

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



Reducción del sistema dinámico lineal y disipativo al sistema no lineal con atractor periódico y su aplicación para sistemas biestables

Tesis para obtener el grado de Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Brandon Francisco Flores

Director de tesis:

Dr. Vladimir Aleksandrov (FCFM - BUAP)

Codirectora de tesis:

Dra. Laura Cruzado Lima (FCFM - BUAP)

08 de Diciembre de 2023

Dedicatoria

Me gustaría dedicar este trabajo a mi familia, mis padres, hermanos y a mi novia.

Agradecimientos

Primero que nada quisiera agradecer a mi director de tesis, Dr. Vladimir Aleksandrov por formular el problema "Reducción del sistema dinámico lineal y disipativo al sistema no lineal con atractor periódico y su aplicación para sistemas biestables", por permitirme trabajar bajo su dirección, por su apoyo, consejos y por alentarme a trabajar en este tema.

Agradezco a mi codirectora de tesis, Dra. Laura Cruzado Lima por su gran apoyo, consejos, paciencia, por los conocimientos adquiridos bajo su dirección.

Agradezco a mis sinodales: Dra. Beatriz Bonilla Capilla, Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias, Dr. Jorge Velázquez Castro por el tiempo que dedicaron en leer este trabajo, les agradezco sus comentarios y observaciones.

Les agradezco a mis padres Florencio Francisco Dominga e Isabel Flores Serrano por su apoyo incondicional, por el sustento económico a través de estos 5 años, por sus palabras de aliento y apoyo, por siempre creer en mí, han sido la razón por la cual no desistí de terminar la carrera.

Agradezco a mis hermanos Adolfo Francisco Flores, Ilse Francisco Flores, María Isabel Francisco Flores y María del Pilar Francisco Flores por siempre apoyarme en cuanto han podido, porque me ayudaron a enfocarme en mis estudios.

Agradezco a María Suárez Castillo por siempre confiar y creer en mí.

Quiero agradecer y hacer mención de amigos como Erick, Jorge, Ezequiel, Marco, Nahum, Juan, Hugo, Ximena, Rafael, César, Mariana, Alexis, Salvador, Zaira y Daniela por siempre apoyarnos y animarnos a seguir adelante.

Agradezco enormemente a Dios porque me dio la capacidad para poder entender las matemáticas, por darme la fortaleza para poder seguir a pesar de las circunstancias.

Índice general

Introducción	1
1. Teoría general	3
1.1. Estabilidad por Lyapunov	3
1.2. Estabilidad por Poincaré	6
1.3. Controlabilidad: definición y sus propiedades	8
1.3.1. Estructura del control óptimo.	10
1.4. Principio del Máximo de Pontryagin	11
1.5. Principio de contracción de Banach	12
1.6. Planteamiento para sistemas biestables	12
2. Planteamiento y solución del problema de reducción	17
2.1. Construcción del conjunto de accesibilidad para el sistema lineal y controlable	17
3. Aplicación para realizar la transición de la región de atracción del foco estable a la región de atracción del atractor periódico con ayuda de una perturbación del modelo matemático H-H con modificaciones de Soto-Aleksandrov	29
3.1. Modelo modificado y simplificado de H-H con modificaciones de Soto-Aleksandrov	30
3.1.1. Análisis cualitativo.	32
3.2. Construcción del proceso de transición en el modelo modificado y simplificado de Soto-Aleksandrov	36
Conclusión	41
A. Códigos en Python	43
Bibliografía	51

Introducción

Los conjuntos de accesibilidad juegan un papel fundamental en el control óptimo. El análisis de conjuntos accesibles permite resolver una amplia clase de problemas relacionados con el estudio de modelos dinámicos en diversos campos de las ciencias naturales. Específicamente, dicho análisis es ampliamente utilizado en la ciencia espacial [31], construcción de pilotos automáticos automotrices [11] o redes neuronales [43]. Por lo tanto, investigar y construir conjuntos de accesibilidad de sistemas dinámicos es un problema de gran importancia hoy en día [23].

En trabajos de Aleksandrov, Konovalenko y Tikhonova [4, 38], se resuelve el problema de transición directa (de la región de atracción del atractor puntual a la región de atracción del atractor periódico) del modelo de Hodgkin-Huxley con modificaciones de Soto-Aleksandrov, bajo la acción de una pequeña perturbación. Luego se resuelve el problema de transición inversa (de la región de atracción del atractor periódico a la región de atracción del atractor puntual). Konovalenko [24] durante el análisis de sistemas biestables, plantea el problema de hacer una transición de la región de atracción de un atractor a la región de atracción de otro atractor bajo la acción de una pequeña perturbación permanente. Se proporciona la solución específica de dominio para el problema biológico de la estimulación galvánica de los receptores mecánicos del aparato vestibular humano.

Cruzado [2] realizó problemas de transición desde un punto de vista ecológico, se aplicó para dar estrategias de control para mitigar el crecimiento de plantas hemiparásitas. Se muestra la posibilidad de resolver el problema de la transición entre un atractor periódico y uno puntual en el modelo biestable de Rosenzweig-MacArthur con modificaciones para la dinámica de las plantas huésped y sus hospederas (plantas parásitas de raíz).

Zhermolenko [45] desarrolla el método de desviaciones extremas para sistemas de segundo orden no homogéneos: primero para sistemas con perturbación externa y luego para sistemas con perturbaciones externas y aditivas-paramétricas. El método de desviaciones extremas resuelve el problema de analizar la precisión de un sistema oscilatorio de segundo orden con una perturbación externa.

Temoltzi [1] expone que el problema de la construcción de auto oscilaciones se resuelve como una síntesis de control para un sistema dinámico en presencia de controles aditivos y paramétricos. En [8] considera el problema de desviación máxima en el caso de un soporte móvil para probar un prototipo de prótesis vestibular, los resultados obtenidos permiten concluir que la información transmitida desde los órganos otolíticos del sistema vestibular humano a los músculos del aparato locomotor es muy importante y mejora la calidad de estabilización de la postura vertical humana.

Simiu [41] nos ofrece la resolución a problemas de transición a través del método clásico de Melnikov que proporciona información sobre el comportamiento de los sistemas planos deterministas que pueden exhibir transiciones y que puede aplicarse en física, ingeniería mecánica, arquitectura naval, resonancia estocástica y neurofisiología.

Todos estos trabajos son interesantes en el sentido de que ofrecen soluciones a problemas de transición y, en particular, [4, 23, 24] nos dan una pauta para realizar el trabajo siguiente.

Esta tesis presenta la reducción del sistema dinámico lineal, disipativo y controlable al sistema no lineal, autónomo y auto oscilante con atractor periódico y su aplicación para sistemas biestables, en concreto, el

modelo matemático de Hodgkin-Huxley con modificaciones y simplificación (a sistema de orden 2) de Soto-Aleksandrov, en el cual se realiza una transición directa. La tesis se divide en tres capítulos constituidos de la siguiente manera:

El Capítulo 1 ofrece una breve descripción de la teoría de estabilidad por Lyapunov (estabilidad puntual) y estabilidad por Poincaré (estabilidad orbital); teoría de controlabilidad (definición y propiedades) para sistemas lineales; el Principio del Máximo de Pontryagin uno de los resultados más significativos, que permite el diseño constructivo de procesos controlados óptimos; el principio de contracción de Banach (para asegurar la convergencia de la sucesión de amplitudes) y el planteamiento para sistemas biestables, teoría que permite realizar el problema de transición directa.

El Capítulo 2 brinda un planteamiento y solución del problema de reducción del sistema dinámico lineal, disipativo y controlable de segundo orden al sistema no lineal con atractor periódico. Utilizando el Principio del Máximo de Pontryagin con el fin de aumentar la amplitud de las oscilaciones y obtener la expresión de la perturbación. Consecuentemente resolviendo el problema de desviación máxima del sistema en tiempo inverso sucesivamente para obtener una sucesión de amplitudes y encontrando el límite de esta sucesión (amplitud de las auto oscilaciones). El ciclo límite de las auto oscilaciones se encuentra resolviendo el problema de desviación máxima en tiempo directo con el fin de obtener un atractor artificial como frontera del conjunto de accesibilidad del sistema lineal controlable. Por último, se demuestra que el ciclo límite con amplitud de las auto oscilaciones es orbitalmente asintóticamente estable.

En el Capítulo 3 se estudia el modelo matemático de Hodgkin-Huxley, modelo de la neurona primaria aferente (bloque de salida del mecanorreceptor vestibular) con modificaciones de Soto-Aleksandrov, el cual, al hacer un análisis cualitativo se obtuvo que es un sistema biestable (atractor puntual que es foco estable y un atractor periódico), la dinámica del modelo se obtuvo por medio de toolbox pplane8 para MATLAB [32], se realizó un programa en Python para obtener las órbitas cerradas en tiempo directo e inverso que se muestra en el Apéndice A. Se usa la teoría del Capítulo 1 y los resultados obtenidos en el Capítulo 2 para resolver el problema de transición directa (transición de la región de atracción del foco estable a la región de atracción del atractor periódico) con ayuda de una perturbación acotada, realizando un programa en Python para obtener los resultados del problema de transición directa que se muestra en el Apéndice A.

Capítulo 1

Teoría general

Se presentan definiciones, teoremas, lemas, corolarios y notas que serán necesarias para resolver problemas teóricos y prácticos, en particular, resolver el problema de reducción en el Capítulo 2 y para resolver el problema de transición directa en el Capítulo 3.

1.1. Estabilidad por Lyapunov

Sea el proceso natural descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (1.1)$$

con condiciones iniciales $y_i(t_0) = y_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Definición 1. La solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1.1) se llama estable, o Lyapunov estable, si para cualquier $\epsilon > 0$ podemos escoger un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier solución $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de ese sistema cuyos valores iniciales satisfacen las desigualdades

$$|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

para todo $t \geq t_0$, las desigualdades

$$|y_i(t) - \phi_i(t)| < \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

son verdaderas; i.e., las soluciones que son cercanas para los valores iniciales siguen siendo cercanas para todo $t \geq t_0$.

Nota 1. Si el sistema (1.1) satisface las condiciones de la teoría sobre la dependencia continua de soluciones sobre los valores iniciales, entonces en la definición de estabilidad se puede escribir $t \geq T \geq t_0$ en lugar de $t \geq t_0$, ya que en virtud de este teorema las soluciones en el intervalo $t_0 \leq t \leq T$ permanecen cercanas para valores iniciales suficientemente cercanos.

Si, dado un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, las desigualdades (1.2) no se cumplen para al menos una solución $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), entonces la solución $\phi_i(t)$ se llama inestable [12].

Definición 2. Si una solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) no solo es estable sino que además satisface la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0,$$

si $|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$ entonces la solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es llamada asintóticamente estable.

Investigar la estabilidad de alguna solución

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

del sistema de ecuaciones (1.1) puede reducirse a la investigación de la estabilidad de una solución trivial: un *punto de equilibrio* ubicado en el origen de coordenadas.

Transformando el sistema de ecuaciones (1.1) a nuevas variables, poniendo

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.3)$$

Las nuevas funciones desconocidas x_i son las desviaciones $y_i - \bar{y}_i(t)$ de las funciones desconocidas anteriores de las funciones $\bar{y}_i(t)$ que definen la solución cuya estabilidad se está probando.

En virtud de (1.3), el sistema (1.1) en nuevas variables toma la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_2(t), \dots, x_n + \bar{y}_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

El punto de equilibrio $x_0 \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1.4) es estable en el sentido de Lyapunov si para cada $\epsilon > 0$ es posible elegir un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$|x_i(t_0)| < \delta(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

se sigue

$$|x_i(t_0)| < \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{para } t \geq T \geq t_0.$$

Teorema 1. (Teorema de estabilidad de Lyapunov): Si existe una función diferenciable $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, denominada *función de Lyapunov*, que satisface las siguientes condiciones en la vecindad del origen de coordenadas:

- $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ y $v = 0$ sólo para $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), la función v tiene un mínimo estricto en el origen.
- $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0$ para $t \geq t_0$.

Entonces el punto de equilibrio $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de el sistema (1.5) es estable.

Teorema 2. (Teorema de Lyapunov sobre estabilidad asintótica): Si existe una función de Lyapunov diferenciable $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisface las siguientes condiciones:

- $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiene un mínimo estricto en el origen: $v(0, 0, \dots, 0) = 0$.
- La derivada de la función v_1 calculada a lo largo de las curvas integrales del sistema

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0,$$

y fuera de una vecindad arbitrariamente pequeña del origen, i.e., para $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \delta_1^2 > 0$, $t \geq T_0 \geq t_0$, la derivada $\frac{dv}{dt} \leq -\beta < 0$, donde β es una constante.

Entonces el punto de equilibrio $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de el sistema (1.5) es estable asintóticamente.

Las demostraciones del teorema de estabilidad de Lyapunov y del teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov se pueden encontrar en [17].

Al probar la estabilidad, el punto de equilibrio $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

donde f_i son funciones diferenciables en la vecindad del origen de coordenadas, se hace uso frecuente del siguiente método: aprovechando la diferenciability de las funciones $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, se representa el sistema (1.5) en la vecindad del origen $x_i = 0$ en la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

donde los R_i son de un orden superior al primero con respecto a $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, y en lugar del punto de equilibrio $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de el sistema (1.6) se prueba la estabilidad del mismo punto de equilibrio del sistema lineal

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j = A(t)x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.7)$$

que se llama un sistema de ecuaciones de primera aproximación para el sistema (1.6).

Teorema 3. *Si el sistema de ecuaciones (1.6) es estacionario a una primera aproximación, todos los términos R_i en una vecindad suficientemente pequeña del origen de coordenadas para $t \geq T \geq t_0$ satisface las desigualdades $|R_i| \leq N(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, donde N y α son constantes, $\alpha > 0$ y todas las raíces de la ecuación característica*

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.8)$$

tienen parte real negativa, entonces las soluciones triviales $x_i = 0$ del sistema de ecuaciones (1.6) y del sistema de ecuaciones (1.7) son asintóticamente estables; por lo tanto, en este caso se permite una prueba de estabilidad basada en una primera aproximación [42].

Teorema 4. *Si el sistema de ecuaciones (1.6) es estacionario en una primera aproximación, todas las funciones R_i satisfacen las condiciones del teorema anterior (1.1), y al menos una raíz de la ecuación característica (1.8) tiene parte real positiva, entonces los puntos de equilibrio $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1.6) y el sistema (1.7) son inestables.*

Las demostraciones de los dos teoremas anteriores se pueden encontrar en [25].

Criterios de Negatividad de las Partes Reales de Todas las Raíces de un Polinomio.

Si la ecuación característica tiene un grado alto, entonces su solución es complicada; por ello son importantes los métodos que permiten establecer (sin resolver la ecuación) si todas sus raíces tienen parte real negativa o no.

Teorema 5. Teorema de Hurwitz: *Una condición necesaria y suficiente para la negatividad de la parte real de todas las raíces del polinomio*

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad (1.9)$$

con coeficientes reales es la positividad de todas las diagonales principales de los menores de la matriz de Hurwitz

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

Teorema 6. *Si el polinomio (1.9) es estable, entonces todos sus coeficientes son positivos: $a_k > 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$).*

Nota 2. *Si $n = 2$ esta condición necesaria también es suficiente para la estabilidad.*

Se presenta una clasificación completa de sistemas lineales bidimensionales según el carácter del punto de equilibrio trivial $(0, 0)$. Considérese el sistema con coeficientes reales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \quad (1.10)$$

La matriz de coeficiente constante se denotará por $A = [a_{ik}]$ ($i, k = 1, 2$). El polinomio característico del sistema (1.10) es

$$D(z) = z^2 - (a_{11} - a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

o

$$D(z) = z^2 - z\text{Tr}(A) + \det(A). \quad (1.11)$$

Nota 3. De acuerdo con la observación que sigue al Teorema 5, este sistema es asintóticamente estable si, y sólo si la traza de la matriz A es negativa y si el determinante es positivo:

$$\text{Tr}(A) < 0, \det(A) > 0. \quad (1.12)$$

Definición 3. Un conjunto A se dice invariante, si para todo $x_0 \in A$ se tiene que la trayectoria solución $\phi(t, x_0) \in A$ para todo $t \geq 0$.

Definición 4. Para $n = 2$ un atractor es un subconjunto $A \subset E$ de \mathbb{R}^2 , cerrado, acotado e invariante si existe una vecindad U de A tal que para todo $x \in U$, $\phi(t, x_0) \in U$ para todo $t \geq 0$ y $\phi(t, x_0) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, $d(\phi(t, x_0), A) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde la distancia entre dos conjuntos se define como: $d(C, D) = \inf_{x \in C, y \in D} |x - y|$.

El Teorema 6 y las definiciones 3 y 4 se pueden encontrar en [18].

1.2. Estabilidad por Poincaré

Identifíquese una trayectoria de fase (o un punto de equilibrio) del sistema (1.5) que representa una solución $x^*(t)$, cuya estabilidad esta en duda, llamada trayectoria estándar. Es de interés esta trayectoria sólo desde un punto particular a^* , para todo $t \geq t_0$: entonces se tiene una semi trayectoria positiva H^* con punto inicial a^* . La solución que representa H^* es $x^*(t)$, $t > t_0$, donde $x^*(t_0) = a^*$, y dado que el sistema es autónomo, todas las elecciones de t_0 conducen a la misma H^* (ver Figura 1.1).

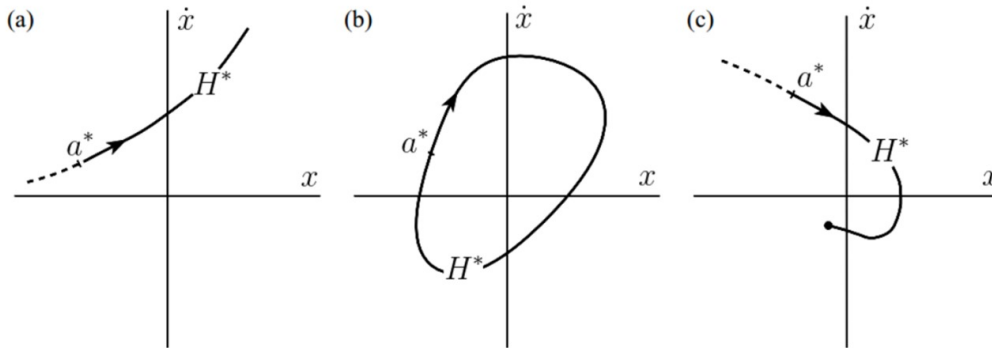


Figura 1.1: Tipos de semi trayectorias. Tomada de [22].

La solución $x^*(t)$, $t > t_0$ es estable por Poincaré (u orbitalmente estable), si todas las perturbaciones suficientemente pequeñas del valor inicial a^* conducen a semi trayectorias que quedan para todo el tiempo posterior a una pequeña distancia de H^* . Para formar una definición analítica es necesario invertir esta afirmación. Primero, se elije un $\epsilon > 0$ arbitrariamente y se construye una banda cuyos bordes estén a una distancia ϵ de H^* (ver Figura 1.2).

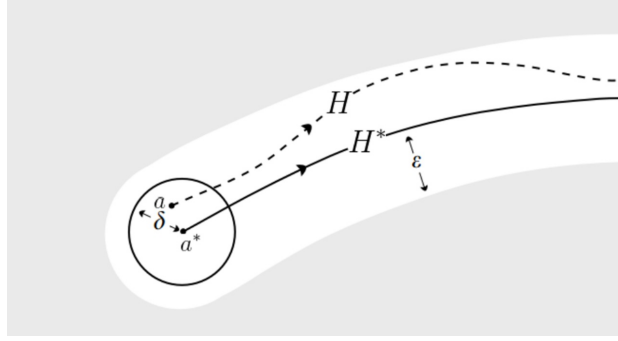


Figura 1.2: Ilustración de la definición de estabilidad orbital. Tomada de [22].

Esto representa la desviación permitida de H^* . Entonces para la estabilidad se debe demostrar, que para cada ϵ , se puede encontrar un δ tal que todas las trayectorias que comienzan dentro de una distancia δ de un a^* (donde $\delta \leq \epsilon$ necesariamente), permanecen permanentemente dentro de la banda. Tal condición debe cumplirse para cada ϵ : en general, cuanto menor sea ϵ , menor debe ser δ .

Definición 5. Sea H^* la semi trayectoria de la solución $x^*(t)$ del sistema (1.5) que comienza en a^* cuando $t = t_0$. Supóngase que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si H es la semi trayectoria que empieza en a ,

$$|a - a^*| < \delta \Rightarrow \max_{x \in H} \text{dist}(x, H^*) < \epsilon,$$

entonces H^* (o la solución de tiempo correspondiente) se dice que es estable por Poincaré. De lo contrario H^* es inestable por Poincaré.

Aquí, la distancia de un punto x a una curva C esta definida por

$$\text{dist}(x, C) = \min_{y \in C} |x - y| = \min_{y \in C} ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}},$$

en el caso del plano. La separación máxima permitida de H y H^* está limitada en dos dimensiones, por la construcción ilustrada en la Figura 1.2 en dos discos, cada uno de diámetro ϵ , se hacen rodar a lo largo de cualquier lado de H^* para hacer una banda; para la estabilidad debe existir un $\delta > 0$ tal que todo H con punto de partida a , $|a - a^*| < \delta$, se encuentra permanentemente en la banda [22]. La Figura 1.3 ilustra esquemáticamente algunos casos de estabilidad (a,b,c) e inestabilidad (d).

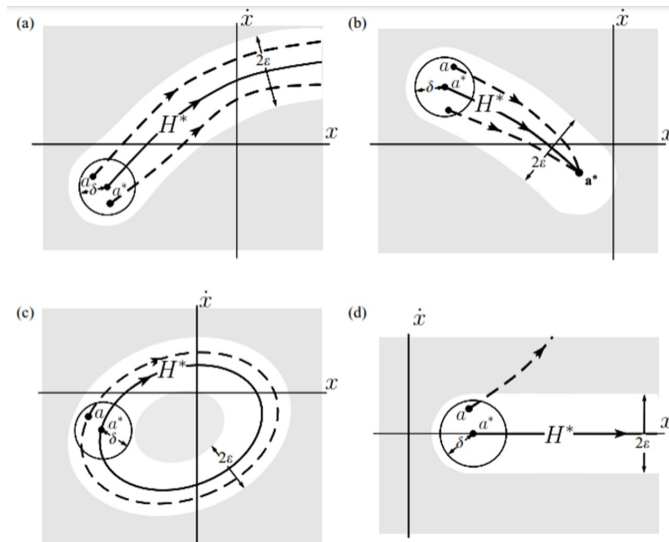


Figura 1.3: Casos de estabilidad e inestabilidad. Tomada de [22].

Definición 6. Si C es una curva cerrada aislada, entonces C se denomina ciclo límite: estable, inestable o semiestable según si las curvas cercanas se acercan o se alejan de C , o ambas cosas (ver Figura 1.4).

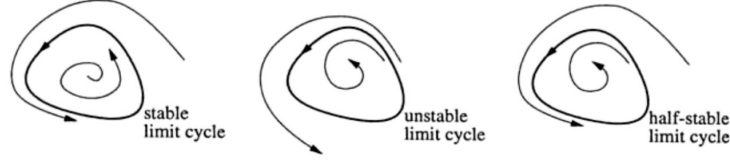


Figura 1.4: Ciclo límite: estable, inestable o semiestable. Tomada de [22].

Por lo tanto, los ciclos límite solo pueden existir en sistemas no lineales. Un ciclo límite estable es aquel que atrae a todas las trayectorias vecinas. Un sistema con un ciclo límite estable puede generar las auto oscilaciones que pueden ocurrir en muchos procesos biológicos [22].

Supóngase que el sistema (1.5) tiene una solución no constante $\phi : [0, \infty) \rightarrow X$, y sea $\phi^0 = \phi(0)$. Considérese un hiperplano $n - 1$ dimensional L que pasa por el punto ϕ^0 y es transversal al recorrido de ϕ . Supóngase que el recorrido de ϕ golpea al hiperplano L transversalmente en algún momento positivo τ_0 de nuevo: $\phi(\tau_0) \in L$, $\tau_0 > 0$, y el vector tangente $\dot{\phi}(\tau_0)$ del recorrido en $\phi(\tau_0)$ apunta en el mismo semiespacio que $\dot{\phi}(0)$. Debido a la continua dependencia de la solución de los valores iniciales, el punto ϕ^0 tiene una vecindad U en L tal que cada solución $\phi(t, x^0)$ con valor inicial $x^0 \in U$ golpea el hiperplano L de nuevo transversalmente en algún momento $\tau(x^0) > 0$ cerca de τ_0 , i.e., para $x^0 \in U \subset L$ existe un $\tau(x^0) > 0$ tal que $\phi(\tau(x^0), x^0) \in L$, y $\dot{\phi}(\tau(x^0), x^0)$ no es paralelo a L . Esto implica, en particular, que U no contiene ningún punto de equilibrio del sistema.

Definición 7. El mapeo $P : U \rightarrow L$ definido por $P(x^0) := \phi(\tau(x^0), x^0)$ para $x^0 \in U$ donde U es una vecindad suficientemente pequeña de ϕ^0 en L es llamado mapeo de Poincaré del sistema (1.5).

1.3. Controlabilidad: definición y sus propiedades

Considérese el sistema lineal controlable con inclusión funcional

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (1.13)$$

$$v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) \in \mathcal{KC} : v(t) \in \tilde{\Omega} \subset \tilde{R}^s\}, \quad (1.14)$$

donde V es el conjunto funcional, \mathcal{KC} es el conjunto de funciones vectoriales continuas por partes, $\tilde{\Omega}$ es un conjunto cerrado convexo de valores posibles de control y \tilde{R}^s es el espacio de control s -dimensional. Supóngase que al momento inicial $x(0) = 0$.

Definición 8. D denota el conjunto de accesibilidad en el espacio de estado, que es el conjunto de todos los $x \in R^n$, que se puede alcanzar con un control $v(\cdot) \in V$ en un tiempo dado t_1 , $0 < t_1 < \infty$.

Se introduce la matriz de bloques $U = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ denominada *matriz de controlabilidad*.

Lema 1. Si $\text{Rang}(U) = n$, el conjunto D es una región convexa en R^n , y $\dim(D) = n$.

Definición 9. El sistema (1.13) es denominado completamente controlable, si puede transformarse desde cualquier posición inicial a cualquier posición finita mediante algún control $v(\cdot) \in V$ en un intervalo de tiempo finito.

Teorema 7. El sistema (1.13) es completamente controlable si y sólo si

$$\text{Rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Corolario 1. Para $s = 1$ el criterio de controlabilidad completa puede reescribirse en una forma más simple

$$\det(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \neq 0. \quad (1.15)$$

En el caso anterior se dice que el sistema se puede escribir como

$$\dot{x} = Ax + bv_1. \quad (1.16)$$

Si el sistema (1.16) es completamente controlable, este puede reescribirse en la forma canónica

$$\dot{z} = A_0z + e^n v_1, \quad (1.17)$$

donde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} y e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a_1, \dots, a_n son las constantes de la ecuación (1.9).

O en la forma de ecuación diferencial ordinaria de orden n como

$$z_1^{(n)} + a_1 z_1^{(n-1)} + \dots + a_n z_1 = v_1. \quad (1.18)$$

Se enuncia esta propiedad como un teorema

Teorema 8. El sistema multidimensional (1.16) se puede presentar en forma de ecuación diferencial ordinaria de orden n (1.18), si y sólo si

$$\text{Rang}(U) = n \text{ o } \det(U) \neq 0.$$

Demostración. (Necesidad). Se asume que el sistema (1.16) se presenta en forma de ecuación diferencial ordinaria de orden n (1.18), i.e., existe una transformación no degenerada $x = Tz$ tal que $A = TA_0T^{-1}$, $b = Te^n$, donde A_0 y e^n son como en (1.17). Entonces la matriz de controlabilidad puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} U &= (b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = (Te^n, TA_0T^{-1}Te^n, \dots, (TA_0T^{-1})^{n-1}Te^n) \\ &= T(e^n, A_0e^n, \dots, A_0^{n-1}e^n) = TU_0, \end{aligned}$$

donde

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & -a_1 & \dots & \vdots \\ 1 & -a_1 & \dots & \dots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Se sigue que $\det(U_0) = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \neq 0$, dado que $\det(T) \neq 0$ se llega a que $\det(U) \neq 0$. La necesidad es probada.

(Suficiencia). Supóngase que $\det(U) \neq 0$, y sea $T = UP$, donde

$$P = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $\det(P) \neq 0$, se tiene que $\det(T) \neq 0$, de modo que la transformación anterior es no degenerada. Por simplicidad, supóngase que el sistema (1.16) está escrito en una base ortogonal $\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n$ de R^n . Sea la nueva base $\bar{c}^1, \dots, \bar{c}^n$. Desde el punto de vista geométrico la i -ésima columna de la matriz de transformación $T = (c^1, \dots, c^n)$ es el i -ésimo vector base \bar{c}^i escrito en las coordenadas antiguas. Estas columnas pueden ser expresadas en términos de los elementos de A y b como

$$\begin{cases} c^1 = ba_{n-1} + Aba_{n-2} + \dots + A^{n-2}ba_1 + A^{n-1}b, \\ c^2 = ba_{n-2} + \dots + A^{n-3}ba_1 + A^{n-2}b, \\ \dots \dots \dots \\ c^{n-1} = ba_1 + Ab, \\ c^n = b. \end{cases} \quad (1.19)$$

La transformación $x = Tz$ puede ser escrita como $\bar{x} = \sum_{i=1}^n z_i \bar{c}^i$, i.e., z_i son las coordenadas del vector \bar{x} en la nueva base, que es, en general, no ortogonal. Se sigue de la última ecuación en (1.19) que $b = Te^n$, i.e., $(T^{-1}b)^t = (0, \dots, 0, 1)$. Para encontrar la matriz A_0 nótese que las columnas de la matriz de operadores lineales son las imágenes de los vectores base. Ya que el operador A y la nueva base de vectores $\bar{c}^1, \dots, \bar{c}^n$ son expresados en las coordenadas antiguas, es posible expresar estas imágenes en las coordenadas antiguas. Para el primer vector

$$\begin{aligned} Ac^1 &= Aba_{n-1} + \dots + A^n b + ba_n - ba_n \\ &= (E_n a_n + Aa_{n-1} + \dots + A^n)b - ba_n. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Por el Teorema de Hamilton-Kelly el término entre paréntesis en (1.20) es igual a cero, de donde se obtiene

$$Ac^1 = -ba_n = -a_n c^n,$$

y todos los elementos de la primera columna de la matriz A_0 son cero excepto el último, que es igual a $-a_n$. Además

$$\begin{cases} Ac^2 = Aba_{n-2} + \dots + A^{n-1}b + ba_{n-1} - ba_{n-1} = c^1 - a_{n-1}c^n, \\ \dots \dots \dots \\ Ac^{n-1} = Aba_1 + A^2b + ba_2 - ba_2 = c^{n-2} - a_2c^n, \\ Ac^n = Ab + ba_1 - ba_1 = c^{n-1} - a_1c^n. \end{cases}$$

Esto muestra que la matriz A_0 es como en (1.17), i.e., el sistema (1.16) puede ser presentado en la forma (1.18). La suficiencia es probada. \square

Todos estos resultados pueden verse en [6].

1.3.1. Estructura del control óptimo.

Para el sistema (1.13) se tiene

$$\begin{aligned} v^*(t) &\in \arg \max_{v \in V} \psi^t(t) (A(t)x(t) + B(t)v(t)) \\ &= \arg \max_{v \in V} \psi^t(t) B(t)v(t) \\ &= \arg \max_{v \in V} (B(t)^t \psi(t))^t v(t) \\ &= \arg \max_{v \in V} \sum_{k=1}^r (B(t)^t \psi(t))_k v_k(t). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Teorema 9. (En un control lineal de tiempo óptimo). Si el conjunto V de los valores de control admisibles es un politopo definido por

$$V := \{v \in R^r : v_k^- \leq v_k(t) \leq v_k^+, k = 1, \dots, r\}, \quad (1.22)$$

entonces el control óptimo (1.21) es

$$v_k^*(t) = \begin{cases} v_k^+ & \text{si } (B(t)^t \psi(t))_k > 0, \\ v_k^- & \text{si } (B(t)^t \psi(t))_k < 0, \\ \text{cualquier } \bar{v} \in V & \text{si } (B(t)^t \psi(t))_k = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

y es único.

Un estudio más completo puede verse en [44].

1.4. Principio del Máximo de Pontryagin

Considérese los sistemas controlables que se rigen por las ecuaciones diferenciales con inclusiones funcionales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_v &= f(y, v), \\ v(\cdot) &\in V. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Aquí y es el vector n -dimensional de coordenadas del estado del sistema, v es el vector s -dimensional de las entradas de control, $f(y, v)$ es una función continua dos veces diferenciable, V es un conjunto funcional que cubre las restricciones del control.

A menudo, el movimiento deseado de un objeto dinámico no se prescribe de forma explícita, sino como una solución de algún problema extremo. Sea M una variedad suave en el espacio de estados $y \in R^n$. El problema que se plantea es determinar un control $v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) \in \mathcal{KC} : v(t) \in \Omega_0 \subset \Omega \subset R^s\}$, llevando el sistema (1.24) a la variedad $y(t_1) \in M$, y minimizando un cierto funcional $\varphi_0(y(t_1))$, que caracteriza la calidad de la trayectoria. Supóngase lo siguiente:

1. El sistema es controlable en el sentido de que la variedad M es accesible, existe al menos un control $\tilde{v}(\cdot) \in V$ y un momento $\tilde{t}_1 < \infty$ tal que $\tilde{y}(\tilde{t}_1) \in M$, donde $\tilde{y}(\cdot)$ denota la trayectoria bajo el control $\tilde{v}(\cdot)$. El correspondiente proceso controlado denominado permisible.
2. Existe un control óptimo $v^0(\cdot)$ tal que

$$y^0(t_1^0) \in M, \quad \varphi_0(y^0(t_1^0)) = \min_{v(\cdot) \in V} \varphi_0(y(t_1)).$$

Considérese algoritmos de determinación del proceso óptimo, consistentes en un control óptimo $v^0(\cdot)$, la correspondiente trayectoria óptima $y^0(\cdot)$, gobernada por (1.24), y el momento t_1^0 de llegada a la variedad. Uno de los resultados más significativos, que permite el diseño constructivo de procesos controlados óptimos $\{y^0(\cdot), v^0(\cdot), t \in [t_0, t_1^0]\}$, es el **Principio del Máximo de Pontryagin** [34], publicado en 1956 como una hipótesis y probado más tarde en varias variantes.

Para enunciar el principio del máximo necesitaremos algunas notaciones y supuestos. Como antes, supóngase que la parte derecha de las ecuaciones (1.25), que gobiernan el movimiento controlado, son continuas y dos veces diferenciales. La variedad M se especifica mediante las ecuaciones $\varphi_i(y) = 0$, $i = 1, \dots, m \leq n$, donde $\varphi_i(y)$ son continuas dos veces diferenciables y el $\text{rang} \left(\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \right) = m$, Ω_0 es un conjunto cerrado en R^s .

La ecuación en variaciones

$$\dot{x} = \frac{\partial f(y^0(t), v^0(t))}{\partial y} x, \quad (1.25)$$

y el dual

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(y^0(t), v^0(t))}{\partial y} \right)^t \psi, \quad (1.26)$$

se define la *función Pontryagin* como $H(\psi, y, v) = \psi^t f(y, v)$ y el *Hamiltoniano* de un proceso óptimo como

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), y^0(t), v^0(t)).$$

Supóngase que para cualquier proceso permisible $\{\tilde{y}(\cdot), \tilde{v}(\cdot), [t_0, \tilde{t}_1]\}$ y para cualquier $\epsilon > 0$ existe un proceso permisible $\{\tilde{y}(\cdot), \tilde{v}(\cdot), [t_0, \tilde{t}_1]\}$ tal que $|\tilde{t}_1 - t_1| < \epsilon$ y $\|\tilde{y}(\cdot) - y(\cdot)\| < \epsilon$ en el espacio funcional $C([t_0, \tilde{t}_1] \cap [t_0, t_1], R^n)$.

Se define un proceso localmente óptimo con la condición inicial dada $y(t_0) = c$ como sigue:

Definición 10. Un proceso controlable $\{y^0(\cdot), v^0(\cdot), t \in [t_0, t_1^0]\}$ es llamado *óptimo localmente*, si existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier proceso permisible $\{\tilde{y}(\cdot), \tilde{v}(\cdot), t \in [t_0, \tilde{t}_1]\}$, satisface las condiciones $|\tilde{t}_1 - t_1^0| < \epsilon$, $\|\tilde{y}(\cdot) - y^0(\cdot)\| < \epsilon$ en $C([t_0, \tilde{t}_1] \cap [t_0, t_1^0], R^n)$, se cumple la siguiente desigualdad

$$\varphi_0(\tilde{y}(\tilde{t}_1)) \geq \varphi_0(y^0(t_1^0)).$$

Las condiciones necesarias para la optimización local están dadas por el principio de Pontryagin [6].

Teorema 10. Para cualquier proceso globalmente óptimo $\{y^0(\cdot), v^0(\cdot), t \in [t_0, t_1^0]\}$ existe un par $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$ tal que si $\lambda_0 = 0$ entonces $\psi(t) \neq 0$, y se cumplen las siguientes tres condiciones

(a) Condición del máximo

$$\max_{v \in \Omega_0} H(\psi(t), y^0(t), v) = H(\psi(t), y^0(t), v^0(t)),$$

$$\forall t \in T = \{t \in (t_0, t_1^0) : v^0(t-0) = v^0(t+0)\}.$$

(b) Condición de estacionaridad

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), y^0(t), v^0(t)) \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1^0].$$

(c) Condición de ortogonalidad

$$\psi^t(t_1^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_1^0))}{\partial y} = - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_1^0))}{\partial y}.$$

1.5. Principio de contracción de Banach

Definición 11. Considérese (M, ϱ) un espacio métrico. Una aplicación $T : M \rightarrow M$ es **Lipschitz** si existe una constante $k \geq 0$ tal que para todos $x, y \in M$,

$$\varrho(Tx, Ty) \leq k\varrho(x, y).$$

La más pequeña de las constantes k que satisfacen lo anterior se llama **constante de Lipschitz** y se denota por $k(T)$.

Si $k(T) < 1$, la aplicación $T : M \rightarrow M$ es una **contracción** [13].

Teorema 11. (Principio de Contracción de Banach.) Sean (M, ϱ) espacio métrico completo y $T : M \rightarrow M$ una contracción. Entonces T tiene un único punto fijo en M . Además para cada $x_0 \in M$ la sucesión de iteraciones $\{T^n x_0\}$ converge a ese punto fijo de T [13].

1.6. Planteamiento para sistemas biestables

Considérese un sistema biestable que tiene dos atractores. Supóngase que es un sistema biestable de la forma

$$\dot{y} = f^0(y), \quad y \in G \subset R^2, \quad (1.27)$$

donde $f(y_1, y_2)$ es una \mathbb{C}^r -función suave definida en una región cerrada y acotada G ($r \geq 1$), que tiene un ciclo límite orbitalmente asintóticamente estable $y^0(t)$, dentro del cual hay un atractor puntual, que es un foco estable (y_1^0, y_2^0) y su región de atracción es A^* . Esta región A^* está acotada por un ciclo límite orbitalmente asintóticamente estable en tiempo inverso. La región de atracción del primer ciclo límite es $R^2 \setminus A^*$. Supóngase que la suposición de la existencia de una órbita cerrada, que es el primer atractor, se cumple en $R^2 \setminus A^* = C \cup B$ [4].

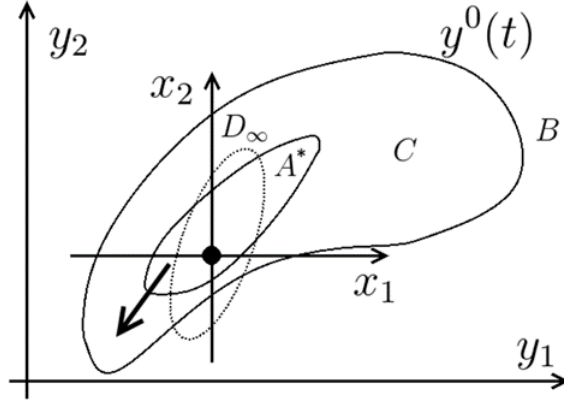


Figura 1.5: Diagrama de fase del sistema (1.27). El atractor puntual es el origen en el sistema de coordenadas (x_1, x_2) , el atractor periódico es la curva cerrada $y^0(t)$, A^* es la región de atracción del atractor puntual, $C \cup B$ es la región de atracción del atractor periódico, D_∞ es el conjunto de accesibilidad construido en la vecindad del atractor puntual. Tomada de [23].

Por lo tanto, para resolver el problema de la transición del sistema de la región de atracción de un atractor puntual a la región de atracción de un ciclo límite orbitalmente asintóticamente estable (problema de transición directa), se necesita agregar la perturbación al sistema (1.27). Considérese el siguiente sistema dinámico [40] en presencia de una perturbación definida en el conjunto funcional

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, v_1(t)) = \phi^0(y) + \phi^1(y)v_1, & y(0) \in G \subset \mathbb{R}_2; \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{K}\mathcal{C} : |v_1(t)| \leq \delta_1\}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Donde $\phi^0(y)$ y $\phi^1(y)$ son funciones suaves para $y \in G$ y G es un conjunto cerrado y acotado. Si la perturbación esta ausente ($v_1(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, \infty)$), entonces se tiene el siguiente sistema con el lado derecho suave dado en el dominio cerrado G del plano de fase:

$$\dot{y} = f(y, 0) = \phi^0(y). \quad (1.29)$$

Se introduce la siguiente norma en el conjunto G

$$\|f\|_{\mathbb{C}^1} = \sup_{y \in G} \left(\|f\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\| \right). \quad (1.30)$$

Dotado de esta norma, el conjunto de sistemas se convierte en un espacio de Banach que se denota por \mathcal{B}_G .

Definición 12. Se define una δ -vecindad del sistema f como el conjunto de todos los sistemas \tilde{f} que satisfacen la condición

$$\|\tilde{f} - f\|_{\mathbb{C}^1} < \delta. \quad (1.31)$$

Definición 13. Un sistema dinámico f se dice que es rudo en la región G si dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

1. Todos los sistemas \tilde{f} en una δ -vecindad de f son topológicamente equivalentes a f .

2. El homeomorfismo, que establece esta equivalencia topologica, es ϵ -cercano a la identidad, es decir, la distancia entre dos puntos correspondientes es menor que ϵ .

Se enuncia el siguiente teorema

Teorema 12. (Andronov-Pontryagin). *Un sistema (1.29) es rudo en la región G , si y sólo si*

1. Tiene sólo un número finito de puntos de equilibrio y todos estos son hiperbólicos, es decir, ningún valor propio tiene una parte real cero.
2. Tiene sólo un número finito de órbitas cerradas y todas estas son "hiperbólicas", es decir, el número 1 es un multiplicador característico simple para cada una.
3. Ninguna separatriz comienza en un punto silla y termina en otro (o en el mismo) punto silla .

Las definiciones 12, 13 y el teorema 12 se pueden encontrar en [40]. De acuerdo con el teorema de Andronov-Pontryagin [40], a continuación se consideran sólo los sistemas dados por (1.29) que tienen un número finito de puntos singulares asintóticamente estables y ciclos límite orbitalmente asintóticamente estables en tiempo directo o inverso. Se dice que tales sistemas son estables. En presencia de una perturbación $v_1(t)$, el sistema expresado por (1.28) con condiciones iniciales pertenecientes a uno de los atractores del sistema (1.29) puede abandonar el dominio de atracción de este atractor y llegar al dominio de atracción de otro atractor. Para analizar tales situaciones, se debe formular algunas definiciones necesarias.

Sea y^0 un atractor puntual: $f(y^0, 0) = 0$, ($y^0 \in \text{int}(G)$, $\phi^0(y^0) = 0$). Por $x = y - y^0$ se denota la desviación. Entonces, se obtiene la siguiente ecuación no lineal en desviaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi^0(y^0 + x) + \phi^1(y^0 + x)v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1\}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Donde $\phi^0(0, y^0) = 0$. La notación y^0 se omite por brevedad. La definición de estabilidad robusta se da en [16] para el estado imperturbable $x \equiv 0$ del sistema (1.32) si $x(0) = 0$ y $v_1(t) \equiv 0$.

Definición 14. *El estado imperturbable ($x(0) = 0$, $v_1(t) \equiv 0$) $x(t) \equiv 0$ del sistema (1.32) se dice que es robustamente estable para una condición inicial $x(0)$ y una perturbación $v_1(t)$ variable en el tiempo si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 = \delta_0(\epsilon) > 0$ y $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ tal que la siguiente condición es valida:*

$$\text{Si } \|x(0)\| \leq \delta_0 \text{ y } |v_1(t)| \leq \delta_1 \text{ para } t \geq 0, \text{ entonces } \|x(t)\| \leq \epsilon \text{ para todo } t \geq 0.$$

Basado en (1.32), se considera el siguiente modelo matemático

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + A_1 v_1(t))x + b v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (1.33)$$

donde $A_0 = \frac{\partial \phi^0(0)}{\partial y}$, $A_1 = \frac{\partial \phi^1(0)}{\partial y}$, y $b = \phi^1(0)$. Nótese que este modelo es lineal en desviaciones. Si $\phi^1(0) = 0$, entonces se llega al siguiente sistema homogéneo en desviaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(v_1(t))x, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1\}. \end{cases} \quad (1.34)$$

Donde $A(v_1) = A_0 + A_1 v_1$. Si $\phi^1(0) \neq 0$, entonces el sistema expresado por (1.33) es bilineal y la matriz $A(v_1)$ es una matriz de Hurwitz para cualquier $v_1 \in [-\delta_1, \delta_1]$. Sea $x(0) = 0$; entonces, la solución del sistema (1.33) puede ser expresada en términos de la integral de Cauchy:

$$\begin{cases} x(t_1) = \int_0^{t_1} X_v(t_1) X_v^{-1}(t) b v_1(t) dt, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1\}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Donde $X_v(t_1)$ es la matriz fundamental normalizada: $X_v(0) = E_2$. Esta matriz corresponde a la perturbación $v_1(\cdot) \in V$, cada elemento $x_{ij}(t_1, v_1(\cdot))$ de la matriz es un funcional dado en el conjunto de funciones $v_1(t)$,

donde $t \in [0, t_1]$.

Por lo tanto, se tiene la descripción matemática de todos los puntos de accesibilidad $x(t_1)$ en presencia de una perturbación variable en el tiempo $v_1 \in V$. Si la integral de Cauchy existe cuando $t_1 \rightarrow \infty$, entonces es razonable considerar el conjunto de accesibilidad D_∞ del sistema (1.33) para $t_1 \rightarrow \infty$ como el conjunto de puntos $\cup_{0 \leq t_1 < \infty} D_{t_1}$ [33] con la adición de límites parciales:

$$\begin{cases} x(t_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{t_k} X_v(t_k) X_v^{-1}(t) b v_1(t) dt, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1\}. \end{cases} \quad (1.36)$$

El siguiente paso es comparar la región de atracción del atractor puntual A^* del sistema no lineal (1.28) con el conjunto de accesibilidad D_∞ del sistema lineal en variaciones (1.33). La intersección de estos dos conjuntos cerrados A^* y D_∞ es no vacía, ya que contiene al menos un punto. Este punto es el foco y pertenece a los conjuntos A^* y D_∞ . Sin embargo, si el conjunto D_∞ tiene puntos que no pertenecen a A^* , entonces es posible la transición directa entre los atractores del sistema (1.28).

Para encontrar la intersección entre los conjuntos cerrados A^* y D_∞ se define la distancia entre dos conjuntos como

$$d(D_\infty, A^*) = \max_{x \in D_\infty} \min_{y \in A^*} \rho(x, y), \quad (1.37)$$

donde ρ es la distancia entre los puntos y y x . En este caso la distancia (1.37) es análoga a la distancia de Hausdorff, que se denomina "dirigido", "no simétrico" o "unidireccional", y se define correspondientemente en [21, 36, 37]. Informalmente, dos conjuntos están cerca en la distancia de Hausdorff si cada punto de cualquiera de los conjuntos está cerca de algún punto del otro conjunto [23].

Si la distancia (1.37) es positiva, entonces se confirma la posibilidad de transición bajo la influencia de $v(t)$ de la región de atracción de un atractor puntual A^* a la región de atracción del ciclo límite $R^2 \setminus A^*$ [4].

Capítulo 2

Planteamiento y solución del problema de reducción

El problema de desviación máxima con respecto a una coordenada se considera para el sistema de orden dos con una perturbación que tiene la forma paramétrica y adicional:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + (\omega_0^2 + av_1(t))x_1 = \gamma_0bv_1(t), \\ v_1(\cdot) \in \mathcal{V} = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde \mathcal{KC} representa el conjunto de las funciones continuas a trozos, $0 < \mu < \sqrt{\omega_0^2 - a\delta_1}$, $a = \{0, 1\}$ y $b = \{0, 1\}$ son los coeficientes que caracterizan las perturbaciones paramétricas y aditivas del sistema. Para cualquier $v_1(t) \equiv \text{constante} \in [-\delta_1, \delta_1]$ el subsistema homogéneo es oscilatorio. El sistema (2.1) corresponde a pequeñas oscilaciones de un péndulo matemático cuando su punto de suspensión se mueve a lo largo de una línea inclinada con una aceleración acotada conocida para el conjunto funcional \mathcal{V} .

El modelo (2.1) surge como una generalización de un problema planteado y resuelto por Ya. N. Roitenberg [35] sobre la construcción de auto oscilaciones mediante la síntesis de una perturbación para un sistema dinámico de orden dos, un generador de oscilaciones no amortiguadas. Para un conocimiento más profundo consultar [1, 3, 8].

2.1. Construcción del conjunto de accesibilidad para el sistema lineal y controlable

Sea $a = 0$ y $b = 1$, entonces el sistema (2.1) toma la forma:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1 = \gamma_0v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in \mathcal{V} = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\gamma_0 > 0$, $0 < \mu < \omega_0$ y $v_1(\cdot)$ es una función acotada y continua por partes. Si se usa $x_2 = \dot{x}_1$ el sistema puede reescribirse como:

$$\dot{x} = Ax + \gamma_0v_1b,$$

donde $x = (x_1, x_2)^t$ es un vector columna,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En la forma de Frobenius:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\mu x_2 + \gamma_0 v_1, \\ v_1(\cdot) \in \mathcal{V} = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

El problema de encontrar la peor perturbación considerando el problema de minimización del funcional

$$\varphi_0(x_1(v_1, t_1^0, x^0)) = x_1(v_1, t_1^0, x^0) \rightarrow \min_{|v_1(t)| \leq \delta_1}, \text{ bajo } x_2 = 0, \quad (2.4)$$

donde t_1^0 es el siguiente momento de transformación de la derivada de la función $x_1(t)$ en cero después del momento inicial $t = 0$ fue presentado en [46]. Se tiene la variedad $M = \{\dot{x}_1 = x_2 = 0\}$, $x_1(0) = \alpha_0 > 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_1(t_1^0) = -\alpha_1 < 0$, $\dot{x}_1(t_1^0) = 0$ y $\dot{x}_1(t) < 0$ para todo $t \in (0, t_1^0)$, (ver Figura 2.1). La función para la peor perturbación ofrece una solución a un problema extremo similar (2.4):

$$x_1(v_1, t_1^0, x^0) \rightarrow \max_{|v_1(t)| \leq \delta_1}, \quad (2.5)$$

donde $x_1(0) = -\alpha_0 < 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_1(t_1^0) = \alpha_1 > 0$, $\dot{x}_1(t_1^0) = 0$ y $\dot{x}_1(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, t_1^0)$. Para más detalles consultar [45].

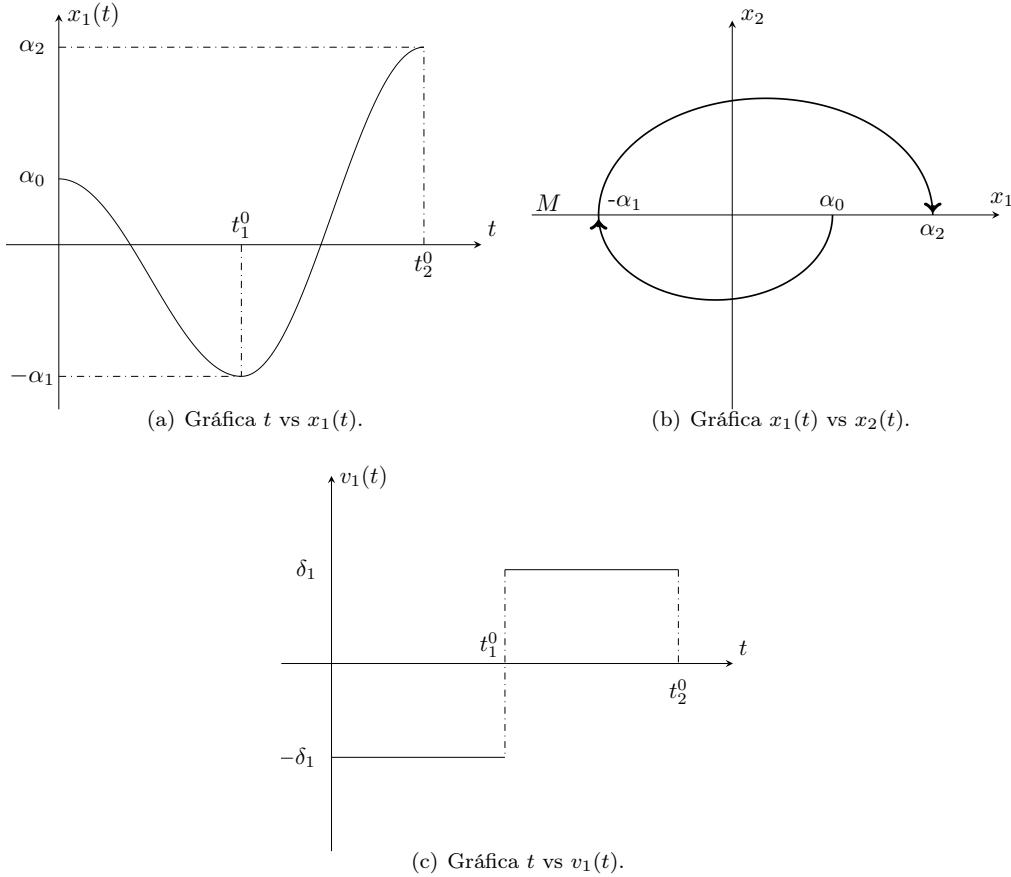


Figura 2.1: Formulación del problema. (a) El sistema (2.2) debe aumentar la amplitud de la oscilación en el momento t_1^0 . (b) El sistema (2.2) debe alcanzar la variedad M en el momento t_1^0 . (c) Saltos de signo de $v_1(t)$. En el intervalo $[-\delta_1, \delta_1]$ alcanza un máximo en los puntos finales dependiendo del signo del coeficiente.

Se puede usar el Principio del Máximo de Pontryagin [6] para aumentar la amplitud de las oscilaciones. Supóngase que existe un proceso óptimo $\{x^0(\cdot), v_1^0(\cdot), t_1^0\}$, entonces existe una pareja $\{\lambda^0, \psi(\cdot)\}$ distinta de

cero, donde

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -A^t \psi \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^2 \\ -1 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Se tiene el sistema de ecuaciones dual asociado a (2.3)

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \omega_0^2 \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\mu \psi_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

La función de Pontryagin para este caso tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}H(\psi, x, v_1) &= \psi^t f = (\psi_1, \psi_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega_0^2 x_1 - 2\mu x_2 + \gamma_0 v_1 \end{pmatrix} \\ &= \psi_1 x_2 + \psi_2 (-\omega_0^2 x_1 - 2\mu x_2 + \gamma_0 v_1).\end{aligned}$$

Ahora

(a) Condición del máximo para $t \in (0, t_1^0)$

$$\max_{|v_1(t)| \leq \delta_1} (\psi_1(t)x_2^0(t) + \psi_2(t)(-\omega_0^2 x_1^0(t) - 2\mu x_2^0(t) + \gamma_0 v_1(t))). \quad (2.7)$$

En un tiempo fijo (2.7) es una función lineal en v_1 . En el intervalo $[-\delta_1, \delta_1]$ alcanza un máximo en los puntos finales dependiendo del signo del coeficiente. Entonces de acuerdo con el Teorema 9 de la Sección 1.3.1

$$v_1^0 = \delta_1 \text{sign}(\psi_2(t)).$$

(b) Condición de estacionaridad de $\mathcal{H}(t)$, $t \in [0, t_1^0]$

$$\mathcal{H}(t) = \psi_1(t)x_2^0(t) + \psi_2(t)(-\omega_0^2 x_1^0(t) - 2\mu x_2^0(t) + \gamma_0 v_1^0(t)) \equiv 0.$$

Para $t = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(0) &= \psi_1(0)x_2^0(0) + \psi_2(0)(-\omega_0^2 x_1^0(0) - 2\mu x_2^0(0) + \gamma_0 v_1^0(0)) \\ &= 0 + \psi_2(0)(-\omega_0^2 \alpha_0 - 0 + 0) = 0,\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $-\psi_2(0)\omega_0^2 \alpha_0 = 0$ y como $\omega_0^2 \alpha_0 \neq 0$ entonces $\psi_2(0) = 0$.

Para $t = t_1^0$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t_1^0) &= \psi_1(t_1^0)x_2^0(t_1^0) + \psi_2(t_1^0)(-\omega_0^2 x_1^0(t_1^0) - 2\mu x_2^0(t_1^0) + \gamma_0 v_1^0(t_1^0)) \\ &= 0 + \psi_2(t_1^0)(\omega_0^2 \alpha_1 - 0 + 0) = 0,\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\psi_2(t_1^0)\omega_0^2 \alpha_1 = 0$ y como $\omega_0^2 \alpha_1 \neq 0$, entonces $\psi_2(t_1^0) = 0$.

(c) Condición de ortogonalidad

$\psi(t_1^0) + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0(x^0(t_1^0)))$ perpendicular a M en el punto $x^0(t_1^0)$.

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t_1^0) \\ \psi_2(t_1^0) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(t_1^0) + \lambda_0 \\ \psi_2(t_1^0) \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$(\alpha_0, 0) \begin{pmatrix} \psi_1(t_1^0) + \lambda_0 \\ \psi_2(t_1^0) \end{pmatrix} = 0.$$

Así $\alpha_0(\psi_1(t_1^0) + \lambda_0) = 0$. Como $\alpha_0 \neq 0$, entonces $\psi_1(t_1^0) = -\lambda_0 < 0$ y normalizando se tiene $\lambda_0 = 1$.

Por lo tanto se obtiene el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\mu x_2 + v_1^0, \\ \dot{\psi}_1 = \omega_0^2 \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\mu \psi_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

con condiciones iniciales y finales $x_1(0) = \alpha_0$, $x_2(0) = 0$, $\psi_2(0) = 0$, $x_1(t_1^0) = -\alpha_1$, $x_2(t_1^0) = 0$, $\psi_1(t_1^0) = -1$ y $\psi_2(t_1^0) = 0$.

En todo el intervalo $t \in [0, t_1^0]$, ψ_2 toma valores negativos, por lo tanto $v_1(t) = -\delta_1$. Al no tener condición inicial para ψ_1 se toma el sistema (2.8) en tiempo inverso, i.e., $\tau = t_1^0 - t$

$$\begin{cases} -\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \\ -\frac{dx_2}{d\tau} = -\omega_0^2 x_1 - 2\mu x_2 - \gamma_0 \delta_1, \\ -\frac{d\psi_1}{d\tau} = \omega_0^2 \psi_2, \\ -\frac{d\psi_2}{d\tau} = -\psi_1 + 2\mu \psi_2, \end{cases} \quad (2.9)$$

con condiciones iniciales $x_1(\tau = 0) = -\alpha_1$, $x_2(\tau = 0) = 0$, $\psi_1(\tau = 0) = -1$ y $\psi_2(\tau = 0) = 0$ [24] (ver Figura 2.2).

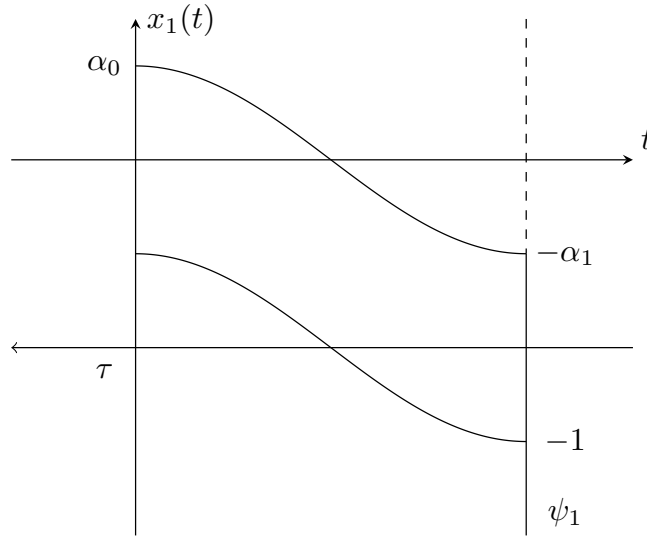


Figura 2.2: Comparación del sistema (2.2), t vs $x_1(t)$ en tiempo directo y el sistema (2.11), τ vs $\psi_1(\tau)$ en tiempo inverso.

Se usa la siguiente notación para denotar la derivada de x con respecto a τ (tiempo inverso):

$$\frac{dx}{d\tau} = x'.$$

Entonces el sistema (2.9) sin el sistema dual se reescribe como

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2, \\ x'_2 = \omega_0^2 x_1 + 2\mu x_2 + \gamma_0 \delta_1. \end{cases} \quad (2.10)$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_0 \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Se obtendrá la solución del sistema homogéneo, para ello, se obtendrán los autovalores de

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 2\mu \end{pmatrix} = -A.$$

$$\det((-A) - \lambda E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ \omega_0^2 & 2\mu - \lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 2\mu\lambda + \omega_0^2.$$

Entonces

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} = \mu \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Se calcula el autovector asociado a $\lambda_1 = \mu + i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$

$$\begin{aligned} (-A) - \lambda_1 E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 2\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu + i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} & 0 \\ 0 & \mu + i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mu - i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} & -1 \\ \omega_0^2 & \mu - i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se observa que la primera fila es múltiplo de la segunda, sea $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$, entonces si se toma la segunda fila y se iguala a cero se obtiene $\omega_0^2 c + (\mu - i\beta)d = 0$ entonces $c = (-\mu + i\beta)d/\omega_0^2$, si se hace $d = 1$, $c = (-\mu + i\beta)/\omega_0^2$ entonces,

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema homogéneo en tiempo inverso es

$$\begin{aligned} X_h(\tau) &= \left(\begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{(\mu+i\beta)\tau} \\ &= \left(\begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{\mu\tau} (\cos(\beta\tau) + i\text{sen}(\beta\tau)) \\ &= e^{\mu\tau} \left(\begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\beta\tau) + i \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{sen}(\beta\tau) + i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\beta\tau) - \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{sen}(\beta\tau) \right) \\ &= e^{\mu\tau} \left(\begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \cos(\beta\tau) - \frac{\beta}{\omega_0^2} \text{sen}(\beta\tau) \\ \cos(\beta\tau) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \text{sen}(\beta\tau) + \frac{\beta}{\omega_0^2} \cos(\beta\tau) \\ \text{sen}(\beta\tau) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ahora, la solución particular del sistema en tiempo inverso es

$$X_p(\tau) = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ entonces } X_p'(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_0 \delta_1 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene que $f = 0$ y $e = -\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}$.

Entonces la solución general del sistema en tiempo inverso es

$$X(\tau) = c_1 e^{\mu\tau} \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \cos(\beta\tau) - \frac{\beta}{\omega_0^2} \text{sen}(\beta\tau) \\ \cos(\beta\tau) \end{pmatrix} + c_2 e^{\mu\tau} \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \text{sen}(\beta\tau) + \frac{\beta}{\omega_0^2} \cos(\beta\tau) \\ \text{sen}(\beta\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene el valor de las constantes a partir de la condición inicial

$$X(\tau = 0) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = c_1 e^{\mu(0)} \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \cos(0) - \frac{\beta}{\omega_0^2} \text{sen}(0) \\ \cos(0) \end{pmatrix} + c_2 e^{\mu(0)} \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \text{sen}(0) + \frac{\beta}{\omega_0^2} \cos(0) \\ \text{sen}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$c_1 \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\omega_0^2} c_1 + \frac{\beta}{\omega_0^2} c_2 - \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde obtiene que $c_1 = 0$ y $c_2 = \frac{\gamma_0 \delta_1 - \alpha_1 \omega_0^2}{\beta}$.

La solución para el problema de Cauchy en el primer intervalo del sistema (2.10) puede ser escrita por las siguientes expresiones

$$x_1(\tau) = \frac{e^{\mu\tau}(\gamma_0 \delta_1 - \alpha_1 \omega_0^2)}{\beta} \left(\frac{\beta}{\omega_0^2} \cos(\beta\tau) - \frac{\mu}{\omega_0^2} \text{sen}(\beta\tau) \right) - \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}$$

y

$$x_2(\tau) = \frac{e^{\mu\tau}(\gamma_0 \delta_1 - \alpha_1 \omega_0^2)}{\beta} \text{sen}(\beta\tau).$$

Análogamente se puede obtener la solución general al sistema conjugado de ecuaciones (2.11) bajo las condiciones iniciales $\psi_1(\tau = 0) = -1$ y $\psi_2(\tau = 0) = 0$.

$$\begin{cases} \psi_1' = -\omega_0^2 \psi_2, \\ \psi_2' = \psi_1 - 2\mu \psi_2, \end{cases} \quad (2.11)$$

cuya solución es

$$\psi_1(\tau) = e^{-\mu\tau} \left(-\frac{\mu}{\beta} \text{sen}(\beta\tau) - \cos(\beta\tau) \right)$$

y

$$\psi_2(\tau) = -e^{-\mu\tau} \frac{\text{sen}(\beta\tau)}{\beta}.$$

Finalmente, se tiene la solución al sistema (2.9)

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \frac{e^{\mu\tau}(\gamma_0 \delta_1 - \alpha_1 \omega_0^2)}{\beta} \left(\frac{\beta}{\omega_0^2} \cos(\beta\tau) - \frac{\mu}{\omega_0^2} \text{sen}(\beta\tau) \right) - \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}, \\ x_2(\tau) = \frac{e^{\mu\tau}(\gamma_0 \delta_1 - \alpha_1 \omega_0^2)}{\beta} \text{sen}(\beta\tau), \\ \psi_1(\tau) = e^{-\mu\tau} \left(-\frac{\mu}{\beta} \text{sen}(\beta\tau) - \cos(\beta\tau) \right), \\ \psi_2(\tau) = -e^{-\mu\tau} \frac{\text{sen}(\beta\tau)}{\beta}. \end{cases}$$

Se busca ahora el valor del tiempo para el cual la derivada ($x_1'(\tau) = -x_2(\tau)$) de la solución es idénticamente cero

$$x_2(\tau_1) = \frac{e^{\mu\tau_1}(\gamma_0 \delta_1 - \alpha_1 \omega_0^2)}{\beta} \text{sen}(\beta\tau_1) = 0.$$

Entonces

$$\text{sen}(\beta\tau_1) = 0 \text{ por tanto } \beta\tau_1 = \pi \text{ y así } \tau_1 = \frac{\pi}{\beta}.$$

Por lo tanto, a partir de la condición límite $x_1(\tau_1) = \alpha_0$ se obtiene

$$-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \frac{(\gamma_0 \delta_1 - \omega_0^2 \alpha_1)}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} = \alpha_0 \text{ entonces } -\frac{(\gamma_0 \delta_1 - \omega_0^2 \alpha_1)}{\omega_0^2} = e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right).$$

Por lo tanto

$$\alpha_1 = e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}.$$

Resolviendo el problema de encontrar la desviación máxima en la segunda mitad del periodo $t \in [t_1^0, t_2^0]$, se puede obtener una expresión similar para la siguiente amplitud. Así, resolviendo sucesivamente el problema

de encontrar la desviación máxima de amplitud se puede obtener una sucesión de las amplitudes $\{\alpha_n\}$, donde el n-ésimo término es de la forma [46] :

$$e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_{n-1} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2}.$$

Esta transformación es un operador de contracción porque

$$\begin{aligned} |\alpha(\theta) - \alpha(\eta)| &= \left| e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\theta + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} - \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\eta + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) \right| \\ &= \left| e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\theta + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\eta + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) - \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right| \\ &= \left| e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left| \theta + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} - \eta - \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right| \right| \\ &= e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} |\theta - \eta|, \end{aligned}$$

ya que $-\frac{\mu\pi}{\beta} < 0$ y $0 < e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} < 1$. Según el Principio de Contracción de Banach la sucesión converge (ver el Teorema 11 del Capítulo 1).

Ahora, se encontrará la sucesión en forma no recursiva, para ello se observa que

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \\ &= e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^2 \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2}. \end{aligned}$$

Se propone la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n-1} + \dots + 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^k + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{k+1} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \sum_{k=0}^{n-2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^k + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\frac{1 - \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n-1}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right) + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$p(n) : \alpha_n = \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2 \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2}. \quad (2.12)$$

Por lo anterior se formula el siguiente teorema:

Teorema 13. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:

1.

$$\alpha_n = e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_{n-1} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} = \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}.$$

2. La sucesión α_n converge a α^* donde

$$\alpha^* = \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right) = \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \coth \left(\frac{\mu\pi}{2\beta} \right).$$

Demostración. 1.) Por inducción para $n \in \mathbb{N}$.

B.I. Para $n = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^1 \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^1}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ &= e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}. \end{aligned}$$

P.I. Para $n \geq 2$. Supongamos que $p(n)$ es verdadera, i.e.,

$$\alpha_n = e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_{n-1} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} = \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(\left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^2 - \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1} + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^2 \right)}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(\left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^2 - \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1} \right) + 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ &= \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^2 - 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^{n+1}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ &= e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\ &= e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\alpha_n + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.) El límite de la sucesión (2.12) es

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) + \frac{2 \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - 2 \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) \\
&= \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} - \frac{2 \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \\
&= \frac{2 \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} = \frac{2 \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right)}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \\
&= \frac{2 \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \\
&= \frac{\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \\
&= \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right).
\end{aligned}$$

Por último

$$\begin{aligned}
\coth \left(\frac{\mu\pi}{2\beta} \right) &= \frac{e^{\frac{\mu\pi}{2\beta}} + e^{-\frac{\mu\pi}{2\beta}}}{e^{\frac{\mu\pi}{2\beta}} - e^{-\frac{\mu\pi}{2\beta}}} = \frac{1 + e^{-\frac{\mu\pi}{2\beta}} e^{-\frac{\mu\pi}{2\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{2\beta}} e^{-\frac{\mu\pi}{2\beta}}} \\
&= \frac{1 + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}.
\end{aligned}$$

□

La amplitud de las auto oscilaciones α^* , ciclo límite correspondiente, se puede obtener como el límite de los mapeos de contracción de Poincaré, cuando el eje x_1 es la sección de Poincaré en el plano de fase [15]:

$$\alpha^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right). \quad (2.13)$$

En este caso la sección de Poincaré es $\dot{x}_1 = 0$ (ver Figura 2.3).

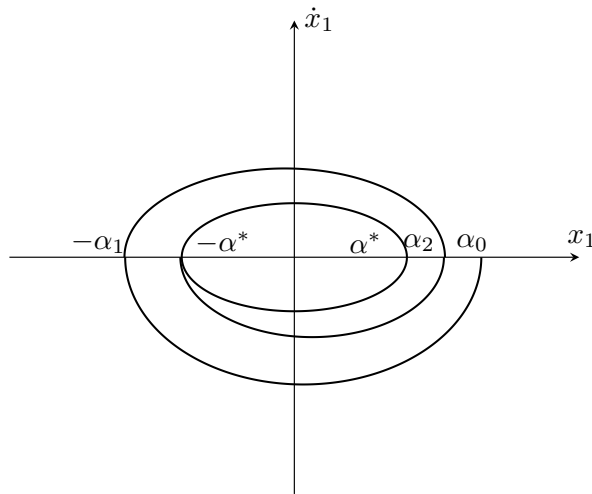


Figura 2.3: Sección de Poincaré.

El ciclo límite de las auto oscilaciones del sistema (2.2) o (2.3) se encontrará resolviendo el problema de desviación máxima en tiempo directo con condición inicial $x(t = 0) = (-\alpha^*, 0)^t$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\mu x_2 + \gamma_0 v_1^0(t). \end{cases} \quad (2.14)$$

Cuya solución esta dada en forma paramétrica por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} x_1(t) = \pm \left(\frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} - (\alpha^* + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}) e^{-\mu t} (\cos(\beta t) + \frac{\mu}{\beta} \text{sen}(\beta t)) \right), \\ x_2(t) = \pm \left(\frac{\omega_0^2}{\beta} (\alpha^* + \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2}) e^{-\mu t} \text{sen}(\beta t) \right), \end{cases} \quad (2.15)$$

donde $0 \leq t \leq t_1^0$.

Aquí el signo ” + ” corresponde a la mitad superior del ciclo y ” - ” a la mitad inferior (ver Figura 2.4).

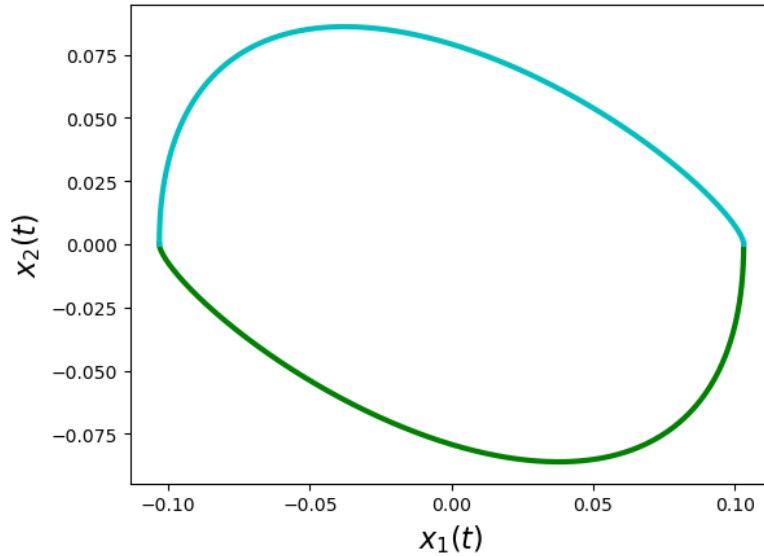


Figura 2.4: Ciclo límite de las auto oscilaciones ($\mu = 0.8$, $\omega_0^2 = 1$, $\gamma_0 = 0.2$ y $\delta_1 = 0.5$). Figura obtenida con el código en Python que se muestra en el Apéndice A.

Se tiene la síntesis del control óptimo

$$v_1^0 = \delta_1 \text{sign}(\psi_2(t)) = \delta_1 \text{sign}(x_2(t)), \quad (2.16)$$

y por eso se obtiene que para cada $\mu \in (0, \omega_0)$ el sistema dinámico no lineal, autónomo y auto oscilante es de la forma [1]

$$\ddot{x}_1 + 2\mu \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \gamma_0 \delta_1 \text{sign}(\dot{x}_1(t)). \quad (2.17)$$

Consecuentemente, con el siguiente teorema se probará que el ciclo límite del sistema (2.17) es atractor periódico.

Teorema 14. *El ciclo límite del sistema (2.17) con amplitud de auto oscilaciones dado por:*

$$\alpha^* = \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right) = \frac{\gamma_0 \delta_1}{\omega_0^2} \coth \left(\frac{\mu\pi}{2\omega} \right),$$

es orbitalmente asintóticamente estable.

Demostración. Si $\alpha^* > \alpha_0$ (condición inicial dentro del ciclo), como $e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \in (0, 1)$ entonces $\frac{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} > 0$. Así

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right) > \alpha_0 \text{ entonces } \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} > \alpha_0 \left(\frac{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right),$$

luego

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right) > \alpha_0 \left(1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right),$$

entonces

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} > \alpha_0 - \alpha_0 e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}},$$

así

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \alpha_0 e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} > \alpha_0,$$

y, por lo tanto

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \alpha_0 \right) = \alpha_1 > \alpha_0,$$

i.e., la sucesión de amplitudes aumenta hasta α^* .

Si $\alpha^* < \alpha_0$ (condición inicial fuera del ciclo), entonces haciendo un proceso análogo

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right) < \alpha_0 \text{ entonces } \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} < \alpha_0 \left(\frac{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right),$$

luego

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right) < \alpha_0 \left(1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right),$$

entonces

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \alpha_0 e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} < \alpha_0,$$

por lo tanto

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \alpha_0 \right) = \alpha_1 < \alpha_0,$$

i.e., la sucesión de amplitudes decrece hasta α^* .

Si $\alpha^* = \alpha_0$ (condición inicial sobre el ciclo), entonces haciendo un proceso análogo

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right) = \alpha_0 \text{ entonces } \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} = \alpha_0 \left(\frac{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right),$$

luego

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} \left(1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right) = \alpha_0 \left(1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \right),$$

entonces

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \alpha_0 e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} = \alpha_0,$$

por lo tanto

$$\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} \left(\frac{\gamma_0\delta_1}{\omega_0^2} + \alpha_0 \right) = \alpha_1 = \alpha_0,$$

i.e., el sistema se mueve por el ciclo límite.

□

La estimación de la calidad exacta de la estabilidad robusta se puede obtener construyendo un ciclo límite globalmente orbitalmente estable y describiendo el conjunto de accesibilidad [33] D_∞ del sistema (1.35), (1.36) (para $\tau_1 \rightarrow \infty$). Para lograrlo se propondrá la solución del problema de desviación máxima sobre los "semiperiodos" de oscilaciones en x_1 propuesto en [29] y se construirá el ciclo límite correspondiente. Encontrar el límite de los mapeos de contracción de Poincaré (cuando la sección de Poincaré es el eje de x_1 en el plano de fase) da la amplitud de oscilación correspondiente al ciclo límite. Por lo tanto, el conjunto de puntos dentro del ciclo y el conjunto de puntos en la órbita del ciclo es el conjunto de accesibilidad D_∞ del sistema (1.35), (1.36) [3].

En el Capítulo 3 se utilizarán los resultados obtenidos en este capítulo y la teoría del Capítulo 1 para construir el conjunto de accesibilidad D_∞ (con el uso del ciclo límite estable (2.15) de la Sección 2.1) y dar una aplicación al problema de transición directa (transición de la región de atracción del foco estable a la región de atracción del atractor periódico) con ayuda de una perturbación acotada en el modelo matemático de Hodgkin-Huxley con modificaciones y simplificación de Soto-Aleksandrov. Se comprobarán los resultados obtenidos por Konovalenko en [24, 23] ahora para un $I_{syn} = 1 \mu A/cm^2$ en el sistema (3.1).

Capítulo 3

Aplicación para realizar la transición de la región de atracción del foco estable a la región de atracción del atractor periódico con ayuda de una perturbación del modelo matemático H-H con modificaciones de Soto-Aleksandrov

Uno de los principales componentes del sistema de bionavegación humano es el mecanorreceptor vestibular [28]. Considérese el bloque de salida del mecanorreceptor, es decir, la neurona primaria aferente (o fibra nerviosa aferente). La actividad principal de la fibra nerviosa es la generación de corriente como respuesta al desplazamiento mecánico de las cilias de las células ciliadas [10]. El estudio del aparato vestibular y, en particular, la neurona primaria aferente, permite resolver los siguientes problemas prácticos:

- Mantener una postura erguida estable para personas mayores [14].
- Simulación de vuelo avanzado para la formación de pilotos en simuladores de vuelo [39].
- Estabilización de la mirada durante situaciones extremas de vuelo [39].

Por lo tanto, existe un gran interés en estudiar los principales parámetros físicos del mecanorreceptor vestibular. El primer modelo matemático de la neurona aferente vestibular fue introducido por Alan Hodgkin y Andrew Huxley en 1952 [20]. Más adelante, el modelo inicial de Hodgkin-Huxley fue mejorado por una serie de experimentos en ratas. Estos experimentos se realizaron en el Laboratorio de Neurofisiología Sensorial dirigido por el Dr. Enrique Soto [7]. En contraste con otros modelos [19, 30], el modelo de Hodgkin-Huxley con modificaciones de Soto-Aleksandrov se basa en parámetros fisiológicos definidos experimentalmente obtenidos del vestíbulo de mamíferos. El modelo modificado incluye una nueva coordenada relacionada con el parámetro de inactivación de la corriente de potasio, cuya dinámica se describe mediante la ecuación de Kolmogorov para procesos de Markov [27, 26] con un número discreto de estados.

3.1. Modelo modificado y simplificado de H-H con modificaciones de Soto-Aleksandrov

La forma explícita de la simplificación y modificación del modelo Hodgkin-Huxley esta dado por

$$\begin{cases} C_m \frac{dV}{dt} = I_{syn} + \gamma_1 v_1(t) - g_L(V - V_L) - g_K n^4 h_K (V - V_K) - g_{Na} (m_\infty(V))^3 (C(V) - n)(V - V_{Na}), & (3.1a) \\ \frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} Q_{10}. & (3.1b) \end{cases}$$

Estas ecuaciones son las modificaciones de las ecuaciones originales de Hodgkin-Huxley con consideración de datos experimentales [5] y el factor de temperatura Q .

Los principales parámetros físicos del sistema (3.1) son:

- V es el potencial de acción de la neurona [mV].
- I_{syn} es el valor constante de la corriente sináptica [$\mu A/cm^2$].
- $v_1(\cdot) \in \mathcal{V} = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}$ es la corriente galvánica (perturbación).
- I_{Na} y I_K son las corrientes medias de sodio y potasio respectivamente

$$I_{Na} = g_{Na} (m_\infty(V))^3 (C(V) - n)(V - V_{Na}),$$

$$I_K = g_K n^4 h_K (V - V_K).$$

La segunda igualdad en (3.1) es la ecuación de probabilidad de Kolmogorov para un proceso de Markov que tiene dos estados discretos, concretamente, abierto (o activo) y cerrado (inactivo) [7, 26]. $n(t)$ es una probabilidad de la presencia de partículas de activación de corriente de potasio en los canales de potasio; h_K es la probabilidad de ausencia de partículas de inactivación en los canales de corriente de potasio; g_{Na} y g_K denotan las conductancias máximas de los canales de sodio y potasio respectivamente. Los parámetros funcionales se agrupan en la Tabla 3.1.

Expresión	Parámetros funcionales
$m_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+33.8}{5.2}\}}$	Parámetro de activación I_{Na}
$h_{Na_\infty}(V) = \frac{1}{1 + \exp\{\frac{V+60.5}{9.9}\}}$	Parámetro de inactivación I_{Na}
$n_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\}}$	Parámetro de activación I_K
$\tau_n(V) = \frac{68}{\exp\{-\frac{V+25}{15}\} + \exp\{\frac{V+30}{20}\}}$	Constante en el proceso de activación de I_K
$Q_{10} = a^{\left(\frac{T-T_0}{10}\right)}$	Factor de temperatura
$C(V) = n_\infty(V) + h_{Na_\infty}(V)$	Constante integral a V fijo

Tabla 3.1: Parámetros funcionales. Tomada de [4].

Los parámetros numéricos del modelo de Hodgkin-Huxley modificado se presentan en la Tabla 3.2.

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
C_m	Capacitancia de la membrana	1	$\mu F/cm^2$
V_{Na}	Potencial eléctrico para Na	52	mV
V_K	Potencial eléctrico para K	-84	mV
V_L	Potencial eléctrico para L	-63	mV
g_{Na}	Conductancia máxima del canal de Na	2.3	ms/cm^2
g_K	Conductancia máxima del canal de K	2.4	ms/cm^2
g_L	Conductancia de la fuga dependiente del potencial	0.03	ms/cm^2
h_K	Parámetro de inactivación de partículas de K	0.7329	1
a	Parámetro de temperatura	3	1
T	Temperatura fisiológica	37	C°
T_0	Temperatura ambiente	20	C°
I_{syn}	Corriente sináptica	0 - 150	$\mu A/cm^2$
γ_1	Amplitud de corriente galvánica	0.5	1

Tabla 3.2: Parámetros numéricos del modelo de Hodgkin-Huxley modificado. Tomada de [4].

En [4] se analizó las intersecciones de las isoclinas del sistema (3.1) y la estabilidad de puntos singulares para diferentes valores del parámetro I_{syn} (para $v_1(t) \equiv 0$), de donde se obtiene:

- Punto de bifurcación Andronov-Hopf en $I_{syn} = 1.147 \mu A/cm^2$.
- Intervalo de bifurcación $[0.99, 1.147)$ con dos atractores.

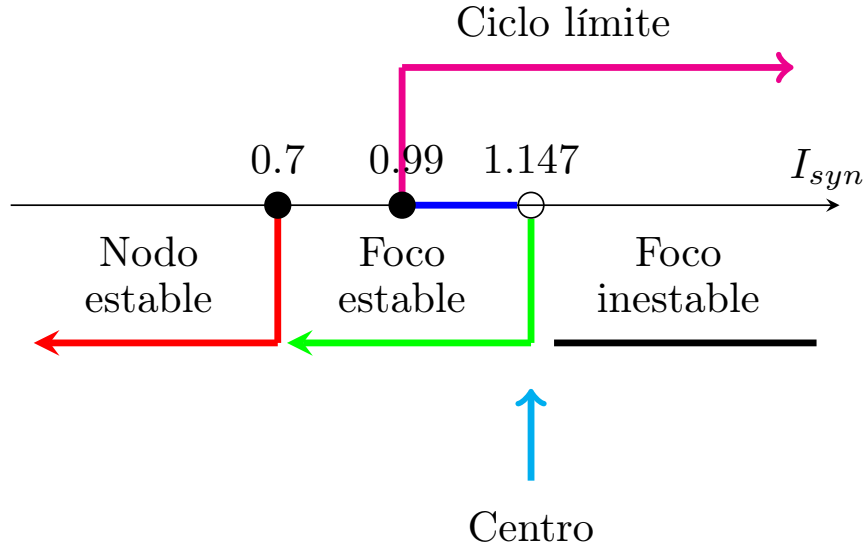


Figura 3.1: Análisis de puntos críticos del sistema (3.1). Intervalo de bifurcación $[0.99, 1.147)$ con dos atractores (foco estable y ciclo límite), intervalo $(-\infty, 0.7]$ con un nodo estable, intervalo $(0.7, 1.147)$ con un foco estable, intervalo $(1.147, \infty)$ con un foco inestable, intervalo $(0.99, \infty)$ con un ciclo límite globalmente orbitalmente asintóticamente estable y punto de bifurcación Andronov-Hopf en 1.147.

Por lo tanto, el sistema (3.1) es un sistema biestable con valores de I_{syn} pertenecientes al intervalo de bifurcación. En la vecindad a la izquierda del intervalo de bifurcación, se tiene un foco asintóticamente estable; en la vecindad a la derecha de este intervalo, se tiene un ciclo límite globalmente orbitalmente asintóticamente estable. En el intervalo de bifurcación $I_{syn} \in [0.99, 1.147)$, el foco estable está situado dentro del ciclo límite. Ver Figura 3.1.

3.1.1. Análisis cualitativo.

Como es usual, para encontrar los puntos críticos del sistema (3.1) se igualan las ecuaciones (3.1a) y (3.1b) a cero (para $v_1(t) \equiv 0$ y $I_{syn} = 1$), i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 1 - 2.3 \left(\frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+33.8}{5.2}\}} \right)^3 \left(\frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\}} + \frac{1}{1 + \exp\{\frac{V+60.5}{9.9}\}} - n \right) (V - 52) \\ &\quad - 1.759n^4(V + 84) - 0.03(V + 63) = 0, \end{aligned}$$

y

$$\frac{dn}{dt} = 6.473 \left(\frac{\frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\}} - n}{\frac{68}{\exp\{-\frac{V+25}{15}\}} + \exp\{\frac{V+30}{20}\}}} \right) = 0.$$

Entonces, resolviendo para $\frac{dn}{dt} = 0$ se tiene

$$\frac{\frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\}}}{\frac{68}{\exp\{-\frac{V+25}{15}\}} + \exp\{\frac{V+30}{20}\}}} - \frac{n}{\frac{68}{\exp\{-\frac{V+25}{15}\}} + \exp\{\frac{V+30}{20}\}}} = 0.$$

Luego

$$\frac{\exp\{-\frac{V+25}{15}\} + \exp\{\frac{V+30}{20}\}}{68 \left(1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\} \right)} = \frac{n \left(\exp\{-\frac{V+25}{15}\} + \exp\{\frac{V+30}{20}\} \right)}{68}.$$

Así

$$n = \frac{\frac{\exp\{-\frac{V+25}{15}\} + \exp\{\frac{V+30}{20}\}}{1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\}}}{\exp\{-\frac{V+25}{15}\} + \exp\{\frac{V+30}{20}\}} = \frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\}}.$$

Sustituyendo el valor de n obtenido en $\frac{dV}{dt}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 1 - 2.3 \left(\frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+33.8}{5.2}\}} \right)^3 \left(\frac{1}{1 + \exp\{\frac{V+60.5}{9.9}\}} \right) (V - 52) \\ &\quad - 1.759 \left(\frac{1}{1 + \exp\{-\frac{V+35}{5}\}} \right)^4 (V + 84) - 0.03(V + 63) = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo numéricamente se tiene que $V = -39.11316233$, entonces

$$n = \frac{1}{1 + \exp\{-\frac{-39.11316233+35}{5}\}} = 0.30520515.$$

Por lo tanto

$$E_0 = (V_0, n_0) = (-39.11316233, 0.30520515).$$

La Figura 3.2 se obtuvo por medio del toolbox pplane8 para MATLAB desarrollado por David Arnold y John C. Polking [32].

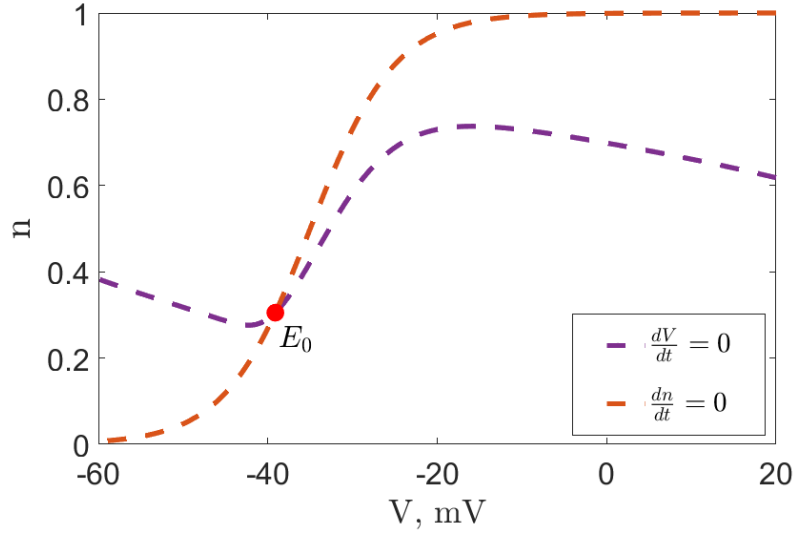


Figura 3.2: Isoclinas del sistema (3.1) (para $v_1(t) \equiv 0$, $I_{syn} = 1$), donde E_0 es el punto crítico.

Se renombran las ecuaciones del sistema (3.1), (3.1a) como

$$f_1(V, n) = 1 - 2.3 \left(\frac{1}{1 + \exp\left\{-\frac{V+33.8}{5.2}\right\}} \right)^3 \left(\frac{1}{1 + \exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\}} + \frac{1}{1 + \exp\left\{\frac{V+60.5}{9.9}\right\}} - n \right) (V - 52) - 1.759n^4(V + 84) - 0.03(V + 63),$$

y (3.1b) como

$$f_2(V, n) = 6.473 \left(\frac{\frac{1}{1 + \exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\}} - n}{\frac{68}{\exp\left\{-\frac{V+25}{15}\right\}} + \exp\left\{\frac{V+30}{20}\right\}}} \right).$$

Para calcular la matriz Jacobiana del sistema con

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} f_1(V, n) &= -1.759n^4 - 0.03 - \frac{2.3(V - 52) \left(\frac{\exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\}}{5(\exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\} + 1)^2} - \frac{45.5394 \exp\{0.10102V\}}{(\exp\left\{\frac{V+60.5}{9.9}\right\} + 1)^2} \right)}{(1 + \exp\left\{-\frac{V+33.8}{5.2}\right\})^3} \\ &\quad - \frac{2.3 \left(-n + \frac{1}{\exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\} + 1} + \frac{1}{\exp\left\{\frac{V+60.5}{9.9}\right\} + 1} \right)}{(1 + \exp\left\{-\frac{V+33.8}{5.2}\right\})^3} \\ &\quad - 0.0019945(V - 52) \left(-n + \frac{1}{\exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\} + 1} + \frac{1}{\exp\left\{\frac{V+60.5}{9.9}\right\} + 1} \right) \left(\frac{\exp\{-0.1924V\}}{(1 + \exp\left\{-\frac{V+33.8}{5.2}\right\})^4} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} f_1(V, n) = \frac{2.3(V - 52)}{(1 + \exp\left\{-\frac{V+33.8}{5.2}\right\})^3} - 4(1.759)n^3(V + 84),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} f_2(V, n) &= \left(-6.473n + \frac{1}{1 + \exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\}} \right) \left(-\frac{\exp\left\{-\frac{V+25}{15}\right\}}{1020} + \frac{\exp\left\{\frac{V+30}{20}\right\}}{1360} \right) \\ &\quad + 1.2946 \left(\frac{\exp\left\{-\frac{V+25}{15}\right\}}{68} + \frac{\exp\left\{-\frac{V+30}{20}\right\}}{68} \right) \left(\frac{\exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\}}{(\exp\left\{-\frac{V+35}{5}\right\} + 1)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} f_2(V, n) = \frac{6.473}{68} \left(\exp\left\{-\frac{V+25}{15}\right\} + \exp\left\{-\frac{V+30}{20}\right\} \right).$$

Al linealizar alrededor de E_0 sustituyendo los valores de V_0 y n_0 en la matriz Jacobiana se obtiene

$$J(V_0, n_0) = \begin{pmatrix} 0.24916299 & -12.86476154 \\ 0.01290379 & -0.30425569 \end{pmatrix},$$

para calcular los valores propios se calcula $\det(J(V_0, n_0) - \eta E_2) = 0$ de donde se obtiene

$$\eta_{1,2} = -0.02754635 \pm 0.29905864i,$$

salvo errores de redondeo, se observa que $Re(\eta) < 0$, por lo que resulta ser un foco asintóticamente estable. Se resuelve numéricamente el sistema en tiempo directo

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = f_1(V, n), \\ \frac{dn}{dt} = f_2(V, n), \end{cases} \quad (3.2)$$

con condiciones iniciales $(V^0, n^0) = (-40.55, 0.2)$ usando Python de donde se obtiene la siguiente órbita cerrada en la Figura 3.3.

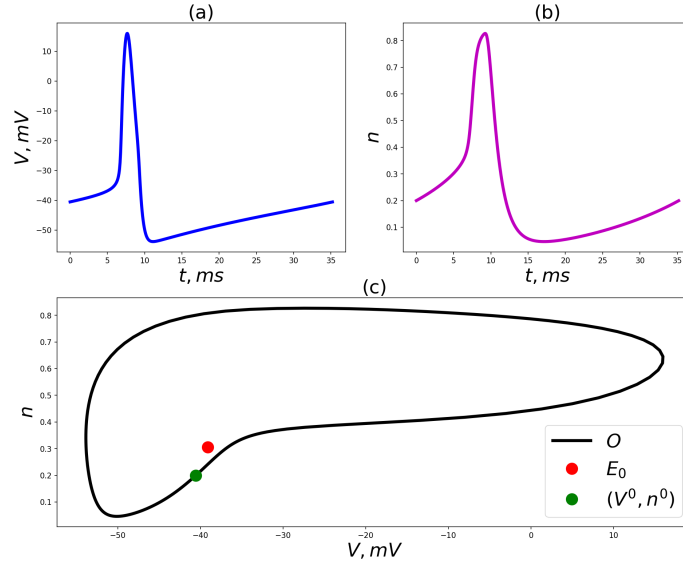


Figura 3.3: (a) Comportamiento de V en el tiempo $t \in [0, 35.2]$. (b) Comportamiento de n en el tiempo $t \in [0, 35.2]$. (c) Órbita cerrada O en tiempo directo, E_0 es el atractor puntual y (V^0, n^0) es la condición inicial. Figura obtenida con el código en Python que se muestra en el Apéndice A.

Para encontrar la frontera de la región de atracción del punto crítico E_0 que es atractor puntual se resuelve numéricamente el sistema (3.2) en tiempo inverso, i.e.,

$$\begin{cases} -\frac{dV}{d\tau} = f_1(V, n), \\ -\frac{dn}{d\tau} = f_2(V, n), \end{cases} \quad (3.3)$$

con condiciones iniciales $(V'_0, n'_0) = (-39, 0.3997)$ usando Python de donde se obtiene la Figura 3.4.

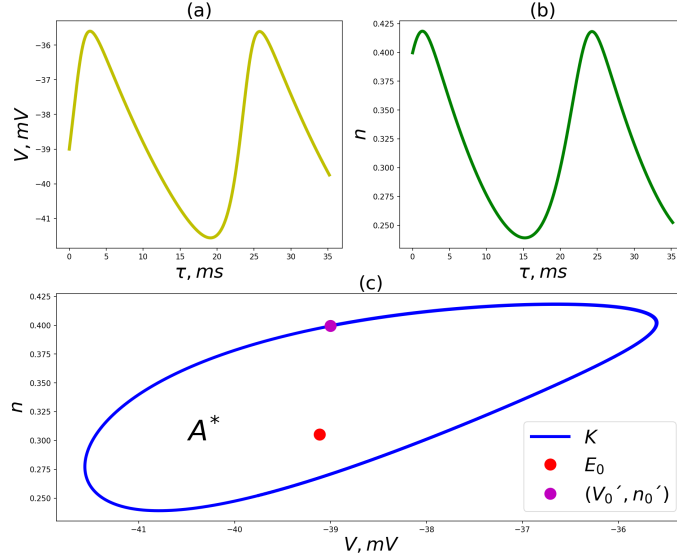


Figura 3.4: (a) Comportamiento de V en el tiempo $\tau \in [0, 35.2]$. (b) Comportamiento de n en el tiempo $\tau \in [0, 35.2]$. (c) K es la frontera de la región de atracción A^* de E_0 atractor puntual (foco estable) con condición inicial (V_0', n_0') . Figura obtenida con el código en Python que se muestra en el Apéndice A.

La órbita cerrada en tiempo directo resulta ser un ciclo límite globalmente orbitalmente asintóticamente estable, es el principal atractor que forma las oscilaciones autoexcitadas de relajación (spikes). El punto crítico es foco estable con región de atracción A^* obtenida mediante la construcción del ciclo límite siendo orbitalmente asintóticamente estable en tiempo inverso [4].

La dinámica se muestra a continuación en la Figura 3.5 obtenida con Pplane [32].

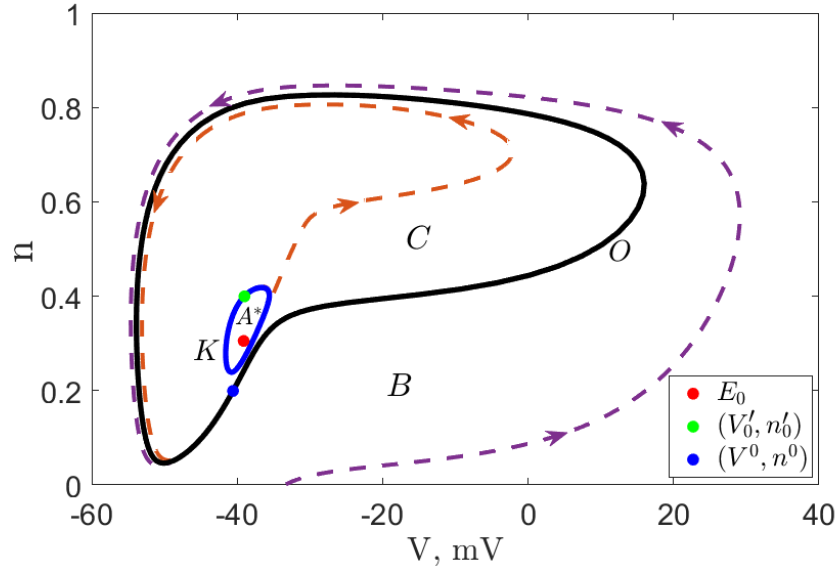


Figura 3.5: Dinámica del modelo de H-H con modificaciones de Soto-Aleksandrov. El atractor puntual es E_0 (foco estable), el atractor periódico es la curva cerrada O , A^* es la región de atracción del atractor puntual, K es la frontera de la región de atracción de A^* , $C \cup B$ es la región de atracción del atractor periódico O . La línea punteada de color morado corresponde al comportamiento de una solución en la región B y la línea punteada de color naranja corresponde al comportamiento de una solución en la región C .

3.2. Construcción del proceso de transición en el modelo modificado y simplificado de Soto-Aleksandrov

Con la teoría presentada en el Capítulo 1, los resultados obtenidos en el Capítulo 2 y la Sección 3.1 de este capítulo se realizará el proceso de transición directa (de A^* a $R^2 \setminus A^*$). En la vecindad del punto crítico E_0 se construye un sistema en variaciones por coordenadas $(\Delta V, \Delta n)^t = (V, n)^t - (V_0, n_0)^t$ y por parámetro $v_1(t) \neq 0$, i.e., se considera el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{d\Delta V}{dt} = 0.24916299 \Delta V - 12.86476154 \Delta n + \gamma_0 v_1(t), \\ \frac{d\Delta n}{dt} = 0.01290379 \Delta V - 0.30425569 \Delta n, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (3.4)$$

sea $\Delta V = x_1$ y $\Delta n = x_2$, entonces

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0.24916299x_1 - 12.86476154x_2 + \gamma_0 v_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = 0.01290379x_1 - 0.30425569x_2, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (3.5)$$

este sistema de coordenadas locales $\{x_1, x_2\}$ cuyo origen coincide con el foco estable E_0 puede ser reescrito de la forma $\dot{x} = Ax + b\gamma_0 v_1$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0.24916299 & -12.86476154 \\ 0.01290379 & -0.30425569 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el sistema de coordenadas $\{x_1, x_2\}$, se consideran los puntos pertenecientes al conjunto de accesibilidad D_∞ del sistema (1.33) para $A_0 = \frac{\partial \phi^0(y^0)}{\partial y}$ y $A_1 = 0$. Para el sistema en variaciones (3.5) se construirá el conjunto de accesibilidad D_∞ resolviendo el problema de la desviación máxima (con el uso de un ciclo límite estable (2.15), Sección 2.1). Para ello se probará que (3.5) es controlable, la matriz de controlabilidad es

$$U = (b, Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 0.24916299 \\ 0 & 0.01290379 \end{pmatrix},$$

de donde se tiene que $\det(U) = 0.01290379 \neq 0$. Por lo tanto el sistema es controlable, del Teorema 8 del Capítulo 1, para $n = 2$ se considera la siguiente transformación no degenerada $x = Cz$, donde $C = UP$ con

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema (3.5) bajo la transformación $x = Cz$ es equivalente al sistema $\dot{z} = C^{-1}x$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= C^{-1}(Ax + b\gamma_0 v_1) = C^{-1}ACz + C^{-1}b\gamma_0 v_1 \\ &= A_0 z + e^2 \gamma_0 v_1, \end{aligned}$$

donde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ y } e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + 0.0550927\lambda + 0.09019492 \\ &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_2. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene la matriz de transformación

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0.24916299 \\ 0 & 0.01290379 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0550927 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.30425569 & 1 \\ 0.01290379 & 0 \end{pmatrix},$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones (3.5) bajo la transformación $x = Cz$ es:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -0.09019492z_1 - 0.0550927z_2 + \gamma_0 v_1 \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in \mathcal{KC} : |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

O en forma unidimensional

$$\ddot{z}_1 + 0.0550927\dot{z}_1 + 0.09019492z_1 = \gamma_0 v_1(t). \quad (3.7)$$

Al resolver el problema de la desviación máxima [9], de (3.7) se puede obtener el conjunto de accesibilidad, que contiene puntos interiores y puntos de la órbita del ciclo límite orbitalmente asintóticamente estable:

$$\begin{cases} z_1(t) = \pm \left(\frac{(0.2)0.5}{0.0901} - \left(\alpha^* + \frac{0.2(0.5)}{0.0901} \right) e^{-0.0275t} \left(\frac{0.0275}{0.299} \text{sen}(0.299t) + \text{cos}(0.299t) \right) \right), \\ z_2(t) = \pm \frac{0.0901}{0.299} \left(\alpha^* + \frac{0.2(0.5)}{0.0901} \right) e^{-0.0275t} \text{sen}(0.299t), \end{cases} \quad (3.8)$$

donde $0 \leq t \leq t_1^0 = \frac{\pi}{\beta} \approx 10.5$, $\alpha^* = \frac{0.2(0.5)}{0.0901} \left(\frac{1 + \exp\left(-\frac{\pi \cdot 0.0275}{0.299}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\pi \cdot 0.0275}{0.299}\right)} \right)$ es el límite de la sucesión de amplitud máxima de la coordenada oscilante $z_1(t)$, $\mu = 0.02754635$, $\beta = 0.2990587$, $\omega_0^2 = 0.09019492$, $\gamma_0 = 0.2$ y $\delta_1 = \frac{1}{2}I_{syn} = 0.5$. El ciclo límite obtenido se muestra en la Figura 3.6

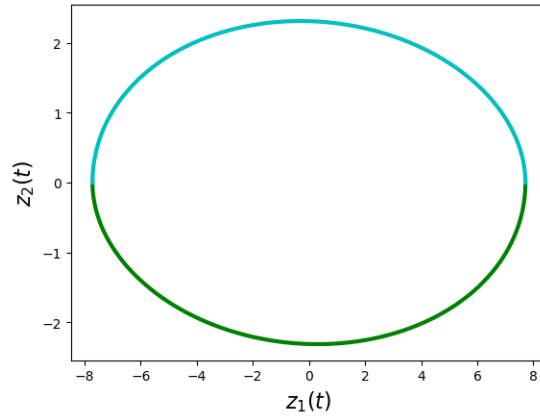


Figura 3.6: Conjunto de accesibilidad D_∞ para el sistema (3.6). Figura obtenida con el código en Python que se muestra en el Apéndice A.

La frecuencia angular del sistema (3.7) es $\omega = 0.2990588$, entonces el periodo de oscilaciones de este sistema es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 21.0099 \text{ ms} = 0.0210099 \text{ s}.$$

De dónde se obtiene la frecuencia de oscilación del sistema

$$v = \frac{1}{T} \approx 47.6 \text{ Hz}.$$

Se regresa a las coordenadas x_1 y x_2 al conjunto de accesibilidad D_∞ , nótese que $z = C^{-1}x$, donde

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 77.49661 \\ 1 & -23.57878 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{cases} z_1 = 77.49661x_2, \\ z_2 = x_1 - 23.57878x_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{cases} x_1(t) = z_2(t) + \frac{23.57878}{77.49661} z_1(t), \\ x_2(t) = \frac{z_1(t)}{77.49661}, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde $0 \leq t \leq t_1^0$. El ciclo límite obtenido se muestra en la Figura 3.7

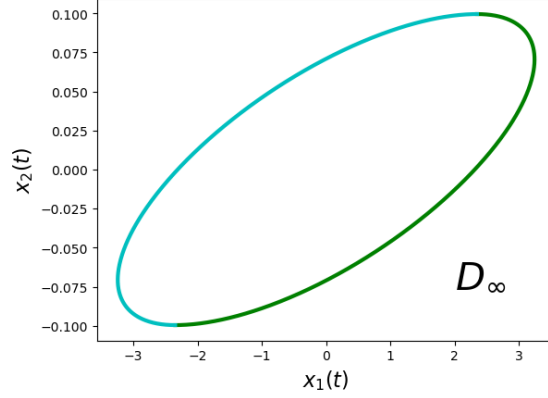


Figura 3.7: Conjunto de accesibilidad D_∞ para el sistema (3.10). Figura obtenida con el código en Python que se muestra en el Apéndice A.

Por último, D_∞ se traslada al punto E_0 para $t \in [0, t_1^0]$ del sistema (3.1), i.e.,

$$\begin{cases} V(t) = z_2(t) + \frac{23.57878}{77.49661} z_1(t) + V_0, \\ n(t) = \frac{z_1(t)}{77.49661} + n_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Obteniendo la siguiente Figura 3.8

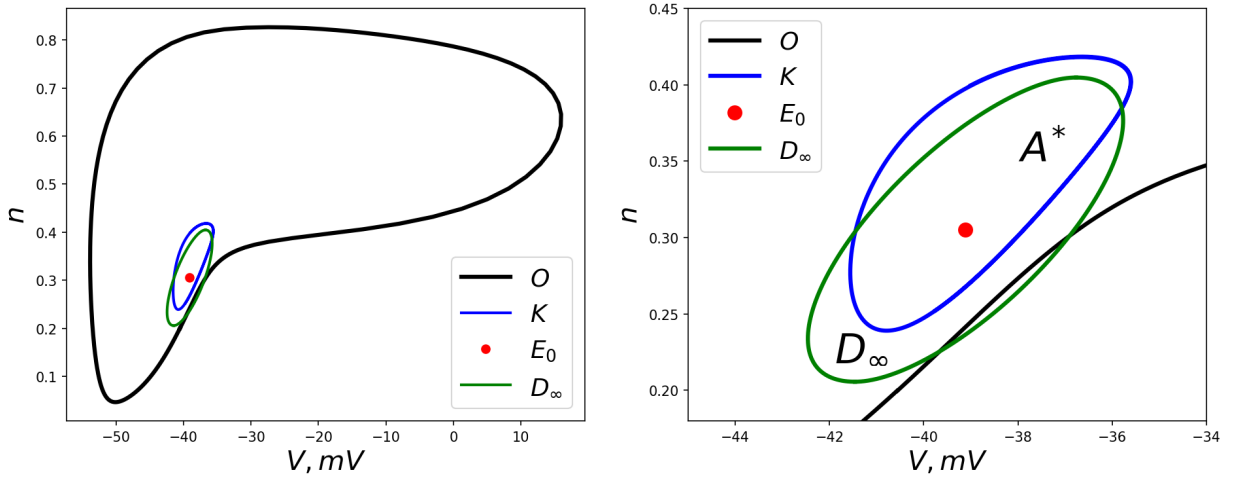


Figura 3.8: Conjunto de accesibilidad D_∞ para el sistema (3.1). Figura obtenida con el código en Python que se muestra en el Apéndice A.

Se comparará la región de atracción A^* con el conjunto de accesibilidad D_∞ , para ello, se encontrará la distancia de Hausdorff entre los conjuntos. En [4, 23, 24] se encontraron los puntos $M(x_1^0, x_2^0) \in D_\infty$, $x_1^0 = -42.131$, $x_2^0 = 0.239$ y $N(V_1^0, n_1^0) \in A^*$, $V_1^0 = -41.761$, $n_1^0 = 0.273$ correspondientes a la distancia de Hausdorff

$$d(D_\infty, A^*) = d(M, N) = 0.372 > 0, \quad (3.12)$$

que es solución al problema de transición (para $I_{syn} = 0.99 \mu A/cm^2$).

Dado que la distancia de Hausdorff en este caso es estrictamente positiva, se puede enunciar lo siguiente: bajo la acción de una pequeña perturbación permanente, el sistema (3.1) es capaz de realizar la transición desde la región de atracción del atractor puntual a la región de atracción del atractor periódico [24].

De acuerdo con la solución a este problema de transición, la corrección de la actividad galvánica de la neurona primaria aferente es una función periódica cuya frecuencia es igual a la frecuencia de resonancia del sistema oscilatorio (3.5), de acuerdo con el artículo Perturbed Stable Systems on a Plane. Part 2 para $I_{syn} = 1 \mu A/cm^2$, $v_1(t) = \frac{1}{2}I_{syn}sign(\sin(\omega t))$, donde $t \in [t_0, t_1]$, la amplitud de la corriente galvánica es $\gamma_0 = 0.2$ [4].

Debido a que $v_1(t) = \pm 0.4998$:

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_0 v_1(t) &\leq I_{syn} \leq 1 + \gamma_0 v_1(t), \\ 0.9 &\leq I_{syn} \leq 1.099. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en presencia de la estimulación galvánica en forma de perturbación permanente, el cambio de I_{syn} no excederá el valor de $1.099 \mu A/cm^2$, i.e., el sistema continuara ubicado en el intervalo de bifurcación.

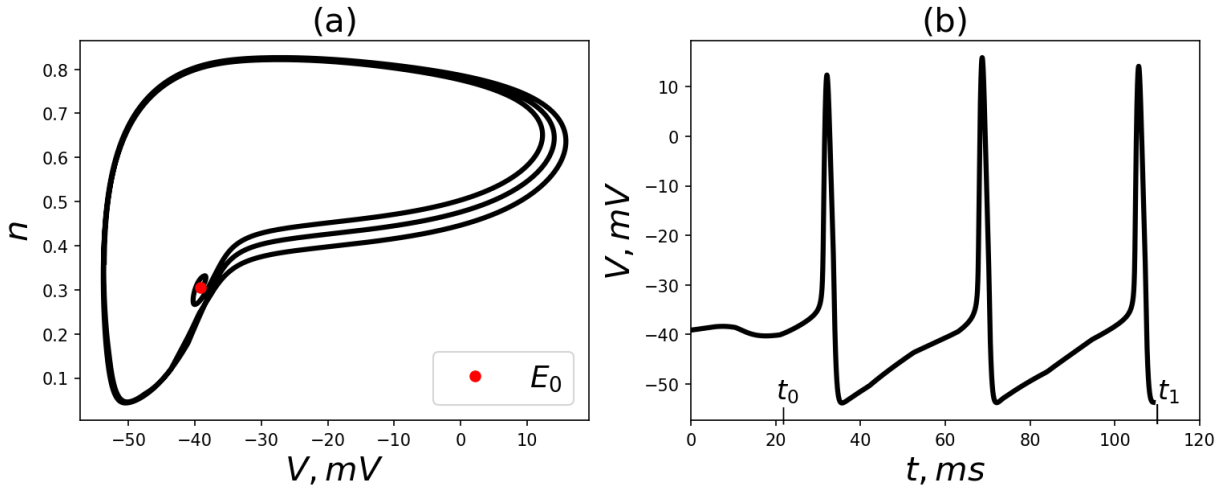


Figura 3.9: (a) Gráfica V vs n del sistema (3.1) con la perturbación $v_1(t) = \gamma_0 \frac{1}{2} I_{syn} sign(\sin(\omega t))$ y condición inicial E_0 . (b) Gráfica t vs V . Respuesta del sistema (3.1) a la estimulación galvánica. Figura obtenida con el código en Python que se muestra en el Apéndice A.

- Si $0 \leq t < t_0$ entonces el sistema esta en modo de espera de estímulo mecánico.
- Si $t_0 \leq t < t_1$ entonces hay estimulación galvánica en el sistema.

El modelo matemático (1.33) para $A_1 = 0$ corresponde al efecto del estímulo galvánico sobre las variaciones de la corriente sináptica. Las condiciones iniciales del sistema (3.1) están situadas en la región de atracción A^* , es decir, el sistema está en el modo de la expectativa de un estímulo mecánico. Dado que dicho estímulo está ausente en la entrada del mecanorreceptor vestibular, la estimulación galvánica de la neurona aferente primaria causa la actividad de esta neurona para $t \in [t_0, t_1]$ en forma de un paquete de espigas. La implementación de esta actividad corresponde a la corrección de un sistema de navegación inercial cuando el estímulo mecánico externo está ausente [4].

Conclusión

En esta tesis se obtuvieron los siguientes resultados:

- Solución del problema de reducción del sistema dinámico lineal, disipativo y controlable al sistema no lineal, autónomo y auto oscilante con atractor periódico.
- Obtención analítica del conjunto de accesibilidad para el sistema (2.2) construyendo una sucesión de amplitudes a partir de la solución sucesiva del problema de desviación máxima para el sistema en tiempo inverso, encontrando el límite de esta sucesión (amplitud de las auto oscilaciones) obteniendo el ciclo límite de las auto oscilaciones resolviendo el problema de desviación máxima para el sistema en tiempo directo y demostrando que el ciclo límite con amplitud de las auto oscilaciones es orbitalmente asintóticamente estable.
- Solución del problema de transición de un sistema biestable (modelo matemático de Hodgkin-Huxley con modificaciones y simplificación de Soto-Aleksandrov) desde la región de atracción de un foco estable a la región de atracción del atractor periódico (problema de transición directa). Aplicación de esta teoría para la solución del problema de la estimulación galvánica de la neurona primaria aferente (bloqueo de salida del mecanorreceptor) del aparato vestibular.

El trabajo es interesante en el sentido de que ofrece una solución para el problema de construir un conjunto de accesibilidad para sistemas lineales controlables. Permitiendo realizar una transición de la región de atracción del foco estable a la región de atracción del atractor periódico para sistemas biestables en donde el foco estable se encuentre a una vecindad cercana del atractor periódico.

La solución de estos problemas teóricos da lugar a diversas aplicaciones prácticas como la corrección galvánica de la actividad del aparato vestibular del ser humano [23]. Se comprobaron los resultados obtenidos por Konovalenko en [24, 23] para el problema de transición directa en el modelo matemático de Hodgkin-Huxley con modificaciones y simplificación de Soto-Aleksandrov, haciendo el cambio $I_{syn} = 1 \mu A/cm^2$ para el sistema (3.1).

Apéndice A

Códigos en Python

```
# Importación de bibliotecas necesarias

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from sympy.abc import v,n
from sympy import *
import mpmath
```

```
#Código para realizar la Figura 2.4: Ciclo límite de las auto-oscilaciones.
#Parámetros
mu = 0.8
beta = np.sqrt(1-mu**2)
w02 = 1
t01 = np.pi/beta
gamma0 = 0.2
Isyn = 1

#Conjunto de accesibilidad del sistema (2.10)
t = np.linspace(0,t01,500)
delta = 0.5*Isyn

#alpha estrella (límite de la sucesión)
alpha_estr = ((delta*gamma0)/w02)*((1+np.exp(-(mu*np.pi/beta)))/
                                   (1-np.exp(-(mu*np.pi/beta))))

#Sistema (2.10)
def x1(t,delta,mu,beta,alpha,gamma0):
    x1 = ((delta*gamma0)/w02)-(alpha+((delta*gamma0)/w02))*
    np.exp(-mu*t)*((mu/beta)*np.sin(beta*t)+np.cos(beta*t))
    return (-x1,x1)

def x2(t,delta,mu,beta,alpha,gamma0):
    x2 = (w02/beta)*(alpha+((delta*gamma0)/w02))*np.exp(-mu*t)*np.sin(beta*t)
    return (-x2,x2)
```

```

x1t = x1(t,delta,mu,beta,alpha_estr,gamma0)
x2t = x2(t,delta,mu,beta,alpha_estr,gamma0)

plt.plot(x1t[0],x2t[0], '-g',lw=3)
plt.plot(x1t[1],x2t[1], '-c',lw=3)
plt.xlabel('$ x_1(t) $',fontsize=16)
plt.ylabel('$ x_2(t) $',fontsize=16)
plt.show()

```

```

#Código para realizar la Figura 3.2.
#Tiempo para formar el ciclo límite en tiempo directo.
t = np.linspace(0, 35.2, 500)

#Sistema (3.1) con  $v_1(t)=0$  y  $I_{syn}=1$ .
def HHSA(State,t):
    v, n = State
    v_dot = 1-2.3*((1/(1+np.exp(-(v+33.8)/5.2))))**3)*(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))
        +1/(1+np.exp((v+60.5)/9.9))-n)*(v-52)-1.759*(n**4)*(v+84)-0.03*(v+63)
    n_dot = 6.473*(-n+(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))))/(68/(np.exp(-(v+25)/15)
        +np.exp((v+30)/20)))

    return v_dot, n_dot

state = odeint(HHSA, (-40.55,0.2), t)
v, n = state.T

fig = plt.figure(figsize=(15, 12), dpi=150)
ax1 = fig.add_subplot(212)
ax2 = fig.add_subplot(221)
ax3 = fig.add_subplot(222)

#Gráfica órbita cerrada en tiempo directo
ax1.plot(v,n, '-k',label='$y^0(t)$',lw=3)
ax1.plot(-39.11316233,0.30520515, 'ro',label='$E_0$',markersize=10)
ax1.plot(-40.55,0.2, 'go',label='$(V^0,n^0)$',markersize=10)
ax1.set_xlabel('$ V $',fontsize=20)
ax1.set_ylabel('$ n $',fontsize=20)
ax1.set_title('(c)',fontsize=20)
ax1.legend(fontsize=20)

#Gráfica del comportamiento de V en tiempo directo.
ax2.plot(t,v, '-b',lw=3)
ax2.set_xlabel('$ t $',fontsize=20)
ax2.set_ylabel('$ V $',fontsize=20)
ax2.set_title('(a)',fontsize=20)

#Gráfica del comportamiento de n en tiempo directo.
ax3.plot(t,n, '-m',lw=3)
ax3.set_xlabel('$ t $',fontsize=20)
ax3.set_ylabel('$ n $',fontsize=20)
ax3.set_title('(b)',fontsize=20)
plt.show()

```

```

#Código para realizar la Figura 3.3.
#Sistema (3.1) con  $v_1(t)=0$  y  $I_{syn}=1$  en tiempo inverso.
def HHSAIN(State,t):
    v, n = State
    v_dot=- (1-2.3*((1/(1+np.exp(-(v+33.8)/5.2))))**3)*(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))
        +1/(1+np.exp((v+60.5)/9.9)))-n*(v-52)-1.759*(n**4)*(v+84)-0.03*(v+63))
    n_dot=-6.473*(-n+(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))))/(68/(np.exp(-(v+25)/15)
        +np.exp((v+30)/20)))

    return v_dot, n_dot

#Tiempo para formar el ciclo límite en tiempo inverso.
t1 = np.linspace(0, 35.2, 5000)

state1 = odeint(HHSAIN, (-39, 0.3997), t1)
v1, n1 = state1.T

fig = plt.figure(figsize=(15, 12), dpi=150)
ax1 = fig.add_subplot(212)
ax2 = fig.add_subplot(221)
ax3 = fig.add_subplot(222)

#Gráfica de la frontera de la región de atracción  $A^*$  de  $E_0$ 
ax1.plot(v1,n1, '-b', label='$FrA^{-*}$', lw=3)
ax1.plot(-39.11316233,0.30520515, 'ro', label='$E_0$', markersize=10)
ax1.plot(-39,0.3997, 'mo', label='$ (V_0, n_0) $', markersize=10)
ax1.set_xlabel('$ V $', fontsize=20)
ax1.set_ylabel('$ n $', fontsize=20)
ax1.set_title('(c)', fontsize=20)
ax1.legend(fontsize=20)

#Gráfica del comportamiento de  $V$  en tiempo inverso.
ax2.plot(t1,v1, '-y', lw=3)
ax2.set_xlabel(r'$\tau$', fontsize=20)
ax2.set_ylabel('$ V $', fontsize=20)
ax2.set_title('(a)', fontsize=20)

#Gráfica del comportamiento de  $n$  en tiempo inverso.
ax3.plot(t1,n1, '-g', lw=3)
ax3.set_xlabel(r'$\tau$', fontsize=20)
ax3.set_ylabel('$ n $', fontsize=20)
ax3.set_title('(b)', fontsize=20)
plt.show()

```

```

#Código para realizar el problema de transición directa.
#Paso 1. Construir el sistema en variaciones

mpmath.mp.dps = 15

#Modelo modificado y simplificado de H-H (sistema (3.1),  $v_1(t)=0$ )
Isyn=1
ec1 = Isyn-2.3*((1/(1+exp(-(v+33.8)/5.2))))**3)*(1/(1+exp(-(v+35)/5))+
    1/(1+exp((v+60.5)/9.9)))-n*(v-52)-1.759*(n**4)*(v+84)-0.03*(v+63)
ec2 = 6.473*(-n+(1/(1+exp(-(v+35)/5))))/(68/(exp(-(v+25)/15)+exp((v+30)/20)))

```

```

#Punto de equilibrio
res = nsolve((ec1, ec2), (v, n), (-39, 0))
print('Punto de equilibrio:\n',res)

```

```

Punto de equilibrio:
Matrix([[ -39.1131623256229], [0.305205146514060]])

```

```

# Matrices para el sistema en variaciones

dv11 = diff(ec1,v)
dv12 = diff(ec1,n)
dv21 = diff(ec2,v)
dv22 = diff(ec2,n)
a11 = dv11.subs({v:res[0],n:res[1]})
a12 = dv12.subs({v:res[0],n:res[1]})
a21 = dv21.subs({v:res[0],n:res[1]})
a22 = dv22.subs({v:res[0],n:res[1]})

#Matriz A del sistema (3.5)
A = np.array([[a11,a12],[a21,a22]],dtype=float)
#Valores propios del sistema en variaciones (3.5)
eigen = np.linalg.eigvals(A)
print('Valores propios:\n',eigen)
#Matriz b del sistema (3.5)
b = np.array([[1],[0]])

#Paso 2.
# Programa para comprobar la controlabilidad del sistema en variaciones

def contro(A,b):
    Ab = np.dot(A,b)
    # Matriz de controlabilidad
    U = np.concatenate((b,Ab),axis=1)
    detU = np.linalg.det(U)
    if detU == 0:
        print('El sistema no es controlable')
    else:
        return detU

print('det(U):\n',contro(A,b))

```

```

Valores propios:
[-0.02754635+0.29905864j -0.02754635-0.29905864j]
det(U):
0.012903785740811786

```

```

#Teorema 8 de la forma canónica
#Polinomio característico
polca = np.poly(A)
#Matriz P
P = np.array([[polca[1],1],[1,0]])
#Matriz C
Ab = np.dot(A,b)
U = np.concatenate((b,Ab),axis=1)

```

```

C = np.dot(U,P)
#Matriz A_0
A0 = np.array([[0,1],[-polca[2],-polca[1]])
#Matriz e^-2
e2 = np.array([[0],[1]])
#Matriz inversa de C
Cinv = np.linalg.inv(C)
print('Matriz A0:\n',A0)

```

Matriz A0:

```

[[ 0.          1.          ]
 [-0.09019487 -0.0550927 ]]

```

```

#Código para realizar la Figura 3.5:Conjunto de accesibilidad para el
#sistema (3.6)

#Parámetros
mu = polca[1]/2
beta = np.sqrt(polca[2]-mu**2)
w02 = polca[2]
t01 = np.pi/beta
gamma0 = 0.2

#Conjunto de accesibilidad del sistema en forma canónica
t = np.linspace(0,t01,500)
delta = 0.5*Isyn

#alpha estrella (límite de la sucesión)
alpha_estr = ((delta*gamma0)/w02)*((1+np.exp(-(mu*np.pi/beta)))/
(1-np.exp(-(mu*np.pi/beta))))

#Sistema (3.8)
def x1(t,delta,mu,beta,alpha,gamma0):
    x1 = ((delta*gamma0)/w02)-(alpha+((delta*gamma0)/w02))*
    np.exp(-mu*t)*((mu/beta)*np.sin(beta*t)+np.cos(beta*t))
    return (-x1,x1)

def x2(t,delta,mu,beta,alpha,gamma0):
    x2 = (w02/beta)*(alpha+((delta*gamma0)/w02))*np.exp(-mu*t)*np.sin(beta*t)
    return (-x2,x2)

x1t = x1(t,delta,mu,beta,alpha_estr,gamma0)
x2t = x2(t,delta,mu,beta,alpha_estr,gamma0)

plt.plot(x1t[0],x2t[0],'-g',lw=3)
plt.plot(x1t[1],x2t[1],'-c',lw=3)
plt.xlabel('$ z_1(t) $',fontsize=16)
plt.ylabel('$ z_2(t) $',fontsize=16)
plt.show()

```

```

#Código para realizar la Figura 3.6.
#Conjunto de accesibilidad para el sistema (3.10)

plt.plot(x2t[0] + ((-Cinv[1][1])/Cinv[0][1])*x1t[0],

```

```

        (1/Cinv[0][1])*x1t[0], '-g',lw=3)
plt.plot(x2t[1] + ((-Cinv[1][1])/Cinv[0][1])*x1t[1],
        (1/Cinv[0][1])*x1t[1], '-c',lw=3)
plt.xlabel('$ x_1(t) $',fontsize=16)
plt.ylabel('$ x_2(t) $',fontsize=16)
plt.show()

```

#Código para realizar la Figura 3.7.

#Condición inicial para el ciclo límite en tiempo directo

```
condini = (-40.55,0.2)
```

#Condición inicial para la región de atracción de E0 en tiempo inverso

```
condininver = (-39, 0.3997)
```

```
t = np.linspace(0, 35.2, 500)
```

#Modelo modificado y simplificado de H-H (sistema (3.1)) en tiempo directo

```
def HHSA(State,t):
```

```
    v, n = State
```

```
    v_dot = 1-2.3*((1/(1+np.exp(-(v+33.8)/5.2)))**3)*(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))
        +1/(1+np.exp((v+60.5)/9.9))-n)*(v-52)-1.759*(n**4)*(v+84)-0.03*(v+63)
```

```
    n_dot = 6.473*(-n+(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))))/(68/(np.exp(-(v+25)/15)+
        np.exp((v+30)/20)))
```

```
    return v_dot, n_dot
```

```
state = odeint(HHSA, (-40.55,0.2), t)
```

```
v, n = state.T
```

#Modelo modificado y simplificado de H-H (sistema (3.1)) en tiempo inverso

```
def HHSAIn(State,t):
```

```
    v, n = State
```

```
    v_dot= -(1-2.3*((1/(1+np.exp(-(v+33.8)/5.2)))**3)*(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))
        +1/(1+np.exp((v+60.5)/9.9))-n)*(v-52)-1.759*(n**4)*(v+84)-0.03*(v+63))
```

```
    n_dot = -6.473*(-n+(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))))/(68/(np.exp(-(v+25)/15)+
        np.exp((v+30)/20)))
```

```
    return v_dot, n_dot
```

```
state1 = odeint(HHSAIn, (-39, 0.3997), t)
```

```
v1, n1 = state1.T
```

```
fig = plt.figure(figsize=(15, 12), dpi=150)
```

```
ax1 = fig.add_subplot(221)
```

```
ax2 = fig.add_subplot(222)
```

#Gráfica del conjunto de accesibilidad junto al atractor periodico, la frontera

#de la región de atracción A y el atractor puntual E0*

```
ax1.plot(v,n, '-k', label='$y^0(t)$',lw=3)
```

```
ax1.plot(v1, n1, '-b', label = '$FrA^{\ast}$',lw=2)
```

```
ax1.plot(-39.11316233,0.30520515, 'ro',label='$E_0$',markersize=6)
```

```
ax1.plot(x2t[0]+(23.57878/77.49661)*x1t[0]-39.11316233,
```

```
        (1/77.49661)*x1t[0]+0.30520515, '-g',lw=2)
```

```
ax1.plot(x2t[1]+(23.57878/77.49661)*x1t[1]-39.11316233,
```

```
        (1/77.49661)*x1t[1]+0.30520515, '-g',label='$D_{\infty}$',lw=2)
```

```
ax1.set_xlabel('$ V $',fontsize=20)
```

```
ax1.set_ylabel('$ n $',fontsize=20)
```

```

ax1.legend(fontsize=18)

ax2.plot(v,n,'-k',label='$y^0(t)$',lw=3)
ax2.plot(v1, n1, '-b', label = '$FrA^{*}$',lw=3)
ax2.plot(-39.11316233,0.30520515,'ro',label='$E_0$',markersize=10)
ax2.plot(x2t[0]+(23.57878/77.49661)*x1t[0]-39.11316233,
         (1/77.49661)*x1t[0]+0.30520515,'-g',lw=3)
ax2.plot(x2t[1]+(23.57878/77.49661)*x1t[1]-39.11316233,
         (1/77.49661)*x1t[1]+0.30520515,'-g',label='$D_{\infty}$',lw=3)
ax2.set_xlabel('$ V $',fontsize=20)
ax2.set_ylabel('$ n $',fontsize=20)
ax2.set_xlim(-50,-30)
ax2.set_ylim(0.15,0.5)
ax2.legend(fontsize=18)
plt.show()

```

```

#Código para realizar la Figura 3.7: Sistema (3.1) con Isyn=1 y
#v1(t)=0.1 sign(sen(wt))

#Modelo modificado y simplificado de H-H (sistema 3.1) en tiempo directo
#con control v1(t)=0.1 sign(sen(wt))
def HHSAC(State,t):
    v, n = State
    v_dot = 1-2.3*((1/(1+np.exp(-(v+33.8)/5.2))))**3)*(1/(1+np.exp(-(v+35)/5)))+
            1/(1+np.exp((v+60.5)/9.9))-n*(v-52)-1.759*(n**4)*(v+84)-0.03*(v+63)+
            0.1*np.sign(np.sin(0.299059*t))
    n_dot = 6.473*(-n+(1/(1+np.exp(-(v+35)/5))))/(68/(np.exp(-(v+25)/15)+
            np.exp((v+30)/20)))

    return v_dot, n_dot
#Tiempo t1
t = np.linspace(0,109,5000)
state = odeint(HHSAC, (-39.11316233,0.30520515), t)
v, n = state.T

fig = plt.figure(figsize=(12, 9), dpi=150)
ax1 = fig.add_subplot(221)
ax2 = fig.add_subplot(222)
#Gráfica del sistema (3.1) con el control v_1(t)=0.1sign(sen(wt))
#y condición inicial E0
ax1.plot(v,n,'-k',lw=3)
ax1.plot(-39.11316233,0.30520515,'ro',label='$E_0$',markersize=6)
ax1.set_xlabel('$ V,mV $',fontsize=20)
ax1.set_ylabel('$ n $',fontsize=20)
ax1.set_title('(a)',fontsize=20)
ax1.legend(fontsize=18)

#Gráfica t vs V. Respuesta del sistema (3.1) a la estimulación galvánica
ax2.plot(t,v,'-k',lw=3)
ax2.set_xlabel('$ t,ms $',fontsize=20)
ax2.set_ylabel('$ V,mV $',fontsize=20)
ax2.set_xlim(0,120)
ax2.set_title('(b)',fontsize=20)
plt.text(20,-53,'$t_0$',fontsize=16)

```

```
plt.text(21,-57,'$$',fontsize=10)
plt.text(110,-53,'$t_1$',fontsize=16)
plt.text(109,-57,'$$',fontsize=12)
plt.show()
```

```
#Grafica del control
f = lambda x: 0.1*np.sign(np.sin(beta*x))
#tiempo t1
t = np.linspace(0,109,5000)
ft = f(t)

plt.plot(t,ft,'-b')
plt.xlabel('$ t,ms $',fontsize=20)
plt.ylabel(r'$ \gamma_0 \frac{1}{2} I_{syn} \text{sign}(\text{sen}(\omega t)) $',
,fontsize=14)
plt.show()
```

Bibliografía

- [1] ALEKSANDROV, V.V. AND ALEKSANDROVA, O.V. AND PRIKHOD'KO, I.P. AND TEMOLTZI-AVILA, R., Synthesis of Self-Oscillations, Moscow State University Mechanics Bulletin, n.3, 65-68 p., 2007.
- [2] ALEKSANDROV, V.V. AND ALEKSANDROVA, T.B. AND CRUZADO, L.L. AND ESCAMILLA, R.J.A., Controlled Transition in a Model of Biomass Dynamics of Root Hemiparasitic Plants, Moscow State University Mechanics Bulletin, n.4, 111-117 p., 2021.
- [3] ALEXANDROV, V.V. AND ALEXANDROVA, O.V. AND KONOVALENKO, I. S. AND TIKHONOVA, K.V., Perturbed stable systems on the plane 1, Moscow State University Mechanics Bulletin, № 5. 30-36 p., 2016.
- [4] ALEXANDROV, V.V. AND ALEXANDROVA, O.V. AND KONOVALENKO, I. S. AND TIKHONOVA, K.V., Perturbed stable systems on the plane 2, Moscow State University Mechanics Bulletin, № 1. 53-57 p., 2017.
- [5] ALEXANDROV, V.V. AND ALEXANDROVA, T.B. AND ANGELES VASKES, AND VEGA, R. AND REIES ROMERO, M. AND SOTO, E. AND TIKHONOVA, K.V. AND SHULENINA, N.E., An output signal correction algorithm for vestibular mechanoreceptors to simulate passive turns, Moscow State University Mechanics Bulletin, n.5, 130-134 p., 2015.
- [6] ALEXANDROV, V.V. AND BOLOTIN, Y.V. AND LEMAK, S. S. AND PARUSNIKOV, N.A. AND ZLOCHEVSKY, S.I. AND GUERRERO, S. W. F., Introduction to control of dynamic systems, Puebla, -239 p., 2009.
- [7] ALEXANDROV, V.V. AND MIKHALEVA, E.YU. AND SOTO, E. AND GARCIA TAMAYO, R., A modification of the Hodgkin-Huxley model for primary neurons of the vestibular apparatus, Moscow State University Mechanics Bulletin, n.5, 21-24 p., 2006.
- [8] ALEKSANDROV, V.V. AND REYES-ROMERO, M. AND SIDORENKO, G.YU. AND TEMOLTZI-AVILA, R., Stability of Controlled Inverted Pendulum under Permanent Horizontal Perturbations of the Supporting Point, Mechanics of Solids, n.2, 187-193 p., 2010.
- [9] ALEXANDROV V.V., AND KRASILNIKOV, K. S., AND TORRES, A., Absolute stability of one-dimensional oscillating systems. // In. Bulgakov's problem of the maximum deviation and its application, M. : Moscow State University, 48-57 p., 1993.
- [10] BAE, Y.K. AND BARR, M.M., Sensory roles of neuronal cilia: cilia development, morphogenesis, and function in *C. elegans*. *Frontiers in bioscience: a journal and virtual library*, 13, 5959, 2008.
- [11] BAIER, R. AND GERDTS, M. AND XAUSA, I., Approximation of reachable sets using optimal control algorithms, *Numer. Algebra Control Optim.*, 519-548 pag, 2013.
- [12] DEMIDOVICH, B.P., Lectures on the mathematical theory of stability, -M. FIZMATLIT, 1967.
- [13] DE LA CRUZ, R. C. A., Tesis de Maestría: l_1 y la Propiedad del Punto Fijo, Guanajuato, Febrero 2014.
- [14] DIONYSIOTIS, Y., Analyzing the problem of falls among older people, *International journal of general medicine*, n. 5, 805 p., 2012.

- [15] ECHEVERRIA, M., Apuntes de Ecuaciones Diferenciales, Dpto. de Mat. Univ. de Extremadura, 1074 p., 2016.
- [16] ELSGOLTS, L.E., Differential Equations and Differential Calculus, Editorial, Moscow, 2000.
- [17] ELSGOLTS, L., Differential equations and the calculus variations. - M. MIR PUBLISHERS, 1977.
- [18] FARKAS, M., Periodic Motions, Budapest University of Technology, 1994.
- [19] GOLDWYN, J.H. AND SHEA-BROWN, E., The what and where of adding channel noise to the Hodgkin-Huxley equations, PLoS computational biology, 7(11), e1002247, 2011.
- [20] HODGKIN, A.L. AND HUXLEY, A.F., A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, The Journal of physiology, 117(4), 500-544 p., 1952.
- [21] HUTTENLOCHER, D. P., AND KLANDERMAN, G. A., AND RUCLIDGE, W., Comparing images using the Hausdorff distance. Transactions on patterns analysis and machine intelligence, vol. 15, n 9, 1993.
- [22] JORDAN, D.W. AND SMITH, P., Nonlinear Ordinary Differential Equations, Oxford University press, 525 p., 2007.
- [23] KONOVALENKO, I. S., Tesis de Doctorado: The problems of construction of the reachable sets for stable oscillatory systems and its applications, Puebla, 2020.
- [24] KONOVALENKO, I. S., Tesis de Maestría: Robust Stability Of The Oscillating Systems With Permanent Perturbations, Puebla, Diciembre 2016.
- [25] MALKIN, I., Theory of Stability of Motion, Gostekhizdat, 1952.
- [26] MARKOV, A.A., Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain, reprinted in Appendix B of: R. Howard. Dynamic Probabilistic Systems, volume 1: Markov Chains. John Wiley and Sons, 1971.
- [27] MARKOV, A.A., Rasprostranenie zakona bol'shikh chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga, Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete, 2-ya seriya, T. 15, 135-156 p., 1906.
- [28] MOSER, M.B. AND MOSER, E.I., The Nobel Prize in Physiology or Medicine 2014 for their discoveries of cells that constitute a positioning system in the brain, 2014.
- [29] MUÑOZ, A.E. AND ALEXANDROV, V.V., Resonancia principal generalizada en sistemas oscilatorios de segundo orden, REVISTA MEXICANA DE FISICA, 47 (1) 1-6 p., 2001.
- [30] OSPECK, M., Auditory Nerve Spike Generator Modeled as a Variable Attenuator Based on a Saddle Node on Invariant Circle Bifurcation, PLoS one, 7(9), e45326, 2012.
- [31] PECSVARADI, T., AND NARENDRA K. S., Reachable sets for linear dynamical systems. Information and Control, 319-344 p., 1971.
- [32] POLKING, J.C., Pplane Matlab (<https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61636-pplane>), MATLAB Central File Exchange. Recuperado Enero 11, 2023.
- [33] POLYAK, B.T. AND SHCHERBAKOV, P.S., Robust stability and control. - M. Nauka, 303 p. 2002.
- [34] PONTRYAGIN, L.S., AND BOLTYANSKII, R. V., AND GAMKRELIDZE, R.V., AND MISHCHENKO, E.F., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience Publishers, 1962.
- [35] ROITENBERG, YA. N., La Teoría de las oscilaciones No Lineales y el Control Automático (Mos. Gos. Univ., Moscú, 1967). Parte 1 (en ruso).
- [36] ROTE, G., Computing the minimum Hausdorff distance between twopoint sets on a line under translation, Information Processing Letters 38, 123-127 pp., 1991.
- [37] RUCKLIDGE, W., Efficient Visual Recognition Using the Hausdorff Distance, Lecture Notes in Computer Science, vol 1173. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

- [38] SADOVNICHII, V.A. AND ALEXANDROV, V.V. AND ALEXANDROVA, O.V. AND KONOVALENKO, I. S. AND TIKHONOVA, K.V. AND SHULENINA, N.E. AND SOTO E., The Galvanic Correction of the Gaze Stabilization Neural Control: Part 1, Moscow State University Mechanics Bulletin, 41-47 p., 2021.
- [39] SADOVNICHII, V.A. AND ALEXANDROV, V.V. AND ALEXANDROVA, T.B. AND VEGA, R. AND KONOVALENKO, I. S. AND SOTO, E. AND TIKHONOVA, K.V. AND GORDILLO DOMINGUEZ, H.L. AND GONZALES, O., About galvanic correction of the vestibular activity of the pilot in the visual control of flight, Moscow State University Mechanics Bulletin, n.1, 34-41 p., 2019.
- [40] SHILNIKOV, L.P., AND SHILNIKOV, A. L, AND TURAEV, D.V., AND CHUA, L., Qualitative Methods in Nonlinear Dynamics, Inst. Komp. Issled., Izhevsk, 2004: World Scientific, Singapore, 1998.
- [41] SIMIU, E., Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems: Applications of Melnikov Processes in Engineering, Physics, and Neuroscience. Princeton University Press, 2002.
- [42] TIKHONOV, A.N. AND VASIL'eva, A.B. AND SVESHNIKOV, A.G., Differential Equations, -M. FIZMATLIT, 1980.
- [43] TRAN, D.H. AND YANG, TH.X. AND LUAN, TH. AND NGUYEN V. AND MANZANAS LOPEZ, D. AND XIANG, W. AND JOHNSON, T. AND NGUYEN, L.V. AND MUSAU, P., Parallelizable Reachability Analysis Algorithms for Feed-Forward Neural Networks, Conference: FormaliSE 2019, Montreal, Canada, 2019.
- [44] VLADIMIR, G.B., AND ALEXANDER, S. P., The Robust Maximun Principle. Theory and Applications, Springer Science+Business Media, 2012.
- [45] ZHERMOLENKO, V.N., Análisis de sistemas de control con incertidumbre por el método de desviaciones extremas, Moscú, 2010. (en ruso).
- [46] ZHERMOLENKO, V.N., Limit cycles on the phase plane. // In. Bulgakov's problem of the maximum deviation and its application. M. : Moscow State University, 35-48 p. 1993.