BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DE DERIVADA EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR BASADO EN LA TEORÍA APOE

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. GERARDO AMARO MACUIL

DIRECTORA DE TESIS
DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CO-DIRECTORA DE TESIS
DRA. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ

PUEBLA, PUE. FEBRERO 2020

A mis padres

Carlos Amaro Juárez (+)

Celerina Macuil Dávila

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas esas personas que hicieron posible este trabajo.

A mis padres y hermanos que me han apoyado toda la vida y me alientan a seguir adelante.

A mi directora de tesis Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar por su dedicación y orientación en la realización de este trabajo.

A mis sinodales Dra. Honoria Ruiz Estrada, Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, Dra. María Araceli Juárez Ramírez, Dr. Israel Molina Lara por la revisión de este trabajo y por la retroalimentación que aportaron a esta tesis.

A CONACYT por el apoyo económico brindado, ya que sin él no hubiera sido posible la culminación de esta tesis.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas han mostrado la importancia que tienen los estudios basados en la cognición y en las representaciones semióticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático. En particular, las investigaciones que giran en torno al enfoque cognitivo de la teoría APOE y los registros de representaciones semióticas de Duval, son las que recientemente se han utilizado para analizar el conocimiento que tiene un sujeto de un concepto matemático en niveles avanzados.

La derivada, uno de los conceptos matemáticos importantes en el área del Cálculo Elemental, tradicionalmente ha sido considerada uno de los conceptos difíciles de comprender para los estudiantes de nivel medio superior y superior (Dolores, 2000). Esto se debe a que los estudiantes no han construido la concepción Objeto de derivada (Dolores, 1998). Aunque se han realizado varios estudios analizando la comprensión que tienen los estudiantes, existen pocos trabajos enfocados en la comprensión que tienen los profesores.

Este trabajo de investigación consiste en el análisis de la comprensión del concepto derivada de un grupo de 15 profesores de matemáticas de nivel medio superior. Para ello analizamos las respuestas que los profesores dieron a una serie de actividades que investigadores en Educación Matemática han utilizado para analizar la comprensión de derivada en estudiantes. Además, estas actividades se seleccionaron para que dieran evidencia de lo que se describe en la descomposición genética refinada que propuso Asiala et al. (1997), con el objetivo de que esta sirviera como una trayectoria de aprendizaje hipotética que permitiera conjeturar cómo se desarrolla la comprensión del sujeto del concepto derivada.

El método utilizado en esta investigación es una adaptación del paradigma propuesto por la teoría APOE, el cual utiliza tres componentes escenciales: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y la observación, análisis y verificación de los datos. Estos componentes forman parte de lo que Arnon et al. (2014) denominan el ciclo de investigación de la teoría APOE.

El análisis de sus respuestas muestra que los profesores poseen las estructuras mentales más básicas de derivada; Acción y Proceso en el registro gráfico y numérico. Por otro lado, después de la implementación del ciclo de enseñanza basado en APOE, se logró una reconstrucción de esas estructuras mentales, dando paso a estructuras más complejas.

ABSTRACT

Research in mathematics teaching has shown the importance of studies based on cognition and semiotic representations in the teaching and learning processes of a mathematical concept. In particular, the investigations that revolve around the cognitive approach of APOS theory and the records of Duval's semiotic representations are those that have recently been used to analyze the knowledge that a subject have of a mathematical concept at advanced levels.

The derivative, one of the important mathematical concepts in the area of Elementary Calculus, traditionally has been considered one of the most difficult concepts to understand for high school students and university students (Dolores, 2000). This is because the students have not built the conception of Object of derivative (Dolores, 1998). Although there have been several studies analyzing the students' understanding, there are few works focused on the teachers' understanding.

This research work consists in the analysis of the understanding of the concept derivative from a group of 15 mathematics teachers from the upper middle level. To do this, we analyze the responses teachers gave to a series of activities that researchers in Mathematics Education have used to analyze the understanding of derivative in students. The activities, in addition to being taken from other works, were taken based on the refined genetic decomposition proposed by Asiala et al. (1997), with the objective that this would serve as a hypothetical learning path that would allow to guess how the subject's understanding develops, in particular how the derived concept is developed.

The method used in this research is an adaptation of the paradigm proposed by the APOS theory, which uses three essential components: theoretical analysis, teaching design and implementation, and the observation, analysis and verification of data. These components are part of the APOS theory research cycle (Arnon et al., 2014).

The analysis of their responses shows that teachers have the most basic mental structures of derivative, Action and Process in the graphic and numerical register. On the other hand, after the implementation of the APOS-based teaching cycle, a reconstruction of these mental structures was achieved, giving way to more complex structures.

INTRODUCCIÓN

El cálculo es una de las ramas más importantes de la matemática, gracias a él se pueden formular modelos matemáticos que permiten entender el mundo que nos rodea. Su desarrollo ha contribuido a la solución de problemas importantes en diferentes áreas del conocimiento humano como la física, química, ingeniería, economía, comunicaciones y la salud entre otras. Una de las ideas centrales del cálculo es el concepto de derivada y, aunque inicialmente se utilizó para resolver problemas relacionados con encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado, posteriormente se logró establecer que era una poderosa herramienta para estudiar el comportamiento de una función (Sánchez-Matamoros, 2004). Por otro lado, teniendo en cuenta que vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos, el cálculo diferencial, a través del concepto de la derivada, permite entender las variaciones que ocurren en un fenómeno determinado. Hoy en día usamos la derivada para hallar los máximos y mínimos de funciones, hallar la ecuación de la recta tangente en un punto dado, máximizar la producción y ganancias de algún producto, minimizar los costos de producción en una fábrica entre otras aplicaciones.

Por estas razones, el concepto de derivada es una de las herramientas matemáticas fundamentales que todo estudiante de último grado de bachiller debe dominar. Sin embargo, a pesar de su importancia, existen factores que pueden llegar a dificultar el correcto aprendizaje de este concepto. Un factor que impide a los estudiantes un aprendizaje correcto de la noción de derivada es el tiempo que se le dedica a este concepto dentro del currículo de matemáticas de nivel medio superior, ya que es insuficiente para que los estudiantes logren construirlo y menos aún aprender los algoritmos para realizar operaciones y sus aplicaciones (Dolores, 1998).

Otro factor que puede incidir para que el estudiante no tenga una adecuada asimilación de este concepto es la falta de manejo de los conceptos previos tales como: los conceptos de variable, función, razón de cambio y límite; si estos no están lo suficientemente comprendidos, el alumno no podrá entender apropiadamente el concepto de derivada y probablemente solo se quede en la parte operativa de calcular derivadas sin darse cuenta que la derivada de una función es una potente herramienta matemática que se usa para resolver problemas de la vida cotidiana.

En la escuela, cuando se aborda por primera vez el concepto de derivada, suele hacerse mediante la definición de límite de un cociente de diferencias de una función, es decir, mediante la expresión $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, para después proporcionar una serie de reglas que permitan derivar funciones.

De acuerdo con Dolores (1998), en su diagnóstico acerca de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en el estado de Guerrero, la mayoría de los estudiantes emplean correctamente los algoritmos para calcular el límite de una función o la derivada de esta, pero no comprenden los procesos y el concepto que subyace dentro de estos. Otros autores (Artigue, 1995; Salinas y Alanís, 2009; Vrancken y Engler, 2014) mencionan que la enseñanza del cálculo se sigue centrando en prácticas algorítmicas y estructuras formales de la matemática que no aportan un significado al estudiante. Específicamente, la enseñanza del concepto de derivada tradicionalmente se basa en que el estudiante domine los procesos para obtener derivadas de expresiones algebraicas por medio de fórmulas sin lograr la comprensión de este concepto (Dolores, 1998).

En las prácticas docentes de la asignatura de cálculo, los profesores de nivel medio superior y superior tienen un privilegio por la enseñanza con métodos algorítmicos (Ortega, Guzmán y Mena, 2009). Investigaciones en la misma línea señalan que conceptos fundamentales como la derivada no son de fácil comprensión por parte de los estudiantes y que esto puede deberse al enfoque en el tratamiento del tema que con frecuencia privilegia el aprendizaje de las técnicas de derivación y que considera que un estudiante ha aprendido cálculo si, al final del curso, logra dominar y ejecutar las fórmulas que le permiten encontrar la expresión analítica de la función derivada, independientemente del significado que haya construido (Dolores, 2000).

Existen diversos trabajos de investigación que han abordado el concepto de derivada, en su mayoría, con estudiantes de nivel medio superior y superior (Orton, 1983; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Borji y Alamolhodaei, 2016; Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez, 2018). Sin embargo, pocos de ellos se han centrado en analizar las concepciones que tienen los docentes respecto a este concepto.

En este trabajo nos situamos en un enfoque cognitivo, el de la teoría APOE (Dubinsky, 1991, 1996, 2002; Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996; Arnon, Dubinsky, Cottrill, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014), acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, que es una interpretación de la teoría constructivista, basada en el proceso de Abstracción Reflexiva que planteó Piaget para describir el pensamiento lógico de los niños. Dubinsky (1991) extiende esta noción y la usa para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un determinado concepto o noción matemática en niveles más avanzados. Esta teoría describe las estructuras y los mecanismos mentales con los cuales un individuo puede llegar a construir un concepto matemático.

Este trabajo pretende tomar dos perspectivas importantes para analizar la comprensión de un grupo de profesores de nivel medio superior respecto al concepto de derivada, la orientacion cognitiva del pensamiento y las representaciones semióticas para la comprensión de un concepto. Dicho de otra manera, consideramos que el marco teórico cognitivo APOE es insuficiente para explicar la comprensión de los profesores si no se toma con la mirada que nos ofrecen las perspectivas semióticas sobre la comprensión de un concepto matemático. Dentro de esta última, hemos tenido en cuenta la teoría de los registros semióticos de Duval (1998).

Esta investigación tiene como objetivo, en primera instancia, analizar las concepciones que tiene un grupo de profesores de nivel medio superior del concepto derivada, en términos de sus estructuras y mecanismos mentales; en un segundo momento, analizar y describir las concepciones que lograron reconstruir los profesores después de haber trabajado y reflexionado de forma grupal sobre otro conjunto de actividades. Estas actividades no son comunes, fueron diseñadas para generar las acciones y procesos necesarios para la construcción del concepto derivada de acuerdo con la descomposición genética de Asiala et al. (1997).

Comenzamos el trabajo revisando, en el capítulo 1, algunos trabajos realizados sobre la comprensión que tienen de la derivada estudiantes y profesores de nivel medio. En el capítulo 2, se presentan los fundamentos teóricos que sustentan el trabajo realizado en esta investigación. En el contexto de la educación matemática hacemos referencia a la teoría APOE y a la teoría de representaciones semióticas como marcos que permiten encuadrar esta investigación. En el capítulo 3, explicaremos la metodología utilizada para observar y describir las concepciones que poseen los profesores del concepto derivada. En el capítulo 4, se presenta un análisis de la comprensión que tiene el grupo de profesores participante del concepto de derivada, además, se presentarán los resultados que se obtuvieron después de trabajar otro conjunto de actividades con los mismos profesores. Por último se presentarán las conclusiones finales y algunas consideraciones de futuros trabajos. La tesis termina con las referencias bibliográficas y los anexos utlizados en los bloques de trabajo con los profesores.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1 Antecedentes sobre la comprensión de derivada en estudiantes y profesores

Durante los últimos 20 años se han publicado varios estudios que toman como marco de referencia a la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Los investigadores que han hecho estos trabajos, principalmente miembros del Grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), han centrado sus análisis en diferentes áreas de las matemáticas como cálculo, álgebra lineal, matemáticas discretas, estadística y teoría de grupos, en los que han enfocado su atención en algunos de sus conceptos (Dubinsky y McDonald, 2001).

En el caso de la derivada, los estudios realizados han usado aproximaciones centradas en elementos de cognición como:

- La idea de “esquema conceptual” (Azcárate, 1990) que surge de la idea de Imagen del concepto.
- Ideas procedentes de una aproximación piagetiana del conocimiento y su desarrollo visto a través de la teoría APOE (Asiala et al., 1997), y la teoría del desarrollo de los esquemas (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; Badillo, 2003).
- Ideas procedentes del papel de las representaciones semióticas (Font, 1999).

Algunas investigaciones estudian los errores y dificultades que tienen los alumnos respecto al concepto de derivada, sin plantearse cómo se construye el concepto (Orton, 1983; Ferrini-Mundy y Graham, 1994). Orton (1983) centrándose en la derivada y sus aplicaciones, menciona tres tipos de errores cometidos por los estudiantes: estructural (relacionado con los conceptos implicados), arbitrario (sucede cuando el alumno se comporta arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema) y ejecutivo (error en la manipulación).

En este mismo sentido, Artigue (1995) afirma que, aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, aún se observan grandes dificultades para hacerles alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro del analisis matemático. Realmente, el fondo de la cuestión es que los estudiantes no han construido el concepto de derivada. Por ejemplo, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación, sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente (Ferrini-Mundy y Graham, 1994). En este mismo estudio ellos discutieron sobre el deseo que muestran algunos estudiantes por encontrar la ecuación de una función representada gráficamente cuando se les solicita hallar el gráfico de su derivada.

Selden, Selden y Mason (1994) han documentado que, incluso los estudiantes que pueden resolver exitosamente problemas rutinarios de cálculo, tienen dificultades para resolver problemas con derivada. Estos autores creen que estas dificultades se deben a la débil visión conceptual que tienen del concepto de función; además de que el aprendizaje ordinario y la reorganización del conocimiento algunas veces incorpora construcciones matemáticas incorrectas que se arrastran durante un largo período.

En otros estudios se ha encontrado que la mayoría de los estudiantes puede resolver fácilmente un problema de derivada de rutina, pero no tienen una comprensión conceptual correcta de la representación gráfica de la derivada y la correlación entre la representación gráfica y algebraica (Baker et al., 2000). Por ejemplo, algunos estudiantes o incluso maestros no conocen la correlación entre la pendiente de la línea tangente y el límite del cociente de diferencias, es decir, el $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Sahin, Erbas, y Yenmez, 2015; Fernández y Llinares, 2015).

En un estudio sobre la comprensión del cálculo elemental en estudiantes universitarios, Orton (1983) observó que los estudiantes tienen representaciones adecuadas sobre la derivada en tareas rutinarias, pero en cambio, tuvieron deficiencias en la comprensión del concepto derivada en tareas más complejas. Él reportó que los estudiantes tienen dificultades con la interpretación gráfica de la derivada cuando la función es una línea recta, y no sólo con curvas más complicadas; e igualmente, muchos estudiantes (alrededor del 20% de su estudio) confundieron la derivada en un punto con la ordenada, es decir, con el valor de y (segunda coordenada) del punto de tangencia.

Centrándonse en las ideas procedentes de una aproximación piagetiana del conocimiento y su desarrollo visto a través de la teoría APOE, Asiala et al. (1997) analizaron la comprensión gráfica de una función y su derivada en estudiantes de ingenierías. Los autores propusieron inicialmente la descomposición genética basada en su propia comprensión de los conceptos y en su experiencia como aprendices y profesores. Dicha descomposición genética tuvó el objetivo de:

- Conocer y comprender la representación gráfica de puntos de una curva en los ejes coordenados.
- Conocer y comprender el concepto de pendiente de una línea recta.
- Conocer y tener una buena comprensión del concepto de función, una imagen bien desarrollada del concepto de función.
- Construir un esquema para la derivada, en el cual el sujeto debe recorrer dos caminos que están coordinados, el gráfico y el analítico.

Estos autores realizaron un análisis preliminar de las respuestas de los alumnos, enfocandose en responder las siguientes preguntas específicas:

- ¿Cómo comprende el estudiante la derivada de una función en un punto gráficamente?
- ¿Está esto conectado con la comprensión gráfica del estudiante del valor de una función en un punto?

De este estudio ellos reportaron que la mayoría de los estudiantes despliegan una comprensión razonable de la relación entre la pendiente de la tangente y la derivada en un punto. Sin embargo, persisten dificultades con la comprensión del concepto derivada como una razón de cambio (límite del cociente de la función en un punto del dominio) y como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función.

Todos estos autores han analizado las dificultades que tienen los alumnos del concepto derivada y otras pocas de ellas estan relacionadas con la comprensión que tienen los profesores de este concepto. Es por ello que nuestro análisis se centra en los profesores de nivel medio superior, ya que ellos son los encargados de que los alumnos de bachillerado comprendan este concepto.

1.2 Objetivo

El objetivo de esta investigación es analizar la comprensión que tiene un grupo de profesores de nivel medio superior del concepto derivada, analizando las estructuras y mecanismos mentales que poseen los docentes al inicio de un curso y las nuevas estructuras que logran reconstruir luego de haber trabajado con las actividades que fueron diseñadas con base en una descomposición genética. Para analizar la comprensión del grupo de profesores nos basamos en la orientacion cognitiva del pensamiento que nos ofrece la teoría APOE y la teoría de las representaciones semióticas de Duval para la comprensión de un concepto.

1.2.1 Objetivos específicos

- Identificar qué estructuras mentales poseen un grupo de profesores de nivel medio superior de acuerdo con la teoría APOE.
- Evaluar las concepciones (estructuras mentales) que los profesores participantes lograron reconstruir después de trabajar, analizar y reflexionar, de forma grupal, las actividades que fueron diseñadas para generar acciones y procesos necesarios para la construcción del concepto derivada.

1.3 Preguntas de investigación

- ¿Qué estructuras mentales evidencian un grupo de profesores de nivel medio superior cuando se enfrentan a problemas que involucran la derivada?

- ¿Qué estructuras mentales logran reconstruir los profesores participantes después de trabajar un conjunto de actividades de manera grupal y reflexiva?

1.4 Justificación

El análisis de la comprensión de un concepto en matemáticas juega un papel primordial para el profesor, ya que contribuye a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje y permite develar los procesos cognitivos que se activan en los estudiantes para encapsular un concepto matemático (Gutiérrez y Valdivé, 2012). En particular, uno de los conceptos matemáticos más versátiles en el área del cálculo es la derivada, gracias a ella es posible resolver una gran variedad de problemas que involucran variación instantánea de magnitudes, fenómenos físicos que presentan variaciones y cambios, entre otros múltiples campos del conocimiento humano.

Como se ha mencionado, muchas investigaciones han analizado las dificultades que tienen los alumnos con el concepto de derivada (Asiala et al., 1997; Orton, 1983; Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros, 2004; García y Llinares, 2008). Sin embargo, existen pocas investigaciones enfocadas en analizar el conocimiento que tienen los profesores y en dar una propuesta didáctica que ayude a reforzar los conocimientos y dar una mejor comprensión del objeto derivada.

Por ello consideramos necesario realizar esta investigación, en primer lugar, como un diagnóstico de las estructuras mentales que tiene un grupo de profesores de nivel medio superior acerca del concepto derivada. En segundo lugar, porque se requieren propuestas fundamentadas en la teoría para la actualización o formación de los docentes de matemáticas.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 La teoría APOE

El objetivo de este capítulo es la presentación de las características de las estructuras mentales que constituyen la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y los mecanismos tales como la *interiorización*, la *encapsulación*, la *coordinación*, la *reversión*, la *desencapsulación*, la *tematización* y *generalización*, mediante las cuales se construyen esas estructuras mentales.

Dubinsky (1991, 1996, 2002) ha desarrollado y refinado, usando métodos cualitativos, un marco teórico como resultado de su aplicación en las investigaciones que el grupo RUMEC ha venido realizando en la última década, sobre desarrollo curricular en educación matemática en el nivel preuniversitario y universitario. La perspectiva teórica que ha denominado APOE, es el resultado de la interpretación de la teoría piagetiana constructivista y sus ideas relativas a la abstracción reflexiva, aplicadas al estudio cualitativo del desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

La hipótesis que subyace en esta teoría es: "… todo concepto matemático puede ser descrito por esta teoría y si el diseño de la instrucción se basa en la misma, entonces los estudiantes aprenderán mejor que con otras pedagogías. El desarrollo es una progresión de acciones, procesos, objetos y esquemas" (Dubinsky y McDonald, 2001)

Dicho de otra manera, esta teoría describe las estructuras y los mecanismos mentales con los cuales un individuo puede llegar a construir un concepto o noción matemática. Desde esta perspectiva, el conocimiento matemático se describe en términos de estructuras mentales que son motivadas por mecanismos mentales desarrollados por el individuo. Por estructura y mecanismo mental entendemos:

> Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina. Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la

mente de un individuo o un grupo de individuos. (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidakovic, 2008, p. 98).

Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger (2004) plantean que las estructuras mentales son construidas y conectadas por medio de mecanismos, de tal manera que estas pueden ser organizadas y estructuradas en marcos coherentes (esquemas). Estos esquemas son usados por los estudiantes para resolver un problema; los esquemas pueden ser *tematizados* para dar lugar a un nuevo objeto sobre el cual es posible aplicar nuevas acciones e iniciar la construcción de nuevos esquemas (Dubisky, 2002).

La teoría APOE posibilita la construcción de conceptos matemáticos siempre y cuando el sujeto tenga las estructuras previas necesarias, las transforme mediante la aplicación de Acciones o Procesos, de tal forma que pueda construir un nuevo Objeto que a su vez hará parte de un Esquema construido previamente o que dará lugar a la construcción de un nuevo Objeto.

La figura 1 muestra la relación que existe entre las estructuras y mecanismos mentales que han sido utilizados para explicar cómo un individuo puede construir un concepto y/o noción matemática (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014). En este trabajo los autores describen en forma general estas estructuras y mecanismos, además, presentan diferentes ejemplos de conceptos que han sido analizados desde esta perspectiva teórica.

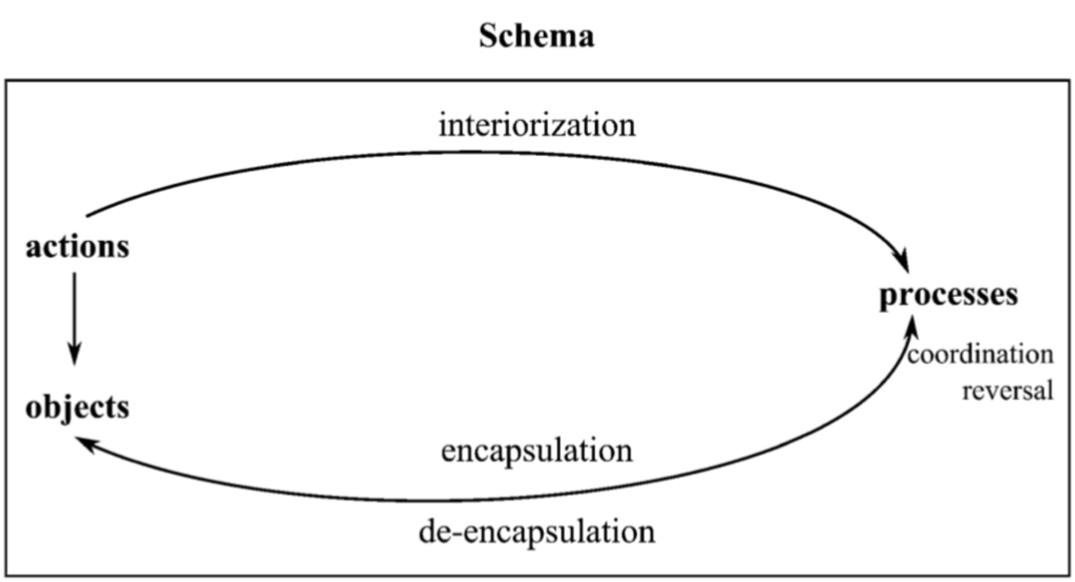


Figura 1. *Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon et al. 2014, p.18)*

2.2 Descripción de las estructuras y mecanismos mentales

Dubinsky (1991) analiza cinco tipos de abstracción reflexiva, o mecanismos mentales, *interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y generalización* que llevan a la construcción de las estructuras mentales Accion, Proceso, Objeto y Esquema. La interacción de estos elementos se describe de la siguiente manera:

> ... consideramos que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales construidos previamente para formar Acciones; las Acciones se *interiorizan* para formar Procesos que luego se *encapsulan* para formar Objetos matemáticos. Los Objetos se pueden *desencapsular* de nuevo a Procesos a partir de los cuales se formaron. Finalmente, las Acciones, Procesos y Objetos se pueden organizar en Esquemas (Asiala et al., 1996, p. 6)

Dubinsky (1991) caracteriza la relación general entre estos elementos como un "sistema de retroalimentación circular" (p. 106). Aunque la construcción del conocimiento matemático no es lineal, la descripción basada en APOE de la construcción mental de un concepto matemático se presenta de una manera jerárquica. La profundidad y complejidad de la comprensión que un individuo tiene de un concepto depende de su capacidad para establecer conexiones entre las estructuras mentales que lo constituyen. Estas conexiones forman la base de un esquema cuya coherencia es crucial para dar sentido a situaciones matemáticas relacionadas con el concepto. A continuación describiremos cada una de las estructuras y mecanismos mentales que forman parte del marco teórico y que son esenciales para lograr la comprensión de un concepto matemático.

Acción

Según Piaget y adoptado por la Teoría APOE, un concepto se concibe primero como una Acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un Objeto u Objetos concebidos previamente. Una Acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse explícitamente y guiarse por instrucciones externas. Además, cada paso indica el siguiente, es decir, los pasos de la Acción no se pueden imaginar y ninguno se puede omitir (Arnon et al., 2014). Por ejemplo, en el caso del concepto de función, “se considera que un individuo que requiere una expresión explícita para pensar en el concepto de función y no puede hacer poco más que sustituir la variable en la expresión y manipularla, tiene una Acción” (Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005a, p. 338). Por lo tanto, la expresión actúa como una señal externa que indica cómo se debe realizar la Acción, paso a paso, mediante la sustitución de valores específicos.

Aunque son las estructuras más primitivas (y, a menudo, las únicas destacadas en la enseñanza tradicional), las Acciones son fundamentales para la teoría APOE. Una concepción de Acción es necesaria para el desarrollo de otras estructuras. En particular, los Procesos son Acciones *interiorizadas* y los Objetos mentales surgen debido a la aplicación de Acciones.

En esta misma dirección, Sánchez-Matamoros, Llinares y García (2006) y Asiala et al., (1997) resumen la estructura mental de Acción del concepto función y la estructura mental de Acción del concepto de derivada de la siguiente forma.

Concepción Acción de función:

- Necesita fuertemente encontrar o construir una ecuación o expresión algebraica o fórmula para poder evaluar el valor de la función en un punto del dominio.

Concepción Acción de derivada:

- Necesita obtener la expresión algebraica de la función para obtener la función derivada, y posteriormente, el valor de la derivada en un punto.

Compartimos la postura de estos autores que han desarrollado esta teoría cuando afirman, que si bien es cierto que la concepción Acción de un concepto matemático es, en general, muy limitada, las Acciones marcan el principio del entendimiento de un concepto. Por ello, sugieren que los diseños instruccionales deben comenzar con actividades diseñadas para propiciar la construcción de Acciones en los estudiantes (Dubinsky, 1996).

Interiorización y Proceso

Los Procesos se construyen utilizando uno de dos mecanismos mentales: *interiorización* o *coordinación*. Cada uno de estos mecanismos da lugar a nuevos Procesos.

A medida que las Acciones se repiten sobre un Objeto y se reflexiona sobre ellas, el individuo pasa de confiar en señales externas a tener control interno sobre ellas. Esto se caracteriza por la capacidad de imaginar que realiza los pasos, sin tener necesariamente que realizar cada uno explícitamente y poder omitir pasos, así como revertirlos. La *interiorización* es el mecanismo que hace posible este cambio mental.

Una Acción debe ser *interiorizada*, esto significa que se realiza alguna construcción interna relacionada con la Acción. Una Acción *interiorizada* es un Proceso. La *interiorización* permite que uno sea consciente de una Acción, reflexione sobre ella y la combine con otras Acciones (Dubinsky 1991).

Se dice entonces que una Acción ha sido *interiorizada* en un Proceso, cuando un sujeto reflexiona sobre la Acción realizada en el Objeto y construye una operación interna que realiza la misma transformación (Asiala et al., 1997).

En el mismo sentido, Dubinsky et al. (2005a) proporcionan la siguiente descripción de un Proceso y la interpreta para el caso de las funciones:

> Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que realiza la misma operación que la acción que se está interiorizando, pero totalmente en la mente del individuo, lo que le permite imaginar que realiza la transformación sin tener que ejecutar cada paso explícitamente. Así, por ejemplo, un individuo con un proceso de comprensión de la función construirá un proceso mental para una función dada y pensará en términos de entradas, posiblemente no especificadas, y transformaciones de esas entradas para producir salidas. (p. 339)

Aunque una Acción y un Proceso, cuando se relacionan con un concepto dado, pueden implicar la misma transformación, difieren en el siguiente sentido: para una Acción, uno realmente debe realizar la transformación (ya sea física o mentalmente); para un Proceso, uno puede llevar a cabo la transformación sin la necesidad de pasar por cada paso.

Sánchez-Matamoros, Llinares y García (2006) y Asiala et al., (1997) resumen la estructura mental de Proceso del concepto función y la estructura mental de Proceso del concepto de derivada de la siguiente forma.

Concepción Proceso de función:

- Las funciones son entendidas como reglas de asignación que conectan a cada valor de la variable independiente x del dominio un valor de la variable dependiente y.
- Comprenden la notación $f(a)$ donde a es un número real.

Concepción Proceso de derivada

- La derivada en un punto se entiende como el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto, y para obtenerlo se necesita calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a partir de la información gráfica o diferenciar la ecuación de la recta tangente.
- Aún no se tiene construida la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada, como subclase y clase respectivamente.

A diferencia de la concepción de Acción, el sujeto percibe el Proceso como una transformación interna, y que controla, en vez de percibirla como algo que hace como respuesta a una o varias señales externas. Por ejemplo, para el caso de funciones como la función $sen\ (x)$, se requiere de una concepción Proceso del concepto función porque no se cuenta con instrucciones directas o explícitas para obtener una salida para una entrada dada, por ello, para poder calcular la función en todo el dominio, se debe imaginar el Proceso de asociar a cada número real con su seno.

Encapsulacion y Objeto

La *encapsulación* ocurre cuando un individuo aplica una Acción a un Proceso, es decir, ve una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática a la que se pueden aplicar Acciones. Dubinsky et al. (2005a) ofrecen la siguiente explicación:

> Si uno se da cuenta del proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y en realidad pueden construir tales transformaciones (explícitamente o en la imaginación de uno), entonces decimos que el individuo ha encapsulado

el proceso en un objeto cognitivo. Para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones, como formar un conjunto de funciones, definir operaciones aritméticas en dicho conjunto, equiparlo con una topología, etc. (p. 339).

En varios estudios basados en APOE, el mecanismo de *encapsulación* es el más difícil (Arnon et al., 2014). Por ejemplo, en un estudio sobre las concepciones de los estudiantes del teorema fundamental de estadística, Clark et al. (2007) informó:

> … ir más allá de un proceso de concepción de la media es mucho más difícil. Tres de los estudiantes en nuestro estudio no habían progresado más allá de un proceso de concepción de la media. Aunque podrían realizar las acciones necesarias, describir el proceso de calcular la media de un conjunto de números y, en algunos casos, revertir este proceso, estos estudiantes parecían incapaces de concebir la media de un conjunto de datos como una entidad en sí misma. No pudieron realizar ninguna acción en la salida de sus procesos ni asociar ninguna propiedad significativa con las medias que computaron (p. 11).

Entonces dentro de la teoría APOE, la *encapsulación* es la transformación mental de un Proceso, el cual se ha *interiorizado* de una Acción, en un Objeto cognitivo. Este Objeto puede considerarse como una entidad total y puede actuarse mentalmente sobre él por medio de Acciones y Procesos, bajo estas circunstancias se afirma que un Proceso se ha encapsulado en un Objeto (Arnon et al. 2014).

Por tanto, la *encapsulación* es el Proceso de conversión de un Proceso dinámico en un Objeto estático. Por ejemplo, en el caso de la derivada, si consideramos el Proceso de aproximar las tasas medias de variación de una función $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, cuando h tiende a cero, con el Objeto derivada como el $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En este caso se asocia el proceso dinámico de h cuando tiende a cero al hallar las tasas medias de variación (que está formado por una clase de Objetos), con el Objeto límite (estático), se dice que se ha encapsulado el proceso de calcular las tasas medias de variación en el objeto función derivada como un límite (Font, 2000).

En el marco de APOE, los Objetos se definen de la siguiente forma:

> “Cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso en particular, toma conciencia del Proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean Acciones o Procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este Proceso como un Objeto. En este caso, decimos que el Proceso se ha encapsulado en un Objeto” (Asiala et al., 1996, p. 8).

Des-encapsulación, Coordinación y Reversión de Proceso

Según Arnon et al. (2014), el mecanismo de *coordinación* es indispensable en la construcción de algunos objetos matemáticos. Por ejemplo, se pueden *des-encapsular* dos Objetos, *coordinar* sus Procesos y *encapsular* el Proceso coordinado para formar un nuevo Objeto.

Un ejemplo común de este mecanismo es cuando se realiza el proceso mental de ir hacia atrás, es decir, si tenemos el Objeto $f(x)$ lo podemos des-encapsular en un Proceso que permite al individuo pensar en la función como una asignación a la variable independiente de uno o más valores, que realiza una o más operaciones sobre el conjunto de entrada, y del cual se obtienen los valores de la variable dependiente. Es decir, que a partir de la interpretación de un Objeto (estático) como lo es $f(x)$, pasamos a centrarnos en otros objetos como la variable independiente x y en una secuencia de acciones, físicas o mentales, que se realizan con estos objetos (proceso dinámico) (Font, 2000).

Una vez que un Proceso se ha encapsulado en un Objeto mental se puede *des-encapsular* cuando sea necesario, volver a su Proceso subyacente. En otras palabras, al aplicar el mecanismo de *des-encapsulación*, un individuo puede volver al Proceso que dio origen al Objeto.

Otro ejemplo que Dubinsky (1991) presenta sobre la generación de un nuevo Proceso por el mecanismo de *reversión* y que está relacionado con la derivada es el siguiente.

> Un estudiante de cálculo puede haber *interiorizado* la Acción de tomar la derivada de una función y puede ser capaz de hacer esto exitosamente con un gran número de ejemplos, utilizando varias técnicas que a menudo se enseñan y ocasionalmente se aprenden en cursos de cálculo. Si el Proceso se *interioriza*, el estudiante podría *revertirlo* para resolver problemas en los que se da una función y se desea encontrar una función cuya derivada sea la función original. (p. 107)

En general los Procesos no necesariamente se logran a partir de la *interiorización* de Acciones, también pueden producirse por la *coordinación* de dos o más Procesos (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, es posible *coordinar* el Proceso de suma vectorial con el Proceso de producto por un escalar para dar lugar a un único Proceso; este define la estructura Proceso de transformación lineal como una función que preserva combinaciones lineales, al poner las dos operaciones juntas.

Desde esta perspectiva, siguiendo con los autores que hemos citado, Sánchez-Matamoros et al. (2006) y Asiala et al. (1997), plantearon las siguientes definiciones de la concepción Objeto del concepto función enunciada a continuación:

Concepción Objeto de función:

- Trabajan con una notación funcional sin referencia de una expresión de la función
- Hacen traducciones entre diferentes representaciones de una función
- Pueden dibujar un gráfico de la función con la información específica de los valores y propiedades de la función y su derivada

Concepción Objeto de derivada:

- El objeto función derivada según la situación se puede entender como una clase de objetos que son la derivada de la función en cada punto del dominio, o bien como un objeto en el que se pueden realizar nuevas acciones, por ejemplo, la segunda derivada.
- Diferencian la derivada en un punto de la función derivada.
- Hacen traducciones entre diferentes representaciones de la función derivada.
- Coordinan las representaciones de la función y la función derivada, y hacen traducciones entre diferentes registros de representación de la función derivada.
- Coordinan varias interpretaciones del concepto de derivada en diferentes contextos.

Esquemas

Como se ha mencionado, la teoría APOE ha sido explicada y empleada en varias investigaciones para indagar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre determinados conceptos matemáticos (Asiala et al., 1997; Clark et al., 1997). Los Esquemas, en particular, desempeñan un papel importante en este estudio, por lo que discutimos este aspecto de la teoría APOE con cierto detalle.

Un Esquema maduro es una colección coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas construidos previamente que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en situaciones problemáticas (Dubinsky, 1991). Un individuo demuestra la coherencia del Esquema al discernir qué está contenido dentro del Esquema y qué no lo está. El individuo puede reflexionar sobre un Esquema y transformarlo como un Objeto para realizar nuevas Acciones. A través de esta transformación, el Esquema en sí puede convertirse en un Objeto. Los Objetos pueden transformarse mediante Acciones, que lleva a nuevos Procesos, Objetos y Esquemas para construir nuevos conceptos. Por lo tanto, la Acción, el Proceso y el desarrollo de Objetos continúan reconstruyéndose en Esquemas existentes.

2.3 Desarrollo de Esquemas y la teoría APOE

Piaget y García (1983) escribieron en detalle sobre los Esquemas y su desarrollo. Piaget (1970) había discutido anteriormente la idea de Esquemas. Dijo que el conocimiento se origina incluso antes de que un niño use el lenguaje, aproximadamente a la mitad de su segundo año. Durante este período del pre-idioma, las estructuras lógico-matemáticas ya existían en un niño, y cerca del comienzo de su segundo año, un niño exhibe inteligencia sensorial-motora. Piaget describió la inteligencia sensoriomotora como una inteligencia práctica que tiene su propia lógica, a la que llamó lógica de acción. Las acciones que se derivan de la inteligencia sensoriomotora se pueden repetir y generalizar.

Lo que siempre es repetible y generalizable en una Acción es lo que Piaget llama un Esquema. Cualquier Esquema particular en sí mismo no tiene un componente lógico, pero los Esquemas están coordinados entre sí, y este hecho resulta en la *coordinación* general de las Acciones. Estas *coordinaciones* forman una lógica de Acciones que son el comienzo de las estructuras lógico-matemáticas. Piaget dijo que un Esquema podría incluir subesquemas. Los subesquemas se incluyen en el Esquema total de la misma manera que las estructuras lógico-matemáticas de las subclases de clasificación se incluyen dentro de la clase total. En una etapa posterior, esta relación de inclusión de clase da lugar a conceptos.

En la misma dirección del desarrollo de la comprensión de un objeto matemático, la teoría de una tríada de etapas en el desarrollo de Esquemas se ha utilizado en varios estudios sobre la comprensión de estudiantes en diversas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, en un estudio de la comprensión de la regla de la cadena en estudiantes de nivel superior, Clark et al. (1997) encontraron que la teoría APOE que involucraba Acciones, Procesos y Objetos no era adecuada para analizar sus datos sobre la comprensión de estos, pero que la tríada de Piaget y García (1983) fue útil para interpretar los niveles de comprensión.

El desarrollo de Esquemas es un proceso dinámico que cambia constantemente. Piaget y García (1983) propusieron que el conocimiento se desarrolla de acuerdo con ciertos mecanismos que evolucionan en tres etapas, llamada tríada, que ocurren en un orden fijo. Ellos también plantearon la hipótesis de que estos niveles se pueden observar cuando se analiza cualquier Esquema en desarrollo.

En la fase preliminar de la tríada, el nivel *intra*, los objetos particulares se analizan en términos de sus propiedades. Las explicaciones a este nivel son locales y particulares. Un objeto en este nivel no es reconocido por el alumno como necesario, y su forma es similar a la forma de una simple generalización. Por ejemplo, en el nivel *intra* del esquema de derivada, el estudiante interpreta la derivada como la pendiente de la línea tangente en puntos específicos, demostrando esta interpretación con los intervalos de aumento / disminución de una función o, alternativamente, resolviendo un problema de tasa de cambio. Sin embargo, el estudiante no puede hacer la conexión entre estos dos tipos de problemas.

En el nivel *inter*, el estudiante es consciente de las propiedades que posee el concepto y puede deducir de una operación inicial, una vez que se entiende, otras operaciones que pueden coordinarla con operaciones similares. Este proceso lleva al sujeto a agrupar los sistemas, utilizando un método que incluye una nueva transformación. Por ejemplo, en la etapa *inter* del esquema de derivada, el alumno coordina la noción de derivada como la pendiente de la línea tangente con la idea de derivada como la tasa de cambio en un punto determinado. Él o ella pueden utilizar cualquiera de las dos ideas para describir la variación local en la función.

Cuando un sujeto reflexiona sobre estas relaciones y coordinaciones, nuevas estructuras evolucionan. A través de las síntesis de las transformaciones en el nivel *inter*, el estudiante construye un conocimiento de un concepto en el esquema, y en el nivel *trans*, el sujeto puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en los otros niveles. En la etapa *trans* del esquema de derivada, por ejemplo, el estudiante presenta la derivada como la pendiente o la tasa de cambio de una función en un punto dado y reconoce que todas las situaciones en las que está involucrada la variación están relacionadas con el concepto de derivada. El sujeto puede discriminar entre las relaciones que están incluidas y las que no, demostrando así la coherencia del Esquema.

Según Piaget y García (1983), en cada etapa de la tríada el sujeto reorganiza el conocimiento adquirido durante la etapa anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal. En el proceso de aprendizaje se desarrollan diferentes Esquemas, y el cambio de nivel puede describirse usando la tríada. A medida que los conocimientos se desarrollan, los individuos construyen muchos esquemas existentes, todos los cuales están en constante cambio y varían en niveles de evolución.

Según Baker et al. (2000), la teoría del desarrollo de Esquemas en el contexto de la teoría APOE, a través de los Esquemas de intervalo y propiedad y las tres fases: intra, inter y trans, es una herramienta para analizar la composición del conocimiento de los estudiantes. Debido a que un estudiante puede avanzar a través de los niveles de una manera única y no lineal, la tríada, como herramienta, permite a los investigadores utilizar un enfoque detallado de una manera flexible. Utiliza las complejidades del problema, las relaciones entre ideas, las estructuras recién formadas y la coherencia, todos ellos, aspectos importantes en el desarrollo de las estructuras lógico-matemáticas.

2.3.1 Esquema bidimensional

Baker et al. (2000) mencionan que el desarrollo del esquema gráfico de derivada se puede describir mediante la interacción de dos esquemas, a lo cual ellos llaman a esto el esquema bidimensional.

En este esquema los datos o la información que proporciona el sujeto se describen con pares de niveles de la tríada de dos esquemas que se utilizan dentro del esquema gráfico de derivada. Los dos esquemas son el esquema de propiedad y el esquema de intervalo. Cada uno se describe por separado y luego se describe como un modelo en pares.

2.3.1.1 El desarrollo del Esquema de propiedad

El esquema de propiedad involucra dos aspectos importantes: comprender cada condición analítica en relación con una propiedad gráfica de la función y coordinar estas condiciones. Las condiciones incluyen información sobre la primera y segunda derivada (ya sean positivas, negativas o cero), los límites de la función y la primera derivada y la continuidad de la función. Baker et al. (2000) describen la triada aplicada al desarrollo del esquema de propiedad de la siguiente forma:

En el nivel *intra-propiedad*, el sujeto puede interpretar una condición aislada y relacionarla con una propiedad gráfica de la función. Un individuo en este nivel normalmente utiliza únicamente la condición de la primera derivada y, a menudo, conoce otras propiedades, pero no puede coordinarlas para producir un gráfico completo. Si dos propiedades se superponen, el sujeto describe el comportamiento del gráfico utilizando solo una propiedad. Si él o ella intentan usar más de una propiedad, este no puede completar su descripción y recurre a una sola propiedad.

En el nivel *inter-propiedad*, el sujeto comienza a coordinar dos o más condiciones simultáneamente. Esta coordinación, sin embargo, no se aplica en todas las condiciones de superposición.

En el nivel *trans-propiedad*, el sujeto puede coordinar todas las condiciones analíticas a las propiedades gráficas de la función en un intervalo. En este punto, el individuo expresa o demuestra una coherencia del esquema. Es decir, reconoce claramente qué comportamientos de una función pueden incluirse en la gráfica y qué no.

2.3.1.2 El desarrollo del esquema de intervalo

Los aspectos importantes del esquema de intervalo son: comprender la notación del intervalo, conectar intervalos contiguos y coordinar la superposición de los intervalos. Distinguir diferentes secciones del dominio es un problema típico en el cálculo. La triada aplicada a este esquema en particular se describe a continuación. Baker et al. (2000) describen la triada aplicada al desarrollo del esquema de intervalo de la siguiente forma.

En el nivel *intra-intervalo*, el sujeto trabaja solo en intervalos aislados. La información la describe intervalo por intervalo. La superposición de intervalos o la conexión de intervalos contiguos causa confusión.

En el nivel *inter-intervalo*, el sujeto comienza a coordinar dos o más intervalos simultáneamente. Esta coordinación, sin embargo, no la se aplica en todos los intervalos conectados.

En el nivel *trans-intervalo*, el sujeto puede describir la coordinación de los intervalos en todo el dominio. Él o ella pueden superponer intervalos y conectar intervalos contiguos. También demuestra coherencia en el esquema al describir qué manifestaciones en la gráfica estaban permitidas por la superposición y la conexión de los intervalos y cuáles no.

2.3.1.3 El esquema global de gráficos de derivada y sus dos dimensiones

A continuación, se describe el nivel de desarrollo del esquema de propiedad y de intervalo de la doble tríada en un esquema bidimensional que engloba los dos esquemas mencionados anteriormente.

En el nivel *intra-propiedad, intra-intervalo (intra-intra*), el sujeto puede producir una o unas pocas acciones aisladas en las propiedades dadas de una función. Las acciones resultan de la relación de una sola propiedad con los intervalos aislados de la gráfica. No hay coordinación entre intervalos ni entre múltiples condiciones en un solo intervalo.

En el nivel *intra-propiedad, inter-intervalo (intra-inter)*, el sujeto puede coordinar dos o más, pero no todos los segmentos contiguos de la gráfica usando una condición en al menos dos intervalos consecutivos.

En el nivel *intra-propiedad, trans-intervalo (intra-trans)*, el sujeto puede coordinar una sola propiedad de manera consistente en todo el dominio y dibujar una forma del gráfico.

En el nivel *inter-propiedad, intra-intervalo (inter-intra),* el sujeto puede coordinar algunas, pero no todas las propiedades en uno o más intervalos separados, pero no puede vincular intervalos contiguos en el dominio.

En el nivel *inter-propiedad, inter-intervalo (inter-inter),* el sujeto puede coordinar algunas propiedades en al menos dos intervalos contiguos del dominio. El individuo no logra coordinar todas las propiedades en todo el dominio.

En el nivel *inter-propiedad, trans-intervalo (inter-trans),* el sujeto puede coordinar al menos dos, pero no todas, las propiedades en todo el dominio.

En el nivel *trans-propiedad, intra-intervalo (trans-intra),* el sujeto debe poder coordinar todas las propiedades en intervalos aislados y debe ser consciente de qué gráficos se pueden esbozar con la coordinación de las propiedades. No puede lograr una relación entre los segmentos contiguos de la gráfica.

En el nivel *trans-propiedad, inter-intervalo (trans-inter),* el sujeto puede coordinar todas las propiedades en al menos dos intervalos contiguos.

En el nivel *trans-propiedad, trans-intervalo (trans-trans)*, el sujeto puede coordinar todas las condiciones en todo el dominio del gráfico. En este nivel, el individuo pudo determinar, sobre la base de la coordinación de las propiedades y los intervalos contiguos, qué es y qué no está incluido en el gráfico.

En este trabajo utilizamos la teoría APOE en términos del desarrollo de esquemas como marco teórico para analizar las respuestas de los profesores ante el problema de graficación de la derivada de una función (ver problema 7, Anexo 1). El uso del modelo bidimensional nos permitió comprender ciertos comportamientos de los profesores, causados por la interacción de dos esquemas, el esquema de intervalo y el esquema de propiedad, y la triada intra, inter y trans.

Sin duda, los trabajos que pueden encontrarse en la literatura muestran que la teoría APOE es útil para analizar conceptos matemáticos avanzados. Los estudios hechos por diferentes investigadores (Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Asiala et al., 1997; Baker et al., 2000; Dubinsky y McDonald, 2001; Badillo, 2003; Dubinsky et al., 2005a; Badillo et al., 2011; Borji y Alamolhodaei, 2016; Borji et al., 2018), representa una lista muy amplia de trabajos hechos con base en la teoría APOE, y los académicos que han enriquecido este marco teórico. Hoy tenemos una mejor comprensión de sus fundamentos y contamos con gran cantidad de conceptos matemáticos analizados que son una potente herramienta para la comunidad académica.

El principal interés de la teoría APOE reside en describir la manera cómo se construye el conocimiento matemático y la principal herramienta para tal fin es la descomposición genética porque describe los aspectos constructivos de una porción de conocimiento matemático que, a su vez, se espera que determinen aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza del conocimiento (Asiala et al., 1996).

2.4 Descomposición Genética

Según Dubinsky (1991), una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar para aprender un concepto matemático específico. Por lo general, comienza como una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la Teoría APOE, su conocimiento matemático, la investigación previamente publicada sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto.

Como tal, la descomposición genética consiste en una descripción de las acciones que un estudiante necesita realizar en objetos mentales existentes y continúa incluyendo explicaciones de cómo estas Acciones se interiorizan en Procesos. En este punto, el concepto todavía se ve como algo que uno hace sobre el Objeto. Para ser concebido como una entidad por derecho propio, algo que puede transformarse, el Proceso se encapsula en un Objeto mental. Es completamente posible que un concepto pueda consistir en varias Acciones, Procesos y Objetos diferentes. Una descomposición genética puede incluir una descripción de cómo estas estructuras están relacionadas y organizadas en una estructura mental más grande llamada Esquema. La descomposición genética explica lo que se sabe sobre el rendimiento esperado de los estudiantes que indica diferencias en el desarrollo de las construcciones de los estudiantes (Arnon et al., 2014).

Además de describir cómo podría construirse mentalmente un concepto, una descomposición genética puede incluir una descripción de las estructuras de requisitos previos que un individuo debe haber construido previamente y podría explicar las diferencias en el desarrollo de los estudiantes que pueden explicar las variaciones en el rendimiento matemático. Así, una descomposición genética es un modelo de la epistemología y cognición de un concepto matemático (Roa-Fuentes y Oktac¸ 2010).

Debido a que la descomposición genética de un concepto se describe linealmente, puede parecer que el concepto se desarrolla linealmente. Sin embargo, esto es principalmente una consecuencia de la descripción, que no refleja la posibilidad de diferentes trayectorias por las que un sujeto podría transitar para lograr un aprendizaje de un concepto, que puede incluir arranques, paradas y discontinuidades que ocurren en el aprendizaje. Además, la teoría APOE no descarta la posibilidad de que las estructuras mentales, una vez desarrolladas, no siempre se apliquen cuando se requiera. Por lo tanto, una descomposición genética no explica lo que sucede en la mente de un individuo, ya que esto es probablemente incognoscible; no predice si un individuo aplicará una estructura dada cuando se le solicite; tampoco ofrece un análisis teórico exclusivo de cómo se aprenden las matemáticas. La teoría APOE reconoce que un estudiante puede seguir diferentes caminos de aprendizaje o seguir diferentes trayectorias, a medida que el estudiante pasa de Proceso a Acción y vuelve a Proceso o de Objeto a Proceso y de regreso a Objeto. A pesar de las diferencias individuales, una descomposición genética describe las estructuras que un estudiante necesita para construir en su aprendizaje de un concepto. Cuando se verifica empíricamente, una descomposición genética puede servir como un modelo útil de cognición, como lo demuestran varios estudios empíricos que muestran la eficacia de la teoría APOE como una herramienta para describir las concepciones de los estudiantes y en el diseño de una instrucción efectiva (Weller et al., 2004).

2.4.1 El Papel de la descomposición genética en la investigación

La descomposición genética según Badillo (2003), es el eje de la aplicación de la teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos, porque permite estructurar el concepto matemático, orienta la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen.

En este sentido, la descomposición genética desempeña un papel central en la investigación basada en APOE, ya que es necesario un modelo teórico para proporcionar a los investigadores hipótesis que puedan servir de base para el diseño de instrumentos basados en la teoría para obtener y analizar datos de los estudiantes. Una descomposición genética actúa como una lente, análoga a una red de difracción, que los investigadores usan para explicar cómo los estudiantes desarrollan su comprensión de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, en una tarea dada, un estudiante puede realizar la tarea correctamente, otro puede tener dificultades y otro puede fallar por completo. La descomposición genética puede explicar las discrepancias en el rendimiento de los sujetos. El estudiante que tiene éxito puede dar evidencia de haber realizado de forma correcta una o más de las construcciones mentales requeridas por la descomposición genética. El estudiante que muestra un progreso limitado puede mostrar evidencia de haber comenzado a hacer las construcciones. Es posible que el estudiante que falla no haya realizado las construcciones o pueda dar pruebas de que no ha tenido éxito al realizar las construcciones necesarias. Si las diferencias en el rendimiento de los estudiantes no pueden explicarse por la descomposición genética, puede darse el caso de que la descomposición genética necesite una revisión. Así, por un lado, la descomposición genética guía el análisis de las respuestas de los estudiantes; por otro lado, señala brechas en la comprensión de los investigadores de cómo se desarrolla el concepto en la mente del individuo. De cualquier manera, una descomposición genética es una herramienta mediante la cual los investigadores tratan de entender cómo los estudiantes aprenden un concepto y explican las razones detrás de las dificultades de los estudiantes. Además, el uso de un modelo teórico aumenta la confiabilidad del análisis, proporciona un medio para describir el pensamiento de los estudiantes y sirve como una herramienta de diagnóstico y de predicción.

Como se describe en Asiala et al. (1996), una descomposición genética necesita ser probada experimentalmente. El objetivo de probar la validez del modelo es responder a las siguientes cuestiones: ¿Hicieron los sujetos las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico?, si se observan las construcciones descritas en la descomposición genética, ¿el modelo es compatible? Si los estudiantes parecen construir el concepto de una manera que difiere de lo que se describe en la descomposición genética, entonces el modelo se refina o, si las discrepancias son demasiado grandes, se descartan en favor de una nueva descomposición genética.

En el caso de la derivada, la descomposición genética de este concepto, entendida como una descripción detallada en términos de las construcciones mentales, es una forma de organizar hipótesis acerca de cómo se produce el aprendizaje de este concepto en los estudiantes, por esta razón se denomina de esta forma a la trayectoria de aprendizaje hipotética que permite conjeturar cómo se desarrolla la comprensión del sujeto Asiala et al. (1997).

2.4.2 Descomposición genética refinada de derivada

De acuerdo a la teoría APOE, Asiala et al. (1997) sugieren que hay dos trayectorias que se relacionan entre sí, la gráfica y analítica, a partir de las cuales se puede construir el concepto de derivada. Desde estas trayectorias conciben la descomposición genética del concepto derivada de la siguiente forma:

Descomposición genética refinada de derivada propuesta por Asiala et al. (1997)

Trayectoria gráfica y analítica de la derivada

Requisitos previos de conocimiento

A. Representaciones gráficas de objetos matemáticos

- Representación gráfica de un punto
- Representación gráfica de una línea que incluye el concepto de pendiente

B. Coordinación de representaciones de puntos con una función

- Interpretación gráfica de (x, y) cuando y está dada por $f(x)$
- Superando la necesidad de tener una fórmula para la función

1a. Gráfica: La Acción de trazar una cuerda entre dos puntos de una curva para formar un acorde que es una porción de la línea secante que une los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante.

1b. Analítica: La Acción de calcular la razón de cambio al determinar el cociente de diferencias.

2a. Gráfica: *Interiorización* de la Acción en el punto **1a** a un Proceso simple en el que los puntos son cada vez más cercanos, manteniendo un punto fijo y el otro acercándose "más y más" en el gráfico.

2b. Analítica: *Interiorización* de la Acción en el punto **1b** a un Proceso simple a medida que la diferencia en los intervalos de tiempo se hace "más y más pequeña", es decir, a medida que la longitud de los intervalos de tiempo se acerca cada vez más a cero.

3a. Gráfica: *Encapsulación* del Proceso **2a** para producir la línea tangente como la posición límite de las líneas secantes y también producir la pendiente de la línea tangente en un punto en el gráfico de una función.

3b. Analítica: *Encapsulación* del Proceso **2b** para producir la tasa de cambio instántanea de una variable con respecto a otra.

4. *Interiorización* de los Procesos en los puntos **2a** y **2b** en general, para producir la definición de la derivada de una función en un punto como el límite de un cociente de diferencias en el punto.

5. *Coordinación* de los Procesos en los puntos **2a** y **2b** en diversas situaciones para relacionar la definición de la derivada con varias otras interpretaciones.

Interpretación gráfica de la derivada

6. Interpretación gráfica de la derivada en un punto

- Superar la necesidad de la fórmula de la función para derivar. Los estudiantes que indican la necesidad de tomar una derivada tienen una concepción previa de la derivada gráficamente. Es decir, no demuestran ningún conocimiento de esta interpretación. Sin embargo, también es posible que tal comprensión exista, pero no sea evocada por la situación del problema.
- Ver $f'(a)$ como la pendiente de una línea tangente. Como acción, la línea tangente se identifica en el punto y se calcula su pendiente. Hay al menos dos formas para que se construya esta acción. El estudiante puede simplemente haber memorizado una regla: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la línea tangente al gráfico en ese punto. Una construcción más rica proviene de construir la tangente como el límite de los acordes de la curva $y = f(x)$, como en los puntos **1a**-**3a** en la descomposición genética.

A partir de esta acción, el alumno construirá el proceso de la función derivada. Un alumno demuestra esto como una acción cuando se enfoca en un punto del dominio a la vez.

- Coordinar varias interpretaciones de la derivada. El alumno reúne las ideas de límite de cociente de diferencias, velocidad promedio, costo marginal, etc. y puede moverse entre interpretaciones.

7. *Interiorización* de la Acción de producir la derivada en un punto en el Proceso de una función f' que toma como entrada un punto x y produce el valor de salida $f'(x)$ para cualquier x en el dominio de f'.

8. *Encapsulación* del Proceso en el punto **7** para producir la función f' como un objeto.

9. Interpretación gráfica de la derivada como una función

- Viendo la derivada como la función, donde x → la pendiente en $\big(x, f(x)\big)$
- Identificando f' con la línea tangente en un punto.

10. Construcción del Esquema para la interpretación gráfica de una función usando la relación entre propiedades de funciones y derivadas.

11. Diversas coordinaciones para obtener la gráfica de f

- Interpretación gráfica de $f(x)$, para una sola x
- Interpretación de $f'(x)$ para una sola x como la pendiente
- Proceso de x moviéndose a través de un intervalo
    a) Monotonicidad de la función y signo de la derivada
    b) Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada finita
    c) Concavidad de la función y signo de la segunda derivada
- Dibujar el gráfico completo o totalmente representativo

Esta descomposición genética refinada de derivada surge del estudio realizado por Asiala et al. (1997), en el cual los investigadores inicialmente habían propuesto una primera descomposcición genética del concepto con el propósito de diseñar una descripción de las construcciones mentales específicas que un alumno podría hacer para desarrollar la comprensión de derivada.

La estrategia principal de su método incluía hacer que los estudiantes construyeran ideas matemáticas en la computadora usando un lenguaje de programación matemático, hacer que investigaran conceptos matemáticos usando un sistema informático simbólico y trabajaran en grupos de aprendizaje cooperativo para participar en actividades de resolución de problemas y en discusiones sobre los resultados de actividades informáticas y de resolución de problemas.

Según Asiala et al. (1997), esto se debe repetir tantas veces como sea necesario para que el investigador logre una comprensión más profunda de cómo los estudiantes pueden construir el concepto. Inicialmente, la primera descomposición genética se basó en la propia comprensión del concepto por parte de los investigadores y en sus experiencias como aprendices y maestros. Sin embargo, después de implementar un curso de enseñanza con actividades que fomentaban determinadas construcciones mentales, la descomposición genética sufrió un refinamiento tomando en cuenta los resultados que se obtuvieron de su análisis, modificando así determinadas partes que los investigadores consideraron necesarias para una mejor comprensión del concepto.

Los resultados que obtuvieron de ese análisis fueron que los estudiantes exhibían una dependencia predominante en el uso y la necesidad de fórmulas algebraicas para hallar la derivada de una función cuando esta se daba gráficamente, además observaron que tenían dificultad para hallar la derivada de una función en un punto dado cuando se presentaba la gráfica de la función y la recta tangente que pasa por el punto donde se deseaba que hallaran la derivada.

En sus estudios a futuro planearon continuar la investigación con estudiantes cuyo curso de cálculo utilizara el tratamiento de instrucción guiado por la descomposición genética refinada, esto en un intento de refinar y mejorar aún más la nueva descomposición genética del concepto derivada y, por lo tanto, posiblemente mejorar el tratamiento de instrucción.

Lo que en este trabajo realizamos es utilizar esa descomposición genética refinada para guiar la instrucción de enseñanza y analizar la comprensión que tiene un grupo de profesores de nivel medio superior.

2.4.3 Papel de la descomposición genética en el diseño de actividades

Además de ser un modelo teórico para la investigación, la descomposición genética de un concepto guía la instrucción. Dado que una descomposición genética describe las construcciones que un individuo puede necesitar para aprender un concepto matemático, puede usarse para diseñar actividades que ayuden a los sujetos a hacer las construcciones propuestas. Aunque pasar de la descomposición genética al diseño de actividades instructivas no siempre es directo, la forma en que el primero informa al segundo es muy importante, ya que representa un puente entre la teoría y su uso pedagógico (Trigueros y Oktac, 2005).

Una secuencia de enseñanza, cuyo diseño se basa en la teoría APOE, consiste en actividades para que los sujetos trabajen en colaboración. Cada una de las actividades está diseñada para proporcionar oportunidades para que los sujetos repitan acciones específicas y reflexionen sobre ellas, para fomentar la *interiorización* de Acciones en Procesos, para ayudar con la *coordinación* y la *reversión* de Procesos y para apoyar la *encapsulación* de Procesos en Objetos. Una secuencia de enseñanza también puede incluir actividades en las que el objetivo es la construcción de relaciones entre diferentes Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas construidos previamente. Estas actividades pueden ayudar a los sujetos a construir un nuevo Esquema o, en el caso de un Esquema previamente construido, conducir a un mayor desarrollo o refinamiento de ese Esquema.

Para un concepto matemático particular, esto generalmente comienza con una descomposición genética, una descripción de las construcciones mentales que un individuo podría hacer para entender el concepto. La implementación generalmente se lleva a cabo utilizando el Ciclo de Enseñanza ACE, un enfoque instructivo que apoya el desarrollo de las construcciones mentales requeridas por la descomposición genética.

2.5 El ciclo de enseñanza de ACE

El Ciclo de Enseñanza ACE es una estrategia pedagógica que consta de tres componentes: Actividades (A), Discusión en el aula (C) y Ejercicios (E).

Para las Actividades (A), que constituyen el primer paso del ciclo, los individuos trabajan cooperativamente en equipos en tareas diseñadas para ayudarlos a hacer las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética. El enfoque de estas tareas es promover la abstracción reflexiva en lugar de obtener respuestas correctas.

La discusión en el aula (C), la segunda parte del ciclo, incluye un grupo pequeño y una discusión en clase dirigida por un instructor, mientras los estudiantes trabajan en tareas de lápiz y papel que se basan en las actividades de laboratorio completadas en la fase de Actividades y los cálculos asignados por el instructor. Las discusiones y el trabajo en clase les dan a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre su trabajo. Mientras el instructor guía la discusión, puede también proporcionar definiciones, ofrecer explicaciones y / o presentar una visión general para relacionar lo que los estudiantes han estado pensando y trabajando.

Los ejercicios de tarea (E), la tercera parte del ciclo, consiste en problemas estándar diseñados para reforzar las actividades de la computadora y la discusión en el aula. Los ejercicios ayudan a apoyar el desarrollo continuo de las construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética. También guían a los estudiantes a aplicar lo que han aprendido y a considerar ideas matemáticas relacionadas. El ciclo ACE incluye actividades, en las que los estudiantes suelen trabajar en cooperación, a veces con el uso de un lenguaje de programación matemático.

El ciclo ACE y su relación con la descomposición genética se ilustran en la Figura 2.

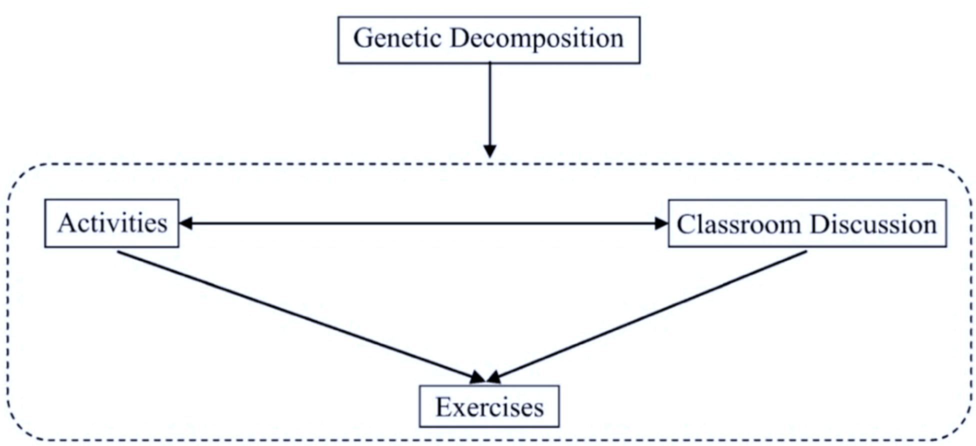


Figura 2*. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la descomposición genética (Arnon et al. 2014, p. 58)*

La flecha desde la descomposición genética hasta el cuadro de puntos ilustra el hecho de que la descomposición genética afecta a cada componente del ciclo de enseñanza de ACE, ya que las actividades (A), la discusión en clase (C) y los ejercicios de tarea (E) deben ser diseñados con base en una descomposición genética para que ayuden a los estudiantes a construir determinadas estructuras mentales. La flecha bidireccional entre actividades (A) y discusión en el aula (C) muestra que, por un lado, las actividades son el tema principal de la discusión en clase y, por el otro, que la discusión en el aula brinda una oportunidad para que los estudiantes reflexionen sobre las actividades. La flecha entre los ejercicios de tarea (E) y la discusión en el aula (C) reflejan el propósito principal de los ejercicios: reforzar las construcciones mentales que los estudiantes hacen o han comenzado a hacer a medida que trabajan en las Actividades (A) y participan en la Discusión en el aula (C).

La fase de Actividades implica la finalización de tareas cooperativas informadas por la descomposición genética. Aunque las computadoras han estado involucradas frecuentemente, su uso no es requerido en este trabajo.

2.6 Limitaciones de la teoría APOE

Existen ciertas limitaciones que presenta la teoría APOE. Badillo et al. (2011) señalan que hay dos que son muy relevantes cuando se intenta describir el proceso de la construcción del conocimiento del sujeto:

1) En la teoría APOE, el constructo "Objeto" se considera como el producto del proceso de reificación (*encapsulación* en la terminología de dicha teoría). Esta caracterización, que proviene básicamente de la tradición psicológica, es insuficiente para afrontar la problemática ontológica que presentan los objetos matemáticos. Para afrontar esta limitación resulta útil tener en cuenta la propuesta de caracterización de la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas que ofrecen las perspectivas semióticas.

2) Los constructos de representación o "medio semiótico" no son considerados explícitamente en la teoría APOE. En el marco APOE se echa de menos un tratamiento específico del papel de las representaciones semióticas asociadas a los conceptos matemáticos.

Es por ello que es importante considerar la teoría de las representaciones semioticas de Duval, para describir cómo el profesor, a través del tratamiento y conversión de los registros semióticos que posee la derivada, logra reconstruir el conocimiento que posee de ella.

2.7 Ampliaciones semióticas de la teoría APOE

Investigaciones recientes que han ampliado la teoría APOE con perspectivas semióticas recurren a la teoría de los registros semióticos (TRS) de Duval (Trigueros y Martínez, 2010) o bien al enfoque ontosemiótico (EOS) (Font, Godino y D'Amore, 2010).

Con relación a la TRS, Trigueros y Martínez (2010) en un estudio sobre el análisis de cómo los alumnos trabajan con funciones de dos variables, sostienen que:

> "En particular, el análisis de gráficas de funciones, junto con otras representaciones, es fundamental en la construcción de relaciones fuertes entre las componentes de un posible esquema para el concepto de función de dos variables. La descripción de los tratamientos y las conversiones como acciones o procesos para llevar a cabo con representaciones, como gráficos o símbolos, añade especificidad y un nuevo punto de vista de la descripción y el análisis utilizando la teoría APOE. Estos dos marcos conceptuales se pueden utilizar de una manera coherente y complementaria, tanto en el análisis de respuestas de los estudiantes, como en las estrategias cuando trabajan en tareas y para diseñar la enseñanza en el futuro"(p. 5).

En lo que respecta al concepto de derivada Sánchez-Matamoros et al. (2008) mencionan que la clasificación que se hace en la investigación de algunos registros de representación son:

- Numérico: Se puede obtener la derivada como una sucesión de cocientes diferenciales en un intervalo, cuando una variable aumenta y la otra se queda fija.
- Gráfico: Se analiza qué ocurre cuando el cambio de longitudes en el eje cambia con respecto a la longitud en el eje Y. Dentro de este registro se pueden hacer transformaciones, por ejemplo, pasar de la gráfica de la función a la gráfica de su derivada y viceversa, como pendiente de la recta tangente a una curva.
- Algebraico: Se establece como el límite del cociente diferencial cuando las diferencias en x se aproximan a cero.
- Verbal: Se presenta propiamente como parte del lenguaje matemático, como pendiente de una recta tangente o como razón de cambio instantáneo.

Con respecto a los registros de representación, nos basamos en Duval (1998), quien menciona que dichos registros de representación deben permitir la manipulación y transformación dentro de un mismo registro y/o permitir la transformación total o parcial a otro registro, puesto que, si un estudiante logra articular al menos tres registros de representación de un concepto matemático, entonces puede decirse que ha comprendido dicho concepto. Como él mismo lo menciona en trabajos anteriores, la comprensión integral de un objeto está basada en la coordinación de al menos dos sistemas de representación pertenecientes a registros diferentes.

Como hemos estado mencionado en todo este trabajo, nos ha interesado indagar la comprensión que tienen los profesores del objeto derivada cuando se enfrentan a la resolución de situaciones problema enunciadas en diferentes trayectorias y que requieren el uso de diferentes representaciones semióticas. Dado que en el caso de la derivada intervienen dos rutas para la comprensión del concepto, utilizaremos los registros de representación numérico y gráfico para hacer referencia a las dos trayectorias (analítica y gráfica) por las que según Asiala et al. (1997) deben transitar para lograr la comprensión de derivada.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 Método

El método utilizado en esta investigación es una adaptación del paradigma propuesto por la teoría APOE, el cual utiliza tres componentes escenciales: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y la observación, análisis y verificación de los datos. Estos componentes forman parte de lo que Arnon et al. (2014) denominan el ciclo de investigación de la teoría APOE. En la figura 3 observamos los elementos que caracterizaron cada una de sus componentes.

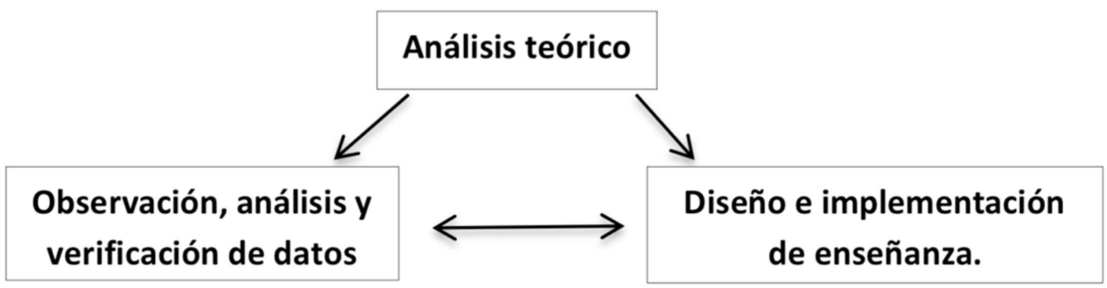


Figura 3. *Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014, p.94)*

El análisis teórico es la primera componente del ciclo de investigación, en él se realiza un estudio profundo sobre la derivada y la forma en que ha sido abordado en diferentes investigaciones desde la Matemática Educativa. Un elemento muy importante en nuestro análisis teórico fue la descomposición genética refinada que plantea Asiala et al. (1997), este modelo nos permitió seguir un camino cognitivo de construcción de la derivada.

A partir de la descomposicion genética planteamos actividades que otros investigadores han utilizado para observar el conocimiento que tienen los alumnos del concepto derivada, en nuestro estudio buscamos que los profesores pudieran reflexionar sobre la derivada, y que dieran evidencias de las estructuras y los mecanismos mentales que poseen. Con base en este análisis, diseñamos una serie de actividades basadas en la misma descomposición genética que ayudaran a los profesores a reflexionar sobre las acciones que realizan de forma individual, posteriormente en grupo se discutieran cada una de las actividades con el objetivo de que tuvieran la oportunidad de reflexionar sobre su trabajo, particularmente las actividades realizadas durante la sesión. Finalmente, se realizó la recolección, observación y análisis de datos a partir de las respuestas dadas por los profesores. La formación matemática de esta población nos permitió analizar cómo evoluciona su conocimiento de derivada y con esto, las estructuras y los mecanismos necesarios para su construcción tomados en cuenta en esta investigación.

Consideramos que el ciclo de investigación de la teoría APOE permite el diseño de actividades que ayuden a los profesores a reconstruir el concepto de derivada como objeto matemático contemplando los aspectos anteriormente descritos. Esto implica introducir al profesor de matemáticas en una reflexión didáctica y epistemológica de los conceptos matemáticos a enseñar que parta de la elaboración e implementación de actividades didácticas de los conceptos matemáticos, estructuradas a partir de la construcción y reflexión de la descomposición genética de dicho concepto matemático. Por tanto, esta propuesta implica considerar al constructo descomposición genética como un elemento central de los programas de formación. En efecto, consideramos que la descomposición genética de un concepto matemático introduce al profesor en una reflexión epistemológica y didáctica del concepto que le permite: (1) cuestionar y mejorar la comprensión que tiene del concepto matemático en cuestión; (2) usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo (diseño de tareas, etc.); y (3) orientar el aprendizaje de los alumnos hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen (Borji y Alamolhodaei, 2016).

Esta investigación de tipo cualitativo interpretativo asume el paradigma de investigación propuesto por Asiala et al. (1996) sobre las etapas a considerar en el proceso de investigación: diseño, recolección de datos, análisis de datos y resultados.

3.2 Población de estudio

La población de estudio fue un grupo de 15 profesores de nivel medio superior que participaron en un curso titulado “enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y derivada” llevado a cabo en las instalaciones de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, el cual tuvo una duración de 16 horas .

3.3 Procedimiento

El trabajo con los profesores se dividió en 8 bloques, cada bloque tuvo una duración de 2 horas, 4 de ellos fueron del tema de límite de una función y los otros 4 de derivada de una función. A continuación se describe el trabajo que se llevó a cabo en lo que respecta a los 4 bloques del tema de derivada.

- Bloque 1 (aplicación del cuestionario diagnóstico): en este bloque se implementaron las actividades de diagnóstico, las cuales, como se ha mencionado, tenían el objetivo de evaluar el conocimiento del profesor del concepto derivada a través de actividades que otros investigadores han utilizado para observar las concepciones que tienen los estudiantes de nivel medio superior y superior del concepto derivada.

- Bloque 2 (reflexión sobre las actividades): en este bloque se analizaron y discutieron las respuestas que dieron los profesores a las actividades que habían realizado en el bloque 1. La forma de trabajo se llevó a cabo de la siguiente manera: 1) se presentaron, con el uso de un proyector, las actividades que habían resuelto en el primer bloque de trabajo, junto a estas se mostraron las respuestas que estudiantes de nivel medio superior habían dado y que algunos investigadores han reportado en sus trabajos. 2) después de analizar y reflexionar de forma grupal las respuestas de los estudiantes, se analizaron algunas de las respuestas de los profesores en cada una de las actividades, pidiéndoles que fueran explícitos al argumentar el porqué de sus respuestas.

- Bloque 3 (continuación del bloque 2): este bloque es la continuación del bloque 2, de la misma manera se analizaron y discutieron las respuestas que dieron los profesores a las actividades de diagnóstico.

- Bloque 4 (aplicación de las actividades diseñadas con base en la descomposición genética): en este último bloque se implementaron las actividades que fueron diseñadas con base en la descomposición genética de derivada propuesta por Asiala et al. (1997). Estas actividades se implementaron con la finalidad de alcanzar dos objetivos, el primero, que los profesores lograran reconstruir la concepción que tenían de derivada a través del análisis y la reflexión que habían realizado con las actividades de diagnóstico; el segundo, que sirviera como una prueba que nos permitiera observar que estructuras mentales habían logrado alcanzar después del trabajo realizado.

3.4 Recolección y análisis de datos

La fase de recolección y análisis de datos es crucial para la investigación basada en APOE, ya que sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo simplemente una hipótesis. La recolección de las respuestas de los profesores se llevó a cabo a través de dos cuestionarios (ver Anexo 1 y Anexo 2). El primero (Anexo 1) enfocado en analizar las estructuras mentales que poseen los profesores del concepto de derivada y que fue diseñado con actividades que otros investigadores han utilizado para analizar el conocimiento que poseen los alumnos. El segundo (Anexo 2) fue diseñado con base en la descomposición genética de derivada y tenía el objetivo de develar las estructuras mentales que habían lograron reconstruir los docentes.

El propósito del análisis de las respuestas de los profesores es responder las siguientes preguntas:

(1) ¿Qué estructuras mentales poseen los docentes del concepto derivada?

(2) ¿Qué estructuras mentales lograron construir los profesores después de trabajar un conjunto de actividades de manera grupal y reflexiva?

3.5 Instrumentos de recolección de datos

En esta sección se muestran los dos instrumentos que sirvieron para analizar las concepciones que tienen los profesores del concepto derivada. El primero de ellos diseñado con el objetivo de evaluar las estructuras mentales que poseen los docentes, y el segundo con el objetivo de evaluar qué estructuras mentales lograron cambiar o reconstruir los profesores después de la intervención realizada con ellos.

3.5.1 Instrumento de diagnóstico

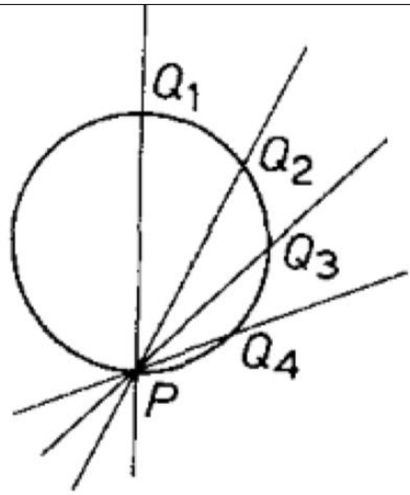
El proceso de elaboración del instrumento de diagnóstico (ver anexo 1), implicó tres fases:

1) La revisión de literatura, con el objetivo de identificar las actividades que otros investigadores han utilizado para analizar el conocimiento que tienen los estudiantes del concepto derivada.
2) El análisis del objeto derivada, con el objetivo de identificar los elementos matemáticos que forman parte de su estructura y desarrollo del concepto.
3) El análisis de las actividades, con el objetivo de verificar que estas propiciaban las Acciones y Procesos necesarios para observar las estructuras mentales que poseen los docentes con base en la descomposición genética de derivada propuesta por Asiala et al. (1997).

A continuación se presenta el instrumento de diagnóstico con su respectiva descripción acerca de la estructura mental que pretendemos evaluar.

Tabla 1. *Actividades que evalúan las estructuras mentales de los profesores*

Actividad	**Estructura mental que evalúa la actividad**
AD1: ¿Qué es la derivada? Defínelo o explícalo como desees	Esta actividad no pretende evaluar ninguna estructura mental, más bien, tiene el objetivo de indagar qué entienden los profesores del concepto derivada.
AD2: El diagrama muestra una circunferencia y un punto fijo P en la circunferencia. Las líneas líneas PQ_i, $i = 1, 2, \ldots$ se dibujan desde P hasta los puntos Q_i en la circunferencia y se extienden en ambas direcciones. Tales líneas a través de un círculo se llaman secantes, y algunos ejemplos se muestran en el diagrama.	Esta actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental de Acción y Proceso en el registro gráfico de derivada. El sujeto tendrá la concepción Acción si logra trazar una cuerda entre dos puntos de una curva, junto con la acción de observar qué sucede con la pendiente de la secante que contiene a la cuerda. A través del mecanismo mental "interiorización de la acción" reflexionará sobre las acciones que vaya realizando cada vez que grafica rectas

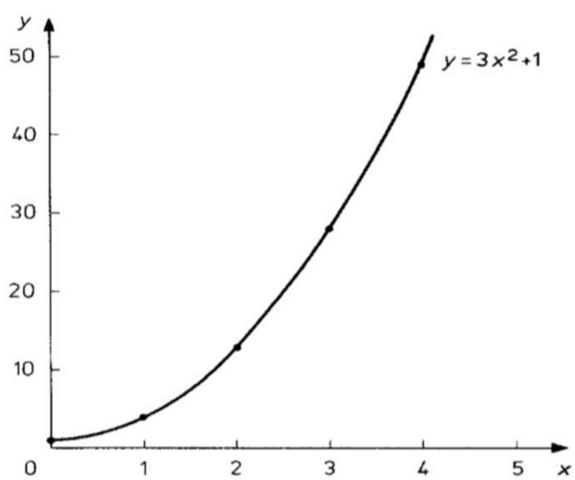
<table>
<tr>
<td>


a) ¿Cuántas secantes diferentes se podrían dibujar además de las que ya están en el diagrama? justifique.

(b) A medida que Q_i , $i = 1{,}2{,}3$ ... se acerca más y más a P, ¿qué le sucede a la secante?

(Orton, 1983)
</td>
<td>secantes utilizando puntos cada vez más y más cercanos al punto de interés. Como Proceso el profesor sin la necesidad de trazar cuerdas explícitamente sobre el gráfico entre el punto P y Q_i, cada vez que Q_i se acerca a P, producirá la línea tangente como la posición límite de las rectas secantes.</td>
</tr>
<tr>
<td>
AD3: El siguiente gráfico representa la función

$y = 3x^2 + 1$, de $x = 0$ a $x = 4$.



a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2$?

b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2 + h$?

c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de 2 a $2 + h$?
</td>
<td>Esta actividad tiene el objetivo de evaluar, en primera instancia, los conocimientos previos referentes al concepto de derivada, que son: representaciones gráficas de objetos matemáticos (representación gráfica de un punto en el plano y representación gráfica de una línea que incluye el concepto de pendiente) e interpretación gráfica de (x, y) cuando y está dada por $f(x)$. En un segundo momento, la actividad evalúa la estructura mental de Acción y Proceso en el registro gráfico y numérico de derivada. Como Acción el profesor deberá evaluar la función en un punto del dominio, al mismo tiempo que debe ir observando dónde se localiza ese</td>
</tr>
</table>

d) ¿Cuál es la tasa de cambio de y en el intervalo 2 a $2 + h$?

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio de y en $x = 2$ ½ ? ¿Si es así, cómo?

(Orton, 1983)

punto en la gráfica de la función. Después el profesor deberá evaluar la función en el mismo punto, pero con un incremento h y nuevamente debe visualizar en la gráfica cómo sería este incremento h. Como Proceso, el profesor debe calcular la tasa de cambio en el intervalo que se generó entre los dos puntos que evalúo en los incisos anteriores. Por último, calculará la razón de cambio con un incremento $h = 1/2$.

AD4: De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla

a) Usa la siguiente tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$. ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 2$?

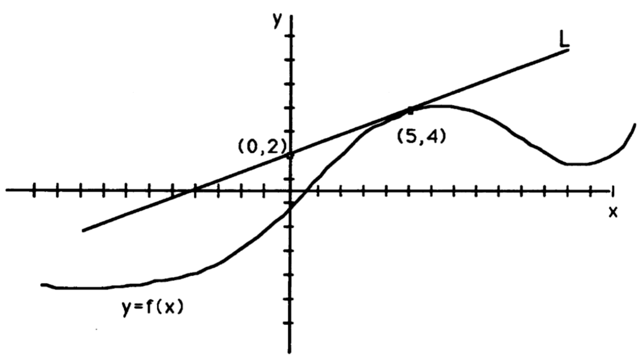
$\boldsymbol{x}$	**1.9**	**1.99**	**1.999**	**1.9999**	**1.99999**	**2**	**2.00001**	**2.0001**	**2.001**	**2.01**	**2.1**
$\boldsymbol{f(x)}$	3.61	3.960101	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?

$\boldsymbol{x}$	**0.9**	**0.99**	**0.999**	**0.9999**	**0.99999**	**1**	**1.00001**	**1.0001**	**1.001**	**1.01**	**1.1**
$\boldsymbol{f(x)}$	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

(Azcárate 1990; Sánchez-Matamoros, 2004)

La actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental de Acción y Proceso en el registro numérico de derivada. Como Acción el sujeto debe calcular los cocientes de diferencias con valores cercanos al valor que se quiere comprobar si la derivada existe, es decir, debe calcular el cociente de diferencias en el punto de interés, en este caso $x = 2$, en el inciso a y $x = 1$, en el inciso b. Cuando el profesor realiza la acción de calcular las tasas de cambio en puntos cada vez más cercano al valor de interés y a medida que la diferencia en los intervalos del dominio se hace "más y más pequeña", es decir, a medida que la longitud de los intervalos del dominio se acerca cada vez más a cero ($h \to 0, donde\ h = x_{i+1} - x_i$), el profesor debe de darse cuenta que la

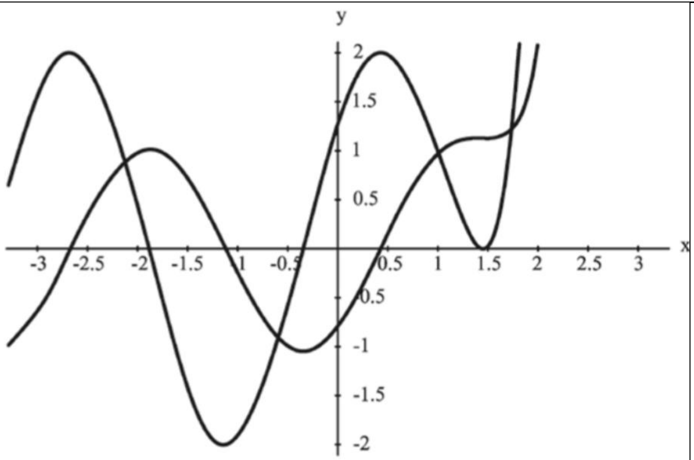
<table>
<tr><td colspan="2">derivada de la función existe y es el punto al que se está acercando la tasa de cambio, tanto por la izquierda como por la derecha del valor de interés. En este caso decimos que el profesor tendrá la concepción Proceso cuando logre producir la tasa de cambio de una variable con respecto a otra.</td></tr>
<tr><td>AD5: La recta L es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(5,4)$


a) Encuentra $f(5)$. Explica y justifica tu respuesta.

b) Encuentra $f'(5)$. Explica y justifica tu respuesta.

c) ¿Cuál es el valor de la función $f(x)$ en $x = 5.08$? ¿Cómo lo resolviste? Sea lo más exacto posible y explique

(Asiala et al., 1997)</td><td>La actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental Acción, en el registro gráfico de derivada, a través de la interpretación gráfica de la derivada en un punto. Como Acción, la línea tangente se identifica en el punto sobre la gráfica de la función y se calcula su pendiente. Hay al menos dos formas para que se construya esta Acción. El profesor puede simplemente haber memorizado una regla: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la línea tangente al gráfico en ese punto. Una construcción más rica proviene de construir la tangente como el límite de los acordes de la curva $y = f(x)$, como en los puntos 1a, 2a y 3a en la descomposición genética. El sujeto demuestra esto como una acción cuando se enfoca en un punto. A partir de esta acción, el profesor construirá la concepción de Proceso de la función gráfica de derivada en un punto.</td></tr>
<tr><td>AD6.- Compara las gráficas de las dos funciones de la siguiente figura y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra. Argumenta tu respuesta.</td><td>Esta actividad tiene el objetivo evaluar la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada, a través de identificar la derivada de una función en</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>


(Badillo, Azcárate y Font, 2011)
</td>
<td>
todos los puntos del dominio con el uso de las propiedades de la derivada, es decir, cuando la derivada de la función toma valores iguales a cero en el dominio ($f'(x) = 0$), cuando la derivada es positiva $f'(x) > 0$ y negativa $f'(x) < 0$, etcétera. El profesor debe describir e identificar cuál es la gráfica de la función f y f'.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
AD7: Dibuje un gráfico de la función h que satisfaga las siguientes condiciones:

$$h \ es \ continua$$

$$h(0) = 2, \quad h'(-2) = h'(3) = 0, \ y \ \lim_{x \to 0} h'(x) = \infty$$

$$h'(x) > 0 \ cuando \ -4 < x < -2, y \ cuando \ -2 < x < 3$$

$$h'(x) < 0 \ cuando \ x < -4, \ y \ cuando \ x > 3$$

$$h''(x) < 0 \ cuando \ x < -4,$$
$$cuando -4 < x < -2 \ y \ cuando \ 0 < x < 5$$

$$h''(x) > 0 \ cuando \ -2 < x < 0, \ y \ cuando \ x > 5$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty \ y \ \lim_{x \to \infty} h(x) = -2$$

(Asiala et al., 1997)
</td>
<td>
Esta actividad tiene el objetivo de evaluar el nivel de desarrollo del esquema de derivada usando la relación entre propiedades de funciones y derivadas. A través de la coordinación de Acciones, Procesos y Objetos debe obtener la gráfica de la función f que cumpla las condiciones establecidas en la actividad. Es decir, debe dar una interpretación gráfica de $f(x)$ y dar una interpretación de $f'(x)$ junto con los siguientes procesos específicos:

- Proceso de x moviéndose a través de un intervalo.
- Monotonicidad de la función y signo de la derivada.
- Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada finita.
- Concavidad de la función y signo de la segunda derivada.
</td>
</tr>
</table>

	• Dibujar un gráfico completo o totalmente representativo de la función.

Al analizar los aspectos que permitirían determinar la comprensión de los profesores sobre el concepto derivada, se incorporaron algunos elementos a la caracterización inicial del cuestionario que son:

- Definición del concepto derivada. Esto tiene que ver con la definición formal e informal que poseen los profesores del concepto de derivada.
- Interpretaciones atribuidas a la derivada. Este aspecto está relacionado con la interpretación de la derivada que le dan los profesores, ya sea como pendiente de la recta tangente, como razón de cambio, o como un límite (a partir de su definición formal e informal).

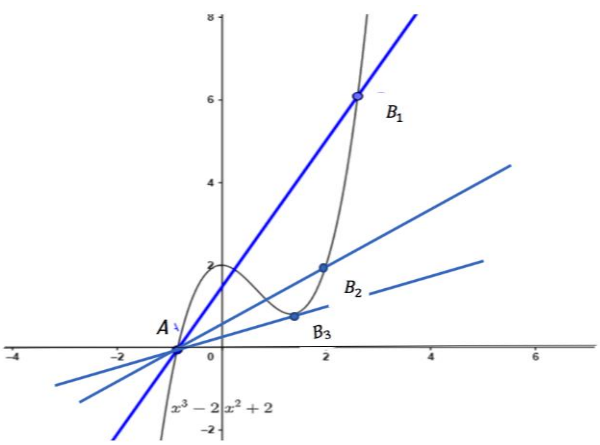
Los aspectos definidos como componentes de la estructura de los cuestionarios permitieron clasificar las preguntas y establecer la pertinencia de cada una de ellas. Se determinaron los rasgos de la comprensión que serían explorados. Los criterios para la construcción del instrumento se inscriben en la teoría APOE y en la descomposición genética de la derivada, lo cual permitió determinar de manera específica los atributos y características de la derivada implícitos en cada pregunta.

3.5.2 Instrumento de recogida de datos

El proceso de elaboración del instrumento de recogida de datos implicó dos fases:

1) El análisis del objeto derivada, con el objetivo de identificar los elementos matemáticos que forman parte de su estructura y desarrollo del concepto.
2) El diseño y selección de actividades tomando como base la descomposición genética de derivada.
3) El análisis de las actividades diseñadas con el objetivo de verificar que propician la evaluación de Acciones y Procesos que lograron los profesores reconstruir después de implementar el ciclo de enseñanza ACE.

Tabla 2. *Actividades que evalúan las nuevas estructuras mentales que los profesores lograron reconstruir*

Actividad	**Estructura mental que evalúa la actividad**
AE1: La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Las líneas AB_i se dibujan desde A hasta los puntos *Bi* (i=1,2,3) en la gráfica. Tales líneas se llaman secantes, y algunos ejemplos se muestran en la siguiente gráfica.  **a)** ¿Cuántas rectas secantes diferentes se podrían dibujar además de los que ya están en el diagrama? Justifique su respuesta.	Esta actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental de Acción y Proceso en el registro gráfico de derivada. El sujeto deberá realizar la acción de trazar cuerdas entre dos puntos A y B_i , $i = 1,2,3, \dots$, con puntos cada vez más cercanos a A, junto con la acción de observar qué sucede con la recta secante que irán trazando a medida que los puntos A y B_i se acercan. A través del mecanismo mental "*interiorización* de la Acción" el profesor reflexionará sobre las acciones que vaya realizando y observando a medida que los dos puntos son cada vez más cercanos, cuando uno de ellos se mantiene fijo. El profesor logrará alcanzar la estructura mental de Proceso en la ruta gráfica de derivada cuando, sin la necesidad de trazar cuerdas entre los puntos A y

b) A medida que *Bi* se acerca más y más a *A*, ¿qué le sucede a la secante?

B_i , $i = 1,2,3, \dots$ logre producir la línea tangente como el límite de las líneas secantes.

AE2: Dadas las funciones f y g conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

a) Usa la siguiente tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 0$. ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 0$?

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	…	0	…	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	1.101	1.9101	1.99101	1.999101	…	2	…	1.999101	1.99101	1.9101	1.101

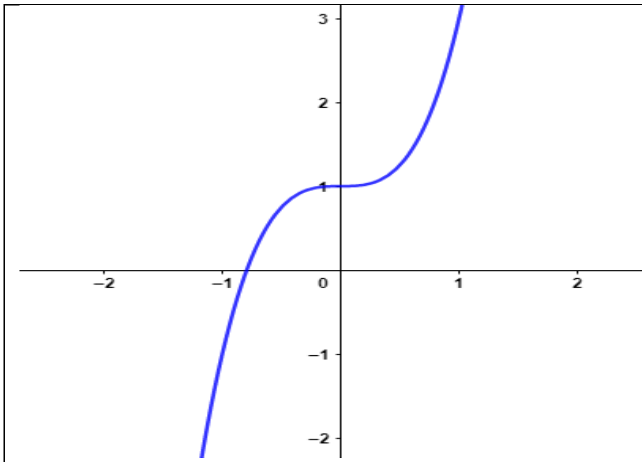
b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿Crees que $g(x)$ es derivable en $x = 3$?

x	2.99	2.999	2.9999	2.99999	…	3	…	3.00101	3.0201	3.301	3.401
g(x)	2.99	2.999	2.9999	2.99999	…	3	…	3.00101	3.0201	3.301	3.401

La actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental de Acción y Proceso en el registro numérico de derivada. El sujeto deberá realizar la acción de calcular las tasas de cambio, es decir, deberá calcular los cocientes de diferencias en puntos cercanos al valor de interés, en el inciso a, en $x = 0$ y en el inciso b en $x = 3$. A través de la acción de ir calculando las tasas de cambio en puntos cada vez más cercanos al valor de interés y conforme la diferencia en los valores del dominio se hace "más y más pequeña", es decir, a medida que la longitud de los intervalos del dominio se acerca cada vez más a cero ($h \to 0$), el profesor logrará alcanzar la estructura mental de Proceso cuando logre producir la tasa de cambio instántanea de una variable con respecto a otra.

AE3: El siguiente gráfico representa la función $y = 2x^3 + 1$.

La actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental de Acción y Proceso en el registro gráfico y numérico de derivada. Como Acción en el registro gráfico, el profesor debe conectar dos puntos de la

<table>
<tr>
<td>


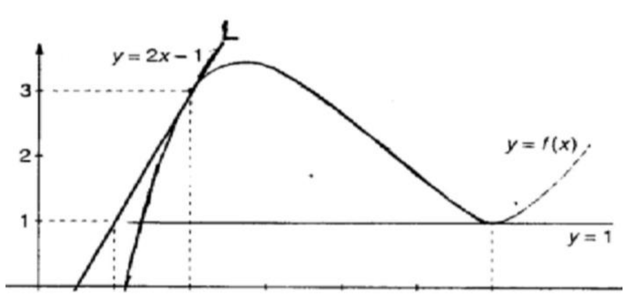
a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1$?

b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1 + h$?

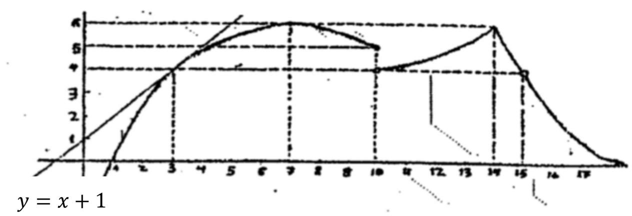
c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de -1 a $-1 + h$?

d) ¿Cuál es la tasa de cambio de y en el intervalo -1 a $-1 + h$?

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio de y en $x = -0.4$? ¿Si es así, cómo?
</td>
<td>
curva para formar un acorde que es una porción de la línea secante en dos puntos de la gráfica junto con la Acción de calcular su pendiente. Como Acción en el registro numérico, el profesor debe calcular la razón de cambio al calcular el cociente de diferencias con los puntos $x = -1$ y $x = -1 + h$. Este logrará alcanzar la estructura mental de Proceso, cuando sin la necesidad de realizar el cálculo de la razón de cambio con puntos cada vez más cercanos a $x = -1$ $(h \to 0)$ y logre producir la razón de cambio de una variable con respecto a otra.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
AE4: La recta L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como se observa a continuación.



</td>
<td>
La actividad evalúa la estructura mental de Acción en el registro gráfico de derivada. Como Acción, la línea tangente se identifica en el punto y se calcula su pendiente. Hay al menos dos formas para que se construya esta Acción. El profesor puede simplemente haber memorizado una regla: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la línea tangente al gráfico en ese punto. La otra
</td>
</tr>
</table>

a) Encuentra $f(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado. b) Encuentra $f'(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado. Amit y Vinner (1990)	proviene de construir la tangente como el límite de los acordes de la curva $y = f\ (x)$, como en los puntos **1a, 2a y 3a** en la DG.
AE5: Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de la parábola.  **a)** ¿Cuál es el valor de $f'(3), f'(7), f'(10), f'(14)\ y\ f'(15)$? ¿Cómo obtuvo esos valores? **b)** Realice un esbozo de la gráfica de f'. Explique cómo obtuvo la gráfica. (Sánchez-Matamoros, 2008)	Esta actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada. Como Proceso el profesor debe tomar como entrada un punto x de f y producir el valor de salida $f'(x)$ para cualquier x en el dominio de f. Además debe realizar el bosquejo de la gráfica de la función f' coordinando las propiedades de la gráfica de la función f (creciente, decreciente, continuidad, discontinuidad y puntos cúspide) con las propiedades de la función derivada.
6.- Sea f una función para la que $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ es igual a 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuales son falsas? Justifique. a) $f'(2) = 2$ b) $f'(2) = 0$ c) $lim\ f(x)\ cuando\ x \to 2\ \ es\ igual\ a\ f(2)$	Esta actividad tiene el objetivo de evaluar la estructura mental de Objeto. A través del mecanismo e*ncapsulación* del Proceso **2b** en la DG para producir la tasa de cambio instántanea de una variable con respecto a otra en un punto. El profesor debe ser capaz de interpretar que significa que $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ sea igual a 0, retomando las acciones realizadas en las actividades anteriores.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección se mostrará el análisis de las respuestas que dieron los profesores a las actividades de diagnóstico que se aplicaron en el bloque 1, estas tenían el objetivo de develar las estructuras mentales que posee cada uno de ellos, además, se mostrará el análisis de las respuestas a las actividades de evaluación de las concepciones mentales que los profesores lograron reconstruir después de haber trabajado y reflexionado, bajo el esquema que proporciona el ciclo de enseñanza ACE, las actividades que fueron seleccionadas y diseñadas para generar las nuevas Acciones y Procesos para su construcción.

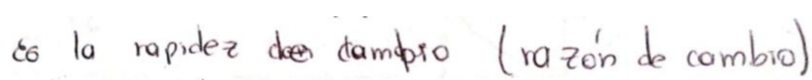
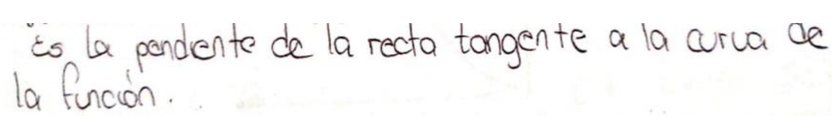
4.1 Análisis de resultados de las actividades de diagnóstico

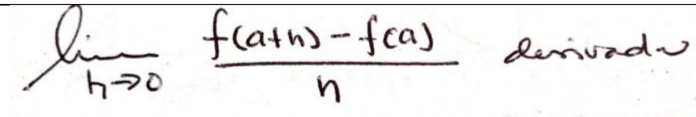
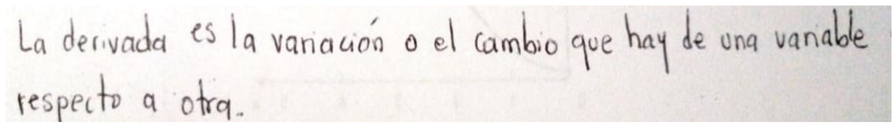
A continuación se mostrará el análisis de las respuestas de los profesores en las actividades de diagnóstico, las respuestas se presentan de tal forma que el lector pueda identificar la respuesta del profesor, él o los profesores que dieron esa respuesta, así como un análisis de esas respuestas con base en la descomposición genética de Asiala et al. (1997), dicho de otra manera, se realizará un análisis para describir las concepciones que tienen los profesores del concepto derivada.

Respuestas de los profesores de la actividad AD1

Actividad AD1: ¿Qué es la derivada? Defínelo o explícalo como desees.

Tabla 3. *Respuestas de los profesores en la actividad AD1*

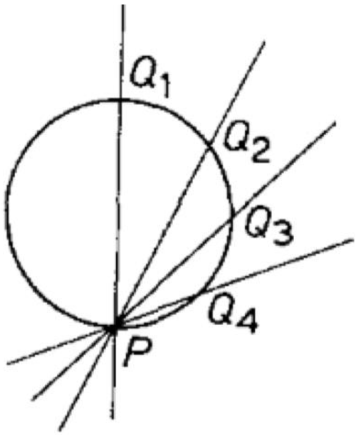
Profesores	Ejemplo de respuestas de los profesores
D1,D2 y D8	 ***Figura 4.*** *Respuesta del profesor D1*
D4, D7 y D9.	 ***Figura 5.*** *Respuesta del profesor D4*

D5, D6, ,D10, D11 y D12	 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ derivada ***Figura 6.*** *Respuesta del profesor D5*
D3	 La derivada es la variación o el cambio que hay de una variable respecto a otra. ***Figura 7.*** *Respuesta de profesor D3*

Estas respuestas muestran que todos los profesores mencionaron alguna de las concepciones conocidas de derivada como razón de cambio, pendiente de la recta tangente o como el límite del cociente de diferencias. Solo D3 la confunde con la co-variación. Sin embargo, conocer la definición no implica que se tenga una comprensión amplia del concepto. Por lo que las siguientes actividades tienen el objetivo de develar las concepciones, o en términos de la teoría APOE, las construcciones mentales que tienen los profesores respecto a este concepto.

Respuesta de los profesores de la actividad AD2

Actividad AD2: El diagrama muestra una circunferencia y un punto fijo P en la circunferencia. Las líneas $PQ_i,\ i = 1, 2, \ldots$ se dibujan desde P hasta los puntos Q_i en la circunferencia y se extienden en ambas direcciones. Tales líneas a través de un círculo se llaman secantes y algunos ejemplos se muestran en el diagrama.



(a) ¿Cuántas secantes diferentes se podrían dibujar además de las que ya están en el diagrama? justifique.

(b) A medida que Q se acerca más y más a P, ¿qué le sucede a la secante?

Tabla 4. *Respuestas de los profesores en la actividad AD2*

Profesores	**Respuesta del inciso a**	**Respuesta del inciso b**	**Estructura mental**
D3, D4, D5 y D8	Algunas de las respuestas fueron: Se pueden trazar tantas rectas como puntos existan entre P y Q y otras de ellas mencionan que si la circunferencia tiene n puntos se podrían trazar $n-1$ secantes, ya que si se traza una recta que pase por el punto P con el mismo punto P sería una tangente	La recta secante se convierte en la recta tangente	Tienen noción de qué es lo que sucede cuando el punto Q se acerca cada vez más al punto P, pero solo pueden visualizar un número finito de rectas. Con ello inferimos que los profesores poseen la concepción de Acción en el registro gráfico, pero no logran percibir que se puede trazar una infinidad de puntos entre P y Q y con ello sus respectivas infinitas rectas secantes. Es decir los

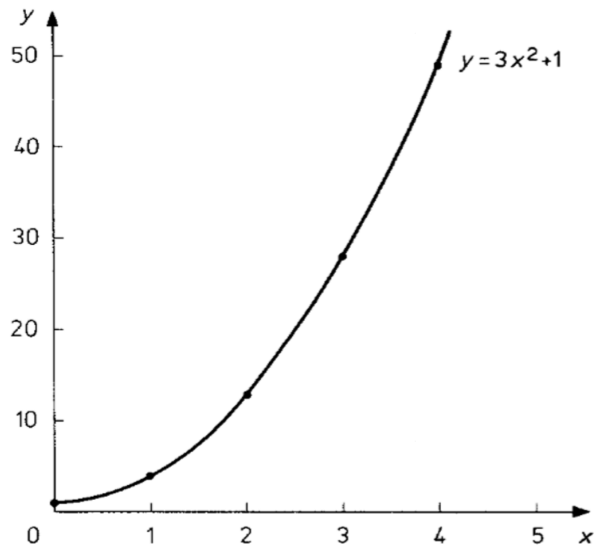
			profesores tienen la concepción de Acción en el registro gráfico de derivada.
D1, D6, D7, D9, D10, D11 y D12	Existe una infinidad de rectas secantes entre el punto Q y el punto P	La recta secante se convierte en la recta tangente	Como Proceso los docentes conjeturan que existe una infinidad de rectas secantes entre P y Q y logran producir la línea tangente como la posición límite de las líneas secantes según el punto **3a** de la DG.
D2	(Dejó en blanco el inciso)	Llegará un momento en el que la secante se convierta en tangente	Tiene la noción de qué es lo que sucede con la recta secante, sin embargo, no realiza la acción de ir graficando rectas secantes cada vez que el punto Q se acerca a P.

De esta actividad concluimos que:

- 7 profesores (D1, D6, D7, D9, D10, D11 y D12) logran observar el comportamiento de la recta secante, cada vez que el punto Q se va acercando más y más al punto P, donde P permanece fijo, logrando producir la recta tangente como la posición límite de las líneas secantes mostrando así que estos docentes tienen la concepción de Proceso en el registro gráfico de derivada según el punto **3a** de la DG.
- 5 profesores (D2, D3, D4, D5 y D8) tienen dificultades para observar qué sucede con la recta secante, aunque sí logran observar que se pueden trazar rectas secantes entre P y Q, restringen el número de éstas a un número finito, con ello decimos que estos docentes poseen solo la concepción de Acción en la ruta gráfica de derivada.

Respuestas de los profesores de la actividad AD3

Actividad AD3: El siguiente gráfico representa la función $y = 3x^2 + 1$, de $x = 0$ a $x = 4$.



a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2$?

b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2 + h$?

c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de 2 a $2 + h$?

d) ¿Cuál es la tasa de cambio de y en el intervalo 2 a $2 + h$?

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio de y en $x = 2$ ½ ? ¿Si es así, cómo?

Tabla 5. *Profesores que poseen la estructura mental de Acción y Proceso en el registro gráfico y numérico*

Pregunta	**Profesores que logran contestar la actividad**	**Estructura mental**
a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2$?	D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11 y D12	Acción en el registro gráfico y numérico
b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2 + h$?	D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11	Acción en el registro gráfico y numérico

c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de 2 a $2+h$?	D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9 y D10, D11	Acción en el registro gráfico y numérico
d) ¿Cuál es la tasa de cambio de y en el intervalo 2 a $2+h$?	D1, D5, D8, D10 y D11	Proceso en el registro numérico
e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio de y en x = 2 ½ ? ¿Si es así, cómo?	D1, D5, D8, D10 y D11	Proceso en el registro numérico

Algunas de las respuestas de los profesores que poseen la estructura mental de Proceso en el registro gráfico y numérico son:

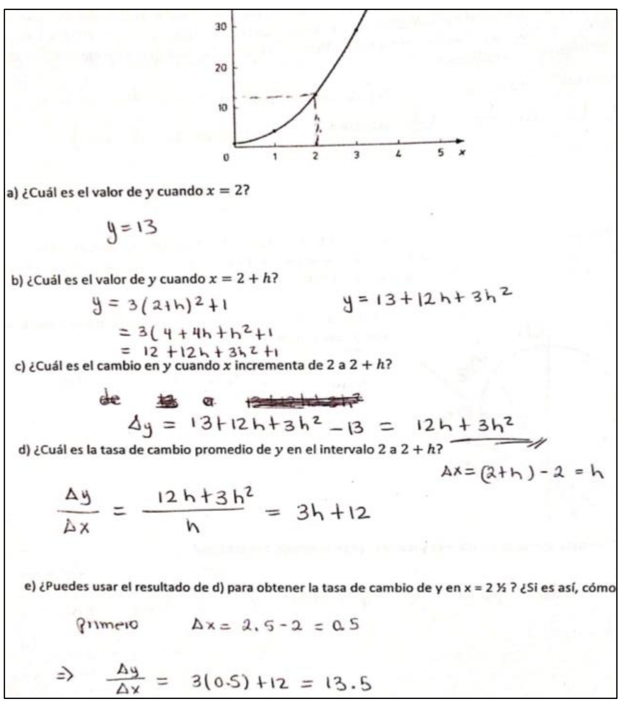


Figura 8. *Respuesta del profesor D1*

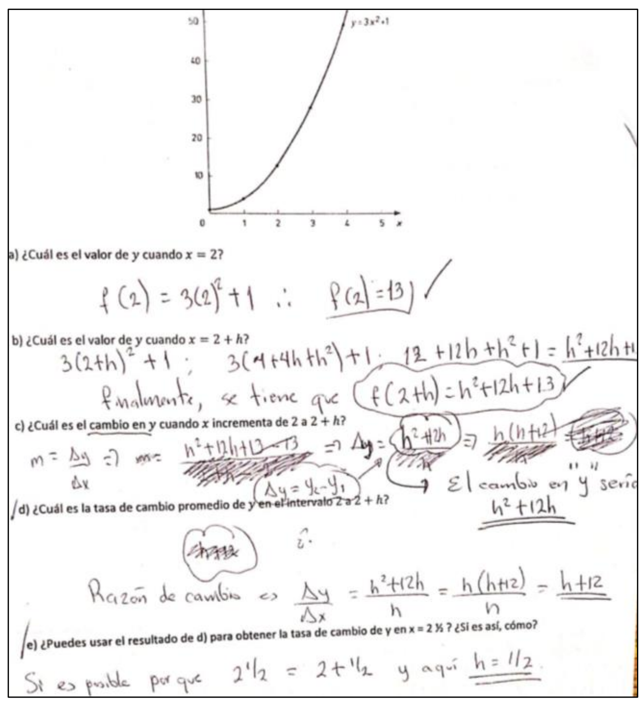


Figura 9. *Respuesta del profesor D10*

Algunas de las respuestas de los profesores que poseen la estructura mental de Acción en el registro gráfico y numérico son:

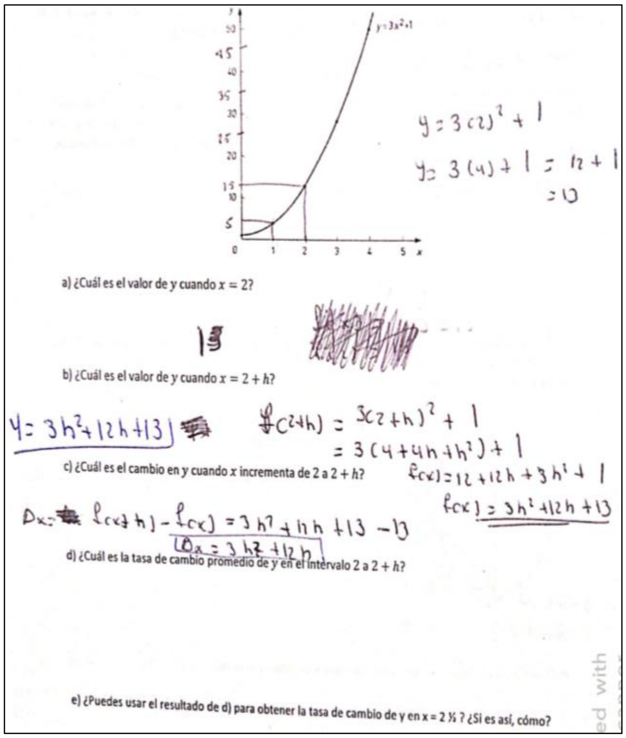


Figura 10. *Respuesta del profesor D7*

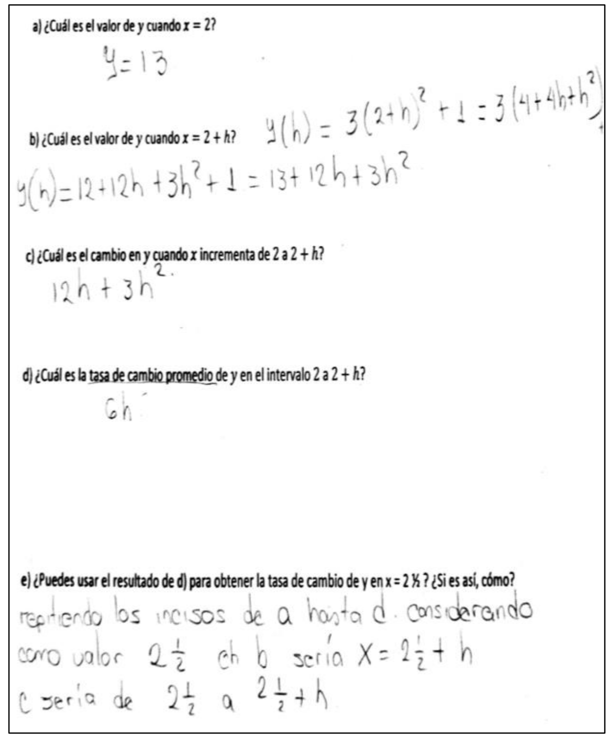


Figura 11. *Respuesta del profesor D4*

Como Acción, los profesores D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11 y D12 evalúan la función en los valores $x = 2$ y $x = 2 + h$, siendo h un incremento en x. Después encuentran cuál es el cambio en y ($f(x)$) cuando x tiene un incremento h, el cual habían evaluado en el inciso anterior. Sin embargo, D2, D3, D4, D6, D7, D9 y D12 no logran establecer cúal es la tasa de cambio en los dos valores del dominio evaluados en el inciso a y b, por lo que no muestran indicios de tener la concepción Proceso en el registro numérico de derivada.

Los profesores D1, D5, D8, D10 y D11 se encuentran en la estructura mental de Proceso, ya que estos lograron calcular la tasa de cambio en el intervalo que se generó entre los dos puntos que evalúo en los incisos a y b.

Respuestas de los profesores en la actividad AD4

Actividad AD4: De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

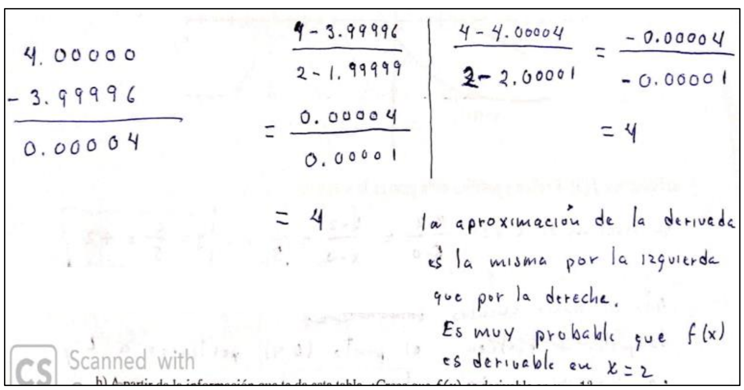
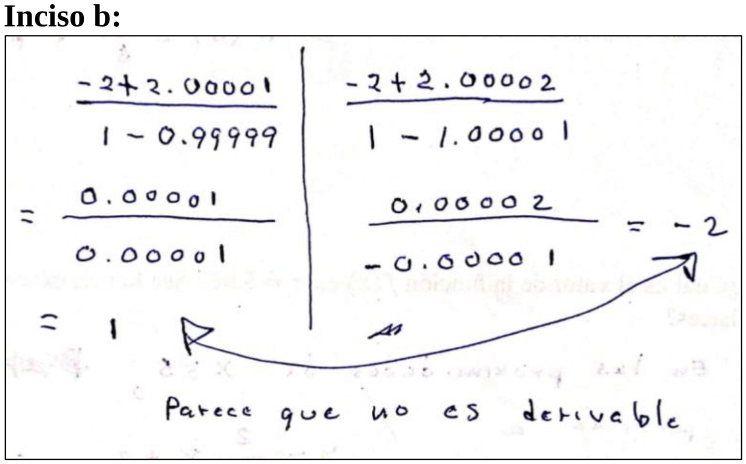
a) Usa la siguiente tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$. ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 2$?

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.61	3.960101	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

Tabla 6. *Profesores que muestran la concepción de Acción y Proceso en el registro numérico de derivada en la actividad AD4*

Profesores	Respuestas	Estructura mental
D6	**Inciso a:**  ***Figura 12.*** *Respuesta del profesor D6* **Inciso b:**  ***Figura 13.*** *Respuesta del profesor D6*	Como Acción el profesor realiza el cálculo de los cocientes de diferencias. Como Proceso este logra producir la tasa de cambio al hallar cual es el valor al que tiende ese cálculo de cocientes de diferencias.

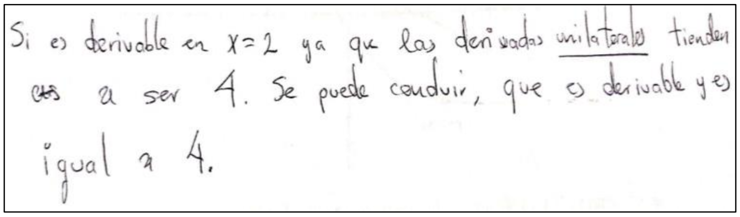
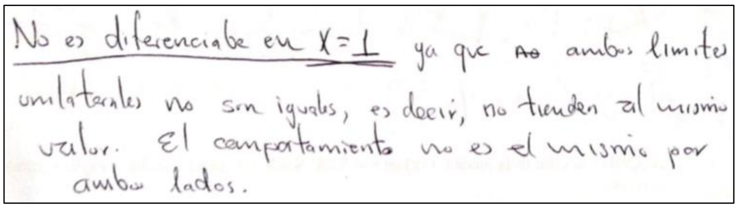
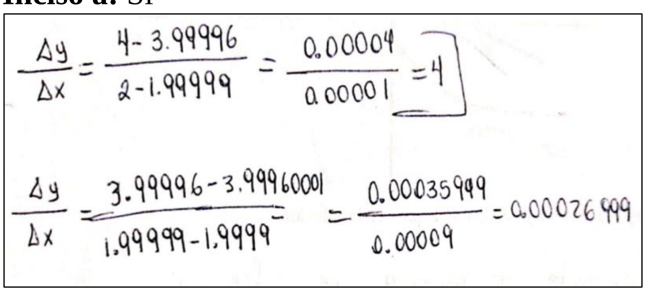
D10 y D11	**Inciso a:**  Si es derivable en $x=2$ ya que las derivadas unilaterales tienden ~~a~~ a ser 4. Se puede concluir, que es derivable y es igual a 4. ***Figura 14.*** *Respuesta del profesor D10* **Inciso b:**  No es diferenciable en $x=1$ ya que ~~no~~ ambos limites unilaterales no son iguales, es decir, no tienden al mismo valor. El comportamiento no es el mismo por ambos lados. ***Figura 15.*** *Respuesta del profesor D10*	No hay evidencias de que haya realizado la acción de calcular los cocientes de diferencias necesarias para dar esa respuesta, sin embargo, sus argumentos son correctos al tratar de definir si la derivada existe o no. Los profesores muestran indicios de tener la concepción Proceso de derivada en el registro numérico.

Tabla 7. *Profesores que no muestran indicios de poseer la estructura mental de Proceso en el registro numérico de derivada en la actividad AD4*

Profesores	Respuestas	Estructura mental
D1, D5 y D12	**Inciso a:** Si  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3.99996}{2-1.99999} = \frac{0.00004}{0.00001} = \boxed{4}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3.99996-3.9996001}{1.99999-1.9999} = \frac{0.00035999}{0.00009} = 0.00026999$ ***Figura 16****. Respuesta del profesor D1* **Inciso b:** Si (pero no realiza ninguna otra acción, es decir no realiza el cociente de diferencias)	Realizan la acción de calcular el cociente de diferencias pero con valores distintos a $x = 2$. Aunque su respuestas son correctas al mencionar que la función si es derivable, no podemos concluir que el profesor tiene la concepción de Acción en la ruta analítica de derivada, ya que su respuesta es inconsistente con el objetivo de la actividad.
D2, D3, D4, D7, D8 y D9	**Inciso a:**	No realizan la acción de calcular los cocientes de diferencias con ningún valor

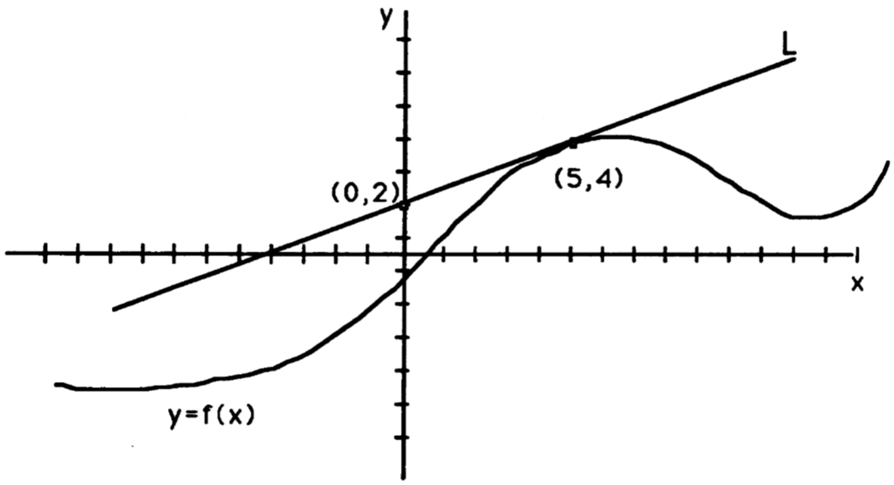
	(Parece que la función sí es derivable en el valor $x=2$, ya que tiene imagen $f(x)=4$, y parece que es una función continua). Rectifico: los valores de la imagen parece que dan saltos, entonces NO es una función continua ***Figura 17.*** *Respuesta del profesor D9* **Inciso b:** Parece que la función sí es derivable en el valor $x=1$ ya que tiene imagen $f(x)=-2$, y parece que es una función continua. ***Figura 18.*** *Respuesta del profesor D9*	del dominio, además, las respuestas son incorrectas de acuerdo con lo señalado por la actividad. Por lo tanto estos profesores no tienen la concepción de Acción en el registro numérico de derivada.

Con este análisis pudimos observar lo siguiente:

- Profesores que no realizan el cálculo de los cocientes de diferencias son capaces de conjeturar cuándo la función es diferenciable en determinados puntos analizando.
- Los profesores que poseen la estructura mental de Proceso son D6, D10 y D11.
- Los profesores que poseen la estructura mental de Acción son D1, D6 y D12 debido a que realizan explícitamente el cálculo de los cocientes de diferencias.
- Los profesores D2, D3, D4, D7, D8, D9 no muestran indicios de poseer la concepción Acción en el registro numérico de derivada.

Respuestas de los profesores de la actividad AD5

Actividad AD5: La recta L es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(5{,}4)$



a) Encuentra $f(5)$. Explica y justifica cada paso.

b) Encuentra $f'(5)$. Explica y justifica cada paso.

c) ¿Cuál es el valor de la función $f(x)$ en $x = 5.08$? Sea lo más exacto posible y explique ¿cómo lo resolviste?

Tabla 8. *Respuesta de los profesores que poseen la concepción de Acción en el registro gráfico y resuelven correctamente la actividad*

Profesores	Respuestas	Estructura mental

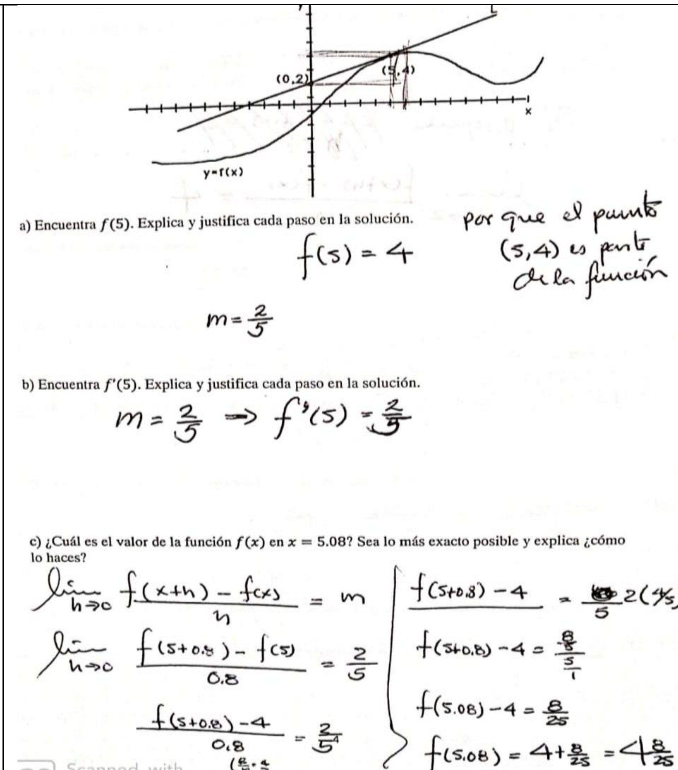
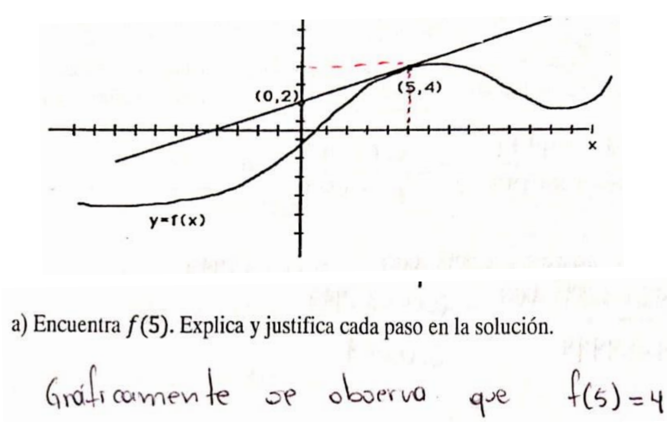
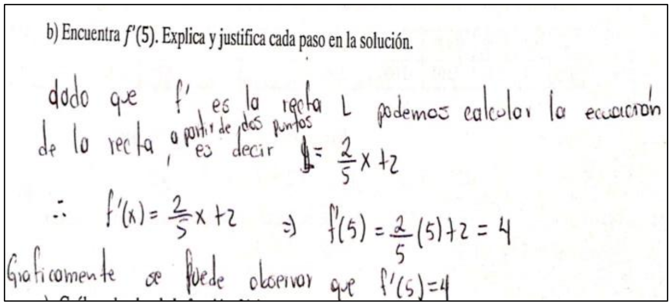
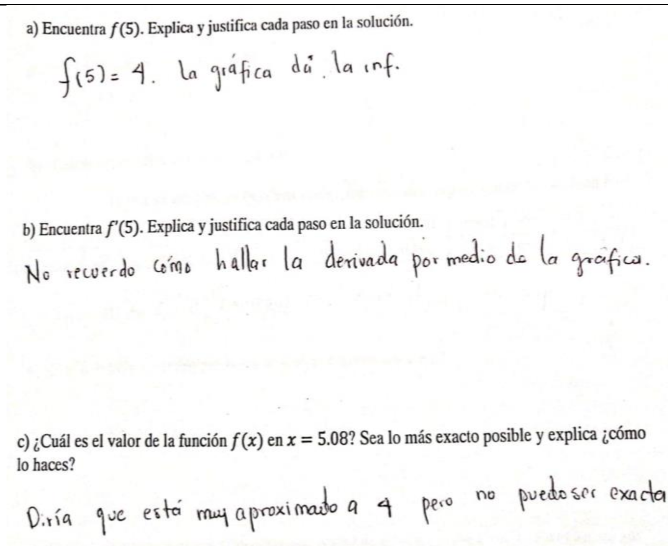
D4, D5, D6, D10, D11 y D12	 ***Figura 19.*** *Respuesta del profesor D5*	Como acción los profesores identifican gráficamente la función en el punto $x = 5$ e identifican la derivada de la función como la pendiente de la recta tangente en ese punto. Con ello observamos que estos profesores poseen la concepción de Acción en el registro gráfico de derivada.

Tabla 9. *Respuesta de los profesores que poseen la concepción de Acción, pero muestran dificultades al identificar la derivada en un punto dado gráficamente*

Profesores	**Respuestas**	**Estructura mental**
D1, D8 y D9	**Inciso a)**  ***Figura 20.*** *Respuesta del profesor D1*	Como Acción el profesor identifica gráficamente la función en el punto $x = 5$, pero al tratar de encontrar la derivada de la función en ese punto el profesor evalúa ese punto en la ecuación de la recta y señala que la derivada de la función en $x = 5$ es $f'(5) = 4$.

	Inciso b)  b) Encuentra $f'(5)$. Explica y justifica cada paso en la solución. dado que f' es la recta L podemos calcular la ecuación de la recta a partir de dos puntos, es decir $f = \frac{2}{5}x + 2$ $\therefore f'(x) = \frac{2}{5}x + 2 \Rightarrow f'(5) = \frac{2}{5}(5) + 2 = 4$ Gráficamente se puede observar que $f'(5) = 4$ ***Figura 21.** Respuesta del profesor D1*	
D3 y D7	 a) Encuentra $f(5)$. Explica y justifica cada paso en la solución. $f(5) = 4$. La gráfica dá la inf. b) Encuentra $f'(5)$. Explica y justifica cada paso en la solución. No recuerdo cómo hallar la derivada por medio de la gráfica. c) ¿Cuál es el valor de la función $f(x)$ en $x = 5.08$? Sea lo más exacto posible y explica ¿cómo lo haces? Diría que está muy aproximado a 4 pero no puedo ser exacta ***Figura 22.** Respuesta del profesor D3*	Los docentes encuentran gráficamente el valor de la función en $x = 5$, pero no logran encontrar el valor de la derivada en ese punto. Tienen dificultades con relacionar a la derivada como la pendiente de la recta tangente en el punto dado.

Con este análisis concluimos que:

- 6 profesores poseen la concepción Acción ya que identifican la derivada de la función en un punto como la pendiente de la línea tangente al gráfico en ese punto.

- El docente D2 deja en blanco la actividad, por lo que no tenemos información para establecer qué concepciones tiene de la representación gráfica de la derivada en un punto.

Respuestas de los profesores de la actividad AD6

Actividad AD6: Compara las gráficas de las dos funciones de la siguiente figura y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra. Argumenta tu respuesta.

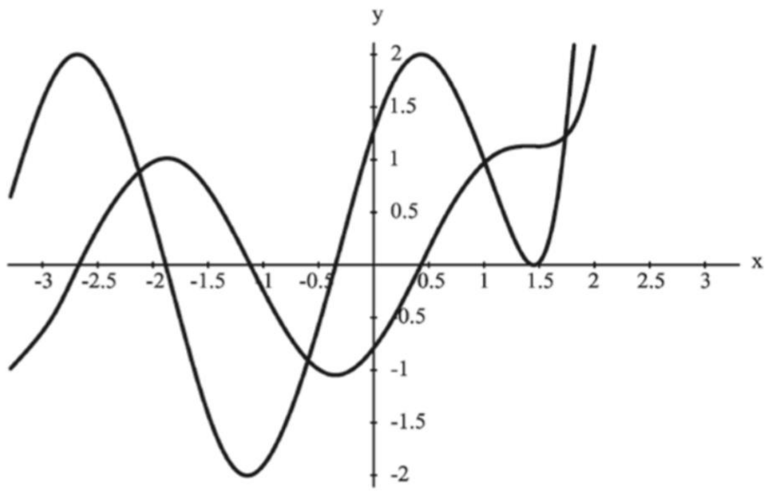


Tabla 10. *Profesores que muestran la concepción de Proceso en el registro gráfico de derivada*

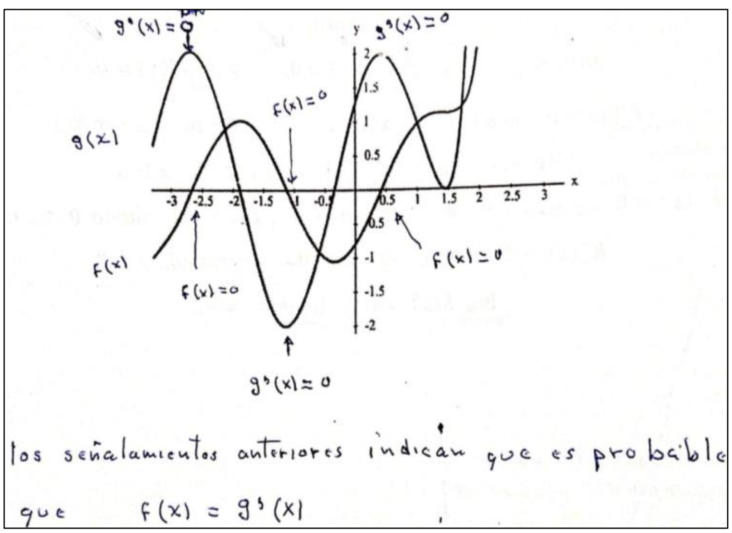
Profesor	Respuesta	Esctructura mental
D6	 ***Figura 23.*** *Respuesta del profesor D6*	El docente logra identificar de forma correcta cada una de las gráficas correspondientes a la función original y a su derivada. Además señala algunas propiedades de la derivada que le ayudan a identificar su gráfica correspondiente, por ejemplo, cuando la derivada es igual a cero la función interseca al eje x.

__Tabla 11.__ Profesores que no poseen la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada

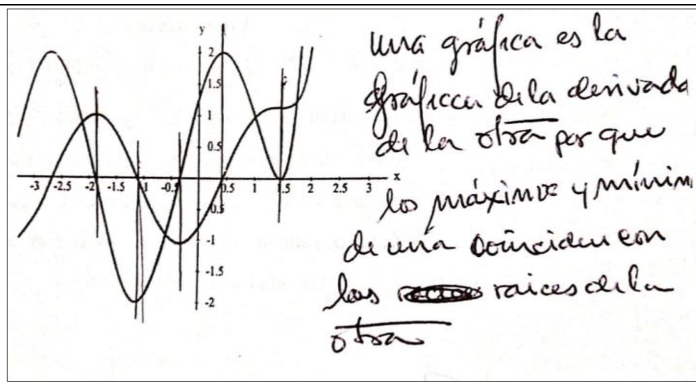
<table>
<tr><th>Profesores</th><th>Respuestas</th><th>Estructura mental</th></tr>
<tr><td>D1, D2 y D12</td><td>Dejan en blanco la actividad o mencionan que no tienen idea de cómo realizar la actividad.</td><td>No muestran indicios de poseer la concepción de Proceso en el registro gráfico de derivada.</td></tr>
<tr><td>D3, D4, D5 y D7</td><td>


Figura 24. Respuesta del profesor D5

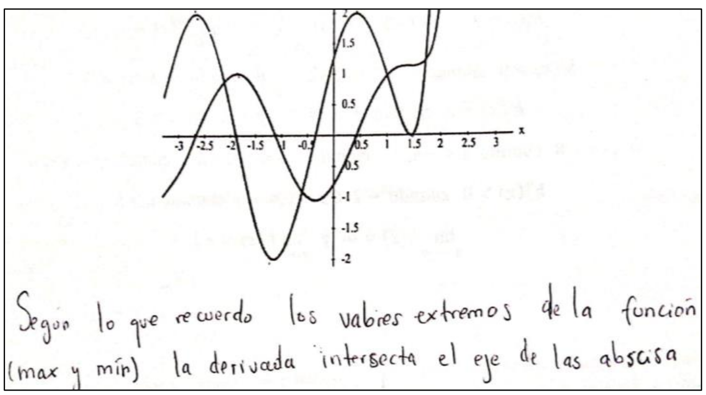
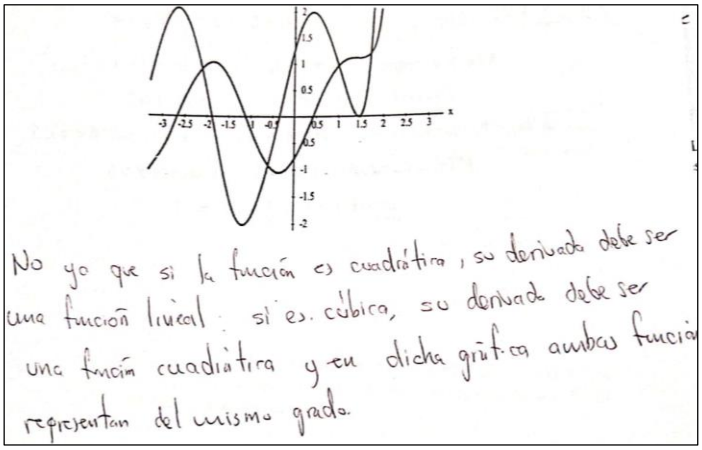


Figura 25. Respuesta del profesor D3
</td><td>En sus respuestas dan algunos argumentos relacionados con propiedades de la derivada, pero no responden cúal de ellas es la derivada de la otra. Con ello decimos que estos profesores no muestran indicios de tener la concepción Proceso en el registro gráfico de derivada.</td></tr>
<tr><td>D8</td><td>Escribe: tengo entendido que la derivada es la tangente a la curva. Al tener dos curvas una no puede ser la tangente de la otra</td><td>No muestra indicios de poseer la concepción de Proceso de derivada en el registro gráfico.</td></tr>
</table>

D10	 ***Figura 26.*** *Respuesta del profesor D10*	La respuesta que da el profesor es incorrecta y no está relacionada con propiedades que posee la gráfica de la función derivada, la relación que establece es la del comportamiento de la función respecto al grado de la misma. No muestra indicios de tener la concepción Proceso de derivada en el registro gráfico.
D9 y D11	Señala cúal es la gráfica de la función y de la derivada de esa función. Aunque la respuesta es correcta al señalar cúal gráfica corresponde a cada una de las funciones, los profesores no da argumentos del porqué de su respuesta, simplemente mencionan que eso sucede por el signo de la derivada.	Aunque señala de forma correcta cúal es la gráfica de la función y cuál la gráfica de la derivada, no muestra indicios de poseer la concepción de Proceso en el registro gráfico de derivada al no realizar las acciones que señala la DG en el punto 7.

Con este análisis concluimos que:

- Solo el docente D6 posee la concepción Proceso en el registro gráfico de derivada.
- Los profesores D3, D4, D5 y D7 aunque no identifican explícitamente qué gráfica corresponde a cada una de las funciones (función original y su derivada), logran dar algunas

propiedades que sirven para identificar la función y su derivada, es decir, muestran indicios de tener la concepción Proceso.

- En lo que respecta a los profesores que dejaron la actividad sin contestar, no tenemos la información suficiente para definir qué estructura mental tienen.

Respuesta de los profesores de la actividad AD7

Actividad AD7: Dibuje un gráfico de la función h que satisfaga las siguientes condiciones:

$$h \ es \ continua$$
$$h(0) = 2, \quad h'(-2) = h'(3) = 0 \quad y \quad \lim_{x \to 0} h'(x) = \infty$$
$$h'(x) > 0 \ \ cuando \ -4 < x < -2, \quad y \ cuando \ -2 < x < 3$$
$$h'(x) < 0 \ \ cuando \ x < -4, \quad y \ cuando \ \ x > 3$$
$$h''(x) < 0 \ \ cuando \ x < -4, \quad cuando -4 < x < -2 \ y \ cuando \ 0 < x < 5$$
$$h''(x) > 0 \ \ cuando \ -2 < x < 0, \quad y \ cuando \ x > 5$$
$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty \ \ y \ \ \lim_{x \to \infty} h(x) = -2$$

Se examinaron las respuestas de los profesores con base en el esquema gráfico de derivada que proponen Baker et al. (2000), para analizar la comprensión que tienen los profesores del objeto derivada en el registro gráfico mediante la interacción de dos esquemas, el esquema de propiedad y el esquema de intervalo. El lenguaje utilizado en la descripción de sus respuestas resalta lo que se observó y no prejuzga el conocimiento total que el sujeto pudo haber desarrollado en su esquema.

Las respuestas que dieron los profesores se agruparon de la siguiente manera:

- Los profesores D2, D8, D9, D10 y D11 no contestaron la actividad.
- Los profesores D4, D5, D6 y D7 se ubicaron en el nivel intra-propiedad, intra-intervalo (intra-intra), porque ellos no realizaron la coordinación entre intervalos ni entre múltiples condiciones en un solo intervalo, tampoco coordinaron la información proporcionada en los intervalos con las propiedades de derivada de la función. Estos profesores no lograron realizar un bosquejo completo de la gráfica de la función. En la figura 27 y 28 se muestra las respuestas que dieron los profesores D4 y D6 respectivamente y que se ubicaron en este nivel, en sus respuestas sólo bosquejan algunas de las condiciones que marca la actividad.

Por ejemplo, el profesor D4 grafica la continuidad de la función en todo el dominio y algunas de las condiciones en intervalos aislados, además logra identificar el punto mínimo en $x = -2$, el punto máximo en $x = 3$, dada por la condición de la derivada igua a cero en esos puntos, y el punto de inflexión en $x = -4$, pero no coordina las condiciones de la primera y segunda derivada, es decir, no identifica de forma correcta los intervalos donde la función es creciente, decreciente y si es cóncava o convexa. El profesor D6 grafica la condición de continuidad de la función en todo el dominio, también logra bosquejar puntos donde la función tiene un máximo o mínimo dadas las condiciones de la primera derivada, es decir en el punto $x = -2, (h'(-2) = 0)$ y el punto $x = 3, (h'(3) = 0)$, pero no logra graficar las condiciones dadas por la primera y segunda derivada en los intervalos determinados.

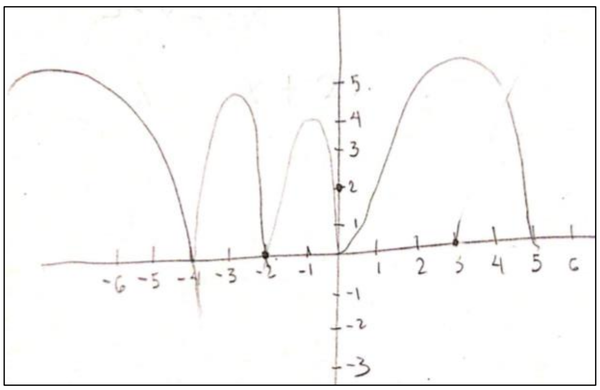


Figura 27. *Gráfica realizada por el profesor D4*

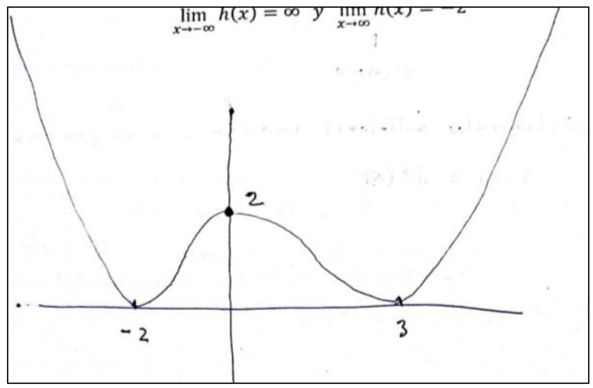


Figura 28. *Gráfica realizada por el profesor D6*

- El profesor D1 se ubicó en el nivel inter-propiedad, intra-intervalo (inter-intra), ya que logró coordinar algunas propiedades en dos intervalos separados, pero no vincula todas las propiedades en intervalos contiguos del dominio. En la figura 29 se observa como el profesor logra bosquejar la condición de continuidad en todo el dominio, también coordina las condiciones de la primera y segunda derivada en los intervalos $(0,3)$ y $(3, \infty)$. Tiene dificultades con las condiciones de la primera y segunda derivada en el intervalo $(-\infty, 4)$.

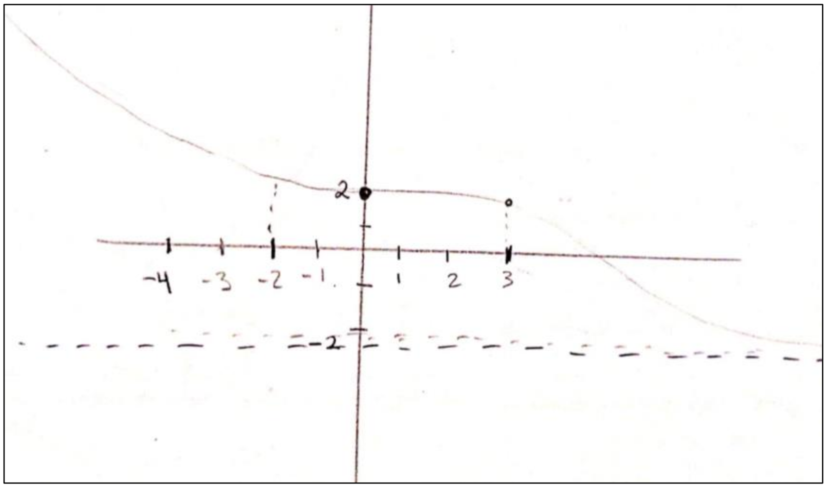


Figura 29. *Gráfica realizada por el profesor D1*

- Los profesores D3 y D12 se ubicaron en el nivel inter-propiedad, inter-intervalo (inter-inter), porque ellos logran coordinar más de dos propiedades en al menos dos intervalos contiguos del dominio, pero no logran coordinar todas las propiedades en todos los intervalos. En la figura 30 se observa como el profesor D3 grafica las propiedades de la primera y segunda derivada en los intervalos contiguos (-2,0), $(0,3)$ y $(3,\infty)$. Sin embargo, no logra bosquejar algunas de las propiedades como puntos de inflexión u observar qué sucede con la gráfica de la función derivada cuando el límite de la derivada tiende a infinito.

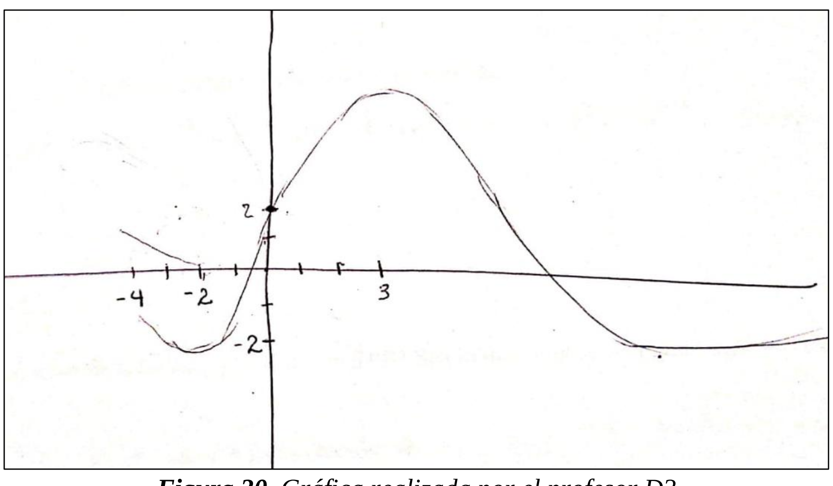


Figura 30. *Gráfica realizada por el profesor D3*

El problema en cuestión no es típico porque no se presenta a la función con una expresión algebraica sino como un conjunto de condiciones analíticas, y para resolverlo, los profesores debían coordinar intervalos y propiedades de la gráfica de la función.

La cantidad de profesores que se ubicó en cada uno de los niveles de desarrollo de comprensión se resume en la tabla 12. Respecto a los 5 profesores que dejaron en blanco la actividad no podemos ubicarlos en ninguno de estos niveles y por lo tanto no los incluimos en la clasificación.

Tabla 12. *Cantidad de profesores en cada uno de los niveles de comprensión*

	Intra- intervalo	**Inter-intervalo**	**Trans-intervalo**
Intra-propiedad	4 (33.3%)	0	0
Inter-propiedad	1 (8.3%)	2 (16.6%)	0
Trans-propiedad	0	0	0

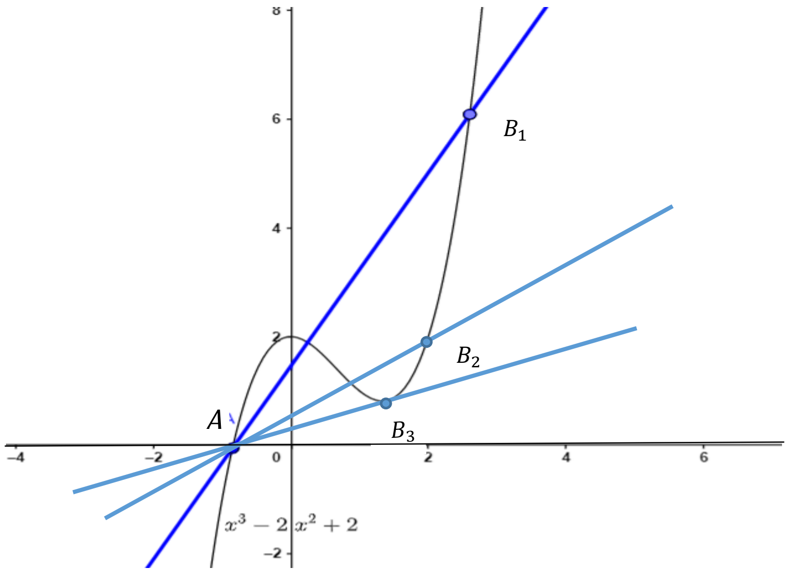
Esto indica que un mayor número de profesores se ubicó en el nivel intra-intra del esquema gráfico de derivada de una función. Lo anterior significa que, al resolver el problema propuesto, ellos no lograron coordinar la información de la segunda derivada en intervalos del dominio, además, tuvieron dificultades con el punto cúspide en $x = -4$ y la descripción de lo que sucede con la función cuando el límite de la derivada es infinito cuando x tiende a cero. Los profesores clasificados en este nivel aplicaron adecuadamente algunas propiedades pero otras no, y lo hicieron en ciertos intervalos. Por ejemplo, algunos lograron coordinar la información de la primera derivada y graficaron los intervalos en los que la función era creciente o decreciente y donde la función tenía un máximo o mínimo. Los profesores que se ubicaron en niveles de desarrollo más altos, como inter-intra, inter-inter del esquema gráfico derivada de una función lograron coordinar algunas de las propiedades de la función en al menos dos intervalos contiguos, además, algunos lograron observar que en el punto $x = 4$ existe una cúspide y pudieron graficarla; pero estos no lograron graficar todas las propiedades en todo el dominio, es decir, tuvieron dificultades con la condición de la primera derivada y tuvieron errores al graficar la función cuando es creciente o decreciente en ciertos intervalos, además, no lograron señalar qué sucede con la gráfica de la función cuando el límite de la derivada de la función es igual a infinito cuando x tiende a cero.

Con este análisis podemos concluir que los profesores presentan una falta de comprensión de la derivada y sus propiedades. Los principales obstáculos que identificamos fueron el punto cúspide, el punto de inflexión, el límite de la derivada cuando x tiende a cero, la segunda derivada y la coordinación entre las propiedades de la derivada con los intervalos del dominio de la función. Además, mostraron una fuerte tendencia a usar la primera derivada para obtener la mayor parte de la información sobre el gráfico. Realizando una comparación con el análisis que reportaron Baker et al. (2000) del mismo problema aplicado a 41 estudiantes universitarios de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias, se puede observar que los profesores presentan dificultades similares a estos estudiantes. Sin embargo, la distribución de la población en los niveles del esquema bidimensional es muy diferente. Estos investigadores observaron que el 14% de los estudiantes estaba en el nivel intra-intra, 17% en el nivel intra-inter, 7% en el nivel intra-trans, 5% en el nivel inter-intra, 10% en el nivel inter-inter, 17% en el nivel inter-trans, 0% en el nivel trans-intra, 10% en el nivel trans-inter y 20% en el nivel trans-trans. Es decir, se reportó un mayor porcentaje de estudiantes del nivel superior que se encontraban en el nivel trans-trans, que en el grupo de docentes de nuestro estudio.

4.2 Análisis de resultados de las actividades de evaluación

En esta sección se mostrará el análisis de las respuestas que dieron los profesores a las actividades aplicadas en el bloque 4. El objetivo de estas actividades, como se ya mencionó, fue analizar el conocimiento en términos de las estructuras mentales que los profesores lograron reconstruir a través del análisis y la reflexión de manera grupal de las actividades de diagnóstico. Además, se presentará un cuadro comparativo entre las estructuras mentales que se observaron al inicio del curso y las nuevas estructuras que lograron reconstruir después de haber trabajado y reflexionado cada una de las actividades. Cabe mencionar que en este análisis se presenta la respuesta de 3 profesores adicionales, D13, D14 y D15 que en la prueba diagnóstico no se mostraron y esto se debió a que estos profesores no estuvieron presentes en los bloques de trabajo 1 y 2, sino que se integraron en los bloques 3 y 4. Además, no se muestra al profesor D12 debido a que este no asistió en los bloques de trabajo 3 y 4.

Actividad AE1: La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Las líneas AB_i se dibujan desde A hasta los puntos *Bi* (i=1,2,3…) en la gráfica. Tales líneas se llaman secantes, y algunos ejemplos se muestran en la siguiente gráfica.



a) ¿Cuántas rectas secantes diferentes se podrían dibujar además de los que ya están en el diagrama? justifique.

b) A medida que *Bi* se acerca más y más a *A*, ¿qué le sucede a la secante?

Tabla 13. *Respuestas de los profesores en la actividad AE1*

Docentes	Respuesta del inciso a	Respuesta del inciso b	Estructura mental
D1, D2, D5, D6, D7, D8, D9, D10, D11, D12, D13 y D14	Existe un número infinito de rectas secantes entre el punto A y B. Otra de sus respuestas fue tantas como puntos se encuentren entre A y B	La recta secante se convierte en la recta tangente	Proceso en el registro gráfico de derivada
D3, D4	Si la circunferencia tiene n puntos se podrían trazar $n-1$ secantes, ya que si se traza una recta que pase por el punto P con el mismo punto P sería una tangente	La recta secante se convertirá en la recta tangente	Tienen noción de qué es lo que sucede cuando el punto B se acerca cada vez más al punto A, pero solo pueden visualizar un número finito de rectas

Observamos que la mayoría de los profesores logran contestar de forma correcta la actividad, es decir, logran observar que pueden dibujar una infinidad de rectas secantes entre los puntos A y B_i, conforme B_i (i=1,2,3…) se va acercando al punto A, además, todos los profesores logran conjeturar que la recta secante se convertirá en la recta tangente en el punto A. Con ello concluimos que la mayoría de los profesores tiene la concepción de Acción y Proceso en el registro gráfico de derivada.

Respecto a las nuevas estructuras mentales que los profesores lograron reconstruir después de haber trabajado bajo el esquema que ofrece el ciclo de enseñanza ACE, es decir, después de reflexionar, discutir y analizar las actividades de la prueba diagnóstico durante el curso impartido, se observó que los docentes D2, D5, D6 y D8 que en la actividad **AD1** no tenían la concepción Proceso en el registro gráfico de derivada, ahora mostraban indicios de haberla alcanzado, es decir, se logró una reconstrucción de las estructuras mentales que tenían los profesores. Recordemos que esto se logra como lo señala Dubinsky (1991), por medio de la abstracción reflexiva que cada sujeto realizó cuando las actividades se discutieron y resolvieron de forma grupal durante el curso.

Actividad AE2.- Dadas las funciones f y g conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

a) Usa la siguiente tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 0$. ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 0$?

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	…	0	…	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	1.101	1.9101	1.99101	1.999101	…	2	…	1.999101	1.99101	1.9101	1.101

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿Crees que $g(x)$ es derivable en $x = 3$?

x	2.99	2.999	2.9999	2.99999	…	3	…	3.00101	3.0201	3.301	3.401
g(x)	2.99	2.999	2.9999	2.99999	…	3	…	3.00101	3.0201	3.301	3.401

Tabla 14. *Respuesta de los profesores que tienen la concepción Proceso en el registro numérico de derivada*

Docentes	Respuestas	Estructura mental
D1, D4, D6, D10 y D15	**Inciso a:** la función no es diferenciable en $x = 0$ y realizan los siguientes cálculos.	Los docentes realizan el cálculo de cocientes de diferencias con puntos cada vez más cercanos a los

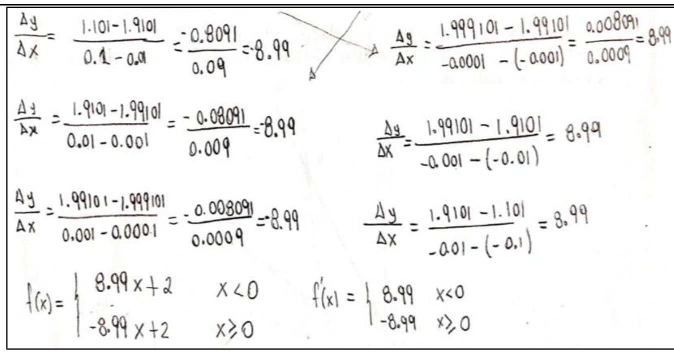
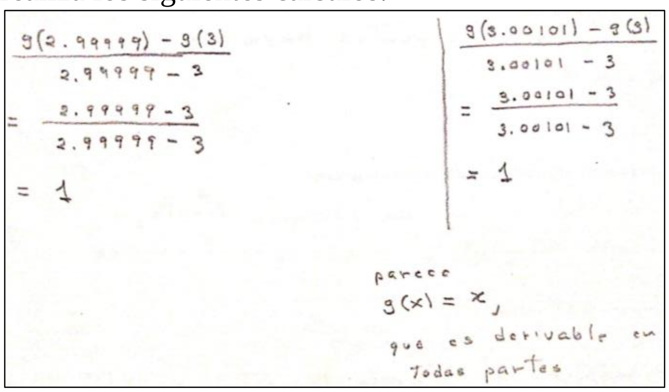
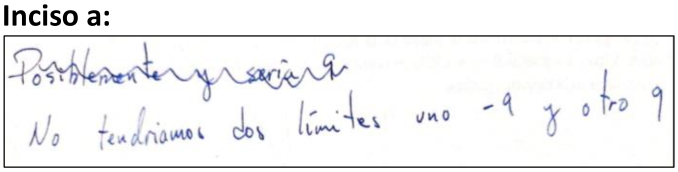
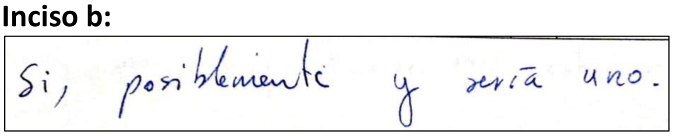
	 ***Figura 31.*** *Respuesta del profesor D1* **Inciso b:** la función si es diferenciable en $x = 3$ y realiza los siguientes cálculos.  ***Figura 32.*** *Respuesta del profesor D6*	puntos de interés, en el inciso a, en $x = 0$ y en el inciso b, en $x = 3$ (es decir, al punto donde se quiere comprobar que la derivada existe) y con ello concluyen si la función es diferenciable o no en determinados puntos. Con ello decimos que estos profesores poseen la concepción de Acción y Procesos en el registro numérico de derivada como lo marca la descomposicón genética en el punto **3a** y **3b.**
D11, D14	**Inciso a:**  ***Figura 33.*** *Respuesta del profesor D11* **Inciso b:**  ***Figura 34****. Respuesta del profesor D11*	Las respuestas de los profesores son correctas, pero sus argumentos no están basados en el cálculo de los cocientes de diferencias como lo marca la descomposición genética. Por lo que no podemos afirmar que ciertamente los docentes poseen la concepción Proceso en el registro numérico de derivada.

__Tabla 15.__ Respuesta de los profesores que no logran alcanzar la estructura mental de Proceso

<table>
<tr><th>Docentes</th><th>Respuestas</th><th>Estructura mental</th></tr>
<tr><td>D2, D3, D5, D7 y D13</td><td>Inciso a:

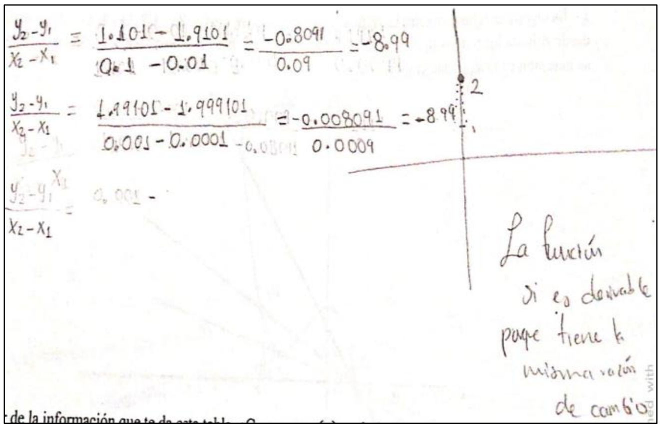



Figura 35. Respuesta del profesor D5
Inciso b: la función no es diferenciable en $x = 3$ y realiza los siguientes cálculos.

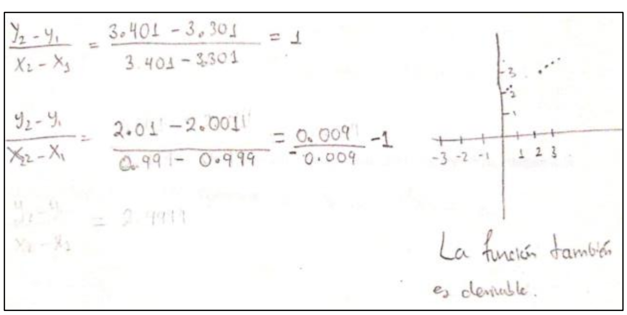



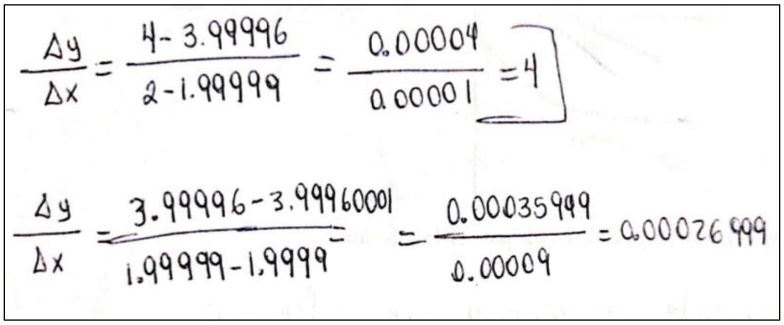
Figura 36. Respuesta del profesor D5</td><td>Los docentes realizan el cálculo de cocientes de diferencias pero con pares de puntos cada vez más cercanos al valor de interés, en el inciso a, en $x = 0$ y en el inciso b, en $x = 3$, sin tomar precisamente esos valores. Además muestran dificultades con algunos cálculos de esos cocientes, por ejemplo, en el inciso b tienen un error con el signo, lo que los lleva a contestar que la función no es diferenciable en el valor $x = 3$. Con esto concluimos que estos profesores muestran indicios de tener la concepción Acción en el registro gráfico de derivada, como lo marca la descomposicón genética en el punto 1a, pero no logran alcanzar la estructura mental de Proceso.</td></tr>
<tr><td>D8</td><td>Inciso a:</td><td>Aunque la respuesta es correcta al mencionar que la</td></tr>
</table>

	La función no es derivable, debido a que, al parecer en $x = 0$ la $f(x)$ alcanza un punto máximo y la pendiente es ese punto es igual a cero. **Inciso b**: Sí, debido a que en ese punto asemeja una linea recta y se puede obtener su pendiente.	primer función no es diferenciable en $x = 0$ y la segunda si lo es en $x = 3$, los argumentos no nos proporcionan información relcionada con el objetivo de la actividad. El profesor recurre al registro gráfico e intenta describir cómo sería el compartamiento de dicha función y analizar si existe la derivada
D9	**Inciso a:** Si, pero no estoy seguro de cuál es la derivada. **Inciso b:** Si.	Solo responden que la función si es diferenciable en ambos incisos, pero no realiza los cálculos correspondientes y sin dar argumentos del porqué si son diferenciables.

Con el análisis de sus repuestas concluimos lo siguiente:

- Los profesores D1, D4, D6, D10 y D15 poseen la estructura mental Proceso en el registro numérico de derivada ya que realizan el cálculo de cocientes de diferencias con puntos cada vez más y más cercanos a los puntos de interés, en el inciso *a*, en el punto $x = 0$ y en el inciso *b*, en el punto $x = 3$, además, logran producir la tasa de cambio de una variable respecto a otra, es decir, logran observar e identificar a que número tienden esos cocientes de diferencias y con ello concluir si la derivada existe o no en esos valores.
- Recordemos que en la actividad AD4 el único profesor que se encontraba en la estructura mental de Proceso fue D6. Después de trabajar y reflexionar de manera grupal, los profesores que logran reconstruir la concepción que tenían de derivada son D1, D4, D10,

D11, D14 y D15, incluyendo nuevamente a D6. Un ejemplo de ello es el caso del profesor D1. En la actividad AD4, el docente D1 realiza lo siguiente:

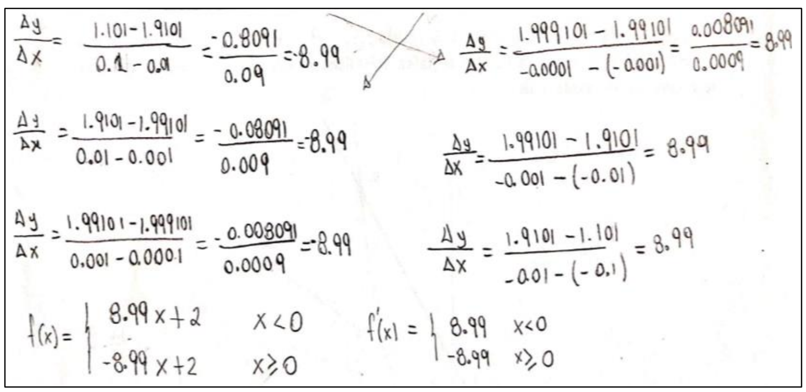


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3.99996}{2-1.99999} = \frac{0.00004}{0.00001} = 4$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3.99996-3.99960001}{1.99999-1.9999} = \frac{0.00035999}{0.00009} = 0.00026999$$

Figura 37. *Respuesta del profesor en la actividad AD4*

En el inciso *a*, calcula el cociente de diferencias con pares de valores cercanos al punto donde se quiere averiguar si la derivada existe, pero toma pares de valores que no son los correctos. Con ello habíamos concluido que el profesor no mostraba indicios de tener la concepción de Proceso. En la actividad AE2 el docente D1 realiza lo siguiente:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.101-1.9101}{0.1-0.01} = \frac{-0.8091}{0.09} = -8.99 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.999101-1.99101}{-0.0001-(-0.001)} = \frac{0.008091}{0.0009} = 8.99$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.9101-1.99101}{0.01-0.001} = \frac{-0.08091}{0.009} = -8.99 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.99101-1.9101}{-0.001-(-0.01)} = 8.99$$

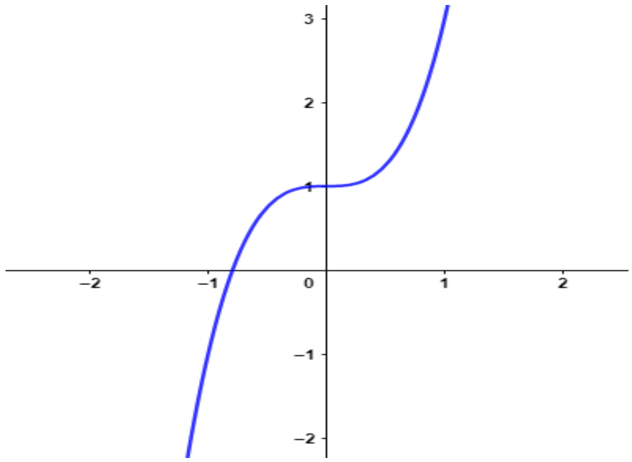
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.99101-1.999101}{0.001-0.0001} = \frac{-0.008091}{0.0009} = -8.99 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.9101-1.101}{-0.01-(-0.1)} = 8.99$$

$$f(x) = \begin{cases} 8.99x+2 & x<0 \\ -8.99x+2 & x\geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 8.99 & x<0 \\ -8.99 & x\geq 0 \end{cases}$$

Figura 38. Respuesta del profesor D1 en la actividad AE2

Calcula los cocientes de diferencias y logra observar que estos cocientes tienden a un valor diferente, con lo cual concluye que la derivada de la función en $x = 0$ no existe. En el inciso *b*, realiza los cocientes de diferencias y observa que estos tienden a un solo valor, que es la derivada de la función en $x = 3$. Con esto podemos inferir que el profesor logra reconstruir el conocimiento que tenía de derivada en el registro numérico, en términos de la teoría APOE, el docente reconstruyó la concepción de Acción en la ruta analítica de derivada. Esto también sucede con los docentes D4, D6, D10, D11, D13 y D15.

Actividad AE3.- El siguiente gráfico representa la función $y = 2x^3 + 1$.



a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1$?

b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1 + h$?

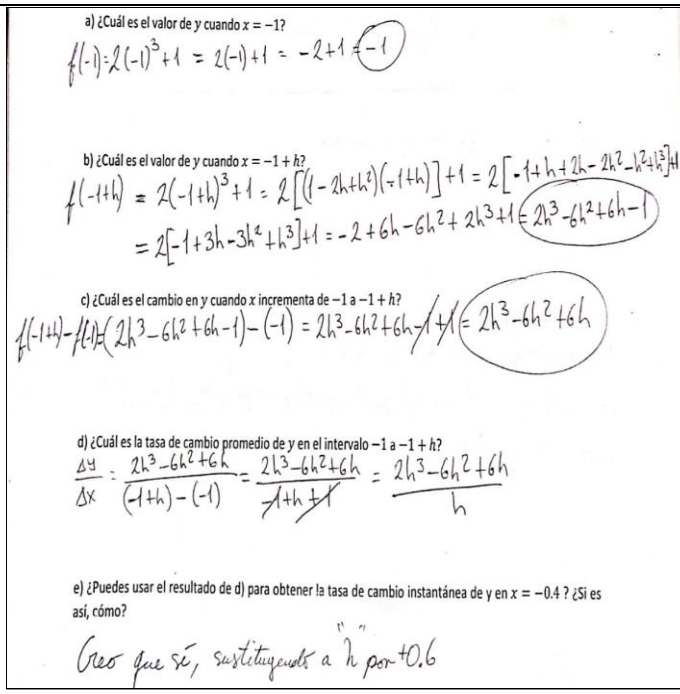
c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de -1 a $-1 + h$?

d) ¿Cuál es la tasa de cambio de y en el intervalo -1 a $-1 + h$?

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio de y en $x = -0.4$? ¿Si es así, cómo?

Tabla 16. *Respuesta de los profesores que alcanzan la estructura mental de Proceso*

Docentes	Respuestas	Estructura mental
D1, D2, D3, D5, D6, D7, D8, D10, D11, D13 y D15		Los profesores realizan los cálculos en cada uno de los incisos. De acuerdo con la descomposición genética, estos docentes tienen la concepción de Acción y Proceso en el registro gráfico y numérico de derivada, ya que calculan el cociente de diferencias en valores de x dados. Además

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1$?

$f(-1) = 2(-1)^3+1 = 2(-1)+1 = -2+1 = -1$

b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1 + h$?

$f(-1+h) = 2(-1+h)^3+1 = 2[(1-2h+h^2)(-1+h)]+1 = 2[-1+h+2h-2h^2-h^2+h^3]+1$
$= 2[-1+3h-3h^2+h^3]+1 = -2+6h-6h^2+2h^3+1 = 2h^3-6h^2+6h-1$

c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de -1 a $-1 + h$?

$f(-1+h)-f(-1) = (2h^3-6h^2+6h-1)-(-1) = 2h^3-6h^2+6h\cancel{-1}\cancel{+1} = 2h^3-6h^2+6h$

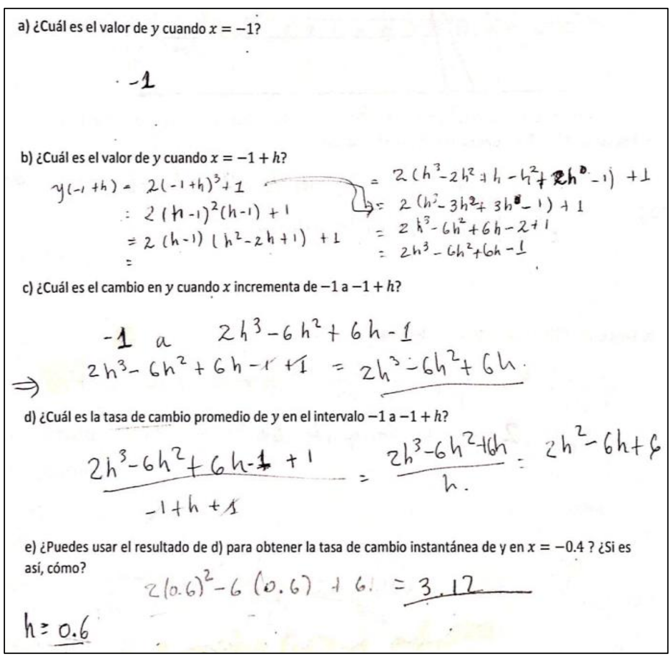
d) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de y en el intervalo -1 a $-1 + h$?

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2h^3-6h^2+6h}{(-1+h)-(-1)} = \frac{2h^3-6h^2+6h}{\cancel{-1}+h\cancel{+1}} = \frac{2h^3-6h^2+6h}{h}$

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio instantánea de y en $x = -0.4$? ¿Si es así, cómo?

Creo que sí, sustituyendo a h por +0.6

Figura 39. Respuesta del profesor D8



a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1$?

-1

b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1 + h$?

$y(-1+h) = 2(-1+h)^3+1$
$= 2(h-1)^2(h-1)+1$
$= 2(h-1)(h^2-2h+1)+1$
$= 2(h^3-2h^2+h-h^2+2h-1)+1$
$= 2(h^3-3h^2+3h-1)+1$
$= 2h^3-6h^2+6h-2+1$
$= 2h^3-6h^2+6h-1$

c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de -1 a $-1 + h$?

-1 a $2h^3-6h^2+6h-1$

$\Rightarrow 2h^3-6h^2+6h\cancel{-1}+1 = 2h^3-6h^2+6h$

d) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de y en el intervalo -1 a $-1 + h$?

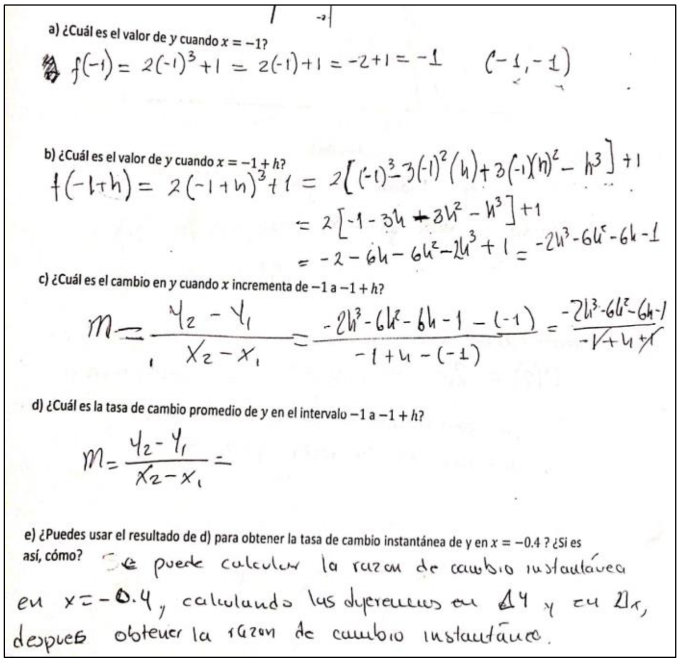
$\frac{2h^3-6h^2+6h-1+1}{-1+h+1} = \frac{2h^3-6h^2+6h}{h} = 2h^2-6h+6$

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio instantánea de y en $x = -0.4$? ¿Si es así, cómo?

$2(0.6)^2-6(0.6)+6 = 3.12$

$h = 0.6$

Figura 40. Respuesta del profesor D3
</td>
<td>logran producir la tasa de cambio cuando existe un incremento h en el dominio de la función.</td>
</tr>
</table>

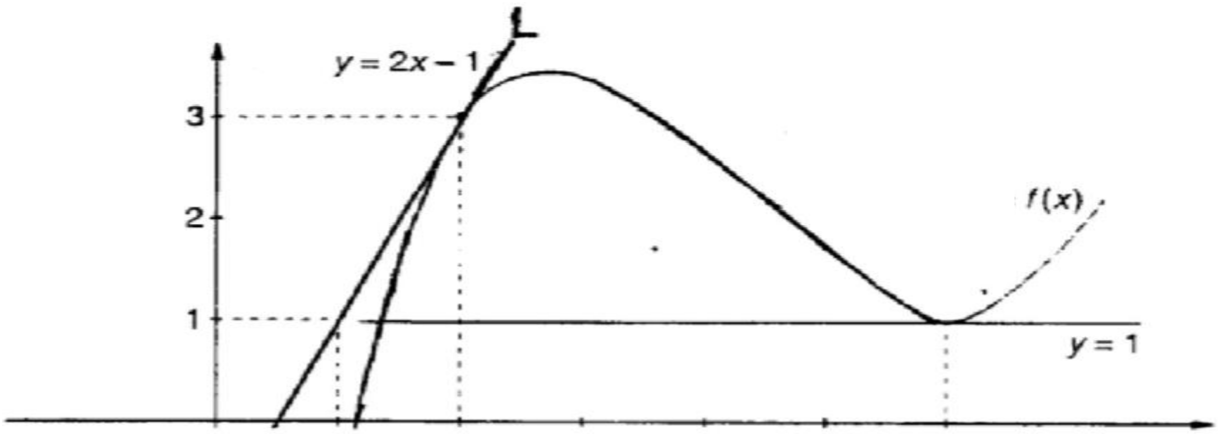
<table>
<tr>
<td>D4, D9 y D14</td>
<td>
a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1$?
$f(-1) = 2(-1)^3+1 = 2(-1)+1 = -2+1 = -1 \quad (-1,-1)$
b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1+h$?
$f(-1+h) = 2(-1+h)^3+1 = 2[(-1)^3-3(-1)^2(h)+3(-1)(h)^2-h^3]+1$
$= 2[-1-3h+3h^2-h^3]+1$
$= -2-6h-6h^2-2h^3+1 = -2h^3-6h^2-6h-1$
c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de -1 a $-1+h$?
$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2h^3-6h^2-6h-1-(-1)}{-1+h-(-1)} = \frac{-2h^3-6h^2-6h-1}{-\cancel{1}+h+\cancel{1}}$
d) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de y en el intervalo -1 a $-1+h$?
$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} =$
e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio instantánea de y en $x = -0.4$? ¿Si es así, cómo? Se puede calcular la razon de cambio instantánea en $x=-0.4$, calculando las diferencias en Δy y en Δx, despues obtener la razon de cambio instantánea.
Figura 41. Respuesta del profesor D9</td>
<td>Los profesores logran evaluar la función en los puntos $x = -1$, $x = -1 + h$ y el cambio en y cuando x tiene un incremento h, es decir, solo contestan tres incisos, pero no calculan la tasa de cambio en ese incremento. Con esto decimos que estos docentes tienen la concepción de Acción, pero no logran construir la estructura mental Proceso en el registro numérico de derivada</td>
</tr>
</table>

De este análisis concluimos lo siguiente:

- Los profesores D1, D2, D3, D5, D6, D7, D8, D10, D11, D13 y D15 muestran tener la concepción Proceso en el registro gráfico y numérico de derivada.

- En lo que respecta a las estructuras mentales que los profesores lograron reconstruir, observamos que D1, D5, D8, D10 y D11 pasaron de tener la concepción Acción en el registro gráfico y numérico de derivada a la estructura mental de Proceso en esos mismos registros, es decir, estos profesores lograron hallar cuál es la razón de cambio e incluso logran calcular esa razón de cambio cuando existe un incremento de $h = 0.6$.

Actividad AE4.- La recta L es tangente a la gráfica de la función f en el punto $(2,3)$ como se observa a continuación.

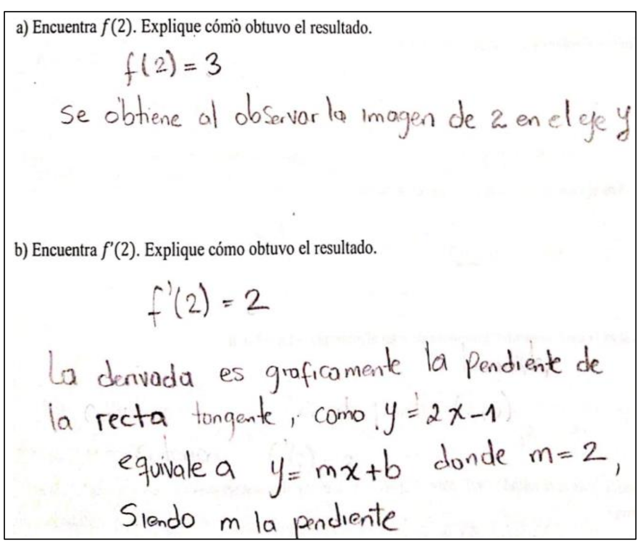


1 2 3

a) Encuentra $f(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.

b) Encuentra $f'(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.

Tabla 17. *Respuestas de los profesores que poseen la concepción de Acción en el registro gráfico*

Docentes	Respuestas	Estructura mental
D1, D2, D3, D4, D5, D8, D9, D10, D11, D13, D14 y D15	 a) Encuentra $f(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado. $f(2) = 3$ Se obtiene al observar la imagen de 2 en el eje y b) Encuentra $f'(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado. $f'(2) = 2$ La derivada es gráficamente la pendiente de la recta tangente, como $y = 2x-1$ equivale a $y = mx+b$ donde $m = 2$, siendo m la pendiente ***Figura 42.*** *Respuesta del profesor D2*	Como Acción los profesores identifican la línea tangente en el punto $x = 2$ y calculan su pendiente, de tal manera que a la derivada la identifican como la pendiente de la recta tangente. Hay al menos dos formas para que los profesores hayan construido esta Acción. Pudieron simplemente haber memorizado una regla: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la línea tangente al gráfico en ese

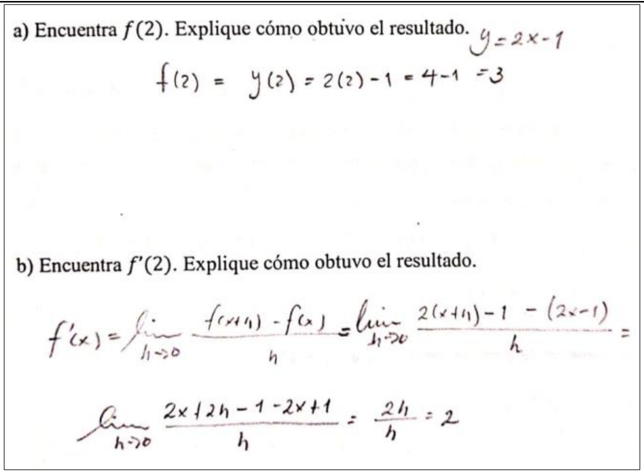
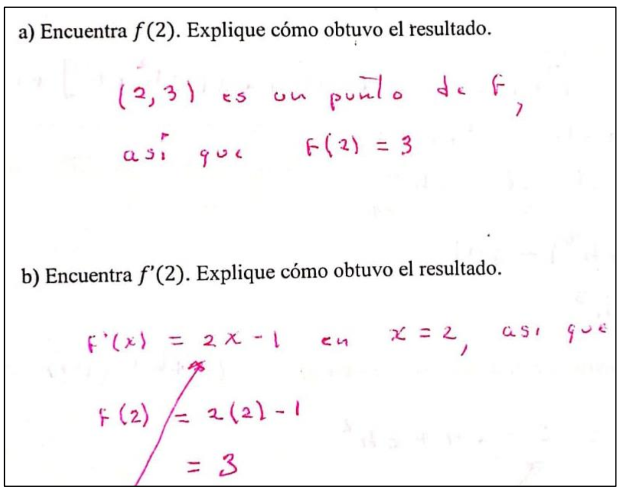
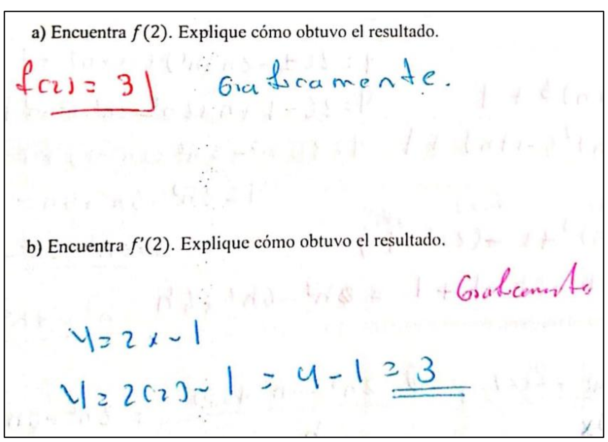
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
a) Encuentra $f(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado. $y=2x-1$
$f(2) = y(2) = 2(2)-1 = 4-1 = 3$
b) Encuentra $f'(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.
$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h}=$
$\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-1-2x+1}{h}=\frac{2h}{h}=2$
Figura 43. Respuesta del profesor D5</td>
<td>punto o verlo como el límite de los acordes de la curva $y = f(x)$, como en los puntos 1a-3a de la descomposición genética. A partir de esta Acción, el alumno construirá la estructura mental Proceso de la función derivada.</td>
</tr>
</table>

Tabla 18. *Respuestas de los profesores que no tienen una concepción de Acción de acuerdo a la DG*

<table>
<tr>
<td>D6 y D7</td>
<td>
a) Encuentra $f(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.
(2, 3) es un punto de f, así que $F(2) = 3$
b) Encuentra $f'(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.
$F'(x) = 2x-1$ en $x=2$, así que
$F(2) = 2(2)-1$
$= 3$
Figura 44. Respuesta del profesor D6

a) Encuentra $f(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.
$f(2) = 3$ Graficamente.
b) Encuentra $f'(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.
Graficamente
$y = 2x-1$
$y = 2(2)-1 = 4-1 = 3$
Figura 45. Respuesta del profesor D7</td>
<td>Como Acción, los profesores identifican gráficamente la función en el punto $x = 2$. Sin embargo, al tratar de encontrar la derivada de la función en ese punto, los profesores toman la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica en el punto $x = 2$ y la evalúan en ese punto, dando ese valor como la derivada de la función.</td>
</tr>
</table>

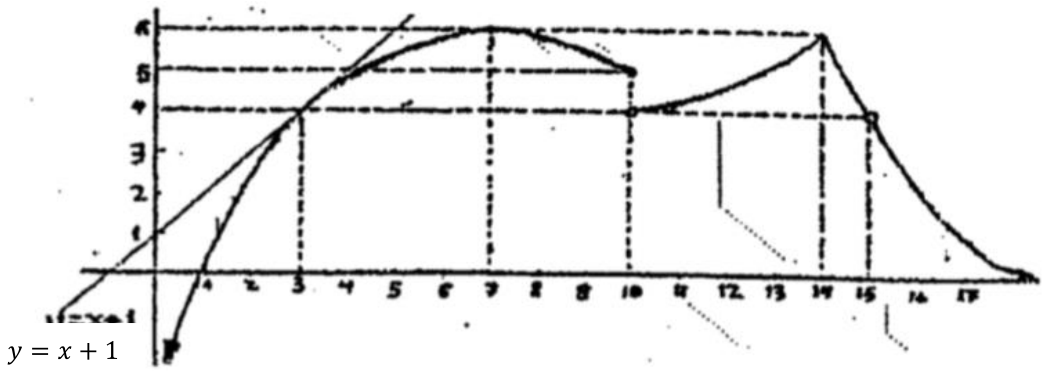
Con el análisis de sus respuestas concluimos que:

- Los profesores que logran alcanzar la estructura mental de Acción en el registro gráfico, a través de la interpretación gráfica de la derivada en un punto, son D1, D2, D3, D4, D5, D8, D9, D10, D11, D13, D14, D15.

- Comparando las respuestas que dieron los docentes en la actividad de diagnóstico AD3 se observa cómo estos lograron reconstruir la concepción que tenían de la representación gráfica de derivada en un punto. Es decir, en la actividad AD3 los profesores D4, D5, D6, D10 D11, D12 tenían la concepción Acción. Después de trabajar de forma grupal observando y reflexionando sobre las acciones que se debían realizar para resolver la actividad, los docentes que lograron reconstruir la concepción que tenían de derivada son D1, D2, D3, D5, D8, D9, D13, D14 y D15, ya que lograron identificar la derivada de la función como la pendiente de la recta tangente en el punto dado.

- El docente D6 que poseía la concepción de Acción en la actividad AD3, había logrado establecer que la derivada de la función en el punto $x = 2$ era la pendiente de la recta tangente en el gráfico. Sin embargo, en esta actividad se puede observar que existe un retroceso en cuanto a las estructuras mentales construidas por el docente, ya que no logra dar indicios de establecer que la derivada de la función es la pendiente de la recta tangente en un punto.

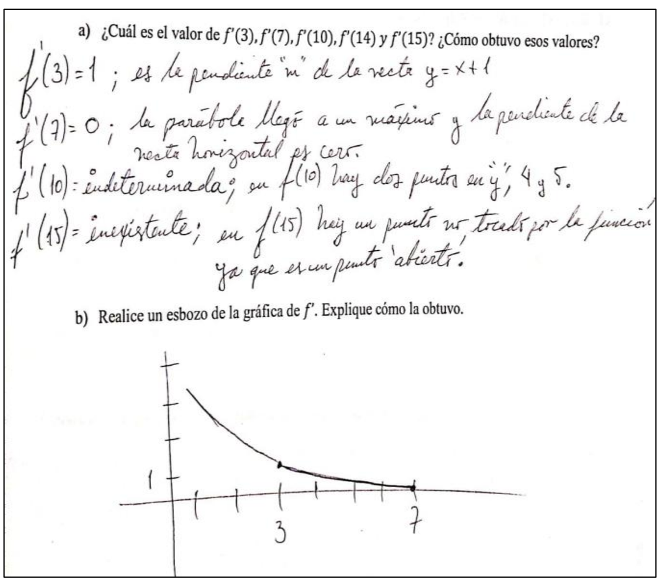
Actividad AE5: Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de la parábola.



a) ¿Cuál es el valor de $f'(3), f'(7), f'(10), f'(14)\ y\ f'(15)$? ¿Cómo obtuvo esos valores?

b) Realice un esbozo de la gráfica de f'. Explique cómo obtuvo la gráfica.

Tabla 19. *Respuestas de los profesores que poseen la concepción Proceso en el registro gráfico de derivada*

Profesores	**Respuestas**	**Estructura mental**
D2, D6, D8, D11, D13 y D15	 ***Figura 46.*** *Respuesta del profesor D8*	Los docentes realizan la Acción de evaluar la derivada en puntos del dominio de la función f, como Acción ingresan un valor de entrada en f' y obtienen un valor de salida en la imagen de f' . Como Proceso los profesores evalúan la función f' tomando como entrada un punto x del dominio de f y produce el valor de salida $f'(x)$ para cualquier x en el dominio de f' determinando el

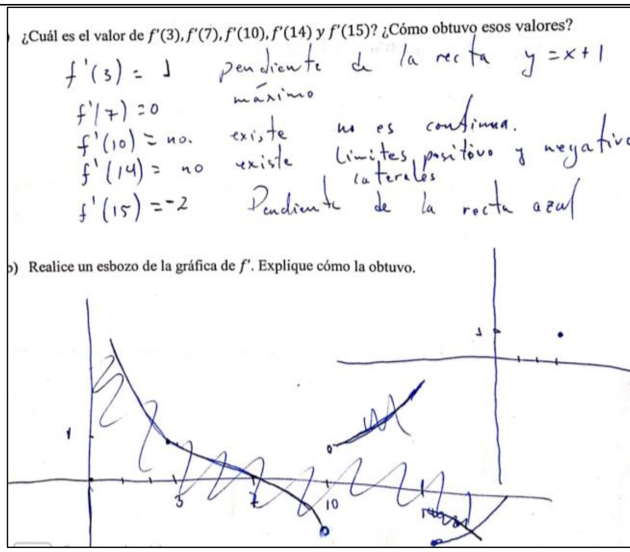
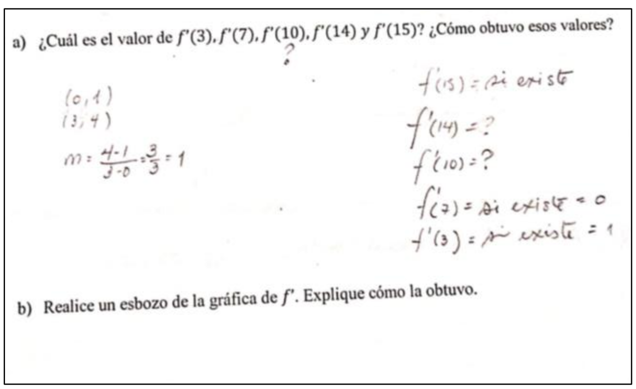
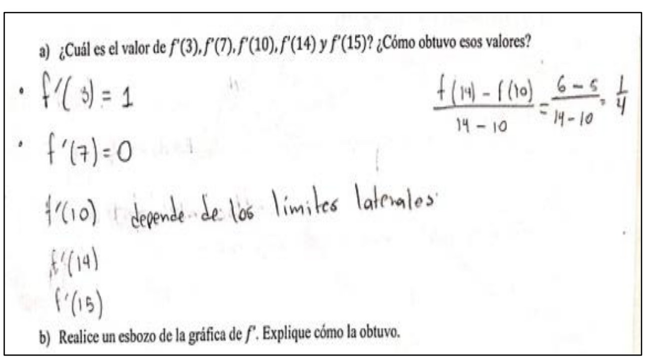
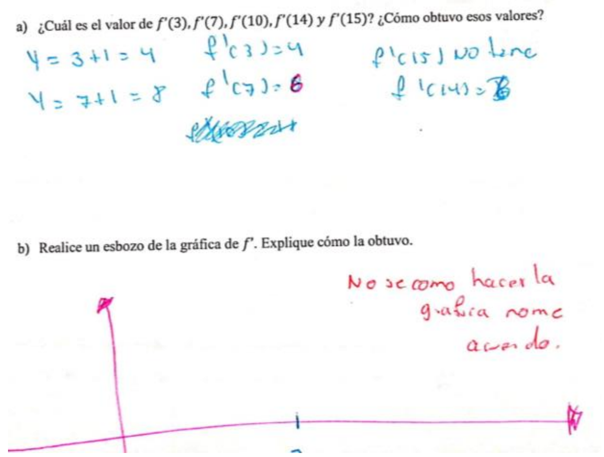
	 ***Figura 47.*** *Respuesta del profesor D11*	comportamiento que tendrá la función f' gráficamente.

Tabla 20. *Respuestas de los profesores que no muestran indicios de poseer la concepción Proceso en el registro gráfico de derivada*

D1, D3, D4, D5, D7, D9, D10 y D14	 ***Figura 48**. Respuesta del profesor D5*  ***Figura 49.*** *Respuesta del profesor D1*	Como Acción, los profesores evalúan la derivada en puntos del dominio de f, pero algunas de sus afirmaciones son incorrectas, tienen dificultades al obtener la imagen de f'. Las dificultades se presentan en puntos donde la función no está definida, puntos cúspide y puntos donde la función no es continua. Además, no realizan el bosquejo de la gráfica de la derivada de la función.

	 a) ¿Cuál es el valor de $f'(3), f'(7), f'(10), f'(14)$ y $f'(15)$? ¿Cómo obtuvo esos valores? y = 3+1 = 4 f'(3)=4 f'(15) no tiene y = 7+1 = 8 f'(7)=6 f'(14)=8 b) Realice un esbozo de la gráfica de f'. Explique cómo la obtuvo. No se como hacer la grafica no me acuerdo. ***Figura 50.*** *Respuesta del profesor D7*	

El análisis de sus respuestas nos llevó a las siguientes conclusiones:

- Los profesores D2, D8, D11, D13 y D15 logran alcanzar la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada.
- Aunque esta actividad no está directamente relacionada con la actividad de diagnóstico AD6, debido a que en esta actividad no se pide identificar cuál es la gráfica de la función f y la gráfica de f', existen puntos en común que evalúan las dos actividades, por ejemplo, propiedades de la función derivada como puntos donde la derivada de la función es cero ($f'(x) = 0$), valores donde la derivada es positiva o negativa, puntos de inflexión, etcétera. En este sentido los profesores que lograron reconstruir el conocimiento que tenían de estas propiedades son D2, D8, D11, D13 y D15. Recordemos que en la actividad de diagnóstico el único profesor que había alcanzado la estructura mental de Proceso fue D6.

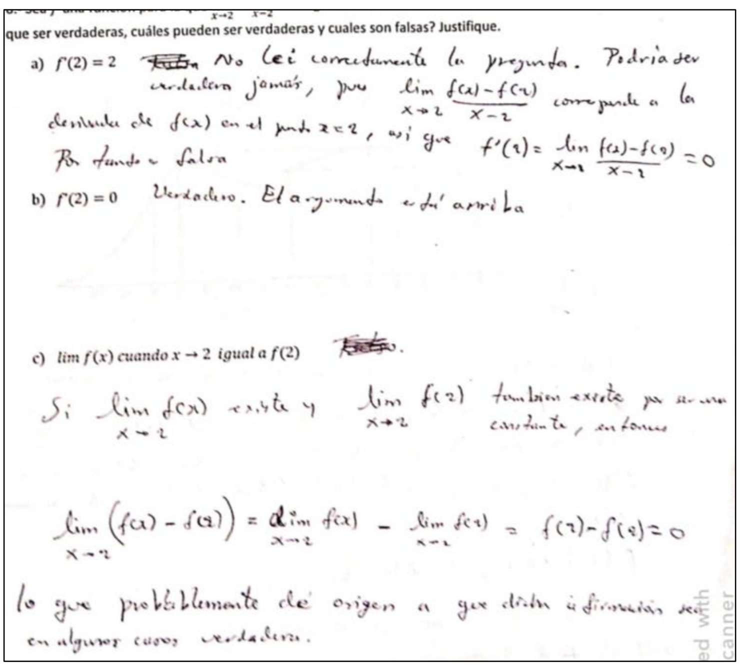
Actividad AE6: Sea f una función para la que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ es igual a 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuales son falsas? Justifique.

a) $f'(2) = 2$

b) $f'(2) = 0$

c) $lim\ f(x)\ cuando\ x \to 2\ \ igual\ a\ f(2)$

Tabla 21. *Respuestas de los profesores que muestran indicios de tener la concepción Objeto de derivada*

Profesores	Respuestas	Estructura mental
D2, D6, D11 y D15	 que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuales son falsas? Justifique. a) $f'(2) = 2$ ~~[illegible]~~ No leí correctamente la pregunta. Podría ser verdadero jamás, pues $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ corresponde a la derivada de $f(x)$ en el punto $x=2$, así que $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$ Por tanto es falsa b) $f'(2) = 0$ Verdadero. El argumento está arriba c) $lim\ f(x)\ cuando\ x \to 2\ \ igual\ a\ f(2)$ ~~[illegible]~~. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to 2} f(2)$ también existe por ser una constante, entonces $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-f(2)\right) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) - \lim\limits_{x\to 2} f(2) = f(2)-f(2)=0$ lo que probablemente dé origen a que dicha afirmación sea en algunos casos verdadera. ***Figura 51.*** *Respuesta del profesor D15*	El objetivo de la actividad es evaluar la estructura mental de Objeto. Las respuestas de los profesores muestran tener indicios de que estos poseen esta estructura mental, ya que, como lo marca la descomposición genética en el punto **8,** los profesores logran producir la función f' como un Objeto. Es decir, sin la necesidad de realizar el cálculo de

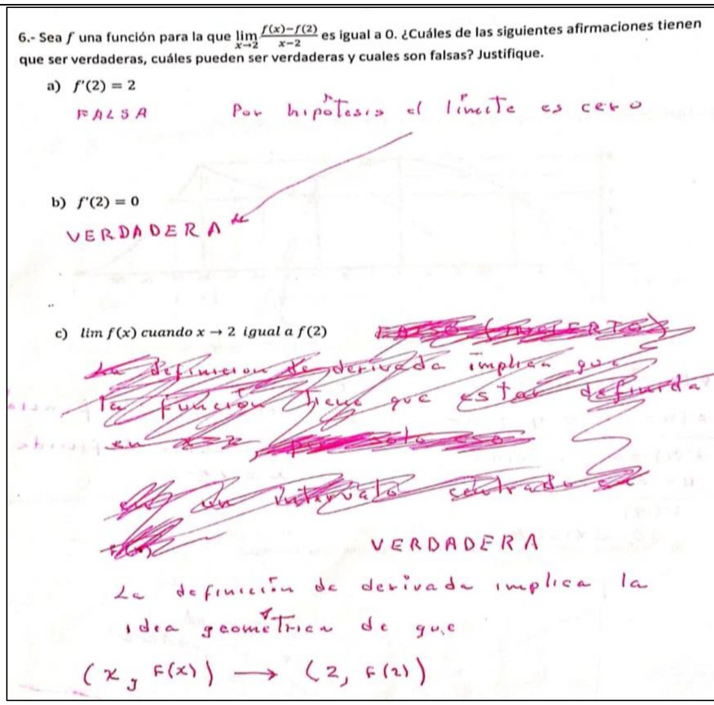
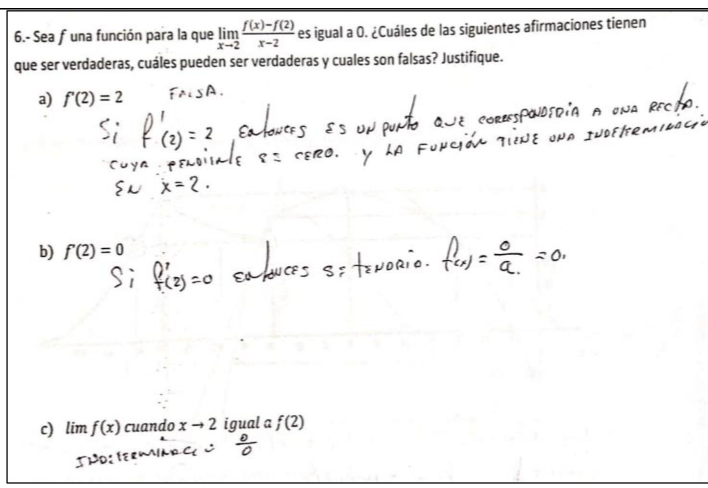
	 6.- Sea f una función para la que $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ es igual a 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuales son falsas? Justifique. a) $f'(2)=2$ FALSA Por hipótesis el límite es cero b) $f'(2)=0$ VERDADERA c) $lim\ f(x)$ cuando $x \to 2$ igual a $f(2)$ ~~FALSO (INCIERTO)~~ ~~La definición de derivada implica que la función tiene que estar definida en x=2 y no solo eso en un intervalo cerrado de f(x)~~ VERDADERA La definición de derivada implica la idea geométrica de que (x, F(x)) ⟶ (2, F(2)) ***Figura 52.*** *Respuesta del profesor D7*	los cocientes de diferencias, los profesores logran identificar cuándo la derivada existe y cuál es el valor de la derivada en un punto.

Tabla 22. *Respuestas de los profesores que no poseen la concepción Objeto de derivada*

Profesores	Respuestas	Estructura mental
D1, D3, D4, D5, D7, D8, D9, D13, D14	 6.- Sea f una función para la que $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ es igual a 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuales son falsas? Justifique. a) $f'(2)=2$ FALSA. Si $f'(2)=2$ entonces es un punto que correspondería a una recta cuya pendiente es cero. y la función tiene una indeterminación en x=2. b) $f'(2)=0$ Si $f'(2)=0$ entonces si [illegible]. $f(x)=\frac{0}{a}=0$. c) $lim\ f(x)$ cuando $x \to 2$ igual a $f(2)$ Indeterminación = $\frac{0}{0}$ ***Figura 53.*** *Respuesta del profesor D3*	Aunque algunas de sus respuestas son correctas, no muestran indicios de poseer la concepción de Objeto de derivada debido a la falta de información en la justificación de sus afirmaciones.

El análisis de sus respuestas nos llevó a concluir lo siguiente:

- Los profesores D2, D6, D11 y D15 muestran indicios de poseer la concepción Objeto de derivada.
- Los profesores D1, D3, D4, D5, D7, D8, D9, D13, D14, aunque algunas de sus respuestas son correctas, no dan argumentos que las justifiquen.
- Con relación a las nuevas estructuras mentales que lograron construir los profesores, en las actividades de diagnóstico no hay actividades que estuvieran enfocadas en analizar esta estructura mental, por lo que no podemos concluir si se logró una reconstrucción de su pensamiento.

En resumen, se presentó el análisis de algunas de las respuestas más significativas que dieron los profesores a las actividades que otros investigadores han utilizado para analizar las concepciones que poseen estudiantes de nivel medio superior y superior del concepto derivada (actividades de diagnóstico) y el análisis de las respuestas que dieron a las actividades que evaluaban las nuevas estructuras mentales construidas después de haber trabajado y reflexionado de forma grupal cada una de las actividades de diagnóstico. En la tabla 23 presentamos los resultados generales del análisis realizado.

Tabla 23. *Número de profesores que poseen determinadas estructuras mentales*

Resultados del diagnóstico	Resultados de las actividades de evaluación de las nuevas estructuras mentales
12 profesores poseen la estructura mental de Acción en el registro gráfico de derivada.	14 profesores lograron alcanzar la estructura mental de Acción en el registro gráfico de derivada.
5 profesores poseen la estructura mental de Acción en el registro numérico de derivada.	10 profesores lograron alcanzar la estructura mental de Acción en el registro numérico de derivada.

5 profesores poseen la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada.	12 profesores lograron alcanzar la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada.
3 profesores poseen la estructura mental de Proceso en el registro numérico de derivada.	7 profesores lograron alcanzar la estructura mental de Proceso en el registro numérico de derivada.

CONCLUSIONES

Las respuestas a las actividades extraídas de otras investigaciones que tenían el objetivo de evaluar las concepciones que tenían de derivada estudiantes de nivel medio superior y superior, nos permitieron observar las estructuras mentales que poseía un grupo de profesores de este nivel. Después de trabajar un conjunto de actividades relacionadas con la derivada, bajo el esquema que propone la teoría APOE, es decir, bajo el ciclo de trabajo ACE, se logró que los profesores analizaran y reflexionaran y que, de esta forma, lograran reconstruir las concepciones que tenían de derivada.

Una de las primeras aportaciones de este trabajo fue develar las estructuras mentales que tenían los profesores de nivel medio superior antes del curso.

- La mayoría de los profesores tenía la estructura mental de Acción en el registro gráfico de derivada, es decir, lograban producir la recta secante formada por dos puntos en el gráfico.
- Cinco profesores poseían la estructura mental de Acción en el registro numérico de derivada, esto quiere decir lograban realizar el cálculo de los cocientes de diferencias con valores donde se quiere analizar si la derivada existe.
- Cinco profesores poseían la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada, es decir, estos lograban concebir a la línea tangente como la posición límite de las líneas secantes.
- Solo tres profesores poseían la estructura mental de Proceso en el registro numérico de derivada, es decir, estos lograban producir la razón de cambio de una variable con respecto a otra a través del cálculo de los cocientes de diferencias cuando el incremento en el dominio tiende a cero.

Cabe resaltar que los análisis que han realizado otros investigadores acerca de la concepción que poseen los alumnos de bachillerato, mencionan que la mayoría de ellos poseen las estructuras más básicas del concepto derivada, es decir, poseen la estructura de Acción en el registro gráfico de derivada, algunos de ellos resaltan que los estudiantes no poseen los conocimientos previos al concepto de derivada, es decir, no han construido la concepción Objeto de límite y función.

Comparando estos resultados con lo que obtuvimos en nuestro análisis, podemos concluir que los profesores logran alcanzar estructuras más complejas como son Acción y Proceso en el registro gráfico y numérico de derivada.

Otra de las aportaciones que realiza este trabajo es el análisis de las nuevas estructuras mentales alcanzadas por los docentes después de haber trabajado bajo el esquema el esquema que ofrece la teoría APOE, concluimos lo siguiente:

- Se logró una reconstrucción del conocimiento del objeto matemático derivada y esto se vio reflejado en cada una de las actividades de evaluación, en las cuales, profesores que no tenían la concepción de Proceso en las actividades de diagnóstico ahora alcanzaban dichas concepciones.
- La mayoría de los profesores logró la estructura mental de Proceso en el registro gráfico de derivada, es decir lograron concebir a la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes.
- Se logró una reconstrucción del pensamiento matemático en el registro numérico de derivada, ya que en la pruba diagnóstico solo 3 profesores tenían la estructura mental de Proceso en el registro numérico de derivada, y en la actividades que evaluaban las nuevas concepciones mentales pasaron a ser 7.

En cuanto a las aportaciones que hace este trabajo a la sociedad y a la actividad académica, es útil para profesores que laboran en el nivel medio superior y superior, y para investigadores en el área de Educación Matemática. Para los profesores es una ventana hacia el cómo se desarrolla el pensamiento matemático de un sujeto y cuáles son las herramientas teóricas que permiten desarrollar y reconstruir el conocimiento matemático. Para los investigadores, este trabajo es una aportación a las investigaciones del pensamiento matemático avanzado, pero de los profesores.

ESTUDIOS FUTUROS

Creemos que los resultados proporcionados por el análisis de las construcciones mentales que los profesores poseen del concepto derivada sugieren que nuestro tratamiento de instrucción puede ser mucho más efectivo que el de un curso tradicional de cálculo. En futuros estudios, planeamos continuar este esfuerzo de investigación estudiando la comprensión de otros profesores en un intento de refinar y mejorar aún más la descomposición genética refinada del concepto derivada que se utilizó aquí y, por lo tanto, posiblemente mejorar el tratamiento de instrucción.

Aunque en este trabajo hacemos mención que los registros de representación semiótica son importantes para la comprensión de un concepto matemático y que además existen determinados registros de representación para el concepto de derivada, de los cuales hacemos uso de dos de ellos, deseamos incorporar estos registros a la descomposición genética refinada de derivada que pretendemos mejorar, como ya se expuso anteriormente, y de esta manera aportar a la consolidación de dos teorías de la Educación Matemática.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory a framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México D.C.: Grupo editorial Iberoamérica, pp. 97-140.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), pp. 399-431.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal of Research in Mathematics*, 31(5), 557-578.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Borji, V., & Alamolhodaei, H. (2016). *Students' understanding of the derivative concept based on APOS framework*. Paper presented in the 14th Iranian Mathematics Education Conference (IMEC14), Shiraz, Iran.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301-2315.

Clark, J.M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D.J., John, D., Tolias, G., & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior,* 14(4), pp. 345- 364.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hill (Ed.), *Investigaciones en Matemáticas Educativas II,* (pp.257-272). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada*. *El futuro del cálculo infinitesimal*. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R.(coordinador). Grupo Editorial Iberoamérica. México, D.F., 155-181.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In *Epistemological foundations of mathematical experience,* (pp. 160-202). Springer, New York, NY.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving,* (pp. 22-247). Hillsdale, NJ: Erslbaum.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Mathematica*, 8(3), pp. 24-41.

Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In Tall D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 95-126). Springer, Dordrecht.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (Eds.) *The teaching and learning of mathematics at university level*, (pp. 275-282). Springer, Dordrecht.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005a). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005b). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253-266.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173–201). México. Cinvestav.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(2), 103-131.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In E. Dubinsky y J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, (pp. 19-26). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques: aplicacions a les derivades*. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 21-40.

Font, V., Godino, J., y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics*, 27(2), 3-9.

García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(5), 1023–1045.

Gutiérrez, L., y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto de derivada. *Gestión y Gerencia*, 6 (3), 104-122.

Ortega, L., Guzmán, I. y Mena, A. (2009). ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de Cálculo en la Universidad? En Pilar Orús, Larisa Zamora y Pablo Gregori (Eds.), *Teoría y Aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo, Innovación Digital Castelló*, (pp. 311-328). Santiago de Cuba.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250.

Piaget, J. (1970). *Estructuralism* (C. Mashler, Trans.), New York: Basic Books. (Original work pubished 1968).

Piaget, J., & García, R. (1983). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Sahin, Z., Erbas, A. K., & Yenmez, A. A. (2015). Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(1), 177-188.

Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto)*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 24 (1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G. Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(6), 1305–1329.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 497-508). Jaén: SEIEM

Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. *MAA notes*, 19-28.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidakovic, D. (2008). A Search for a Constructivist Approach for Understanding the Uncountable Set. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93-125.

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 157-176.

Trigueros, M., & Martínez, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio. Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de universidad. *Boletín de Educación Matemática*, 28(48), 449-468.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M., & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS*, 51(7), 741-750.

ANEXO 1. Prueba diagnóstico

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

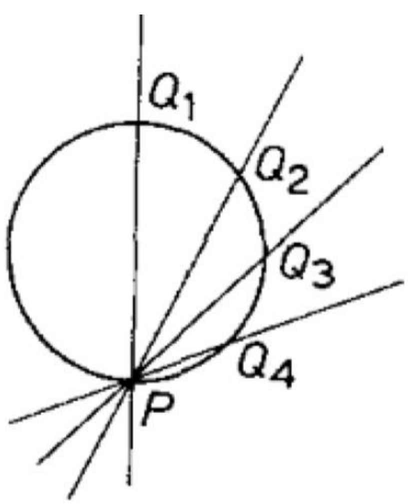
EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA

Nombre:____

Los problemas siguientes tienen la finalidad de evaluar las construcciones mentales que ha desarrollado hasta este momento relacionadas con del concepto de derivada de una función. Por favor responda lo más claro posible y escriba con bolígrafo tinta negra. En la exposición de resultados su nombre será omitido. Muchas gracias por su participación.

1.- ¿Qué es la derivada? Defínelo o explícalo como desees

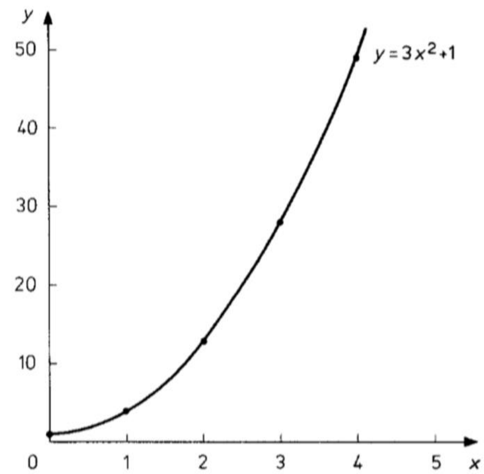
2.- El diagrama muestra un círculo y un punto fijo P en el círculo. Las líneas PQ se dibujan desde P hasta los puntos Q en el círculo y se extienden en ambas direcciones. Tales líneas a través de un círculo se llaman secantes, y algunos ejemplos se muestran en el diagrama.



a) ¿Cuántas secantes diferentes se podrían dibujar además de los que ya están en el diagrama? justifique.

(b) A medida que Q se acerca más y más a P, ¿qué le sucede a la secante?

3.- El siguiente gráfico representa la función $y = 3x^2 + 1$, de $x = 0$ a $x = 4$.



a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2$?

b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 2 + h$?

c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de 2 a $2 + h$?

d) ¿Cuál es la razón de cambio de y en el intervalo 2 a $2 + h$?

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la razón de cambio de y en x = 2 ½ ? ¿Si es así, cómo?

4.- De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

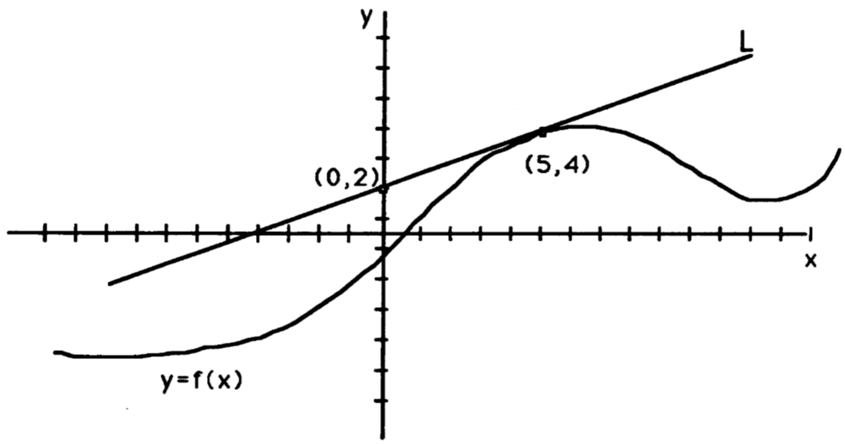
a) Usa la siguiente tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 2$. ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 2$?

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.6101	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 1$?

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

5.- La recta L es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(5,4)$

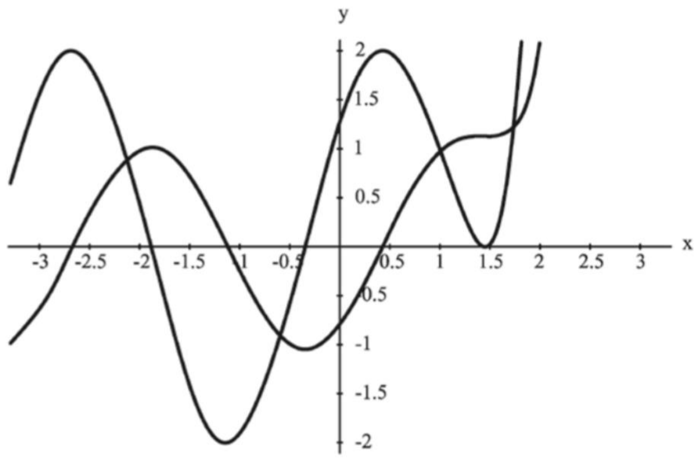


a) Encuentra $f(5)$. Explica y justifica cada paso.

b) Encuentra $f'(5)$. Explica y justifica cada paso.

c) ¿Cuál es el valor de la función $f(x)$ en $x = 5.08$? Sea lo más exacto posible y explique ¿cómo lo resolviste?

6.- Compara las gráficas de las dos funciones de la siguiente figura y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra. Argumenta la respuesta.



7.- Dibuje un gráfico de la función h que satisfaga las siguientes condiciones:

$$h\ es\ continua$$

$$h(0) = 2, \qquad h'(-2) = h'(3) = 0, \qquad y\ \lim_{x\to 0} h'(x) = \infty$$

$$h'(x) > 0\ \ cuando\ -4 < x < -2, \qquad y\ cuando\ \ -2 < x < 3$$

$$h'(x) < 0\ \ cuando\ x < -4, \qquad y\ cuando\ \ x > 3$$

$$h''(x) < 0\ \ cuando\ x < -4, \qquad cuando -4 < x < -2\ y\ cuando\ 0 < x < 5$$

$$h''(x) > 0\ \ cuando\ -2 < x < 0, \qquad y\ cuando\ x > 5$$

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \infty\ \ y\ \ \lim_{x\to \infty} h(x) = -2$$

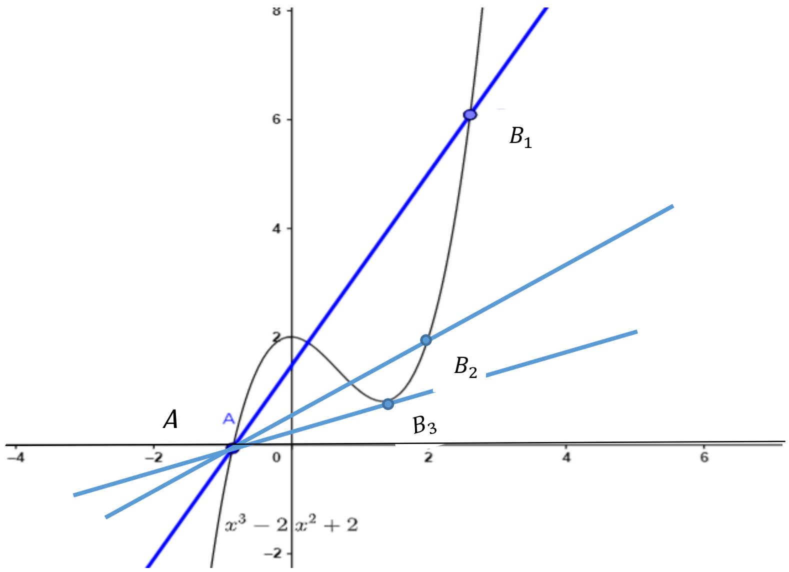
ANEXO 2. Actividades que evalúan las nuevas estructuras mentales

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTIVIDADES BASADAS EN LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE DERIVADA

Nombre:____

1.- La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Las líneas AB se dibujan desde A hasta los puntos *Bi* (i=1,2,3) en la gráfica. Tales líneas se llaman secantes, y algunos ejemplos se muestran en la siguiente gráfica.



a) ¿Cuántas rectas secantes diferentes se podrían dibujar además de los que ya están en el diagrama? justifique.

b) A medida que *Bi* {i=1, 2, 3}se acerca más y más a *A*, ¿qué le sucede a la secante?

2.- Dadas las funciones f y g conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

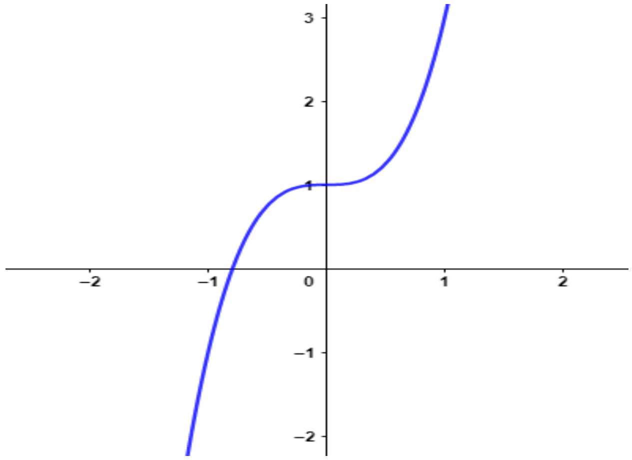
a) Usa la siguiente tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x = 0$. ¿Crees que $f(x)$ es derivable en $x = 0$?

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	…	0	…	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	1.101	1.9101	1.99101	1.999101	…	2	…	1.999101	1.99101	1.9101	1.101

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿Crees que $g(x)$ es derivable en $x = 3$?

x	2.01	2.001	2.9999	2.99999	…	3	…	3.00101	3.0201	3.301	3.401
g(x)	2.01	2.001	2.9999	2.99999	…	3	…	3.00101	3.0201	3.301	3.401

3.- El siguiente gráfico representa la función $y = 2x^3 + 1$.



a) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1$?

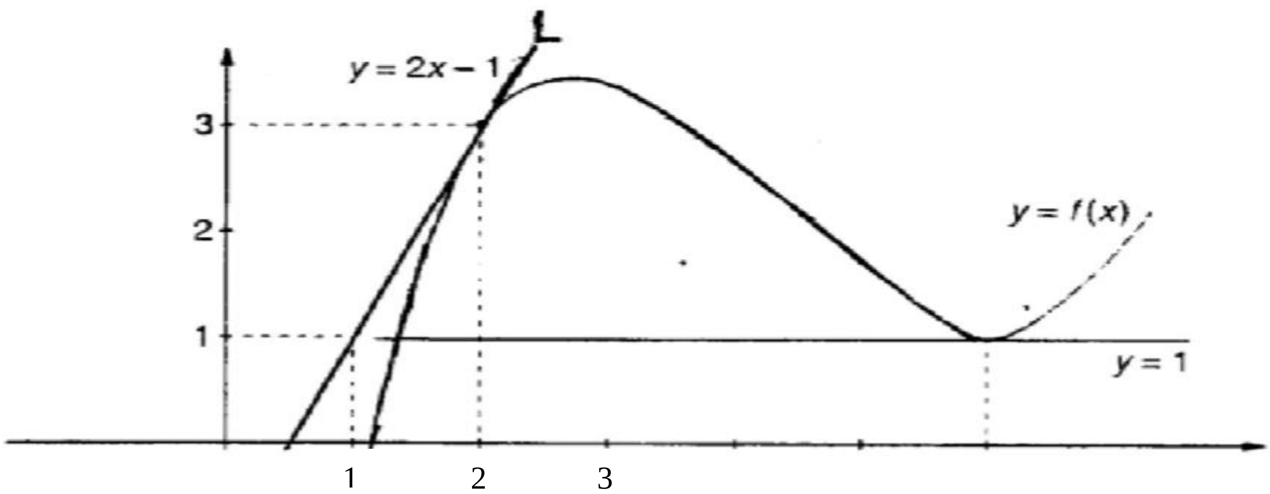
b) ¿Cuál es el valor de y cuando $x = -1 + h$?

c) ¿Cuál es el cambio en y cuando x incrementa de -1 a $-1 + h$?

d) ¿Cuál es la tasa de cambio de y en el intervalo -1 a $-1 + h$?

e) ¿Puedes usar el resultado de d) para obtener la tasa de cambio de y en $x = -0.4$? ¿Si es así, cómo?

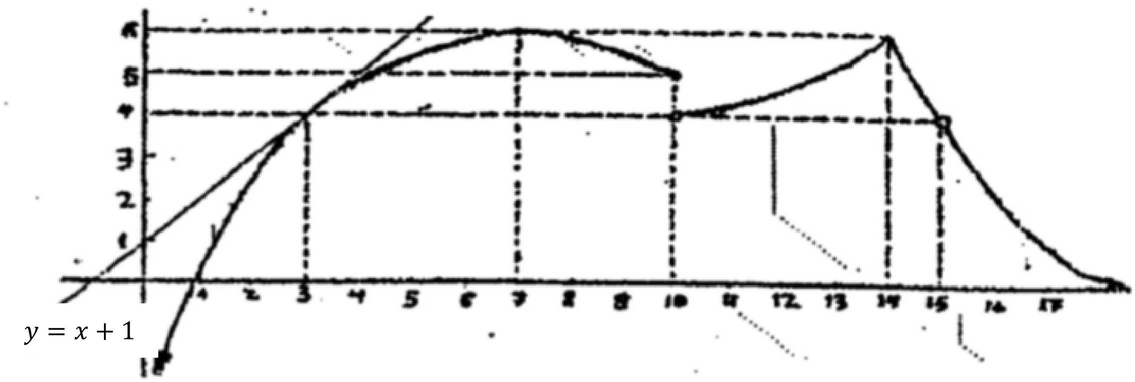
4.- La recta L es tangente a la gráfica de la función f en el punto $(2,3)$ como se observa a continuación.



a) Encuentra $f(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.

b) Encuentra $f'(2)$. Explique cómo obtuvo el resultado.

5.- Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de la parábola.



c) ¿Cuál es el valor de $f'(3), f'(7), f'(10), f'(14)$ y $f'(15)$? ¿Cómo obtuvo esos valores?

d) Realice un esbozo de la gráfica de f'. Explique cómo obtuvo la gráfica.

6.- Sea f una función para la que $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ es igual a 0. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuales son falsas? Justifique.

d) $f'(2) = 2$

e) $f'(2) = 0$

f) $lim\ f(x)\ cuando\ x \to 2\ \ igual\ a\ f(2)$