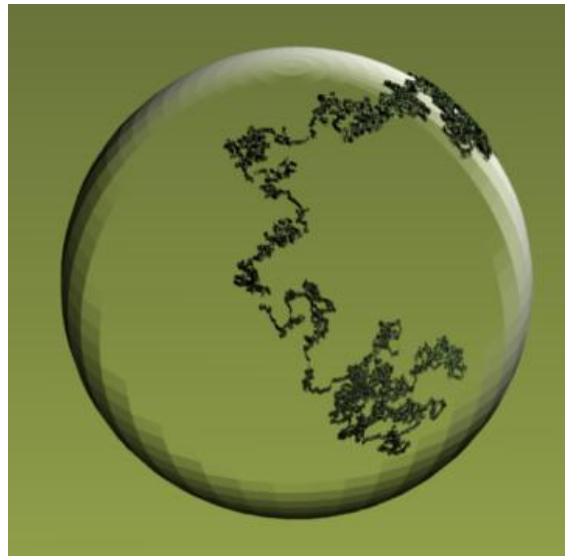


Figura 1.1: De Thomas Steiner: Movimiento browniano en una esfera. [8]

1.2.1. Teorema de equipartición de energía

El teorema de equipartición de la energía en la mecánica estadística es útil para estimar el valor medio de la energía cuando los términos que describen al sistema en el hamiltoniano aparecen cuadráticamente.

El teorema de equipartición de la energía generalizado es el siguiente. Para cualquiera de las variables canónicas $x_i = q_i$ o $x_i = p_i$ de un Hamiltoniano $H(q, p)$ tenemos que

$$\left\langle X_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{i,j} kT$$

Al utilizar los mismos índices para cada una de las variables canónicas sin sumarlas se tiene

$$\left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = kT$$

$$\left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = kT$$

Teniendo el caso en que cada una de las partículas está ligada a un punto de oscilación por medio de un potencial armónico:

Muchos sistemas físicos tienen Hamiltonianos que, a través de transformaciones canónicas pueden ser escritos en la forma

$$H = \sum_{i=0}^{3N} (A_i P_i^2 + B_i Q_i^2)$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^{3N} P_i \frac{\partial H}{\partial P_i} + Q_i \frac{\partial H}{\partial Q_i} = 2H$$

Así

$$\langle H \rangle = \frac{3N}{2} kT + \frac{3N}{2} kT = 3NkT$$

De donde podemos concluir que cada grado de libertad al cuadrado contribuye con $k_B T/2$ a la energía

Analicemos un caso de interés, el cual es un gas ideal. Un gas ideal esta conformado por partículas que se mueven de forma independiente y aleatoria. Esto significa que no hay interacciones significativas entre las partículas, excepto por las colisiones elásticas.

En un gas ideal las partículas se mueven consistentemente con una temperatura dada. Se asume que las fuerzas intermoleculares son insignificantes. Cuando un gas cumple con las afirmaciones anteriores es que podemos asumir que se comporta como un gas ideal. Esto significa que el gas se ajusta bien a las leyes de los gases ideales $PV = NK_B T$.

El hamiltoniano de un gas ideal es el siguiente:

$$H = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{3}{2} KT$$

Este resultado es muy importante ya que encontramos una relación entre la temperatura y la energía de las partículas.

1.2.2. El enfoque de Langevin del movimiento Browniano

En 1908 Paul Langevin desarrollo una ecuación diferencial estocástica para describir la evolución temporal de la posición de una partícula browniana.

El desarrollo de Langevin destaca respecto a otros enfoques por abordar de forma más intuitiva el estudio de muchos sistemas físicos, donde es de gran interés el estudiar las fluctuaciones, entre estos sistemas se encuentra el movimiento browniano.

La ecuación desarrollada por Langevin se basa en la segunda ley de Newton, tomando en cuenta la fuerza de fricción y la fuerza aleatoria (o estocástica) de las colisiones con las moléculas del fluido.

La ecuación de Langevin es la siguiente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} + \xi(t) \quad (1.2)$$

Donde γ el coeficiente de fricción. El termino ξ representa la fuerza ejercida sobre una partícula browniana producida por las colisiones de las moléculas del fluido. Las colisiones son aleatorias, lo cuál genera el desarrollo fluctuante de la posición de la partícula.

Si a la ecuación de Langevin la multiplicamos por x de ambos lados podemos reescribirla de otra forma

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma x \frac{dx}{dt} + \xi(t)x,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2x^2}{dt^2} - v^2 = -\frac{\gamma}{2m} \frac{dx^2}{dt} + \frac{x\xi(t)}{m},$$

Ahora, tomando el promedio en el ensamble se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\langle x^2 \rangle}{dt^2} = -\frac{\gamma}{2m} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} + \langle v^2 \rangle + \frac{\langle x\xi(t) \rangle}{m}, \quad (1.3)$$

$\xi(t)$ al ser de carácter estocástico y producir colisiones en todas direcciones cumple con $\langle \xi(t) \rangle = 0$, y gracias al teorema de equipartición que nos dicta que $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k_B T$, podemos afirmar que

$$\langle v^2 \rangle = \frac{K_B T}{m} \quad (1.4)$$

Lo cual nos permite reescribir la ecuación 1.3 como:

$$\frac{d^2\langle x^2 \rangle}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} + \frac{2K_B T}{m} \quad (1.5)$$

La primera integración de 1.5 nos da

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{2k_B T \gamma}{m^2} + ce^{\frac{t}{\tau_r}} \quad (1.6)$$

Donde c es una constante de integración y $\tau_r = m/\gamma$ es el tiempo de relajación.

Langevin estimó que $\tau_r \approx 10^{-8}s$, por lo que si $t \gg \tau_r$ la exponencial tiende a cero. Así

$$\langle x^2(t) \rangle = 2 \frac{k_B T}{\gamma} t = 2Dt$$

Y como $\gamma = 6\pi\eta a$, entonces $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$.

Vemos que hemos llegado al mismo resultado de Einstein, pero ahora con un enfoque Newtoniano.

El enfoque de Langevin aunado al principio de equipartición nos ayuda a concluir que

- $\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$
- $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a} = \frac{k_B T}{\gamma}$

1.3. Difusión anómala

La necesidad de definir la difusión anómala surge al ver que en la naturaleza hay muchos casos donde la difusión no sigue una relación lineal entre el desplazamiento cuadrático medio (DCM) y el tiempo, efecto que contrasta con la famosa descripción de la difusión del movimiento browniano hecha por Einstein con $\langle \Delta x^2 \rangle = 2dDt$. La difusión anómala ha sido observada en átomos ultra fríos[9], en la forma en la que depredadores acuáticos se difunden para buscar presas[10], la difusión del medio interestelar[11], entre muchos otros ejemplos.

El planteamiento de la difusión anómala permite definir de forma cuantitativa que tan cercano es el tipo de difusión a unos estándares ya definidos, además de también medir la velocidad de difusión del objeto de estudio. Para la difusión anómala la descripción se hace a través de un ajuste en leyes de potencias sobre el DCM medido experimentalmente, donde ahora el desplazamiento cuadrático medio viene descrito como

$$\langle \Delta r^2(t) \rangle = K_\alpha t^\alpha. \tag{1.7}$$

Siendo K_α como el coeficiente de difusión generalizado y τ como el tiempo transcurrido. Al ajustar una ley de potencias al DCM medido experimentalmente podemos caracterizar el tipo de difusión con el exponente de difusión α , describiendo los siguientes 4 comportamientos:

- $\alpha < 1$: Movimiento subdifusivo
- $\alpha = 1$: Movimiento difusivo o movimiento browniano.
- $1 < \alpha < 2$: Movimiento súper difusivo
- $\alpha = 2$: Movimiento balístico

Esta caracterización es una analogía con el movimiento browniano, t establece una referencia que permite una comparación con fenómenos de características universales, y ha sido corroborada en muy diversos sistemas.[12]

La difusión anómala es un tema de estudio activo donde incluso se siguen desarrollando herramientas matemáticas para reducir el error en la caracterización de movimiento, proponiendo nuevos algoritmos para identificar α . [13]

1.4. Robots como materia activa

Como ya se ha mencionado, la principal característica que deben de cumplir los entes activos que conforman la materia activa es que tengan la capacidad de auto propulsarse. Aunque para la comunidad científica los entes biológicos son los mas populares ya sea porque son muy abundantes y se encuentran en gran cantidad de formas, tamaños y con distintas naturalezas en sus procesos, existen otros agentes que cumplen perfectamente con los requisitos, por ejemplo **robots autopropulsados**.

Los robots son unos candidatos muy interesantes, podemos trabajar con ellos y controlar su comportamiento para estudiar o simular cómo otros tipos de sistemas se comportarían bajos condiciones similares.

La idea de robots como agentes activos tiene múltiples objetivos, desde desarrollar robots que se puedan controlar para producir comportamientos colectivos específicos [14], [15], robots capaces de atravesar terrenos difíciles en conjunto que se pueden programar con distintos objetivos de búsqueda [16], o robots que se inspiran en entes biológicos como pueden ser peces o insectos. Nosotros trabajamos con un conjunto de robots que imitan el comportamiento de insectos llamados Hexbugs.

Los Hexbugs que producen fenómenos muy interesantes. Se han estudiado sus propiedades dinámicas al estar confinados sobre una superficie parabólica rugosa [17], donde se proponen modelos teóricos para intentar describirlos. También se han usado como propuesta para un sólido activo unidimensional, haciendo un arreglo de hexbugs atrapados y enlazados [18].

Capítulo 2

Experimento

2.1. Diseño experimental

2.1.1. Robots Hexbugs

Nosotros trabajamos con un conjunto de robots autopropulsados, llamados Hexbugs (Figura 2.1).

Los Hexbugs son pequeños (con un tamaño específicamente de $4,5cm$ por $1,4cm$), tienen un motor interno en unas de sus puntas lo cual produce pequeños saltos, que en combinación con la forma de sus patas alargadas e inclinadas, hacen que el robot se mueva hacia adelante pero sin seguir una línea recta. Cada salto produce un ligero cambio en la dirección, ya sea izquierda o derecha, y al usarlos en conjunto, las colisiones entre ellos producen un comportamiento pseudo-aleatorio, y son capaces de presentar comportamientos colectivos interesantes dependiendo del confinamiento donde se encuentren.



Figura 2.1: Hexbug

Los Hexbugs son agentes dinámicos autopropulsados, que con interacciones de corto alcance y por efectos de confinamiento dan origen a fenómenos emergentes. A este tipo de sistemas se les denomina materia activa no viva. También se han desarrollado robots similares pero más primitivos y han sido usados para estudiar el surgimiento del comportamiento colectivo[19].

Estudiando la dinámica de un conjunto de Hexbugs, buscamos entender como agentes activos

similares, ya sean agentes vivos como lo pueden ser insectos, o no vivos, son capaces de difundirse en ambientes complejos y generar fenómenos emergentes resultado de la interacción entre los robots y el medio.

2.1.2. Celda de observación

Se diseñó una base circular y un conjunto de anillos concéntricos de fibropanel de densidad media o MDF (por sus siglas en inglés) los cuales son colocados sobre una mesa. Sobre ella se coloca también un trípode que sostiene una cámara para poder grabar el experimento, como se muestra en la Figura 2.2a. El objetivo fue estudiar dos tipos de confinamiento y que el montaje permitiera hacer variaciones en las escalas de estas condiciones genéricas del confinamiento. Las dos opciones que generamos para el confinamiento son una celda circular y un canal circular (Figura 2.2b, 2.2c), con un diámetro máximo de 69cm y un diámetro mínimo de 5cm . Cada anillo tiene un grosor de 0.5 cm , por lo que al añadir un anillo estamos aumentando el diámetro de los círculos que formamos en 1cm .

Deseamos estudiar, por separado, los efectos del confinamiento y de la concentración de robots en cada celda. Como el área disponible cambia para las distintas geometrías, en algunos casos no usamos el mismo número de robots, además que para el caso del canal circular nos fue de interés fijar una circunferencia exterior y variar el ancho del canal que se podía formar en su interior, aquí el mayor interés era producir un área comparable respecto a la celda circular y que en un número de pasos no tan grande se convertirá en un canal lo suficientemente estrecho como para ser considerado un canal cuasi-unidimensional.

Los valores para número de robots y los diámetros usados para cada configuración son:

1. Celda circular

- Diámetro $\rightarrow d = 8\text{cm}, 21\text{cm}, 45\text{cm}, 50\text{cm}, 69\text{cm}$
- Número de robots $\rightarrow n = 1, 8, 15, 23, 30$

2. Canal circular

- Diámetro exterior $\rightarrow d_e = 52\text{cm}$
- Diámetro interno $\rightarrow d_i = 5\text{cm}, 12\text{cm}, 24\text{cm}, 30\text{cm}, 40\text{cm}, 42\text{cm}, 44\text{cm}$
- Número de robots $\rightarrow n = 1, 3, 6, 9, 12, 15$

Cada combinación de los valores fue medido 3 veces y para conservar un nivel de propulsión comparable, se intercambiaban robots y se sustituía la pila cuando era pertinente.

2.2. Seguimiento de trayectorias

A cada robot se les colocó una lamina ligera de plastilina color blanco con un punto rojo en su centro para facilitar el seguimiento, debido a que los Hexbugs son de diferentes colores y era necesario homogeneizar para facilitar el seguimiento con el paquete de software Fiji.

Con los robots homogeneizados procedimos a grabar vídeos con las distintas combinaciones entre los diámetros disponibles y el número de robots para ambas geometrías del canal y la celda.

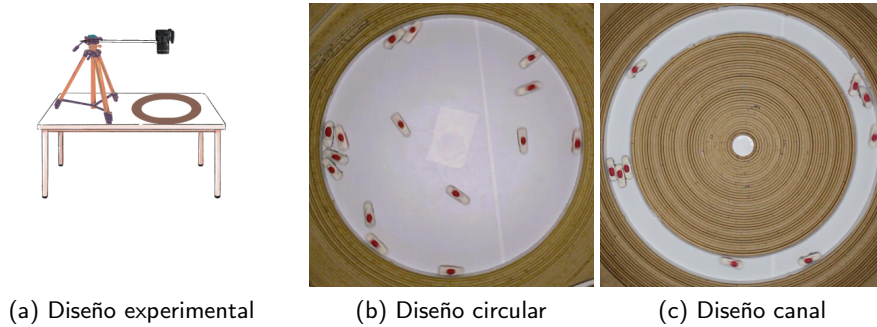


Figura 2.2: (a) Diseño experimental con dos configuraciones: (b) Celda y (c) Canal.

Este proceso se llevo a cabo con la cámara (PONER MODELO DE LA CÁMARA) que es sostenida por el trípode. La cámara se encuentra centrada respecto de la circunferencia de MDF, para que solo cambiando el zoom de la misma podamos tener plena visibilidad del experimento.

Los vídeos son grabados a $60fps$ y posteriormente son convertidos a una secuencia de imágenes para poder analizar cada frame. Con los vídeos convertidos a secuencia de imágenes, se procede con el seguimiento de las trayectorias, para esto se utilizó el software ImageJ con paquete de análisis digital de imágenes Fiji [20], el cual es una plataforma de código abierto para el análisis de imágenes.

Con Fiji somos capaces de manipular los miles de frames obtenidos de nuestros vídeos, ajustando varios parámetros con el fin de aislar los robots para después binarizar las partículas que deseamos seguir. Este proceso se muestra en la figura 2.3 para un frame.

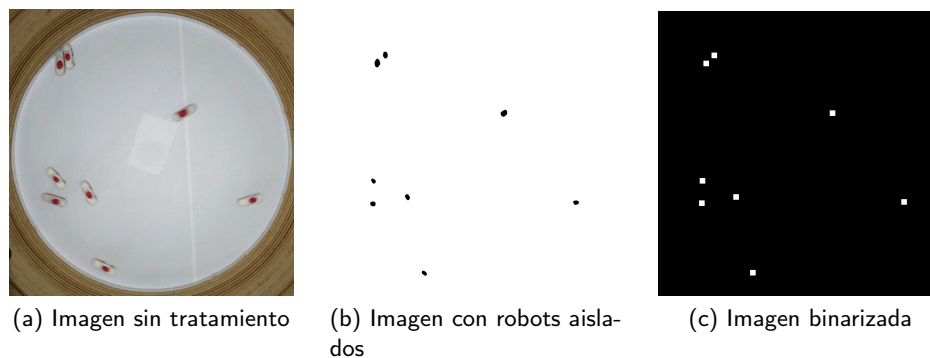
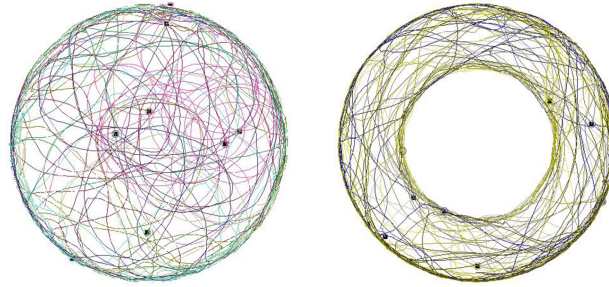


Figura 2.3: Procesamiento de imagen para binarizarla

Una vez que tenemos binarizados cada frame de nuestro vídeo, con Fiji ImageJ y su complemento MOSAIC, es posible extraer la posición de todos los robots para las diferentes combinaciones entre el tamaño del círculo o el canal y el número de robots[21], proceso que nos permite obtener las trayectorias como una visualización mostrada en la figura 2.4 y también en una lista con formato csv con la posición exacta de cada robot para cada frame, de donde se procederá a hacer el calculo del desplazamiento cuadrático medio. El proceso de binarización y del seguimiento se hace sobre cada frame de todos nuestros vídeos, con el fin de ver los cambios producidos por las diferentes combinaciones que podemos producir.



(a) Seguimiento de la celda circular

(b) Seguimiento del canal circular

Figura 2.4: Seguimiento de trayectorias en Fiji

2.3. Desplazamiento Cuadrático Medio

Una vez obtenidos los datos de las trayectorias procedemos a calcular el desplazamiento cuadrático medio (DCM) del cual se extraerá la información necesaria para hacer el análisis de la caracterización de movimiento.

El desplazamiento cuadrático medio (DCM) es la propiedad dinámica más común para medir la difusión de partículas con movimiento aleatorio en un tiempo dado. El DCM para una partícula esta definido de la siguiente manera:

$$DCM(t) = \langle |r(t) - r(t_0)|^2 \rangle \quad (2.1)$$

- t es el tiempo transcurrido.
- $r(t)$, es la posición de la partícula en el tiempo t para las coordenadas x y y
- $r(t_0)$, es la posición inicial de la partícula en el tiempo t_0 para las coordenadas x y y
- $\langle \rangle$ Representa el promedio sobre todas las partículas y trayectorias.

Como trabajamos con múltiples robots, necesitamos hacer el calculo para todos y después promediar sobre el total de robots, el promedio obtenido es con el que trabajaremos [22]. La ecuación 2.1 se verá afectada por el número de colisiones, la velocidad de los robots, el tiempo que se hagan las mediciones y el espacio disponible.

El cálculo del DCM se hizo a través de un programa en Fortran desarrollado por F. Donado, donde el algoritmo funciona de la siguiente manera:

1. Empezamos definiendo la posición inicial, donde sus coordenadas tendrán la forma (X_1, Y_1) . El resto de posiciones tienen la forma (X_n, Y_n) con $n = 2, 3, 4, \dots$
2. Calculamos el desplazamiento de la partícula restando a la segunda coordenada la primera coordenada $(X_2 - X_1), (Y_2 - Y_1)$.
3. Elevamos los desplazamientos al cuadrado $(X_2 - X_1)^2, (Y_2 - Y_1)^2$, o escrito de otra manera $(\Delta r(\Delta t))^2$.
4. Procedemos a calcular el promedio de estos desplazamientos correspondientes a un tiempo de retardo Δt , $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta r_i^2(\Delta t)$.
5. Repetimos el mismo procedimiento ahora para $2\Delta t$, que es lo que resulta cuando de la posición 1 saltamos a la posición 3, en otras palabras, es como medir cuando ya se dieron "2 pasos". De igual forma con "3 pasos" $3\Delta t$ es ir de la posición 1 a la posición 4.
6. El proceso se lleva a cabo hasta que se de un "paso" desde la posición 1 hasta la n-ésima posición.

Todo el proceso anterior nos permite graficar el DCM en diferentes intervalos de tiempo.

Ejemplo de este proceso es la figura 2.6 hecha por A. Escobar, que ha utilizado el mismo programa para el calculo del DCM [23]. En la figura 2.6(a) podemos observar una trayectoria de 6 pasos con cada salto con una diferencia de Δt . En la figura 2.6(b) el paso se da con $2\Delta t$,

y para las figuras 2.6(c), 2.6(d) los pasos son de $3\Delta t$ y $4\Delta t$ respectivamente. En la figura 2.6(e) podemos ver el desplazamiento cuadrático de cada paso, de donde para cada diferencia de tiempo se calcula el promedio. Por ultimo, en la figura 2.6(f) se obtiene una gráfica resultante que es el desplazamiento cuadrático medio, donde si la curva obtenida se ajusta a una línea recta se trata de un movimiento difusivo, y si se ajusta a una ley de potencias tiende a superdifusividad o a un movimiento balístico para el caso limite.

Siguiendo el proceso descrito anteriormente, se obtuvo la gráfica de la figura 2.5. También obtenemos la velocidad de los robots a través del DCM para su descripción dinámica.

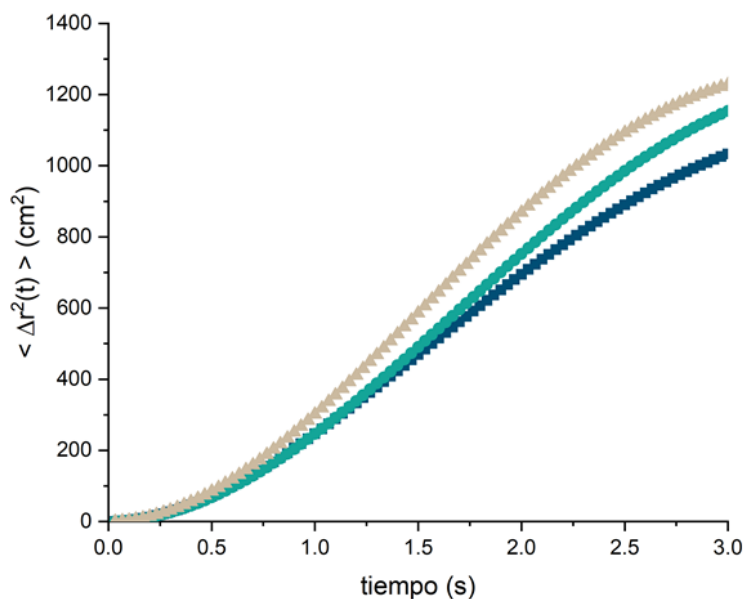


Figura 2.5: DCM obtenido de una de las mediciones

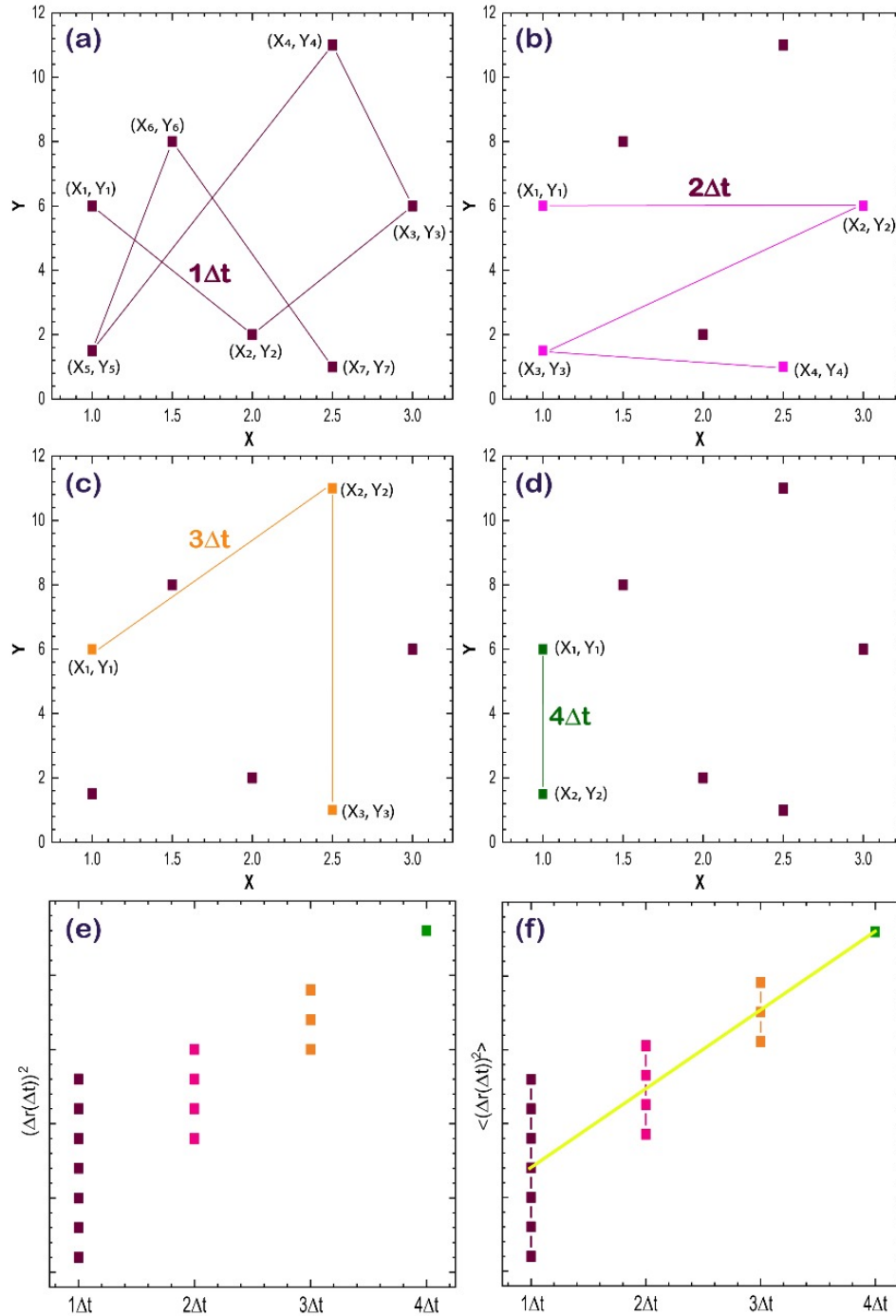


Figura 2.6: Figura tomada de referencia [23], con autorización de Ángeles Escobar: (a) Trayectoria aleatoria en dos dimensiones que consta de 7 posiciones. Las líneas continuas indican el desplazamiento correspondiente en pasos individuales Δt . (b) Desplazamiento para 2 pasos, (c) Desplazamiento para 3 pasos y (d) Desplazamiento para 4 pasos. (e) Desplazamientos elevados al cuadrado de cada uno de los pasos, se observa que al aumentar la amplitud del paso el número de puntos disminuye. (f) Al realizar un ajuste al promedio de cada tiempo se observa una línea recta que indica que se trata de un movimiento difusivo.

2.4. Caracterización de la dinámica colectiva del sistema de robots

Obviamente el sistema formado por los robots no es un sistema browniano, sin embargo, el esquema de análisis que proporciona la teoría del movimiento browniano, es una herramienta muy útil para estimar la influencia de la interacción entre los robots y la emergencia de situaciones de concentración de robots y área accesible al movimiento que generan situaciones dinámicamente equivalentes.

Partimos del hecho de que hay que hacer ajuste en leyes de potencias sobre el DCM debido a que nuestro sistema no presentara una difusión normal (browniana), esto obviamente se debe a la escala con la que trabajamos y además porque los robots no presentan un movimiento puramente aleatorio. El ajuste en leyes de potencias nos permite caracterizar la difusión de los robots en términos de las condiciones de confinamiento. Esto lo realizamos haciendo un ajuste a una ley de potencia y comparando con el caso difusivo, ajustándolo al DCM en dos dimensiones con ax^b .

$$4Dt^\alpha = ax^b \tag{2.2}$$

La finalidad de hacer el ajuste para cada medición radica en que queremos observar la transición en los valores del exponente de difusión α .

La cantidad central en este análisis es el coeficiente de difusión o difusividad D . El coeficiente se obtiene haciendo un ajuste lineal al DCM, y como trabajamos con un sistema bidimensional donde $DCM = 4Dt^\alpha$, si tomamos 1/4 de la pendiente extraemos el coeficiente de difusión. Los ajustes obtenidos para las gráficas del DCM se muestran en la figura 2.7, siendo un ajuste a una ley de potencia y un ajuste lineal respectivamente.

Los ajustes mostrados a continuación muestran las curvas del DCM para la configuración de canal a un diámetro de 30cm y con una concentración de 9 robots, con ajustes realizado a un tiempo de 2,5s.

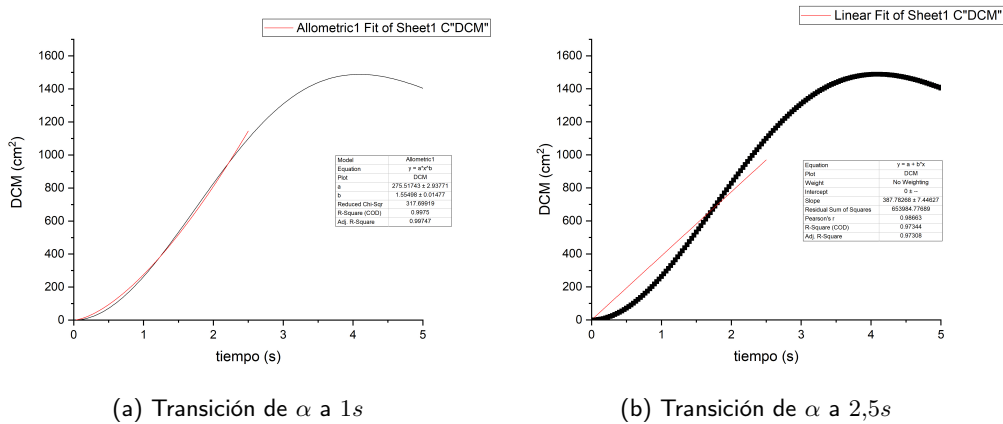


Figura 2.7: Ajuste a ley de potencias y ajuste lineal para el DCM para una celda con un diámetro de 30cm y 9 robots

Capítulo 3

Resultados y discusión

Para ambas geometrías del confinamiento, es decir, para la celda circular y para el canal circular se calculo el desplazamiento cuadrático medio (DCM), y se realizaron ajustes a leyes de potencias y ajustes lineales para cada configuración.

Se extrajo el coeficiente de difusión D , el exponente α en el tiempo y la velocidad promedio de los robots, para poder caracterizar el movimiento de los mismos. Los ajustes se hicieron en dos tiempos diferentes, $1s$ y $2,5s$ respectivamente, para poder ver como cambian los parámetros anteriormente mencionados en ese intervalo de tiempo.

Los respectivos ajustes nos permiten obtener información de la dinámica de los robots a dos tiempos diferentes y analizar, desde gráficas individuales de cada DCM a visualizaciones que presentan la evolución en el tiempo para el tipo de difusión y la relación del sistema con una temperatura efectiva del sistema.

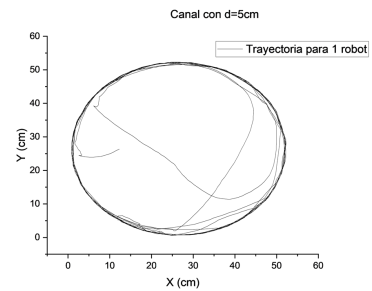


Figura 3.1: Trayectoria para 1 robot con $d = 5cm$ interno para el canal

3.1. Gráficas del DCM

3.1.1. 1 robot

Comenzaremos analizando el caso simple de la dinámica de un solo robot. Iniciamos la presentación de nuestros resultados con los que se refieren a la dinámica considerando que en el área analizada tenemos un solo robot.

Los efectos del confinamiento son muy evidentes para cuando el área es muy pequeña, mostrando un movimiento periódico que se ve manifestado no solo en la trayectoria de un robot como se muestra en la Figura 3.1, si no también en el DCM. La figura 3.3 muestra el comportamiento de un robot para diferentes diámetros para la configuración de canal.

En las gráficas se muestra como para el canal, al siempre tener el mismo radio externo, la dispersión máxima

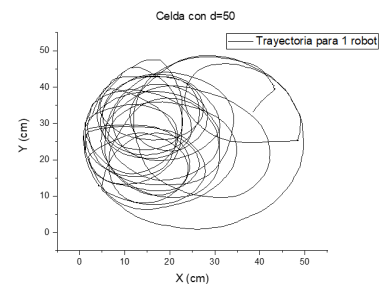
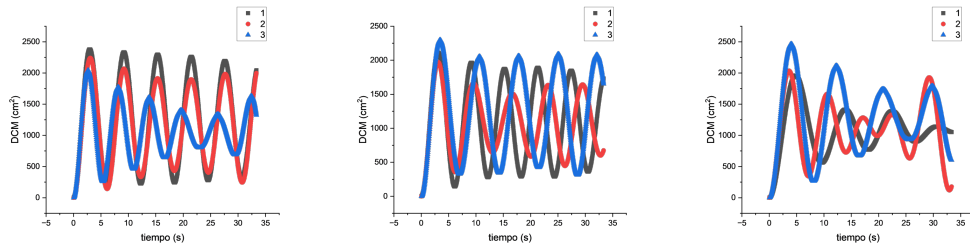


Figura 3.2: Trayectoria para 1 robot con $d = 5cm$ para celda

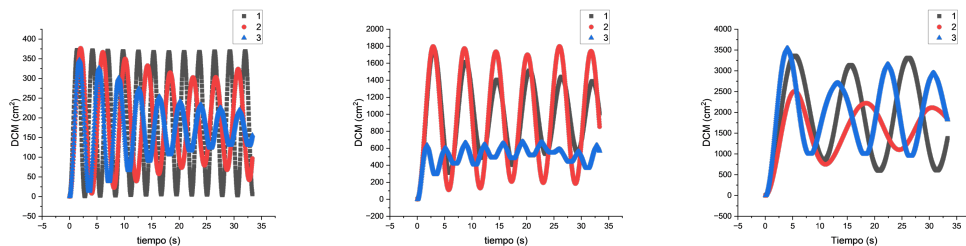
siempre se encuentra por debajo de 2500cm^2 , y la forma de canal circular del confinamiento produce que siempre que haya un solo robot se presente un comportamiento cíclico que describe un movimiento periódico sobre la frontera de la celda. Sin más robots que produzcan colisiones, los robots confinados no pueden dejar de seguir la circunferencia. Además, los diferentes valores en las amplitudes del DCM en el caso del canal son debidos a el movimiento característico de cada robot. Es conveniente enfatizar que esta situación la encontramos y corroboramos cambiando robots en cada experimento para asegurarse de que no se trataba de un fenómeno característico de un robot en particular.

Podemos observar un comportamiento similar para el caso de la celda circular. En la celda circular se puede observar como muchos robots, de igual forma, se ven influenciados por el confinamiento. Algunos robots pueden seguir trayectorias diferentes a la circunferencia, donde el caso más común es aquel en que el robot es capaz de girar formando trayectorias circulares menores al del confinamiento como se ve en la Figura 3.2. En la figura 3.4 se muestra como son más los robots que al chocar con la circunferencia tienden a seguirla, volviendo a manifestar el movimiento periódico. Para ambas geometrías el movimiento periódico es un efecto que claramente podemos asociar con el confinamiento para los casos limites con 1 robot, comportamiento que se va perdiendo a medida que aumentamos el número de robots.



(a) Canal con $d = 5\text{cm}$ interno. (b) Canal con $d = 12\text{cm}$ interno. (c) Canal con $d = 42\text{cm}$ interno.

Figura 3.3: DCM para diferentes diámetros para el canal con 1 solo robot.



(a) Celda con $d = 21\text{cm}$ (b) Celda con $d = 50\text{cm}$ (c) Celda con $d = 69\text{cm}$

Figura 3.4: DCM para diferentes diámetros para la celda circular con 1 solo robot.

Los valores menores del DCM son los característicos de las trayectorias circulares con menor amplitud que la que posibilitaría el confinamiento, de las cuales se hablo anteriormente y podemos

ver un ejemplo en la Figura 3.2.

Con la celda circular al ir cambiando el diámetro de nuestra circunferencia podemos apreciar como la amplitud del DCM va aumentando, como es de esperar, el periodo en el DCM es menor cuando el área es menor, y aumenta a medida que aumentamos el espacio disponible.

La caracterización del movimiento nos muestra el cambio en los valores del coeficiente de difusión D , el exponente de difusión α y la velocidad v .

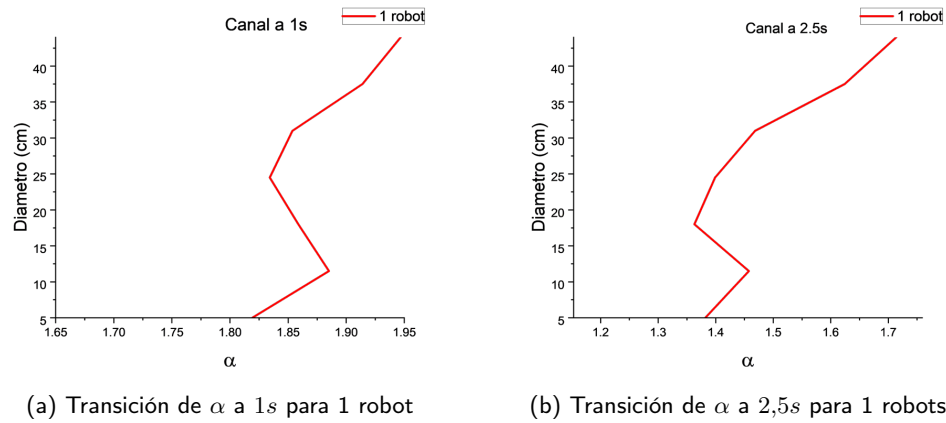


Figura 3.5: Cambio en el exponente α para los primeros segundos en el canal con 1 solo robot.

En la figura 3.5 podemos ver la transición en el exponente alfa para 1 segundo y 2.5 segundos, con un solo robot. Para el confinamiento en forma de canal, cuando mayor es el diámetro mayor es el confinamiento, de tal forma que podemos ver como para un canal muy estrecho el comportamiento muestra valores del exponente cercanos a $\alpha = 2$ para los tiempos de 1 segundo, y $\alpha = 1,7$ para 2.5 segundos. Estos valores son los valores limite que esperábamos encontrar, siendo que para un canal muy estrecho el robot se ve limitado a solo seguir la circunferencia, mostrando un movimiento cercano al balístico.

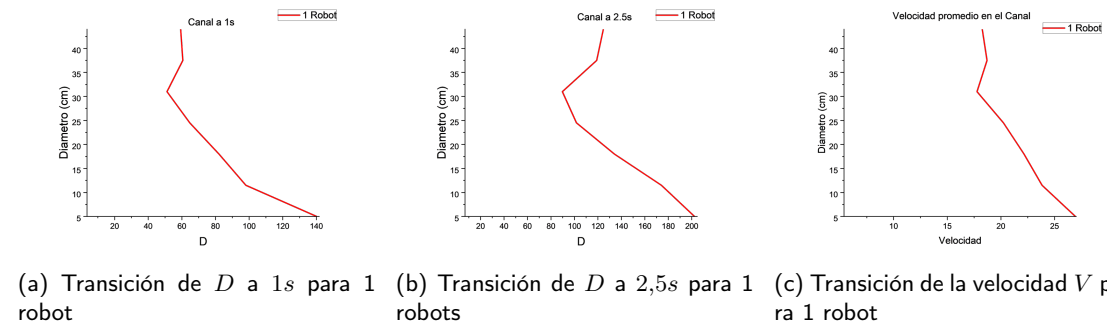


Figura 3.6: (a),(b) Cambio en el coeficiente D para los primeros segundos en el canal con 1 solo robot. (c) Velocidad promedio para 1 robot.

En la figura 3.6 inciso (a) y (b) se muestra el cambio en el coeficiente de difusión para un solo robot y en el inciso (c) la velocidad promedio de 1 robot. Recordemos que para la configuración de canal aumentar el radio es aumentar el confinamiento, de forma que a mayor diámetro, el

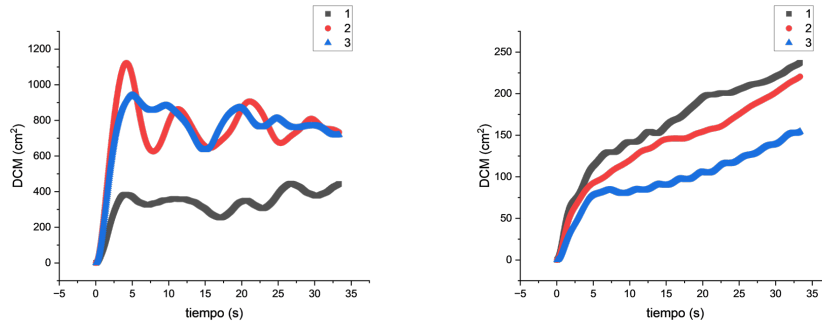
coeficiente de difusión deberá ser menor. Los valores al rededor de 30cm y 35cm son de interés debido a que muestra una menor difusión respecto a cuando el canal es más estrecho, que son valores por encima de 40cm . Este valle en la gráfica es debido a que el canal formado en esos valores produce muchas colisiones entre el robot y la frontera, y al aumentar el confinamiento y restringir más el movimiento producimos un movimiento continuo, lo cual se ve reflejado en un aumento en la velocidad y el coeficiente de difusión.

3.1.2. Dinámica cooperativa

Celda Circular

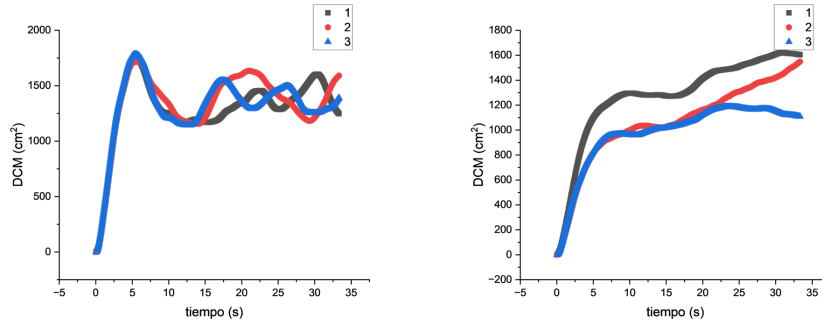
Para proceder sistemáticamente en el estudio de la dinámica cooperativa cuando en una celda se tienen confinados cierta cantidad de entes autopropulsados, es prudente tratar de separar los efectos de confinamiento y el de concentración. Para este fin procedemos primeramente a analizar la dinámica de una colección de robots en la celda circular, en la que los efectos de confinamiento no son tan intensos como los son el el caso de que se tengan los robots en un canal.

El confinamiento produce efectos sobre el DCM pero el efecto es mayor con la combinación del confinamiento y el aumento de número de robots. En la figura 3.7 podemos ver curvas que exhiben los cambios en el DCM al aumentar el número de robots para la celda circular.



(a) DCM para celda circular con diámetro $d = 45$, número de robots $n = 8$.

(b) DCM para celda circular con diámetro $d = 45$, número de robots $n = 30$.



(c) DCM para celda circular con diámetro $d = 69$, número de robots $n = 8$.

(d) DCM para celda circular con diámetro $d = 69$, número de robots $n = 30$.

Figura 3.7: DCM para la celda circular con diámetro $d = 45cm, 69cm$ y número de robots $n = 8, 30$.

Al cambiar los robots con los que trabajamos, cada grupo manifiesta los efectos del confinamiento en el DCM de forma más acelerada o desacelerada, alcanzando un plato o mostrando una pendiente menos pronunciada, que corresponde con la forma individual de moverse. En la figura 3.7a y 3.7c podemos notar que al manifestarse los efectos del confinamiento queda un remanente del movimiento periódico que termina frustrándose por la intervención de los múltiples robots y las colisiones que ellos provocan.

Por otro lado, al aumentar más la concentración de robots en la celda circular podemos notar que no queda rastro del movimiento periódico como se ve en la figura 3.7b y 3.7d. Al haber tantos robots, el área disponible se ve reducida debido al área ocupada por los robots.

Resultados y discusión
3.1 Gráficas del DCM

Para altas concentraciones en la celda circular es posible también observar un fenómeno emergente que es más fácil de producir respecto al canal circular, lo cual discutiremos en una sección más adelante. Ahora podemos observar el cambio que produce el aumento en la concentración en el exponente de difusión α y el coeficiente de difusión D para estos diámetros en la celda circular, obtenidos de sus respectivos ajustes a 1s y 2,5s:

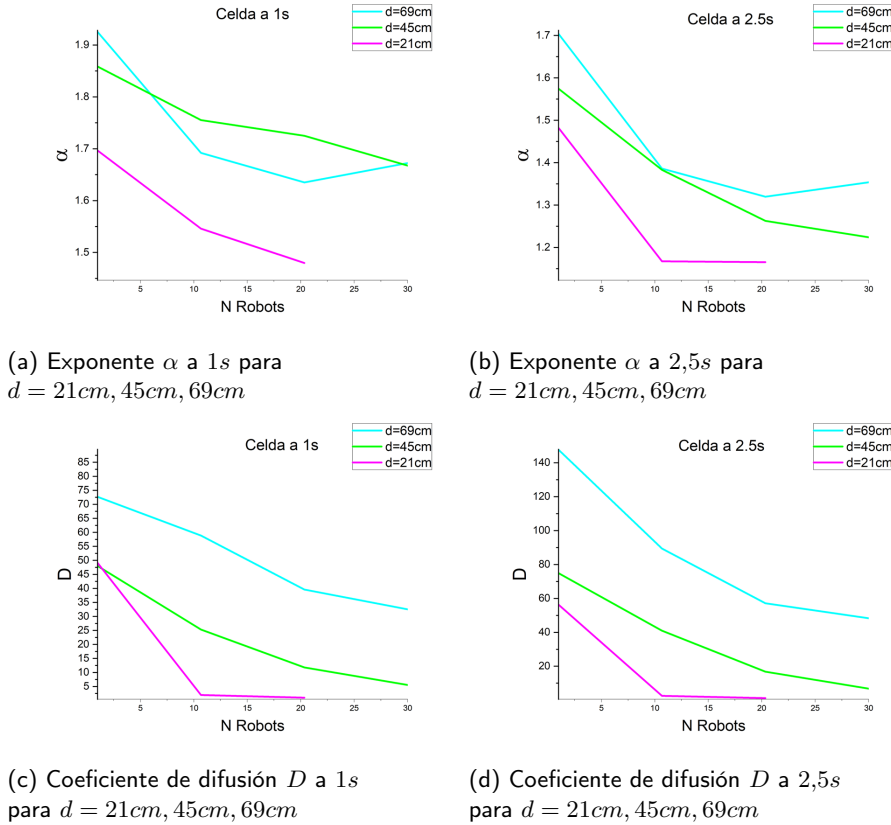


Figura 3.8: Exponente de difusión α y coeficiente de difusión D para 3 distintos diámetros como función de la concentración de robots para la celda circular.

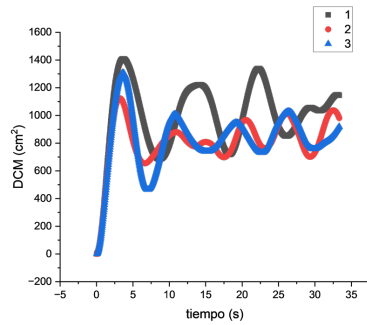
El aumentar la concentración produce una disminución en los valores tanto para α como para D , lo que implica que también baje la velocidad, donde dependiendo del área la disminución puede ser lineal. Esta tendencia es importante, ya que tanto para 1s como 2,5s el aumento en el número de robots se traduce es una disminución de la velocidad a la que se difunden nuestros robots, pero los acerca más a la caracterización del tipo de movimiento superdifusivo.

Para el menor confinamiento con $d = 21cm$ vemos que a partir de 8 robots el movimiento se ve reducido drásticamente, hecho que se ve reflejado en el coeficiente de difusión D , donde aunque lo parece, la difusión no es cero, ya que los robots se encuentran vibrando.

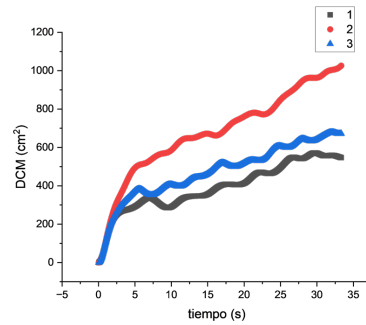
Canal Circular

Ahora podemos comparar la dinámica del conjunto de robots en la celda circular con la dinámica en un canal donde los efectos del confinamiento son mucho más intensos. La geometría del canal circular nos permite empezar con un canal muy amplio siendo muy similar a la celda circular para después producir un canal con el mínimo espacio posible para que los Hexbugs sean capaces de moverse, este canal es lo que podemos llamar como un canal cuasi-unidimensional.

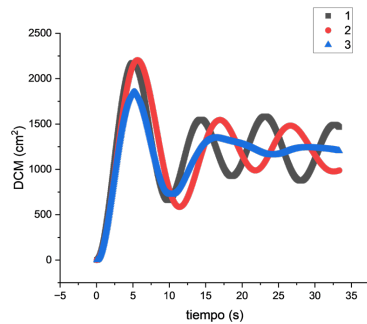
En la figura 3.9 podemos ver la evolución del DCM para dos diámetros diferentes del canal circular, apreciando que los efectos de frontera son más notables conforme el diámetro del círculo interno va aumentando, donde podemos ver cómo para una concentración baja de robots (figura 3.9a ,3.9c) ya es complicado poder difundirse sobre todo el canal construido, debido a que en un inicio los robots no se orientan en la misma dirección a propósito, ya que se intentaba buscar si los robots eran capaces de auto direccionarse como un efecto producido por el colectivo, resultado que no se apreció ya que, aunque si hay robots que se mueven más rápido respecto a la media, la fuerza de las colisiones en combinación con la geometría alargada de los robots no favoreció producir giros de 180° .



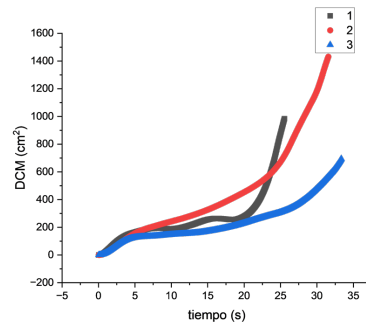
(a) DCM para canal circular con diámetro interno $d = 12cm$ y número de robots $n = 6$



(b) DCM para canal circular con diámetro interno $d = 12cm$ y número de robots $n = 15$



(c) DCM para canal circular con diámetro interno $d = 42cm$ y número de robots $n = 6$



(d) DCM para canal circular con diámetro interno $d = 42cm$ y número de robots $n = 15$

Figura 3.9: DCM para el canal circular con diámetro interno $d = 12c, 42cm$ y número de robots $n = 6, 15$.

Para las mayores concentraciones (figura 3.9b, 3.9d) los robots, aún yendo en la misma dirección,

Resultados y discusión
3.1 Gráficas del DCM

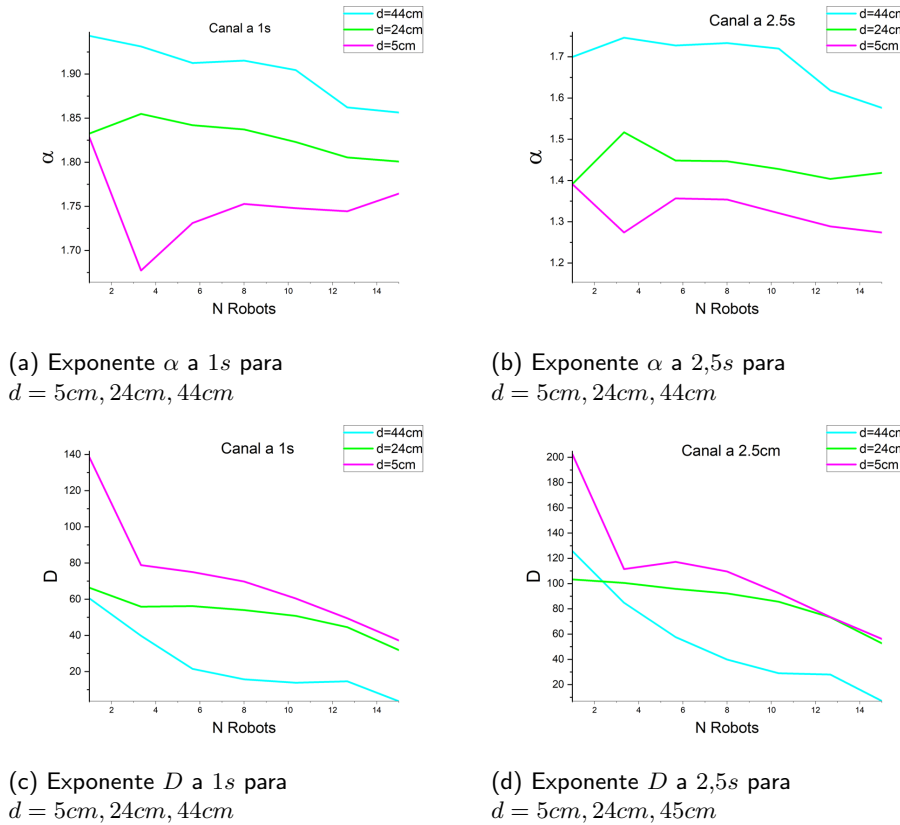


Figura 3.10: Exponente de difusión α y coeficiente de difusión D para 3 distintos diámetros como función de la concentración de robots para el canal circular.

se obstruían debido a las diferencias en las velocidades individuales de los mismos, produciendo una caída muy notoria en el difusión de los robots sobre el canal.

En específico para altas concentraciones, al hacer nuestros respectivos ajustes, para los tiempos de 1s y 2,5s, podemos notar como la capacidad de los robots para difundirse en esos intervalos de tiempo en la configuración de canal circular disminuye mucho respecto a lo que ocurre con menores concentraciones.

En la figura 3.10 se muestra como cambian nuestros parámetros α y D para 3 diferentes diámetros, siendo estos el valor mínimo, el valor medio y el máximo de los diámetros disponibles respecto al número de robots.

Para la configuración de canal podemos ver cómo al aumentar el confinamiento, el exponente de difusión α presenta valores más altos y no decae tanto respecto a la celda. De hecho, para un diámetro de 5cm y 1s podemos notar como el exponente α aumenta aún cuando aumentamos el número de robots, comportamiento que no era esperado, ya que el círculo interno es muy pequeño como para que el canal formase dirección a los robots y manifieste un aumento o en todo caso que se mantenga el valor de α .

Siguiendo con las observaciones para $d = 5cm$ es interesante ver que aunque es ligeramente similar aún a la configuración de celda, con un robot el exponente α tiene un valor muy elevado al rededor de 1,83 tendiendo a un movimiento balístico para 1s, y tan solo con añadir 2 robots más el exponente decae abruptamente producto de las colisiones con la frontera y los mismos robots.

Estas deben ser las causas, ya que no hay otros factores que las produzcan ni tampoco se uso siempre la misma triada de robots como para que la medición este sesgada.

Al seguir aumentando el número de robots para $d = 5$ vemos surgir la tendencia a aumentar el exponente α , fenómeno que no es común, ya que aunque haya aumentos en α a números específicos de robots los cuales en combinación con el confinamiento tenga sentido que sea así, un aumento constante a medida que aumentan los robots no lo volvemos a ver a ningún diámetro.

Pasados $2,5s$ el coeficiente para $d = 5cm$ tiene una caída más controlada llegando hasta valores al rededor $1,25$, donde la caracterización nos dice que esta cercano a un movimiento difusivo (browniano), pero formalmente se le llamaría superdifusivo. El insistente enfoque con el diámetro $d = 5$ es debido a que en términos de área es comparable con el diámetro señalado en las figuras 3.8a y 3.8b para la configuración de celda, pero los valores que adopta α difieren mucho entre el canal y la celda específicamente para $1s$ al mostrar un aumento en el exponente. Esto quiere decir que un obstáculo que se podría considerar pequeño tiene un impacto visible en la forma en que manifiesta el movimiento de los robots.

Por otro lado, la velocidad de difusión solo cae abruptamente para el menor de los diámetros cuando pasamos de 1 a 3 robots. La disminución después de 3 robots es más suave.

Los diámetros $d = 24cm, 44cm$ también muestran efectos interesantes. La configuración de canal no muestra una disminución tan grande respecto al exponente de difusión α a diferencia de la celda. Empecemos analizando $d = 24cm$.

Para $d = 24cm$ aumentar el número de robots no produce una disminución tan grande, relativamente, en α , ya que para la celda la disminución a 1 segundo era de poco más de 2 décimas y para 2.5 segundos de poco más de 3 décimas. El canal a 1 segundo muestra una disminución de media décima entre el 1 solo robot y 15 robots, mientras que para 2.5 segundo ni siquiera hay una disminución y los valores de α se encuentran al rededor de 1.4 desde 1 a 15 robots.

Inclusive la velocidad de difusión no disminuye de forma tan notable como si lo hacia la celda al aumentar los robots. El coeficiente de difusión disminuye casi los mismos valores a 1 segundo que a 2.5 segundos

Lo más interesante para $d = 44$ es ver que α no disminuye tampoco de forma abrupta al aumentar el número de robots, donde para 1 segundo disminuye 1 décima, pero para 2.5 segundos el exponente se mantiene al rededor de 1.7 desde 1 hasta 15 robots. La velocidad de difusión es más marcada en este escenario ya que cada robot resta notablemente el área disponible.

Podemos notar como el canal si produce una influencia notable en la forma en que se manifiesta el movimiento de los robots, ya que se desplazarán sobre la superficie del canal de forma direccionada, produciendo que el exponente α para configuraciones claves donde el ancho del canal y un intervalo de número de robots estarán en sinergia produciendo un mismo los mismos valores, o muy cercanos. El coeficiente de difusión baja a medida que aumentamos el número de robots, manteniéndose constante por intervalos, efecto que se puede ver en 3.10c y 3.10d entre 9 y 12 robots.

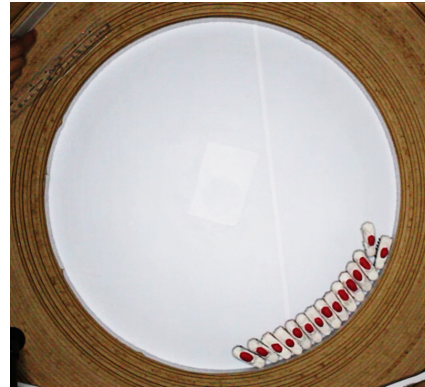
3.2. Fenómenos emergentes

La geometría de los robots y el confinamiento producen fenómenos colectivos interesantes, donde uno de estos es muy persistente en la celda circular, y que solo es necesario aumentar el número de robots para que a cualquier tamaño del confinamiento se manifieste. Los robots que empiezan a seguir la trayectoria circular del confinamiento tienden a chocar con otros robots que también siguen la circunferencia pero que van en sentido opuesto empezando a formar un aglomerado de robots que cancelan su movimiento al rededor de la circunferencia. Solo dos robots no son suficientes para empezar a formar el aglomerado, pero para los confinamientos con menor tamaño, 5 robots seguramente producirán este fenómeno emergente.

En la imagen 3.11 vemos la aglomeración de los robots para distintos tamaños y número de robots producidos en la celda circular.



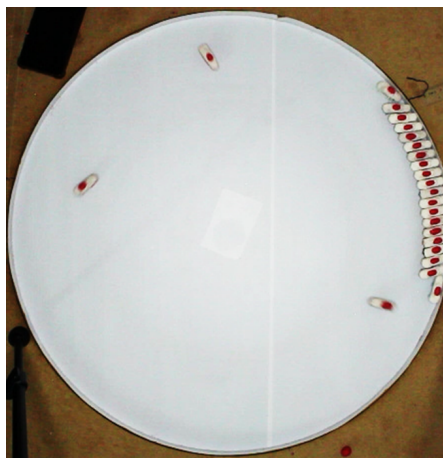
(a) Aglomeración a $d = 21$ con $n = 8$ robots



(b) Aglomeración a $d = 45$ con $n = 15$ robots



(c) Aglomeración a $d = 69$ con $n = 15$ robots



(d) Aglomeración a $d = 69$ con $n = 23$ robots

Figura 3.11: Aglomeración emergente producida por dinámica cooperativa a diferentes diámetros y concentraciones.

Cuando trabajamos con el confinamiento de canal, si el ancho del mismo es grande, el comportamiento colectivo se manifiesta, ya que el confinamiento es aún muy similar al de la celda circular, implicando que su comportamiento sea similar, como se ve en la figura 3.12.



Figura 3.12: Aglomeración en canal con $d = 16$ y $n = 15$ robots

A medida que aumentamos el radio interno, las colisiones de los robots entre ellos mismos y con la frontera ocasiona la formación de un solo aglomerado no ocurra, pero si se forman dos o más aglomerados, como se ven en la figura 3.13a, para después de unos segundos se desintegre debido a las colisiones recibidas en la parte trasera de los robots como se ve en la figura 3.13b, colisiones que son poco frecuentes en la celda circular.



(a) Aglomeración en canal con $d = 30$ y $n = 15$ robots.



(b) Frustración de la aglomeración en canal con $d = 30$ y $n = 15$ robots después de unos segundos.

Figura 3.13: Frustración de la aglomeración emergente.

3.3. Caracterización del movimiento

Todos los datos extraídos de las combinaciones entre el diámetro y el número de robots nos permiten hacer un análisis de regiones dinámicamente equivalentes, mediante gráficas de contorno de diferentes colores que reflejan el grado de ordenamiento o de aglomeración del conjunto de robots.

Los gráficos de contorno nos permiten visualizar las condiciones donde se producen cambios en α , D , la velocidad v y adicionalmente nos permite definir una temperatura efectiva para la celda circular y el canal circular. La temperatura efectiva la definimos haciendo uso del teorema de equipartición.

Como los gráficos de contornos resaltan la distribución espacial de los datos, nos permiten identificar patrones, áreas de alta o baja concentración y tendencias en α , D , la velocidad v y la temperatura efectiva respecto a el número de robots y el diámetro de ambas geometrías.

3.3.1. Celda circular.

Las siguientes representaciones gráficas describen el cambio en el exponente de difusión α , mostrando su tendencia para acercarse a los regímenes difusivos o balísticos para intervalos de tiempo de un máximo de 2.5 segundos.

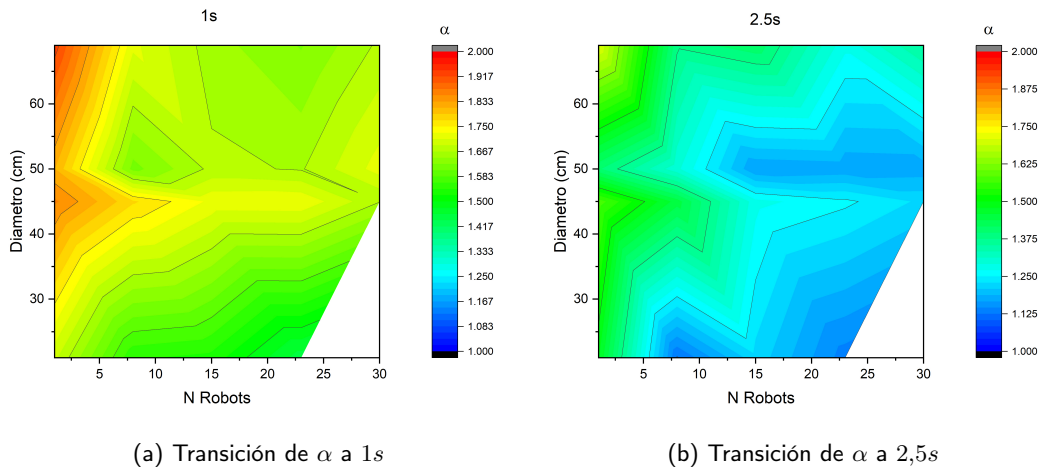


Figura 3.14: Cambio en el exponente α para los primeros segundos de la celda circular.

Los valores más altos de α corresponden al primer segundo, cuando el número de robots es pequeño y hay mucho espacio disponible. En general, el comportamiento de los robots en el primer segundo es más cercano a un régimen balístico, efecto que se analizó en apartado de los resultados de un solo robot, pero en resumen, al no haber suficientes colisiones y quedarse atrapados en la circunferencia los robots presentan un movimiento muy cercano al régimen balístico, lo cual es un efecto esperado.

En 1 segundo, al aumentar el número de robots podemos notar como α desciende de 1,9 hasta al rededor de 1,5s. Regiones como la que se encuentran alrededor de $d = 50cm$ y 8 robots son muy interesantes, ya que la combinación entre el espacio disponible, el número de robots y las colisiones que producen los espacio y número de robots producen valores que zonas con condiciones diferentes manifiesten el mismo valor de α . Es decir regiones dinámicamente equivalentes en el sentido de su difusividad.

Para cuando han transcurrido 2,5s la transición en el régimen de movimiento ha cambiado aproximándose a un movimiento difusivo. Para un tiempo de 2,5s podemos notar que el número de colisiones con la frontera y con ellos mismos produce una disminución muy notoria en el exponente α .

El impacto en el coeficiente de difusión producido por la influencia del diámetro y el número de robots se ve a continuación en los siguientes gráficos:

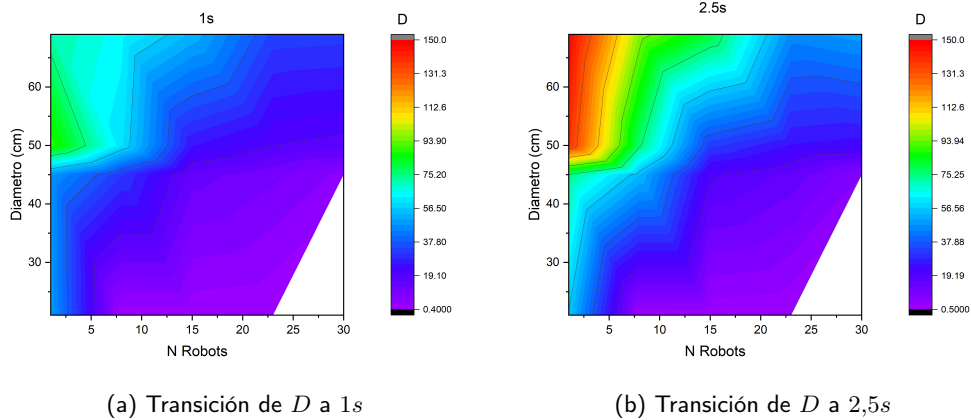


Figura 3.15: Cambio en el coeficiente de difusión para los primeros segundos de la celda circular.

Hay un amplio rango de valores para el coeficiente de difusión D , pero la mayor parte de ambos gráficos muestra que la velocidad de difusión disminuye drásticamente al aumentar el número de robots, resultado que es completamente congruente, puesto que a medida que hay más robots en la superficie circular, hay menos espacio accesible para cada robot.

Para nuestro conjunto de robots en la celda, si queremos aumentar la difusión es necesario trabajar con un número pequeño de robots y aumentar el espacio disponible.

De igual forma, es lógico afirmar que mientras más tiempo pase, D será mayor para cualquier punto de la gráfica, afirmación que se ve corroborada al comparar la gráfica a 2,5s con la de 1s.

Las anteriores afirmaciones sobre el coeficiente de difusión son consistentes con lo que se observa cuando analizamos el comportamiento de la velocidad promedio de los robots respecto a el número de robots y el diámetro del círculo.

Podemos observar en la Figura 3.16 que la velocidad máxima coincide con los mismos parámetros que producen los valores más altos para D , los cuales coinciden también con los valores más altos de α que producen un comportamiento cercano al balístico. Vemos cómo hay zonas equivalentes y que podemos mantener una velocidad media al rededor de $13m/s$ para múltiples robots manipulando el diámetro.

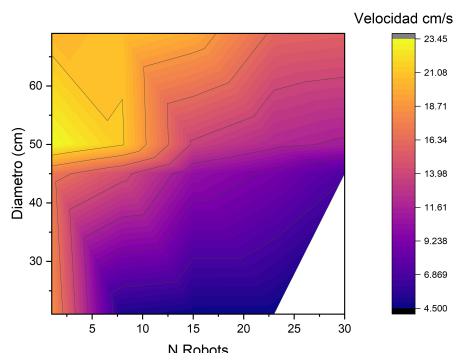


Figura 3.16: Velocidad media del ensamble como función del número de robots y el diámetro para la celda circular.

3.3.2. Canal circular

El canal circular presento los siguientes valores para el exponente α :

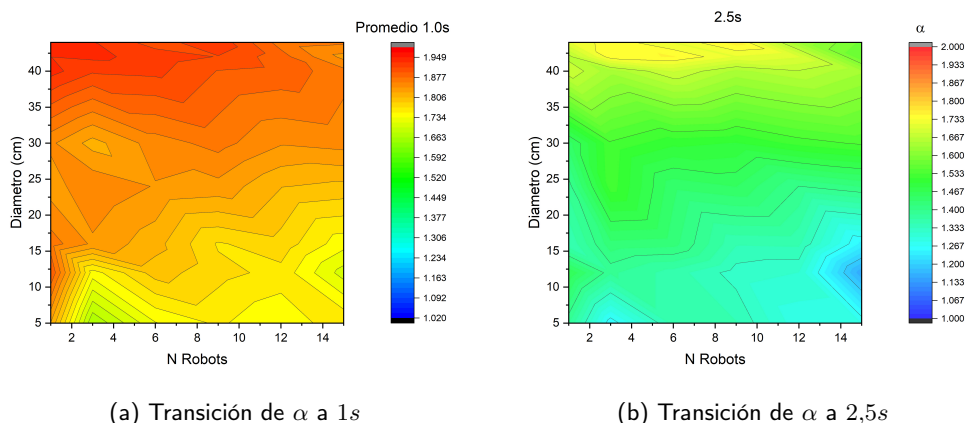


Figura 3.17: Cambio en el exponente α para los primeros segundos del canal circular.

Para el caso del canal notamos que ahora aumentar el número de robots no genera un cambio tan notable en el exponente α , donde ahora el diámetro es el que tiene mayor impacto en la disminución de α . La anterior afirmación se ve respaldada al observar la figura 3.18.

Hacer que los robots estén cada vez más confinados direcciona su movimiento, produciendo un aumento en el exponente α , proceso que ocurre para ambos tiempos. Direccinando los robots se logra producir un movimiento lo más cercano al balístico.

Por otro lado, la dinámica de los robots en el canal presento valores ligeramente más elevados en el exponente α con relación a lo ocurrido en la celda, donde el valor mínimo para el canal es de $\alpha = 1,15$, producida por la combinación de diámetro interno de 12cm y número de robots $n = 15$, que comparado con la celda se encuentra muy cerca y con valores para ambas variables muy distintas. La celda presento su valor mínimo de $\alpha = 1,12$ con la combinación entre

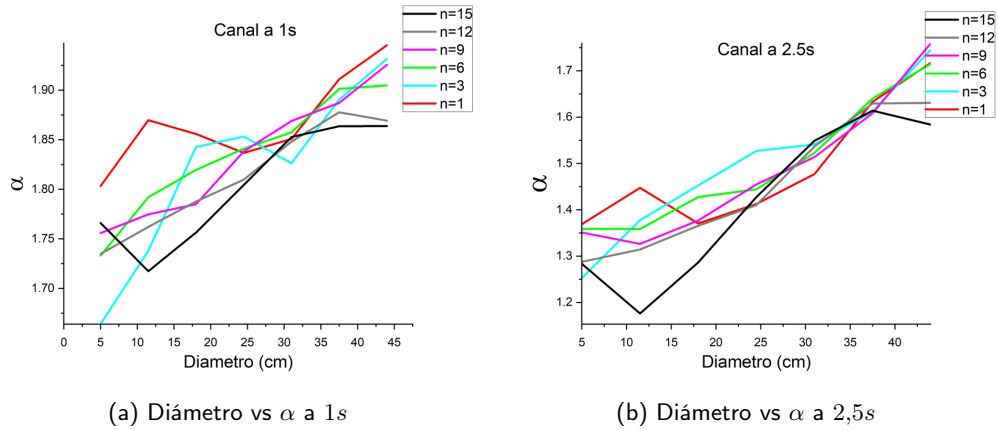


Figura 3.18: Cambio en el exponente α para los primeros segundos del canal circular.

el diámetro $d = 21\text{cm}$ y número de robots $n = 8$.

Los resultados generales del canal para el coeficiente de difusión D muestran la clara tendencia de disminuir de forma constante al disminuir el confinamiento como se muestra a continuación en la figura 3.19.

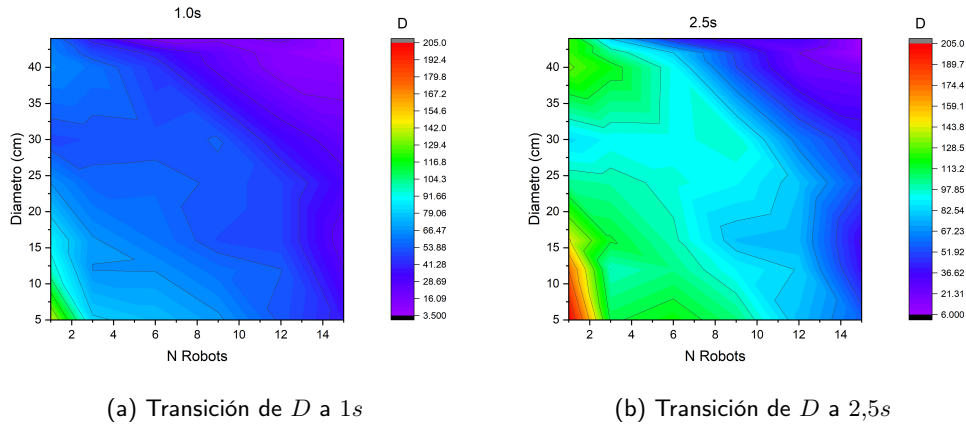


Figura 3.19: Cambio en el coeficiente D para los primeros segundos del canal circular.

En coeficiente de difusión D transcurrido 1 segundo, se comporta de la forma esperada, mostrando una disminución uniforme. Con 2.5 segundos podemos ver como la difusividad disminuye de diferente forma, mostrando una prevalencia de condiciones dinámicamente equivalentes para varias regiones del gráfico por estar entre los valores (82, 97), para después mostrar la tendencia a disminuir como ocurrió en el intervalo a 1 segundo.

En el canal, como mencionamos anteriormente, se frustra el fenómeno emergente de aglomeración. Como puede verse es necesario alcanzar concentraciones más altas para esa área, para poder ver la aglomeración. Dicho fenómeno disminuye la difusividad de los robots en el medio, pero al ocurrir menos en el canal respecto a la celda la disminución en D es menos pronunciada. Claro que aumentar más robots disminuye su velocidad porque hay más colisiones, pero la ausencia de la

aglomeración hace que distintas combinaciones produzcan los mismos resultados en distintas zonas.

Por ultimo, la velocidad media de los robots en el canal es representada en la figura 3.20. Como se puede observar a simple vista, la velocidad y el coeficiente de difusión D se comportan

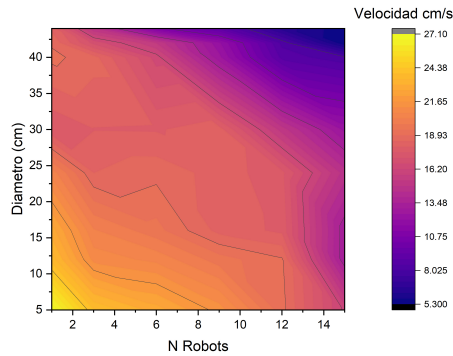


Figura 3.20: Velocidad del ensamble como función del número de robots y el diámetro.

de forma muy similar.

Las mayores velocidades presentadas en el canal son aquellas donde solo hay 1 robot y el diámetro interno es mínimo, configuración en la que los robots se mueven casi libremente sobre una circunferencia y sus colisiones son mínimas respecto al resto de combinaciones. Aumentando la concentración y reduciendo el ancho del canal la velocidad disminuye de forma controlada, para el canal más angosto el movimiento es más restringido debido a que las altas concentraciones de robots producen que se atasquen rápidamente.

3.4. Temperatura efectiva

En el capítulo 1 recordamos que, de acuerdo al teorema de equipartición de energía cada grado de libertad que aparece en forma cuadrática en el hamiltoniano del sistema contribuye con $\frac{1}{2}KT$ a la energía del sistema. Este resultado es válido para sistemas donde el hamiltoniano tiene la forma de

$$H = \sum_{i=0}^{3N} (A_i P_i^2 + B_i Q_i^2)$$

Es importante aclarar que aunque nuestro sistema no cumple con las mismas características de un sistema dinámico hamiltoniano, el formalismo utilizado es muy útil para poder discutir en el marco de la teoría del movimiento browniano de nuestro experimento y empezar a hacer una aproximación a cantidades que no podemos deducir por la dificultad práctica de medir todos los estados de nuestros robots, como pueden ser el desgaste individual que tiene cada robot en la pila, la fricción que también será ligeramente diferente para cada robot por las pequeñas diferencias que existen en sus patas y que si logran manifestar tendencias en el movimiento, o la fricción que se transforma en calor.

Por tal motivo haremos uso de el resultado deducido para la teoría cinética de los gases en 2 dimensiones.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{2}{2}KT = KT \quad (3.1)$$

K no puede ser la constante de Boltzmann, ya que no estamos describiendo la temperatura real del sistema. K es una constante de proporcionalidad para poder visualizar de mejor manera las diferencias producidas en las distintas regiones de ambas configuraciones. En materia granular por convención se usa $K = 1$. Nuestro sistema cumple con varias características de materia granular, así que el valor que usaremos para la constante K será 1.

Como conocemos la relación de la velocidad con el DCM

$$v^2 = \frac{4Dt^\alpha}{t^2} = 4Dt^{\alpha-2} \quad (3.2)$$

podemos escribir la ecuaciones 3.1 de la siguiente manera:

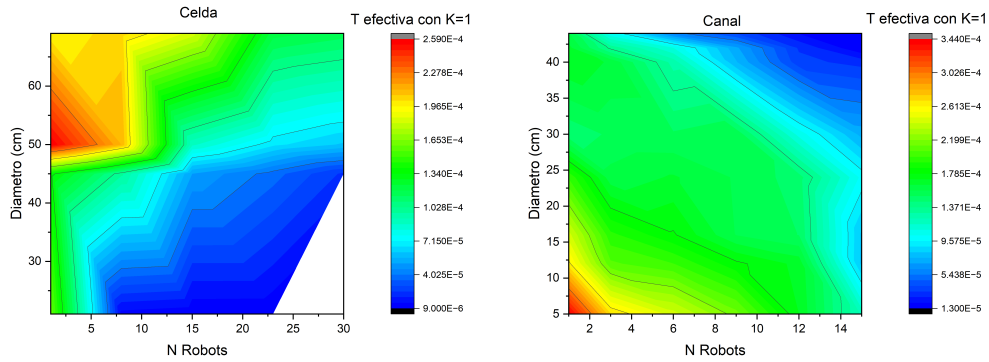
$$v^2 = \frac{2KT}{m} = \frac{2T}{m} \quad (3.3)$$

Con esta relación somos capaces ya de obtener la temperatura efectiva con los datos que poseemos. En la figura 3.21 podemos ver la temperatura efectiva en la celda circular y en el canal como función del diámetro y el número de robots.

Pero también podemos escribir la temperatura efectiva en términos de otras variables que son igual de interesantes, D y α . Introduciendo la relación de 3.2 en 3.3 podemos escribir la temperatura efectiva de la siguiente manera.

$$T = \frac{4mDt^{\alpha-2}}{2K} = 2mDt^{\alpha-2} \quad (3.4)$$

Nuestra temperatura efectiva nos muestra que es mayor cuando es mayor la movilidad de los robots,



(a) Temperatura efectiva para la celda circular

(b) Temperatura efectiva para el canal

Figura 3.21: Temperaturas efectivas para ambos diseños.

siendo las zonas con más temperatura aquellas con donde se manifiestan la máxima difusividad y velocidad. Zonas con bajas temperaturas son aquellas donde el movimiento ya se encuentra muy restringido, esto en la celda se produce para cuando el círculo es demasiado pequeño y hay una gran concentración de robots. Con el canal de igual forma la zona con menor temperatura es la que restringe más el movimiento, ya que vemos que la temperatura decrece a partir de 6 robots para el canal más angosto, ya que para $n < 6$ la temperatura sigue siendo relativamente alta, afirmación que se corrobora al notar que desde 6 robots, en el menor de los canales hay una gran seguridad en que se atascarán los robots.

3.5. Conclusiones

Entre las conclusiones generales que tenemos de los resultados aquí expuestos podemos mencionar lo siguiente:

Para las celdas con ambos tipos de confinamiento encontramos condiciones dinámicamente equivalentes cuando las cuantificamos por medio de las herramientas proporcionadas por la teoría del movimiento browniano. Es decir, la equivalencia se refleja en los valores de el exponente α que describe la similitud de el desplazamiento cuadrático medio con un movimiento puramente difusivo, el valor mismo del coeficiente de difusión D , la velocidad media v de los robots y su temperatura efectiva T .

Observamos que en la celda circular para una concentración pequeña de robots, cuando a transcurrido 1 segundo la dinámica tiende a ser característica de un movimiento balístico con exponentes α cercanos a 2. A medida que aumentamos la concentración de robots en la celda, el exponente α disminuye. Para un tiempo de 2,5 segundos la dinámica tiende a un movimiento con características brownianas, es decir, con exponentes α cercanos a 1

Para la celda con el confinamiento en forma de canal circular podemos generar una dinámica balística cuando el canal es muy estrecho de tal forma que podemos considerarlo cuasi-1D. Dado que esto limita mucho la movilidad y produce valores de α muy cercanos a 2. Aumentar la concentración en este caso no tiene un efecto importante en la disminución del exponente α como si lo tiene el aumentar el ancho del canal, haciendo que las condiciones se asemejen a las que se encuentran en la celda circular.

Así entonces, la equivalencia en las dinámicas es gobernada por el ancho del canal más que por la concentración, es decir, para los canales más estrechos, bajas o altas concentraciones tendrán dinámicas de movimiento similares y esto es cierto para tiempos de 1 y 2,5 segundos. A medida que el canal se hace más ancho la dinámica en el canal se asemeja más al de la celda circular, es decir, un incremento en la concentración de robots produce una disminución en el exponente α .

El coeficiente de difusión D y la velocidad media reflejan muy bien las equivalencias dinámicas en la celda circular. Podemos obtener una misma difusividad con distintas concentraciones de robots variando el diámetro, tanto para 1 como 2,5 segundos, además de tener zonas con valores semejantes para distintas concentraciones de robots y diámetro de la celda. Se observa lo mismo para la velocidad media, ya que se tienen los mismos valores para distintas concentraciones de robots variando el diámetro. Observamos también que se presentan dinámicas equivalentes para mismas concentraciones y diámetro.

Respecto a la temperatura efectiva en la celda circular, como era de esperarse, se tiene una mayor, o menor, temperatura efectiva, directamente en relación a una mayor o menor movilidad de los robots. Sin embargo, es interesante ver cómo el concepto de temperaturas efectiva, es físicamente muy significativo para describir condiciones de concentración y espacio accesible, que llevan a dinámicas difusivas equivalentes, al igual que la difusividad y la velocidad media.

En el la celda con confinamiento en forma de canal circular, también somos capaces de visualizar zonas amplias que comparten la misma difusividad y velocidad media, siendo entonces condiciones de confinamiento y concentración dinámicamente equivalentes. Esto ocurre en grandes intervalos de combinación de valores de número de robots y diámetro de la celda.

La temperatura efectiva en el canal muestra, al igual que la celda circular, que a mayor movilidad, la temperatura efectiva es mayor, y a menor movilidad la temperatura es menor. En el caso del canal circular observamos también que para grandes intervalos de valores de número

de robots y diámetro ocurre que se generan valores iguales de temperatura efectiva, alrededor de $1,785E^{-4}$.

Al aumentar la concentración, en ambas geometrías de nuestras celdas, logramos observar una dinámica cooperativa, producida por las colisiones entre los robots que terminan formando un aglomerado.

En la celda circular este fenómeno es muy consistente, y se manifiesta a medida que aumentamos el número de robots, siendo la formación de aglomerados reproducible y estable.

Por otro lado, cuando el canal es muy ancho y se asemeja a la celda circular, el fenómeno producido por una dinámica cooperativa de los robots es similar al que ocurre en la celda circular. Pero, a medida que disminuimos el ancho del canal la aglomeración se ve afectada, ya que cuando se forma un aglomerado de robots, debido al aumento en el número de colisiones adicionales propiciadas por el confinamiento, desintegran los aglomerados en agregados más pequeños. Este fenómeno se repite, no permitiendo que se forme un gran aglomerado. Lo que sí ocurre en la celda circular.

El confinamiento de la celda circular hace posible que las colisiones entre los Hexbugs generen una dinámica cooperativa muy reproducible, que lleva a la formación de un solo un aglomerado, en el cuál todos los Hexbugs adquieren un orden orientacional muy claro.

En contraste, en el canal circular también podemos ver una dinámica cooperativa cuando el ancho del canal es grande, pero al disminuir el ancho, el direccionamiento del movimiento, frustra la generación de aglomerados, esto es más notorio para concentraciones no tan grandes como para producir un atascamiento.

Es importante hacer notar que a diferencia del movimiento browniano, en este sistema formado por un conglomerado de entes autopropulsados, los Hexbugs, el hecho de que la dinámica sea similar a la dinámica difusiva, en el sentido del movimiento browniano, es un efecto generado por la concentración y por el confinamiento, la conjugación de estos parámetros lleva a un mayor o menor número de colisiones. En el caso de las partículas brownianas, el origen del comportamiento difusivo es en gran medida el de las colisiones de carácter estocástico que tienen las partículas brownianas con las moléculas del líquido en que se encuentran inmersas.

Bibliografía

- [1] Sriram Ramaswamy. «The Mechanics and Statistics of Active Matter». En: *Annual Review of Condensed Matter Physics* 1. Volume 1, 2010 (2010), págs. 323-345. ISSN: 1947-5462. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104101>. URL: <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104101>.
- [2] Translated by A.D.Cowper A.Einstein edited with notes by R.Fuerth. «Investigations on the theory of the brownian movement». En: *Ann.d.Phys.* (1905). URL: <https://jxshix.people.wm.edu/math490-2006/AEinstein-1905-MovBrowniano.pdf>.
- [3] Marian Smoluchowski. «The kinetic theory of Brownian molecular motion and suspensions». En: *Ann. Phys* 21 (1906), págs. 756-780.
- [4] Tamás Vicsek et al. «Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles». En: *Phys. Rev. Lett.* 75 (6 sep. de 1995), págs. 1226-1229. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.1226. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1226>.
- [5] Robert Brown, John J. (John Joseph) Bennett y Robert Hardwicke. *The miscellaneous botanical works of Robert Brown*. Vol. 1. <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/21295>. London, Published for the Ray society by R. Hardwicke, 1866-68, pág. 638. URL: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/61465>.
- [6] C. Wiener. «Erklärung des atomistischen Wesens des tropfbar-flüssigen Körperzustandes, und Bestätigung desselben durch die sogenannten Molecularbewegungen.» En: *Annalen Der Physik Und Chemie*, 194(1), 79-94. (1863). DOI: doi:10.1002/andp.18631940105.
- [7] Jesús Santamaria Antonio. «EL MOVIMIENTO BROWNIANO: UN PARADIGMA DE LA MATERIA BLANDA Y DE LA BIOLOGÍA». En: *Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)* (2013).
- [8] Thomas Steiner y Christian Bayer. *Brownian Motion on a Sphere*. 2007. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano#/media/Archivo:BMonSphere.jpg.
- [9] Yoav Sagi et al. «Observation of Anomalous Diffusion and Fractional Self-Similarity in One Dimension». En: *Phys. Rev. Lett.* 108 (9 mar. de 2012), pág. 093002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.093002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.093002>.
- [10] Nicolas E. Humphries et al. «Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators». En: *Nature* (2010). DOI: 10.1038/nature09116. URL: <https://doi.org/10.1038/nature09116>.
- [11] Matthew J. Colbrook et al. «Scaling laws of passive-scalar diffusion in the interstellar medium». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 467.2 (feb. de 2017), págs. 2421-2429. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/stx261. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/467/2/2421/10874800/stx261.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stx261>.

- [12] Jean-Philippe Bouchaud y Antoine Georges. «Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications». En: *Physics Reports* 195.4 (1990), págs. 127-293. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90099-N](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90099-N). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739090099N>.
- [13] K. et al. Burnecki. «Estimating the anomalous diffusion exponent for single particle tracking data with measurement errors - An alternative approach.» En: *Sci. Rep.* 5, 11306 (2015). DOI: 10.1038/srep11306.
- [14] Michael Rubenstein, Christian Ahler y Radhika Nagpal. «Kilobot: A low cost scalable robot system for collective behaviors». En: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2012, págs. 3293-3298. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6224638.
- [15] Justin Werfel, Kirstin Petersen y Radhika Nagpal. «Designing Collective Behavior in a Termite-Inspired Robot Construction Team». En: *Science* 343.6172 (2014), págs. 754-758. DOI: 10.1126/science.1245842. eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1245842>. URL: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1245842>.
- [16] Michael Bonani et al. «The marXbot, a miniature mobile robot opening new perspectives for the collective-robotic research». En: *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2010, págs. 4187-4193. DOI: 10.1109/IROS.2010.5649153.
- [17] Cecilio Tapia-Ignacio, Luis L Gutierrez-Martinez y Mario Sandoval. «Trapped active toy robots: theory and experiment». En: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2021.5 (mayo de 2021), pág. 053404. DOI: 10.1088/1742-5468/abfcbb. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/abfcbb>.
- [18] Mario Sandoval. «Minimal model of an active solid deviates from equilibrium mechanics». En: *The European Physical Journal B* (2022). DOI: 10.1140/epjb/s10051-022-00421-x. URL: <https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-022-00421-x>.
- [19] Giomi L., Hawley-Weld N. y Mahadevan L. «Swarming, swirling and stasis in sequestered bristle-botsProc.» En: *R. Soc. A*.46920120637 (2013). DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.2012.0637>.
- [20] Schindelin J., Arganda-Carreras I. y Frise E. et al. «Fiji: an open-source platform for biological-image analysis.» En: *Nature Methods* 9 (2012), págs. 676-682. DOI: <https://doi.org/10.1038/nmeth.2019>. URL: <https://www.nature.com/articles/nmeth.2019>.
- [21] I.F. Sbalzarini y P. Koumoutsakos. «Feature point tracking and trajectory analysis for video imaging in cell biology». En: *Journal of Structural Biology* 151.2 (2005), págs. 182-195. ISSN: 1047-8477. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsb.2005.06.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1047847705001267>.
- [22] Onofre-Hernández et al. «Coeficientes de difusión de fluidos de Yukawa y aplicación a fullerenos». En: *Revista Mexicana de Física* (2010). URL: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=57019827009>.
- [23] María de los Ángeles Escobar López. «Estudio de la nucleación y optimización en el crecimiento cristalino por medio de un modelo de materia granular». Tesis doct. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2023.
- [24] M. Ledesma-Motolinía et al. «Magnetized granular particles running and tumbling on the circle S^1 ». En: *Phys. Rev. E* 107 (2 feb. de 2023), pág. 024902. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.024902. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.107.024902>.
- [25] Clemens Bechinger et al. «Active particles in complex and crowded environments». En: *Rev. Mod. Phys.* 88 (4 nov. de 2016), pág. 045006. DOI: 10.1103/RevModPhys.88.045006. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.045006>.

- [26] C. Tapia-Ignacio et al. «Brownian motion of ellipsoidal particles on a granular magnetic bath». En: *Phys. Rev. E* 102 (2 ago. de 2020), pág. 022902. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.022902. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.022902>.
- [27] Julien Deseigne et al. «Vibrated polar disks: spontaneous motion, binary collisions, and collective dynamics». En: *Soft Matter* 8 (20 2012), págs. 5629-5639. DOI: 10.1039/C2SM25186H. URL: <http://dx.doi.org/10.1039/C2SM25186H>.
- [28] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik; Fachbuchverlag Leipzig*. Hanser, Carl, 1996.
- [29] G. G. Stokes. «On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums». En: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 9, p.8*. The formula for terminal velocity (V) appears on p. [52], equation (127). Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1850.
- [30] A. Einstein. «Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen». En: *Annalen Der Physik, 14(S1), 182–193*. (1905). DOI: 10.1002/andp.200590005.
- [31] Francisco Javier Martín Sierra. «Introducción a las descripciones de Langevin y Fokker-Planck: Movimiento browniano». En: (2017). URL: https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/63594/INTRODUCCI%C3%93N%20A%20LAS%20DESCRIPCIONES%20DE%20LANGEVIN%20Y%20FOKKER-PLANCK_MOVIMIENTO%20BROWNIANO.pdf?sequence=1&isAllowed=y.