



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

La Fórmula Integral de Frullani para la Integral de
Henstock-Kurzweil

Tesis presentada al

Posgrado en Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Jhonatan Saúl López Beltran

Asesorado por

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla Pue.
Octubre de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

La Fórmula Integral de Frullani para la Integral de
Henstock-Kurzweil

Tesis presentada al

Posgrado en Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por

Jhonatan Saúl López Beltran

Asesorado por

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla Pue.
Octubre de 2025

Título: La Fórmula Integral de Frullani para la Integral de Henstock-Kurzweil

Estudiante: JHONATAN SAÚL LÓPEZ BELTRAN

COMITÉ

Dr. Moisés Soto Bajo
Presidente

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Secretario

Dr. Gabriel Kantún Montiel
Vocal

Dr. Slavisa Djordjevic
Vocal

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres
Asesor

Agradecimientos

A mi esposa Argelia, por ser mi compañera de vida y mi mayor apoyo en este camino. Gracias por tu comprensión en los momentos difíciles, por tu paciencia en las largas horas de trabajo y por tu amor incondicional que me dio fuerzas para no rendirme. Este logro también es tuyo, pues tu presencia, tus palabras de aliento y tu confianza en mí, fueron la motivación más grande para llegar hasta aquí. Gracias por estar a mi lado a pesar de todo, prometo ser mejor cada día, te amo.

A mis padres, por su amor incondicional, porque aunque ya no estoy con ustedes, nunca he dudado del apoyo que me dan. Gracias por estar a mi lado en cada paso, por esas desmañanadas y por esas noches en vela en las que estuvieron para darme su mano, por brindarme apoyo en los momentos difíciles y por celebrar conmigo cada logro, por pequeño que fuese. Este trabajo es también suyo, pues ha sido posible gracias a todos los valores que me inculcaron. Nuevamente, gracias por confiar y creer en mí, los amo.

Al Dr. Javier Mendoza, por su guía, su paciencia y su compromiso en la formación de sus estudiantes. Su disposición para resolver mis dudas, su exigencia en la búsqueda de la excelencia y su confianza en mis capacidades fueron fundamentales para que este trabajo tuviera éxito. Le agradezco profundamente por compartir su conocimiento y por ser un ejemplo de rigor y dedicación profesional.

A mis mejores amigas Karla, Adriana y Andrea, ustedes me alientan a seguir adelante y superarme día con día, son las culpables de que esté aquí y todo esto sea posible. Su compañía es todo lo que necesité para que esta aventura llamada maestría, fuera más amena y divertida. Gracias por estar siempre presentes cuando más lo necesité, pero sobre todo, por escucharme y por esas largas reuniones en las que todos compartimos, nos reímos y nos divertimos con la compañía de los demás. Son mis favoritas.

A Gregorio, que con tu compañía silenciosa y tu cariño incondicional, estuviste a mi lado en largas jornadas de estudio. Te has convertido en parte de mi familia, llegaste cuando más lo necesitaba. Gracias por estar a mi lado en todo momento y muchas veces por ser la motivación para seguir adelante cuando el cansancio parecía superarme. Gracias por haber llegado a mí, me salvaste hijo mío.

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIH-TI), por la beca otorgada para realizar la maestría.

Índice general

Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. La Integral de Riemann-Stieltjes	1
1.2. La Integral de Henstock-Kurzweil	4
1.2.1. Integración en intervalos infinitos	10
1.3. Distribuciones	14
1.3.1. Distribuciones evaluadas en un punto	19
1.3.2. Espacio de funciones Schwartz y distribuciones temperadas . .	20
1.4. La Transformada de Fourier	22
1.4.1. La Transformada de Fourier para distribuciones y la Integral HK	24
2. Distribuciones y la Integral HK	25
2.1. La Fórmula de Frullani mediante distribuciones para la Integral HK	30
2.2. Ejemplos	31
Conclusión	36
Bibliografía	39

Introducción

En 1821, el matemático italiano G. Frullani le envía una carta a G. Plana con la siguiente fórmula

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \operatorname{Ln} \left(\frac{b}{a} \right), \quad (1)$$

donde $f(0)$ representa el límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero y a, b son dos reales positivos cualesquiera.

Después, en 1823, L. Cauchy también hace mención de la fórmula (1) en su obra “Oeuvres complètes” [6]. En el artículo “Exercices de Mathématiques” de 1827 [7], L. Cauchy escribe la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(\infty) - f(0)] \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) \quad (2)$$

para a, b dos reales positivos y $f(\infty)$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito.

G. Frullani, en 1828, publica la fórmula (1) en su escrito “Sopra Gli Integrali Definiti” [10] mencionando que ya había visto una demostración hecha por Cauchy en 1823, pero que esta se deduce de principios muy distintos a los que él plantea.

En 1940, K. Iyengar fue el primero en presentar una prueba en la que no es necesario que los límites $f(0)$ y $f(\infty)$ existan, reemplaza dichos límites por valores medios adecuados y demuestra que es verdadera para una clase de funciones más amplia. Según A. Ostrowski, la prueba de K. Iyengar no es correcta pero el resultado es verdadero [20]. En 1949, A. Ostrowski mejora el teorema, expresándolo en lo que se considera la versión clásica [4]:

Teorema (Versión Clásica). *Si f es localmente integrable en el sentido de Riemann en $(0, +\infty)$ y los siguientes límites existen*

$$m(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt, \quad M(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt, \quad (3)$$

entonces, para a y b positivos, se satisface la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (M(f) - m(f)) \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right). \quad (4)$$

A. Ostrowski comentó que la prueba de este resultado era difícil y la daría a conocer en otro momento. R. Agnew demostró el teorema en 1951 [1] y la demostración desarrollada por A. Ostrowski fue publicada en 1976 [21].

En 1990, J. Arias publica una prueba de la fórmula (2) para la Integral de Lebesgue, donde la única condición para que esta se cumpla es que $\frac{f(ax)-f(bx)}{x}$ sea Lebesgue integrable. También presenta una primera versión de una prueba de la Fórmula de Frullani mediante distribuciones generadas a partir de funciones que son localmente Denjoy-Perron integrables, donde la condición esencial es que $\frac{f(ax)-f(bx)}{x}$ sea localmente Denjoy-Perron integrable ([4], [17]).

Si bien ya se conocen versiones de la Fórmula de Frullani para la Integral de Riemann, la Integral impropia de Riemann, la Integral de Lebesgue, entre otras, parece natural el plantearse una reformulación de esta, con nuevas teorías de integración que generalizan las antes mencionadas, tales como la Integral de Henstock-Kurzweil, y así, poder aportar una prueba de esta. Es por ello que, este trabajo estudia la Fórmula Integral de G. Frullani para la Integral de Henstock-Kurzweil y está organizado de la siguiente manera.

En el Capítulo Uno, se hace un desarrollo de la teoría que será utilizada para fundamentar los resultados en el capítulo posterior. Se abordan temas como la Integral de Riemann-Stieltjes, la Integral de Henstock-Kurzweil, distribuciones y la Transformada de Fourier. Cabe mencionar que el desarrollo de estos, es en lo esencial para el presente trabajo.

Luego, en el Capítulo Dos, se prueban algunas propiedades conocidas para distribuciones, pero empleando la integral HK. Después, demostramos que la Transformada de Fourier de la distribución asociada a una función localmente HK-integrable evaluada en cero, coincide con el valor de la integral de la función. Finalmente, se expone una prueba de la Fórmula de Frullani mediante distribuciones generadas a partir de funciones localmente HK-integrables y se presentan ejemplos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. La Integral de Riemann-Stieltjes

En esta sección veremos, con algún detalle la Integral de Riemann-Stieltjes, teniendo en cuenta los conceptos más importantes de esta o aquellos que serán de importancia en el desarrollo del presente escrito.

En lo que sigue, consideraremos funciones real valuadas, definidas y acotadas en un intervalo compacto $[a, b]$. Denotaremos durante el texto, como $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente, a los números naturales (enteros positivos), enteros, reales y complejos.

Definición 1. Sea $I = [a, b]$ compacto en $\mathbb{R}$. Definimos una partición $P := \{I_k | k = 1, \dots, n\} = \{I_k\}_{k=1}^n$, donde los I_i son intervalos que no se traslapan a pares y $I = \cup I_k$.

Consideremos una partición P de $[a, b]$ como un conjunto finito de puntos $\{x_k\}_{k=0}^n$ de tal manera que $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$. El intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es llamado el k -ésimo subintervalo de P , y denotaremos la colección de todas las posibles particiones de $[a, b]$, por $\mathbb{P}([a, b])$. Recordemos que una partición P' es más fina que P , si $P \subset P'$.

Definición 2 ([3]). Sean f y α funciones definidas y acotadas en $[a, b]$. Sean P una partición de $[a, b]$ y t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Una suma de la forma

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

es llamada una suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α en el intervalo $[a, b]$.

Definición 3 ([3]). Decimos que una función f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$, y escribimos $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, si existe un número real A de tal manera que, para cada $\epsilon > 0$, exista una partición P_ϵ de $[a, b]$ tal que, para cada partición más fina que P_ϵ y cada $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se tiene que $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$.

Una definición alternativa (pero no equivalente), es la siguiente.

Definición 4 ([3]). Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$, si existe un número real A tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada partición P de A con norma $\|P\| = \max_k \{x_k - x_{k-1}\} < \delta$ y para cada $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, tenemos que $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$.

Observación 1 ([3]). Si se satisface la Definición 4, entonces se satisface la Definición 3, pero no viceversa.

En el Capítulo 2 se trabajará con la Definición 4, a menos que se especifique lo contrario.

Nota 1. No es difícil probar que, cuando tal número A exista, estará determinado de forma única y se denota por $\int_a^b f d\alpha$ o por $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$. Nos referiremos a las funciones f y α como integrando e integrador respectivamente. En el caso especial que $\alpha(x) = x$, escribiremos $S(f, P)$ y $f \in R$.

Teorema 1 ([3]). Si $f, g \in R(\alpha)$ y $f \in R(\beta)$ en $[a, b]$, entonces $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, $f \in R(c_1 \alpha + c_2 \beta)$ en $[a, b]$ (con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) y se cumple que

- $\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha,$
- $\int_a^b f d(c_1 \alpha + c_2 \beta) = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta.$

Teorema 2 ([3]). Sea $c \in (a, b)$. Si dos de las tres integrales en (1.1) existen, entonces la tercera también existe y tenemos que

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha. \quad (1.1)$$

Definición 5. Si $a < b$, definimos $\int_a^b f d\alpha = -\int_b^a f d\alpha$ cuando $\int_b^a f d\alpha$ exista. También definimos $\int_a^a f d\alpha = 0$.

Una importante relación entre el integrador y el integrando, es que la existencia de $\int_a^b f d\alpha$ implica la existencia de $\int_a^b \alpha df$, esto de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema 3 ([3]). Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$, entonces $\alpha \in R(f)$ en $[a, b]$ y se cumple

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Recordando que si una función g es absolutamente integrable, esta pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, observemos que el siguiente teorema nos brinda una condición necesaria para que el producto de dos funciones se mantenga en $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible acotada y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente integrable, entonces, fg es integrable.

Obsérvese que este resultado se deduce directamente de la desigualdad de Hölder para los exponentes 1 y $+\infty$. Véase [22].

Teorema 5 ([3]). *Si α es una función constante en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f d\alpha$ existe (en el sentido de Riemann-Stieltjes) y es igual a cero.*

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias para poder reemplazar el símbolo $d\alpha(x)$ por $\alpha'(x)dx$ en la integral $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$.

Teorema 6 ([3]). *Si $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y α tiene derivada continua en $[a, b]$, entonces, la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\alpha'(x) dx$ existe y tenemos que*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

Definición 6 ([14]). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es absolutamente continua en $[a, b]$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

donde $a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b$, para los cuales

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta.$$

Definición 7. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si se cumple que*

$$V(f, [a, b]) = \sup_{P \in \mathbb{P}([a, b])} \left\{ \sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| \right\} < \infty,$$

donde $\mathbb{P}([a, b])$ es el conjunto de todas las particiones en el intervalo $[a, b]$, decimos que f es una función de variación acotada en $[a, b]$ y $V(f, [a, b])$ es llamada la variación total de f en $[a, b]$. Además, si f está definida sobre toda la recta real, se llamará función de variación acotada sobre $\mathbb{R}$, cuando su variación total

$$V(f, \mathbb{R}) = \sup_{a < b} V(f, [a, b])$$

sea finita.

El espacio de las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$ se denotará como $BV([a, b])$, mientras que, sobre $\mathbb{R}$, se denota como $BV(\mathbb{R})$.

Teorema 7 ([14], Helly). Sea f una función continua definida en un intervalo $[a, b]$ y sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones de variación acotada que convergen a una función finita g en cada punto de $[a, b]$. Si existe un K positivo tal que, $V(g_n, [a, b]) < K$ para toda n , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg(x). \quad (1.2)$$

Nota 2. El Teorema de Helly, nos permite tomar el límite de una sucesión convergente de funciones con variación acotada, que actúan como función integradora en la integral de una función continua. En [14] se enuncia dicho resultado considerando un intervalo compacto $[a, b]$, sin embargo, en [15] se hace la observación que el teorema subsiste en el caso en que uno o ambos extremos de la integral (1.2) sean infinitos. Además, la función f en este caso debe tender en el infinito a un límite finito.

Teorema 8 ([19]). Sean $f \in BV(\mathbb{R})$ y $g \in C_b(\mathbb{R})$, donde $C_b(\mathbb{R})$ denota el espacio de funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}$. Entonces, el límite

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b g(x) df(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) df(x)$$

existe y es finito.

Teorema 9 ([13]). Sea f una función real definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(k, n) = \psi(k)$ existe para cada k , y $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k, n) = \varphi(n)$ converge uniformemente en n , entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k, n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(k, n), \quad (1.3)$$

es decir, ambos límites existen y son iguales. Además, si el límite doble

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ k \rightarrow +\infty}} f(k, n) \quad (1.4)$$

existe, será igual a (1.3).

1.2. La Integral de Henstock-Kurzweil

Todas las integrales en esta sección se considerarán en el sentido de Henstock-Kurzweil, solo en casos específicos en que se consideren otro tipo de integrales, se señalará oportunamente en qué sentido se considerarán dichas integrales.

Definición 8. Sea I un intervalo arbitrario en $\mathbb{R}$ con punto inicial a y punto final b . Se define la medida de I como $l(I) = b - a$. Además $l(\emptyset) = 0$.

Definición 9. Si $P = \{I_k\}_{k=1}^n$ es una partición de un intervalo $I = [a, b]$, tal que a cada I_k se le asigna un $t_k \in I_k$, decimos que t_k es una etiqueta de I_k . En este caso diremos que la partición está etiquetada y se escribirá $\dot{P} = \{(I_k, t_k) | k = 1, \dots, n\} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$.

Una partición puede ser etiquetada de distintas maneras, eligiendo diferentes etiquetas.

De acuerdo a la Definición 2, teniendo el caso particular en que $\alpha(x) = x$, si tenemos una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y la partición etiquetada $\dot{P} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$. Entonces, su suma de Riemann es

$$S(f; \dot{P}) = \sum_{k=1}^n f(t_k)l(I_k).$$

Definición 10. Una subpartición es un subconjunto de una partición.

Por ejemplo, si $P = \{x_k\}_{k=0}^n$ es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces $\dot{Q} = \{([y_{j-1}, y_j], s_j)\}_{j=1}^m$, donde $\{y_j\}_{j=0}^m \subset \{x_i\}_{i=0}^n$, es una subpartición etiquetada de P .

Definición 11 ([5]). Sea $I = [a, b]$. Llamaremos una función medidora (o simplemente medidora) en I , a una función $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\delta(t) > 0$ para todo $t \in I$.

Definición 12 ([5]). Sea $I = [a, b]$ y $\dot{P} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^n$. Si δ es una medidora en I , decimos que $\dot{P}$ es δ -fina si

$$I_k \subseteq [t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k)]$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

Note que solamente una partición etiquetada puede ser δ -fina.

El siguiente teorema nos dice que, si tenemos un intervalo compacto I y una medidora δ definida en dicho intervalo, siempre va a existir una partición etiquetada de I que es δ -fina.

Teorema 10 ([5], Cousin). Si $I = [a, b]$ es un intervalo compacto y δ es una medidora en I , entonces existe una partición de I que es δ -fina.

Definición 13 ([5]). Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es Henstock-Kurzweil integrable en I , o simplemente que está en $HK(I)$ (o que es HK en I) si existe un número $C \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ existe una medidora $\delta_\epsilon : I \rightarrow (0, \infty)$ tal que si $\dot{P}$ es una partición etiquetada que es δ_ϵ -fina, entonces

$$|S(f; \dot{P}) - C| \leq \epsilon.$$

Observemos que C es la integral de f en el sentido HK en I , esta se denotará por $\int_I f = \int_I f(x) dx$.

Ejemplo 1. ■ Sea $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que $f \in HK([a, b])$ y $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$.

■ Si $g(x) = x$, entonces $g \in HK([a, b])$ y $\int_a^b g = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

■ Sea

$$h(x) = \begin{cases} \alpha, & a \leq x < c, \\ \beta, & c \leq x \leq b \end{cases}.$$

Entonces, $h \in HK([a, b])$ y $\int_a^b h(x) dx = \alpha(c - a) + \beta(b - c)$.

■ Si $m_r(x) = x^r \sin(\frac{\pi}{x})$ para $x \in (0, b]$ y $m_r(0) = 0$, entonces $m_r \in HK([a, b])$ para $r > -2$ y $b > 0$.

Teorema 11 ([5]). Sea f una función Riemann integrable (o Lebesgue integrable) en $I = [a, b]$. Entonces f también es HK -integrable en I , en el sentido de la Definición 13 y los valores de sus integrales son iguales.

Nota 3. El teorema anterior, también conocido como Teorema de Consistencia, nos dice que los conjuntos de funciones integrables en el sentido de Riemann y de Lebesgue, están contenidos en el conjunto de funciones Henstock-Kurzweil integrables, y además, sus valores coinciden.

Proposición 1 ([5]). Sean $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie convergente en $\mathbb{R}$, con límite A y $c_n := 1 - 1/2^n$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos la función

$$h(x) = \begin{cases} 2^k a_k, & x \in [c_{k-1}, c_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0, & x=1 \end{cases}.$$

Entonces $h \in HK([0, 1])$ y $\int_0^1 h = A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

La proposición anterior se puede resumir como: cada serie convergente da lugar a una función que es HK -integrable. A continuación se presentan dos ejemplos recuperados de [5], en ambos ejemplos se considera $c_k = 1 - 1/2^k$.

Ejemplo 2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{k+1} 2^k / k & x \in [c_{k-1}, c_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0 & x=1. \end{cases}.$$

Entonces, por la proposición anterior, $f \in HK([0, 1])$ y

$$\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \quad (1.5)$$

Observación 2. *Observemos que, por (1.5), f es HK en $[0, 1]$. Sin embargo, esta no está en $L^1([0, 1])$, lo cual nos dice que L^1 está contenido propiamente en el conjunto de funciones que son HK-integrables.*

Ejemplo 3. *Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) = \begin{cases} 2^k/k, & x \in [c_{k-1}, c_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0, & x=1. \end{cases}.$$

Note que $g(x) = |f(x)|$ para todo $x \in [0, 1]$. Sin embargo, $g \notin HK([0, 1])$.

Ahora, se enuncian algunas propiedades de dicha integral.

Teorema 12 ([5]). *Sean $f, g \in HK(I)$, donde I es un intervalo compacto. Entonces, se cumplen las relaciones siguientes:*

- $f + g \in HK(I)$ y se cumple que

$$\int_I f + g = \int_I f + \int_I g.$$

- Si $c \in \mathbb{R}$ entonces, $cf \in HK(I)$ y

$$\int_I cf = c \int_I f.$$

- Si $f(x) \geq 0$ para toda x en I , entonces

$$\int_I f \geq 0.$$

- Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, entonces

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

- Si $|f| \in HK(I)$, entonces

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Si una función es integrable, entonces, es integrable en cualquier subintervalo cerrado del intervalo. Además, la integral es aditiva en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 13 ([5]). Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in [a, b]$. Entonces $f \in HK([a, b])$ si y solo si sus restricciones a $[a, c]$ y $[c, b]$ son ambas integrables y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Corolario 1 ([5]). Si $f \in HK([a, b])$ y si $[c, d] \subset [a, b]$, entonces la restricción a $[c, d]$ es integrable.

Una consecuencia sencilla del Teorema 13 es que, si $f \in HK([a, b])$ y $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$, entonces las restricciones de f a cada subintervalo $[c_{k-1}, c_k]$ son integrables y

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{c_{k-1}}^{c_k} f.$$

Teorema 14 ([5]). Si f es continua o monótona en I , entonces $f \in HK(I)$.

Nota 4. El producto de dos funciones HK , no necesariamente es HK . Esto lo mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Sean f y g definidas como en los Ejemplos 2 y 3, respectivamente. Definimos

$$h(x) = \begin{cases} (-1)^{k+1}, & x \in [c_{k-1}, c_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0, & x=1. \end{cases}.$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/2^k$ es convergente, por la Proposición 1, se cumple que $h \in HK([0, 1])$. No obstante, $fh = g \notin HK([0, 1])$.

Definición 14 ([5]). Si $f \in HK(I)$ y $u \in I$, entonces la función $F_u : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_u(x) := \int_u^x f \tag{1.6}$$

es llamada la integral indefinida de f con punto base u . Si el punto base es el punto final izquierdo, usualmente no se escribe el subíndice.

En el Ejemplo 4 y en la Nota 4 vimos que el producto de dos funciones que son HK -integrables, no necesariamente también lo es. Sin embargo, se puede dar solución a este problema asignando las condiciones necesarias a cada función. El siguiente teorema nos dice dichas condiciones.

Teorema 15 ([5] Multiplicador). Si f es HK -integrable en $[a, b]$ y φ de variación acotada en $[a, b]$, entonces $f\varphi$ es HK -integrable en el mismo intervalo y

$$\int_a^b f\varphi = \int_a^b \varphi dF = F(b)\varphi(b) - \int_a^b F d\varphi,$$

donde $F(x) = \int_a^x f$, la segunda y tercer integral son en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Definición 15 ([5]). Sean $f, F : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que F es una primitiva de f en I , si la derivada $F'(x)$ existe y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Si F es continua y existe un subconjunto $E \subset I$ de medida cero, de tal manera que $F'(x) \neq f(x)$ o $F'(x)$ no existe para cada $x \in E$, decimos que F es una a -primitiva de f .

Ahora, enunciamos el Teorema Fundamental I el cual nos garantiza que la derivada de una función en un intervalo $I = [a, b]$, siempre es HK -integrable.

Teorema 16 ([5], Teorema Fundamental I). Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva F en $I = [a, b]$, entonces f es HK -integrable y

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Nota 5. El teorema anterior se puede reescribir de la siguiente manera: Si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en cada punto de I , entonces F' es HK -integrable y

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Teorema 17 ([5], Teorema Fundamental II*). Si f es HK -integrable, entonces cualquier integral indefinida F es continua y es una a -primitiva.

Teorema 18 ([5], Sustitución). Sean $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$ tal que

- $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva F en J .
- $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva ϕ en I y $\phi(I) \subset J$.

Entonces, $(f \circ \phi) \cdot \phi' \in HK(I)$ y $f \in HK(\phi(I))$. Además

$$\int_a^b (f \circ \phi) \cdot \phi' = (F \circ \phi) \Big|_a^b = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f.$$

Teorema 19 ([5]). Sea $f \in HK([a, b])$. Entonces $|f| \in HK([a, b])$ si y sólo si, la integral indefinida $F(x) = \int_a^x f$ es de variación acotada en $[a, b]$. En este caso

$$\int_a^b |f| = V(F, [a, b]).$$

1.2.1. Integración en intervalos infinitos

Se trabajará con subparticiones etiquetadas completas de un intervalo $[a, +\infty] \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\dot{P} = \{([x_0, x_1], t_1), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n), ([x_n, x_{n+1}], t_{n+1})\}$$

en el sentido que

$$[a, +\infty] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k] \cup [x_n, +\infty],$$

donde $x_0 = a$ y $x_{n+1} = +\infty$.

Observación 3. Si tenemos una función $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, extendemos f a $[-\infty, +\infty]$ definiendo $f(\pm\infty) := 0$, de modo que el último término de la suma de Riemann, según sea el caso, $f(+\infty)(+\infty - x_n)$ o $f(-\infty)(-\infty - x_n)$ sea cero. Así, la suma de Riemann de $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, será $S(f; \dot{P}) = \sum_{i=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$. El caso para $(-\infty, a]$ es análogo.

Nota 6. Se observará que los símbolos $\pm\infty$ aparecerán solo como puntos en el dominio de las funciones. Todas nuestras funciones solo tomarán valores reales considerando la Observación 3.

Definición 16 ([5]). Una medidora en $[a, +\infty]$ es un par ordenado (δ, d^*) el cual consiste de una función estrictamente positiva δ en $[a, +\infty)$ y un número $d^* > 0$ el cual es considerado como $\delta(+\infty)$.

Análogamente se define una medidora para el intervalo $[-\infty, b]$, considerando $d_* > 0$ como $\delta(-\infty)$.

Definición 17 ([5]). Decimos que una partición $\dot{P}$ es (δ, d^*) -fina en $[a, +\infty]$ si

$$[x_{k-1}, x_k] \subset [t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k)] \quad (1.7)$$

y que

$$[x_n, +\infty] \subset \left[\frac{1}{d^*}, +\infty \right], \quad (1.8)$$

es decir, $1/d^* \leq x_n$.

Para el caso $[-\infty, b]$, además de necesitar (1.7), el equivalente a (1.8) sería que $[-\infty, x_1] \subset [-\infty, -1/d_*]$. Por otro lado, si consideramos $[-\infty, +\infty]$, se necesitarán (1.8) y su equivalente.

Por simplicidad, nos referiremos a una partición (δ, d^*) -fina solo por δ -fina o δ_ϵ -fina.

Teniendo en cuenta todo lo antes dicho, podemos definir la integral de una función $f : [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 18 ([5]). Decimos que $f : [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ es *HK* en $[a, \infty]$ ($f \in HK([a, \infty])$), si existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe una medidora δ_ϵ en $\mathbb{R}$ tal que, si $\dot{P}$ es una partición δ_ϵ -fina de $[a, \infty]$, entonces

$$|S(f; \dot{P}) - C| \leq \epsilon.$$

La definición para el caso $[-\infty, b]$, es análoga a la Definición 18. Con esto en mente, planteamos la definición de una función Henstock-Kurzweil integrable sobre $\mathbb{R}$.

Definición 19 ([5]). Decimos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *HK* en $\mathbb{R}$ ($f \in HK(\mathbb{R})$), si existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe una medidora δ_ϵ en $\mathbb{R}$ tal que, si $\dot{P}$ es una partición δ_ϵ -fina en $[-\infty, +\infty]$, entonces

$$|S(f; \dot{P}) - C| \leq \epsilon.$$

Observemos que C es la integral de f en el sentido *HK* en $\mathbb{R}$, esta se denotará por $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Ahora, consideremos el siguiente ejemplo y una proposición análoga a la Proposición 1, pero para intervalos infinitos.

Ejemplo 5. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$ con $x \in [1, +\infty)$ y $f(+\infty) = 0$. Entonces, $f \in HK([1, +\infty])$ y $\int_1^{+\infty} f = 1$.

Proposición 2 ([5]). Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie numérica convergente con límite A . Definimos la función $h : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = a_k$ para $x \in [k-1, k]$, $k \in \mathbb{N}$ y $h(+\infty) = 0$. Entonces $h \in HK([0, +\infty])$ y $\int_0^{+\infty} h = A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Teorema 20 ([5], Sacks-Henstock). Sea $f \in HK(\mathbb{R})$ y para cada $\epsilon > 0$ sea δ_ϵ una medidora tal que, si $\dot{P}$ es δ_ϵ -fina, entonces

$$|S(f; \dot{P}) - \int_{\mathbb{R}} f| \leq \epsilon.$$

Si $\dot{P}_0 = \{(J_j, t_j) | j = 1, \dots, s\}$ es una subpartición δ_ϵ -fina, entonces

$$\left| \sum_{j=1}^s \left\{ f(t_j)l(J_j) - \int_{J_j} f \right\} \right| = \left| S(f; \dot{P}_0) - \int_{\cup P_0} f \right| \leq \epsilon.$$

Teorema 21 ([5], Hake). Sea $f : [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces son equivalentes:

1. $f \in HK([-\infty, +\infty])$ con integral $A \in \mathbb{R}$.
2. $f \in HK([a, b])$ para todo intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx = A.$$

3. Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, la función f está en $HK([-\infty, c])$ y en $HK([c, +\infty])$.
Además

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = A.$$

Es importante mencionar que se tienen versiones análogas al Teorema de Hake para intervalos del tipo $[a, b]$, $[a, +\infty]$ y $[-\infty, b]$.

En la sección anterior definimos la integral indefinida de una función $f \in HK(I)$ para intervalos acotados. Ahora, lo haremos para no acotados, por ejemplo, para intervalos de la forma $I = [a, +\infty]$.

Definición 20 ([5]). Si $u \in [a, +\infty)$, entonces la función definida por

$$F_u(x) = \int_u^x f$$

para $x \in I$, es llamada la integral indefinida de f con punto base u . Además, la función definida por

$$F_{+\infty}(x) = \int_{+\infty}^x f = - \int_x^{+\infty} F$$

para $x \in I$, es llamada la integral indefinida de f con punto base $+\infty$.

De igual manera, presentamos la definición de una primitiva en $I = [a, +\infty]$.

Definición 21 ([5]). Sean $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que F es una primitiva de f en I , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

existe para todo $x \in I$ y además, $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, +\infty)$.

Teorema 22 ([5], Teorema fundamental I). Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva F en $I = [a, +\infty]$, entonces $f \in HK(I)$ y

$$\int_a^{+\infty} f = F(+\infty) - F(a).$$

La versión para integración en intervalos infinitos del Teorema 17, es análoga.

Observación 4. El Teorema 18, es válido para integración en intervalos infinitos siempre y cuando f y F estén bien definidas en $J = [c, d]$, donde los extremos pueden tomar los valores $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente. Además, de que φ y ϕ estén bien definidas en $I = [a, b]$, donde puede pasar que $b = +\infty$ o $\phi(b) = +\infty$, y que $a = -\infty$ o $\phi(a) = -\infty$. Dicho teorema, se enuncia a continuación.

Teorema 23 ([5], Sustitución). Sean $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$ tal que

- $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva F en J .
- $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una primitiva ϕ en I y $\phi((a, b)) \subseteq (c, d)$.

Entonces, $(f \circ \phi) \cdot \varphi \in HK(I)$ y $f \in HK(\phi(I))$. Además

$$\int_a^b (f \circ \phi) \cdot \varphi = (F \circ \phi)|_a^b = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f.$$

Teorema 24 ([18]). Sean $f, \varphi : [a, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $f \in BV([a, +\infty])$ de tal manera que se acerca a cero cuando x tiende a infinito, $\varphi \in HK([a, b])$ para todo $a < b$. Si la integral indefinida $\phi(t) = \int_a^t \varphi du$ es acotada en $[a, +\infty)$, entonces, $\varphi f \in HK([a, b])$,

$$\int_a^{+\infty} \varphi f dt = - \int_a^{+\infty} \phi(t) df(t)$$

donde la integral de la derecha es en el sentido de Riemann-Stieltjes. Además,

$$\left| \int_a^{+\infty} \varphi f dt \right| \leq \sup_{a < t} |\phi(t)| \text{Var}(f, [a, +\infty]).$$

Resultados para los casos $[-\infty, +\infty]$ y $[-\infty, a]$ también son válidos.

A continuación, enunciamos dos criterios que nos dan las condiciones necesarias y suficientes, según sea el caso, para saber cuándo una función es HK .

Teorema 25 ([5], Criterio de Cauchy). Sean $I = [a, +\infty]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in HK([a, c])$ para cada $a \leq c$. Entonces, $f \in HK(I)$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $K \geq a$ tal que si $q > p \geq K$ se cumple que

$$\left| \int_p^q f \right| \leq \epsilon.$$

Teorema 26 ([5], Criterio de Abel). Sean $f, \varphi : I = [a, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in HK(I)$ y φ es monótona acotada en I , entonces $f\varphi \in HK(I)$.

Por último, definimos la semi-norma de Alexiewicz, quien la enunció en 1948 en [2].

Definición 22 ([24], Norma de Alexiewicz). Sean $f \in HK(\mathbb{R})$ e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto o infinito. Definimos la semi-norma de Alexiewicz por

$$\|f\|_A = \sup \left\{ \left| \int_a^b f(x) dx \right| : [a, b] \subseteq I \right\}. \quad (1.9)$$

De acuerdo al Teorema 12, el conjunto de funciones $HK(I)$ para $-\infty < a < b < +\infty$, es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma puntual y producto por escalar. Además, L. Schwartz [23] señala que, al identificar las funciones que son idénticamente nulas casi en todas partes, el espacio $HK([a, b])$ se convierte en un espacio normado bajo (1.9). Sin embargo, $HK([a, b])$ no es un espacio completo bajo la norma de Alexiewicz y se expone un contraejemplo en dicha referencia.

1.3. Distribuciones

Definición 23. Sea Ω un intervalo arbitrario (acotado o no) de $\mathbb{R}$. El conjunto de las funciones suaves definidas en Ω es

$$C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable de cualquier orden}\}.$$

Definición 24. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde Ω es un intervalo arbitrario en $\mathbb{R}$. Definimos el soporte de f como

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Definición 25 ([11]). Definimos el conjunto de las funciones prueba (test functions) por

$$D(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto}\}.$$

Definición 26 ([11]). Una sucesión de elementos $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $D(\mathbb{R})$, converge a 0 si pasa lo siguiente:

- el soporte de todas las φ_n está contenido en un intervalo compacto fijo,
- $\varphi_n^{(\alpha)} \rightarrow 0$ uniformemente para todo $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, cuando $n \rightarrow +\infty$.

Teniendo en cuenta la definición anterior, se define la convergencia a una función en el espacio de las funciones prueba, como sigue.

Definición 27 ([11]). De la Definición 26, tenemos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ con $\varphi_n, \varphi \in D(\mathbb{R})$, si $\varphi_n - \varphi$ satisface dichas condiciones.

Definición 28 ([11]). Una distribución T , es una funcional lineal y continua en $D(\mathbb{R})$, es decir, $T : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ cumple que, si la sucesión $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $D(\mathbb{R})$ (en el sentido de la Definición 27), entonces $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ en $\mathbb{C}$.

Nota 7. Notemos que la variable de una distribución es una función prueba, y $T(\varphi)$ es un número complejo (o real). Además, es frecuente escribir $\langle T, \varphi \rangle$ para denotar el valor de $T(\varphi)$.

Definición 29 ([11]). El espacio de distribuciones es el espacio dual de $D(\mathbb{R})$. Esto es, el espacio de funcionales lineales continuas que se denotará por $D'(\mathbb{R})$.

Definición 30. Sean $T_1, T_2 \in D'(\mathbb{R})$, $\varphi \in D(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Definimos las siguientes operaciones:

- $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$,
- $\langle \alpha T_1, \varphi \rangle = \alpha \langle T_1, \varphi \rangle$.

Observe que la primera operación es la suma entre dos distribuciones y la segunda es el producto por escalar. Es claro que ambas operaciones están bien definidas.

Proposición 3. *El conjunto de distribuciones tiene la estructura de un espacio vectorial complejo con la suma y la multiplicación por escalares definida anteriormente.*

Considerando que $\mathbb{C}$ es un campo, y teniendo en cuenta las operaciones que se enuncian en la Definición 30, se comprueba fácilmente que, en efecto, $D'(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial complejo.

Se presentan algunos ejemplos recuperados de [12]. En dicha referencia no se incluyen la demostraciones de estos resultados, por ello, se proporcionan las pruebas correspondientes.

Ejemplo 6. *Las siguientes funcionales $D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ definen una distribución:*

1. $\langle \omega_1, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k).$

La suma es finita ya que φ tiene soporte compacto, por lo que existe un número finito de valores de k para los que $\varphi(k)$ es distinta de cero. Es lineal ya que

$$\begin{aligned} \langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha\varphi_1(k) + \beta\varphi_2(k)) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1(k) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_2(k) = \\ &= \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Consideremos una sucesión $\varphi_n \rightarrow 0$ en $D(\mathbb{R})$. Como esta converge uniformemente, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $N \leq n$ y para todo $k \in K_n$ $|\varphi_n(k)| \leq \epsilon/|K_n|$, donde K_n es el soporte de cada φ_n . De aquí que

$$\sum_{k \in K_n} |\varphi_n(k)| \leq |K_n| \frac{\epsilon}{|K_n|} = \epsilon.$$

Donde $|K_n|$ representa el número de elementos del soporte de cada φ_n . Por lo tanto, $\langle \omega_1, \varphi \rangle \rightarrow 0$.

2. $\langle \omega_2, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(\sqrt{2}).$

Observe que ω_2 no es una distribución, pues si consideramos la función prueba $\varphi(x) = \chi(x)e^{x-\sqrt{2}}$, donde $\chi(x) = 1$ para toda $x \in [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$ y $\chi(x) = 0$ fuera de él. Tenemos que sus derivadas son $\varphi^{(k)}(x) = e^{x-\sqrt{2}}$. Evaluando en el punto $x = \sqrt{2}$ obtenemos $\varphi^{(k)}(\sqrt{2}) = 1$. Esto convierte a la suma en

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(\sqrt{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} 1,$$

la cual no es convergente.

3. $\langle \omega_2, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \varphi^{(k)}(k).$

4. $\langle \omega_3, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k).$

Mediante un proceso análogo al inciso 1, los incisos 3 y 4 resultan ser distribuciones.

La idea principal para la generalización de una función (funciones generalizadas como algunos autores las llaman) en el contexto de distribuciones, es considerar una función digamos f , como un operador T_f que actúa por integración sobre la función misma.

Recordando que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, es localmente Lebesgue-integrable si es integrable en todo intervalo compacto de $\mathbb{R}$, entonces, planteamos la siguiente proposición.

Proposición 4 ([11]). *Sea f localmente Lebesgue-integrable en $\mathbb{R}$. Entonces, la funcional lineal sobre $D(\mathbb{R})$, definida por*

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \quad (1.10)$$

para $\varphi \in D(\mathbb{R})$, es una distribución.

De esta manera, la distribución T_f es identificada unívocamente con la función f localmente integrable. Así, denotaremos la relación $f \leftrightarrow T_f$ usando cualquiera de las siguientes notaciones:

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int f \varphi.$$

Definición 31. *Si T_f es una distribución asociada con una función localmente integrable f , se dirá que esta es una distribución regular.*

De acuerdo a lo anterior, la función constante $f = A \in \mathbb{R}$, es identificada con la distribución constante de la siguiente forma:

$$T_f(\varphi) = A \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx.$$

Si se desea definir el producto de dos distribuciones regulares de manera “natural”, es decir, mediante la relación $T_f \cdot T_g = T_{fg}$. Obtenemos que, T_{fg} no necesariamente existe ya que, f y g pueden ser localmente integrables pero, sin que fg lo sea. Bastará tomar $f(x) = g(x) = |x|^{-1/2}$ para comprobar lo antes dicho. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 32 ([11]). *El producto de una distribución regular T_f por una función $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, denotado por gT_f , se define por*

$$\langle gT_f, \varphi \rangle = \langle T_f, g\varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

La expresión a la derecha está bien definida ya que, $g\varphi \in D(\mathbb{R})$ para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos el operador de traslación para una función f por $\tau_a f(x) = f(x - a)$. Así, para una distribución regular T_f , su relación con f satisface la siguiente igualdad

$$\tau_a T_f = T_{\tau_a f}.$$

De esta manera

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle = \int f(x - a) \varphi(x) dx = \int f(x) \varphi(x + a) dx,$$

es decir, $\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_{-a} \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Esta última fórmula se extiende a toda distribución de la siguiente manera.

Definición 33 ([11]). *La traslación $\tau_a T$ de una distribución T se define por*

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle \tag{1.11}$$

para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Definición 34 ([9]). *La dilatación de una distribución T , para $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se define por*

$$\langle T^{[c]}, \varphi \rangle = T^{[c]}(\varphi(x)) := \frac{1}{|c|} T(\varphi^{[1/c]}(x)) = \frac{1}{|c|} \langle T, \varphi^{[1/c]} \rangle,$$

donde $\varphi \in D(\mathbb{R})$ y $\varphi^{[1/c]}(x) := \varphi(x/c)$.

Observación 5. *Es importante observar que la dilatación de una función prueba es simplemente $\varphi^{[1/c]}(x) := \varphi(x/c)$ para $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mientras que la de una distribución, conlleva un factor de normalización $\frac{1}{|c|}$, el cual se puede justificar, usando distribuciones regulares y un cambio de variable.*

Definición 35 ([12]). *Sea $T \in D'(\mathbb{R})$. Definimos la derivada de T por*

$$D(T(\varphi)) = \langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle.$$

La justificación de la definición anterior, que es importante en la génesis histórica de las distribuciones, se puede hacer fácilmente para distribuciones regulares e integrando por partes.

Es fácil ver que T' es una distribución, así, esta tiene derivada $T'' : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle T'', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi'' \rangle,$$

y así sucesivamente. De esta manera, denotamos la n -ésima derivada de una distribución como $T^{(n)}$, y esta tiene la siguiente propiedad.

Proposición 5 ([11]). *Cada distribución T es infinitamente diferenciable y la n -ésima derivada de T satisface la relación*

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$$

para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Observación 6. *Dado que para $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene la inclusión $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (espacio de las funciones localmente integrables), toda función $f \in L^p(\mathbb{R})$ puede considerarse una distribución regular, definida mediante (1.10).*

El teorema que se enuncia a continuación permitirá establecer un corolario de particular relevancia para el desarrollo del capítulo siguiente.

Teorema 27. *Si f tiene derivada acotada en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k=0}^n$ una partición de $[a, b]$. Por el Teorema del Valor Medio tenemos que, para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, existe un $c_k \in (x_k, x_{k-1})$

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

De aquí que

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f'(c_k)| |x_k - x_{k-1}| \leq M \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = M|(b-a)|,$$

donde $|f'(c)| \leq M$ para algún M real y todo $c \in [a, b]$. Además, como la partición elegida fue arbitraria, f es de variación acotada. ■

Corolario 2. *Si $\varphi \in D(\mathbb{R})$, entonces $\varphi \in BV(\mathbb{R})$.*

Definición 36. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en $A \subset \mathbb{R}$. Definimos la siguiente norma*

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Además, $\|f\|_{L^\infty}$ define una norma sobre el espacio de las funciones continuas en A .

Teorema 28 ([12]). *Sea $T : D(\mathbb{R}) \leftarrow \mathbb{C}$ lineal. Entonces, tenemos que $T \in D'(\mathbb{R})$ si y sólo si, existe un $C > 0$ de tal manera que*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi'\|_{L^\infty},$$

para toda $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

1.3.1. Distribuciones evaluadas en un punto

A continuación se presenta la definición del valor de una distribución en un punto y una propiedad de límites. Estas están dadas por Lojasiewicz [16].

Definición 37 ([16]). *Una distribución T , tiene un valor en un punto a , cuando el siguiente límite existe*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} T(a + \lambda x) \quad (1.12)$$

en el espacio $D'(\mathbb{R})$ de distribuciones.

Este límite, cuando existe, es una distribución constante y decimos que esta constante es el valor de T en a . Este se denotará por $T(a)$.

Observación 7. *Es importante aclarar que $T(a + \lambda x)$ no significa evaluar T en el punto $a + \lambda x$ en el sentido clásico, sino, en términos de cómo actúa T sobre funciones prueba $\varphi(x)$ que “son sensibles” alrededor de a . Es decir, la existencia de $T(a)$ equivale a la condición de que exista una constante C tal que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} T(a + \lambda x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle T(a + \lambda x), \varphi(x) \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\langle T, \frac{1}{|\lambda|} \varphi\left(\frac{x - a}{\lambda}\right) \right\rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Se deduce que si

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left\langle T, \frac{1}{|\lambda|} \varphi\left(\frac{x - a}{\lambda}\right) \right\rangle = C$$

para cada $\varphi \in D$, tal que $\varphi \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$, la distribución T tiene el valor $T(a) = C$ en a .

Así, considerando la notación de la sección 1.3, la expresión (1.12) será equivalente a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} T(a + \lambda x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle \tau_a T^{[\lambda]}, \varphi \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{|\lambda|} \langle T, \tau_{-a} \varphi^{[\frac{1}{\lambda}]} \rangle.$$

Además, si consideramos a T_f como una distribución regular, el límite a considerar sería

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle T_f(a + \lambda x), \varphi(x) \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi\left(\frac{x - a}{\lambda}\right) dx \right\}.$$

Con lo antes dicho podemos observar que, lo que hace Lojasiewicz es definir el valor de una distribución en un punto como el límite de una dilatación y una traslación a la vez. La traslación centra la función prueba en el punto a , mientras que la dilatación la concentra alrededor de dicho punto. Así, dicho procedimiento permite analizar el comportamiento local de la distribución en torno al punto a , interpretando el valor de la distribución en el punto como el límite de su acción sobre funciones prueba cada vez más concentradas en a .

Teorema 29 ([16]). *Sea T una distribución de tal manera que $T(a)$ existe. Si $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces*

$$(T \cdot \alpha)(a) = (T(a)) \left(\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \right).$$

1.3.2. Espacio de funciones Schwartz y distribuciones temperadas

El espacio de funciones Schwartz, usualmente denotado por $S(\mathbb{R})$, recibe su nombre en honor al matemático francés Laurent Schwartz, quien introdujo dicho espacio en el contexto del desarrollo de la teoría de distribuciones alrededor del año 1950. La importancia de este espacio radica en ciertas propiedades como la cerradura bajo la derivación y la Transformada de Fourier. Además, esta transformada es un isomorfismo isométrico con respecto a la norma $L^2(\mathbb{R})$ (Teorema de Plancherel-Parseval) [11].

Definición 38 ([12]). *Definimos el espacio de las funciones Schwartz por*

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \quad (1.13)$$

donde $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)|$.

Proposición 6 ([12]). *Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. La condición (1.13) es equivalente a que para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, exista un $C > 0$ tal que*

$$|\varphi^{(\beta)}(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha},$$

para toda $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 7 ([12]). *$S(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial.*

Sabiendo que la función 0 es acotada, considerando las propiedades del supremo y la derivada, es fácil probar la proposición anterior.

Teorema 30 ([12]). *$D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $\varphi \in D(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por definición, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sea K el soporte de φ . Tenemos que $\varphi^{(\beta)}$ es continua, entonces $x^\alpha \varphi^{(\beta)}$ también es continua y se anula fuera de K . Por lo tanto $x^\alpha \varphi^{(\beta)}$ está acotada en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| = \sup_{x \in K} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| < \infty.$$

Así, $\varphi \in S(\mathbb{R})$. De acuerdo a la Proposición 6, considerando $\beta = 0$ y $\alpha = 2$, tenemos que

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}.$$

Como $\frac{C}{(1+|x|)^\alpha} \in L^1(\mathbb{R})$, concluimos que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. ■

Observación 8. Las funciones Schwartz decrecen más rápido que cualquier potencia positiva de $\frac{1}{|x|}$ cuando x tiende a más infinito o menos infinito. Es decir, para todo $n > 0$ se cumple que $\lim_{|x| \rightarrow \pm\infty} |x^n f(x)| = 0$. Esto implica que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Definición 39 ([11]). Una sucesión de elementos $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $S(\mathbb{R})$ tiende a cero, cuando n tiende a infinito si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi_n^{(\beta)}(x)| = 0$$

para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

La definición anterior implica que, la sucesión φ_n y la sucesión de todas las derivadas $\varphi_n^{(q)}$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta la definición anterior, se define la convergencia a una función en el espacio de las funciones Schwartz, como sigue.

Definición 40 ([11]). De la Definición 39, tenemos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ con $\varphi_n, \varphi \in S(\mathbb{R})$, si $\varphi_n - \varphi$ satisface dichas condiciones.

Proposición 8 ([11]). Si la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a 0 en $S(\mathbb{R})$, entonces

- $\varphi'_n \rightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$.
- $P\varphi_n \rightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$ para todo polinomio P .

Definición 41 ([12]). Sea $T : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional. Decimos que T es una distribución temperada si es lineal y continua. El espacio de estas funciones se denotará como $S'(\mathbb{R})$.

Nota 8. En la definición anterior, por continuidad nos referimos a que, si la sucesión $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $S(\mathbb{R})$ (en el sentido de la Definición 40), entonces $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ en $\mathbb{C}$.

Como en la sección de distribuciones clásicas, definimos la derivada de una distribución temperada de la siguiente manera.

Definición 42 ([12]). Sea $T \in S'(\mathbb{R})$. Definimos la derivada de T por

$$D(T(\varphi)) = \langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle.$$

Proposición 9 ([11]). Cada distribución temperada T , es infinitamente diferenciable y la n -ésima derivada de T satisface la relación

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$$

para toda $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

Existen distintos teoremas que nos dan condiciones para poder probar que una distribución es temperada. El teorema siguiente nos da condiciones necesarias y suficientes para determinar este tipo de distribuciones.

Teorema 31 ([12]). *Sea $T : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ lineal. Entonces $T \in S'(\mathbb{R})$ si y sólo si existe un $C > 0$ y un $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que, para toda $\varphi \in S(\mathbb{R})$*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \|\varphi\|_{\alpha, \beta}.$$

Como se mencionó al inicio de esta subsección, el espacio de Schwartz es cerrado bajo derivación y para enfatizarlo, lo enunciamos a continuación.

Proposición 10 ([11]). *Sea $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Entonces, $\varphi^{(\beta)} \in S(\mathbb{R})$ para $\beta \in \mathbb{N}$.*

Proposición 11 ([11]). *Si T es una distribución temperada, para cada $k \in \mathbb{N}$, la derivada $T^{(k)} \in S'(\mathbb{R})$.*

Demostración. Es claro que $T^{(k)}$ es lineal. Sea $\varphi_n \in S(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_n \rightarrow 0$. Como $\langle T^{(k)}, \varphi_n \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi_n^{(k)} \rangle$, y por la Proposición 8, $\varphi_n^{(k)} \rightarrow 0$. Entonces, se tiene que $T^{(k)} \in S'(\mathbb{R})$. ■

1.4. La Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una herramienta matemática ampliamente utilizada en diversas áreas como el procesamiento de señales, análisis de sistemas, física y matemáticas aplicadas. Mediante esta transformada, es posible representar una señal en el dominio del tiempo como una integral de ondas sinusoidales, cada una con una frecuencia, amplitud y fase específicas.

Mediante las Series de Fourier podemos representar una señal periódica en términos de sus componentes sinusoidales, cada componente con una frecuencia en particular. La Transformada de Fourier permite hacer esto mismo con señales no periódicas. A continuación, enunciamos dicha definición y algunas de sus propiedades.

Definición 43 ([8]). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos la transformada de Fourier de f , por*

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx, \quad (1.14)$$

para $\omega \in \mathbb{R}$.

Note que, i denota la unidad imaginaria de los números complejos.

Observación 9. *La Transformada de Fourier tiene sentido en ciertos espacios de funciones, en los cuales la integral (1.14) resulta convergente para todo elemento del espacio.*

Observemos que, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sabiendo que $e^{-2\pi i x \omega}$ es una función medible acotada, entonces su producto $f(x)e^{-2\pi i x \omega}$ también está en $L^1(\mathbb{R})$, y por lo tanto, la expresión (1.14) existe para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$. Por otro lado, considerando que (1.14) existe en el sentido de Lebesgue, el integrando es una función en $L^1(\mathbb{R})$. Como $e^{-2\pi i x \omega}$ es una función unimodular, se deduce que f está en $L^1(\mathbb{R})$. Así, enunciamos de manera formal lo antes dicho.

Teorema 32. *La transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ de una función f , está definida para todo $\omega \in \mathbb{R}$ por (1.14) como integral de Lebesgue convergente, si y solo si $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

Así, si existe un $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}(\omega_0)$ no está definida por (1.14) como integral de Lebesgue convergente, entonces $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 33. *Teniendo en cuenta que $L^1(\mathbb{R}) \subset HK(\mathbb{R})$ propiamente. Si $f \in HK(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ y es posible definir su Transformada de Fourier, entonces, esta no estará definida en todos los números reales.*

A continuación presentamos algunas propiedades de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 34 ([8]). *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces:*

- $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.
- Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i \alpha x}$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - \alpha)$.
- Si $g(x) = f(x - \alpha)$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-2\pi i \alpha t}$.
- Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, entonces $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$.
- Si $g(x) = \lambda^{-1}f(x/\lambda)$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(\lambda t)$.
- Si $g(x) = -2\pi i x f(x)$ y $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{g}$ es diferenciable y $\hat{g}(t) = (\hat{f})'(t)$.

Teorema 35 ([22], Lema de Riemann-Lebesgue). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, $\hat{f}(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.*

Como $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ propiamente, la Transformada de Fourier en el sentido de la Definición 43, está definida para la funciones en el espacio de Schwartz. A partir de esta observación, enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 36 ([11]). *Si $\varphi \in S(\mathbb{R})$, entonces $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$.*

1.4.1. La Transformada de Fourier para distribuciones y la Integral HK

Definición 44 ([11]). Si $T \in S'(\mathbb{R})$, entonces la transformada de Fourier de T , denotada por $\widehat{T}$, está definida por

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

para todo $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

Proposición 12 ([11]). Sea T una distribución temperada. Entonces $\widehat{T}$ sigue siendo un elemento de $S'(\mathbb{R})$.

Ahora, enunciamos una propiedad que relaciona a una distribución clásica con una distribución temperada. No abordaremos aquí su prueba ni los aspectos técnicos que este involucra, su demostración puede verse con detalle en [11].

Proposición 13 ([11]). Sea $T \in D'(\mathbb{R})$. Entonces, $T \in S'(\mathbb{R})$, si y sólo si T es continua en $D'(\mathbb{R})$, en la topología de $S'(\mathbb{R})$.

Recordando que en la Definición 33 y teniendo en cuenta el teorema anterior, se define el operador traslación de una distribución, empleamos dicho concepto en la siguiente proposición.

Proposición 14 ([11]). Sea T una distribución temperada. Para toda $a \in \mathbb{R}$ se tiene que:

1. $\tau_a \widehat{T} = [e^{2\pi i a x} T]^\wedge$,
2. $\widehat{\tau_a T} = e^{-2\pi i a \omega} \widehat{T}$.

Dado que la exponencial en la proposición anterior es una función infinitamente diferenciable, es fácil ver que el producto por una distribución temperada, es nuevamente temperado.

Con respecto a la Integral de Henstock-Kurzweil, se define la “HK Transformada de Fourier” de la siguiente manera.

Definición 45 ([24]). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la Transformada de Fourier de f en el sentido de la Integral HK, por

$$\widehat{f}_{HK}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x w} dx, \quad (1.15)$$

para $w \in \mathbb{R}$, cuando la integral exista en el sentido de Henstock-Kurzweil.

Capítulo 2

Distribuciones y la Integral HK

En este capítulo se utilizarán distintos tipos de integración, para evitar confusiones, denotaremos por $HK \int_a^b f(x) dx$ la integral de Henstock-Kurzweil de f , mientras que las de otro tipo se señalarán oportunamente.

Como se mencionó anteriormente, identificaremos a una función localmente HK -integrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la distribución definida por

$$T_f(\varphi) = HK \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt,$$

donde $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Veamos que en efecto $T_f(\varphi)$ es una distribución.

Si $\text{sop}(\varphi) \subset (a, b)$, por el Teorema del Multiplicador (Teorema 15), tenemos que

$$\begin{aligned} T_f(\varphi) &= HK \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt = HK \int_a^b f(t)\varphi(t) dt = F(b)\varphi(b) - \int_a^b F(t) d\varphi(t) = \\ &= - \int_a^b F(t) d\varphi(t), \end{aligned}$$

donde $F = \int_a^x f$ es la integral indefinida de f y las últimas dos integrales en la expresión anterior, son en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Por el Teorema Fundamental II* F es continua, así, por el Teorema 6

$$|T_f(\varphi)| = \left| - \int_a^b F(t)\varphi'(t) dt \right| \leq M_{a,b} \sup_{x \in (a,b)} |\varphi'(t)|,$$

donde $M_{a,b}$ representa el valor de $\int_a^b |F|$.

Por lo tanto, por el Teorema 28, $T_f(\varphi)$ es una distribución.

En virtud del Teorema 16, si f es diferenciable en cada punto, entonces f' es localmente HK -integrable. Además, $T_{f'}(\varphi) = D(T_f(\varphi))$, ya que, si $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = HK \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \langle D(T_f), \varphi \rangle.$$

Así, podemos definir la Transformada de Fourier de una función HK -integrable en el sentido de distribuciones.

Definición 46. Sea $f \in HK(\mathbb{R})$. Definimos la Transformada de Fourier de f , en el sentido de distribuciones como

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle,$$

para todo $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Dicha expresión tiene sentido ya que $\hat{\varphi}$ es de variación acotada en cualquier intervalo que contenga a su soporte. Observemos que, se comienza por tomar una función $\varphi \in D(\mathbb{R})$, que a su vez pertenece a $S(\mathbb{R})$. Es por ello que al tomar la Transformada de Fourier de φ , esta se mantiene en $S(\mathbb{R})$ y así, la expresión del lado derecho de la igualdad es ahora una distribución temperada evaluada en $\hat{\varphi}$. Estamos diciendo que el lado derecho de la igualdad que es una distribución temperada, está bien definida en el sentido de Henstock-Kurzweil y además, es igual a la Transformada de Fourier de la distribución regular generada por la función f evaluada en φ . En otras palabras, la Transformada de Fourier de una distribución regular generada por una función $f \in HK(\mathbb{R})$, es igual a una distribución temperada.

Teorema 37. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función HK -integrable. Entonces, T_f es una distribución temperada.

Demostración. Sean $F(x) = HK \int_0^x f(t) dt$ acotada en $[0, +\infty)$ y $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Por el Teorema del multiplicador

$$HK \int_a^b f(t) \varphi(t) dt = F(b) \varphi(b) - \int_a^b F(t) d\varphi(t).$$

Como F es acotada y continua, además de que $\varphi \in S(\mathbb{R})$, entonces, por el Teorema 6,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi'(t) dt$$

está bien definida y $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)\varphi(b) = 0$.

Así, análogamente a lo hecho anteriormente, tenemos que

$$HK \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\varphi'(t) dt$$

y que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\varphi'(t) dt \right| \leq M \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|.$$

Por lo tanto, empleando el Teorema 31, si tomamos $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, tenemos que la funcional lineal $T_f(\varphi)$ es una distribución temperada. ■

En el siguiente lema, se demuestra la convergencia de un límite en específico y la existencia de otro límite, dándonos así, las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema 9 en la prueba del teorema posterior a dicho lema.

Lema 1. Sean f una función HK-integrable en $\mathbb{R}$ y $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Sean $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ y F la integral indefinida de f . Entonces, el límite $\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left\{ F(b)\widehat{\varphi}(\lambda b) - F(a)\widehat{\varphi}(\lambda a) - \int_a^b F(x) d\widehat{\varphi}(\lambda x) \right\}$ existe, mientras que el límite $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \widehat{\varphi}(\lambda x) dx$ converge uniformemente a $\int_a^b \widehat{\varphi}(0) f(x) dx$.

Demostración. Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue y el Teorema de Hake, obtenemos

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left\{ F(b)\widehat{\varphi}(\lambda b) - F(a)\widehat{\varphi}(\lambda a) - \int_a^b F(x) d\widehat{\varphi}(\lambda x) \right\} = 0 - 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) d\widehat{\varphi}(\lambda t)$$

y este último existe por el Teorema 8.

Por otro lado, usando el Teorema 24, tenemos que

$$\left| \int_a^b f(x)\widehat{\varphi}(\lambda x) dx - \int_a^b \widehat{\varphi}(0)f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x)(\widehat{\varphi}(\lambda x) - \widehat{\varphi}(0)) dx \right| \quad (2.1)$$

$$\leq \|f\|_A \text{Var}(\widehat{\varphi}(\lambda x) - \widehat{\varphi}(0), [a, b]) \leq \|f\|_A \epsilon$$

para $\epsilon > 0$, cuando $\lambda \rightarrow 0$ y $|\lambda| < \delta$ para toda $a < b$. La última desigualdad en (2.1), se debe a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\varphi}(\lambda x) - \widehat{\varphi}(0), [a, b]) &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |\widehat{\varphi}(\lambda x_i) - \widehat{\varphi}(0) - \widehat{\varphi}(\lambda x_{i-1}) + \widehat{\varphi}(0)| \\ &= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |\widehat{\varphi}(\lambda x_i) - \widehat{\varphi}(\lambda x_{i-1})| = \text{Var}(\widehat{\varphi}, [\lambda a, \lambda b]). \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta la aditividad de la variación total, podemos considerar un $\epsilon > 0$, de tal manera que existe $\delta > 0$ tal que, si $|d - c| < \delta$, entonces $Var(\widehat{\varphi}, [c, d]) < \epsilon$.

Ahora, si $\lambda \rightarrow 0$, tenemos que, $[\lambda a, \lambda b]$ se vuelve arbitrariamente pequeño. Así, podemos encontrar un λ lo suficientemente pequeño tal que $Var(\widehat{\varphi}, [\lambda a, \lambda b]) < \epsilon$ para todo $a < b$. Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Var(\widehat{\varphi}, [\lambda a, \lambda b]) = 0$$

y en consecuencia,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Var(\widehat{\varphi}(\lambda x) - \widehat{\varphi}(0), [a, b]) = 0. \quad (2.2)$$

Así, por (2.1) y (2.2)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \widehat{\varphi}(\lambda x) dx \quad \text{converge uniformemente a} \quad \int_a^b \widehat{\varphi}(0) f(x) dx.$$

■

En el teorema siguiente, veremos que la Transformada de Fourier de la distribución asociada a una función HK-integrable, evaluada en cero, coincide con la integral de la función.

Teorema 38. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función HK-integrable en $\mathbb{R}$. Entonces, la Transformada de Fourier de la distribución asociada a f , evaluada en cero, tiene el valor HK $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.*

Demostración. Sea $\varphi \in D(\mathbb{R})$ fijo. Por la definición de Lojasiewicz de una distribución evaluada en un punto, se probará que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \widehat{T}_f(\lambda x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle \widehat{T}_f(\lambda x), \varphi(x) \rangle = \widehat{\varphi}(0) \text{ HK } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Teniendo en cuenta la Definición 46, se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle \widehat{T}_f(\lambda x), \varphi(x) \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle f(x), \widehat{\varphi}(\lambda x) \rangle.$$

Entonces, bastará ver que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle f(x), \widehat{\varphi}(\lambda x) \rangle = \widehat{\varphi}(0) \text{ HK } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

donde $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$.

Utilizando el Teorma de Hake, Teorema del Multiplicador, el Teorema de Helly, el Lema 1 y el Teorema 9, podemos realizar los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle f(x), \widehat{\varphi}(\lambda x) \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} HK \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widehat{\varphi}(\lambda x) dx = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} HK \int_a^b f(x) \widehat{\varphi}(\lambda x) dx \right] = \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left[\lim_{\lambda \rightarrow 0} HK \int_a^b f(x) \widehat{\varphi}(\lambda x) dx \right] = \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left[\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ F(b) \widehat{\varphi}(\lambda b) - F(a) \widehat{\varphi}(\lambda a) - \int_a^b F(x) d\widehat{\varphi}(\lambda x) \right\} \right] = \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left[\widehat{\varphi}(0) HK \int_0^b f(x) dx - \widehat{\varphi}(0) HK \int_0^a f(x) dx - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b F(x) d\widehat{\varphi}(\lambda x) \right] = \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left[\widehat{\varphi}(0) HK \int_a^b f(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) d\widehat{\varphi}\left(\frac{1}{n}x\right) \right] = \\
 &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left[\widehat{\varphi}(0) HK \int_a^b f(x) dx - \int_a^b F(x) d\widehat{\varphi}(0) \right] = \widehat{\varphi}(0) HK \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.
 \end{aligned}$$

■

Observación 10. La aplicación del Teorema de Helly es gracias a que el espacio de Schwartz es cerrado bajo la Transformada de Fourier y derivación, además de estar contenido en L^1 , pudiendo así, apoyarse de propiedades como el Teorema 19. Por otro lado, el Teorema de Riemann-Lebesgue, el Teorema 8 y el Teorema 24, garantizan que se cumplen las hipótesis necesarias para realizar el cambio en el orden de los límites mediante la aplicación del Teorema 9.

2.1. La Fórmula de Frullani mediante distribuciones para la Integral HK

Teorema 39. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(f(ax) - f(bx))/x$ es HK -integrable en $[0, +\infty)$, para cada par de reales positivos a y b . Entonces, existe una constante $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$HK \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = A \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad (2.3)$$

Por el Teorema 18, la Observación 4 y haciendo el cambio de variables $x = e^t$, $\alpha = \ln(a)$ y $\beta = \ln(b)$, la expresión (2.3) es equivalente a

$$HK \int_{-\infty}^{+\infty} (f(e^{\alpha+t}) - f(e^{\beta+t})) dt = A(\alpha - \beta).$$

Como $(f(ax) - f(bx))/x$ es $HK([0, +\infty))$, entonces $f(e^{\alpha+t}) - f(e^{\beta+t})$ es $HK(\mathbb{R})$.

Por otro lado, si tomamos $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que $h(x) = e^x$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $g = f \circ h$, entonces

$$f(e^{\alpha+x}) - f(e^{\beta+x}) = g(x + \alpha) - g(x + \beta),$$

donde $g(x + \alpha) - g(x + \beta)$ es $HK(\mathbb{R})$.

Así, es suficiente probar el siguiente teorema.

Teorema 40. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $g(x + \alpha) - g(x + \beta)$ es $HK(\mathbb{R})$ para los reales α y β . Entonces, existe una constante A tal que

$$HK \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + \alpha) - g(x + \beta)) dx = A(\alpha - \beta). \quad (2.4)$$

Demostración. Sea $h_\alpha(x) := g(x + \alpha) - g(x)$. Note que $h_\alpha \in HK(\mathbb{R})$ para cada número real α . Notemos que

$$h_\alpha(x) + h_\beta(x + \alpha) = h_\beta(x) + h_\alpha(x + \beta). \quad (2.5)$$

Considerando las distribuciones asociadas a h_α y h_β en (2.5), obtenemos

$$T_{h_\alpha} + \tau_{-\alpha} T_{h_\beta} = T_{h_\beta} + \tau_{-\beta} T_{h_\alpha}. \quad (2.6)$$

Aplicando la Transformada de Fourier a (2.6) y teniendo en cuenta la Proposición 14, se tiene que

$$\widehat{T_{h_\alpha}} + e^{2\pi i \alpha x} \widehat{T_{h_\beta}} = \widehat{T_{h_\beta}} + e^{2\pi i \beta x} \widehat{T_{h_\alpha}}.$$

Así, en una vecindad de cero, tenemos que

$$\widehat{T_{h_\beta}} = \frac{1 - e^{2\pi i \beta x}}{1 - e^{2\pi i \alpha x}} \widehat{T_{h_\alpha}}.$$

Como la función $(1 - e^{2\pi i \beta x})/(1 - e^{2\pi i \alpha x}) \in C^\infty(\mathbb{R})$, podemos aplicar el Teorema 29. Así,

$$\widehat{T_{h_\beta}}(0) = \frac{\beta}{\alpha} \widehat{T_{h_\alpha}}(0). \quad (2.7)$$

Si definimos $G(\beta) = HK \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + \beta) - g(x)) dx$ y aplicamos el Teorema 38 a (2.7), obtenemos

$$HK \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + \beta) - g(x)) dx = \frac{\beta}{\alpha} HK \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + \alpha) - g(x)) dx,$$

equivalentemente, $G(\beta) = \frac{\beta}{\alpha} G(\alpha)$. Tomando $G(1) = A$, entonces

$$G(\beta) = A\beta.$$

Haciendo el cambio de variable $x = u + \beta$, se tiene

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)A = G(\alpha - \beta) &= HK \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + \alpha - \beta) - g(x)) du \\ &= HK \int_{-\infty}^{+\infty} (g(u + \alpha) - g(u + \beta)) du. \end{aligned}$$

■

Nota 9. Nótese que, lo que se ha hecho es una prueba de la *Fórmula Integral de Frullani* mediante distribuciones relacionadas con funciones que son $HK(\mathbb{R})$. Esto, por medio de la relación unívoca $f \leftrightarrow T_f$, la cual nos permite emplear integrales HK , y mediante algunas de sus propiedades, lograr asociarlas a integrales de Riemann o Riemann-Stieltjes.

2.2. Ejemplos

A continuación presentamos una serie de ejemplos donde se evidencia el uso del Teorema 39. Además, en algunos de ellos, se permite visualizar la puesta en práctica de la teoría desarrollada en el Capítulo 1, en particular, la integración en el sentido HK .

Sean $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

y $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & 1 \leq x < \infty \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Sean $F, G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $F(x) = \frac{\text{sen}^2(ax) - \text{sen}^2(bx)}{x^2}$ y $G(x) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$. Como $f, g, F, G \in L^1([0, +\infty))$ [17], por el Teorema 11 se tiene que $F, G \in HK([0, +\infty))$.

Así, aplicando el Teorema 39, se obtiene

1.

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2(ax) - \text{sen}^2(bx)}{x^2} dx = A \text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right),$$

y que

2.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = A \text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right).$$

3. Consideremos la función $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$. Tenemos que, para $a > 0$

$$\frac{h(ax)}{x} = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\frac{1}{ax})}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Veamos que $H(x) = \frac{h(ax)}{x} - \frac{h(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$ para $a, b > 0$.

Teniendo en cuenta el Ejemplo 1, la integral de $\frac{\text{sen}(\frac{1}{ax})}{x}$ existe en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Si $x > \frac{\pi}{2}$, y considerando que

$$0 \leq \text{sen} \left(\frac{1}{ax} \right) \leq \frac{1}{ax},$$

obtenemos que el integrando es dominado por $\frac{1}{ax^2}$ y por lo tanto convergente. Así, $\frac{\text{sen}(\frac{1}{ax})}{x} \in HK([0, +\infty))$ y análogamente $\frac{\text{sen}(\frac{1}{bx})}{x} \in HK([0, +\infty))$, por lo que $H(x) \in HK([0, +\infty))$.

Aplicando el Teorema 39 a $H(x)$, se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(\frac{1}{ax}) - \text{sen}(\frac{1}{bx})}{x} dx = A \text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right).$$

4. Si $k(x) = xe^{-|x|}$, entonces, para $a > 0$

$$\frac{k(ax)}{x} = ae^{-|ax|}.$$

Observemos que $\frac{k(ax)}{x}$ es par, pero no sabemos si su integral existe. Si tomamos $c < 0 < d$ de tal manera que

$$\begin{aligned} \int_c^d ae^{-|ax|} dx &= \int_c^0 ae^{ax} dx + \int_0^d ae^{-xa} dx = e^{ax} \Big|_c^0 - e^{-ax} \Big|_0^d = \\ &= 1 - e^{ac} + 1 - e^{-ad} = 2 - e^{ac} - e^{-ad}. \end{aligned}$$

Considerando que $a > 0$, que si $c \rightarrow -\infty$ y $d \rightarrow +\infty$, entonces $e^{ac} \rightarrow 0$ y $e^{-ad} \rightarrow 0$ respectivamente. Por el Teorema de Hake

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-|ax|} dx = 2.$$

Por lo tanto, $\int_0^{+\infty} ae^{-|ax|} dx = 1$. Así, $\frac{k(ax)}{x} \in HK([0, +\infty))$ y análogamente $\frac{k(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$. Entonces, $K(x) = ae^{-|ax|} - be^{-|bx|} = \frac{k(ax)-k(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$. Aplicando el Teorema 39

$$\int_0^{+\infty} ae^{-|ax|} - be^{-|bx|} dx = A \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right).$$

5. Consideremos $m(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \operatorname{sen}(x^2)$. Veamos que $M(x) = \frac{m(ax)-m(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$. Tenemos que

$$\frac{m(ax)}{x} = \frac{xa^2}{\sqrt{ax+1}} \operatorname{sen}(x^2a^2).$$

Sean $g(x) = \sqrt{ax} \operatorname{sen}(a^2x^2)$ y $\varphi(x) = \sqrt{\frac{a^3x}{ax+1}}$. Veamos que $g \in HK([0, +\infty))$. Observemos que, cuando $x \rightarrow 0$, el integrando se aproxima a cero. Ahora, haciendo

el cambio de variable $u = a^2x^2$ e integrando por partes en $0 < p < q$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \left| \int_p^q \sqrt{ax} \operatorname{sen}(a^2x^2) dx \right| &= \left| \frac{1}{2a} \int_{a^2p^2}^{a^2q^2} x^{-1/4} \operatorname{sen}(x) dx \right| = \\
 &= \frac{1}{2a} \left| x^{-1/4} \cos(x) \Big|_{a^2p^2}^{a^2q^2} - \int_{a^2p^2}^{a^2q^2} \cos(x) \frac{-x^{-5/4}}{4} dx \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2a} \left(|(qa)^{-1/2} \cos(a^2q^2) - (pa)^{-1/2} \cos(a^2p^2)| + \frac{1}{4} \int_{a^2p^2}^{a^2q^2} |\cos(x)| |x^{-5/4}| dx \right) \\
 &\leq \frac{1}{2a} \left((qa)^{-1/2} + (pa)^{-1/2} + \frac{1}{4} \left(\frac{x^{-1/4}}{-1/4} \right) \Big|_{a^2p^2}^{a^2q^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2a} ((qa)^{-1/2} + (pa)^{-1/2} - (qa)^{-1/2} + (pa)^{-1/2}) = \frac{1}{\sqrt{pa^3}}.
 \end{aligned}$$

Para p lo suficientemente grande, $\frac{1}{\sqrt{pa^3}} \leq \epsilon$. Por lo tanto, por el Criterio de Cauchy $g \in HK([0, +\infty))$ y considerando que φ es creciente, por el Criterio de Abel $g(x)\varphi(x) = \frac{m(ax)}{x} \in HK([0, +\infty))$. Análogamente, $\frac{m(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$ y por lo tanto $M(x) \in HK([0, +\infty))$.

Aplicando el Teorema 39

$$\int_0^{+\infty} \frac{xa^2 \operatorname{sen}(x^2a^2)}{\sqrt{ax+1}} - \frac{xb^2 \operatorname{sen}(x^2b^2)}{\sqrt{bx+1}} = A \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right).$$

6. Sea $l(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen}(x)}{\sqrt[4]{x(x+1)}}$. Observemos que

$$\frac{l(ax)}{x} = \frac{a^2x \operatorname{sen}(ax)}{\sqrt[4]{ax}(ax+1)}.$$

Sean $h(x) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\sqrt[4]{ax}}$ y $\varphi(x) = \frac{a^2x}{(ax+1)}$.

Veamos que $h \in HK([0, +\infty))$. Cuando $x \rightarrow 0$, el integrando se aproxima a cero. Análogamente a lo hecho en el Ejemplo 5, haciendo el cambio de variable $u = ax$ e integrando por partes, se tiene

$$\left| \int_p^q (ax)^{-1/4} \operatorname{sen}(ax) dx \right| \leq \frac{2}{\sqrt[4]{pa^5}}.$$

Para p lo suficientemente grande, $\frac{2}{\sqrt[4]{pa^5}} \leq \epsilon$. Por el Criterio de Cauchy $h \in HK([0, +\infty))$ y considerando que φ es creciente, por el Criterio de Abel, $h(x)\varphi(x) = \frac{l(ax)}{x} \in HK([0, +\infty))$. Similarmente, $\frac{l(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$ y por lo tanto $L(x) = \frac{l(ax)-l(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$.

Aplicando el Teorema 39

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^2 x \operatorname{sen}(ax)}{\sqrt[4]{ax}(ax+1)} - \frac{b^2 x \operatorname{sen}(bx)}{\sqrt[4]{bx}(bx+1)} = A \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right).$$

7. Como en el Ejemplo 5, usando el Criterio de Cauchy, veremos que si $u(x) = x \operatorname{sen}(x)/\sqrt{x}$, entonces $U(x) = \frac{a \operatorname{sen}(ax)}{\sqrt{ax}} - \frac{b \operatorname{sen}(bx)}{\sqrt{bx}}$ es $HK([0, +\infty))$.

Notemos que $\frac{u(ax)}{x} = \frac{a \operatorname{sen}(ax)}{\sqrt{ax}}$, y cuando $x \rightarrow 0$, esta tiende a cero. Integrando por partes en $0 < p < q$, tenemos que

$$\left| \int_p^q \frac{a \operatorname{sen}(ax)}{\sqrt{ax}} dx \right| \leq \frac{2}{\sqrt{ap}}.$$

Para p lo suficientemente grande, $\frac{2}{\sqrt{pa}} \leq \epsilon$. Por el Criterio de Cauchy $\frac{u(ax)}{x} \in HK([0, +\infty))$ y similarmente $\frac{u(bx)}{x} \in HK([0, +\infty))$. Por lo tanto $U(x) \in HK([0, +\infty))$.

De lo anterior, aplicando el Teorema 39 obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{a \operatorname{sen}(ax)}{\sqrt{ax}} - \frac{b \operatorname{sen}(bx)}{\sqrt{bx}} dx = A \operatorname{Ln} \left(\frac{a}{b} \right).$$

Conclusión

En este trabajo se ha logrado extender la validez de la Fórmula Integral de Frullani al marco de la integral de Henstock-Kurzweil, utilizando la teoría de distribuciones como herramienta fundamental. Este resultado representa una generalización natural respecto a los casos previamente conocidos, tales como la integral impropia de Riemann y la integral de Lebesgue, aportando así, una visión más amplia de la fórmula bajo distintas nociones de integración.

El análisis permitió comprobar que las propiedades clásicas de las distribuciones se mantienen al considerar la integral HK , lo que evidencia la versatilidad y el alcance de esta teoría en la resolución de problemas que no son abordables de manera adecuada mediante integrales tradicionales. En particular, se mostró que la transformada de Fourier de la distribución asociada a una función localmente HK -integrable, evaluada en cero, coincide con el valor de la integral de la función, un resultado clave al momento de demostrar nuestro resultado principal.

Finalmente, la demostración obtenida abre la posibilidad de continuar explorando la relación entre fórmulas clásicas de análisis y teorías de integración más generales, así como de estudiar nuevas aplicaciones de la integral de Henstock-Kurzweil en contextos donde la integral de Riemann o la de Lebesgue resultan insuficientes. De esta manera, el presente trabajo no solo reafirma la importancia de la Fórmula de Frullani, sino que también contribuye a su comprensión y aplicabilidad en un marco más amplio.

Bibliografía

- [1] R. Agnew. Mean Values and Frullani Integrals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2:237–241, 1951.
- [2] A. Alexiewicz. Linear functionals on Denjoy-integrable functions. In *Colloquium Mathematicum*, pages 289–293. Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny PAN, 1948.
- [3] T. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison Wesley, Reading, MA, 1973.
- [4] J. Arias de Reyna. On the theorem of Frullani. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 109(1):165–175, 1990.
- [5] R. Bartle. *A modern theory of integration*, volume 32. American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [6] L. Cauchy. J. Ec. Pol. XIX cah., XII. *Oeuvres complètes*, 1:335–339, 1823.
- [7] L. Cauchy. Exercices de Mathématiques. *Oeuvres complètes*, 7:122–157, 1827.
- [8] J. Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [9] G. Folland. *Fourier analysis and its applications*. Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1992.
- [10] L. Frullani. Sopra gli integrali definiti. *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, 20:44–48, 1828.
- [11] C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets*, volume 30. Springer Science & Business Media, Berlin, 2013.
- [12] G. Hörmann and R. Steinbauer. *Lecture Notes on the Theory of Distributions*. Universität Wien, Vienna, 2001.
- [13] Z. Kadelburg and M. Marjanovic. Interchanging two limits. *L'Enseignement Mathématique*, 51(1-2):15–29, 2005.

- [14] R. Kannan and C. Krueger. *Advanced analysis: on the real line*. Springer Science & Business Media, New York, 2012.
- [15] A. Kolmogorov and S. Fomin. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, volume 1. Courier Corporation, Mineola, NY, 1957.
- [16] S. Łojasiewicz. Sur la valeur et la limite d’une distribution en un point. *Studia Mathematica*, 16(1):1–36, 1957.
- [17] J. López. La Fórmula Integral de Frullani. Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 2023.
- [18] F. Mendoza, M. Morales, S. Sánchez, and J. Escamilla. Henstock-Kurzweil integral transforms and the Riemann-Lebesgue lemma. *Fourier Transform: Signal Processing and Physical Sciences*, pages 79–106, 2015.
- [19] F. Móricz. Pointwise behavior of Fourier integrals of functions of bounded variation over $\mathbb{R}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 297(2):527–539, 2004.
- [20] A. Ostrowski. On some generalizations of the Cauchy-Frullani integral. *Collected Mathematical Papers*, 4:612–616, 1949.
- [21] A. Ostrowski. *On Cauchy-Frullani integrals*. Commentarii Mathematici Helvetici, 1976.
- [22] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 1987.
- [23] C. Swartz. *Introduction to gauge integrals*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [24] A. Vázquez. *Integral de Henstock Kurzweil y Transformada de Fourier*. Tesis doctoral, Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México, 2020.