Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Nuevas geometrías tipo agujero negro en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón

Tesis presentada al

Colegio de Física

para obtener el grado de

Licenciado en Física

Presenta

Misael Mirón Monterrosas

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla, Pue.
Enero de 2020

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Nuevas geometrías tipo agujero negro en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón

Tesis presentada al

Colegio de Física

para obtener el grado de

Licenciado en Física

Presenta

Misael Mirón Monterrosas

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla, Pue.
Enero de 2020

Título: Nuevas geometrías tipo agujero negro en la teoría Einstein-Maxwell-dilatón
Estudiante: Misael Mirón Monterrosas

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Secretario

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Suplente

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Agradecimientos

A mi familia, Abundio, Isabel, Emanuel, Esmeralda, Veronica, Osvaldo y Monserrath, ya que gracias a su apoyo incondicional y confianza he logrado cumplir mi objetivo de ser un licenciado en física y han sido mi motivo principal para continuar avanzando y creciendo en esta área de la ciencia de la cual estoy muy maravillado. Muchos obstáculos hemos vivido juntos y a pesar de las adversidades seguimos de pie en la lucha y dedicación para alcanzar nuestros objetivos. Nada será igual sin ustedes.

A mis tres grandes amigos, Guadalupe, Óscar y Arely que gracias a sus consejos y apoyo me han ayudado a mantenerme siempre firme e ir por el buen camino. A mis amigos, Javier Emiliano, Sandra, Mario Alexis, Andre, Abigail, Fernanda, Viridiana, Alberto, Hipolito, Eric, Amadeo y Roberto por el tiempo compartido al trabajar juntos. A todas y cada una de las personas que conocí e hice una bonita amistad al estar estudiando en la ciudad de Puebla, en especial Luis Alberto, Vicente y todos los chicos con los que compartí un segundo hogar durante mi estancia de Licenciatura.

A mis profesores que fueron los principales medios de mi formación.

A mi jurado por su disponibilidad y retroalimentación durante el desarrollo y presentación de este trabajo.

A mi asesor Alfredo Herrera Aguilar por su paciencia, dedicación, disponibilidad y ayuda en la construcción de esta tesis.

A Conacyt por su apoyo al ofrecerme una beca como ayudante de mi asesor de tesis para solventar mis gastos económicos durante el desarrollo de este trabajo.

A todos los que están leyendo estas líneas.

Muchas gracias.

Índice general

Resumen

En este proyecto se hace una breve introducción a las métricas tipo Lifshitz con exponente dinámico crítico mayor o igual a 1, a las métricas con violación de hiperescala y a la teoría Einstein-Maxwell-dilatón.

Posteriormente, se resolverán las ecuaciones de campo de la teoría Einstein-Maxwell-dilatón para construir una solución tipo agujero negro con isotropía espacial. Esta nueva métrica, con un cambio de variable, será convertida a una geometría con exponente dinámico crítico mayor a 1 que asintóticamente tiende a una configuración gravitatoria con exponente de violación de hiperescala.

A continuación se verificará que las soluciones que acompañan a la nueva métrica encontrada al hacer un cambio de variable efectivamente sean soluciones en el sistema descrito por esta nueva geometría.
Finalmente, se determinará la termodinámica básica de este agujero negro.

Palabras clave: *teoría Einstein-Maxwell-Dilatón, espacios de Lifshitz, geometrías con violación de hiperescala, métrica tipo agujero negro.*

Introducción

La inquietud del ser humano acerca del comportamiento de la naturaleza ha sido la base fundamental para la construcción de las ciencias, cuyo objetivo principal es entender y explicar los fenómenos en el universo. Una ciencia muy amplia y que ha sido la base para otras es la física. La física nació desde las antiguas civilizaciones y se fue perfeccionando a lo largo de la historia. Hasta el siglo XIX los físicos creían que estaban cerca de alcanzar una descripción completa de la naturaleza. Sin embargo, este logro no se obtuvo porque las nuevas generaciones de científicos comenzaron a cuestionar esta descripción y a proponer mejores modelos.

Uno de los físicos importantes de la historia y al que se le debe un cambio a las bases de la física es Albert Einstein. Los principales aportes de este hombre fueron:
La relatividad especial publicada en 1905 donde parte de los hechos experimentales que mostraban la inexsistencia del éter y de la idea de que las leyes de la física son las mismas para todos los observadores moviéndose libremente, cambiando el concepto del tiempo y el espacio para llegar a conclusiones como el carácter constante de la velocidad de la luz, la contracccción de la longitud y la dilatación del tiempo para objetos con velocidades cercanas a las de la luz.
La relatividad general publicada en 1915, cuyo origen se debió a la necesidad de explicar fenómenos físicos desde cualquier sistema de referencia, principalmente acelerados, y la comprensión de la existencia de una estrecha relación entre aceleración y campo gravitacional, obteniendo conclusiones de que la materia y la energía deforman de alguna manera el espacio-tiempo. Posteriormente, Einstein expresó estas conclusiones con ayuda de Marcel Grossman al modelar matemáticamente al espacio-tiempo como un espacio curvado. Finalmente, Einstein y David Hilbert casi al mismo tiempo obtuvieron las ecuaciones que relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la masa y la energía contenida en él.

La relatividad general sin ser verificada experimentalmente tuvo su primera utilidad cuando meses después de ser publicadas las ecuaciones de esta teoría, Karl Schwarzchild obtuvo la primera solución correspondiente a objetos que en esos tiempos se desconocía su existencia y que fueron llamados agujeros negros. Esta solución fue la motivación para que más físicos buscaran soluciones a estas ecuaciones y que también fueran agujeros negros. Posteriormente, las evidencias de la existencia de este tipo de objetos en el univero fueron obtenidas con el tiempo a través de observaciones astronómicas en las galaxias.
También, la teoría de la relatividad general obtuvo mayor importancia cuando en 1916 se explicó el comportamiento de la órbita de Mercurio con ésta y cuando en 1919 una expedición liderada por Arthur Eddington confirmó la predicción de esta teoría para la desviación de la luz estelar al pasar cerca del Sol durante un eclipse total de Sol en ese año.

Años posteriores, al tener evidencia de algunas predicciones de esta teoría de la relatividad general se utilizó como base para formular la teoría del Big-Bang que explica el origen y desarrollo del universo aunque posteriormente la comunidad científica vio ligeros obstáculos que no se pueden explicar y que aún están tratando de resolver. Además, hoy en día aún sigue un arduo trabajo para conciliar la relatividad general con otra rama importante de la física , la mecánica cuántica [11, 12].

Otra aplicación importante de esta teoría es que ha sido la base para la construcción de teorías gravitatorias que tienen propiedades y simetrías similares a las de teorías de campo fuertemente acopladas y que son una herramienta importante para una rama de la física que surgió hace algunas décadas, la correspondencia holográfica.
El ejemplo más importante y entendido del principio holográfico es la correspondencia AdS/teoría de campo conforme propuesta por Maldacena [13]. Esta dualidad se ha generalizado en muchas direcciones y la noción de la correspondencia teoría de norma/gravedad ha llegado a ser una herramienta importante en la dualidad holográfica [14].
El objetivo de la dualidad norma/gravedad es establecer una relación entre teorías de campo en D dimensiones con teorías gravitacionales en D+1 dimensiones, donde se establece que un campo de materia en teoría gravitatoria corresponde a un operador en la teoría de campo dual. Así, ciertas preguntas difíciles de responder en la teoría de campo llegan a ser más transparentes en el lado de la gravedad vía la correspondencia AdS/CFT [4].
Una de las extensiones más interesantes de esta dualidad consiste en el estudio de sistemas críticos cuánticos que pertenecen al ambito de la física de la materia condensada [13], los cuales tienen las mismas simetrías exhibidas por algunos modelos gravitatorios. Algunos de ellos se pueden agrupar en geometrías tipo Lifshitz o asintóticas a éstas y otras con violación de hiperescala o con comportamiento asintótico a éstas [4, 13 y 14].
Ejemplos descritos por esta dualidad son los superconductores y fermiones unitarios.

OBJETIVO: Determinación de una nueva métrica tipo agujero negro con exponente dinámico crítico mayor a 1 y exponente de violación de hiperescala en un espacio de D+2 dimensiones como solución a las ecuaciones de campo de la teoría Einstien-Maxwell-dilatón y obtención de la información termodinámica básica de esta solución.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Espacios Lifshitz

Este tipo de espacios es descrito por una teoría invariante de Lifshitz. Estos espacios son espacialmente isótropos y homogéneos, es decir, invariantes bajo traslaciones espaciales y temporales y rotaciones espaciales:

$$H : t \to t' = t + a, \tag{1.1}$$
$$P^i : x^i \to x'^i = x^i + a^i, \tag{1.2}$$
$$L^{ij} : x^i \to x'^i = L^i_j x^j. \tag{1.3}$$

También, esta teoría de Lifshitz admite una simetría de escala no relativista:

$$D_z : r \to r' = \lambda^{\pm 1} r, \tag{1.4}$$
$$t \to t' = \lambda^{\mp z} t, \tag{1.5}$$
$$x^i \to x'^i = \lambda^{\mp z} x^i, \tag{1.6}$$

siendo z es el exponente dinámico crítico y r la coordenada extra utilizada en la dualidad holográfica.
Una generalización de esta teoría se obtiene considerando una métrica anisótropa espacialmente, es decir, una métrica que admite la siguiente simetría de escala no relativista:

$$D_z : r \to r' = \lambda^{\pm 1} r, \tag{1.7}$$
$$t \to t' = \lambda^{\mp z} t, \tag{1.8}$$
$$x^i \to x'^i = \lambda^{\mp z_i} x^i, \tag{1.9}$$

siendo z_i los exponentes dinámicos críticos, los cuales en general son distintos [13].
La geometría de Lifshitz más sencilla es dada por la métrica

$$ds^2 = L^2(-r^{\pm 2z} dt^2 + r^{\pm 2} dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2}) \tag{1.10}$$

donde $0 < r < \infty$, L es el radio de Lifshitz e $i = 1, 2, ..., D$. Los signos $+$ y $-$ en las potencias de r están relacionados con la transformación $r \to \frac{1}{r}$, la cual deja la métrica invariante. Además, los invariantes de curvatura de esta geometría son contantes.
Las métricas asintóticamente Lifshitz son descritas por la geometría

$$ds^2 = L^2 \left(-r^{\pm 2z} f(r) dt^2 + r^{\pm 2} dx_i^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} \right), \tag{1.11}$$

con $i = 1, ..., D$. Siendo $f(r)$ el factor de ennegrecimiento [15]. Esta forma asintótica ya no es isótropa y homogéna, y sus invariantes de curvatura ya no son constantes.

1.2. Métricas con exponente dinámico crítico y exponente de violación de hiperescala

Una clase más general que la métrica (1.10) toma la forma

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\frac{2\theta}{D}} \left(-\frac{dt^2}{r^{2z}} + \frac{d\overrightarrow{x_D}^2 + dr^2}{r^2}\right). \tag{1.12}$$

siendo R_0 una constante. Esta geometría también es isótropa y homogénea en la frontera, es decir, para cada r constante distinta de cero. Este tipo de métricas son llamadas métricas con violación de hiperescala.
Bajo el reescalamiento $\{t, \overrightarrow{x}_D, r\} \to \{\lambda^z t, \lambda\overrightarrow{x}_D, \lambda r\}$ la métrica se transforma como $ds^2 \to \lambda^{\frac{2\theta}{D}} ds^2$. Esta transformación covariante de la métrica se debe al hecho de que el operador densidad de energía (como otros más) en la teoría dual adquieren una dimensión anómala, mientras que en gravedad se debe a forma de esta métrica. La existencia de tales dimensiones anómalas es conocida como violación de hiperescala y θ es llamado exponente de violación de hiperescala. Este tipo de métricas son importantes en el contexto de las fases de la materia.

En un caso más general, una geometría enfocada para obtener más información termodinámica toma la forma

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\frac{2\theta}{D}} \left(\frac{f(r)d\tau^2}{r^{2z}} + \frac{dr^2}{f(r)r^2} + \frac{d\overrightarrow{x_D}^2}{r^2}\right), \tag{1.13}$$

la cual tiende asintóticamente una métrica con violación de hiperescala con la condición de que $f(0) = 1$. Esta métrica ya no es isótropa y homogénea.
En el caso de las geometrías descritas por (1.12) y (1.13) sus invarinates de curvatura no son constantes y por lo regular divergen en r grande o pequeño.

Si $f(r)$ tiene las propiedades adecuadas esta geometría corresponde a la solución de un agujero negro en forma euclídea. En tal caso es conveniente recordar que una métrica euclídea se caracteriza por el signo que acompaña al término que corresponde al parámetro de evolución, $d\tau^2$, el cual es $+$. Mientras que una forma para determinar que la solución encontrada al resolver las ecuaciones de campo es un agujero negro es mostrando que dicha solución tiene un horizonte de eventos y que los invariantes de curvatura de esta soluión evaluados en el horizonte de eventos son finitos, estos invariantes de curvatura se definen en el apéndice C. Además, en el caso de un espacio-tiempo plano estos invariantes son cero.
Para esta solución de agujero negro se puede encontrar un radio r_H para el cual $f(r_H) = 0$. Este radio es el horizonte de eventos.
Al tratar de deducir las propiedades termodinámicas básicas del agujero negro se encuentra que el radio r_H está relacionado con la temperatura de dicho agujero negro por la imposición de que el espacio-tiempo sea regular en el horizonte de eventos y al expandir la métrica cerca de éste se tiene

$$ds^2 = A_+\left(\frac{|f'(r_H)|(r_H - r)d\tau^2}{r_H^{2z}} + \frac{dr^2}{|f'(r_H)|(r_H - r)r_H^2} + \frac{d\overrightarrow{x_D}^2}{r_H^2}\right) + ... \tag{1.14}$$

y con el cambio de coordenadas

$$r = r_H - \frac{r_H^2|f'(r_H)|}{4A_+}\rho^2, \tag{1.15}$$

$$\tau = \frac{2r_H^{z-1}}{|f'(r_H)|}\varphi, \tag{1.16}$$

la geometría toma la forma

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + \frac{d\overrightarrow{x_D}^2}{r_H^2} + ... \tag{1.17}$$

En esta forma, se puede asociar esta representación de la geometría a la de un espacio-tiempo plano en coordenadas cilíndricas. Para evitar la singularidad en $\rho = 0$ se considera que $\phi \sim \phi + 2\pi$. Pero ϕ es definido en términos de τ, y τ tiene la periodicidad $\tau \sim \tau + \frac{1}{T}$. De esta manera, la temperatura del agujero negro es

$$T = \frac{|f'(r_H)|}{4\pi r_H^{z-1}}. \tag{1.18}$$

Por otro lado, un resultado general en gravedad semiclásica es la densidad entropía, la cual está asociada con el área del horizonte. Para el espacio-tiempo del agujero negro, su densidad de entropía es

$$s = \frac{2\pi L^D}{\kappa^2} \frac{r_H^{\theta - D}}{R_0^\theta} \tag{1.19}$$

donde κ^2 es una constante proporional a la constate de Newton.
Sin embargo, ésta no es toda la información termodinámica necesaria para ser utilizada en la dualidad, para esto se debe recurrir a la construcción de la termodinámica del agujero negro con ayuda de la mecánica estadística, el objetivo principal es construir un potencial termodinámico del cual se puede obtener la mayor cantidad de información, en este caso el potencial termodinámico apto para esto es la energía libre, dada por la expresión

$$F = -TLn(Z_{QFT}) = -TLn(Z_{Grav.}) = TS[g*] \tag{1.20}$$

donde se utiliza la equivalencia entre la función de partición Z_{QFT} (teoría de campo conforme) y $Z_{Grav.}$ (teoría gravitacional) y la aplicación de esta teoría en el límite semiclásico. En el último término $S[g*]$ es la acción total (del campo de materia+de Gibbons-Hawking+contratérmino) evaluada en las expresiones encontradas para la métrica, el campo escalar y el campo vectorial del agujero negro como soluciones a las ecuaciones de campo [5].

1.3. Teoría Einstein-Maxwell-dilatón (EMd)

La teoría Einstein-Maxwell-dilatón es una teoría alternativa de la gravedad con origen en la teoría de cuerdas heteróticas de baja energía. En esta teoría se utiliza una densidad lagrangiana que permite crear geometrías con invariancia de escala anisótropa, ésta incluye un tensor métrico $g_{\mu\nu}$, un campo escalar dilatón ϕ, un potencial vectorial de Maxwell A_μ y una constante cosmológica Λ [1], [2].
Estos campos son gobernados por la acción funcional en $D+2$ dimensiones [3]-[4]

$$S = \int d^{D+2}x[R - 2\Lambda - \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \tfrac{1}{4}e^{\lambda\phi}F^2]\sqrt{-g} = \int d^{D+2}x[R - 2\Lambda + L_m]\sqrt{-g} \tag{1.21}$$

donde

$L = R - 2\Lambda - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{\lambda\phi}F^2$ es la densidad lagrangiana total en esta teoría,

$L_m = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{\lambda\phi}F^2 = -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi - \frac{1}{4}e^{\lambda\phi}g^{\gamma\gamma'}g^{\beta\beta'}F_{\gamma\beta}F_{\gamma'\beta'}$ es la densidad lagrangiana de los campos de materia,

$g = det(g_{\mu\nu})$ es el determinante de la matriz de la métrica $(g_{\mu\nu})$,

$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci

y
$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\ \rho}^{\ \rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\ \rho}^{\ \rho} - \Gamma_{\mu\ \sigma}^{\ \rho}\Gamma_{\nu\ \rho}^{\ \sigma}$ son las componentes del tensor de Ricci.

El tensor electromagnético está definido por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ de tal manera que $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.
En general el campo escalar ϕ como el potencial vectorial A_μ dependen de todas las coordenadas del espacio en $D+2$ dimensiones. En esta teoría alternativa de la gravedad ambos están acoplados como se muestra en la forma de la acción.

Capítulo 2

Deducción de las ecuaciones de campo

Aplicando el principio de mínima acción a la expresión (1.21)

$$0 = \delta S = \delta \int d^{D+2}x[R - 2\Lambda + L_m]\sqrt{-g}$$

$$= \int d^{D+2}x[(R - 2\Lambda + L_m)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}(\delta R + \delta L_m)],$$

de la variación con respecto al tensor de curvatura se tiene

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

Así,

$$0 = \int d^{D+2}x \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m + R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}$$

$$= \int d^{D+2}x \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m + R_{\mu\nu} + \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \int d^{D+2}x g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}.$$

Con respecto al segundo sumando, para calcular $\delta R_{\mu\nu}$ notar que las cantidades $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}$ no son tensores pero las cantidades $\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}$ sí lo son, ya que $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}A_\sigma dx^\nu$ es el cambio del vector A_σ bajo un desplazamiento paralelo desde un punto P a un punto separado infinitesimalmente P'. Así, $\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}A_\sigma dx^\nu$ es la diferencia entre dos vectores, obtenido como el resultado de dos desplazamientos paralelos (un invariante y el otro con la variación de $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}$) del punto P a un fijo y de éste último al punto P'. La diferencia entre dos vectores en el mismo punto es un vector, y por lo tanto $\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}$ es un tensor. Ahora, usando un sistema de coordenadas localmente geódesico, se tiene en este sistema $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma} = 0$; de la definición de $R_{\mu\nu}$ (en este sistema las primeras derivadas de $g^{\mu\nu}$ son iguales a cero), entonces

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\Gamma_{\mu\ \rho}^{\ \rho}) = g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho} - g^{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \nu} = \frac{\partial w^\rho}{\partial x^\rho}$$

donde $w^\rho = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \nu}$.
Como w^ρ es un vector, en un sistema de coordenadas arbitrario se escribe

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\rho}(\sqrt{-g}w^\rho).$$

Por lo tanto,

$$\int d^{D+2}xg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}=\int\frac{\partial(\sqrt{-g}w^{\rho})}{\partial x^{\rho}}d^{D+2}x.$$

Por el teorema de Gauss, esta última integral de volumen se puede transformar en una integral de w^{ρ} sobre la superficie que encierra el $D+2$-volumen. Como las variaciones del campo son cero en los límites de integración, este término desaparece. Entonces

$$0=\int d^{D+2}x\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+g_{\mu\nu}\Lambda-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m+R_{\mu\nu}+\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}$$

pero esto se sumple sólo si el término entre corchetes es igual a cero, es decir,

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+g_{\mu\nu}\Lambda-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m+R_{\mu\nu}+\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}=0.$$

Entonces

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}=T_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

con

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_m-\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.4}$$

el tensor momento-energía.
Ahora, para escribir el tensor anterior en forma más explícita se calcula la variación de la densidad lagrangiana de los campos de materia con respecto a la métrica

$$\frac{\delta L_m}{\delta g^{\rho\sigma}}=-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\mu'}_{\sigma}\partial_{\mu}\phi\partial_{\mu'}\phi-\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}[\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\mu'}_{\sigma}g^{\nu\nu'}F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}+g^{\mu\mu'}\delta^{\nu}_{\rho}\delta^{\nu'}_{\sigma}F_{\mu\nu}F_{\mu'\nu'}]$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_{\rho}\phi\partial_{\sigma}\phi-\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}[F_{\rho\nu}F_{\sigma}{}^{\nu}+F_{\mu\rho}F^{\mu}_{\ \sigma}]=-\frac{1}{2}\partial_{\rho}\phi\partial_{\sigma}\phi-\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}[F_{\rho\nu}F_{\sigma}{}^{\nu}+F_{\rho\mu}F_{\sigma}{}^{\mu}]$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_{\rho}\phi\partial_{\sigma}\phi-\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}(2F_{\rho\nu}F_{\sigma}{}^{\nu})=-\frac{1}{2}\partial_{\rho}\phi\partial_{\sigma}\phi-\frac{1}{2}e^{\lambda\phi}g^{\sigma'\rho'}F_{\rho\rho'}F_{\sigma\sigma'}.$$

Así, la ecuación (2.4) se convierte

$$T_{\mu\nu}=-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}[g^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\phi\partial_{\sigma}\phi+\frac{1}{2}e^{\lambda\phi}g^{\gamma\gamma'}g^{\beta\beta'}F_{\gamma\beta}F_{\gamma'\beta'}]+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi+\frac{1}{2}e^{\lambda\phi}g^{\nu'\mu'}F_{\nu\nu'}F_{\mu\mu'}. \tag{2.5}$$

Las expresiones (2.3) y (2.5) son las ecuaciones de Einstein.

Por otro lado, la ecuación para el campo escalar ϕ es calculada a partir de las ecuaciones de Euler-Langrange de forma que

$$\nabla_{\rho}\left(\frac{\delta L_m}{\delta(\partial_{\rho}\phi)}\right)=\frac{\delta L_m}{\delta\phi}=-\frac{\lambda}{4}e^{\lambda\phi}F^2$$

donde

$$\frac{\delta L_m}{\delta(\partial_{\rho}\phi)}=\frac{\delta}{\delta(\partial_{\rho}\phi)}\left[R-2\Lambda-\frac{1}{2}g^{\mu\mu'}\partial_{\mu}\phi\partial_{\mu'}\phi-\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}F^2\right]=-\frac{1}{2}g^{\mu\mu'}[\delta^{\mu}_{\rho}\partial_{\mu'}\phi+\delta^{\mu'}_{\rho}\partial_{\mu}\phi]$$

$$=-\frac{1}{2}(g^{\rho\mu'}\partial_{\mu'}\phi+g^{\mu\rho}\partial_{\mu}\phi)=-g^{\rho\mu}\partial_{\mu}\phi.$$

Entonces

$$\nabla_{\rho}\left(\frac{\delta L_m}{\delta(\partial_{\rho}\phi)}\right)=\nabla_{\rho}(-g^{\rho\mu}\partial_{\mu}\phi)=-g^{\rho\mu}\nabla_{\rho}(\partial_{\mu}\phi)=-\Box\phi,$$

ya que $\nabla_\rho(g^{\rho\mu}) = 0$.
Así,

$$\Box\phi = \frac{\lambda}{4}e^{\lambda\phi}F^2. \tag{2.6}$$

Finalmente, para la ecuación del potencial vectorial A_μ se toma en consideración que el lagrangiano total se puede escribir en la forma

$$L = R-2\Lambda-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}F^2 = R-2\Lambda-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial_{\mu'}A_{\nu'}-\partial_{\nu'}A_{\mu'}).$$

La ecuación de Euler-Lagrange para este campo es

$$\nabla_\rho\left(\frac{\delta L}{\delta(\partial_\rho A_\sigma)}\right) = \frac{\delta L}{\delta A_\sigma} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta(\partial_\rho A_\sigma)} &= -\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}[(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma-\delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma)(\partial_{\mu'}A_{\nu'}-\partial_{\nu'}A_{\mu'})+(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\delta^{\mu'}_\rho\delta^{\nu'}_\sigma-\delta^{\nu'}_\rho\delta^{\mu'}_\sigma)] \\
&= -\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}[(g^{\rho\mu'}g^{\sigma\nu'}-g^{\sigma\mu'}g^{\rho\nu'})(\partial_{\mu'}A_{\nu'}-\partial_{\nu'}A_{\mu'})+(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}-g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})] \\
&= -\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}[\partial^\rho A^\sigma-\partial^\sigma A^\rho-\partial^\sigma A^\rho+\partial^\rho A^\sigma+\partial^\rho A^\sigma-\partial^\sigma A^\rho-\partial^\sigma A^\rho+\partial^\rho A^\sigma] \\
&= -\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}[4\partial^\rho A^\sigma-4\partial^\sigma A^\rho] = -\frac{1}{4}e^{\lambda\phi}4F^{\rho\sigma} = -e^{\lambda\phi}F^{\rho\sigma}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\nabla_\rho\left(\frac{\delta L}{\delta(\partial_\rho A_\sigma)}\right) = \nabla_\rho(-e^{\lambda\phi}F^{\rho\sigma}) = 0$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(e^{\lambda\phi}F_{\nu\rho}) = 0. \tag{2.7}$$

Capítulo 3

Solución de las ecuaciones de campo

Para resolver las ecuaciones de campo (2.3), (2.5), (2.6) y (2.7), se propone la métrica del tipo agujero negro con isotropía espacial asintóticamente Lifshitz

$$ds^2 = -r^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 dx_i^2 \tag{3.1}$$

con $i = 1, ..., D$ y $z > 1$ (solución con el objetivo de utilizarla en la dualidad holográfica para trabajos futuros).
En forma matricial esta métrica, en el orden t, r, x_i, es de la forma:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -r^{2z} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 f(r)} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

y

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r^{2z} f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 f(r) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Calculando los símbolos de Christoffel a partir de su definición

$$\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{3.4}$$

se tiene (considerando que $f'(r) = \frac{df(r)}{dr}$)

$$\Gamma_{t\ t}^{\ t} = 0,$$

$$\Gamma_{t\ r}^{\ t} = \frac{1}{2} g^{tt} (\partial_r g_{tt} + \partial_t g_{rt} - \partial_t g_{tr}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^{2z} f(r)} (-2z r^{2z-1} f(r) - r^{2z} f'(r)) = \frac{z}{r} + \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{f(r)},$$

$$\Gamma_{t\ i}^{\ t} = 0,$$

$$\Gamma_{r\ t}^{\ t} = \Gamma_{t\ r}^{\ t},$$

$$\Gamma_{r\ i}^{\ t} = 0,$$

$$\Gamma_{i\ t}^{\ t} = 0,$$

$$\Gamma_{i\ r}^{\ t} = 0,$$

$$\Gamma_{i\ j}^{\ t} = 0,$$

$$\Gamma_{t\ t}^{\ r} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_t g_{tr} + \partial_t g_{tr} - \partial_r g_{tt}) = \frac{1}{2}r^2 f(r)(2zr^{2z-1}f(r) + r^{2z}f'(r)) = \frac{1}{2}r^{2z+1}f(r)(rf'(r) + 2zf(r)),$$

$$\Gamma_{t\ r}^{\ r} = 0,$$

$$\Gamma_{t\ i}^{\ r} = 0,$$

$$\Gamma_{r\ t}^{\ r} = \Gamma_{t\ r}^{\ r} = 0,$$

$$\Gamma_{r\ r}^{\ r} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2}r^2 f(r)\left(\frac{-2}{r^3 f(r)} - \frac{f'(r)}{r^2 f(r)^2}\right) = -\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}\right),$$

$$\Gamma_{r\ i}^{\ r} = 0,$$

$$\Gamma_{i\ t}^{\ r} = 0,$$

$$\Gamma_{i\ r}^{\ r} = 0,$$

$$\Gamma_{i\ j}^{\ r} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_j g_{ir} + \partial_i g_{jr} - \partial_r g_{ij}) = \frac{1}{2}r^2 f(r)(-2r\delta_{ij}) = -r^3 f(r)\delta_{ij},$$

$$\Gamma_{t\ t}^{\ i} = 0,$$

$$\Gamma_{t\ r}^{\ i} = 0,$$

$$\Gamma_{t\ j}^{\ i} = 0,$$

$$\Gamma_{r\ t}^{\ i} = 0,$$

$$\Gamma_{r\ r}^{\ i} = 0,$$

$$\Gamma_{r\ j}^{\ i} = \frac{1}{2}g^{ik}(\partial_j g_{rk} + \partial_r g_{jk} - \partial_k g_{rj}) = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\delta^{ik}2r\delta_{jk} = \frac{1}{r}\delta_{ij},$$

$$\Gamma_{k\ t}^{\ i} = 0,$$

$$\Gamma_{j\ r}^{\ i} = \Gamma_{r\ j}^{\ i} = \frac{1}{r}\delta_{ij},$$

$$\Gamma_{j\ k}^{\ i} = 0.$$

Así, los símbolos de Christoffel distintos de cero, considerando que $f = f(r)$ y $f' = f'(r)$, son:

$$\Gamma_{t\ r}^{\ t} = \frac{z}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}, \tag{3.5}$$

$$\Gamma_{t\ t}^{\ r} = \frac{1}{2}r^{2z+1}f(rf' + 2zf), \tag{3.6}$$

$$\Gamma_{r\ r}^{\ r} = -(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}), \tag{3.7}$$

$$\Gamma_{i\ j}^{\ r} = -r^3 f\delta_{ij} \tag{3.8}$$

y

$$\Gamma_{r\ j}^{\ i} = \frac{1}{r}\delta_{ij}. \tag{3.9}$$

Por otro lado, a partir de la definición de las componentes de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\ \rho}^{\ \rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\ \rho}^{\ \rho} - \Gamma_{\mu\ \sigma}^{\ \rho}\Gamma_{\nu\ \rho}^{\ \sigma} \tag{3.10}$$

se calcula en el Apéndice A que las componentes distintas de cero en este espacio son

$$R_{tt} = \frac{1}{2}r^{2z}f[r^2 f'' + (D + 3z + 1)rf' + 2z(z + D)f], \tag{3.11}$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}\left[\frac{f''}{f} + (D+3z+1)\frac{1}{r}\frac{f'}{f} + \frac{2(z^2+D)}{r^2}\right], \tag{3.12}$$

$$R_{ij} = -r^2[rf' + (z+D)f]\delta_{ij} \tag{3.13}$$

y el escalar de Ricci es

$$R = -[r^2 f'' + (2D+3z+1)rf' + ((z+D)^2 + z^2 + D)f]. \tag{3.14}$$

Del apéndice C la contracción de los componentes tensoriales de Ricci es

$$\begin{aligned} l = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[r^4(f'')^2 + 2(D+3z+1)r^3 f'f'' + 2(2z^2+Dz+D)r^2 ff'' + (D^2+6Dz \\ +4D+9z^2+6z+1)r^2(f')^2 + 2(5Dz^2+D^2z+3D^2+6z^3+6Dz+2z^2+Dz+D)rf'f \\ +2(2z^4+2Dz^3+z^2D^2+3Dz^2+D^2+2D^2z+D^3)f^2]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De la misma manera, en el apéndice C se calcula el escalar de Kretschmann, éste es

$$\begin{aligned} K = R_{\mu\nu\tau\sigma}R^{\mu\nu\tau\sigma} = 4\Bigg[\left(z^4 + Dz^2 + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}D\right)f^2 + (3z^3+z^2+Dz+D)rff' + z^2r^2ff'' \\ +\frac{1}{4}(9z^2+6z+2D+1)r^2(f')^2 + \frac{1}{2}(3z+1)r^3f'f'' + \frac{1}{4}r^4(f'')^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Las expresiones (3.14), (3.15) y (3.16) son los invariantes de curvatura. Estos invariantes son útiles para determinar si la solución que se encuentra es la de un agujero negro.
Ahora, calculando las expresiones del primer miembro de las ecuaciones de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, se tiene

$$\begin{aligned} T_{tt} = R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R + \Lambda g_{tt} = \frac{1}{2}r^{2z}f[r^2f'' + (D+3z+1)rf' + 2z(z+D)f] \\ -\frac{1}{2}r^{2z}f[r^2f'' + (2D+3z+1)rf' + ((z+D)^2+z^2+D)f] - \Lambda r^{2z}f = \frac{1}{2}r^{2z+2}ff'' + \frac{1}{2}(D+3z \\ +1)r^{2z+1}ff' + z(z+D)r^{2z}f^2 - \frac{1}{2}r^{2z+2}ff'' - \frac{1}{2}r^{2z+1}(2D+3z+1)ff' - \frac{1}{2}((z+D)^2+z^2 \\ +D)r^{2z}f^2 - \Lambda r^{2z}f = -\frac{1}{2}Dr^{2z+1}ff' + \frac{1}{2}[2z^2+2Dz-(z+D)^2-z^2-D]r^{2z}f^2 - \Lambda r^{2z}f \\ = -\frac{1}{2}Dr^{2z+1}ff' - \frac{1}{2}D(D+1)r^{2z}f^2 - \Lambda r^{2z}f \end{aligned}$$

$$T_{tt} = -\frac{1}{2}Dr^{2z+1}ff' - \frac{1}{2}D(D+1)r^{2z}f^2 - \Lambda r^{2z}f \tag{3.17}$$

y

$$\begin{aligned} T_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R + \Lambda g_{rr} = -\frac{1}{2}\left[\frac{f''}{f} + (D+3z+1)\frac{1}{r}\frac{f'}{f} + \frac{2(z^2+D)}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{r^2f}[r^2f'' \\ +(2D+3z+1)rf' + ((z+D)^2+z^2+D)f] + \frac{\Lambda}{r^2f} = -\frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{2}(D+3z+1)\frac{1}{r}\frac{f'}{f} - \left(\frac{z^2+D}{r^2}\right) \\ +\frac{1}{2}\frac{f''}{f} + \frac{1}{2}(2D+3z+1)\frac{1}{r}\frac{f'}{f} + \frac{1}{2}((z+D)^2+z^2+D)\frac{1}{r^2} + \frac{\Lambda}{r^2f} = \frac{D}{2r}\frac{f'}{f} + \frac{1}{2r^2}(-2z^2-2D \\ +z^2+2Dz+D^2+z^2+D) + \frac{\Lambda}{r^2f} = \frac{D}{2r}\frac{f'}{f} + \frac{1}{2r^2}(-D+2Dz+D^2) + \frac{\Lambda}{r^2f} = \frac{D}{2r}\frac{f'}{f} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[\frac{D(D-1)}{2}+Dz\right]+\frac{\Lambda}{r^2 f}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{D(D-1)}{2}+Dz\right]+\frac{D}{2r}\frac{f'}{f}+\frac{\Lambda}{r^2 f}$$

$$T_{rr}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{D(D-1)}{2}+Dz\right]+\frac{D}{2r}\frac{f'}{f}+\frac{\Lambda}{r^2 f}. \tag{3.18}$$

De la misma manera

$$T_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R+\Lambda g_{ij}=-r^2[rf'+(z+D)f]\delta_{ij}+\frac{1}{2}r^2\delta_{ij}[r^2f''+(2D+3z+1)rf'$$

$$+((z+D)^2+z^2+D)f]+\Lambda r^2\delta_{ij}=\left[-r^3f'-(z+D)r^2f+\frac{1}{2}r^4f''+\frac{1}{2}(2D+3z+1)r^3f'\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}((z+D)^2+z^2+D)r^2f+\Lambda r^2\right]\delta_{ij}=\left[\frac{1}{2}r^4f''+\frac{1}{2}(2D+3z-1)r^3f'\right.$$

$$\left.+\left(-z-D+\frac{z^2+2zD+D^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{D}{2}\right)r^2f+\Lambda r^2\right]\delta_{ij}$$

$$T_{ij}=\left[\frac{1}{2}r^4f''+\frac{1}{2}(2D+3z-1)r^3f'+\left(z^2+z(D-1)+\frac{D(D-1)}{2}\right)r^2f+\Lambda r^2\right]\delta_{ij}. \tag{3.19}$$

Por otro lado, calculando las componentes del tensor momento-energía a partir de la definición (2.5)

$$T_{\mu\nu}=-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}[g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi+\frac{1}{2}e^{\lambda\phi}g^{\gamma\gamma'}g^{\beta\beta'}F_{\gamma\beta}F_{\gamma'\beta'}]+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+\frac{1}{2}e^{\lambda\phi}g^{\nu'\mu'}F_{\nu\nu'}F_{\mu\mu'}$$

e imponiendo el ansatz $\phi=\phi(r)$ y $A_\mu=(A_t(r),0,0,...,0)$ (este ansatz está inspirado en que la solución dependa de la coordenada r que es la coordenada holográfica en la dualidad), la primera cantidad que se calcula

$$F^2=g^{\gamma\gamma'}g^{\beta\beta'}F_{\gamma\beta}F_{\gamma'\beta'}=g^{\gamma\gamma'}g^{\beta\beta'}(\partial_\gamma A_\beta-\partial_\beta A_\gamma)(\partial_{\gamma'}A_{\beta'}-\partial_{\beta'}A_{\gamma'})=g^{t\gamma'}g^{\beta\beta'}(\partial_t A_\beta$$

$$-\partial_\beta A_t)(\partial_{\gamma'}A_{\beta'}-\partial_{\beta'}A_{\gamma'})+g^{r\gamma'}g^{\beta\beta'}(\partial_r A_\beta-\partial_\beta A_r)(\partial_{\gamma'}A_{\beta'}-\partial_{\beta'}A_{\gamma'})+g^{i\gamma'}g^{\beta\beta'}(\partial_i A_\beta$$

$$-\partial_\beta A_i)(\partial_{\gamma'}A_{\beta'}-\partial_{\beta'}A_{\gamma'})=g^{t\gamma'}g^{r\beta'}(\partial_t A_r-\partial_r A_t)(\partial_{\gamma'}A_{\beta'}-\partial_{\beta'}A_{\gamma'})+g^{r\gamma'}g^{t\beta'}(\partial_r A_t$$

$$-\partial_t A_r)(\partial_{\gamma'}A_{\beta'}-\partial_{\beta'}A_{\gamma'})+0=-A_t'g^{tt}g^{rr}(\partial_t A_r-\partial_r A_t)+A_t'g^{rr}g^{tt}(\partial_r A_t-\partial_t A_r)$$

$$=g^{tt}g^{rr}(A_t')^2+g^{tt}g^{rr}(A_t')^2=2g^{tt}g^{rr}(A_t')^2=\frac{-2}{r^{2z}f}r^2f(A_t')^2=\frac{-2(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}$$

$$F^2=g^{\gamma\gamma'}g^{\beta\beta'}F_{\gamma\beta}F_{\gamma'\beta'}=\frac{-2(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}. \tag{3.20}$$

La otra cantidad que se calcula es

$$g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi+\frac{1}{2}e^{\lambda\phi}g^{\gamma\gamma'}g^{\beta\beta'}F_{\gamma\beta}F_{\gamma'\beta'}=g^{rr}\partial_r\phi\partial_r\phi-\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}=r^2f\ (\phi')^2-\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}. \tag{3.21}$$

La forma de cada componente del tensor momento-energía, considerando las cantidades en (3.20) y (3.21), es

$$T_{tt}=-\frac{1}{4}\left[r^2f\ (\phi')^2-\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right](-r^{2z}f)+\frac{1}{2}\partial_t\phi\partial_t\phi+\frac{1}{2}g^{\nu'\mu'}F_{t\mu'}F_{t\nu'}e^{\lambda\phi}$$

$$=\frac{1}{4}\left[r^2f\ (\phi')^2-\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right]r^{2z}f+\frac{1}{2}g^{rr}F_{tr}F_{tr}e^{\lambda\phi}=\frac{1}{4}\left[r^2f\ (\phi')^2-\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right]r^{2z}f+\frac{1}{2}r^2f(A_t')^2e^{\lambda\phi}$$

$$T_{tt} = \frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 + \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right] r^{2z} f, \tag{3.22}$$

$$T_{rr} = -\frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right]\frac{1}{r^2 f} + \frac{1}{2}\partial_r\phi\partial_r\phi + \frac{1}{2}g^{\nu'\mu'}F_{r\mu'}F_{r\nu'} = -\frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right]\frac{1}{r^2 f}$$

$$+\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}g^{tt}F_{rt}F_{rt} = -\frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right]\frac{1}{r^2 f} + \frac{1}{2}(\phi')^2 - \frac{1}{2r^{2z}f}(A_t')^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right]\frac{1}{r^2 f}$$

$$T_{rr} = \frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right]\frac{1}{r^2 f} \tag{3.23}$$

y

$$T_{ij} = -\frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right] r^2\delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_j\phi + \frac{1}{2}g^{\mu'\nu'}F_{i\mu'}F_{j\nu'} = -\frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right] r^2\delta_{ij}$$

$$+0+0$$

$$T_{ij} = -\frac{1}{4}\left[r^2 f\ (\phi')^2 - \frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}\right] r^2\delta_{ij}. \tag{3.24}$$

Igualando la ecuación (3.17) con (3.22), (3.18) con (3.23) y (3.19) con (3.24), y reescribiendo términos, las ecuaciones de Einstein son

$$-Drf' - D(D+1)f - 2\Lambda = \frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 + e^{\lambda\phi}(A_t')^2], \tag{3.25}$$

$$Drf' + D(2z+D-1)f + 2\Lambda = \frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2], \tag{3.26}$$

$$r^2 f'' + (3z+2D-1)rf' + (2z^2+2Dz-2z+D^2-D)f + 2\Lambda = -\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2]. \tag{3.27}$$

La ecuación del potencial vectorial (2.7) en forma explísita es

$$0 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu(e^{\lambda\phi}F_{\nu\rho}) = g^{\mu\nu}[\partial_\mu(e^{\lambda\phi}F_{\nu\rho}) - e^{\lambda\phi}(\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}F_{\sigma\rho} + \Gamma_{\mu\ \rho}^{\ \sigma}F_{\nu\sigma})].$$

De esta expresión la única componente no trivial es cuando $\rho = t$

$$0 = g^{\mu\nu}\partial_\mu(e^{\lambda\phi}F_{\nu t}) - g^{\mu\nu}e^{\lambda\phi}(\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}F_{\sigma t} + \Gamma_{\mu\ t}^{\ \sigma}F_{\nu\sigma}) = g^{rr}\partial_r(e^{\lambda\phi}F_{rt}) - e^{\lambda\phi}[g^{tt}(\Gamma_{t\ t}^{\ \sigma}F_{\sigma t} + \Gamma_{t\ t}^{\ \sigma}F_{t\sigma})$$

$$+g^{rr}(\Gamma_{r\ r}^{\ \sigma}F_{\sigma t} + \Gamma_{r\ t}^{\ \sigma}F_{r\sigma}) + g^{ij}(\Gamma_{i\ j}^{\ \sigma}F_{\sigma t} + \Gamma_{i\ t}^{\ \sigma}F_{j\sigma})] = r^2 f(\lambda\phi' e^{\lambda\phi}A_t' + e^{\lambda\phi}A_t'')$$

$$-e^{\lambda\phi}[g^{tt}(\Gamma_{t\ t}^{\ r}F_{rt} + \Gamma_{t\ t}^{\ r}F_{tr}) + g^{rr}(\Gamma_{r\ r}^{\ r}F_{rt} + \Gamma_{r\ t}^{\ t}F_{rt}) + g^{ij}\Gamma_{i\ j}^{\ r}F_{rt}] = r^2 f e^{\lambda\phi}(\lambda\phi' A_t' + A_t'')$$

$$-e^{\lambda\phi}\left[r^2 f\left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{f'}{f} + \frac{z}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}\right)A_t' + \frac{1}{r^2}\delta_{ij}(-r^3)f\delta_{ij}A_t'\right]$$

$$= e^{\lambda\phi}r^2 f\left[\lambda\phi' A_t' + A_t'' + \left(\frac{1-z}{r}\right)A_t' + \frac{D}{r}A_t'\right],$$

entonces

$$A_t'' + \left[\lambda\phi' + \left(\frac{D-z+1}{r}\right)\right]A_t' = 0. \tag{3.28}$$

La ecuación para el campo escalar (2.6) en forma explícita es

$$\frac{\lambda}{4}e^{\lambda\phi}F^2 = \Box\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu\phi) = g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\partial_\nu\phi) = g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho}\partial_\rho\phi)$$

$$= g^{tt}(\partial_t^2\phi - \Gamma_{t\ t}^{\ \rho}\partial_\rho\phi) + g^{rr}(\partial_r^2\phi - \Gamma_{r\ r}^{\ \rho}\partial_\rho\phi) + g^{ij}(\partial_i\partial_j\phi - \Gamma_{i\ j}^{\ \rho}\partial_\rho\phi) = -g^{tt}\Gamma_{t\ t}^{\ r}\partial_r\phi$$

$$+g^{rr}(\phi'' - \Gamma_{r\ r}^{\ r}\phi') - g^{ij}\Gamma_{i\ j}^{\ r}\partial_r\phi = \frac{1}{r^{2z}f}\frac{1}{2}r^{2z+1}f(rf' + 2zf)\phi' + r^2 f\left(\phi'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}\right)\phi'\right)$$

$$-\frac{1}{r^2}\delta_{ij}(-r^3 f)\delta_{ij}\phi' = \left(\frac{1}{2}r^2 f' + zrf\right)\phi' + r^2 f\left(\phi'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}\right)\phi'\right) + \delta_{ii}rf\phi'$$

$$\left(\frac{1}{2}r^2 f' + zrf\right)\phi' + r^2 f\left(\phi'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}\right)\phi'\right) + Drf\phi' = \frac{\lambda}{4}e^{\lambda\phi}F^2.$$

Al sustituir la expresión (3.20), se tiene

$$\left(\frac{1}{2}r^2 f' + zrf\right)\phi' + r^2 f\left(\phi'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{f'}{f}\right)\phi'\right) + Drf\phi' = -\frac{\lambda}{2}e^{\lambda\phi}\frac{(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}$$

$$\frac{1}{2}r^2 f'\phi' + zrf\phi' + r^2 f\phi'' + rf\phi' + \frac{1}{2}r^2 f'\phi' + Drf\phi' = -\frac{\lambda}{2}\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}}.$$

En forma simplificada

$$\left[\left(\frac{z+D+1}{r}\right)\phi' + \phi''\right]f + f'\phi' = -\frac{\lambda}{2}\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2z}}. \tag{3.29}$$

Ahora se procede a resolver las ecuaciones de campo.
La suma de las ecuaciones (3.25) y (3.26) da

$$2D(z-1)f = r^2 f(\phi')^2$$

$$(\phi')^2 = \frac{2D(z-1)}{r^2}$$

$$\phi' = \pm\frac{\sqrt{2D(z-1)}}{r}.$$

Se considera el caso con el signo + para hacer más claros los cálculos, de esta forma

$$\phi' = \frac{\sqrt{2D(z-1)}}{r}, \tag{3.30}$$

$$\phi = \sqrt{2D(z-1)}\ Ln(r). \tag{3.31}$$

Nótese que esta expresión se obtuvo considerando la constante $r_0 = 1$, esto se hace sin pérdida de generalidad ya que no se alteran las ecuaciones de campo si ésta tiene un valor constante diferente.
La suma de las ecuaciones (3.26) y (3.27) da:

$$r^2 f'' + (3z + 3D - 1)rf' + (2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D)f + 4\Lambda = 0. \tag{3.32}$$

Se procede a resolver la ecuación homogénea

$$r^2 f'' + (3z + 3D - 1)rf' + (2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D)f = 0. \tag{3.33}$$

La ecuación homogénea tiene soluciones de la forma $f_0 = r^\alpha$, $f_0' = \alpha r^{\alpha-1}$ y $f_0'' = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ y al sustituir en (3.33)

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + (3z + 3D - 1)r\alpha r^{\alpha-1} + (2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D)r^\alpha = 0$$

$$[\alpha^2 - \alpha + (3z + 3D - 1)\alpha + (2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D)]r^\alpha = 0,$$

como $r^\alpha \neq 0$, entonces

$$\alpha^2 + (3z + 3D - 2)\alpha + (2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D) = 0.$$

Resolviendo para α se tiene

$$\alpha = \frac{-(3z + 3D - 2) \pm \sqrt{(3z + 3D - 2)^2 - 4(1)(2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D)}}{(2)(1)},$$

donde

$$(3z + 3D - 2)^2 - 4(2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D) = (3z + 3D)^2 - 4(3z + 3D) + 4 - 8z^2$$

$$-16Dz + 8z - 8D^2 + 8D = 9z^2 + 18Dz + 9D^2 - 12z - 12D + 4 - 8z^2 - 16Dz + 8z - 8D^2$$

$$+8D = z^2 + 2Dz + D^2 - 4z - 4D + 4 = (z + D)^2 - 4(z + D) + 4 = (z + D - 2)^2.$$

Así, los valores de α que se buscan son

$$\alpha_1 = \frac{-3z - 3D + 2 + z + D - 2}{2} = -(z + D).$$

$$\alpha_2 = \frac{-3z - 3D + 2 - z - D + 2}{2} = -2(z + D - 1).$$

Con estos valores la solución general de la ecuación homogénea (3.33) es

$$f_0(r) = c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}. \tag{3.34}$$

Ahora, una solución particular de la ecuación no homogénea, (3.32) es de la forma $f_p(r) = f_p = Ar + B$, $f_p' = A$ y $f_p'' = 0$, y sustituyendo en esta ecuación, se tiene

$$(3z + 3D - 1)rA + (2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D)(Ar + B) + 4\Lambda = 0.$$

$$[3z + 3D - 1 + 2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D]Ar + [(2z^2 + 4Dz - 2z + 2D^2 - 2D)B + 4\Lambda] = 0,$$

donde $A = 0$ y $B = \frac{-4\Lambda}{2z^2+4Dz-2z+2D^2-2D} = \frac{-2\Lambda}{(z+D)(z+D-1)}$, entonces

$$f_p(r) = \frac{-2\Lambda}{(z + D)(z + D - 1)}. \tag{3.35}$$

De lo contrario sólo se resolverá para ciertos valores de z y D, restringiendo la solución a estos valores.
De esta manera, la solución general de la ecuación (3.32) es

$$f(r) = f_0(r) + f_p(r) = c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)} - \frac{2\Lambda}{(z + D)(z + D - 1)}. \tag{3.36}$$

Por otro lado, al multiplicar la ecuación (3.25) por -1 y sumándola con (3.26) se obtiene

$$2Drf' + 2D(z + D)f + 4\Lambda = -\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2(z-1)}} \tag{3.37}$$

y de la expresión (3.31) se tiene $e^{\lambda\phi} = r^{\lambda\sqrt{2D(z-1)}}$, entonces la expresión anterior tiene la forma

$$2Drf' + 2D(z + D)f + 4\Lambda = -r^{2(1-z)+\lambda\sqrt{2D(z-1)}}(A_t')^2. \tag{3.38}$$

Con las expresiones de f y $f' = -c_1(z+D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z+D-1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}$ la ecuación (3.38) es

$$-r^{2(1-z)+\lambda\sqrt{2D(z-1)}}(A_t')^2 = 2Dr[-c_1(z+D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z+D-1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}]$$
$$+2D(z+D)\left[c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)} - \frac{2\Lambda}{(z+D)(z+D-1)}\right] + 4\Lambda = -2c_1 D(z$$
$$+D)r^{-(z+D)} - 4c_2 D(z+D-1)r^{-2(z+D-1)} + 2Dc_1(z+D)r^{-(z+D)} + 2D(z+D)c_2 r^{-2(z+D-1)}$$
$$-\frac{4\Lambda D}{z+D-1} + 4\Lambda = 2Dc_2[z+D-2z-2D+2]r^{-2(z+D-1)} + 4\Lambda\left(\frac{-D}{z+D-1}+1\right)$$
$$= -2Dc_2(z+D-2)r^{-2(z+D-1)} + \frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1},$$

de tal manera que

$$(A_t')^2 = 2c_2 D(z+D-2)r^{-2D-\lambda\sqrt{2D(z-1)}} - \frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1}r^{2(z-1)-\lambda\sqrt{2D(z-1)}}. \tag{3.39}$$

Sin embargo, hace falta considerar la ecuación del campo escalar y la del campo vectorial.
Al sustituir las expresiones (3.31), (3.36) y (3.39) en la ecuación para el campo escalar (3.29) se obtiene

$$\left[\left(\frac{z+D+1}{r}\right)\frac{\sqrt{2D(z-1)}}{r} - \frac{\sqrt{2D(z-1)}}{r^2}\right]\left[c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)} - \frac{2\Lambda}{(z+D)(z+D-1)}\right]$$
$$+[-c_1(z+D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z+D-1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}]\frac{\sqrt{2D(z-1)}}{r} = \frac{-\lambda}{2}r^{\lambda\sqrt{2D(z-1)}-2z}(A_t')^2$$
$$\frac{(z+D)\sqrt{2D(z-1)}}{r^2}[c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)} - \frac{2\Lambda}{(z+D)(z+D-1)}]$$
$$-c_1(z+D)\sqrt{2D(z-1)}r^{-(z+D+2)} - 2c_2(z+D-1)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)}$$
$$= -\frac{\lambda}{2}r^{\lambda\sqrt{2D(z-1)}-2z}[2c_2 D(z+D-2)r^{-2D-\lambda\sqrt{2D(z-1)}} - \frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1}r^{2(z-1)-\lambda\sqrt{2D(z-1)}}].$$

Entonces

$$c_1(z+D)\sqrt{2D(z-1)}r^{-(z+D+2)} + c_2(z+D)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)} - \frac{2\Lambda\sqrt{2D(z-1)}}{z+D-1}\frac{1}{r^2}$$
$$-c_1(z+D)\sqrt{2D(z-1)}r^{-(z+D+2)} - 2c_2(z+D-1)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)} = -\lambda c_2 D(z$$
$$+D-2)r^{-2(z+D)} + \frac{2\Lambda\lambda(z-1)}{z+D-1}\frac{1}{r^2}$$

$$c_2(z+D-2z-2D+2)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)} - \frac{2\Lambda\sqrt{2D(z-1)}}{z+D-1}\frac{1}{r^2}$$
$$= -\lambda c_2 D(z+D-2)r^{-2(z+D)} + \frac{2\Lambda\lambda(z-1)}{z+D-1}\frac{1}{r^2}$$

$$-c_2(z+D-2)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)} - \frac{2\Lambda\sqrt{2D(z-1)}}{z+D-1}\frac{1}{r^2} = -\lambda c_2 D(z+D-2)r^{-2(z+D)} + \frac{2\Lambda\lambda(z-1)}{z+D-1}\frac{1}{r^2}. \tag{3.40}$$

Nótese que si se igualan los coeficientes de las mismas potencias de r simultáneamente, se tiene

$$-c_2(z+D-2)\sqrt{2D(z-1)} = -\lambda c_2 D(z+D-2)$$
$$\sqrt{2D(z-1)} = \lambda D$$
$$\lambda = \sqrt{\frac{2(z-1)}{D}}, \tag{3.41}$$

y

$$-\frac{2\Lambda\sqrt{2D(z-1)}}{z+D-1} = \frac{2\Lambda\lambda(z-1)}{z+D-1}$$
$$\lambda(z-1) = -\sqrt{2D(z-1)}$$
$$\lambda = -\sqrt{\frac{2D}{z-1}}. \tag{3.42}$$

Pero esto lleva a dos valores distintos de λ (positivo y negativo a la vez) dando una inconsistencia. Así, la única manera para encontrar soluciones adecuadas es considerar dos casos: en el que $c_2 = 0$ o en el que $\Lambda = 0$.
Por otro lado, se resuelve la ecuación del campo vectorial, (3.28), sustituyendo la expresión de ϕ' (3.31)

$$A_t'' = -\left[\lambda\phi' + \left(\frac{z-D+1}{r}\right)\right]A_t' = -\left[\frac{\lambda\sqrt{2D(z-1)}}{r} + \frac{D-z+1}{r}\right]A_t'$$
$$= \frac{z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)}}{r}A_t',$$

entonces

$$\int \frac{A_t''}{A_t'}dr = (z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)})\int\frac{dr}{r}$$
$$Ln(\frac{A_t'}{A_0}) = (z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)})Ln(r)$$
$$A_t'(r) = A_0 r^{z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)}}. \tag{3.43}$$

Ahora, de acuerdo a todas las ecuaciones para que haya consistencia se deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones (3.39), (3.40) y (3.43) (sin olvidar las últimas observaciones sobre los posibles valores de λ para casos diferentes).

$$(A_t')^2 = 2c_2D(z+D-2)r^{-2D-\lambda\sqrt{2D(z-1)}} - \frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1}r^{2(z-1)-\lambda\sqrt{2D(z-1)}},$$

$$-c_2(z+D-2)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)} - \frac{2\Lambda\sqrt{2D(z-1)}}{z+D-1}\frac{1}{r^2} = -\lambda c_2 D(z+D-2)r^{-2(z+D)} + \frac{2\Lambda\lambda(z-1)}{z+D-1}\frac{1}{r^2}$$

y

$$(A_t')^2 = A_0^2 r^{2(z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)})}.$$

Capítulo 4

Resultados

Al considerar las últimas tres ecuaciones del capítulo anterior, se tiene los siguientes casos:

4.1. Caso A

En este caso se considera $c_2 = 0$, entonces de las ecuaciones (3.39) y (3.43)

$$-\frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1}r^{2(z-1)-\lambda\sqrt{2D(z-1)}} = A_0^2 r^{2(z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)})},$$

al igualar los coeficientes se tiene

$$A_0^2 = -\frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1},$$

mientras que al igualar las potencias

$$2(z-1) - \lambda\sqrt{2D(z-1)} = 2(z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)})$$

$$-\lambda\sqrt{2D(z-1)} = -2D - 2\lambda\sqrt{2D(z-1)}$$

$$\lambda = \frac{-2D}{\sqrt{2D(z-1)}}$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{2D}{z-1}}.$$

Por otro lado, la ecuación (3.40) se reduce a

$$-\frac{2\Lambda\sqrt{2D(z-1)}}{z+D-1}\frac{1}{r^2} = \frac{2\Lambda\lambda(z-1)}{z+D-1}\frac{1}{r^2}$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{2D}{z-1}}.$$

Así, las soluciones son

$$\phi(r) = \sqrt{2D(z-1)}Ln(r), \tag{4.1}$$

$$f(r) = c_1 r^{-(z+D)} - \frac{2\Lambda}{(z+D)(z+D-1)}, \tag{4.2}$$

$$(A_t')^2 = -\frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1}r^{2(z-D-1+2D)} = -\frac{4\Lambda(z-1)}{z+D-1}r^{2(z+D-1)} \tag{4.3}$$

y

$$\lambda = -\sqrt{\frac{2D}{z-1}}. \tag{4.4}$$

Estas soluciones fueron reportadas por M. Taylor en el artículo titulado "Non-relativistic holography". Hay consistencia en las soluciones porque la expresión de λ es la misma.

4.2. Caso B (Nueva solución)

En este caso, se considera que $\Lambda = 0$, entonces de la ecuación (3.39) y (3.43)

$$2c_2 D(z+D-2)r^{-2D-\lambda\sqrt{2D(z-1)}} = A_0^2 r^{2(z-D-1-\lambda\sqrt{2D(z-1)})},$$

al igualar los coeficientes se tiene

$$A_0^2 = 2c_2 D(z+D-2),$$

mientras que la igualdad en las potencias da

$$-2D - \lambda\sqrt{2D(z-1)} = 2z - 2D - 2 - 2\lambda\sqrt{2D(z-1)}$$

$$\lambda\sqrt{2D(z-1)} = 2(z-1)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2(z-1)}{D}}.$$

Por otro lado, de la ecuación (3.40)

$$-c_2(z+D-2)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)} = -\lambda c_2 D(z+D-2)r^{-2(z+D)}$$

$$\sqrt{2D(z-1)} = \lambda D$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2(z-1)}{D}}.$$

Nótese que hay consistencia ya que se llegó a la misma expresión de λ con ambas condiciones.
Así, la nueva solución es

$$\phi(r) = \sqrt{2D(z-1)}Ln(r), \tag{4.5}$$

$$f(r) = c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}, \tag{4.6}$$

$$(A_t')^2 = 2c_2 D(z+D-2)r^{-2D-\lambda\sqrt{2D(z-1)}} = 2c_2 D(z+D-2)r^{-2(z+D-1)} \tag{4.7}$$

y

$$\lambda = \sqrt{\frac{2(z-1)}{D}}. \tag{4.8}$$

Observación: La solución se obtuvo para $\phi' = \frac{\sqrt{2D(z-1)}}{r}$, un cálculo similar pero con $\phi' = -\frac{\sqrt{2D(z-1)}}{r}$ nos da las mismas soluciones, con excepción de que λ es ahora el valor negativo de la expresión calculada anteriormente.

Por lo tanto, la nueva solución encontrada y con la que se trabaja en lo que sigue de este trabajo es

$$\phi(r) = \pm\sqrt{2D(z-1)}Ln(r), \tag{4.9}$$

$$f(r) = c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}, \tag{4.10}$$

$$A_t(r) = \mp\sqrt{\frac{2c_2 D}{z+D-2}}r^{-(z+D-2)} + A_1 \tag{4.11}$$

y

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2(z-1)}{D}}. \tag{4.12}$$

En el Apéndice B se comprueba que las expresiones (4.9), (4.10), (4.11) y (4.12) son soluciones de la ecuaciones de campo (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29).
Mientras que en el apéndice C se calcula explícitamente los invariantes de curvatura con la solución encontrada en este caso B (expresión (4.10)), cuyas expresiones son

$$R = c_1 D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2(2z+3D-D^2-4)r^{-2(z+D-1)}, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} l = {} & c_1^2(z^2D^2 - Dz^2 - 3Dz + D^3 + D^2 - D)r^{-2(z+D)} + c_1c_2(-Dz^2 - 2D^3z + D^2z \\ & +2D^3 - 4D^2 - 4Dz + 2z + 4D)r^{-(3z+3D-2)} + c_2^2(6z^4 + 35Dz^3 + 15D^2z^2 - 4z^3 \\ & +9Dz^2 + 3D^3z + 2D^4 - 3D^2z - 6D^3 + 15D^2 + 6Dz - 8z - 17D + 8)r^{-4(z+D-1)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

y

$$\begin{aligned} K = {} & c_1^2(D^2z^2 + 2Dz^2 - 2D^3z - 4Dz + D^4 + 2D^3 - 2D^2 + 2D)r^{-2(z+D)} \\ & +c_1c_2(-4D^2z^2 + 8Dz^2 - 4D^3z + 16D^2z + 8D^4 - 8D^3 - 20Dz - 8D^2 + 12D)r^{-(3z+3D-2)} \\ & c_2^2(48Dz^3 + 4D^2z^2 + 12Dz^2 + 4z^2 + 16D^3z + 16D^4 - 40D^2z - 56D^3 + 74D^2 + 32Dz \\ & -16z - 46D + 16)r^{-4(z+D-1)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nótese que hay una singularidad en $r=0$, ya que $R, l, K \to \pm\infty$ (según sea el caso) cuando $r \to 0$. También, $R, l, K \to 0$ cuando $r \to \infty$.
Por otro lado el horizonte de eventos es definido como

$$0 = f(r_H) = c_1 r_H^{-(z+D)} + c_2 r_H^{-2(z+D-1)}$$

de donde

$$r_H = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{z+D-2}}. \tag{4.16}$$

Este horizonte de eventos existe ya que en el límite de la relatividad general con mecánica clásica $c_2 > 0$ y $c_1 < 0$.
Entonces los invariantes de curvatura evaluados en el horizonte de eventos son

$$R = c_1 D(z-1)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{(z+D)}{z+D-2}} + c_2(2z+3D-D^2-4)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{2(z+D-1)}{z+D-2}}, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} l = {} & c_1^2(z^2D^2 - Dz^2 - 3Dz + D^3 + D^2 - D)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{2(z+D)}{z+D-2}} + c_1c_2(-Dz^2 - 2D^3z + D^2z \\ & +2D^3 - 4D^2 - 4Dz + 2z + 4D)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{(3z+3D-2)}{z+D-2}} + c_2^2(6z^4 + 35Dz^3 + 15D^2z^2 - 4z^3 \\ & +9Dz^2 + 3D^3z + 2D^4 - 3D^2z - 6D^3 + 15D^2 + 6Dz - 8z - 17D + 8)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{4(z+D-1)}{z+D-2}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

y

$$K = c_1^2(D^2z^2 + 2Dz^2 - 2D^3z - 4Dz + D^4 + 2D^3 - 2D^2 + 2D)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{2(z+D)}{z+D-2}} \tag{4.19}$$
$$+c_1c_2(-4D^2z^2 + 8Dz^2 - 4D^3z + 16D^2z + 8D^4 - 8D^3 - 20Dz - 8D^2 + 12D)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{(3z+3D-2)}{z+D-2}}$$
$$+c_2^2(48Dz^3 + 4D^2z^2 + 12Dz^2 + 4z^2 + 16D^3z + 16D^4 - 40D^2z - 56D^3 + 74D^2 + 32Dz$$
$$-16z - 46D + 16)\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{4(z+D-1)}{z+D-2}}.$$

Donde R, l, K son finitos ya que z, D, c_1 y c_2 son finitas.

De lo anterior, se concluye que la solución encontrada, (4.10), es un agujero negro. Además, este agujero negro tiende asintóticamente a un espacio-tiempo plano, ya que los invariantes de curvatura tienden a cero cuando $r \to \infty$.

4.3. Deducción de la forma que toma la métrica como solución encontrada en el caso B

A partir de la forma propuesta para la métrica como solución

$$ds^2 = -r^{2z}f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2f(r)} + r^2dx_i^2$$

con $i = 1, ..., D$
y con la expresión encontrada $f(r) = c_1r^{-(z+D)} + c_2r^{-2(z+D-1)}$ se tienen los siguientes casos:

Caso B.1

En este caso se considera que

$$f(r) = r^{-(z+D)}(c_1 + c_2r^{-(z+D-2)}) = r^{-(z+D)}\widetilde{f}(r) \tag{4.20}$$

con

$$\widetilde{f}(r) = c_1 + c_2r^{-(z+D-2)}. \tag{4.21}$$

Entonces la métrica toma la forma

$$ds^2 = -r^{2z}r^{-(z+D)}\widetilde{f}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2r^{-(z+D)}\widetilde{f}(r)} + r^2dx_i^2$$

$$ds^2 = r^{z+D}\left(-r^{2z-2(z+D)}\widetilde{f}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2\widetilde{f}(r)} + r^{2-(z+D)}dx_i^2\right)$$

$$ds^2 = r^{z+D}\left(-r^{-2D}\widetilde{f}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2\widetilde{f}(r)} + r^{2-z-D}dx_i^2\right).$$

Con el cambio de variable $r^{2-z-D} = R^{-2}$, se observa que

$$r = R^{\frac{-2}{2-z-D}} = R^{\frac{2}{z+D-2}}$$

$$dr = \frac{2}{z+D-2}R^{\frac{2}{z+D-2}-1}dR$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2}{z+D-2}\frac{dR}{R}$$
$$\frac{dr^2}{r^2} = \frac{4}{(z+D-2)^2}\frac{dR^2}{R^2}.$$

Entonces

$$ds^2 = R^{\frac{2(z+D)}{z+D-2}}\left(-R^{-\frac{4D}{z+D-2}}\widetilde{f}(R^{\frac{2}{z+D-2}})dt^2 + \frac{4}{(z+D-2)^2}\frac{dR^2}{R^2\widetilde{f}(R^{\frac{2}{z+D-2}})} + R^{-2}dx_i^2\right)$$

$$ds^2 = \frac{4}{(z+D-2)^2}R^{\frac{2(z+D)}{z+D-2}}\left(-\frac{(z+D-2)^2}{4}\frac{\widetilde{f}(R^{\frac{2}{z+D-2}})dt^2}{R^{\frac{4D}{z+D-2}}} + \frac{dR^2}{R^2\widetilde{f}(R^{\frac{2}{z+D-2}})} + \frac{(z+D-2)^2}{4}\frac{dx_i^2}{R^2}\right).$$

Esta métrica toma una forma más compacta si se considera la definición de las siguientes variables

$$\widetilde{z} = \frac{2D}{z+D-2}, \tag{4.22}$$

$$\left(\frac{z+D-2}{2}\right)t = i\tau, \tag{4.23}$$

$$\widetilde{x}_i = \left(\frac{z+D-2}{2}\right)x_i \tag{4.24}$$

y

$$g(R) = \widetilde{f}(R^{\frac{2}{z+D-2}}) = c_1 + c_2(R^{\frac{2}{z+D-2}})^{-(z+D-2)} = c_1 + \frac{c_2}{R^2}.$$

Así, la forma de la métrica es

$$ds^2 = \frac{4}{(z+D-2)^2}R^{\frac{2(z+D)}{z+D-2}}\left(\frac{g(R)d\tau^2}{R^{2\widetilde{z}}} + \frac{dR^2}{R^2 g(R)} + \frac{d\widetilde{x}_i^2}{R^2}\right) \tag{4.25}$$

con

$$g(R) = c_1 + \frac{c_2}{R^2}. \tag{4.26}$$

Al considerar que $z = \frac{2D-\widetilde{z}(D-2)}{\widetilde{z}}$, $z+D-2 = \frac{2D}{\widetilde{z}}$ y $z+D = \frac{2(D+\widetilde{z})}{\widetilde{z}}$, entonces la expresión final de la métrica es

$$ds^2 = (\frac{\widetilde{z}}{D})^2 R^{\frac{2\theta}{D}}\left(\frac{g(R)d\tau^2}{R^{2\widetilde{z}}} + \frac{dR^2}{R^2 g(R)} + \frac{d\widetilde{x}_i^2}{R^2}\right) \tag{4.27}$$

con

$$\theta = D + \widetilde{z}. \tag{4.28}$$

Pero como $g(0) = \pm\infty$, no se cumple la condición para encontrar una métrica que asintóticamente tienda a una que tenga exponente de violación de hiperescala y exponente dinámico crítico.

Caso B.2

En este caso se considera

$$f(r) = r^{-2(z+D-1)}(c_2 + c_1 r^{z+D-2}) = r^{-2(z+D-1)}\overline{f}(r) \tag{4.29}$$

con

$$\overline{f}(r) = c_2 + c_1 r^{z+D-2}. \tag{4.30}$$

La métrica es

$$ds^2 = -r^{2z}r^{-2(z+D-1)}\overline{f}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 r^{-2(z+D-1)}\overline{f}(r)} + r^2 dx_i^2$$

$$ds^2 = r^{2(z+D-1)}\left(-r^{2z-4(z+D-1)}\overline{f}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2\overline{f}(r)} + r^{2-2(z+D-1)}dx_i^2\right)$$

$$ds^2 = r^{2(z+D-1)}\left(-r^{-2(z+2D-2)}\overline{f}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2\overline{f}(r)} + r^{-2(z+D-2)}dx_i^2\right).$$

Con el cambio de variable $r^{-2(z+D-2)} = R^{-2}$, se tiene

$$r = R^{\frac{1}{z+D-2}}$$

$$dr = \frac{1}{z+D-2}R^{\frac{1}{z+D-2}-1}dR$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{z+D-2}\frac{1}{R}dR$$

$$\frac{dr^2}{r^2} = \frac{1}{(z+D-2)^2}\frac{dR^2}{R^2},$$

entonces

$$ds^2 = R^{\frac{2(z+D-1)}{z+D-2}}\left(-R^{-\frac{2(z+2D-2)}{z+D-2}}\overline{f}(R^{\frac{1}{z+D-2}})dt^2 + \frac{1}{(z+D-2)^2}\frac{dR^2}{R^2\overline{f}(R^{\frac{1}{z+D-2}})} + R^{-2}dx_i^2\right)$$

$$ds^2 = \frac{1}{(z+D-2)^2}R^{\frac{2(z+D-1)}{z+D-2}}\left(-(z+D-2)^2\frac{\overline{f}(R^{\frac{1}{z+D-2}})dt^2}{R^{\frac{2(z+2D-2)}{z+D-2}}} + \frac{dR^2}{R^2\overline{f}(R^{\frac{1}{z+D-2}})}\right.$$
$$\left. +(z+D-2)^2\frac{1}{R^2}dx_i^2\right).$$

Para obtener una métrica más compacta se definen las siguientes variables

$$\widetilde{z} = \frac{z+2D-2}{z+D-2}, \tag{4.31}$$

$$(z+D-2)t = i\tau, \tag{4.32}$$

$$\widetilde{x}_i = (z+D-2)x_i, \tag{4.33}$$

$$h(R) = \overline{f}(R^{\frac{1}{z+D-2}}) = c_2 + c_1(R^{\frac{1}{z+D-2}})^{z+D-2} = c_2 + c_1 R,$$

$$ds^2 = \frac{1}{(z+D-2)^2}R^{\frac{2(z+D-1)}{z+D-2}}\left(\frac{h(R)d\tau^2}{R^{2\widetilde{z}}} + \frac{dR^2}{R^2 h(R)} + \frac{d\widetilde{x}_i^2}{R^2}\right) \tag{4.34}$$

con

$$h(R) = c_2 + c_1 R. \tag{4.35}$$

Además, al considerar que $z = \frac{D+(1-\widetilde{z})(D-2)}{\widetilde{z}-1}$, $z+D-1 = \frac{D+\widetilde{z}-1}{\widetilde{z}-1}$ y $z+D-2 = \frac{D}{\widetilde{z}-1}$ la forma final de la métrica euclídea es

$$ds^2 = \left(\frac{\widetilde{z}-1}{D}\right)^2 R^{\frac{2\theta}{D}}\left(\frac{h(R)d\tau^2}{R^{2\widetilde{z}}} + \frac{dR^2}{R^2 h(R)} + \frac{d\widetilde{x}_i^2}{R^2}\right) \tag{4.36}$$

con

$$\theta = D + \widetilde{z} - 1. \tag{4.37}$$

Mientras que la forma final de la métrica pseudoeuclídea se obteniene haciendo los mismos cambios anteriores en el caso B.2 con excepción de que $(z+D-2)t = \widetilde{\tau}$. La forma de esta métrica es

$$ds^2 = \left(\frac{\widetilde{z}-1}{D}\right)^2 R^{\frac{2\theta}{D}}\left(-\frac{h(R)d\widetilde{\tau}^2}{R^{2\widetilde{z}}} + \frac{dR^2}{R^2 h(R)} + \frac{d\widetilde{x}_i^2}{R^2}\right). \tag{4.38}$$

Nótese que este tipo de transformación permite establecer que $h(0) = c_2 = 1$, consideración importante para trabajar con las métricas que tienden asintóticamente a una que tiene exponente dinámico crítico y exponente de violación de hiperescala.
La métrica (4.36) es la única que cumple la propiedad de métricas euclídeas con violación de hiperescala y será en base a ésta para determinar las propiedades termodinámicas del agujero negro.
Además, como se mencionó anteriormente, al establecer la conexión en el límite de la mecánica clásica con la relatividad general tenemos que $c_1 < 0$. Sin embargo, en lo que sigue vamos a seguir considerando a las constantes c_1 y c_2, sin olvidar que $c_1 < 0$ y que $c_2 = 1$.
También, se cumple que $\widetilde{z} = \frac{z+2D-2}{z+D-2} = 1 + \frac{D}{z+D-2} > 1$ ya que $z > 1$.

Capítulo 5

Nueva forma de la métrica pseudoeuclídea como solución a las ecuaciones de Einstein

Con respecto a los resultados encontrados en el caso B.2 del capítulo anterior, en el espacio-tiempo descrito por la geometría pseudoeuclídea (4.38) las expresiones (4.9), (4.11) y (4.12) en términos de $\widetilde{z}$ y R son

$$\widetilde{\phi}(R) = \phi(R^{\frac{1}{z+D-2}}) = \pm\sqrt{2D(z-1)}Ln(R^{\frac{1}{z+D-2}}) = \pm\frac{\sqrt{2D(z-1)}}{z+D-2}Ln(R),$$

pero $z-1 = \frac{2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1}{\widetilde{z}-1}$ y $z+D-2 = \frac{D}{\widetilde{z}-1}$, entonces

$$\widetilde{\phi}(R) = \pm\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-1-D\widetilde{z}+\widetilde{z})}{D}}Ln(R). \tag{5.1}$$

También, de la ecuación (4.11) se tiene

$$\widetilde{A}_{\widetilde{\tau}}(R) = A_t(R^{\frac{1}{z+D-2}}) = \mp\sqrt{\frac{2c_2D}{z+D-2}}(R^{\frac{1}{z+D-2}})^{-(z+D-2)} + A_1 = \mp\sqrt{\frac{2c_2D}{z+D-2}}\frac{1}{R} + A_1,$$

entonces

$$\widetilde{A}_{\widetilde{\tau}}(R) = \mp\sqrt{2c_2(\widetilde{z}-1)}\frac{1}{R} + A_1. \tag{5.2}$$

Por otro lado, de la ecuación (4.12) y de que $z-1 = \frac{2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1}{\widetilde{z}-1}$ se tiene

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2(2D-1-D\widetilde{z}+\widetilde{z})}{D(\widetilde{z}-1)}}. \tag{5.3}$$

Ahora, se verificará que las expresiones (5.1), (5.2), (5.3) y (4.35) son soluciones de las ecuaciones de campo para el espacio descrito por la geometría (4.38). Para esto, se escribe esta métrica en forma matricial, en el orden $(\widetilde{\tau}, R, \widetilde{x}_i)$ para $i = 1, ..., D$, como:

$$(\bar{g}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(\frac{\widetilde{z}-1}{D})^2R^{\frac{2(D+\widetilde{z}-1)}{D}-2\widetilde{z}}h(R) & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\widetilde{z}-1}{D})^2R^{\frac{2(D+\widetilde{z}-1)}{D}-2}\frac{1}{h(R)} & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\widetilde{z}-1}{D})^2R^{\frac{2(D+\widetilde{z}-1)}{D}-2} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

y

$$(\bar{g}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(\frac{D}{\widetilde{z}-1})^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(D+\widetilde{z}-1)}{D}} \frac{1}{h(R)} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{D}{\widetilde{z}-1})^2 R^{2-\frac{2(D+\widetilde{z}-1)}{D}} h(R) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{D}{\widetilde{z}-1})^2 R^{2-\frac{2(D+\widetilde{z}-1)}{D}} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Un cálculo similar al del sistema inicial permite encontrar los símbolos de Christoffel para esta métrica pseudoeuclídea. Considerando que $h = h(R)$, $h' = h'(R) = \frac{dh(R)}{dR}$ y $h'' = h''(R) = \frac{d^2h(R)}{dR^2}$, los símbolos distintos de cero son:

$$\bar{\Gamma}_{\widetilde{\tau}\ R}^{\ \widetilde{\tau}} = -\frac{(D-1)(\widetilde{z}-1)}{DR} + \frac{1}{2}\frac{h'}{h} = \bar{\Gamma}_{R\ \widetilde{\tau}}^{\ \widetilde{\tau}}, \tag{5.6}$$

$$\bar{\Gamma}_{\widetilde{\tau}\ \widetilde{\tau}}^{\ R} = \frac{R^{1-2\widetilde{z}}h[-2(D-1)(\widetilde{z}-1)h + DRh']}{2D}, \tag{5.7}$$

$$\bar{\Gamma}_{R\ R}^{\ R} = \frac{\widetilde{z}-1}{DR} - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}, \tag{5.8}$$

$$\bar{\Gamma}_{i\ j}^{\ R} = -\left(\frac{\widetilde{z}-1}{DR}\right) h\delta_{ij} = \bar{\Gamma}_{j\ i}^{\ R}, \tag{5.9}$$

$$\bar{\Gamma}_{R\ j}^{\ i} = \left(\frac{\widetilde{z}-1}{DR}\right) \delta_{ij} = \bar{\Gamma}_{j\ R}^{\ i}. \tag{5.10}$$

Las componentes del tensor de Ricci en este sistema son:

$$\bar{R}_{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau}} = \frac{-2(\widetilde{z}-1)(D-1)R^{1-2\widetilde{z}}hh' + 2(D-1)(\widetilde{z}-1)R^{-2\widetilde{z}}h^2 + DR^{2(1-\widetilde{z})}hh''}{2D}, \tag{5.11}$$

$$\bar{R}_{RR} = \frac{2(\widetilde{z}-1)[1-(\widetilde{z}-1)(D-1)]h - DR^2h'' + 2(D-1)(\widetilde{z}-1)Rh'}{2DR^2h}, \tag{5.12}$$

$$\bar{R}_{ij} = \left(\frac{\widetilde{z}-1}{DR^2}\right)[h - Rh']\delta_{ij} \tag{5.13}$$

y el escalar de Ricci es

$$\bar{R} = \left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{-\frac{2(D+\widetilde{z}-1)}{D}} \left\{\frac{(\widetilde{z}-1)[1+D+\widetilde{z}(1-D)]h + (\widetilde{z}-1)(D-2)Rh' - DR^2h''}{D}\right\}. \tag{5.14}$$

Además, la acción para esta nueva métrica tiene la forma (con $\Lambda = 0$)

$$S = \int d^{D+2}\widetilde{x}[\bar{R} - \tfrac{1}{2}(\bar{\nabla}\widetilde{\phi})^2 - \tfrac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\bar{F}^2]\sqrt{-\bar{g}}. \tag{5.15}$$

De manera similar a como se determinaron las ecuaciones de campo del sistema inicial, para este nuevo sistema, las ecuaciones de Einstein son

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \bar{T}_{\mu\nu}, \tag{5.16}$$

con

$$\bar{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\bar{g}_{\mu\nu}[\bar{g}^{\rho\sigma}\partial_\rho\widetilde{\phi}\partial_\sigma\widetilde{\phi} + \frac{1}{2}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\bar{g}^{\gamma\gamma'}\bar{g}^{\beta\beta'}\bar{F}_{\gamma\beta}\bar{F}_{\gamma'\beta'}] + \frac{1}{2}\partial_\mu\widetilde{\phi}\partial_\nu\widetilde{\phi} + \frac{1}{2}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\bar{g}^{\nu'\mu'}\bar{F}_{\nu\nu'}\bar{F}_{\mu\mu'}. \tag{5.17}$$

La ecuación para el potencial vectorial $\bar{A}_\mu$ es

$$0 = \bar{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu(e^{\lambda\widetilde{\phi}}\bar{F}_{\nu\rho}) = \bar{g}^{\mu\nu}[\partial_\mu(e^{\lambda\widetilde{\phi}}\bar{F}_{\nu\rho}) - e^{\lambda\widetilde{\phi}}(\bar{\Gamma}_{\mu\ \nu}^{\ \sigma}\bar{F}_{\sigma\rho} + \bar{\Gamma}_{\mu\ \rho}^{\ \sigma}\bar{F}_{\nu\sigma})]. \tag{5.18}$$

La ecuación para el campo escalar $\widetilde{\phi}$ es

$$\frac{\lambda}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\bar{F}^2 = \Box\widetilde{\phi} = \bar{g}^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\widetilde{\phi} - \bar{\Gamma}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}\partial_\rho\widetilde{\phi}). \tag{5.19}$$

A partir de las expresiones (5.16) y (5.17), y considerando el ansatz $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(R)$, $\bar{A}_\mu = (\bar{A}_{\widetilde{\tau}} = \bar{A}_{\widetilde{\tau}}(R), 0, ..., 0)$ ($\widetilde{\phi}' = \frac{d\widetilde{\phi}}{dR}$ y $\bar{A}'_{\widetilde{\tau}} = \frac{d\bar{A}_{\widetilde{\tau}}}{dR}$), las ecuaciones de Einstein tienen la forma explícita

$$\frac{(\widetilde{z}-1)(3D - D\widetilde{z} + \widetilde{z} - 1)h - D(\widetilde{z}-1)Rh'}{2DR^2h} = \frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 + \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}\frac{(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2}{h}, \tag{5.20}$$

$$\frac{-(D-1)(\widetilde{z}-1)^2h + D(\widetilde{z}-1)Rh'}{2DR^2h} = \frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 - \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}\frac{(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2}{h} \tag{5.21}$$

y

$$\frac{(D-1)(\widetilde{z}-1)^2h - D(\widetilde{z}-1)Rh' + DR^2h''}{2DR^2h} = -\frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 + \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}\frac{(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2}{h}. \tag{5.22}$$

La ecuación para el campo vectorial es

$$\left[\lambda\widetilde{\phi}' + \frac{2(\widetilde{z}-1)(D-1)}{DR}\right]\bar{A}'_{\widetilde{\tau}} + \bar{A}''_{\widetilde{\tau}} = 0. \tag{5.23}$$

La ecuación para el campo escalar resulta ser

$$R^2h'\widetilde{\phi}' + R^2h\widetilde{\phi}'' = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^4(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2. \tag{5.24}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, primero se suman las ecuaciones (5.20) y (5.21)

$$\frac{(\widetilde{z}-1)[3D - D\widetilde{z} + \widetilde{z} - 1 - D\widetilde{z} + D + \widetilde{z} - 1]}{2DR^2} = \frac{1}{2}(\widetilde{\phi}')^2$$

$$\widetilde{\phi}'(R) = \pm\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D - D\widetilde{z} + \widetilde{z} - 1)}{D}}\frac{1}{R}$$

$$\widetilde{\phi}(R) = \pm\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D - D\widetilde{z} + \widetilde{z} - 1)}{D}}Ln(\frac{R}{R_0}) \tag{5.25}$$

donde R_0 es una constante.
Ahora, al sumar las ecuaciones (5.21) y (5.22) se tiene

$$\frac{DR^2h''}{2DR^2h} = 0,$$

aquí se necesita que el denominador sea distinto de cero, así

$$h''(R) = 0,$$

por lo tanto,

$$h(R) = \widetilde{c}_2 + \widetilde{c}_1R. \tag{5.26}$$

Al restar la ecuación (5.21) de la ecuación (5.20)

$$\frac{(\widetilde{z}-1)[(3D - D\widetilde{z} + \widetilde{z} - 1 + D\widetilde{z} - D - \widetilde{z} + 1)h - 2DRh']}{2DR^2h} = \frac{1}{2}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}\frac{(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2}{h}$$

$$\frac{2D(\widetilde{z}-1)(h-Rh')}{DR^2} = e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2$$

y sutituyendo la expresión (5.26) de h en la ecuación anterior se tiene

$$\frac{2(\widetilde{z}-1)[\widetilde{c}_2+\widetilde{c}_1R-\widetilde{c}_1R]}{R^2} = e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2$$

$$(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = 2\widetilde{c}_2\frac{(\widetilde{z}-1)^3}{D^2}R^{-2-2\widetilde{z}+\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}e^{-\lambda\widetilde{\phi}}.$$

La sustitución de la expresión (5.25) en la ecuación anterior da

$$(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = 2\widetilde{c}_2\frac{(\widetilde{z}-1)^3}{D^2}R^{-2\widetilde{z}+\frac{2(\widetilde{z}-1)}{D}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\mp\lambda\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}}. \tag{5.27}$$

Por otro lado, al resolver la ecuación (5.23) para la componente distinta de cero del potencial vectorial

$$\frac{\bar{A}''_{\widetilde{\tau}}}{\bar{A}'_{\widetilde{\tau}}} = -\left[\lambda\phi' + \frac{2(\widetilde{z}-1)(D-1)}{DR}\right] = -\left[\pm\lambda\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}} + \frac{2(\widetilde{z}-1)(D-1)}{D}\right]\frac{1}{R}$$

$$\bar{A}'_{\widetilde{\tau}}(R) = A_0R^{\left[\mp\lambda\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}-\frac{2(\widetilde{z}-1)(D-1)}{D}\right]},$$

entonces

$$(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}}(R))^2 = A_0^2R^{2\left[\mp\lambda\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}-\frac{2(\widetilde{z}-1)(D-1)}{D}\right]}. \tag{5.28}$$

Una comparación de las ecuaciones (5.27) y (5.28) permite obtener una igualación de las potencias

$$\mp\lambda\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}-2\widetilde{z}+\frac{2(\widetilde{z}-1)}{D} = \mp2\lambda\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}-\frac{4(\widetilde{z}-1)(D-1)}{D}$$

$$\pm\lambda\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}} = -\frac{4(\widetilde{z}-1)(D-1)}{D}+2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}-1)}{D} = \frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D},$$

entonces

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D(\widetilde{z}-1)}} \tag{5.29}$$

y

$$(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = 2\widetilde{c}_2\frac{(\widetilde{z}-1)^3}{D^2}R^{-2\widetilde{z}+\frac{2(\widetilde{z}-1)}{D}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}. \tag{5.30}$$

Finalmente, se verifica que las expresiones (5.25), (5.26), (5.29) y (5.30) son soluciones de las ecuaciones (5.20), (5.21), (5.22), (5.23) y (5.24).
Para la ecuación (5.20), del primer miembro se tiene

$$\frac{(\widetilde{z}-1)(3D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)h-D(\widetilde{z}-1)Rh'}{2DR^2} = \frac{(\widetilde{z}-1)(3D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)(\widetilde{c}_2+\widetilde{c}_1R)-D(\widetilde{z}-1)R\widetilde{c}_1}{2DR^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\widetilde{z}-1)(3D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)h-D(\widetilde{z}-1)Rh'}{2DR^2} &= \frac{(\widetilde{z}-1)(3D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_2}{R^2} \\ &+\frac{(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_1}{R^2},\end{aligned} \tag{5.31}$$

y del segundo miembro

$$\frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 h + \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = \frac{1}{4}\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}\frac{1}{R^2}(\widetilde{c}_2+\widetilde{c}_1 R)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}} 2\widetilde{c}_2\frac{(\widetilde{z}-1)^3}{D^2}R^{-2\widetilde{z}+\frac{2(\widetilde{z}-1)}{D}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}$$
$$= \frac{(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\left(\frac{\widetilde{c}_2}{R^2}+\frac{\widetilde{c}_1}{R}\right)+\frac{1}{2}(\widetilde{z}-1)\frac{\widetilde{c}_2}{R^2}$$

$$\frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 h + \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = \frac{(\widetilde{z}-1)(3D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_2}{R^2} + \frac{(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_1}{R^2}. \tag{5.32}$$

A partir de las ecuaciones (5.31) y (3.32) se verifica la ecuación (5.20).
Para el caso de la ecuación (5.21), el primer miembro es igual a

$$\frac{-(D-1)(\widetilde{z}-1)^2 h + D(\widetilde{z}-1)Rh'}{2DR^2} = \frac{(\widetilde{z}-1)[-(D-1)(\widetilde{z}-1)(\widetilde{c}_2+\widetilde{c}_1 R)+DR\widetilde{c}_1]}{2DR^2}$$
$$= \frac{(\widetilde{z}-1)[(-D\widetilde{z}+D+\widetilde{z}-1)(\widetilde{c}_2+\widetilde{c}_1 R)+DR\widetilde{c}_1]}{2DR^2}$$

$$\frac{-(D-1)(\widetilde{z}-1)^2 h + D(\widetilde{z}-1)Rh'}{2DR^2} = \frac{(\widetilde{z}-1)(-D\widetilde{z}+D+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_2}{R^2} + \frac{(\widetilde{z}-1)(-D\widetilde{z}+2D+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_1}{R}, \tag{5.33}$$

y el segundo miembro es igual a

$$\frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 h - \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = \frac{1}{4}\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}\frac{1}{R^2}(\widetilde{c}_2+\widetilde{c}_1 R)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}} 2\widetilde{c}_2\frac{(\widetilde{z}-1)^3}{D^2}R^{-2\widetilde{z}+\frac{2(\widetilde{z}-1)}{D}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}$$
$$= \frac{(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\left(\frac{\widetilde{c}_2}{R^2}+\frac{\widetilde{c}_1}{R}\right)-\frac{1}{2}(\widetilde{z}-1)\frac{\widetilde{c}_2}{R^2}$$

$$\frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 h - \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = \frac{(\widetilde{z}-1)(D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_2}{R^2} + \frac{(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_1}{R}. \tag{5.34}$$

Al comparar los segundos miembros de las ecuaciones (5.33) y (5.34) se verifica la ecuación (5.21).
Para la ecuación (5.22), tomemos en cuenta que $h''(R)=0$ y las ecuaciones (5.33) y (5.34), de tal manera que

$$\frac{(D-1)(\widetilde{z}-1)^2 h - D(\widetilde{z}-1)Rh' + DR^2 h''}{2DR^2} = -\frac{(\widetilde{z}-1)(-D\widetilde{z}+D+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_2}{R^2} - \frac{(\widetilde{z}-1)(-D\widetilde{z}+2D+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_1}{R}, \tag{5.35}$$

$$-\frac{1}{4}(\widetilde{\phi}')^2 h + \frac{1}{4}e^{\lambda\widetilde{\phi}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^{2\widetilde{z}-\frac{2(\widetilde{z}+D-1)}{D}}(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = -\frac{(\widetilde{z}-1)(D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_2}{R^2} - \frac{(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{2D}\frac{\widetilde{c}_1}{R}. \tag{5.36}$$

Al comparar las ecuaciones (5.35) y (5.36) se verifica la ecuación (5.22).
Para comprobar la ecuación (5.23) recordar que $R_0 = cte$, entonces la ecuación (5.30) se escribe como $\bar{A}'_{\widetilde{\tau}} = \bar{A}'_{\widetilde{\tau}}(R) = \pm A_0 R^{-2}$ con $A_0 = cte$, entonces

$$\left[\lambda\widetilde{\phi}' + \frac{2(\widetilde{z}-1)(D-1)}{DR}\right]\bar{A}'_{\widetilde{\tau}} + \bar{A}''_{\widetilde{\tau}} = \left[\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D} + \frac{2(\widetilde{z}-1)(D-1)}{D}\right]\frac{1}{R}(\pm A_0 R^{-2})$$
$$+(\mp 2A_0R^{-3}) = \pm 2A_0 R^{-3} \mp 2A_0 R^{-3} = 0,$$

lo cual verifica la ecuación (5.23).
Para la ecuación (5.24), el primer miembro es igual a

$$R^2 h'\phi' + R^2 h\phi'' = \pm R^2\widetilde{c}_1\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}\frac{1}{R}$$
$$\mp R^2(\widetilde{c}_2 + \widetilde{c}_1 R)\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}\frac{1}{R^2}$$
$$R^2 h'\phi' + R^2 h\phi'' = \mp\widetilde{c}_2\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}, \tag{5.37}$$

y el segundo miembro es igual a

$$-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^4(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D(\widetilde{z}-1)}}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^4 2\widetilde{c}_2\frac{(\widetilde{z}-1)^3}{D^2}\frac{R_0^{\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}}{R^4}$$
$$-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{D}{\widetilde{z}-1}\right)^2 R^4(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = \mp\widetilde{c}_2\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}R_0^{\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}. \tag{5.38}$$

Al sustituir las expresiones (3.37) y (3.38) en la ecuación (3.24) se tiene

$$\mp\widetilde{c}_2\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}} = \mp\widetilde{c}_2\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}R_0^{\frac{2(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}.$$

Esto nos indica que $R_0 = 1$.
Por lo tanto, las expresiones finales de las soluciones de este sistema con métrica pseudoeuclídea son

$$\widetilde{\phi}(R) = \pm\sqrt{\frac{2(\widetilde{z}-1)(2D-D\widetilde{z}+\widetilde{z}-1)}{D}}Ln(R), \tag{5.39}$$
$$(\bar{A}'_{\widetilde{\tau}})^2 = 2\widetilde{c}_2\frac{(\widetilde{z}-1)^3}{D^2}\frac{1}{R^4}$$

entonces

$$\bar{A}_{\widetilde{\tau}}(R) = \mp\sqrt{2\widetilde{c}_2}\frac{(\widetilde{z}-1)^{\frac{3}{2}}}{D}\frac{1}{R} + \widetilde{A}_1. \tag{5.40}$$

Al comparar las expresiones (5.1), (5.2), (5.3) y (4.35) con las expresiones (5.39), (5.40), (5.29) y (5.26), respectivamente, se obtienen las condiciones

$$A_1 = \widetilde{A}_1 \tag{5.41}$$

y

$$c_2 = \left(\frac{\widetilde{z}-1}{D}\right)^2\widetilde{c}_2. \tag{5.42}$$

Además, se nota que al hacer el cambio de variable no se pierde información en las soluciones.

5.1. Propiedades termodinámicas básicas del agujero negro encontrado en el caso B.2

La solución del agujero negro expresada en (4.36) tiene un horizonte de eventos R_H para el cual

$$h(R_H) = 0$$

$$c_2 + c_1 R_H = 0$$

$$R_H = -\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_2}{-c_1} = \frac{|c_2|}{|c_1|}, \tag{5.43}$$

ya que $c_1 < 0$ y $c_2 = 1 > 0$.
A partir de la expresión (1.13) y (4.35), y utilizando la fórmula para obtener la temperatura del agujero negro (1.18), para la nueva solución se tiene

$$T = \frac{|h'(R_H)|}{4\pi R_H^{\widetilde{z}-1}}. \tag{5.44}$$

Como $h(R) = c_2 + c_1 R$, $h'(R) = c_1$, entonces

$$T = \frac{|h'(R_H)|}{4\pi R_H^{\widetilde{z}-1}} = \frac{|c_1|}{4\pi (\frac{|c_2|}{|c_1|})^{\widetilde{z}-1}} = \frac{|c_1|^{\widetilde{z}}}{4\pi |c_2|^{\widetilde{z}-1}} = \frac{|c_2|}{4\pi} \frac{|c_1|^{\widetilde{z}}}{|c_2|^{\widetilde{z}}} = \frac{|c_2|}{4\pi R_H^{\widetilde{z}}}$$

$$T = \frac{|c_2|}{4\pi R_H^{\widetilde{z}}}, \tag{5.45}$$

$$R_H = \left(\frac{|c_2|}{4\pi T}\right)^{\frac{1}{\widetilde{z}}}. \tag{5.46}$$

Finalmente, considerando que $\theta = \widetilde{z} + D - 1$ la densidad de entropía en el espacio-tiempo del agujero negro encontrado como solución es

$$s = \frac{2\pi L^D}{\kappa^2 R_0^\theta} R_H^{\theta - D} = \frac{2\pi L^D}{\kappa^2 R_0^\theta} \left(\left(\frac{|c_2|}{4\pi T}\right)^{\frac{1}{\widetilde{z}}}\right)^{\widetilde{z}+D-1-D} = \frac{2\pi L^D}{\kappa^2 R_0^\theta} \left(\frac{|c_2|}{4\pi T}\right)^{1-\frac{1}{\widetilde{z}}}$$

$$s(T) = \frac{2\pi L^D}{\kappa^2 R_0^\theta} \left(\frac{|c_2|}{4\pi T}\right)^{1-\frac{1}{\widetilde{z}}}. \tag{5.47}$$

Nota: el objetivo de calcular estas cantidades es que son útiles, junto con otras, para aplicarlas a la dualidad holográfica y poder determinar con ellas algunas propidedades de algunos sistemas de materia condensada que tengan simetrías similares a las de la solución encontrada. Sin embargo, la aplicación en la dualidad holográfica está fuera de alcance este trabajo de tesis.

Conclusión

Al obtener esta solución exacta aparte de cumplir con el objetivo principal de este trabajo de tesis por su construcción se espera que este trabajo sirva como un ejemplo ilustrativo y útil para estudiantes que se encuentran en una etapa introductoria en temas de teoría de campos, espacios de Lifshitz y física de agujeros negros.

El paso siguiente es ampliar el tratamiento de la termodinámica de agujeros negros para obtener más propiedades de estos que nos permitan obtener información de sistemas de materia condensada mediante la correspondencia holográfica y sin enfrentarnos a la complejidad que se presenta si se quiere obtener dicha información directamente de la teoría cuántica de campos con acoplamiento fuerte.

Tal vez la presentación de las pocas propiedades termodinámicas en este trabajo sirvieron como un ejemplo académico, sin embargo, un estudio más a fondo de dicha termodinámica nos permitirá obtener más herramientas utilizadas en la dualidad gravedad/física de materia condensada pero este estudio se escapa de los objetivos de este trabajo. Cabe mencionar que este tema ya está siendo contemplado para trabajos futuros que tomarán como base esta solución.

Apéndice A

Cálculo de las componentes del tensor de Ricci en el sistema inicial (t, r, x_i)

Calculando las componentes del tensor de Ricci para el espacio-tiempo descrito por la geometría (3.1), a partir de la expresión

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho},$$

se tiene

$$R_{tt} = \frac{\partial \Gamma_{t}{}^{r}{}_{t}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{t}{}^{\rho}{}_{\rho}}{\partial t} + \Gamma_{t}{}^{\sigma}{}_{t}\Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho} - \Gamma_{t}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{t}{}^{\sigma}{}_{\rho} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2}r^{2z+1}f(r)(rf'(r)+2zf(r))\right]$$

$$+\Gamma_{t}{}^{r}{}_{t}\Gamma_{r}{}^{\rho}{}_{\rho} - \Gamma_{t}{}^{t}{}_{r}\Gamma_{t}{}^{r}{}_{t} - \Gamma_{t}{}^{r}{}_{t}\Gamma_{t}{}^{t}{}_{r} - \Gamma_{t}{}^{i}{}_{\sigma}\Gamma_{t}{}^{\sigma}{}_{i} = \frac{1}{2}(2z+1)r^{2z}f(r)(rf'(r)+2zf(r))$$

$$+\frac{1}{2}r^{2z+1}f'(r)(rf'(r)+2zf(r)) + \frac{1}{2}r^{2z+1}f(r)(f'(r)+rf''(r)+2zf'(r)) + \Gamma_{t}{}^{r}{}_{t}\Gamma_{r}{}^{t}{}_{t}$$

$$+\Gamma_{t}{}^{r}{}_{t}\Gamma_{r}{}^{r}{}_{r} + \Gamma_{t}{}^{r}{}_{t}\Gamma_{r}{}^{i}{}_{i} - \Gamma_{t}{}^{t}{}_{r}\Gamma_{t}{}^{r}{}_{t} - \Gamma_{t}{}^{r}{}_{t}\Gamma_{t}{}^{t}{}_{r} = \frac{1}{2}(2z+1)r^{2z+1}f(r)f'(r) + (2z+1)zr^{2z}f(r)^2$$

$$+\frac{1}{2}r^{2z+2}(f'(r))^2 + zr^{2z+1}f(r)f'(r) + \frac{1}{2}r^{2z+1}f(r)f'(r) + \frac{1}{2}r^{2z+2}f(r)f''(r) + zr^{2z+1}f(r)f'(r)$$

$$+\frac{1}{2}r^{2z+1}f(r)(rf'(r)+2zf(r))\left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{D}{r} - \frac{z}{r} - \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}\right] = \frac{1}{2}r^{2z+2}f(r)f''(r)$$

$$+\left[z+\frac{1}{2}+z+\frac{1}{2}+z\right]r^{2z+1}f(r)f'(r) + z(2z+1)r^{2z}f(r)^2 + \frac{1}{2}r^{2z+2}(f'(r))^2$$

$$+\left(\frac{1}{2}r^{2z+2}f(r)f'(r) + zr^{2z+1}f(r)^2\right)\left(\frac{D-z-1}{r} - \frac{f'(r)}{f(r)}\right) = \frac{1}{2}r^{2z+2}f(r)f''(r)$$

$$+(3z+1)r^{2z+1}f(r)f'(r) + z(2z+1)r^{2z}f(r)^2 + \frac{1}{2}r^{2z+2}(f'(r))^2 + \frac{1}{2}r^{2z+1}(D-z-1)f(r)f'(r)$$

$$-\frac{1}{2}r^{2z+2}(f'(r))^2 + r^{2z}z(D-z-1)f(r)^2 - zr^{2z+1}f(r)f'(r) = \frac{1}{2}r^{2z+2}f(r)f''(r)$$

$$+\left(3z+1+\frac{D}{2}-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}-z\right)r^{2z+1}f(r)f'(r)+z(2z+1+D-z-1)r^{2z}f(r)^2$$

$$=\frac{1}{2}r^{2z+2}f(r)f''(r)+\left(\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}+\frac{D}{2}\right)r^{2z+1}f(r)f'(r)+z(z+D)f(r)^2r^{2z}$$

$$R_{tt}=\frac{1}{2}r^{2z}f(r)[r^2f''(r)+(D+3z+1)rf'(r)+2z(z+D)f(r)]. \tag{A.1}$$

También

$$R_{rr}=\frac{\partial\Gamma_{r\ r}^{\ r}}{\partial r}-\frac{\partial\Gamma_{r\ \rho}^{\ \rho}}{\partial r}+\Gamma_{r\ r}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\ \rho}^{\ \rho}-\Gamma_{r\ \sigma}^{\ \rho}\Gamma_{r\ \rho}^{\ \sigma}=\frac{d}{dr}(\Gamma_{r\ r}^{\ r}-\Gamma_{r\ t}^{\ t}-\Gamma_{r\ r}^{\ r}-\Gamma_{r\ i}^{\ i})+\Gamma_{r\ r}^{\ r}\Gamma_{r\ \rho}^{\ \rho}$$

$$-\Gamma_{r\ t}^{\ t}\Gamma_{r\ t}^{\ t}-\Gamma_{r\ r}^{\ r}\Gamma_{r\ r}^{\ r}-\Gamma_{r\ j}^{\ i}\Gamma_{r\ i}^{\ j}=\frac{d}{dr}\left[-\frac{z}{r}-\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}-\frac{D}{r}\right]+\Gamma_{r\ r}^{\ r}\Gamma_{r\ t}^{\ t}+\Gamma_{r\ r}^{\ r}\Gamma_{r\ r}^{\ r}+\Gamma_{r\ r}^{\ r}\Gamma_{r\ i}^{\ i}$$

$$-\Gamma_{r\ t}^{\ t}\Gamma_{r\ t}^{\ t}-\Gamma_{r\ r}^{\ r}\Gamma_{r\ r}^{\ r}-\Gamma_{r\ j}^{\ i}\Gamma_{r\ i}^{\ j}=-\frac{d}{dr}\left[\frac{z+D}{r}+\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}\right]+\Gamma_{r\ r}^{\ r}(\Gamma_{r\ t}^{\ t}+\Gamma_{r\ i}^{\ i})-(\Gamma_{r\ t}^{\ t})^2$$

$$-\Gamma_{r\ j}^{\ i}\Gamma_{r\ i}^{\ j}=-\left(-\left(\frac{z+D}{r^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{f(r)f''(r)-(f'(r))^2}{(f(r))^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}\right)\left(\frac{z}{r}+\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{D}{r}\right)$$

$$-\left(\frac{z}{r}+\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2-\frac{1}{r}\delta_{ij}\frac{1}{r}\delta_{ji}=\frac{z+D}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)}+\frac{1}{2}\frac{(f'(r))^2}{f(r)^2}-\frac{z}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}-\frac{D}{r^2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{z}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}-\frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)^2}-\frac{1}{2}\frac{D}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}-\frac{z^2}{r^2}-\frac{z}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}-\frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)^2}-\frac{D}{r^2}=-\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-\frac{z}{2}-\frac{D}{2}-z\right)\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{1}{r^2}(z+D-z-D-z^2-D)=-\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)}$$

$$-\frac{1}{2}(1+3z+D)\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}-\left(\frac{z^2+D}{r^2}\right)$$

$$R_{rr}=-\frac{1}{2}\left[\frac{f''(r)}{f(r)}+(D+3z+1)\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{2(z^2+D)}{r^2}\right]. \tag{A.2}$$

Por otro lado

$$R_{ij}=\frac{\partial\Gamma_{i\ j}^{\ r}}{\partial r}-\frac{\partial\Gamma_{i\ \rho}^{\ \rho}}{\partial x^j}+\Gamma_{i\ j}^{\ \sigma}\Gamma_{\sigma\ \rho}^{\ \rho}-\Gamma_{i\ \sigma}^{\ \rho}\Gamma_{j\ \rho}^{\ \sigma}=\frac{d}{dr}[-r^3f(r)\delta_{ij}]+\Gamma_{i\ j}^{\ r}\Gamma_{r\ \rho}^{\ \rho}-\Gamma_{i\ \sigma}^{\ t}\Gamma_{j\ t}^{\ \sigma}$$

$$-\Gamma_{i\ k}^{\ r}\Gamma_{j\ r}^{\ k}-\Gamma_{i\ r}^{\ k}\Gamma_{j\ k}^{\ r}=-(3r^2f(r)+r^3f'(r))\delta_{ij}+\Gamma_{i\ j}^{\ r}\Gamma_{r\ t}^{\ t}+\Gamma_{i\ j}^{\ r}\Gamma_{r\ r}^{\ r}+\Gamma_{i\ j}^{\ r}\Gamma_{r\ k}^{\ k}$$

$$-\Gamma_{i\ k}^{\ r}\Gamma_{j\ r}^{\ k}-\Gamma_{i\ r}^{\ k}\Gamma_{j\ k}^{\ r}=-(3r^2f(r)+r^3f'(r))\delta_{ij}-r^3f(r)\delta_{ij}\left(\frac{z}{r}+\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}-\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{D}{r}\right)$$

$$+r^3f(r)\delta_{ik}\frac{1}{r}\delta_{kj}+\frac{1}{r}\delta_{ik}r^3f(r)\delta_{kj}=\left[-3r^2f(r)-r^3f'(r)-r^3f(r)\left(\frac{z+D-1}{r}\right)+r^2f(r)+r^2f(r)\right]\delta_{ij}$$

$$=[-3r^2f(r)-r^3f'(r)-(z+D-1)r^2f(r)+2r^2f(r)]\delta_{ij}$$

$$=[(-3-z-D+1+2)r^2f(r)-r^3f'(r)]\delta_{ij}=[-(z+D)r^2f(r)-r^3f'(r)]\delta_{ij}$$

$$R_{ij}=-r^2[rf'(r)+(z+D)f(r)]\delta_{ij}. \tag{A.3}$$

Finalmente

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{tt}R_{tt}+g^{rr}R_{rr}+g^{ij}R_{ij}=\frac{-1}{r^{2z}f(r)}\frac{1}{2}r^{2z}f(r)[r^2f''(r)+(D+3z+1)rf'(r)$$

$$+2z(z+D)f(r)] - r^2 f(r)\frac{1}{2}\left[\frac{f''(r)}{f(r)} + (D+3z+1)\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{2(z^2+D)}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2}\delta_{ij}r^2[rf'(r)$$

$$+(z+D)f(r)]\delta_{ij} = -\frac{1}{2}r^2 f''(r) - \frac{1}{2}(D+3z+1)rf'(r) - z(z+D)f(r) - \frac{1}{2}r^2 f''(r)$$

$$-\frac{1}{2}(D+3z+1)rf'(r) - (z^2+D)f(r) - D[rf'(r) + (z+D)f(r)] = -r^2 f''(r) - (2D+3z$$

$$+1)rf'(r) + (-z^2 - zD - z^2 - D - zD - D^2)f(r) = -r^2 f''(r) - (2D+3z+1)rf'(r) + (-2z^2 - 2Dz - D - D^2)f(r)$$

$$R = -[r^2 f''(r) + (2D+3z+1)rf'(r) + ((z^2+2Dz+D^2) + z^2 + D)f(r)]. \tag{A.4}$$

Apéndice B

Comprobación de que las soluciones encontradas satisfacen las ecuaciones de campo iniciales

Se consideran las expresiones de las nuevas soluciones encontradas para las ecuaciones de campo

$$\phi(r) = \pm\sqrt{2D(z-1)}Ln(r), \tag{B.1}$$

$$f(r) = c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}, \tag{B.2}$$

$$(A_t')^2 = 2c_2 D(z+D-2) r^{-2(z+D-1)}, \tag{B.3}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2(z-1)}{D}}, \tag{B.4}$$

$$e^{\lambda\phi} = r^{2(z-1)} \tag{B.5}$$

y

$$\Lambda = 0. \tag{B.6}$$

Las ecuaciones de campo que deben satisfacer las expresiones anteriores son

$$-Drf' - D(D+1)f - 2\Lambda = \frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z} f\ (\phi')^2 + e^{\lambda\phi}(A_t')^2], \tag{B.7}$$

$$Drf' + D(2z+D-1)f + 2\Lambda = \frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z} f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2], \tag{B.8}$$

$$r^2 f'' + (3z+2D-1)rf' + (2z^2+2Dz-2z+D^2-D)f + 2\Lambda = -\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z} f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2], \tag{B.9}$$

$$A_t'' + \left[\lambda\phi' + \left(\frac{D-z+1}{r}\right)\right] A_t' = 0 \tag{B.10}$$

y

$$\left[\left(\frac{z+D+1}{r}\right)\phi' + \phi''\right] f + f'\phi' = -\frac{\lambda}{2}\frac{e^{\lambda\phi}(A_t')^2}{r^{2z}}. \tag{B.11}$$

Verificando (B.7), el primer miembro de esta ecuación es

$$-Drf' - D(D+1)f - 2\Lambda = -Dr[-c_1(z+D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z+D-1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}]$$

$$-D(D+1)\left[c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}\right] - 0 = Dc_1(z+D)r^{-(z+D)}$$

$$+2Dc_2(z+D-1)r^{-2(z+D-1)} - D(D+1)c_1r^{-(z+D)} - D(D+1)c_2r^{-2(z+D-1)}$$
$$= c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(2z+D-3)r^{-2(z+D-1)}$$
$$-Drf' - D(D+1)f - 2\Lambda = c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(2z+D-3)r^{-2(z+D-1)} \tag{B.12}$$

y el segundo miembro es igual a

$$\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 + e^{\lambda\phi}(A_t')^2] = \frac{1}{2}r^2f(\phi')^2 + \frac{1}{2}e^{\lambda\phi}r^{-2(z-1)}(A_t')^2 = \frac{1}{2}r^2[c_1r^{-(z+D)}$$
$$+c_2r^{-2(z+D-1)}]\frac{2D(z-1)}{r^2} + \frac{1}{2}r^{-2(z-1)}r^{2(z-1)}2c_2D(z+D-2)r^{-2(z+D-1)}$$
$$= D(z-1)c_1r^{-(z+D)} + D(z-1)c_2r^{-2(z+D-1)} + c_2D(z+D-2)r^{-2(z+D-1)} = c_1D(z-1)r^{-(z+D)}$$
$$+c_2D(2z+D-3)r^{-2(z+D-1)}$$
$$\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 + e^{\lambda\phi}(A_t')^2] = c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(2z+D-3)r^{-2(z+D-1)}. \tag{B.13}$$

A partir de los segundos miembros de las ecuaciones (B.12) y (B.13) se satisface la ecuación (B.7)

$$-Drf' - D(D+1)f - 2\Lambda = \frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 + e^{\lambda\phi}(A_t')^2].$$

Ahora verificando la siguiente ecuación de Einstein (B.8), se tiene que el primer miembro es

$$Drf' + D(2z+D-1)f + 2\Lambda = Dr[-c_1(z+D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z+D-1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}]$$
$$+D(2z+D-1)[c_1r^{-(z+D)} + c_2r^{-2(z+D-1)}] + 0 = -c_1D(z+D)r^{-(z+D)}$$
$$-2c_2D(z+D-1)r^{-2(z+D-1)} + c_1D(2z+D-1)r^{-(z+D)} + c_2D(2z+D-1)r^{-2(z+D-1)}$$
$$= c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(-D+1)r^{-2(z+D-1)}$$
$$Drf' + D(2z+D-1)f + 2\Lambda = c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(-D+1)r^{-2(z+D-1)} \tag{B.14}$$

y el segundo miembro de esta ecuación es

$$\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2] = \frac{1}{2}r^2f(\phi')^2 - \frac{1}{2}e^{\lambda\phi}r^{-2(z-1)}(A_t')^2 = \frac{1}{2}r^2[c_1r^{-(z+D)}$$
$$+c_2r^{-2(z+D-1)}]\frac{2D(z-1)}{r^2} - \frac{1}{2}r^{-2(z-1)}r^{2(z-1)}2c_2D(z+D-2)r^{-2(z+D-1)}$$
$$= c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(z-1)r^{-2(z+D-1)} - c_2D(z+D-2)r^{-2(z+D-1)}$$
$$= c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(-D+1)r^{-2(z+D-1)}$$
$$\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2] = c_1D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2D(-D+1)r^{-2(z+D-1)}. \tag{B.15}$$

A partir de los segundos miembros de las ecuaciones (B.14) y (B.15) se verifica la ecuación (B.8)

$$Drf' + D(2z+D-1)f + 2\Lambda = \frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z}f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2].$$

Para verificar que se satisface la tercera ecuación de Einstein (B.9) se debe considerar

$$f' = -c_1(z+D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z+D-1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}$$

y

$$f'' = c_1(z+D)(z+D+1)r^{-(z+D+2)} + 4c_2(z+D-1)(z+D-\frac{1}{2})r^{-2(z+D)}.$$

Entonces el primer miembro de la ecuación (B.9) es igual a

$$r^2 f'' + (3z + 2D - 1)rf' + (2z^2 + 2Dz - 2z + D^2 - D)f + 2\Lambda = r^2[c_1(z + D)(z + D + 1)r^{-(z+D+2)}$$

$$+4c_2(z + D - 1)(z + D - \frac{1}{2})r^{-2(z+D)}] + (3z + 2D - 1)r[-c_1(z + D)r^{-(z+D+1)}$$

$$-2c_2(z + D - 1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}] + (2z^2 + 2Dz - 2z + D^2 - D)[c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}]$$

$$+0 = c_1(z+D)(z+D+1)r^{-(z+D)} + 4c_2(z+D-1)(z+D-\frac{1}{2})r^{-2(z+D-1)} - c_1(z+D)(3z+2D-1)r^{-(z+D)}$$

$$-2c_2(3z + 2D - 1)(z + D - 1)r^{-2(z+D-1)} + c_1(2z^2 + 2Dz - 2z + D^2 - D)r^{-(z+D)}$$

$$+c_2(2z^2 + 2Dz - 2z + D^2 - D)r^{-2(z+D-1)} = -c_1 D(z - 1)r^{-(z+D)} + c_2 D(D - 1)r^{-2(z+D-1)}$$

$$r^2 f'' + (3z+2D-1)rf' + (2z^2+2Dz-2z+D^2-D)f + 2\Lambda = -c_1 D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2 D(D-1)r^{-2(z+D-1)} \tag{B.16}$$

y el segundo miembro de la misma ecuación, a partir del segundo miembro de la ecuación (B.15), es igual a

$$-\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z} f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2] = -c_1 D(z - 1)r^{-(z+D)} + c_2 D(D - 1)r^{-2(z+D-1)}. \tag{B.17}$$

A partir de los segundos miembros de las ecuaciones (B.16) y (B.17) se verifica la ecuación (B.9)

$$r^2 f'' + (3z + 2D - 1)rf' + (2z^2 + 2Dz - 2z + D^2 - D)f + 2\Lambda = -\frac{1}{2r^{2(z-1)}}[r^{2z} f\ (\phi')^2 - e^{\lambda\phi}(A_t')^2].$$

Por otro lado, se verifica la ecuación para el potencial vectorial (B.10)

$$A_t'' + \left[\lambda\phi' + \left(\frac{D - z + 1}{r}\right)\right] A_t' = \mp(z + D - 1)\sqrt{2c_2 D(z + D - 2)}r^{-(z+D)}$$

$$\pm\left[\frac{2(z - 1)}{r} + \frac{D - z + 1}{r}\right]\sqrt{2c_2 D(z + D - 2)}r^{-(z+D-1)} = \mp(z+D-1)\sqrt{2c_2 D(z + D - 2)}r^{-(z+D)}$$

$$\pm(z + D - 1)\sqrt{2c_2 D(z + D - 2)}r^{-(z+D)} = 0,$$

lo cual verifica que se cumple la ecuación para el potencial vectorial (B.10).
Finalmente, para verificar la ecuación del campo escalar (B.11), el primer miembro es igual a

$$\left[\phi'' + \left(\frac{z + D + 1}{r}\right)\phi'\right] f + f'\phi' = \left[\mp\frac{\sqrt{2D(z - 1)}}{r^2} \pm (\frac{D + z + 1}{r})\frac{\sqrt{2D(z - 1)}}{r^2}\right](c_1 r^{-(z+D)}$$

$$+c_2 r^{-2(z+D-1)}) \pm \frac{\sqrt{2D(z - 1)}}{r}[-c_1(z + D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z + D - 1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})}]$$

$$= \pm\frac{(z + D)\sqrt{2D(z - 1)}}{r^2}(c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}) \mp c_1(z + D)\sqrt{2D(z - 1)}r^{-(z+D+2)}$$

$$\mp 2c_2(z+D-1)\sqrt{2D(z - 1)}r^{-2(z+D)} = \pm c_1(D+z)\sqrt{2D(z - 1)}r^{-(z+D+2)} \pm c_2(z+D)\sqrt{2D(z - 1)}r^{-2(z+D)}$$

$$\mp c_1(z + D)\sqrt{2D(z - 1)}r^{-(z+D+2)} \mp 2c_2(z + D - 1)\sqrt{2D(z - 1)}r^{-2(z+D)},$$

entonces

$$\left[\left(\frac{z + D + 1}{r}\right)\phi' + \phi''\right] f + f'\phi' = \mp c_2(z + D - 2)\sqrt{2D(z - 1)}r^{-2(z+D)}. \tag{B.18}$$

Por otro lado, el segundo miembro es igual a

$$-\frac{1}{2}\lambda r^{-2z}e^{\lambda\phi}(A_t')^2 = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(z-1)}{D}}r^{-2z}r^{2(z-1)}2c_2D(z+D-2)r^{-2(z+D-1)}$$

$$= \mp c_2(z+D-2)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda r^{-2z}e^{\lambda\phi}(A_t')^2 = \mp c_2(z+D-2)\sqrt{2D(z-1)}r^{-2(z+D)}. \tag{B.19}$$

A partir de los segundos miembros de las ecuaciones (B.18) y (B.19) se verifica la ecuación (B.11)

$$\left[\left(\frac{z+D+1}{r}\right)\phi' + \phi''\right]f + f'\phi' = -\frac{1}{2}\lambda r^{-2z}e^{\lambda\phi}(A_t')^2.$$

Apéndice C

Cálculo de los invariantes de curvatura

A partir de la expresión (4.10) se tiene

$$f = f(r) = c_1 r^{-(z+D)} + c_2 r^{-2(z+D-1)}, \tag{C.1}$$

$$f' = f'(r) = -c_1(z+D)r^{-(z+D+1)} - 2c_2(z+D-1)r^{-2(z+D-\frac{1}{2})} \tag{C.2}$$

y

$$f'' = f''(r) = c_1(z+D)(z+D+1)r^{-(z+D+2)} + 2c_2(z+D-1)(2z+2D-1)r^{-2(z+D)}. \tag{C.3}$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (3.14) o (A.4)

$$R = -[c_1(z+D)(z+D+1)r^{-(z+D)} + 2c_2(z+D-1)(2z+2D-1)r^{-2(z+D-1)} - c_1(2D+3z+1)(z+D)r^{-(z+D)}$$

$$-2c_2(2D+3z+1)(z+D-1)r^{-2(z+D-1)} + c_1(z^2+2Dz+D^2+z^2+D)r^{-(z+D)}$$

$$+c_2(z^2+2Dz+D^2+z^2+D)r^{-2(z+D-1)}] = c_1 D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2(2z+3D-D^2-4)r^{-2(z+D-1)}$$

$$R = c_1 D(z-1)r^{-(z+D)} + c_2(2z+3D-D^2-4)r^{-2(z+D-1)}. \tag{C.4}$$

El siguiente invariante de curvatura es la contracción de las componentes tensoriales de Ricci

$$l = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}R_{\mu\nu}R_{\mu'\nu'} = (g^{tt})^2 R_{tt}^2 + (g^{rr})^2 R_{rr}^2 + g^{ij}g^{lk}R_{il}R_{jk}$$

$$= \frac{1}{r^{4z}f^2}\frac{1}{4}r^{4z}f^2[r^2 f'' + (D+3z+1)rf' + 2z(z+D)f]^2 + r^4 f^2 \frac{1}{4}\left[\frac{f''}{f} + (D+3z+1)\frac{1}{r}\frac{f'}{f} + \frac{2(z^2+D)}{r^2}\right]^2$$

$$+\frac{1}{r^2}\delta_{ij}\frac{1}{r^2}\delta_{lk}(-r^2)[rf' + (z+D)f]\delta_{il}(-r^2)[rf' + (z+D)f]\delta_{jk}.$$

Al simplificar

$$l = \frac{1}{2}[r^4(f'')^2 + 2(D+3z+1)r^3 f'f'' + 2(2z^2+Dz+D)r^2 ff'' + (D^2+6Dz+4D+9z^2 \tag{C.5}$$
$$+6z+1)r^2(f')^2 + 2(5Dz^2+D^2z+3D^2+6z^3+6Dz+2z^2+Dz+D)rf'f + 2(2z^4+2Dz^3$$
$$+z^2D^2+3Dz^2+D^2+2D^2z+D^3)f^2].$$

Ahora de las expresiones (C.1), (C.2) y (C.3) se tiene

$$(f'')^2 = c_1^2(z^4+4Dz^3+6D^2z^2+2z^3+6Dz^2+z^2+4D^3z+6D^2z+2Dz+D^4+2D^3 +D^2)r^{-2(z+D+2)}+4c_1c_2(2z^4+8Dz^3-z^3+12D^2z^2-3Dz^2+8D^3z-3D^2z+2D^4-D^3 -2z^2-4Dz+z-2D^2+D)r^{-(3z+3D+2)}+4c_2^2(4z^4+16Dz^3+24D^2z^2-12z^3-36Dz^2 +13z^2+16D^3z+4D^4-36D^2z-12D^3+13D^2+26Dz-6z-6D+1)r^{-4(z+D)}, \tag{C.6}$$

$$f'f'' = -c_1^2(z^3+3Dz^2+z^2+3D^2z+2Dz+D^3+D^2)r^{-2(z+D+\frac{3}{2})}-6c_1c_2(z^3+3Dz^2 -z^2+3D^2z-2Dz+D^3-D^2)r^{-(3z+3D+1)}-4c_2^2(2z^3-5z^2+4Dz^2+6D^2z-10Dz+4z +2D^3-5D^2+4D-1)r^{-4(z+D-\frac{1}{4})}, \tag{C.7}$$

$$ff'' = c_1^2(z^2+2Dz+z+D^2+D)r^{-2(z+D+1)}+c_1c_2(5z^2+10Dz-5z+5D^2-5D +2)r^{-3(z+D)}+2c_2^2(2z^2+4Dz-3z+2D^2-3D+1)r^{-4(z+D-\frac{1}{2})}, \tag{C.8}$$

$$(f')^2 = c_1^2(z^2+2Dz+D^2)r^{-2(z+D+1)}+4c_1c_2(z^2+2Dz-z+D^2-D)r^{-3(z+D)} +4c_2^2(z^2+2Dz+D^2-2z-2D+1)r^{-4(z+D-\frac{1}{2})}, \tag{C.9}$$

$$f'f = -c_1^2(z+D)r^{-(2z+2D+1)}+c_1c_2(-3z-3D+2)r^{-(3z+3D-1)}-2c_2^2(z+D -1)r^{-(4z+4D-3)} \tag{C.10}$$

y

$$f^2 = c_1^2r^{-2(z+D)}+2c_1c_2r^{-(3z+3D-2)}+c_2^2r^{-4(z+D-1)}. \tag{C.11}$$

Al sustituir las expresiones (C.6), (C.7), (C.8), (C.9), (C.10) y (C.11) en (C.5) se tiene

$$l = c_1^2(z^2D^2-Dz^2-3Dz+D^3+D^2-D)r^{-2(z+D)}+c_1c_2(-Dz^2-2D^3z+D^2z +2D^3-4D^2-4Dz+2z+4D)r^{-(3z+3D-2)}+c_2^2(6z^4+35Dz^3+15D^2z^2-4z^3 +9Dz^2+3D^3z+2D^4-3D^2z-6D^3+15D^2+6Dz-8z-17D+8)r^{-4(z+D-1)}. \tag{C.12}$$

El último invariante de curvatura es el invariante de Kretschmann. Para esta cantidad se calcula los componentes del tensor de Riemann. La definición de las componentes de este tensor es

$$R^{\rho}{}_{\tau\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\nu}{}^{\rho}{}_{\tau}-\partial_\nu\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\tau}+\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\lambda}\Gamma_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\tau}-\Gamma_{\nu}{}^{\rho}{}_{\lambda}\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\tau}. \tag{C.13}$$

También para bajar el primer índice se tiene

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}. \tag{C.14}$$

De esta manera, los componentes del tensor de Riemann distintos de cero son

$$R_{trtr} = z^2r^{2(z-1)}f+\frac{1}{2}r^{2z}f''+\frac{1}{2}(3z+1)r^{2z-1}f', \tag{C.15}$$

$$R_{trrt} = -z^2r^{2(z-1)}f-\frac{1}{2}r^{2z}f''-\frac{1}{2}(3z+1)r^{2z-1}f', \tag{C.16}$$

$$R_{titj} = (zr^{2(z+1)}f^2+\frac{1}{2}r^{2z+3}ff')\delta_{ji}, \tag{C.17}$$

$$R_{tijt} = -(zr^{2(z+1)}f^2+\frac{1}{2}r^{2z+3}ff')\delta_{ji}, \tag{C.18}$$

$$R_{rttr} = -\frac{1}{2}(3z+1)r^{2z-1}f' - \frac{1}{2}r^{2z}f'' - z^2r^{2(z-1)}f, \tag{C.19}$$

$$R_{rtrt} = \frac{1}{2}(3z+1)r^{2z-1}f' + \frac{1}{2}r^{2z}f'' + z^2r^{2(z-1)}f, \tag{C.20}$$

$$R_{rirj} = -\left(1 + \frac{1}{2}r\frac{f'}{f}\right)\delta_{ji}, \tag{C.21}$$

$$R_{rijr} = \left(1 + \frac{1}{2}r\frac{f'}{f}\right)\delta_{ji}, \tag{C.22}$$

$$R_{ltit} = \frac{1}{2}r^{2(z+1)}f(rf' + 2zf)\delta_{li}, \tag{C.23}$$

$$R_{ltti} = -\frac{1}{2}r^{2(z+1)}f(rf' + 2zf)\delta_{li}, \tag{C.24}$$

$$R_{lrri} = \left(1 + \frac{1}{2}r\frac{f'}{f}\right)\delta_{li}, \tag{C.25}$$

$$R_{lrir} = -\left(1 + \frac{1}{2}r\frac{f'}{f}\right)\delta_{li} \tag{C.26}$$

y

$$R_{lijk} = (\delta_{lk}\delta_{ji} - \delta_{lj}\delta_{ki})r^4 f. \tag{C.27}$$

Entonces, el invariante de Kretschmann es

$$\begin{aligned}
K = R_{\mu\nu\tau\sigma}R^{\mu\nu\tau\sigma} &= g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g^{\tau\tau'}g^{\sigma\sigma'}R_{\mu\nu\tau\sigma}R_{\mu'\nu'\tau'\sigma'} \\
&= (g^{tt})^2(g^{rr})^2(R_{trtr})^2 + (g^{tt})^2(g^{rr})^2(R_{trrt})^2 + (g^{tt})^2g^{ij}g^{kl}R_{tikt}R_{tjlt} + (g^{tt})^2g^{ij}g^{kl}R_{tikt}R_{tjlt} \\
&+(g^{tt})^2(g^{rr})^2(R_{rttr})^2 + (g^{tt})^2(g^{rr})^2(R_{rtrt})^2 + (g^{rr})^2g^{ij}g^{kl}R_{rikr}R_{rjlr} + (g^{rr})^2g^{ij}g^{kl}R_{rikr}R_{rjlr} \\
&+(g^{tt})^2g^{ij}g^{kl}R_{ittk}R_{jttl} + (g^{tt})^2g^{ij}g^{kl}R_{ittk}R_{jttl} + (g^{rr})^2g^{ij}g^{kl}R_{irrk}R_{jrrl} + (g^{rr})^2g^{ij}g^{kl}R_{irrk}R_{jrrl} \\
&+g^{ij}g^{kl}g^{mn}g^{pq}R_{ikmp}R_{jlnq} = 2(g^{tt})^2(g^{rr})^2(R_{trtr})^2 + 2(g^{tt})^2g^{ij}g^{kl}R_{tikt}R_{tjlt} + 2(g^{tt})^2(g^{rr})^2(R_{rtrt})^2 \\
&+2(g^{rr})^2g^{ij}g^{kl}R_{rikr}R_{rjlr} + 2(g^{tt})^2g^{ij}g^{kl}R_{ittk}R_{jttl} + 2(g^{rr})^2g^{ij}g^{kl}R_{irrk}R_{jrrl} \\
&+g^{ij}g^{kl}g^{mn}g^{pq}R_{ikmp}R_{jlnq} \\
&= 2\left\{(g^{tt})^2(g^{rr})^2[(R_{trtr})^2 + (R_{rtrt})^2] + (g^{tt})^2g^{ij}g^{kl}[R_{tikt}R_{tjlt} + R_{ittk}R_{jttl}]\right. \\
&\left.+(g^{rr})^2g^{ij}g^{kl}[R_{rikr}R_{rjlr} + R_{irrk}R_{jrrl}]\right\} + g^{ij}g^{kl}g^{mn}g^{pq}R_{ikmp}R_{jlnq} \\
&= 2\left\{\frac{1}{r^{4z}f^2}r^4f^2\left[\left(z^2r^{2(z-1)}f + \frac{1}{2}r^{2z}f'' + \frac{1}{2}(3z+1)r^{2z-1}f'\right)^2 + \left(z^2r^{2(z-1)}f + \frac{1}{2}r^{2z}f''\right.\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{1}{2}(3z+1)r^{2z-1}f'\right)^2\right] + \frac{1}{r^{4z}f^2}\frac{1}{r^2}\delta_{ij}\frac{1}{r^2}\delta_{kl}\left[\frac{1}{4}r^{4(z+1)}f^2(rf' + 2zf)^2\delta_{ki}\delta_{lj} + \frac{1}{4}r^{4(z+1)}f^2(rf'\right. \\
&\left.\left.+2zf)^2\delta_{ik}\delta_{jl}\right] + r^4f^2\frac{1}{r^2}\delta_{ij}\frac{1}{r^2}\delta_{kl}\left[\left(1 + \frac{1}{2}r\frac{f'}{f}\right)^2\delta_{ki}\delta_{lj} + \left(1 + \frac{1}{2}r\frac{f'}{f}\right)^2\delta_{ik}\delta_{jl}\right]\right\} \\
&+\frac{1}{r^2}\delta_{ij}\frac{1}{r^2}\delta_{kl}\frac{1}{r^2}\delta_{mn}\frac{1}{r^2}\delta_{pq}r^8f^2(\delta_{ip}\delta_{mk} - \delta_{im}\delta_{kp})(\delta_{jq}\delta_{ln} - \delta_{jn}\delta_{lq}) \\
&= 4\left\{r^{-4(z-1)}\left(z^2r^{2(z-1)}f + \frac{1}{2}(3z+1)r^{2z-1}f' + \frac{1}{2}r^{2z}f''\right)^2 + \frac{1}{4}D(2zf + rf')^2 + D\left(f + \frac{1}{2}rf'\right)^2\right\} \\
&+2D(D-1)f^2.
\end{aligned}$$

Al desarrollar los binomios y reduciendo las constantes de cada potencia se tiene

$$K = 4\left[\left(z^4 + Dz^2 + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}D\right)f^2 + (3z^3 + z^2 + Dz + D)rff' + z^2r^2ff'' + \frac{1}{4}(9z^2 \right. \\ \left. +6z + 2D + 1)r^2(f')^2 + \frac{1}{2}(3z+1)r^3f'f'' + \frac{1}{4}r^4(f'')^2\right]. \tag{C.28}$$

Finalmente, al sustituir las expresiones (C.6), (C.7), (C.8), (C.9), (C.10) y (C.11) en (C.28) y simplificando se tiene

$$K = c_1^2(D^2z^2 + 2Dz^2 - 2D^3z - 4Dz + D^4 + 2D^3 - 2D^2 + 2D)r^{-2(z+D)} \\ +c_1c_2(-4D^2z^2 + 8Dz^2 - 4D^3z + 16D^2z + 8D^4 - 8D^3 - 20Dz - 8D^2 + 12D)r^{-(3z+3D-2)} \\ c_2^2(48Dz^3 + 4D^2z^2 + 12Dz^2 + 4z^2 + 16D^3z + 16D^4 - 40D^2z - 56D^3 + 74D^2 + 32Dz \\ -16z - 46D + 16)r^{-4(z+D-1)}. \tag{C.29}$$

Bibliografía

[1] E. W. Hirschmann, L. Lehner, S. L. Liebling y C. Palenzuela, *Black Hole Dynamics in Einstein-Maxwell-Dilaton Theory*, arXiv:1706.09875 [hep-th].

[2] J. Harvey, R. Iengo, K. S. Narain, S. Randjbar-Daemi y H. Verlinde, *String theory and Quantum Gravity '92*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., ICTP, Trieste, Italy, 1992.

[3] M. Taylor, *"Non-relativistic holography"*, arXiv:0812.0530 [hep-th].

[4] Da-Wei Pang, *A Note on Black Holes in Asymptotically Lifshitz Spacetime*, arXiv:0905.2678 [hep-th].

[5] S. A. Hartnoll, A. Lucas y S. Sachdev, *Holographic quantum matter*, arXiv:1612.07324 [hep-th].

[6] W. Greiner, L. Neise, y H. Stöcker, *Thermodynamics and Statical Mechanics*, Springer-Verlag New York, Inc., 1995.

[7] S. Hacyan, *Los hoyos negros y la curvatura del espacio-tiempo*, Fondo de Cultura Económica, 1998, México.

[8] M. Natsuume, *AdS/CFT Duality User Guide*, Springer, 2016.

[9] J. F. Pedraza, W. Sybesma y M. R. Visser, *Hyperscaling violating black holes with spherical and hyperbolic horizons*, arXiv:1807.09770v3.

[10] S. Mukhopadhyay, C. Paul, *Hyperscaling violating geometry with magnetic field and DC conductivity*, arXiv:1906.02348v1.

[11] L. P. Hughston, y K. P. Tod, *An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, 1990.

[12] G. Guevara Pardo. (2009), *Una breve historia de la relatividad* 23 de Noviembre de 2019, de cedetrabajo Sitio web: https://cedetrabajo.org/blog/una-breve-historia-de-la-relatividad/

[13] R. Cartas-Fuentevilla, A. Herrera-Aguilar, V. Matlalcuatzi-Zamora, U. Noriega y J. M. Romero, *Anisotropic Lifshitz holography in Einstein-Proca theory with stable negative mass spectrum*, arXiv:1804.02278v2.

[14] U. H. Danielsson y L. Thorlacius, *Black holes in asymptotically Lifshitz spacetime*, arXiv:0812.5088v2 .

[15] S. Kachru, X. Liu y M. Mulligan, *Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points*, Phys. Rev.D78 (2008)106005; arXiv:0808.1725 [hep-th].