



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Secretaría de Investigación y Estudios de Posgrado

*MEDICIONES CUÁNTICAS GENERALIZADAS Y RELACIONES DE
INCERTIDUMBRE EN QUBITS DE POLARIZACIÓN DE FOTONES:
ANÁLISIS TEÓRICO USANDO VALOR DÉBIL.*

Tesis

presenta

Rolando Velázquez García

para la obtención de grado de

Maestro en Ciencias (Física Aplicada)

Asesor: Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Co-Asesor: Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar

Puebla, Puebla, Julio 2021

MEDICIONES CUÁNTICAS GENERALIZADAS Y RELACIONES DE
INCERTIDUMBRE EN QUBITS DE POLARIZACIÓN DE FOTONES:
ANÁLISIS TEÓRICO USANDO VALOR DÉBIL.

ROLANDO Velázquez García
COMITÉ

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Presidente

Dr. Carlos I. Robledo Sánchez
Secretario

Dr. Juan Mixcóatl Castillo
Vocal

Dr. W. Fermín Guerrero Sánchez
Suplente

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Asesor

Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar
CO-Asesor

*Dedicado con mucho cariño
para mis padres José Luis y Maribel...*

Contenido

Resumen	9
Introducción	10
Capítulo 1	13
Descripción clásica de la Polarización	13
1.1 Polarización lineal	15
1.2 Polarización Circular	16
1.3 Polarización Elíptica	18
1.4 Matriz de Rotación	19
1.4.1 Rotación de elipse de polarización	21
1.5 Esfera de Poincaré	22
1.5.1 Trigonometría esférica	23
1.5.2 Proyección estereográfica	25
1.6 Parámetros de Stokes	27
1.6.1 Polarización oculta	32
Capítulo 2	33
Descripción cuántica de la polarización	33
2.1 Operadores de Stokes y estados de polarización	35
2.2 Medición de la polarización	38
2.3 El operador de polarización	39
2.4 Postulados de la Mecánica cuántica	39
Capítulo 3	41
Mediciones Cuánticas	41
3.1 Teoría de medición	42
3.2 Formalismo matemático	43
3.2.1 Postulado general de la medición	43

3.3 Mediciones Generalizadas.....	43
3.3.1 Medición del Qubit.....	44
3.4 Mediciones proyectivas.....	44
3.5 Medición Indirecta.....	46
3.5.1 Interacción.....	46
3.6 Medidas débiles.....	47
3.6.1 Ejemplo del spin $\frac{1}{2}$	51
3.6.2 Stern Gerlach.....	52
3.6.3 Polarización de fotones.....	53
3.7 Tomografía de estados cuánticos.....	54
Capítulo 4.....	56
Relaciones de incertidumbre en mediciones cuánticas.....	56
4.1 Relación de Error-Perturbación de Heisenberg.....	57
4.1.1 Derivación de Heisenberg.....	58
4.2 Modelo de Medición de posición de von Neumann.....	59
4.3.- Error y Perturbación en mediciones cuánticas.....	60
4.3.1 Definiciones de error y perturbación.....	61
4.3.2 Error y Perturbación raíz-cuadrático-media (<i>rms</i>).....	62
4.3.3 Formulación del error y la perturbación.....	63
4.4 Relación de incertidumbre de Ozawa.....	65
4.4.1 Limitación de la relación de Heisenberg.....	66
4.4.2 Violación a la relación de Heisenberg.....	68
4.5 Relación de error-perturbación de Branciard.....	69
Capítulo 5.....	71
El significado de los Valores Débiles.....	71
5.1 Simetría temporal en mecánica cuántica.....	72
5.1.1 El formalismo del vector de dos estados.....	72

5.1.2 El vector de dos estados	73
5.2 Mediciones ideales de von Neumann	74
5.3 Valores débiles	75
5.4 ¿Cómo es que surge este valor débil?	77
5.5 Energía débil	78
Capítulo 6	81
Medición de polarización de fotones	81
6.1 Modelo de Medición indirecta	82
6.2 Modelo de Medición Generalizada	82
6.3 Proceso de medición de polarización de fotones	83
6.4 Resultados modelo experimental	85
6.4.1 Preparación del estado de post selección	89
6.4.2 Valor débil de polarización	93
6.4.3 El método de los tres estados para cuantificación de error y perturbación ..	95
6.4.4 Error y perturbación del modelo experimental	97
6.4.5 Evaluación del error y la perturbación	101
Conclusiones	103
Apéndice A	105
A.1 Descripción cuántica de componentes ópticos simples	105
A.1.1 Divisor de haz de amplitud	105
A.1.2 Divisor de haz polarizante	106
A.1.3 Transformaciones de cambio de fase	107
Bibliografía	111

Resumen

El estudio de la naturaleza vectorial de la luz inicia con las ecuaciones de Maxwell que describen completamente la propagación y extensión espacial de ondas electromagnéticas en el espacio libre y en cualquier medio, en este campo se describe el fenómeno de polarización de la luz usando el tratamiento clásico y los parámetros de Stokes, cuya descripción se enfoca en la esfera de Poincaré como el espacio natural de polarización y proporciona una vista geométrica de la transformación de la luz polarizada cuando interactúa con dispositivos ópticos (y con la materia) en términos de rotaciones. En este trabajo se analiza la transición de la descripción de la luz considerándola como un sistema cuántico, así mismo el objetivo principal de esta tesis es caracterizar la medición cuántica débil de la polarización de fotones y examinar la interpretación del valor débil de la medición, sus implicaciones físicas y aplicaciones más importantes.

Así mismo en este trabajo se describe la interacción de fotones individuales con la configuración experimental de un circuito cuántico de enredamiento no determinista con el esquema de un interferómetro de Mach–Zehnder que mide el estado de polarización de fotones y bajo ciertas condiciones de debilidad en la medición los resultados definen el valor débil de la polarización de un conjunto de estados preseleccionados y post seleccionados. La función de onda del estado final es una herramienta sumamente útil que nos permitió calcular las probabilidades de cada resultado de medición y el valor débil de la polarización en la base $(H - V)$ cuyo resultado es $\sqrt{2}$, este valor claramente está fuera del conjunto de eigenvalores (± 1) del observable de polarización, resultado controvertido y muy útil para la amplificación de señales. Finalmente, estudiamos el error y la perturbación de la medición bajo la descripción de Ozawa y utilizando el valor débil de la distribución de probabilidad conjunta de medición. Mostramos la violación a la relación de error–perturbación de Heisenberg y la validez de las relaciones de error–perturbación de Ozawa y otras relaciones propuestas recientemente. También analizamos la compensación óptima entre el error inducido por el dispositivo de medición y la perturbación de la interacción de la medición con el sistema cuántico. Existe suficiente acumulación de resultados y evidencia experimental para pensar que la medición cuántica, de incluso el sistema más simple, aún no ha sido entendida completamente y, paradójicamente, a su vez se han logrado grandes avances en el dominio práctico en una gran variedad de fenómenos en Mecánica Cuántica, como la generación de estados gatos de Schrödinger, el entrelazamiento, las compuertas lógico–cuánticas para el procesamiento de Información Cuántica, Teleportación Cuántica, entre otros.

Introducción

La historia del estudio de la polarización de la luz es parte integral en el desarrollo de la óptica y a su vez juega un rol central en la historia del desarrollo de la física, en el dominio de la óptica clásica se incluyen todos los fenómenos que pueden ser entendidos e interpretados sobre bases de teorías clásicas ondulatorias y corpusculares. El conflicto entre las visiones acerca de la esencia de la luz entre onda o partícula se reconcilio con el establecimiento de la teoría cuántica, con su introducción a la idea de que todas las excitaciones tienen simultáneamente ambos: comportamiento ondulatorio y comportamiento de partícula [1]. La idea maravillosa de la mecánica cuántica es que estos puntos de vista aparentemente contradictorios, la emisión y detección localizada como una partícula y la propagación deslocalizada como un campo, ambas pueden coexistir. La demostración de este comportamiento dual ha sido un gran logro [6]. La luz ha demostrado ser un excelente laboratorio para la investigación en teoría cuántica y también es el caso del fenómeno de polarización de la luz. La medición de los estados de polarización de fotones es una parte fundamental para el procesamiento de Información Cuántica.

¿Qué es el fotón?

En electrodinámica cuántica el fotón es introducido como la unidad de excitación asociada a modos cuantizados de la radiación del campo electromagnético. Cada modo de campo tiene asociados estados de energía como el de un oscilador armónico y el estado de excitación de un modo se dice que es el número de fotones en el modo [1]. En este concepto los fotones están distribuidos a lo largo del modo y no existen en un lugar específico, ellos son una propiedad del modo completo, entonces el concepto de fotón es introducido en la discusión como una consecuencia natural del proceso de cuantizar correctamente el campo electromagnético dentro de una cavidad cerrada o en un sistema óptico abierto. Una descripción detallada de la naturaleza del fotón comienza con el campo electromagnético dentro de un resonador óptico cerrado, o en una cavidad perfectamente reflejante, las excitaciones del campo electromagnético en la cavidad están limitadas por un conjunto infinito de modos espaciales discretos determinados por las condiciones de frontera de la cavidad en las paredes [1]. Las variaciones espaciales permitidas del campo electromagnético de la onda estacionaria en la cavidad son las mismas tanto como para la teoría clásica como para la teoría cuántica. Sin embargo, la dependencia temporal de cada modo está gobernada por la ecuación de movimiento de un oscilador armónico, cuyas soluciones toman diferentes formas en la teoría clásica y cuántica. A diferencia de su contraparte clásica, un oscilador armónico cuántico con frecuencia ω puede ser excitado solamente por energías que sean múltiplos enteros de $\hbar\omega$ o cuantos. Los operadores \hat{a}_i son los operadores de destrucción del fotón para el oscilador armónico, esencialmente representan las amplitudes de los campos

electromagnéticos cuánticos, entonces con baja resolución el transporte de energía, momento, y momento angular pasan por continuo, pero bajo suficiente resolución se rompe el transporte de energía en discretos saltos o cuantos, estos cuantos libres de luz proporcionan un exacto y perfecto oscilador armónico [14]. Los operadores $\hat{E}_{x,y}$, $\hat{B}_{x,y}$ y cualquier combinación lineal de ellos con coeficientes reales, son llamados cuadraturas de campo y son formalmente equivalentes a la posición y el momento de una partícula en dos dimensiones [14]. No podemos describir completamente a los fotones usando las ecuaciones de Maxwell entonces debemos describirlos usando sus estados cuánticos [5] [13], el estado de un sistema cuántico se refiere a un objeto matemático que nos permite calcular inequívocamente todas las probabilidades de los resultados de todas las posibles mediciones en sistemas que han pasado por un procedimiento de preparación de estados, en el análisis de la transición de la descripción de la luz usando estados cuánticos se considera que el estado de polarización de un fotón puede ser tratado como un qubit en un espacio de Hilbert de dos dimensiones, con un estado base y otro excitado [8].

Esta tesis se divide en 6 Capítulos, comienza con una descripción clásica de la polarización. El formalismo matemático para definir los parámetros de Stokes y la representación de estados de polarización de fotones sobre la esfera de Poincaré como el espacio natural de polarización que proporciona una visión geométrica de la luz cuando interactúa con dispositivos ópticos en términos de rotaciones. Este enfoque se justifica para proporcionar una base clara y elementos suficientes para las siguientes discusiones. El siguiente Capítulo se centra en el estudio de la transición de la descripción cuántica de la polarización y la descripción de los postulados de la mecánica cuántica. El Capítulo 3 se enfoca en el tema de mediciones cuánticas, se introduce el formalismo de mediciones generalizadas y las nociones de fuerza de medición, además, se discuten detalladamente los procesos de medición cuántica para poder definir las mediciones débiles, estudiando el ejemplo del spin 1/2 y la polarización de fotones. Se concluye el capítulo con una la descripción del principio de operación del proceso de tomografía de estados cuánticos, una de las aplicaciones más importantes de las mediciones débiles. El Capítulo 4 está enfocado en analizar las relaciones de incertidumbre error–perturbación en mediciones cuánticas, desde la derivación de la relación de Heisenberg y sus limitaciones, se introduce la formulación del error y de la perturbación en mediciones cuánticas. Analizamos las relaciones de error–perturbación propuestas por Ozawa y por Branciard para después discutir el análisis de Busch que considera un dispositivo de medición donde el error y la perturbación de la medición son independientes del estado. El Capítulo 5 puede considerarse como la parte central de la tesis, ya que contiene las definiciones más importantes y relevantes en el campo de los valores débiles como su significado físico, además, bajo el concepto de simetría temporal en Mecánica Cuántica se estudia el formalismo matemático del vector de dos estados y se presenta una interpretación estrictamente operativa del valor débil de un

observable arbitrario. Se analiza la interpretación de la preselección y post selección de estados cuánticos. Al final del capítulo se demuestra el concepto de la energía débil de un sistema cuántico. Finalmente, en el Capítulo 6 se analiza detalladamente los resultados de la interacción de fotones individuales en un esquema de divisor de haz de polarización variable (VPBS) propuesto por Keiichi Edamatsu en 2016, se determina el estado final y se calcula el valor el valor débil de polarización cuyo valor $\sqrt{2}$ no pertenece al conjunto de eigenvalores del observable.

Capítulo 1.

Descripción clásica de la Polarización.

Las ecuaciones de Maxwell describen completamente la propagación y extensión espacial de ondas electromagnéticas en el espacio libre y en cualquier medio, dadas por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}, & \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, & \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

La ecuación de onda para el campo eléctrico se deriva tomando de la ecuación (1.1) el rotacional de la ley de Faraday, sustituyéndola en la ley de Ampere y reordenando la derivada temporal $\frac{\partial}{\partial t}$ que además conmuta con el operador ∇ , tenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

Aplicando la identidad vectorial: $\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$. Y reconociendo que de la ley de Gauss para campo eléctrico que dice que la divergencia del campo eléctrico es cero en ausencia de densidad de carga tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

La ecuación de onda es, por otro lado, invariante ante rotaciones espaciales y temporales. Además, la ecuación de onda es lineal:

$$\nabla^2 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

El estudio de la naturaleza vectorial de la luz ha demostrado que una onda electromagnética plana es una solución a las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre y tiene una relación de velocidad de fase y longitud de onda,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi). \quad (1.5)$$

Esta descripción clásica se centra en la evolución del campo eléctrico en el plano perpendicular a la dirección de propagación del campo. El movimiento del campo eléctrico en este plano gobierna la polarización de la onda [13]. La polarización se introduce como una elipse descrita en el tiempo que forma el punto final del campo eléctrico real de una onda armónica. Una elipse definida representa la polarización completa, mientras que una polarización parcial surge por la sucesión rápida y aleatoria de elipses más o menos diferentes. Asumiendo que la onda se propaga en la dirección Z, el vector de onda está dado por: $\vec{k} = k \hat{u}_z$.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}, \quad (1.6)$$

El campo eléctrico puede escribirse como:

$$\vec{E} = E_x \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y, \quad (1.7)$$

dónde las magnitudes relativas de cada componente son:

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - wt) \text{ y } E_y = E_{0y} \cos(kz - wt + \phi). \quad (1.8)$$

La polarización de la onda está determinada por estas magnitudes relativas E_x, E_y y por el cambio de fase ϕ .

$$E_x = E_{0x} e^{i(kz-wt)} \text{ y } E_y = E_{0y} e^{i(kz-wt+\phi)}. \quad (1.9)$$

Entonces el campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = E_{0x} e^{i(kz-wt)} \hat{u}_x + E_{0y} e^{i(kz-wt+\phi)} \hat{u}_y, \quad (1.10)$$

dónde la amplitud del campo \vec{E} es: $E_0 = [E_{0x}^2 + E_{0y}^2]^{\frac{1}{2}}$,

y en términos de la amplitud: $\vec{E} = E_0 e^{i(kz-wt)} \left[\frac{E_{0x}}{E_0} \hat{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i\phi} \hat{u}_y \right]$. (1.11)

Definimos el vector de polarización: $\vec{\xi} = \left[\frac{E_{0x}}{E_0} \hat{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i\phi} \hat{u}_y \right]$, (1.12)
para reescribir el vector de campo eléctrico en términos del vector de polarización:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz-wt)} \vec{\xi}. \quad (1.13)$$

1.1 Polarización lineal

Considerando el caso especial de cambio de fase igual a cero ($\phi = 0$) entre las componentes del campo X y Y, en este caso el vector de polarización es real:

$$\vec{\xi} = \left[\frac{E_{0x}}{E_0} \hat{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0} \hat{u}_y \right], \quad (1.14)$$

este vector describe una línea que forma un ángulo θ , con respecto al eje X.

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right]. \quad (1.15)$$

Dado que el vector de polarización apunta a lo largo de una línea, se dice que el campo está linealmente polarizado, oscila siempre en el mismo plano.

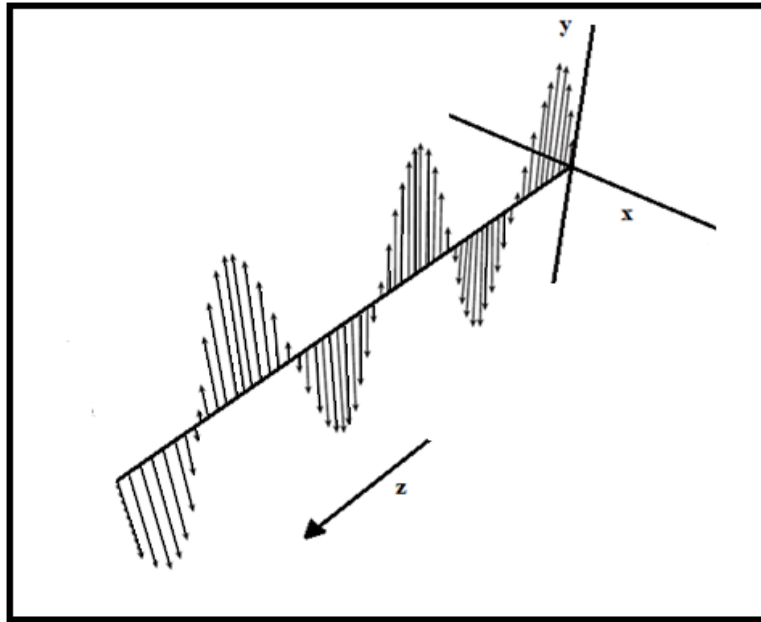


Figura 1. Polarización lineal. Representación de una onda linealmente polarizada propagándose en la dirección Z. Se puede observar muy bien las oscilaciones del campo.

1.2 Polarización Circular

Otro caso de particular interés ocurre cuando las dos ondas tienen la misma amplitud, es decir ($E_{ox} = E_{oy} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$) y $\phi = \frac{\pi}{2}$.

El vector de polarización es entonces: $\vec{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + i\hat{j})$, (1.16)

pero necesitamos la parte real, sin embargo, el vector de polarización es constante en el tiempo y en el espacio

$$E_x(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t) \hat{i}, \quad (1.17)$$

$$E_y(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{j} = \frac{-E_0}{\sqrt{2}} \sin(kz - \omega t) \hat{j}, \quad (1.18)$$

$$\vec{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\cos(kz - \omega t) \hat{i} - \sin(kz - \omega t) \hat{j}]. \quad (1.19)$$

Para examinar como oscilan los campos en el tiempo, en un plano perpendicular a la dirección de propagación hacemos $z = 0$,

$$E_x(0, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(-\omega t) \hat{i} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t) \hat{i}, \quad (1.20)$$

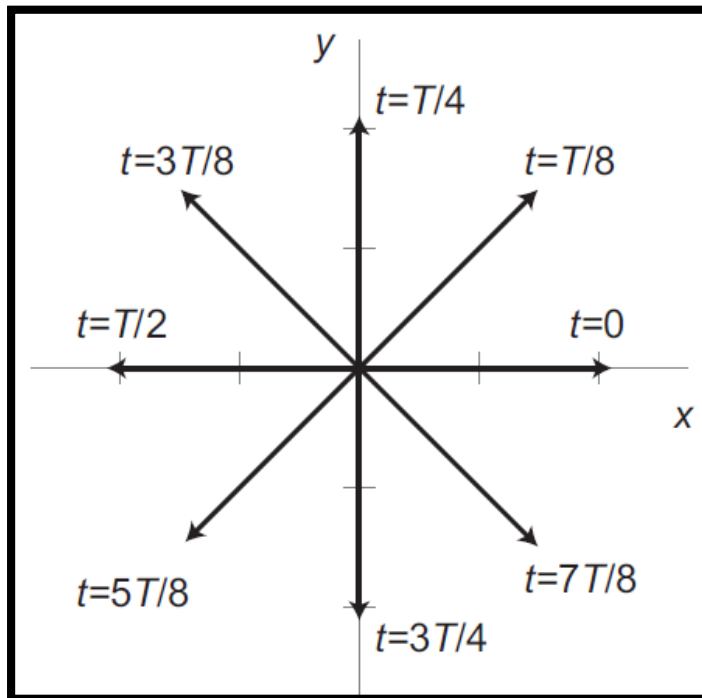


Figura 2. Polarización circular. La dirección del vector de campo eléctrico para diferentes tiempos de una onda con polarización circular izquierda que se propaga hacia adentro de la proyección.

$$E_y(0, t) = \frac{-E_0}{\sqrt{2}} \text{sen}(-\omega t) \hat{j} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \text{sen}(\omega t) \hat{j}, \quad (1.21)$$

la amplitud escalar de \vec{E} es $(\vec{E} \cdot \vec{E})^{\frac{1}{2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$, una constante, pero la dirección de \vec{E} varia en el tiempo, de hecho, está rotando a una frecuencia angular ω y a un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

El vector de campo eléctrico gira alrededor de un eje paralelo al vector de onda, que indica la dirección de propagación del haz, definida como:

$$\vec{E}(0, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\cos(\omega t) \hat{i} + \text{sen}(\omega t) \hat{j}], \quad (1.22)$$

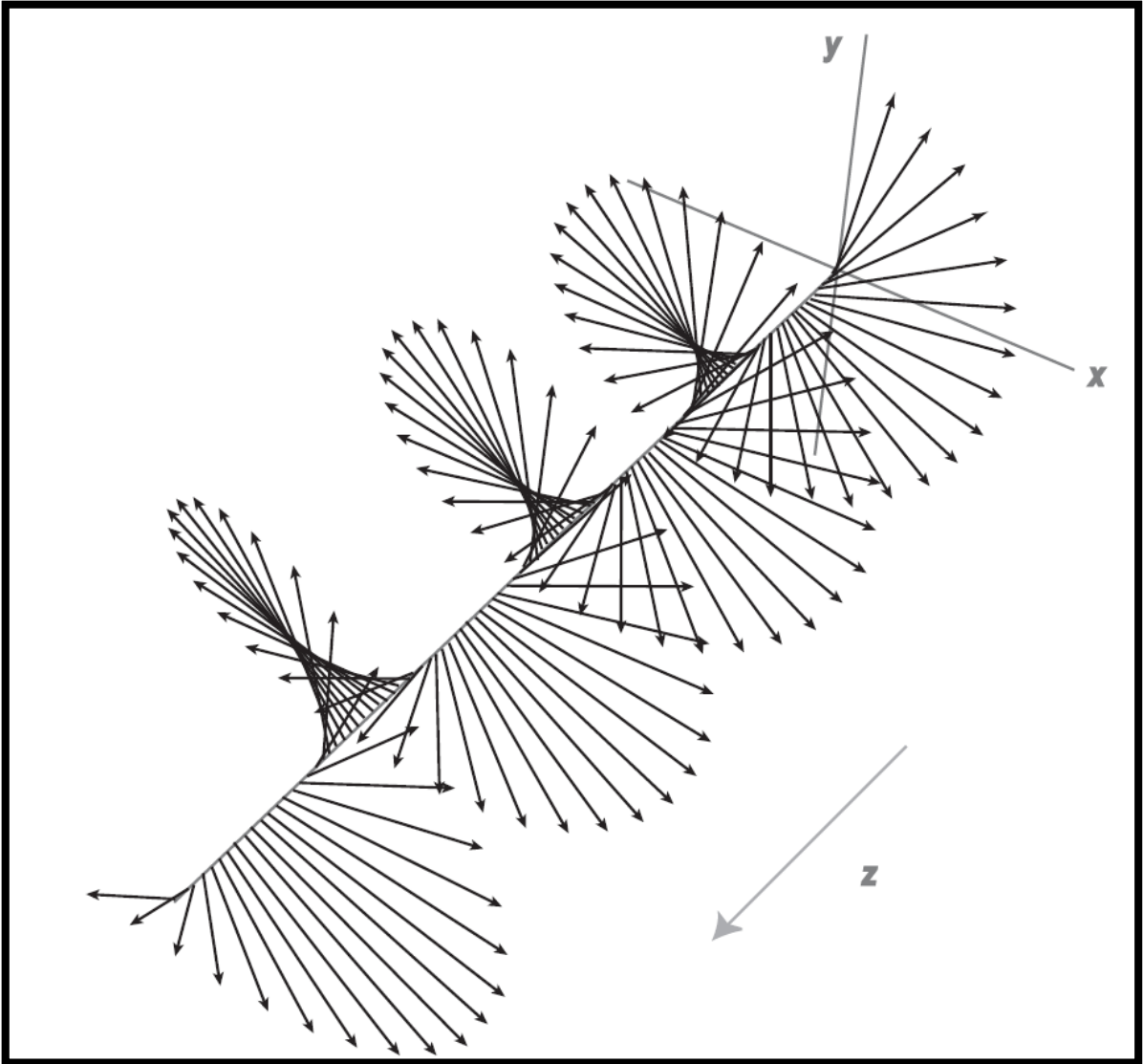


Figura 3. Ilustración de una onda con polarización circular izquierda que se propaga en dirección $-Z$, por M. Beck (2012) [13].

1.3 Polarización Elíptica

Recordando la ec. (1.7) $\vec{E} = E_x \hat{u}_x + E_y \hat{u}_y$, $\phi = \phi_y - \phi_x$

y ec. (8) $E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t)$ y $E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi)$,
tenemos:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(kz - \omega t), \quad (1.23)$$

y considerando la identidad $\cos(\theta)^2 + \text{sen}(\theta)^2 = 1$, obtenemos para la ec.

$$(1.23) \text{ qué, } \text{sen}(kz - wt) = \left(1 - \left[\frac{E_x}{E_{0x}}\right]^2\right)^{1/2}, \text{ por otro lado,}$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(kz - wt + \phi) = \cos(kz - wt) \cos(\phi) - \text{sen}(kz - wt) \text{sen}(\phi), \quad (1.24)$$

Luego, reordenando obtenemos la expresión general de polarización elíptica,

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi) = -\text{sen}(kz - wt) \text{sen}(\phi), \quad (1.25)$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi)\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right) \text{sen}^2(\phi), \quad (1.26)$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos(\phi) = \text{sen}^2(\phi). \quad (1.27)$$

1.4 Matriz de Rotación

Para rotar vectores un ángulo ψ , la matriz de rotación en dos dimensiones es:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

así las coordenadas (x', y') del punto (x, y) después de la rotación son:

$$E'_x = E_x \cos \psi + E_y \text{sen} \psi, \quad (1.29)$$

$$E'_y = -E_x \text{sen} \psi + E_y \cos \psi. \quad (1.30)$$

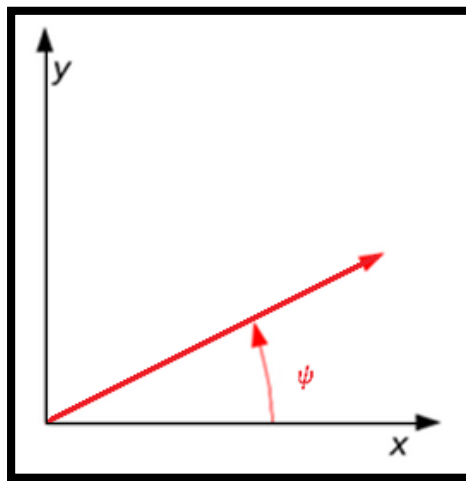


Figura 4. Rotación de un vector con un ángulo ψ en sentido antihorario.

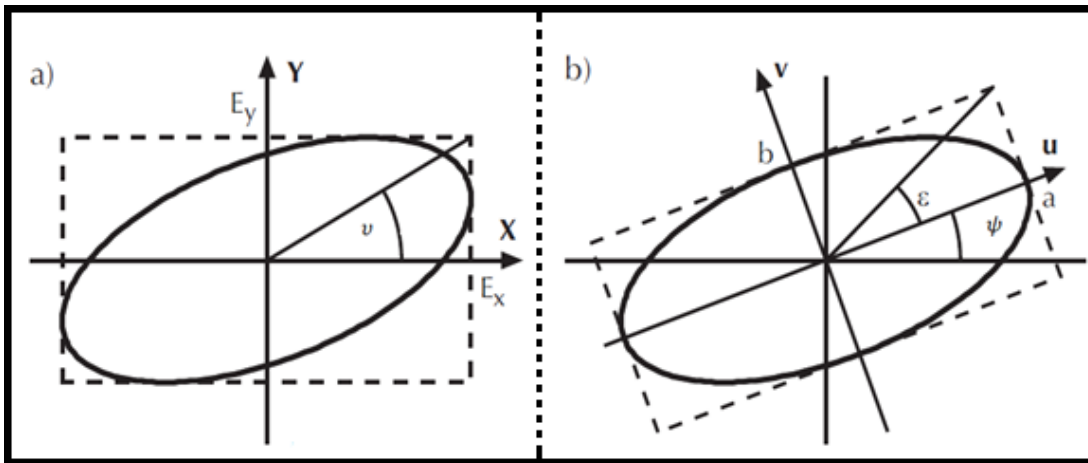


Figura 5. Comparación de los parámetros de la elipse de polarización resuelta en dos sistemas de coordenadas. **a)** Las amplitudes $E_{x,y}$ marcan las proyecciones de la elipse en la base (x, y) , y el ángulo ν se define como $\tan(\nu) = \frac{E_y}{E_x}$, y análogamente $\tan(\epsilon) = \frac{b}{a}$, **b)** la misma elipse, pero la base (u, v) está alineada con los semi ejes mayor y menor de la elipse. El ángulo entre (x, y) y (u, v) es ψ .

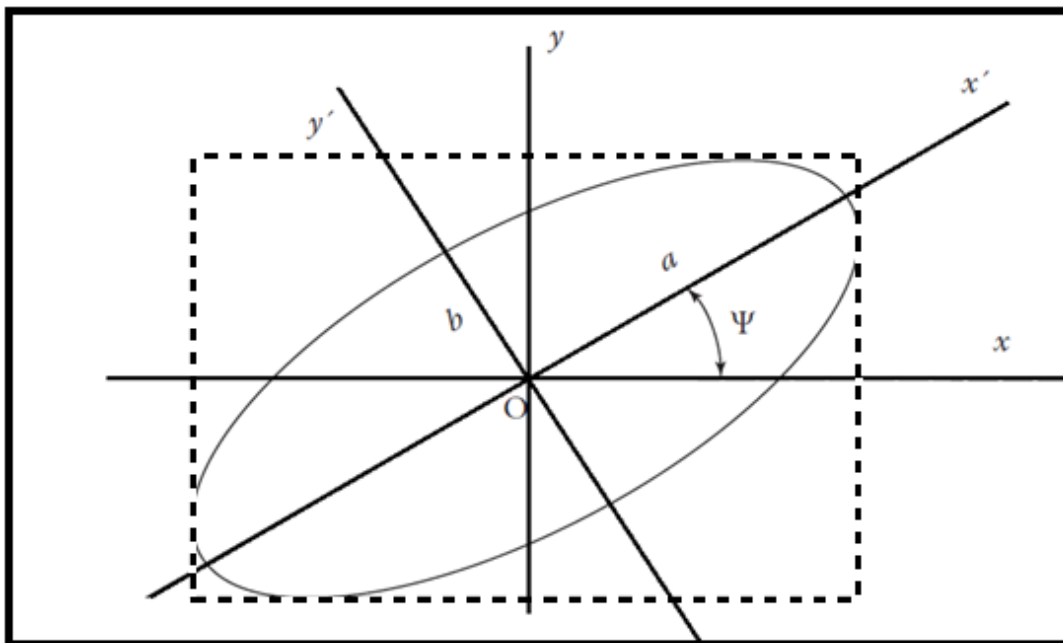


Figura 6. Representación de la rotación de la elipse de polarización cuyos semi ejes mayor y menor están alineados con los ejes x', y' .

1.4.1 Rotación de elipse de polarización

Entonces de acuerdo con la figura 6, considerando $\psi(0 \leq \psi \leq \pi)$, sea el ángulo entre las direcciones x y x' , entonces podemos reescribir las componentes del campo eléctrico en términos de los nuevos ejes:

$$E'_x = E_x \cos(\psi) + E_y \sen(\psi), \quad (1.31)$$

$$E'_y = -E_x \sen(\psi) + E_y \cos(\psi), \quad (1.32)$$

y tomando $2a$ y $2b$ como las longitudes de los ejes mayor y menor respectivamente ($a \geq b$) entonces la ecuación de la elipse de polarización se puede escribir en terminos de x' y y' como:

$$E'_x = a \cos(\tau + \delta'), \quad (1.33)$$

$$E'_y = \pm b \cos(\tau + \delta'), \quad (1.34)$$

dónde $\tau = kz - wt$, es el propagador. Los subíndices x e y se refieren a las componentes en las direcciones \hat{x} e \hat{y} , δ' es una fase arbitraria. El signo \pm describe los dos posibles sentidos que puede tomar el vector de polarización que describe la elipse del campo eléctrico [3]. Además usando la ecuación estándar de la elipse y retomando las ecuaciones originales para el campo eléctrico tenemos:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\tau + \delta_x), \quad (1.35)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\tau + \delta_y). \quad (1.36)$$

Tomando las ecuaciones (1.33) y (1.34), sustituyendo en (1.31) y (1.32), relacionando con las ecuaciones (1.35) y (1.36), expandiendo y agrupando los terminos obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha [\cos(\tau) \cos(\delta') - \sen(\tau) \sen(\delta')] = \\ E_{0x} [\cos(\tau) \cos(\delta_x) - \sen(\tau) \cos(\delta_x)] \cos(\psi) \\ + E_{0y} [\cos(\tau) \cos(\delta_y) - \sen(\tau) \cos(\delta_y)] \sen(\psi), \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} \pm b [\sen(\tau) \cos(\delta') + \cos(\tau) \sen(\delta')] = \\ - E_{0x} [\cos(\tau) \cos(\delta_x) - \sen(\tau) \cos(\delta_x)] \sen(\psi) \\ + E_{0y} [\cos(\tau) \cos(\delta_y) - \sen(\tau) \cos(\delta_y)] \cos(\psi), \end{aligned} \quad (1.38)$$

igualando los coeficientes de $\cos(\tau)$ y $\sen(\tau)$ al sustituirlos por sus promedios temporales, podemos reducir y agrupar todos los terminos:

$$\alpha \cos(\delta') = E_{0x} \cos(\delta_x) \cos(\psi) + E_{0y} \cos(\delta_y), \quad (1.39)$$

$$\alpha \sen(\delta') = E_{0x} \sen(\delta_x) \cos(\psi) + E_{0y} \sen(\delta_y) \sen(\psi), \quad (1.40)$$

$$\pm b \cos(\delta') = E_{0x} \sen(\delta_x) \sen(\psi) - E_{0y} \sen(\delta_y) \cos(\psi), \quad (1.41)$$

$$\pm b \sen(\delta') = E_{0x} \cos(\delta_x) \sen(\psi) - E_{0y} \cos(\delta_y) \cos(\psi). \quad (1.42)$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (1.39) y (1.40) obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 = & E_{0x}^2 \cos(\psi)^2 + E_{0y}^2 \sen(\psi)^2 \\ & + 2 E_{0x} E_{0y} \cos(\psi)\sen(\psi) \cos(\delta), \end{aligned} \quad (1.43)$$

Similarmente con las ecuaciones (1.41) y (1.42)

$$\begin{aligned} b^2 = & E_{0x}^2 \sen(\psi)^2 + E_{0y}^2 \cos(\psi)^2 \\ & - 2 E_{0x} E_{0y} \cos(\psi)\sen(\psi) \cos(\delta). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Por lo tanto, sumando la ec. (1.43) y la ec. (1.44) tenemos:

$$\alpha^2 + b^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (1.45)$$

luego multiplicamos la ec. (39) por la ec. (41) y la ec. (40) por la ec. (42) y sumando obtenemos:

$$\pm \alpha b = E_{0x} E_{0y} \sen(\delta), \quad (1.46)$$

dividiendo la ec. (1.42) por la ec. (1.39) y la ec. (1.41) por la ec. (1.40) obtenemos:

$$(E_{0x}^2 - E_{0y}^2) \sen(\psi) = 2E_{0x} E_{0y} \cos(\delta) \cos(2\psi), \quad (1.47)$$

o bien,

$$\tan(2\psi) = \frac{2 E_{0x} E_{0y} \cos(\delta)}{(E_{0x}^2 - E_{0y}^2)}, \quad (1.48)$$

que relaciona el ángulo de rotación ψ con las amplitudes E_{0x} , E_{0y} y el cambio de fase δ . También se puede descomponer en las ecuaciones (1.49) y (1.50), que usaremos más tarde para definir los parámetros de Stokes [3].

$$2 E_{0x} E_{0y} \cos(\delta) = (\alpha^2 - b^2) \sen(2\theta), \quad (1.49)$$

$$E_{0x}^2 - E_{0y}^2 = (\alpha^2 - b^2) \cos(2\theta). \quad (1.50)$$

1.5 Esfera de Poincaré

Henri Poincaré al rededor del año 1890 descubrió que la elipse de polarización podría representarse en el plano complejo. Además, descubrió que este plano podría proyectarse en una esfera exactamente de la misma forma que la proyección estereográfica e introdujo esta idea en un texto llamado *Traité de la Lumière*. Poincaré demostró que el uso de su esfera permitió superar muchas dificultades de hecho, la esfera de Poincaré simplifica muchos cálculos y proporciona una visión notable de la forma en que la luz polarizada se comporta cuando interactúa con elementos ópticos. Para llegar a ello es necesario primero estudiar la rotación de la elipse de polarización.

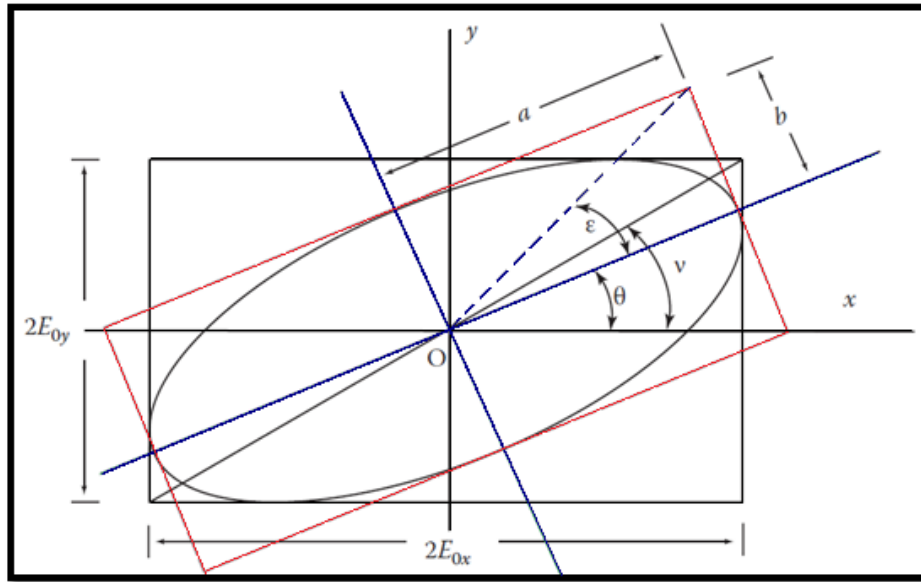


Figura 7. Parámetros Elipse de polarización

Como se ilustra en la fig. 7 es fácil obtener las expresiones de la ec. (1.51) que relacionan a los ángulos de rotación con las amplitudes en los ejes.

$$\tan(\nu) = \frac{E_{0x}}{E_{0y}}, \quad \tan(\varepsilon) = \frac{b}{a}, \quad (1.51)$$

con $(0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{2})$ y $(0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2})$.

1.5.1 Trigonometría esférica

Retomando la ec. (1.48)

$$\tan(2\theta) = \frac{2 E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}, \quad (1.52)$$

luego, combinando con la ecuación (1.51) y reduciendo:

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\nu)}{1 - \tan^2 \nu} \cos(\delta),$$

$$\tan(2\theta) = \tan(2\nu) \cos(\delta). \quad (1.53)$$

Por otro lado de las ec. (1.45) y (1.46) y combinando y reduciendo con ayuda de la expresión (1.51) tenemos:

$$\frac{\pm ab}{a^2 + b^2} = \frac{E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \text{sen}(\delta),$$

$$\pm 2 \text{sen}(\varepsilon) = \text{sen}(2\nu) \text{sen}(\delta). \quad (1.54)$$

Análogamente al dividir la ec. (1.50) entre la ec. (1.45) y posteriormente usando la expresión (1.51) y reduciendo términos obtenemos:

$$\frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \frac{\alpha^2 - b^2}{\alpha^2 + b^2} \cos(2\theta),$$

$$\cos(2\nu) = \cos(2\varepsilon) \cos(2\theta). \quad (1.55)$$

Y finalmente cuando dividimos la ec. (1.49) entre la ec. (1.45) y usando la expresión (1.51) tenemos:

$$\frac{2 E_{0x} E_{0y} \cos(\delta)}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \frac{\alpha^2 - b^2}{\alpha^2 + b^2} \sin(2\theta),$$

$$\sin(2\nu) \cos(\delta) = \cos(2\varepsilon) \sin(2\theta). \quad (1.56)$$

Estas expresiones que acabamos de demostrar, resumidas en la ec. (1.57) son exactamente iguales a las relaciones trigonométricas para trigonometría esférica ec. (1.58) cuando consideramos los ángulos: $\alpha = 2\varepsilon$, $b=2\theta$, $c=2\nu$ y $\delta = A$

$$\left. \begin{aligned} \cos(c) &= \cos(\alpha) \cos(b), \\ \sin(\alpha) &= \sin(c) \sin(A), \\ \tan(b) &= \tan(c) \cos(A), \\ \tan(\alpha) &= \sin(b) \tan(A), \\ \cos(\alpha) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A). \end{aligned} \right\} (1.57)$$

Esta última ecuación es conocida como la ley de cosenos para el triángulo esférico en geometría esférica,

$$\left. \begin{aligned} \cos(2\nu) &= \cos(2\varepsilon) \cos(2\theta), \\ \pm \sin(2\varepsilon) &= \sin(2\nu) \sin(\delta), \\ \tan(2\theta) &= \tan(2\nu) \cos(\delta), \\ \pm \tan(2\varepsilon) &= \sin(2\theta) \tan(\delta), \\ \cos(2\varepsilon) &= \cos(2\nu) \cos(2\theta) + \sin(2\theta) \sin(2\nu) \cos(\delta). \end{aligned} \right\} (1.58)$$

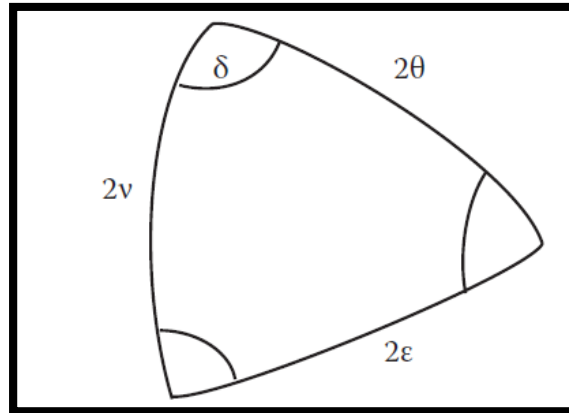


Figura 8. Representación del triángulo esférico.

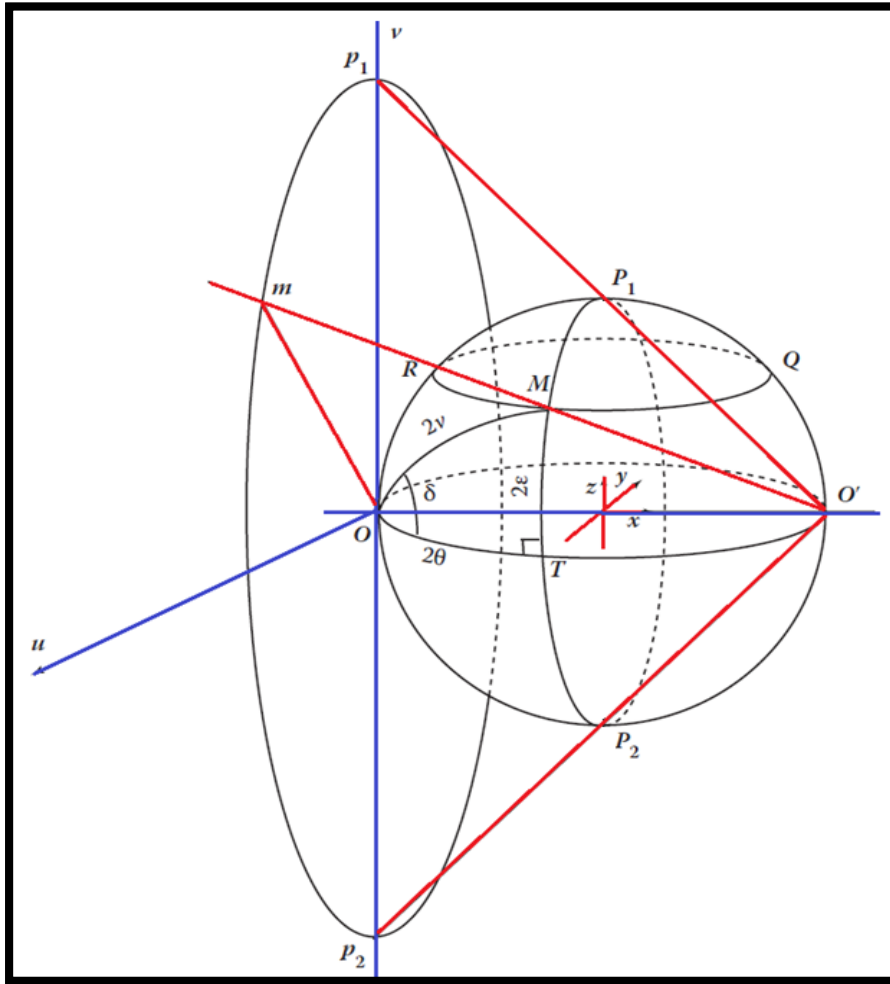


Figura 9. Proyección estereográfica del plano complejo de luz polarizada sobre la esfera de Poincaré.

1.5.2 Proyección estereográfica

Es muy útil la representación de estados de polarización que relaciona directamente a las coordenadas de $M(x, y, z)$ sobre la esfera. Los parámetros de polarización de la luz, la elipticidad, el ángulo azimutal, el sentido y la diferencia de fase, en términos de los ángulos θ y ε .

Las coordenadas de $m = \left(-\frac{1}{2}, \tan v \cos \delta, \tan v \sin \delta\right)$, (1.59)

y las coordenadas para el punto $O'(x, y, z)$ de acuerdo con la fig. (9) son:

$$O' = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

$$M(x, y, z) = \left(\frac{\cos 2\nu}{2}, \frac{\text{sen}2\nu \text{ sen}\delta}{2}, \frac{\text{sen}2\nu \text{ sen}\delta}{2} \right), \quad (1.60)$$

dónde,

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\cos 2\nu}{2} = \frac{\cos 2\varepsilon \cos 2\theta}{2} \\ y &= \frac{\text{sen}2\nu \text{ sen}\delta}{2} = \frac{\cos 2\varepsilon \text{ sen}2\theta}{2} \\ z &= \frac{\text{sen}2\nu \text{ sen}\delta}{2} = \frac{\text{sen}2\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\} (1.61)$$

Entonces, los parámetros de Stokes son:

$$M(\varepsilon, \theta) = \left(\frac{\cos 2\varepsilon \cos 2\theta}{2}, \frac{\cos 2\varepsilon \text{ sen}2\theta}{2}, \frac{\text{sen}2\varepsilon}{2} \right), \quad (1.62)$$

de hecho, son las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas a las coordenadas esféricas,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \text{sen}\Theta \cos\varphi, \\ y &= r \text{sen}\Theta \text{ sen}\varphi, \\ z &= r \cos\Theta, \end{aligned} \right\} (1.63)$$

y, considerando los ángulos:

$$\begin{aligned} \Theta &= 90^\circ - 2\varepsilon, \\ \varphi &= 2\theta. \end{aligned}$$

La esfera de Poincarè constituye un modelo adecuado para la representación de estados de polarización de la luz, considerando la acción de los medios (materiales) sobre la luz polarizada. Cada estado posible de polarización está representado por un punto sobre la esfera de Poincarè con coordenadas 2ψ y 2ε . El estudio de la naturaleza vectorial de la luz describe el fenómeno de polarización con el tratamiento clásico de ondas electromagnéticas transversas y usando los parámetros de Stokes [2]–[4], esta descripción se enfoca en la esfera de Poincarè como el espacio natural de polarización, aquí la evolución del campo eléctrico en el plano perpendicular a la dirección de propagación, gobierna la polarización de la onda [13], ésta descripción proporciona una vista geométrica de la transformación de la luz polarizada cuando interactúa con dispositivos ópticos en términos de rotaciones, este comportamiento lo analizaremos más adelante mediante observaciones basadas en el uso de divisores de haz de polarización. [3].

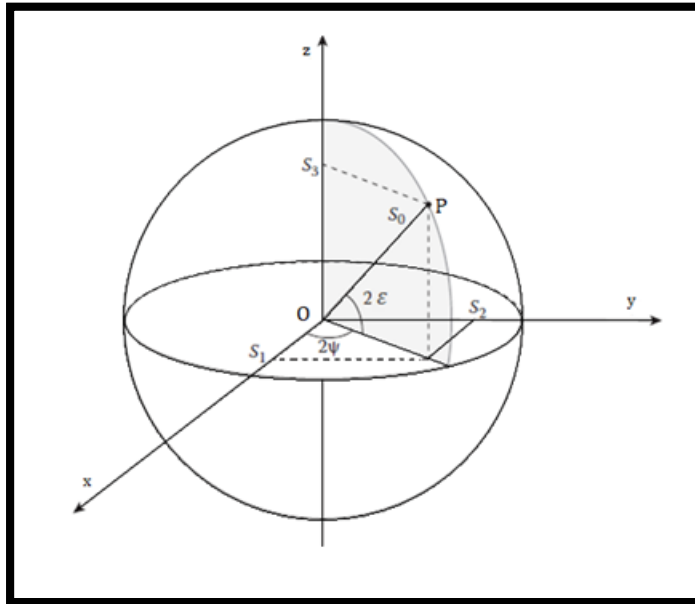


Figura 10. Representación de los parámetros de Stokes sobre la esfera de Poincaré.

1.6 Parámetros de Stokes

Cuando un haz de luz se propaga por el espacio, en un plano transversal a la dirección de propagación, el vector de campo eléctrico dibuja una elipse o una forma especial de una elipse ya sea un círculo o una línea recta en un intervalo de tiempo del orden de 10^{-15} seg, este periodo es muy corto como para seguir el trazo de la elipse, por lo tanto, es difícil observar la elipse de polarización. Otra limitante es que la elipse de polarización solo es aplicable para describir luz completamente polarizada, no se puede usar para describir luz no polarizada o luz parcialmente polarizada, generalmente en la naturaleza la luz se encuentra parcialmente polarizada por ello la elipse de polarización es una idealización del comportamiento real de la luz y solo es correcto en un instante de tiempo. Hacia el año 1852 George Gabriel Stokes descubrió que el comportamiento de la polarización podía representarse en términos de observables físicos. [4] El encontró que cualquier estado de polarización de la luz podía ser descrito completamente en términos de cuatro cantidades medibles llamados parámetros de Stokes (o irradiancias), funciones solo de observables de ondas electromagnéticas.

$$I_{polarizada} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad (1.64)$$

Ahora consideramos el campo: $\vec{E}(t) = E_x(t)i + E_y(t)j$, y de forma similar a la ec. (8) las amplitudes del campo son:

$$E_x(t) = E_{0x}(t) \cos(\omega t + \phi_x(t)) \quad \text{y} \quad E_y(t) = E_{0y}(t) \cos(\omega t + \phi_y(t)),$$

donde $E_{0x}(t)$ y $E_{0y}(t)$ son las amplitudes instantáneas, ω la frecuencia angular instantánea y ϕ la diferencia de fase instantánea. En todo momento las amplitudes y los factores de fase fluctúan. Luego la ecuación estándar de la elipse de polarización del campo es:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2(t)} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2(t)} - \frac{2 E_y(t)E_x(t)}{E_{0y}(t)E_{0x}(t)} \cos(\phi(t)) = \text{sen}^2(\phi(t)). \quad (1.65)$$

Para radiación monocromática las amplitudes y las fases son constantes en todo momento

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - \frac{2 E_y(t)E_x(t)}{E_{0y}E_{0x}} \cos(\phi) = \text{sen}^2(\phi), \quad (1.66)$$

y tomando el promedio temporal,

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - \frac{2 \langle E_y(t)E_x(t) \rangle}{E_{0y}(t)E_{0x}(t)} \cos(\phi) = \text{sen}^2(\phi), \quad (1.67)$$

multiplicando por $4E_{0x}^2 E_{0y}^2$

$$4E_{0y}^2 \langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2 \langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0y}E_{0x} \langle E_x(t)E_y(t) \rangle \cos(\phi) = 4E_{0x}^2 E_{0y}^2 \text{sen}^2(\phi). \quad (1.68)$$

Usando la definición para promedio temporal:

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int^T E_x(t) E_y(t) dt, \quad (1.69)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle E_x^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} E_{0x}^2, \\ \langle E_y^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} E_{0y}^2, \\ \langle E_x(t)E_y(t) \rangle &= \frac{1}{2} E_{0x} E_{0y} \cos(\phi). \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Sustituyendo y reduciendo términos tenemos:

$$\begin{aligned} 2 E_{0y}^2 E_{0x}^2 + 2 E_{0y}^2 E_{0x}^2 - (2E_{0y}E_{0x} \cos(\phi))^2 \\ = (2E_{0y}E_{0x} \text{sen}(\phi))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 E_{oy}^2 E_{ox}^2 - (2E_{oy}E_{ox} \cos(\phi))^2 &= (2E_{oy}E_{ox} \sen(\phi))^2, \\
(E_{oy}^2 + E_{ox}^2)^2 - (E_{oy}^2 - E_{ox}^2)^2 - (2E_{oy}E_{ox} \cos(\phi))^2 &= \\
&= (2E_{oy}E_{ox} \sen(\phi))^2. \tag{1.71}
\end{aligned}$$

Estas cantidades definen a los parámetros de Stokes:

$$s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 = s_3^2, \tag{1.72}$$

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \tag{1.73}$$

y arreglando los parámetros en un vector, llamado vector de Stokes

$$\begin{aligned}
\vec{s} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{oy}^2 + E_{ox}^2 \\ E_{oy}^2 - E_{ox}^2 \\ 2E_{oy}E_{ox} \cos(\phi) \\ 2E_{oy}E_{ox} \sen(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_0 \\ 2I_1 - 2I_0 \\ 2I_2 - 2I_0 \\ 2I_3 - 2I_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ s_0 \cos(2\varepsilon) \cos(2\theta) \\ s_0 \cos(2\varepsilon) \sen(2\theta) \\ s_0 \sen(2\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{1.74}
\end{aligned}$$

Luego, de la ec. (1.74) y considerando la intensidad total inicial igual a $S_0 = 1$ tenemos:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\varepsilon) \cos(2\theta) \\ \cos(2\varepsilon) \sen(2\theta) \\ \sen(2\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{1.75}$$

cuando consideramos $2\varepsilon = 0$ en la esfera de Poincaré la ec. (1.74) se reduce a:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\theta) \\ \sen(2\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.76}$$

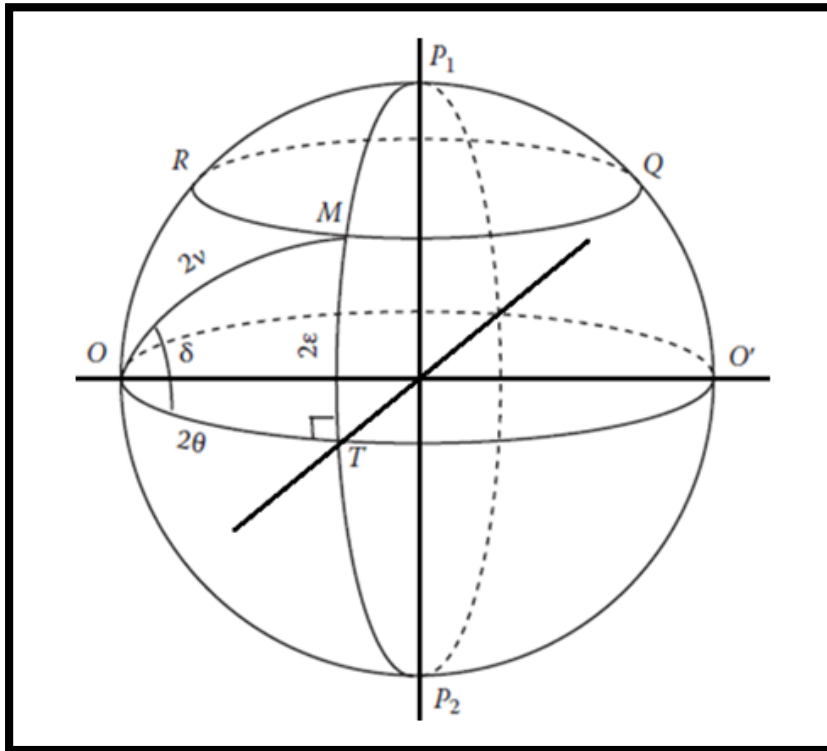


Figura 11. La esfera de Poincarè. Representa una vibración elípticamente polarizada por el punto $M(2\varepsilon, 2\theta)$ los parámetros de la vibración se pueden encontrar desde el triángulo esférico OMT.

Estas ecuaciones son los parámetros de Stokes para luz linealmente polarizada un ángulo θ .

Luego consideramos $2\varepsilon = 0$ y fijando el ángulo azimutal,

$$2\theta = 0, \text{ tenemos } \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

Es el vector de Stokes para luz con polarización lineal Horizontal,

$$\text{si, } 2\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ tenemos } \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

La ec. (1.78) es el vector de Stokes para luz con polarización lineal $+45^\circ$, luego

$$2\theta = \pi \quad , \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

Es el vector de Stokes para polarización lineal Vertical, luego

$$2\theta = \frac{3\pi}{2} \quad , \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Es el vector de Stokes de polarización lineal -45° . Luego usando la ec. (1.76) y fijando ahora el ángulo azimutal,

$$2\theta = 0 \quad , \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\varepsilon) \\ 0 \\ \text{sen}(2\varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

Ahora nos movemos a lo largo del primer meridiano (longitud). Estas ecuaciones de los parámetros de Stokes pueden reconocerse como luz con polarización elíptica.

Cuando $2\varepsilon = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.82)$

Son los parámetros de Stokes correspondientes a luz polarizada circularmente a la derecha, finalmente:

$$2\varepsilon = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

Corresponde a los parámetros de Stokes para luz polarizada circularmente a la izquierda.

1.6.1 Polarización oculta

Luego de introducir la descripción de la elipse de polarización del campo eléctrico, se describe la polarización ahora en términos de los parámetros de Stokes, utilizando esta descripción la matemática se vuelve más simple. Ahora pensaremos en la esfera de Poincarè como el espacio natural de polarización. Los análisis clásicos de polarización son a menudo restringidos por los parámetros de Stokes dado que la luz generalmente tiene distribuciones gaussianas, sin embargo, en Óptica Cuántica es común tratar con estados de luz que obedecen estadísticas no gaussianas, así que los momentos de orden superior de los operadores de Stokes entran en juego como el caso de incertidumbre [14]. Esta característica abre la posibilidad de estudiar nuevas propiedades de polarización que no habían sido abordadas en el dominio clásico, actualmente esto se ha denominado cómo polarización oculta y el grado de polarización clásico no puede describir este fenómeno así que tiene que generalizarse para incluir los efectos de polarización de orden superior.

Capítulo 2.

Descripción cuántica de la polarización.

Como antes, consideramos ondas electromagnéticas planas monocromáticas de frecuencia ω propagándose a lo largo del eje $-Z$ echas de dos modos de vibración ortogonales reales $\hat{E}_{x,y}$. Las correspondientes amplitudes complejas clásicas se vuelven en Óptica Cuántica los operadores de aniquilación y creación del campo $\hat{a}_{x,y}^+, \hat{a}_{x,y}$. El campo a lo largo de cada eje se expresa como un oscilador armónico y entonces los campos en el plano $X - Y$ son expresados por un oscilador armónico bidimensional [14].

$$\hat{a}_{x,y} = \hat{a}_x + \hat{a}_y \quad , \quad \hat{a}_{x,y}^+ = \hat{a}_x^+ + \hat{a}_y^+ , \quad (2.1)$$

$$\hat{n} = \sum_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i = \hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \hat{a}_y^+ \hat{a}_y , \quad (2.2)$$

$$\hat{E}_{x,y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{x,y}^+ + \hat{a}_{x,y}) = \hat{x} \quad , \quad \hat{B}_{x,y} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{x,y}^+ - \hat{a}_{x,y}) = \hat{p} . \quad (2.3)$$

Los operadores $\hat{E}_{x,y}$, $\hat{B}_{x,y}$ y cualquier combinación lineal de ellos con coeficientes reales, son usualmente llamados cuadraturas de campo. Además, las amplitudes complejas satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^+] = \delta_{j,k} \quad , \quad [\hat{a}_x, \hat{a}_y^+] = [\hat{a}_x, \hat{a}_y] = 0 \quad , \quad (2.4)$$

Con $j, k = x, y$

$$[\hat{E}_j, \hat{B}_k] = i \delta_{j,k} \quad , \quad [\hat{E}_x, \hat{E}_y] = [\hat{B}_x, \hat{B}_y] = 0 \quad , \quad (2.5)$$

El hamiltoniano de campo libre es,

$$\hat{H} = \hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \hat{a}_y^+ \hat{a}_y , \quad (2.6)$$

esta equivalencia se refiere a una partícula en un potencial armónico de dos dimensiones. En otras palabras, cuantos libres de luz proporcionan un exacto y perfecto oscilador armónico.

Por otro lado, un eigenestado simultáneo de \hat{n}_x y \hat{n}_y pueden ser expresados como $|n, m\rangle$ donde m y n son eigenvalores de \hat{n}_x y \hat{n}_y , el número de fotones en los modos de polarización X y Y .

En general un estado puro de dos modos de campo puede ser expresado como:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} C_{n,m} |n, m\rangle . \quad (2.7)$$

En Óptica Clásica, el estado de polarización es usualmente caracterizado por los parámetros de Stokes. En Óptica Cuántica, los parámetros de Stokes pasan a ser un conjunto de operadores.

2.1 Operadores de Stokes y estados de polarización.

Como hemos estudiado los parámetros de Stokes son herramientas analíticas muy útiles para el tratamiento de la polarización en el dominio cuántico, porque se convierten en observables cuánticos. Los operadores de Stokes se definen como una extensión directa de sus análogos clásicos:

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_0 &= \hat{a}_x^+ \hat{a}_x + \hat{a}_y^+ \hat{a}_y = \hat{n}_x + \hat{n}_y, \\ \hat{s}_1 &= \hat{a}_x^+ \hat{a}_x - \hat{a}_y^+ \hat{a}_y = \hat{n}_x - \hat{n}_y, \\ \hat{s}_2 &= \hat{a}_y^+ \hat{a}_x + \hat{a}_y \hat{a}_x^+, \\ \hat{s}_3 &= -i(\hat{a}_x^+ \hat{a}_y - \hat{a}_x \hat{a}_y^+). \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Consideremos los estados de polarización de un solo fotón, en el cual está en cualquiera de los modos de polarización $n + m = 1$. Un estado puro de polarización de un fotón es expresado como una combinación lineal de $|1, 0\rangle$ y $|0, 1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha |1, 0\rangle + \beta |0, 1\rangle, \quad (2.9)$$

dónde: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y,

$$\left. \begin{aligned} |1, 0\rangle &\equiv |H\rangle, \\ |0, 1\rangle &\equiv |V\rangle, \end{aligned} \right\} (2.10)$$

entonces el estado de polarización correspondiente:

$$|\psi\rangle = \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle, \quad (2.11)$$

también es conveniente definir los estados de polarización lineal a lo largo de las direcciones $\pm 45^\circ$, $|D\rangle$ y $|A\rangle$ como:

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle), \quad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle), \quad (2.12)$$

Y los estados de polarización circular izquierda y derecha

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle), \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle), \quad (2.13)$$

estados comúnmente usados para caracterizar el estado de polarización del campo y se expresan por el álgebra de Lie del grupo isomorfo SU(2) como en el sistema spin $1/2$, las matrices de representación de los operadores de Stokes son equivalentes a las matrices de Pauli [7], dadas por la siguiente expresión:

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_0 = \sigma_0 = I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{s}_1 = \sigma_1 = \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \hat{s}_2 = \sigma_2 = \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{s}_3 = \sigma_3 = \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} (2.14)$$

Los eigenestados de \hat{s}_1 , \hat{s}_2 y \hat{s}_3 respectivamente son:

$$\hat{s}_1 |H\rangle = |H\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\hat{s}_1 |V\rangle = -|V\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\hat{s}_2 |D\rangle = |D\rangle,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\hat{s}_2 |A\rangle = -|A\rangle,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\hat{s}_3 |L\rangle = |L\rangle,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\hat{s}_3 |R\rangle = -|R\rangle,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

En consecuencia, para los estados de polarización de un fotón individual el vector de Stokes y la esfera de Poincarè son equivalentes al vector de Bloch y a la esfera de Bloch [7] [14]. Los operadores de Stokes abarcan entre otras situaciones físicas, la dinámica del spin, interferometría, metrología cuántica, ensambles de átomos de dos niveles, polarización de fotones, etc. La polarización cuántica proporciona un escenario adecuado para mostrar características no clásicas, como la llamada polarización oculta [14].

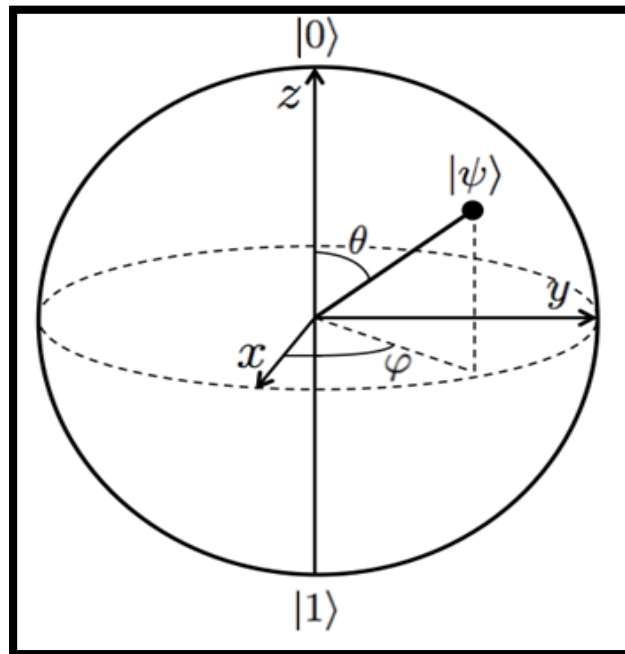


Figura 12. Esfera de Bloch. Representación geométrica del espacio de estados de un sistema cuántico de dos niveles.

El estado de polarización de un fotón puede ser tratado como un qubit de dos niveles, uno de los más simples y fundamentales sistemas en Mecánica Cuántica. Este qubit de polarización es extremadamente útil en Información Cuántica y tecnologías de comunicación. Un qubit tiene un espacio de estados de dos dimensiones. Supongamos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ forman una base ortonormal para ese espacio de estados. Entonces un vector arbitrario en ese espacio de estados es:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + b |1\rangle. \quad (2.21)$$

La condición de que el estado $|\psi\rangle$ sea un vector unitario, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, es también conocida como la condición de normalización para el espacio de estados, que es equivalente a $|\alpha|^2 + |b|^2 = 1$. Intuitivamente $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son análogos a los valores 0 y 1 que un bit clásico puede tomar. La manera en que el qubit difiere del bit es que la superposición de estos dos estados $\alpha |0\rangle + b |1\rangle$ también puede existir.

2.2 Medición de la polarización

Supongamos que tenemos un fotón preparado en el estado $|\Psi\rangle$, y queremos conocer su polarización, para ello empleamos un aparato de medición donde los fotones pasan a través de un analizador de polarización Horizontal/Vertical PA_{HV} , y posteriormente a uno de los dos detectores. La medición descrita tiene dos posibles resultados: el fotón está polarizado horizontal o verticalmente, es conveniente asignar un valor numérico a cada posible resultado de medición, entonces en la literatura es común asignar el valor $+1$ a mediciones que resultan en polarización horizontal de fotones individuales y -1 para mediciones que resultan en polarización vertical. Un estado de entrada general es una combinación lineal del estado de polarización horizontal $|H\rangle$ y vertical $|V\rangle$, expresado como: $|\Psi\rangle = C_H|H\rangle + C_V|V\rangle$.

Los resultados de medición son aleatorios para este estado y las probabilidades de obtener $+1$ o -1 están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} P(+1||\Psi\rangle) &= P(H||\Psi\rangle) = |\langle H|\Psi\rangle|^2 = |C_H|^2, \\ P(-1||\Psi\rangle) &= P(V||\Psi\rangle) = |\langle V|\Psi\rangle|^2 = |C_V|^2. \end{aligned} \right\} (2.22)$$

Es la probabilidad condicional del estado inicial. En algunas situaciones queremos conocer la probabilidad de obtener x , dado un valor particular de y . Denotamos esta probabilidad por $P(x, y)$ y la llamamos probabilidad condicional, $P(x, y) = P(x|y)P(y)$. Debido a que conocemos la probabilidad de obtener una medida en particular, podemos obtener el promedio de las mediciones determinando los posibles valores por sus correspondientes probabilidades y sumándolas obtenemos el promedio de polarización:

$$\langle \hat{P}_{HV} \rangle = (+1)P(+1||\Psi\rangle) + (-1)P(-1||\Psi\rangle) = |C_H|^2 - |C_V|^2. \quad (2.23)$$

Hay que recordar que este promedio está calculado para una medición considerando un aparato de medición de polarización lineal PA_{HV} , por ejemplo, un dispositivo que mide la polarización circular PA_C dará una respuesta diferente. Por todo lo anterior, realizar mediciones es necesario para describir el estado de polarización de fotones. En el siguiente capítulo abordaremos con detalle la teoría de mediciones en Mecánica Cuántica.

2.3 El operador de polarización.

Ahora definimos el operador de polarización lineal $-HV$, $\hat{\mathcal{P}}_{HV}$. Una manera de definir un operador es por su acción en un conjunto completo de estados base, de esta forma $\hat{\mathcal{P}}_{HV}$ puede ser definido como:

$$\hat{\mathcal{P}}_{HV}|H\rangle = (+1)|H\rangle, \quad \hat{\mathcal{P}}_{HV}|V\rangle = (-1)|V\rangle, \quad (2.24)$$

Cada uno de los estado de la base es un eigenestado de $\hat{\mathcal{P}}_{HV}$; $|H\rangle$ corresponde al eigenvalor $+1$, y $|V\rangle$ corresponde al eigenvalor -1 .

En un espacio de Hilbert de dos dimensiones, los operadores tienen dos eigenestados y eigenvalores, así estos son todos los eigenvalores y eigenestados de $\hat{\mathcal{P}}_{HV}$. El hecho de que los eigenestados de un operador hermítico formen una base implica que:

$$\hat{I} = \sum_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|. \quad (2.25)$$

Además, podemos usar esto para escribir:

$$\hat{\mathcal{P}}_{HV} = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|, \quad (2.26)$$

y expresar el operador de polarización en la forma:

$$\hat{\mathcal{P}}_{HV} = (+1)|H\rangle\langle H| + (-1)|V\rangle\langle V|, \quad (2.27)$$

el operador $\hat{\mathcal{P}}_{HV}$, es hermítico: $\hat{\mathcal{P}}_{HV}^\dagger = \hat{\mathcal{P}}_{HV}$, sus eigenvalores son reales, sus eigenestados son ortonormales y forman una base.

2.4 Postulados de la Mecánica cuántica

Aunque existen diversas formulaciones de postulados de la mecánica cuántica, esencialmente son equivalentes. La conexión entre las matemáticas y los experimentos se basa en postulados [11].

Postulado I—Para cualquier instante de tiempo t , el estado de un sistema físico está dado por un vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ asociado con un espacio de Hilbert \mathcal{H}_S ; el vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ contiene toda la información disponible acerca del sistema cuántico. Entonces si conocemos el estado del sistema cuántico, conocemos las probabilidades de todos los resultados de todas las mediciones posibles que podemos realizar en el sistema. Cualquier superposición de vectores de estado es también un vector de estado.

Postulado II—Observables y operadores.

Cualquier cantidad física se representa por un observable o bien por una variable dinámica O a la cual le corresponde un operador lineal Hermítico (\hat{O}) cuyos eigenvalores forman una base completa. A cada observable le corresponde

un operador hermítico \hat{O} . Por ejemplo la polarización es un observable, el observable de polarización $H - V$ es $\hat{\mathcal{P}}_{HV}$. Otros observables por ejemplo la energía, posición, momento lineal u angular tienen sus correspondientes operadores Hermíticos.

Postulado III– Mediciones y eigenvalores de operadores.

La medición de un observable arbitrario A se puede representar formalmente por la acción de \hat{A} en el vector de estado $|\Psi(t)\rangle$. El único resultado posible de tal medición es uno de los eigenvalores a_n (el cual es real) del operador \hat{A} . Si el resultado de la medición de \hat{A} en un estado $|\Psi(t)\rangle$ es a_n , el estado del sistema inmediatamente después de la medición cambia a $|\Psi_n\rangle$.

$$\hat{A} |\Psi(t)\rangle = a_n |\Psi_n\rangle. \quad (2.28)$$

Postulado IV–Resultados probabilísticos de mediciones.

En el espectro discreto: Cuando medimos un observable arbitrario A de un sistema en un estado $|\Psi\rangle$, la probabilidad de obtener uno de los eigenvalores no degenerados a_n del correspondiente operador \hat{A} está dado por:

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle \psi_n | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (2.29)$$

dónde $|\Psi_n\rangle$ es el eigenestado de \hat{A} con eigenvalores a_n . Si el eigenvalor a_n es m -degenerado P_n se vuelve:

$$P_n(a_n) = \frac{\sum_{j=1}^m |\langle \psi_n^j | \psi \rangle|^2}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\sum_{j=1}^m |a_n^{(j)}|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (2.30)$$

entonces el acto de medir cambia el estado del sistema de $|\Psi\rangle$ a $|\Psi_n\rangle$. Si el sistema ya se encuentra en el eigenestado $|\Psi_n\rangle$ del operador \hat{A} , una medición del observable A produce el correspondiente eigenvalor a_n :

$$\hat{A} |\Psi_n\rangle = a_n |\Psi_n\rangle. \quad (2.31)$$

Postulado V–Evolución temporal

La evolución temporal de un vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ de un sistema está gobernado por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo: $i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$. Donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano correspondiente a la energía total del sistema.

Capítulo 3.

Mediciones Cuánticas.

En este capítulo se introduce el concepto de medición débil después de discutir la descripción estándar del proceso de medición en Mecánica Cuántica. Por lo tanto, la representación de mediciones cuánticas generalizadas como interacciones entre el sistema físico constituyen la base para la explicación de valores débiles, los cuales se introducen en el capítulo 5. El objetivo es tener una visión pragmática de la medición cuántica y entender qué medidas son posibles y cómo se describen en el formalismo de von Neumann como un caso específico de las mediciones generalizadas.

3.1 Teoría de medición

La medición (u observación) es de los problemas más fundamentales en ciencias. Por un lado, entendemos las leyes de la naturaleza a través de mediciones directas o indirectas y en física clásica se considera que se pueden minimizar los errores de medición (teóricamente) a cero, por otro lado, también se puede considerar medir observables físicos como la posición de una partícula con mucha precisión, sin perturbar el estado del objeto. Esta propiedad asegura la objetividad del resultado de la medición y por lo tanto la realidad del observable físico. Sin embargo, en Mecánica Cuántica tal medida perfecta no existe, cualquier medición con una precisión finita inevitablemente perturba y cambia el estado del objeto [11]. Es decir, para cualquier sistema cuántico el acto de medir produce perturbaciones no despreciables. En Mecánica Cuántica el estado de un sistema nos permite calcular las probabilidades de los resultados de todas las posibles mediciones en sistemas que han pasado por un procedimiento de preparación [12].

Entonces extraer información de un sistema cuántico inevitablemente requiere realizar una medición, de hecho, es a través de la medición de observables físicos que podemos entender las leyes de la naturaleza. La mecánica cuántica ha demostrado ser un éxito empírico, las predicciones que hace son en general probabilísticas, sin embargo, a un nivel más filosófico, continúan los debates sobre la naturaleza física del proceso de medición [59]. La teoría de medición ofrece una descripción general de las probabilidades asociadas con los resultados posibles de medición, en física clásica es posible realizar una medición sobre un sistema sin perturbarlo. Sin embargo, en sistemas cuánticos el proceso de medición inevitablemente induce perturbaciones no despreciables en el estado del sistema. La idea de las mediciones débiles es hacer que el acoplamiento con el dispositivo de medición sea suficientemente débil para que se pueda despreciar el cambio del estado cuántico debido a la medición.

3.2 Formalismo matemático

En Mecánica Cuántica cada sistema físico está asociado con un espacio de Hilbert. El enfoque de von Neumann representa una medida sobre un sistema físico por un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert llamado observable.

3.2.1 Postulado general de la medición

Las mediciones cuánticas son descritas por una colección de operadores de medición $\{\hat{M}_m\}$. Estos son operadores actuando en el espacio de estados del sistema siendo medido. El subíndice m se refiere al resultado de la medición que puede ocurrir en el experimento.

3.3 Mediciones Generalizadas

Si el estado del sistema cuántico es $|\psi\rangle$ inmediatamente antes de la medición entonces la probabilidad de que el resultado m ocurra está dada por:

$$\rho(m) = \langle \psi | \hat{M}_m^+ \hat{M}_m | \psi \rangle, \quad (3.1)$$

el estado del sistema después de la medición es:
$$\frac{\hat{M}_m | \psi \rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}_m^+ \hat{M}_m | \psi \rangle}}. \quad (3.2)$$

Los operadores de medición satisfacen la ecuación de completitud:

$$\sum_m \hat{M}_m^+ \hat{M}_m = I, \quad (3.3)$$

lo que expresa el hecho de que la suma de probabilidades es uno:

$$I = \sum_m P(m) = \sum_m \langle \psi | \hat{M}_m^+ \hat{M}_m | \psi \rangle. \quad (3.4)$$

Esta ecuación se satisface para todo $|\psi\rangle$, y es equivalente a la ecuación de completitud. En la teoría de Información Cuántica se introduce el concepto de medida POVM (Positive Operator-Valued Measurement) son un conjunto de operadores hermíticos no negativos que actúan sobre el espacio de Hilbert que describe el sistema cuántico, las medidas POVM, también conocidas como medidas generalizadas, tienen en cuenta la interacción del sistema con el entorno. Los sistemas cuánticos reales toman en cuenta la existencia de ruido, las perturbaciones y la interacción con el dispositivo de medición, a diferencia de las medidas proyectivas estos operadores no necesariamente son ortogonales [12].

3.3.1 Medición del Qubit

El ejemplo más simple de medición es la medición de un qubit en una base computacional, esta es una medición de un qubit individual con dos resultados definidos por dos operadores de medición $\hat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$ y $\hat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$. Observe que cada operador de medición es hermítico, es decir:

$$\hat{M}_0^2 = \hat{M}_0 \quad \text{y} \quad \hat{M}_1^2 = \hat{M}_1, \quad (3.5)$$

por lo tanto, se obedece la ecuación de completitud:

$$\hat{I} = \hat{M}_0^+ \hat{M}_0 + \hat{M}_1^+ \hat{M}_1 = \hat{M}_0 + \hat{M}_1. \quad (3.6)$$

Sí suponemos que el estado a ser medido, la ec. (2.21), $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + b |1\rangle$. Entonces la probabilidad de obtener 0 como resultado de la medición es:

$$P(0) = \langle \psi | \hat{M}_0^+ \hat{M}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{M}_0 | \psi \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.7)$$

Similarmente la probabilidad de obtener el resultado de la medición 1 es:

$$P(1) = \langle \psi | \hat{M}_1^+ \hat{M}_1 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{M}_1 | \psi \rangle = |b|^2. \quad (3.8)$$

El estado después de la medición en los dos casos es:

$$\frac{\hat{M}_0 |\psi\rangle}{|\alpha|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} |0\rangle, \quad (3.9)$$

$$\frac{\hat{M}_1 |\psi\rangle}{|b|} = \frac{b}{|b|} |1\rangle. \quad (3.10)$$

Además, las cantidades $\frac{b}{|b|}$, $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ tienen modulo 1, entonces pueden ser ignorados [12] así los estados después de la medición son efectivamente $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

3.4 Mediciones proyectivas

Este tipo de mediciones son un caso especial del postulado general de la medición, Postulado 3. Este caso especial de medición es conocido como mediciones proyectivas. En lo que respecta para muchas aplicaciones de Computación e Información Cuántica principalmente aplicando mediciones proyectivas. En efecto las mediciones proyectivas resultan ser equivalentes al postulado general de la medición, cuando realizan transformaciones unitarias como se describe en el Postulado 3 [12].

Una medición proyectiva se describe por un observable, M , el cual es un operador hermítico en el espacio de estados del sistema siendo observado, este observable tiene una descomposición espectral que está dada por la expresión

$$\hat{M} = \sum_m m \hat{\rho}_m, \quad (3.11)$$

Donde $\hat{\rho}_m$ es el proyector sobre el eigensubespacio de M con eigenvalor m , los posibles resultados de la medición corresponden a los eigenvalores m , del observable. Al medir el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado m está dada por el producto interno del operador de proyección con el estado del sistema

$$p(m) = \langle \psi | \hat{\rho}_m | \psi \rangle, \quad (3.12)$$

entonces, dado que el resultado m ocurrió, el estado del sistema cuántico inmediatamente después de la medición es: $\frac{\hat{\rho}_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}$. (3.13)

Tomando los operadores de medición en el postulado 3 además de satisfacer la ecuación de completitud $\sum_m \hat{M}_m^+ \hat{M}_m = I$, también satisfacen las condiciones de que los operadores de medición \hat{M}_m son proyectores ortogonales, es decir, \hat{M}_m son hermíticos y se cumple que:

$$\hat{M}_m \hat{M}_{m'} = \delta_{mm'} \hat{M}_m. \quad (3.14)$$

Con esta restricción adicional el postulado 3 se reduce a una medición proyectiva. Entonces en una situación general, si consideramos un modelo de medición cuántica de un observable arbitrario \hat{A} con un espectro discreto de dimensión finita. La descomposición espectral de \hat{A} se expresa como:

$$\hat{A} = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| = \sum_j \lambda_j \hat{\Pi}_j, \quad (3.15)$$

donde λ_j , es el eigenvalor de \hat{A} y $\hat{\Pi}_j = |j\rangle\langle j|$, es el proyector correspondiente al eigenestado $|j\rangle$. La medida proyectiva de \hat{A} observa al estado en uno de los eigenestados $|j\rangle$ y le asigna el resultado λ_j . Cuando la medición proyectiva actúa en el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad $P(j)$ de encontrar el estado en $|j\rangle$ esta dada por:

$$p(m) = \langle \psi | j \rangle \langle j | \psi \rangle = \langle \hat{\Pi}_j \rangle. \quad (3.16)$$

El valor promedio de la medición de \hat{A} se obtiene como:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \psi \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \psi | j \rangle \langle j | \psi \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \hat{\Pi}_j \rangle. \quad (3.17)$$

3.5 Medición Indirecta

La descripción fundamental del proceso de medición cuántica explica la interacción entre el dispositivo de medición y el sistema medido.

3.5.1 Interacción

En la práctica el proceso de medición proyectiva suele considerarse no solamente el colapso del sistema en un espacio propio del operador de medición, sino por una transformación del sistema mucho más complicada. Por ejemplo, la detección de un fotón con una función de onda expandida inicialmente en un pequeño intervalo usualmente aniquila al fotón, transformando el sistema cuántico relativamente simple de una partícula en un sistema complejo del entorno de la detección. La interacción directa del sistema de interés con algún dispositivo de detección podría inducir otras evoluciones además de la reducción del sistema previsto en el espacio propio de los resultados de medición, que se denota como medición directa.

Para realizar una medición que reproduzca mejor la descripción teórica de mediciones proyectivas, es necesario introducir el concepto de medición indirecta, donde antes de que la medición induzca el colapso, el estado del sistema interactúa con un sistema auxiliar llamado puntero del sistema o sonda [12]. De hecho, el resultado del entrelazamiento entre los dos sistemas es una medición proyectiva del puntero del sistema, que potencialmente destruye el enredamiento, es decir, hace que el objeto del sistema sea reducido a un cierto estado posterior a la medición. En principio cualquier evolución unitaria \hat{U}_{XY} actuando en los sistemas X y Y, que no se pueda expresar como un producto de evolución de la forma $\hat{U}_p = \hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$ con operadores \hat{U}_A y \hat{U}_B actuando solo en los respectivos subsistemas, se introduce algún cambio en la correlación de los dos sistemas. Tal evolución del producto se denota como una interacción de los dos sistemas. Finalmente una medición indirecta se realiza mediante una forma de interacción simple y fundamental de un operador unitario \hat{U}_α introducido por von Neuman [24] y que puede escribirse como:

$$\hat{U}_\alpha = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha \hat{A} \otimes \hat{p}\right), \quad (3.18)$$

dónde \hat{A} es el observable medido actuando en el objeto del sistema, donde α es un parámetro constante de medición y \hat{p} el generador de momentos de evolución actuando en el puntero del sistema. El operador de evolución \hat{U}_α puede verse como correspondiente al Hamiltoniano de interacción independiente del tiempo $\hat{H} = \frac{\alpha}{\Delta t} \hat{A} \otimes \hat{p}_q$, el cual actúa durante un tiempo Δt [24].

3.6 Medidas débiles

Partiendo de la descripción estándar de las mediciones cuánticas, esta sección trata con la formulación teórica del complejo campo de mediciones débiles. Una medición débil es el proceso de medición estándar descrito por el Hamiltoniano de von Neumann con un acoplamiento débil entre el dispositivo de medición y el sistema [24] de modo que el cambio del estado cuántico debido a la medición pueda desprejarse. Las mediciones fuertes, o convencionales sobre el sistema cuántico obligan al sistema a colapsar a uno de los eigenestados, pero si realizamos una medida débil del dispositivo que esta débilmente acoplado, entonces no causa el colapso completo de la función de onda del sistema. Bajo ciertas condiciones de debilidad en la medición los resultados definen el valor débil del estado de polarización de un conjunto de sistemas preseleccionados y post-seleccionados como se ha presentado en [9], [10], [15], [16]. Habitualmente pensamos que el valor promedio de una medición cuántica deberá estar acotado por los valores extremos del espectro propio de eigenvalores. Sin embargo, existe cierto resultado de la medición para lo cual este no es el caso, estos resultados son llamados valores débiles, ya que surgen como resultado de mediciones débiles de ciertos sistemas preseleccionados y post-seleccionados. El ejemplo canónico de valor débil es el experimento *gedanken* presentado por Aharonov, Alvert y Vaidman [16] [9], donde se describe cómo es posible usar la medición débil para medir el eigenvalor σ_z de una partícula de spin $1/2$ y determinar el valor promedio $\langle \sigma_z \rangle = 100$. Los valores débiles ayudan a entender y resolver ciertas paradojas y comportamientos extraños como la paradoja de Hardy [15],[26] – [28], en la que dos partículas que siempre se aniquilan al encontrarse, a veces se miden paradójicamente después de este evento de aniquilación. El análisis de valores débiles puede conducir a (pseudo) probabilidades negativas un efecto nunca observado en análogo con mediciones clásicas [9]. Históricamente su interpretación ha sido tema de confusión.

En la teoría cuántica el concepto de medición débil fue presentado por Aharonov, Albert y Vaidman en 1988, [16] como un nuevo tipo de valor de una variable cuántica para estudiar las propiedades de un sistema cuántico en sistemas preseleccionados y post-seleccionados, en este formalismo la medida de un observable conduce a un valor débil del observable con propiedades inesperadamente extrañas. De hecho, los valores débiles suelen ser números complejos y tomar valores incluso fuera del propio espectro de eigenvalores del observable. Se ha demostrado que las mediciones débiles se pueden utilizar para obtener información de sistemas cuánticos de una forma coherente. En Metrología Cuántica la sensibilidad de fase de una medida cuántica viene dada por la varianza de la parte imaginaria de los valores débiles de los generadores sobre los diferentes resultados de medición [25]. Las mediciones débiles consisten en

dos pasos, en el primero acoplamos débilmente el dispositivo de medición cuántica al sistema cuántico. El segundo paso es la medición fuerte del dispositivo de medición. El estado colapsado del dispositivo de medición se refiere como el resultado de un proceso medición débil.

Para que una medición sea débil, la desviación estándar del resultado de medición debe ser más grande que la diferencia entre los eigenvalores del sistema [42]. El estado en el dispositivo de medición es:

$$|\phi\rangle = |\phi_d\rangle = \int_x \phi(x) |x\rangle dx, \quad (3.19)$$

esto equivale a la posición de la aguja del dispositivo que apunta mientras esta midiendo el estado. Donde x es la variable de posición de la medición de la aguja.

Sea \hat{X}_d el operador de posición tal que: $\hat{X}_d |x\rangle = x |x\rangle$.

También vamos a asumir que la función $\phi(x)$ se comporta de forma normal (gaussiana) alrededor de cero con una varianza $\Delta = \sigma^2$,

$$\phi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/4\sigma^2}, \quad (3.20)$$

después, lo que corresponde es realizar una medición fuerte $|\phi_d\rangle$ es decir, colapsar la aguja del dispositivo a tomar un valor, el cual es un resultado de medición débil. Supongamos que el operador \hat{A} tiene j eigenvectores $|a_j\rangle$ tal que obedece la ecuación de eigenvalores $\hat{A}|a_j\rangle = \alpha_j |a_j\rangle$. Luego, si consideramos al vector del estado del sistema $|\psi\rangle$ como la superposición de diferentes eigenestados expresado en la base del operador \hat{A} , siendo el estado del sistema $|\psi\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle$, y el Hamiltoniano de interacción $\hat{H}_{int} = g(t)\hat{A} \otimes \hat{P}_d$,

donde $g(t)$ es la función de acoplamiento, que satisface: $\int_0^T g(t)dt = 1$, T es el tiempo de acoplamiento y \hat{P}_d es el operador conjugado de \hat{X}_d , tal que:

$$[\hat{X}_d, \hat{P}_d] = i\hbar. \quad (3.21)$$

Sí partimos de que el proceso de medición con el vector de estado del sistema:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi(x)\rangle, \quad (3.22)$$

que evoluciona en el tiempo y se acopla por la forma del Hamiltoniano en el espacio tensorial de los dos sistemas, de interacción y el operador de momento \hat{P}_d , causará una traslación de posición en el espacio tensorial de los dos sistemas. Entonces aplicando el operador de evolución temporal tenemos:

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi\rangle \otimes |\phi(x)\rangle. \quad (3.23)$$

Es fácil darse cuenta de que en cada uno de los vectores $|\alpha_j\rangle \otimes |\phi(x)\rangle$ el Hamiltoniano \hat{H} convierte a \hat{X}_d en $\hat{X}_d + \alpha_j$ (evolución de Heisenberg) [21],

$$\hat{X}_d(T) - \hat{X}_d(0) = \int_0^T dt \frac{\partial \hat{X}_d}{\partial t} = \int_0^T \frac{1}{\hbar} [\hat{H}, \hat{X}_d] dt = \alpha_j. \quad (3.24)$$

la función de onda ϕ tiene una alta varianza y por lo tanto se superponen una a la otra. Mientras más grande sea la varianza el proceso de medición es más débil. Si estas funciones de onda normales no se superponen entonces es una medición fuerte. Por lo tanto, podemos controlar el proceso de medición con la elección de la varianza $\Delta = \sigma^2$ [44]. Ahora, retomando el estado de superposición $|\psi\rangle = \sum_k c_k |a_k\rangle$ como el estado de preselección del sistema y $|D\rangle$ el estado inicial del dispositivo de medición, donde $|a_k\rangle$ son los eigenvectores de \hat{A} con eigenvalores a_k . Antes de que ocurra la interacción, el estado inicial del sistema preseleccionado y el aparato es el producto de Kronecker $|\psi\rangle |D\rangle$. Luego, la evolución en el tiempo del sistema compuesto está dada por:

la forma del Hamiltoniano de interacción y \hat{P}_d causará una traslación de posición. Debido a la simetría de la traslación, el desplazamiento $+\alpha$ de un sistema cuántico por una distancia, es indistinguible de un desplazamiento del origen de coordenadas por $-\alpha$. Esta es una transformación pasiva, una mera sustitución de variables $x = x' - \alpha$. Por lo tanto, podemos escribir la ley de transformación de vectores como: $v(x) \rightarrow Uv(x) = v(x - \alpha)$. Por ejemplo una función gaussiana e^{-x^2} se vuelve $e^{-(x-\alpha)^2}$, tal que su pico se mueve desde $x = 0$ a $x = \alpha$, y el sistema de hecho se mueve una distancia $+\alpha$. La correspondiente transformación de coordenadas de la función de onda es:

$$e^{-i\hat{H}T/\hbar} |\psi\rangle \otimes |\phi_d\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle \otimes |\phi(x - a_j)\rangle. \quad (3.25)$$

Físicamente hay una traslación espacial a lo largo de la dirección de la aguja del dispositivo de medición.

$$\text{Considerando } |\phi\rangle = |\phi_d\rangle = \int_x \phi(x) |x\rangle dx \text{ y } |\psi\rangle = \sum_j a_j |a_j\rangle \quad (3.26)$$

la función de onda ϕ tiene una alta varianza y por lo tanto se superponen una a la otra. Mientras más grande sea la varianza el proceso de medición es más débil. Si estas funciones de onda normales no se superponen entonces es una medición fuerte. Por lo tanto, podemos controlar el proceso de medición con la elección de la varianza $\Delta = \sigma^2$ [44]. Ahora, retomando el estado de superposición $|\psi\rangle = \sum_k c_k |a_k\rangle$ como el estado de preselección del sistema y $|D\rangle$ el estado inicial del dispositivo de medición, donde $|a_k\rangle$ son los eigenvectores de \hat{A} con eigenvalores a_k . Antes de que ocurra la interacción, el estado inicial del sistema preseleccionado y el aparato es el producto de Kronecker $|\psi\rangle |D\rangle$. Luego, la evolución en el tiempo del sistema compuesto está dada por:

$$|\phi\rangle = e^{\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H}_I dt\right]} |\psi\rangle \otimes |D\rangle = \sum_k c_k e^{\left[\frac{i}{\hbar} \hat{G} a_k \hat{q}\right]} |a_k\rangle |D\rangle, \quad (3.27)$$

donde $\hat{G} = \int_0^T g(t) dt$ es la función de interacción del sistema. Si analizamos el factor exponencial en la expresión (3.27) es el operador de traslación $\hat{T}(\hat{G}a_k)$ aplicado al estado $|D\rangle$ en la representación de momento–P. Usando la relación de completitud, tenemos:

$$|\phi\rangle = \sum_k c_k \int \langle p | \hat{T}(\hat{G}a_k) | D \rangle |a_k\rangle |p\rangle dp. \quad (3.28)$$

En la representación de momento–P, el estado enredado es:

$$\langle p | \phi \rangle = \sum_k c_k \langle p | \hat{T}(\hat{G}a_k) | D \rangle |a_k\rangle, \quad (3.29)$$

tomando en cuenta la condición de ortonormalidad para una base continua $\langle p | p' \rangle = \delta(p - p')$ y la propiedad definitoria de la función de delta de Dirac: $\int f(p') \delta(p - p') dp' = f(p)$. El colapso a un eigenestado $|a_k\rangle$ deja al aparato en la representación P del estado $\langle p | \hat{T}(\hat{G}a_k) | D \rangle$ con probabilidad $|c_k|^2$ [40]. Entonces, el valor final de p , el cual indica el valor de la medición de \hat{A} tiene la distribución de probabilidad :

$$|\langle p | \phi \rangle|^2 = \sum_k |c_k|^2 |\langle p | \hat{T}(\hat{G}a_k) | D \rangle|^2. \quad (3.30)$$

Para mediciones fuertes el momento del aparato de medición se propaga con una incertidumbre Δp , muy pequeña en comparación con la separación de eigenvalores y la distribución de probabilidad se compone de picos centrados cada uno en un eigenvalor a_k . Es fácil notar que en el límite $\Delta p \rightarrow 0$, la medición es ideal en el sentido de que se produce con precisión uno de los eigenvalores a_k . Una medición débil ocurre cuando la incertidumbre Δp es mucho más grande que la separación de eigenvalores, tal que en la ec. (3.30) la distribución de probabilidad es una superposición de amplitudes fuertemente superpuestas $|\langle p | \hat{T}(\hat{G}a_k) | D \rangle|^2$. Aunque una sola medición proporciona poca información sobre el observable \hat{A} , muchas repeticiones permiten hallar la distribución de probabilidad y determinar el valor esperado $\langle \hat{A} \rangle$ con cualquier precisión deseada. Se han realizado mediciones débiles en diferentes experimentos y se han proporcionado nuevos conocimientos en el estudio de paradojas y problemas fundamentales de la teoría cuántica y en metrología de alta precisión. Las mediciones débiles se pueden utilizar como una herramienta práctica para amplificar señales débiles y relaciones entre ruido y señal. Investigaciones recientes [57] han revelado que la función de onda de un estado puro se puede medir directamente, y que el conocimiento de un sistema cuántico se puede obtener simultáneamente mediante mediciones débiles sucesivas. Sin embargo, existen propuestas para esquemas de tomografía cuántica para estados puros y para estados mixtos a través de mediciones débiles.

3.6.1 Ejemplo del spin $\frac{1}{2}$

Supongamos que queremos medir el spin de átomos de plata, la teoría cuántica predice que cada átomo de plata tiene exactamente la mitad de una cantidad fundamental, un cuanto de spin. Y el eje de rotación del átomo puede apuntar en cualquier dirección. Para medir esa dirección se necesita acoplar el spin de un átomo a su movimiento, al inyectar el átomo a través de un campo magnético inhomogéneo, el campo tirará del átomo en una dirección u otra dependiendo de en qué dirección esté girando el átomo. Así que, si suponemos que emitimos un haz de átomos que giran en el mismo sentido a través del campo magnético, la desviación del haz debe servir como puntero para conocer el spin. La teoría cuántica establece que cada átomo puede girar en direcciones opuestas a la vez, con sus ejes apuntando hacia arriba y hacia abajo. Además, cuando el átomo gira en cualquier dirección arbitraria, su estado cuántico puede ser descrito como una combinación lineal específica de dos direcciones opuestas cualesquiera. Considerando una partícula de spin $\frac{1}{2}$, donde el observable $\hat{A} = \frac{\hbar}{2} \hat{S}_z$ es la componente Z del Spin y sea $\hat{H}_{\text{int}} = \hat{A} \otimes \hat{P}_d$ el Hamiltoniano de interacción. Si escribimos a ψ como una combinación lineal de la base de eigenvectores de \hat{S}_z es decir $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ similar a la ec. (2.21). Siguiendo el acoplamiento débil, el sistema y el dispositivo de medición están enredados:

$$\int_x [\alpha|0\rangle \otimes \phi(x - \hbar/2) + \beta|1\rangle \otimes \phi(x + \hbar/2)] |x\rangle dx, \quad (3.31)$$

dónde las funciones ϕ son dos funciones superpuestas entre sí, debido a su alta varianza. Podemos escribir un sistema enredado y el dispositivo de medición

$$\text{como: } \int_x [e^{-\frac{(x-\hbar/2)^2}{4\sigma^2}} \alpha|0\rangle \otimes |x\rangle + e^{-\frac{(x+\hbar/2)^2}{4\sigma^2}} \beta|1\rangle \otimes |x\rangle] dx. \quad (3.32)$$

Ahora mediremos fuertemente la aguja del dispositivo de medición. Si suponemos que la aguja colapsa al vector $|x_0\rangle$, entonces nuestro sistema está ahora en el

$$\text{estado: } [e^{-\frac{(x-\hbar/2)^2}{4\sigma^2}} \alpha|0\rangle + e^{-\frac{(x+\hbar/2)^2}{4\sigma^2}} \beta|1\rangle] \otimes |x_0\rangle. \quad (3.33)$$

El eigenvalor x_0 podría estar en cualquier lugar entre 0 y 1, o incluso más lejos si la desviación estándar σ es lo suficientemente grande, es decir si la medición es muy débil [42]. La aguja del aparato de medición colapsa a un valor x_0 alrededor de 1, esto significa que la amplitud del estado de post-selección $|0\rangle$ es un poco mayor que la amplitud del estado post-seleccionado $|1\rangle$ y viceversa. Así que el colapso de la aguja sesga el vector de estado del sistema. Sin embargo, si σ es muy grande con respecto a la diferencia entre los eigenvalores de \hat{S}_z entonces el sesgo será muy pequeño y el resultado del vector de estado del sistema será muy similar al vector original. En resumen, el vector de estado del sistema está un poco sesgado en la dirección que corresponde al valor del resultado de la aguja del

dispositivo de medición. Esta es una generalización de las medidas fuertes. Por un lado, la información que obtenemos es el valor de la aguja y por otro lado el vector del sistema no colapsa, pero está un poco sesgado. Sí la medición es cada vez más fuerte, tendremos un valor más claro, muy cercano a uno de los eigenvalores del sistema, es decir, un sesgo fuerte en la dirección que corresponde al valor de la aguja del dispositivo de medición. Siempre hay una correspondencia entre el valor de la aguja y la dirección de la inclinación del sesgo, por eso podemos considerar al proceso de medición débil como una generalización de mediciones fuertes. Existe una gran variedad de experimentos que se han realizado para implementar mediciones débiles [9], [22], [23]. Y aunque las configuraciones son diferentes, la mayoría de ellas comparten una base común, insertando una pequeña inclinación o sesgo a la función de onda (en la posición, la polarización o la frecuencia) que apenas afecta su evolución temporal. Cuando este sesgo se detecta más tarde efectuando una medición convencional se revela información sobre la función de onda y permite calcular el valor débil.

3.6.2 Stern Gerlach

Considerando un experimento simple Stern–Gerlach, [10], [16] y [41] la medición de la componente del spin de una partícula a través de un gradiente débil de campo magnético. Consideramos una partícula preparada en el estado inicial spin hacia arriba (up) en la dirección \hat{x} y post–seleccionado hacia abajo (down) en la dirección \hat{y} . En un tiempo t medimos débilmente la componente del spin en la dirección $\hat{\xi}$ que es un bisector de \hat{x} y \hat{y} , tal que $\hat{\sigma}_\xi = (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y)/\sqrt{2}$. El valor débil de σ_ξ está dado por la siguiente expresión:

$$\hat{\sigma}_\xi = \frac{\langle \uparrow_y | \hat{\sigma}_\xi | \uparrow_x \rangle}{\langle \uparrow_y | \uparrow_x \rangle} = \frac{\langle \uparrow_y | (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y) | \uparrow_x \rangle}{\sqrt{2} \langle \uparrow_y | \uparrow_x \rangle} = \sqrt{2}. \quad (3.34)$$

Este valor, es por supuesto un valor prohibido en la interpretación estándar donde la componente del spin puede obtener solamente los eigenvalores ± 1 . El Hamiltoniano efectivo para la medición de $\hat{\sigma}_\xi$ es: $\hat{H} = g(t)\hat{P} \otimes \hat{\sigma}_\xi$ y escribiendo el estado inicial de la partícula en la representación de $\hat{\sigma}_\xi$ y considerando el estado inicial $\psi^{MD}(Q) = \langle \phi | e^{-iPC} | \psi \rangle e^{-Q^2/2\Delta^2}$ para el dispositivo de medición, obtenemos que después de la interacción de la medición [43] el estado cuántico del sistema y el puntero del dispositivo de medición está dada por:

$$\cos(\pi/8) | \uparrow_\xi \rangle e^{-(Q-1)^2/2\Delta^2} + i \operatorname{sen}(\pi/8) | \downarrow_\xi \rangle e^{-(Q+1)^2/2\Delta^2}. \quad (3.35)$$

Sí ahora se observa sin post-selección, la distribución de probabilidad de la posición del puntero es la suma de las distribuciones para cada valor del spin,

$$P(Q) = \cos^2(\pi/8) e^{-(Q-1)^2/\Delta^2} + \operatorname{sen}^2(\pi/8) e^{-(Q+1)^2/\Delta^2}. \quad (3.36)$$

En la medición fuerte usual, $\Delta \ll 1$, la distribución de probabilidad del puntero se localiza alrededor de -1 y $+1$ y está fuertemente correlacionada a los valores del spin, $\hat{\sigma}_x = \pm 1$. Las mediciones débiles corresponden a un valor de la desviación Δ mucho más grande que el rango de eigenvalores, es decir $\Delta \gg 1$ [10]. Una medición débil apenas perturba el estado del sistema, el acoplamiento entre el dispositivo de medición y el observable a medir es tan débil que la incertidumbre en una sola medición es más grande en comparación con la separación entre los eigenvalores del observable. Como veremos en el siguiente capítulo, hay necesariamente un cierto grado de incertidumbre en cualquier medida. La fuerza de una medida puede caracterizarse en una escala continua que se extiende desde débil hasta ideal, dependiendo de la medición de incertidumbre relativa a la separación de eigenvalores. La idea clave es seguir la medición débil con una medición fuerte adecuada. En este caso el spin de los átomos después de aplicar el magneto débil para extender el haz verticalmente y luego el haz debe pasar a través de un magneto fuerte, que divide a los átomos en dos haces, uno con spin apuntando hacia la izquierda y el otro con spin apuntando hacia la derecha. Supongamos que los átomos originalmente tenían su spin apuntando muy cerca de la dirección izquierda, entonces el segundo magneto enviara la mayoría de los átomos al haz que se extiende hacia la izquierda y algunos átomos, terminarán en el haz que se extiende hacia la derecha. Esto es porque el magneto débil no separa completamente las componentes arriba y debajo de la función de onda original del átomo. Las ondas, no separadas del todo interfieren entre sí de una manera que se amplifica enormemente la deflexión vertical del haz que se extiende hacia la derecha, para revelar la mezcla de estados arriba y abajo. La interferencia se encarga de que todo el esquema trabaje, y para un estado inicial dado puede emerger la interferencia al post—seleccionar un estado final.

3.6.3 Polarización de fotones

La post selección es un método para amplificar la medición débil. Desde su descubrimiento hasta ahora se han realizado bastantes experimentos que implementan mediciones débiles, en 1991 Ritchie, Story y Hulet [38] propusieron un experimento de polarización de fotones análogo al experimento de spin $\frac{1}{2}$ propuesto por Duck y Stevenson en 1989 [41], donde se reemplazan los magnetos Stern—Gerlach por polarizadores ópticos. Realizaron la medición débil mediante una placa de cristal birrefringente de cuarzo que separa espacialmente las dos polarizaciones ortogonales de la radiación láser, a una distancia que es mucho menor que la cintura del haz gaussiano. Además, consideran que la radiación laser

se propaga en dirección Z y está linealmente polarizada un ángulo α con respecto al eje x . Entonces el vector de campo eléctrico de la radiación se describe por:

$$E_i = E_0 e^{\left[\frac{-(x^2+y^2)}{w_0^2}\right]} (\cos\alpha \hat{x} + \text{sen}\alpha \hat{y}), \quad (3.37)$$

dónde w_0 es la cintura del haz. La luz incide sobre el plano paralelo axial del plano birrefringente cuyo eje óptico está alineado con el eje x . El plano de la placa supone que el eje X esta rotado del eje Y por un ángulo θ . El cristal birrefringente realiza una medición débil separando las dos componentes ortogonales de polarización lineal del campo, correspondientes a los haces ordinario y extraordinario por una distancia la cual es pequeña comparada con w_0 . Además, el plano birrefringente introduce una diferencia de fase ϕ entre los dos haces, debido a la diferencia en la longitud de camino óptico entre ellos [38].

3.7 Tomografía de estados cuánticos

La tomografía de estado cuántico convencional reconstruye el operador de densidad $\hat{\rho}$ de un ensamble de sistemas idénticos realizando un conjunto de mediciones de diferentes observables incompatibles [43], [57]. El procedimiento tiene como objetivo registrar las probabilidades de diferentes resultados de estas mediciones fuertes proyectivas y aproximarlas a través de frecuencias relativas para mediciones sobre un número de conjuntos. Debido a que los observables de medición son incompatibles, la tomografía de estados cuánticos puede realizar solo un tipo de medición en un solo sistema y, por lo tanto, requieren un cierto tamaño mínimo del ensamble para conocer cualquier información acerca del estado cuántico. Existe una analogía directa entre la tomografía de estado cuántico para un solo qubit y la medición de los estados de polarización de fotones, el cual emplea el formalismo de Stokes. Usando mediciones débiles, es posible idear un esquema de tomografía alternativo y fundamentalmente diferente, donde las mediciones de los dos observables de realizan en el mismo sistema cuántico. En la llamada tomografía directa de estado, una medición débil de un observable perturba el objeto del sistema muy débilmente, y luego seguido de una medición convencional del otro observable. El principio básico de la tomografía directa de estado cuántico para qubits individuales puede ser ilustrada por la descomposición de un estado puro de polarización en los correspondientes valores débiles para el caso más simple de la post selección de un solo estado final. Se puede escribir un estado de un qubit arbitrario $|\psi\rangle$ en la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ como:

$$|\psi\rangle = \langle H|\psi\rangle |H\rangle + \langle V|\psi\rangle |V\rangle, \quad (3.38)$$

$$|\psi\rangle = \frac{\langle\psi_F|\psi\rangle\langle\psi_F|\hat{\Pi}_H|\psi\rangle}{\langle\psi_F|H\rangle\langle\psi_F|\psi\rangle} |H\rangle + \frac{\langle\psi_F|\psi\rangle\langle\psi_F|\hat{\Pi}_V|\psi\rangle}{\langle\psi_F|V\rangle\langle\psi_F|\psi\rangle} |V\rangle, \quad (3.39)$$

dónde $\hat{\Pi}_H = |H\rangle\langle H|$, $\hat{\Pi}_V = |V\rangle\langle V|$ y $|\psi_F\rangle$ denota el estado de postselección. Para una opción de postselección $|\psi'_F\rangle$ que es imparcial con respecto a la base de medición con $\langle\psi'_F|H\rangle = \langle\psi'_F|V\rangle$, como por ejemplo $|\psi'_F\rangle = |P\rangle$, la expresión se simplifica a:

$$|\psi\rangle = \frac{\langle\psi'_F|\psi\rangle}{\sqrt{2}} \left(\frac{\langle\psi'_F|\hat{\Pi}_H|\psi\rangle}{\langle\psi'_F|\psi\rangle} |H\rangle + \frac{\langle\psi'_F|\hat{\Pi}_V|\psi\rangle}{\langle\psi'_F|\psi\rangle} |V\rangle \right). \quad (3.40)$$

Una medición en la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ se representa por el observable $\hat{\sigma}_z$ y el correspondiente valor débil σ_w se define como:

$$\sigma_w = \frac{\langle\psi'_F|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle}{\langle\psi'_F|\psi\rangle}, \quad (3.41)$$

el cual implica que,

$$\frac{\langle\psi'_F|\hat{\Pi}_H|\psi\rangle}{\langle\psi'_F|\psi\rangle} = \frac{1+\sigma_w}{2}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\langle\psi'_F|\hat{\Pi}_V|\psi\rangle}{\langle\psi'_F|\psi\rangle} = \frac{1-\sigma_w}{2}. \quad (3.43)$$

En conclusión, el estado inicial del qubit $|\psi\rangle$ puede ser expresado como:

$$|\psi\rangle = N \left(\frac{1+\sigma_w}{2} |H\rangle + \frac{1-\sigma_w}{2} |V\rangle \right), \quad (3.44)$$

dónde N es una constante de normalización adecuada. Entonces, la medición de un solo valor débil complejo permite la determinación de ambos coeficientes complejos del estado puro. En el contexto del procedimiento habitual de valores débiles, la tomografía directa de estados cuánticos corresponde a un escenario donde se conoce el estado de preselección y la medición del valor débil de un estado de postselección permiten un cálculo directo de los coeficientes complejos del estado respectivo a las entradas de la matriz de densidad. Las partes real e imaginaria del valor débil se obtienen midiendo diferentes punteros de los observables, en el caso más simple (el régimen lineal de mediciones débiles), estas cantidades son simplemente proporcionales a los cambios de posición y de momento del puntero del sistema.

Capítulo 4.

Relaciones de
incertidumbre en
mediciones cuánticas.

Dentro de los aspectos fundamentales en el desarrollo de las teorías de la Información Cuántica y de las Comunicaciones Ópticas, lo más importante es establecer los límites de mediciones, las cuales están sujetas rigurosamente a la Mecánica Cuántica donde el principio de incertidumbre juega un rol central, acerca de lo que podemos predecir y determinar simultáneamente con cierta precisión de ciertos pares de variables conjugadas que no conmutan. Históricamente, Heisenberg estableció el principio de incertidumbre de su análisis del experimento *gedenken* para cierto proceso de mediciones sucesivas. En este Capítulo se estudia la violación a la relación de Heisenberg y relaciones de incertidumbre más generales propuestas por Ozawa y Branciard.

4.1 Relación de Error-Perturbación de Heisenberg

La relación de incertidumbre formulada por Heisenberg en 1927 describe una compensación entre el error de una medición y la perturbación causada en otro observable complementario de tal forma que su producto no puede ser menor que un límite fundamental establecido por la constante de Planck. En este capítulo discutiremos como cuantificar experimentalmente el error y la perturbación de una medición. El descubrimiento de la Mecánica Cuántica introdujo la no-conmutatividad en cálculo algebraico de observables, utilizando la *relación canónica de conmutación* (RCC):

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar, \quad (4.1)$$

entre la coordenada de posición \hat{Q} de una partícula y su momento \hat{P} , además el conmutador se define como $[\hat{Q}, \hat{P}] = \hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q}$. Heisenberg propuso un significado operacional de la no-conmutatividad, cuanto más precisamente se determina la posición de una partícula, menos precisión obtendremos para el momento, y viceversa. En el famoso experimento del microscopio de rayos γ que derivó la relación:

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4.2)$$

Como una consecuencia matemática de la ec. (4.1) donde $\varepsilon(Q)$ es el error esperado de una medición de posición Q y $\eta(P)$ es por lo tanto el cambio discontinuo causado en el momento P . Básicamente $\varepsilon(Q)$ es el error medio de la medición de posición Q , aquí el error medio es naturalmente entendido como el error "*root-mean-square*" o error *rms* y el cambio discontinuo es llamado perturbación media.

4.1.1 Derivación de Heisenberg

Como una justificación matemática Heisenberg primero derivó la relación:

$$\sigma(Q)\sigma(P) = \frac{\hbar}{2}, \quad (4.3)$$

para las desviaciones estándar $\sigma(Q)$ y $\sigma(P)$ de la posición Q y momento P respectivamente en el estado descrito por una función de onda Gaussiana. Una parte de la prueba matemática fue introducida por Kennard como la relación:

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4.4)$$

Y subsecuentemente lo generalizó para un par arbitrario de observables \hat{A} y \hat{B} , dónde sus respectivas desviaciones estándar $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$, satisfacen la relación:

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|, \quad (4.5)$$

para funciones de onda arbitrarias. Aquí la desviación estándar se define para cualquier observable \hat{A} por $\sigma(Q)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$, donde $\langle \dots \rangle$ representa el valor medio en un estado dado.

Además, Heisenberg aplicó la ecuación (4.4) a un estado justo después de la medición asumiendo que:

1. Cualquier medición con error *rms* $\varepsilon(A)$ de un observable arbitrario A deja un estado que satisface la relación $\sigma(A) \leq \varepsilon(A)$.
2. Sí un observable arbitrario A puede ser medido con un error *rms* $\varepsilon(A)$ y la perturbación *rms* $\eta(B)$ de otro observable B , entonces A y B pueden ser medidos conjuntamente, con errores *rms* $\varepsilon(A)$ y $\varepsilon(B) = \eta(B)$, respectivamente [54].

El principio de incertidumbre de Heisenberg expresa las limitaciones de las posibilidades operacionales impuestas por la Mecánica Cuántica. Este principio describe que:

1. Es imposible preparar estados en los que la posición y el momento arbitrarios que estén bien localizados al mismo tiempo. No es posible predecir simultáneamente esa información.
2. Es imposible medir simultáneamente la posición y el momento.
3. El imposible medir la posición sin perturbar el momento y viceversa.

El trabajo de Heisenberg está marcado por las tensiones entre los argumentos semiclásicos y la teoría cuántica moderna emergente, entre la intuición y el rigor matemático. No obstante, la idea principal puede incorporarse a una nueva teoría cuántica en formas de teoremas más generales.

4.2 Modelo de Medición de posición de von Neumann

Consideremos una masa unidimensional como nuestro sistema cuántico que llamaremos estado del sistema S , con posición Q y momento P , descritos por un espacio de Hilbert \mathcal{H} . La medición de Q se realiza mediante un acoplamiento entre el estado del sistema S y la sonda P desde el tiempo $t = 0$ hasta $t = \Delta t$. La sonda P es otra masa unidimensional con posición \bar{Q} y momento \bar{P} , descritos es un espacio de Hilbert \mathcal{K} . El resultado de la medición se obtiene midiendo la posición de la sonda \bar{Q} , llamado *medidor observable*, al tiempo $t = \Delta t$. El hamiltoniano para el estado del sistema y la sonda es:

$$\hat{H}_{S+P} = (\hat{H}_S + \hat{H}_P + K\hat{H}), \quad (4.6)$$

donde \hat{H}_S y \hat{H}_P son los Hamiltonianos libres de S y P , respectivamente, \hat{H} representa la interacción de medición y K es la constante de acoplamiento [54]. Asumimos que la constante es tan fuerte ($K \gg 1$) tal que \hat{H}_S y \hat{H}_P pueden ser despreciados. Escogemos Δt como $K\Delta t = 1$. En el modelo de von Neumann la interacción de medición está dada por el producto tensorial:

$$\hat{H} = (\hat{Q} \otimes \bar{P}), \quad (4.7)$$

entonces, el operador unitario de evolución temporal de $S + P$ desde $t = 0$ hasta $t = \tau \leq \Delta t$ está dado por:

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(\frac{-iK\tau}{\hbar} \hat{Q} \otimes \bar{P}\right). \quad (4.8)$$

Supongamos que el estado del sistema S y la sonda P están en el estado $|\psi\rangle$ y $|\xi\rangle$ respectivamente, solo antes de la medición; asumimos que las funciones de onda $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ y $\xi(y) = \langle y|\xi\rangle$ son funciones de Schwarz que decrecen rápidamente, donde $|x\rangle$ y $|y\rangle$ son las bases de posición de S y P respectivamente. Entonces el estado del sistema ($S + P$) solo después de la medición es $\hat{U}(\Delta t)|\psi, \xi\rangle$. Y resolviendo la ecuación de Schrödinger tenemos:

$$\langle x, y|\hat{U}(\Delta t)|\psi, \xi\rangle = \langle x|\psi\rangle\langle y - x|\xi\rangle, \quad (4.9)$$

sí vemos el medidor observable $\hat{Q}(\Delta t)$ después de la interacción de medición, la distribución de probabilidad del resultado está dada por la expresión:

$$P_r\{a < x \leq b\} = \int_a^b dy \int_{-\infty}^{\infty} |\langle x|y\rangle|^2 |\langle y - x|\xi\rangle|^2 dx. \quad (4.10)$$

Sí la función de onda inicial en la sonda $\xi(y)$ se aproxima a la función delta de Dirac $\delta(x)$, la distribución de probabilidad de salida se aproxima a la distribución

de probabilidad de Born para el observable \hat{Q} en el tiempo $t = 0$. En la imagen de Heisenberg, denotamos las transformaciones unitarias de los observables:

$$\hat{Q}(\tau) = \hat{U}(\tau)^\dagger (\hat{Q} \otimes \hat{I}) \hat{U}(\tau), \quad \bar{\hat{Q}}(\tau) = \hat{U}(\tau)^\dagger (\hat{I} \otimes \bar{Q}) \hat{U}(\tau), \quad (4.11)$$

$$\hat{P}(\tau) = \hat{U}(\tau)^\dagger (\hat{P} \otimes \hat{I}) \hat{U}(\tau), \quad \bar{\hat{P}}(\tau) = \hat{U}(\tau)^\dagger (\hat{I} \otimes \bar{P}) \hat{U}(\tau). \quad (4.12)$$

Resolviendo las ecuaciones de movimiento de Heisenberg a un tiempo Δt tenemos:

$$Q(\Delta t) = Q(0), \quad (4.13)$$

$$\bar{Q}(\Delta t) = Q(0) + \bar{Q}(0), \quad (4.14)$$

$$P(\Delta t) = P(0) - \bar{P}(0), \quad (4.15)$$

$$\bar{P}(\Delta t) = \bar{P}(0). \quad (4.16)$$

4.3.- Error y Perturbación en mediciones cuánticas

La Mecánica Cuántica predice la distribución de probabilidad conjunta de los resultados de mediciones simultáneas de observables que conmutan. Para proporcionar fundamentos de la estadística conjunta de mediciones locales generalizadas en sistemas enredados en un marco teórico general, debemos conocer en qué condiciones los resultados de medición de dos aparatos diferentes satisfacen la relación de probabilidad conjunta para mediciones simultáneas de sus observables. Todos los posibles cambios de estado causados por las mediciones de un observable son caracterizados, y las nociones de perturbación que se formalizan en términos de operaciones derivadas de medir la interacción de la medición. El acto de medir perturba inevitablemente el estado del sistema, los átomos aparecen en un lugar particular sí y solo sí son medidos, antes de esta interacción de medición la función de onda del átomo se encuentra localizada en todas partes. La distribución de probabilidad del resultado de una medición se determina por el observable a medir y el estado en el momento de la medición, pero la distribución de probabilidad conjunta de los resultados de las mediciones sucesivas en el mismo objeto, dependen de como la primera medición perturba al objeto. La perturbación no solo depende del observable y el estado, sino también del aparato de medición que se utilizará. De esta forma la distribución de probabilidad conjunta de mediciones sucesivas estará estrechamente relacionada con cómo el aparato perturba el estado del sistema. Es un problema sensato investigar esta relación que existe entre la perturbación y la distribución de probabilidad conjunta para mediciones.

4.3.1 Definiciones de error y perturbación.

En aras de discutir la exactitud y precisión de la medición, debemos definir el error de la medición. En ciencias clásicas, considerando la existencia de un valor verdadero x_0 para la cantidad física a ser medida. El error de medición usualmente se caracteriza por la raíz cuadrada media (*root-mean-square*) o *rms* de la distancia de los resultados de medición x y el valor verdadero x_0 como:

$$\Delta x_{rms} = \sqrt{\langle (x - x_0)^2 \rangle}. \quad (4.17)$$

Es importante identificar que Δx_{rms} incluye ambas, la exactitud y la precisión de la medición, como la distancia entre el valor verdadero y el valor esperado de los resultados, por un lado, y como una distribución de los resultados de medición por el otro. Sin embargo, en Mecánica Cuántica no podemos asumir el valor verdadero en general, los resultados de medición son probabilísticos y su distribución depende del estado del sistema, en general el estado del objeto se perturba por la acción de la medición, resultando en la perturbación sobre una secuencia de mediciones sucesivas o bien una medición conjunta. Las cantidades de error y perturbación dependen del estado del sistema a ser medido, y otras cantidades son definidas como estados independientes. Considerando el modelo de medición generalizada. El estado señal $|\psi\rangle$ está sujeto a la medición del observable \hat{A} por un instrumento de medición en el cual el estado $|\psi\rangle$ interactúa con el estado de la sonda $|\xi\rangle$ a través del operador unitario \hat{U} . El resultado de medición se obtiene observando la sonda del observable \hat{M} después de la interacción. Después de la medición de \hat{A} , la señal está sujeta a una medición proyectiva (medida fuerte) de otro observable \hat{B} . Usando la imagen de Heisenberg, los observables \hat{M} y \hat{B} actuando en el estado a la entrada $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\xi\rangle$ están dados por:

$$\hat{M}_A = \hat{U}^{-1}(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U}, \quad (4.18)$$

$$\hat{M}_B = \hat{U}^{-1}(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U}, \quad (4.19)$$

Estos son los observables correspondientes a lo que se mide en el instrumento. El operador de ruido $\hat{N}(A)$ y el operador de perturbación $\hat{D}(B)$ se definen como la diferencia entre los observables que estamos midiendo y lo que queremos medir:

$$\hat{N}(A) = \hat{M}_A - \hat{A}, \quad (4.20)$$

$$\hat{D}(B) = \hat{M}_B - \hat{B}. \quad (4.21)$$

De aquí en lo sucesivo, nos referiremos al producto tensorial $\hat{A} \otimes \hat{I}$ como simplemente \hat{A} y $\hat{B} \otimes \hat{I}$ como \hat{B} . Entonces el error $\varepsilon(A)$ y la perturbación $\eta(B)$ en la medición de \hat{A} y \hat{B} se definen como la raíz cuadrada media *rms* de \hat{N} y \hat{D} .

$$\varepsilon(A) = \sqrt{\langle \hat{N}(A)^2 \rangle}, \quad (4.22)$$

$$\eta(B) = \sqrt{\langle \hat{D}(B)^2 \rangle}. \quad (4.23)$$

Estas definiciones de error y perturbación son propuestas por Ozawa en [50][52]. Se pueden considerar como una generalización del error *rms* de la medición cuántica. Un método para cuantificación del error el error y la perturbación usando el valor débil se verá en el Capítulo 6.

4.3.2 Error y Perturbación raíz-cuadrático-media (*rms*)

Para definir el error raíz–cuadrático–medio de esta medición, Partiendo de las definiciones clásicas, el valor verdadero está dado por $X = x$ y su valor medido $Y = y$. Para cada par de valores $(X, Y) = (x, y)$, el error se define como $y - x$. Para definir el error medio con respecto a la distribución de probabilidad conjunta $u^{X,Y}(dx, dy)$ de X y Y , el error *rms* $\varepsilon(X, Y)$ de Y para X como:

$$\varepsilon(X, Y) = \left(\int \int_{R^2} (y - x)^2 u^{X,Y}(dx, dy) \right)^{1/2}. \quad (4.24)$$

En el modelo de von Neumann, el valor del observable $Q(0)$ se mide con el valor del medidor observable $\bar{Q}(\Delta t)$. Dado que $\bar{Q}(0)$ y $\bar{Q}(\Delta t)$ conmutan, la distribución de probabilidad conjunta resulta:

$$u^{\bar{Q}(0), \bar{Q}(\Delta t)}(dx, dy) = \left\langle E^{Q(0)}(dx) E^{\bar{Q}(\Delta t)}(dy) \right\rangle, \quad (4.25)$$

dónde, $E^{\hat{A}}$ para la medida espectral de un observable \hat{A} [54]. Entonces de la ecuación (4.24), el error *rms* $\varepsilon(Q)$ de $\bar{Q}(\Delta t)$ para $Q(0)$ en el estado $|\psi\rangle$ está dada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon(Q) &= \varepsilon_G \left(Q(0), \bar{Q}(\Delta t) \right) \\ &= \left(\int \int_{R^2} (y - x)^2 u^{Q(0), \bar{Q}(\Delta t)}(dx, dy) \right)^{1/2} \\ &= \left\langle \left(\bar{Q}(\Delta t) - Q(0) \right)^2 \right\rangle^{1/2} \\ &= \left\langle \left(\bar{Q}(0) \right)^2 \right\rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dado que $P(0)$ y $P(\Delta t)$ conmutan, la distribución de probabilidad conjunta $u^{P(0), P(\Delta t)}(dx, dy)$ de los valores de $P(0)$ y $P(\Delta t)$ resulta como:

$$u^{P(0), P(\Delta t)}(dx, dy) = \langle E^{P(0)}(dx)E^{P(\Delta t)}(dy) \rangle. \quad (4.27)$$

La perturbación cuadrática media $\eta(P)$ de P desde $t = 0$ hasta $t = \Delta t$ se define como la raíz cuadrática media del error $P(\Delta t)$ para $P(0)$ dada por una expresión similar:

$$\begin{aligned} \eta(P) &= \varepsilon_G(P(0), P(\Delta t)) \\ &= \left(\int \int_{R^2} (y - x)^2 u^{P(0), P(\Delta t)}(dx, dy) \right)^{1/2} \\ &= \left\langle (P(\Delta t) - P(0))^2 \right\rangle^{1/2} \\ &= \left\langle (\bar{P}(0))^2 \right\rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Entonces por la desigualdad de Kennard ec. (4.4) tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon(Q)\eta(P) &= \left\langle (\bar{Q}(0))^2 \right\rangle^{1/2} \left\langle (\bar{P}(0))^2 \right\rangle^{1/2} \\ &\geq \sigma(\bar{Q}(0))\sigma(\bar{P}(0)) \geq \frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Además, podemos concluir que el modelo de von Neumann satisface la relación de incertidumbre error–perturbación.

4.3.3 Formulación del error y la perturbación

Sí consideramos una medición de la posición de una partícula con momento P , entonces la interacción entre la partícula y el aparato inicia en el tiempo 0 y termina al tiempo Δt . Sea ψ el estado inicial, es decir el estado de la partícula justo antes de la interacción y sea ξ el estado del dispositivo justo antes de la interacción, \hat{U} es el operador unitario que representa la evolución temporal de la partícula y el dispositivo de medición en el intervalo $(0, \Delta t)$. Entonces, en la imagen de Heisenberg el cambio de momento se representa por:

$$\hat{D}(P) = \hat{P}(\Delta t) - \hat{P}(0), \quad (4.30)$$

$$\text{dónde: } \hat{P}(0) = \hat{P} \otimes \hat{I} \quad \text{y} \quad \hat{P}(\Delta t) = \hat{U}^\dagger \hat{P}(0) \hat{U}. \quad (4.31)$$

Tomando la expresión de la perturbación *rms* a partir de la ecuación (4.23) tenemos:

$$\eta(\hat{P}) = \sqrt{\langle \hat{D}(P)^2 \rangle}, \quad (4.32)$$

esta definición estadística conduce a la siguiente expresión geométrica:

$$\eta(\hat{P}) = \|\hat{P}(\Delta t)\psi \otimes \xi - \hat{P}(0)\psi \otimes \xi\|, \quad (4.33)$$

entonces, por la relación:

$$\sigma(\hat{A}) = \|\hat{A}\psi \otimes \xi - \langle \hat{A} \rangle \psi \otimes \varepsilon\|, \quad (4.34)$$

para cualquier observable \hat{A} , podemos obtener fácilmente la siguiente relación:

$$|\sigma(P(\Delta t)) - \sigma(P(0))| \leq \eta(P) + |\langle p(\Delta t) \rangle - \langle P(0) \rangle|. \quad (4.35)$$

Partiendo de que el cambio en la desviación estándar del momento está limitado desde arriba por la perturbación *rms* $\eta(P)$ más el cambio en el valor medio del momento. Además, si la partícula tiene un momento definido p antes de la medición, es decir que obedece la ecuación de eigenvalores $\hat{P}(0)\psi = p\psi$, tenemos:

$$\hat{D}(P)\psi \otimes \xi = [P(\Delta t) - p]\psi \otimes \xi, \quad (4.36)$$

y, por lo tanto:

$$\eta(P)^2 = \langle [P(\Delta t) - p]^2 \rangle \geq \sigma(P(\Delta t))^2. \quad (4.37)$$

Entonces la desviación estándar del momento después de la medición está limitada desde arriba por la perturbación *rms*. En particular, si $p = 0$, tenemos

$$\eta(P)^2 = \langle (P(\Delta t))^2 \rangle. \quad (4.38)$$

Entonces esta expresión quiere decir que si la partícula estaba en reposo antes de la medición, todo el momento del estado del sistema surge de la interacción, de modo que la perturbación cuadrática media (es decir el cuadrado de la perturbación raíz-cuadrática-media) es igual al momento cuadrático medio después de la medición. El rol de la interacción es predecir el valor de Q antes de la interacción al valor del observable M de la sonda. El resultado de la medición de Q en el estado ψ se obtiene midiendo M sin perturbar el momento P de la partícula; esto es posible, mediante otro aparato de medición acoplado únicamente a la sonda. Los postulados de la Mecánica Cuántica no limitan la exactitud de la última medición de M , y por lo tanto despreciamos el error de esta medición. Entonces, en la imagen de Heisenberg el error causado por este proceso de la medición de la posición Q está representado por:

$$N(Q) = M(\Delta t) - Q(0), \quad (4.39)$$

$$\text{dónde, } Q(0) = \hat{Q} \otimes \hat{I} \text{ y } M(\Delta t) = \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{M}) \hat{U}. \quad (4.40)$$

El error raíz-cuadrático-medio *rms*, como en la ec. (4.22) está dado por:

$$\varepsilon(Q) = \sqrt{\langle \hat{N}(Q)^2 \rangle}, \quad (4.41)$$

dónde $\langle \dots \rangle$ denota el valor esperado en el estado original $\psi \otimes \xi$. La definición estadística de esta ecuación nos conduce a la siguiente expresión geométrica

$$\varepsilon(Q) = \|M(\Delta t)\psi \otimes \xi - Q(0)\psi \otimes \xi\|. \quad (4.42)$$

Análogamente al desarrollo para la perturbación en P de la ec. (4.35) obtenemos la siguiente expresión:

$$|\sigma(M(\Delta t)) - \sigma Q(0)| \leq \varepsilon(Q) + |\langle M(\Delta t) \rangle - \langle Q(0) \rangle|. \quad (4.43)$$

Mostrando que el cambio en la desviación estándar de entrada a salida está delimitado por el ruido raíz cuadrático medio. Sí la partícula tuviera una posición definida q antes de la medición, tendríamos:

$$\varepsilon(Q)^2 = \langle [M(\Delta t) - q]^2 \rangle \geq \sigma(M(\Delta t))^2. \quad (4.44)$$

Podemos observar fácilmente que $\varepsilon(Q)$ representa la desviación *rms* del resultado de la medición de la posición verdadera q y se delimita por la desviación estándar del resultado de la medición del observable de posición Q .

4.4 Relación de incertidumbre de Ozawa

M. Ozawa afirmó recientemente que Heisenberg cometió un descuido con respecto a la relación entre precisión y perturbación. La base de esto es un artículo [52] del 2003, en el que se describen las definiciones matemáticas del error cuadrático medio y la perturbación cuadrática media dadas en la sección 4.3.2 refiriéndose a una situación microscópica. Hasta ahora solo hemos considerado la incertidumbre de medición para pares observables. Algunas veces es interesante considerar todos los observables al mismo tiempo y una situación donde esto se vuelve necesario es la Criptografía Cuántica, o más precisamente, la distribución cuántica de una clave. Sí el conocimiento sobre un sistema cuántico se establece mediante la preparación de estados o mediciones, entonces necesitamos preparar relaciones de incertidumbre y relaciones de mediciones de incertidumbre cercanas al límite de incertidumbre, es importante saber que tan cerca está exactamente uno del límite. Al considerar tales relaciones de incertidumbre hay un considerable margen matemático, que se puede utilizar para construir y probar desigualdades adaptadas ópticamente a una situación dada. Debemos acostumbrarnos a pensar no en la relación de incertidumbre sino, más bien, en una colección de relaciones de incertidumbre. Ozawa desarrollo la idea de una relación de incertidumbre entre el error relacionado al dispositivo de medición y la perturbación debida a la interacción de la medición [52], dada por la expresión:

$$\varepsilon(Q)\eta(P) + \varepsilon(Q)\sigma(P) + \sigma(Q)\eta(P) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (4.45)$$

desigualdad válida para cada medición y cada estado de entrada, siempre que todos los términos relevantes sean finitos, $\sigma(Q)$ y $\sigma(P)$ se refieren a las desviaciones estándar de Q y P en el estado inicial en la entrada. Dado que M y P son observables en diferentes sistemas, tenemos que:

$$[M(\Delta t), P(\Delta t)] = 0, \quad (4.46)$$

luego, sustituyendo $M(\Delta t) = \hat{Q}(0) + \hat{N}(Q)$ y $\hat{P}(\Delta t) = \hat{P}(0) + \hat{D}(P)$ en la ecuación (4.46) y usando la relación de conmutación $[Q, P] = i\hbar$, tenemos:

$$[\hat{N}(Q), \hat{D}(P)] + [\hat{N}(Q), \hat{P}(0)] + [\hat{Q}(0), \hat{D}(P)] = -i\hbar. \quad (4.47)$$

Tomando el módulo del promedio de ambos lados y aplicando la desigualdad del triángulo, obtenemos:

$$|\langle [\hat{N}(Q), \hat{D}(P)] \rangle| + |\langle [\hat{N}(Q), \hat{P}(0)] \rangle| + |\langle [\hat{Q}(0), \hat{D}(P)] \rangle| \geq \hbar, \quad (4.48)$$

dado que la varianza no es más grande que el cuadrado medio

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \geq \sigma(\hat{N}(Q))\sigma(\hat{D}(P)) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{N}(Q), \hat{D}(P)] \rangle|, \quad (4.49)$$

dónde σ se refiere a la desviación estándar en el estado $\psi \otimes \xi$. Similarmente, tenemos:

$$\varepsilon(Q)\sigma(P) \geq \sigma(\hat{N}(Q))\sigma(\hat{P}(0)) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{N}(Q), \hat{D}(P)] \rangle|, \quad (4.50)$$

$$\sigma(Q)\eta(P) \geq \sigma(\hat{Q}(0))\sigma(\hat{D}(P)) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{Q}(0), \hat{D}(P)] \rangle|. \quad (4.51)$$

Combinando las ecuaciones (4.48–4.51) obtenemos:

$$\varepsilon(Q)\eta(P) + \varepsilon(Q)\sigma(P) + \sigma(Q)\eta(P) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4.52)$$

Es la relación de incertidumbre error–perturbación de Ozawa.

4.4.1 Limitación de la relación de Heisenberg

Heisenberg no aborda directamente el tema de perturbación en su experimento, es decir, el cambio en la cantidad de movimiento por el Scattering (o dispersión), sino que enfatiza la discontinuidad como una ambigüedad en un momento dado. La prueba anterior claramente es una solución válida para cuando la inecuación (4.2) se mantiene verdadera, generalmente sí $[\hat{N}(Q), \hat{D}(P)] + [\hat{Q}(0), \hat{D}(P)] = 0$, entonces la inecuación (4.2) se sostiene para cada estado de entrada ψ y cada estado ξ del aparato. De hecho, de la ecuación (4.48), la condición $[\hat{N}(Q), \hat{D}(P)] + [\hat{Q}(0), \hat{D}(P)] = 0$ implica la relación de conmutación:

$$[\hat{N}(Q), \hat{D}(P)] = -i\hbar, \quad (4.53)$$

Entonces la ecuación (4.2) surge inmediatamente de la ecuación (4.49). Para sacar una conclusión útil, decimos que la medición tiene una intervención independiente, si hay dos operadores \hat{N} y \hat{D} en el espacio de estados del aparato tal que:

$$\hat{N}(Q) = \hat{I} \otimes \hat{N}, \quad (4.54)$$

$$\hat{D}(Q) = \hat{I} \otimes \hat{D}. \quad (4.55)$$

En este caso tenemos, $\varepsilon(Q) = \|\mathbf{N}_\xi\|$ y $\eta(P) = \|\mathbf{D}_\xi\|$, tal que cada medición con intervención independiente tiene ruido y perturbación cuadrática media constante. Entonces de las ecuaciones (4.54) y (4.55) tenemos:

$$[\hat{N}(Q), \hat{P}(0)] = [\hat{Q}(0), \hat{D}(P)] = 0, \quad (4.56)$$

entonces, cada medición con una intervención independiente satisface la ecuación (4.2) para cada estado de entrada ψ y cada estado ξ del aparato sin requerir la equipredictividad. Lo que sugiere que la equipredictividad no es un requisito esencial para que una medición satisfaga la relación de Heisenberg comparado con la independencia del error y la perturbación del sistema medido. Como estudiamos anteriormente en la sección 4.2, von Neumann construyó el primer modelo cuántico de la medición de la posición. Vimos que su modelo de medición se describe por el Hamiltoniano: $\hat{H} = K(\hat{Q} \otimes \hat{P}_0)$, como la ec. (4.7). Que acopla la posición Q de la masa y el momento \hat{P}_0 de la sonda con constante de acoplamiento K que satisface $K \Delta t = 1$. Entonces, tomando la sonda de posición como el medidor, es decir $M = \hat{Q}_0$, la evolución temporal $\hat{U} = \exp\left(\frac{-i\Delta t \hat{H}}{\hbar}\right)$ determina la relación de entrada–salida

$$\hat{M}(\Delta t) = \hat{Q}(0) + (\hat{I} \otimes \hat{Q}_0), \quad (4.57)$$

$$\hat{P}(\Delta t) = \hat{P}(0) - (\hat{I} \otimes \hat{P}_0), \quad (4.58)$$

entonces, este modelo tiene intervención independiente con $\hat{N}(Q) = \hat{I} \otimes \hat{Q}_0$ y $D(P) = -\hat{I} \otimes \hat{P}_0$, por lo tanto, la ecuación (4.2) se sostiene. Asumiendo que la posición promedio de la sonda esta inicialmente en el origen, el error raíz cuadrático medio constante $\varepsilon(Q) = \sigma(\hat{Q}_0)$ juega un rol análogo de "resolución de potencia" de mediciones microscópicas. Entonces la ecuación (4.2) sigue directamente de la relación $\sigma(\hat{Q}_0)\sigma(\hat{P}_0) \geq \frac{\hbar}{2}$.

4.4.2 Violación a la relación de Heisenberg

Para estados de entrada finitamente accesibles, o sea que las desviaciones estándar $\sigma(\hat{Q})$ y $\sigma(\hat{P}) < \infty$, la ecuación (4.52) excluye la posibilidad de tener simultáneamente $\varepsilon(Q) = 0$ y $\eta(P) = 0$. Sin embargo, es posible lograr $\eta(P) = 0$ uniformemente sobre cualquier estado a la entrada [52] o alternativamente tener $\varepsilon(Q) = 0$. En ambos casos, la ecuación (4.2) es violada al tener $\varepsilon(Q)\eta(P) = 0$. El primer tipo de violación puede obtenerse reformulando el experimento Einstein–Podolsky–Rosen [55]. Considerando que el sistema a medir está compuesto por dos partículas unidimensionales 1 y 2 con posiciones Q_1, Q_2 y momentos P_1 y P_2 , respectivamente. Adicionalmente suponiendo un proceso de medición de Q_1 ; asumimos que el dispositivo de medición está acoplado solo con la partícula 2 para medir con precisión Q_2 , pero luego la salida de este valor medido Q_2 como el resultado de medir indirectamente Q_1 . Además, la interacción de esta medición no perturba P_1 , así que $\eta(P_1) = 0$. También podemos demostrar que $\varepsilon(Q_1)^2 = \langle (Q_1 - Q_2)^2 \rangle$ para cualquier estado. Por otro lado, para valores pequeños $\alpha > 0$. Podemos preparar un estado de dos partículas ψ tal que $\langle (Q_1 - Q_2)^2 \rangle < \alpha^2$. En todos esos estados, podemos medir Q_1 con $\varepsilon(Q_1) < \alpha$ sin perturbar P_1 . El segundo tipo de violaciones están caracterizadas por la condición $N(Q) = 0$. Entonces la relación de entrada–salida de tal medición se caracteriza por:

$$\hat{M}(\Delta t) = \hat{Q}(0), \quad (4.59)$$

$$\hat{P}(\Delta t) = \hat{P}(0) + \hat{D}(P). \quad (4.60)$$

En general cada medición está asociada con la probabilidad del operador POVM $\hat{\Pi}$, que asigna cada intervalo Δ a un operador positivo $\hat{\Pi}(\Delta)$ en el espacio de estados del objeto a medir. El operador POVM determina la probabilidad de obtener el resultado x de la medición en un intervalo Δ con estado a la entrada ψ , que está dada por $\Pr\{x \in \Delta\} = \langle \psi, \hat{\Pi}(\Delta) \psi \rangle$. Entonces, por la ecuación (4.59) la violación es del segundo tipo sí y solo sí, para cualquier intervalo Δ el operador de medición $\hat{\Pi}(\Delta)$ es la proyección de Q correspondiente a Δ . Se puede evitar el error de Heisenberg distinguiendo de dónde surge la información que obtenemos sobre un estado. Hay fundamentalmente dos posibilidades, vía preparación de estados, o podemos comprobar las propiedades a través de mediciones. En el formalismo estos dos aspectos se representan de manera diferente, es decir, por

un lado, la preparación a través de un operador de densidad (o en el caso más simple una función de onda) y, por otro lado, la medición a través de un operador POVM. Heisenberg no llega a esta distinción e identifica prematuramente la información de estas fuentes. Al respetar esta distinción, se consideran dos escenarios diferentes para relaciones cuantitativas de incertidumbre. En el lenguaje de la teoría de la Información Cuántica, se puede decir que la información se codifica en el sistema cuántico a través de la preparación de estados, que luego se lee a través de mediciones. Esta visión de la Mecánica Cuántica ha conducido a nuevos desarrollos y ha planteado nuevas preguntas.

4.5 Relación de error-perturbación de Branciard.

Durante el desarrollo de la teoría cuántica han surgido intensos debates. Entre las características más sorprendentes de la teoría cuántica (por ejemplo, su naturaleza probabilística, el principio de incertidumbre, su no-localidad o el enredamiento cuántico). Desde entonces el principio de incertidumbre ha tratado de comprender lo que parecían ser las limitaciones de la teoría—la imposibilidad de predecir perfectamente los resultados de medición y explicarlos con teoría de variables ocultas locales— Con el desarrollo de la Información Cuántica se vuelve aún más esencial aclarar lo que puede ser y lo que no puede ser en Mecánica Cuántica. En 2003 [52] Ozawa demostró, usando las definiciones de error y perturbación (4.38) y (4.41), cómo podemos derivar una relación de incertidumbre con validez universal para mediciones conjuntas:

$$\varepsilon(A)\eta(B) + \frac{1}{2} \left| \langle [\widehat{N}(A), \widehat{B}] \rangle + \langle [\widehat{A}, \widehat{D}(B)] \rangle \right| \geq |C|, \quad (4.61)$$

dónde $C = \frac{1}{2} \left| \langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle \right|$. Similar a las ecuaciones (4.20) y (4.21), cuando $\widehat{N}(A)$ y $\widehat{D}(B)$ ambos son valores constantes independientes del estado, es decir,

$$\langle \widehat{N}(A) \rangle = \langle \widehat{M}_A \rangle - \langle \widehat{A} \rangle = \alpha, \quad (4.62)$$

$$\langle \widehat{D}(B) \rangle = \langle \widehat{M}_B \rangle - \langle \widehat{B} \rangle = b, \quad (4.63)$$

el segundo y el tercer término de (4.61) desaparecen. Entonces en este caso la ecuación (4.61) se reduce a la relación de Heisenberg (4.2). Si $\widehat{M}_A - \alpha$ y $\widehat{M}_B - b$, se redefinen como \widehat{M}_A y \widehat{M}_B , respectivamente, obtenemos:

$$\langle \widehat{M}_A \rangle - \langle \widehat{A} \rangle = 0, \quad (4.64)$$

$$\langle \widehat{M}_B \rangle - \langle \widehat{B} \rangle = 0, \quad (4.65)$$

que son las condiciones de imparcialidad de las mediciones de \hat{M}_A y \hat{M}_B . Entonces la ec. (4.61) es una generalización de la relación de Heisenberg especificando la condición de formación de la relación de Heisenberg. La expresión (4.52), de forma general, Ozawa derivó la relación entre el error de medición, la perturbación y las desviaciones estándar como:

$$\varepsilon(A)\eta(B) + \varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq C. \quad (4.66)$$

Podemos observar que el lado izquierdo de las ecuaciones (4.61) y (4.66) contienen dos términos adicionales que están ausentes en la relación de Heisenberg (4.2) por otro lado, el lado derecho las ecuaciones es el mismo. Entonces, el término $\varepsilon(A)\eta(B)$ por sí mismo puede ser más pequeño que el lado derecho de la desigualdad, sugiriendo que es posible violar la relación de Heisenberg. Ecuaciones (4.61) y (4.66) que tienen validez universal, son relaciones más generales que incluyen la relación de Heisenberg como un caso particular. Por ejemplo, el lado izquierdo de la ec. (4.66) siempre es mayor que el lado derecho. Puede ser ajustado solo para los casos donde $\varepsilon(A) = 0$ ó $\eta(B) = 0$ [52]. En 2013 basado en las definiciones de error de medición y perturbación, ecuaciones (4.38) y (4.41) Branciard derivó una relación más fuerte [56].

$$\varepsilon(A)^2\sigma(B)^2 + \sigma(A)^2\eta(B)^2 + 2\varepsilon(A)\eta(B)\sqrt{\sigma(A)^2\sigma(B)^2 - C^2} \geq C^2. \quad (4.67)$$

Existen casos donde se alcanza la igualdad, para mediciones conjuntas generales de \hat{A} y \hat{B} . Una expresión más simple de esta ecuación es:

$$\varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq C, \quad (4.68)$$

que es solo el segundo y tercer término de la relación de Ozawa (4.66). Por lo tanto, la relación de Branciard (4.67) es más fuerte que la relación de Ozawa (4.66)

$$\tilde{\varepsilon}(A)^2 + \tilde{\eta}(B)^2 + 2\tilde{\varepsilon}(A)\tilde{\eta}(B)\sqrt{1 - C^2} \geq C^2, \quad (4.69)$$

dónde $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ y $\tilde{\eta} = \eta\sqrt{1 - \eta^2/4}$. La relación (4.69) es válida cuando, como en el caso de la medición de polarización de fotones, el espectro de \hat{A} , \hat{B} y \hat{M} son todos ± 1 , y $\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{B} \rangle = 0$. Por lo tanto $\sigma(A) = \sigma(B) = 1$. Las relaciones de Branciard (4.67) y (4.69) pueden ser modificadas a relaciones más generales incluso para estados mixtos de una señal. Para hacerlo reemplazamos $C = \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$ en (4.69) y (4.67) con D :

$$C \rightarrow D = \frac{1}{2} \text{Tr} \left| \sqrt{\rho} [\hat{A}, \hat{B}] \sqrt{\rho} \right|, \quad (4.70)$$

dónde ρ es el operador de densidad del estado de entrada.

Capítulo 5.

El significado de los Valores Débiles

Este capítulo está dedicado a la discusión del significado de valores débiles en Mecánica Cuántica, así como la definición operativa del concepto de valores débiles. El objetivo es estudiar el origen y motivaciones de las más interesantes interpretaciones de mediciones y valores débiles.

5.1 Simetría temporal en mecánica cuántica.

Debido a que el inicio del concepto de valores débiles reside en una formulación simétrica en el tiempo de la Mecánica Cuántica, la discusión de la interpretación de valores débiles comienza con una breve explicación de este enfoque.

5.1.1 El formalismo del vector de dos estados

El concepto de simetría temporal en Mecánica Cuántica fue introducido por Aharonov, Bergmann y Lebowitz [49], mediante los conceptos de pre y post-selección de estados, donde se señala que la mayoría de las leyes de la física clásica son simétricas en el tiempo o en otras palabras son invariantes de forma bajo inversión temporal. Comparando con la Mecánica Cuántica, la evolución estándar expresada por la ecuación de Schrödinger comparte esta propiedad y de hecho describe procesos reversibles y determinísticos. Es solamente la reducción de la función de onda introducida por los postulados de medición, lo que constituye un proceso irreversible, rompiendo la simetría temporal, von Neumann sugirió que la asimetría en la dirección del tiempo e incluso la irreversibilidad termodinámica entran en la teoría cuántica a través de mediciones. Por lo tanto, el formalismo del vector de dos estados o por su acrónimo en inglés Two-State Vector Formalism (TSVF) es un enfoque simétrico en el tiempo para el análisis de experimentos realizados en ensambles pre y post seleccionados. Es importante comprender la simetría temporal de la naturaleza descrita por la Mecánica Cuántica. El formalismo del vector de dos estados en Mecánica Cuántica es un enfoque simétrico en el tiempo particularmente útil para el análisis de experimentos realizados en conjuntos pre y post seleccionados. Un sistema en un tiempo dado t , se describe completamente por un vector de dos estados $\langle\phi| |\psi\rangle$, el cual consiste en un estado cuántico $|\psi\rangle$ definido por los resultados de las mediciones realizadas en el sistema en el pasado en relación con el tiempo t y de un estado cuántico en evolución hacia atrás $\langle\phi|$ definido por los resultados de las mediciones realizadas en este sistema después del tiempo t . La descripción del sistema con el formalismo TSVF es claramente diferente de la descripción de un solo estado cuántico, pero ambos casos proporcionan información máxima sobre como este sistema puede afectar otros sistemas, en particular dispositivos de medición interactuando con él sistema a un tiempo t . Los dos formalismos describen la misma teoría con las mismas predicciones y la principal diferencia es que en el enfoque estándar el tiempo es asimétrico y supone que solo existen resultados de mediciones en el pasado. Lo más intuitivo bajo este enfoque es que, si los resultados de mediciones futuras relativas al tiempo t también existen,

entonces el “ahora” es después de un tiempo t y no podemos regresar en el tiempo para realizar mediciones en t , por lo tanto, tener en cuenta resultados de mediciones futuras no es útil. En contraste en el enfoque TSVF el tiempo es simétrico. No hay preferencia para el resultado de las mediciones en el pasado en relación con los resultados de mediciones en el futuro [10]. El concepto de asimetría en el tiempo está definido por los resultados de mediciones realizadas en el pasado relativo a t , donde las mediciones en el futuro son definidas por los resultados del pasado. En la dinámica cuántica se trata con la evolución de un estado cuántico $|\psi(t_1)\rangle \rightarrow |\psi(t_2)\rangle$, mediante una transformación unitaria:

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_1, t_2) |\psi(t_1)\rangle, \quad (5.1)$$

las transformaciones unitarias $\hat{U}(t_m, t_n)$ satisfacen la propiedad de grupo:

$$\hat{U}(t_3, t_1) = \hat{U}(t_3, t_2) \hat{U}(t_2, t_1). \quad (5.2)$$

Entonces el sistema en el estado $|\psi\rangle$ se obtiene cuando una medición de un observable \hat{A} al tiempo t_1 se realiza, $t_1 < t$, obteniendo un resultado específico $\hat{A} = a$ tal que el estado creado $|a\rangle$ realiza una evolución unitaria entre t_1 y t gobernado por el Hamiltoniano \mathcal{H}

$$\hat{U}(t_1, t) = e^{-i \int_{t_1}^t \hat{H} dt}, \quad (5.3)$$

al estado deseado: $|\psi\rangle = \hat{U}(t_1, t) |a\rangle. \quad (5.4)$

El estado $|\psi\rangle$ proporciona la descripción completa del sistema al tiempo t hasta que se realicen las futuras mediciones en el sistema produciendo información adicional.

5.1.2 El vector de dos estados

Para tener un sistema en un tiempo t relativo presente es decir “ahora” cuya descripción completa en el tiempo t es un vector de dos estados, simétrico en el tiempo, se debe hacer una medición completa en el pasado del tiempo t (preselección) y una medición completa del futuro después del tiempo t (post-selección) además de la medición $\hat{A} = a$ al tiempo t_1 , debe haber una medición completa en t_2 , considerando $t_2 > t$ y obteniendo un resultado específico $\hat{B} = b$ tal que la evolución hacia atrás en el tiempo, desde t_2 a t nos deja el estado deseado:

$$\langle\phi| = \langle b|\hat{U}^\dagger(t, t_2), \quad (5.5)$$

El momento ahora, t_{ahora} es claramente mayor que t_2 . El vector de dos estados $\langle\phi| |\psi\rangle$ es la descripción completa del sistema al tiempo t a partir del tiempo t_2 y para cualquier tiempo t .

5.2 Mediciones ideales de von Neumann

El concepto básico de una medición cuántica ideal de un observable \hat{A} , es la ecuación de eigenvalores, definida para los sistemas cuánticos preseleccionados de la siguiente manera: sí el estado de un sistema cuántico antes de la medición estaba en un eigenestado de \hat{A} con un eigenvalor a_n , entonces el resultado de la medición es a_n y el estado cuántico del sistema no cambia. La implementación estándar de la ' medición cuántica ideal es modelada por el hamiltoniano de interacción de von Neumann,

$$\hat{H} = g(t)\hat{P}_d \otimes \hat{C}, \quad (5.6)$$

Dónde el operador \hat{P}_d , es el momento canónico conjugado de la variable de posición \hat{Q} , y la función acoplada normalizada $g(t)$, determina el tiempo de interacción de la medición. Por lo tanto, el resultado de la medición es el desplazamiento de la variable de posición \hat{Q} en una medición ideal, la función $g(t)$ no es cero solamente durante un periodo de tiempo muy corto, y el hamiltoniano libre durante este periodo de tiempo puede ser despreciado. En una medición ideal, la posición del puntero \hat{Q} está bien localizada al rededor del cero y por lo tanto el momento conjugado \hat{P}_d tiene una incertidumbre muy grande lo que conduce a una gran incertidumbre en el hamiltoniano de la medición. En una medición débil, el estado inicial del dispositivo de medición es tal que el operador de momento \hat{P}_d se localiza alrededor de cero con poca incertidumbre. Esto conduce, por supuesto, a una gran incertidumbre en \hat{Q} , y por lo tanto la medición se vuelve imprecisa. La idea de las mediciones débiles es hacer que el acoplamiento con el dispositivo de medición sea suficientemente débil para que se pueda despreciar el cambio del estado cuántico debido a la medición. De hecho, requerimos que el vector de dos estados no sea alterado. Ni el estado cuántico que evoluciona hacia adelante en el tiempo, ni el estado cuántico que evoluciona hacia atrás en el tiempo cambian significativamente. Entonces el resultado de la medición debería verse afectado por ambos estados y el resultado de una medición débil de una variable \hat{A} realizada en un sistema descrito por el vector de dos estados. $\langle \phi | | \psi \rangle$ es el valor débil de \hat{A}

$$\hat{A}_\omega = \frac{\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle}. \quad (5.7)$$

Estrictamente hablando, las lecturas del puntero del dispositivo de medición se agruparán alrededor de la parte real $\text{Re}(\hat{A}_\omega)$, para encontrar $\text{Im}(\hat{A}_\omega)$ uno debe medir el cambio de fase en \hat{P}_d .

5.3 Valores débiles

Ahora consideramos el caso en donde después de una medición débil, el sistema cuántico se encuentra en un estado final $|\psi'\rangle = \sum_k c'_k |a_k\rangle$ definido por un proceso de post-selección de estados [40]. Esto deja al aparato en el estado $|D'\rangle$ dado por la expresión:

$$|D'\rangle = \langle\psi'|\phi\rangle = \sum_k c'_k{}^* c_k \int \langle p|\hat{T}(\hat{G}a_k)|D\rangle|p\rangle dp, \quad (5.8)$$

asumiendo que $|D\rangle$ está ahora en un estado puro, la transformación:

$$\hat{T}(\hat{G}a_k) = \sum_n^\infty \frac{[iGa_k\hat{q}/\hbar]^n}{n!}, \quad (5.9)$$

$$|D'\rangle = \sum_k c'_k{}^* c_k \hat{T}(\hat{G}a_k)|D\rangle, \quad (5.10)$$

expandiendo la serie de potencias encontramos la definición del valor débil.

$$\sum_k c'_k{}^* c_k \hat{T}(\hat{G}a_k) = \sum_k c'_k{}^* c_k \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} Ga_k\hat{q} + \sum_2^\infty \frac{[iGa_k\hat{q}/\hbar]^n}{n!} \right\}, \quad (5.11)$$

luego multiplicando por un 1, en forma de: $\frac{c'_k{}^* c_k}{c'_k{}^* c_k}$

$$\sum_k c'_k{}^* c_k \hat{T}(\hat{G}a_k) = \sum_k c'_k{}^* c_k \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} G\hat{q}\hat{A}_\omega + \sum_2^\infty \frac{[iG\hat{q}/\hbar]^n}{n!} \hat{A}_\omega^n \right\}, \quad (5.12)$$

dónde el valor débil es:

$$\hat{A}_\omega^n = \frac{\sum_k c'_k{}^* c_k a_k^n}{\sum_k c'_k{}^* c_k} = \frac{\langle\psi'|\hat{A}^n|\psi\rangle}{\langle\psi'|\psi\rangle}, \quad (5.13)$$

\hat{A}_ω puede estar muy lejos del espectro de eigenvalores de \hat{A} cuando $\langle\psi'|\hat{A}^n|\psi\rangle$ no es despreciable y $|\psi'\rangle$ es casi ortogonal a $|\psi\rangle$. El efecto Aharonov puede ser observado cuando la siguiente aproximación es válida:

$$\sum_k c'_k{}^* c_k \hat{T}(\hat{G}a_k) \approx \left\{ \sum_k c'_k{}^* c_k \right\} \hat{T}(\hat{G}\hat{A}_\omega), \quad (5.14)$$

tal que:

$$|D'\rangle \approx \left\{ \sum_k c'_k{}^* c_k \right\} \int \langle p|\hat{T}(\hat{G}\hat{A}_\omega)|D\rangle|p\rangle dp \quad (5.15)$$

y

$$|\langle p|D'\rangle|^2 \approx \left| \sum_k c'_k{}^* c_k \right|^2 |\langle p|\hat{T}(\hat{G}\hat{A}_\omega)|D\rangle|^2. \quad (5.16)$$

Esto corresponde a una distribución de amplitudes con un solo pico \hat{A}_w y ocurre cuando se satisfacen las condiciones,

$$\Delta q \ll \frac{\hbar}{G} |\hat{A}_w|^{-1} \quad \text{y} \quad \Delta q \ll \min_{(n=1,2,3 \dots)} \left(\frac{\hbar}{G} \right) \left| \frac{\hat{A}_w}{\hat{A}_\omega^n} \right|^{1/(n-1)}. \quad (5.17)$$

Estos requisitos definen lo que llamaremos condiciones de debilidad [40]. De hecho, cuando estas condiciones no se cumplen, entonces $\sum_k c'_k{}^* c_k \hat{T}(\hat{G}a_k)$ es inválido y $|\langle p | D' \rangle|^2$ ya no muestra un solo pico por tanto el efecto Aharonov desaparece. Siempre que el sistema haya sido preseleccionado y el estado del aparato sea representado como una superposición de estados con una incertidumbre Δp suficientemente grande, entonces aparecen franjas de interferencia en $|\langle p | D' \rangle|^2$ [40] [43].

Desde su introducción hace más de 33 años el concepto de valor cuántico débil ha pasado gradualmente de ser una simple curiosidad teórica a ser una herramienta práctica de laboratorio. Su interpretación ha sido históricamente un tema de confusión. A partir de la literatura es posible definir tres roles fundamentales en los experimentos de valores débiles. En primer lugar, su rol como parámetro de evolución, un valor débil grande puede ayudar a amplificar la señal de una detección y habilitar la estimación sensible de parámetros de evolución desconocidos, como la desviación de un haz de luz, cambios de frecuencia, cambios de fase, cambios temporales e incluso cambios en la temperatura [29], [30], [31]. Segundo, su rol como un número complejo cuyas partes real e imaginaria se pueden medir, el valor débil ha alentado nuevos métodos para la medición directa de estados cuánticos [32], [33] y fases geométricas [34], [35]. Estos métodos expresan cantidades teóricas abstractas como estados cuánticos en términos de valores débiles complejos que pueden ser medidos experimentalmente. Notablemente las componentes real e imaginaria de un estado cuántico en una base particular pueden ser determinadas directamente con un mínimo procesamiento de postselección usando esta técnica de medición débil. En tercer lugar, como promedio condicionado de eigenvalores observables generalizados, la parte real del valor débil proporciona una medición a las características no clásicas en Mecánica Cuántica. Los promedios condicionados fuera del rango normal de eigenvalores han sido relacionados con paradojas como la paradoja de Hardy [26], [27] y [28] la paradoja de las tres cajas, así como la violación generalizada de las desigualdades de Leggett-Garg [36] que indican un comportamiento no clásico. Los promedios condicionados han sido utilizados experimentalmente para medir cantidades físicamente significativas incluyendo velocidades de grupo superluminal en fibras ópticas [37].

5.4 ¿Cómo es que surge este valor débil?

El enésimo valor débil de un observable, ec. (5.13) $\hat{A} \rightarrow \hat{A}_w^n = \frac{\langle f | \hat{A}^n | i \rangle}{\langle f | i \rangle}$

Es necesario considerar primero, que tenemos un estado inicial $| i \rangle$ y queremos conocer la probabilidad de que este estado evolucione a un estado final $| f \rangle$ también conocido como estado de postselección, entonces,

$$P = | \langle f | i \rangle |^2 = \langle f | i \rangle \langle i | f \rangle. \quad (5.18)$$

Es la probabilidad de la detección de un evento en este estado final $| f \rangle$. Ahora sí consideramos que el estado inicial sufre una pequeña perturbación, de forma que perturbamos el sistema una pequeña cantidad tal que el estado inicial evoluciona por un operador unitario infinitesimal $| f \rangle \rightarrow U(\epsilon) | i \rangle$. Entonces nos interesamos ahora en analizar esta nueva probabilidad de obtener la detección de tal estado final desarrollando la siguiente expresión:

$$P_\epsilon = | \langle f | U(\epsilon) | i \rangle |^2, \quad (5.19)$$

dónde el operador unitario, $\hat{U}(\epsilon) = e^{-i\epsilon\hat{A}}$ actuando sobre un operador Hermítico \hat{A} . Entonces checamos la transición de probabilidad del estado $| i \rangle$ al estado $| f \rangle$ dada por:

$$P_\epsilon = | \langle f | e^{-i\epsilon A} | i \rangle |^2 = \langle f | (1 - i\epsilon A - \epsilon^2 A^2/2) | i \rangle \langle i | (1 + i\epsilon A - \epsilon^2 A^2/2) | f \rangle, \quad (5.20)$$

$$P_\epsilon = \langle f | i \rangle \langle i | f \rangle + i\epsilon \langle f | i \rangle \langle i | A | f \rangle - \frac{\epsilon^2}{2} \langle f | i \rangle \langle i | A^2 | f \rangle - \epsilon \langle f | A | i \rangle \langle i | f \rangle - i^2 \epsilon^2 \langle f | A | i \rangle \langle i | A | f \rangle - \frac{\epsilon^2}{2} \langle f | A^2 | i \rangle \langle i | f \rangle. \quad (5.21)$$

Ignorando las contribuciones de más alto orden y dividiendo toda la expresión entre la probabilidad P, ec. (5.22):

$$\frac{P_\epsilon}{P} = 1 + i\epsilon \left[\frac{\langle f | A | i \rangle}{\langle f | i \rangle} - \frac{\langle i | A | f \rangle}{\langle i | f \rangle} \right] + \epsilon^2 \left[\frac{\langle f | A | i \rangle \langle i | A | f \rangle}{\langle f | i \rangle \langle i | f \rangle} - \frac{1}{2} \left[\frac{\langle f | A^2 | i \rangle}{\langle f | i \rangle} + \frac{\langle i | A^2 | f \rangle}{\langle i | f \rangle} \right] \right],$$

y usando el hecho de que:

$$\left. \begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\text{Re}(z), \\ z - \bar{z} &= 2i\text{Im}(z), \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

$$\frac{P_\epsilon}{P} = 1 + i\epsilon \text{Im}(\hat{A}_w^1) + \epsilon^2 \left[|\hat{A}_w^1|^2 + 2\text{Re}(\hat{A}_w^2) \right]. \quad (5.24)$$

Aquí llegamos a la definición operacional: los valores débiles caracterizan la corrección relativa a la probabilidad de detección $|\langle f | i \rangle|^2$ debido a una pequeña perturbación infinitesimal $\hat{U}(\epsilon)$ que resulta en una probabilidad de detección modificada $|\langle f | \hat{U}(\epsilon) | i \rangle|^2$. Cuando los términos de más alto orden son despreciados, obtenemos una relación lineal entre la corrección de probabilidad y el valor débil de primer orden, el cual llamamos régimen de interacción débil. En contraste con los valores esperados normales de la Mecánica Cuántica, los valores débiles no están restringidos a estar dentro del espectro de eigenvalores o a ser números reales. La controversia es solo en la interpretación de estos extraños resultados, que han sido probados en diversos experimentos ópticos [39]. Después de la postselección del estado final $|f\rangle$, definimos la medición fuerte como la medición proyectiva $|\tilde{\Psi}_m\rangle = \hat{M}_m |\Psi\rangle$, donde el estado $|\Psi\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_d\rangle$ y el proyector de medición $\hat{M}_m = |f\rangle\langle f|$, entonces:

$$|\tilde{\Psi}_f\rangle = |f\rangle\langle f| [e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_d\rangle], \quad (5.25)$$

$|\tilde{\Psi}_f\rangle = |f\rangle\langle f| (1 - i(\hat{A} \otimes \hat{P}_d)t/\hbar) |i\rangle \otimes |\phi(x)\rangle_d$, expandiendo la función exponencial en serie de potencias y despreciando los términos de alto orden e identificando el valor débil de \hat{A} , tenemos:

$$|\tilde{\Psi}_f\rangle = |f\rangle \otimes \langle f | i \rangle - i \langle f | i \rangle \frac{\langle f | \hat{A} | i \rangle}{\langle f | i \rangle} \hat{P}_d t / \hbar |\phi(x)\rangle_d, \quad (5.26)$$

$$|\tilde{\Psi}_f\rangle = |f\rangle \otimes \langle f | i \rangle (1 - i \langle \hat{A}_w^1 \rangle \hat{P}_d t / \hbar) |\phi(x)\rangle_d, \quad (5.27)$$

finalmente reescribimos:

$$|\tilde{\Psi}_f\rangle = |f\rangle \otimes \langle f | i \rangle e^{-i \langle \hat{A}_w^1 \rangle \hat{P}_d t / \hbar} |\phi(x)\rangle_d, \quad (5.28)$$

dónde la expresión completa de la expansión de Taylor está dada por el enésimo término del valor débil $\langle \hat{A}_w^n \rangle$.

5.5 Energía débil.

Ahora para introducir el concepto de energía débil y constantes de movimiento débiles, es necesario analizar la dinámica del valor débil, por lo tanto,

calculamos la derivada en el tiempo de $\hat{A}_w = \frac{\langle \psi' | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi' | \psi \rangle}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_w}{dt} &= \left\{ \left(\frac{d\langle \psi' |}{dt} \right) \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi' | \frac{d\hat{A}}{dt} | \psi \rangle + \langle \psi' | \hat{A} \left(\frac{d|\psi\rangle}{dt} \right) \right\} \langle \psi' | \psi \rangle^{-1} \\ &\quad - \langle \psi' | \hat{A} | \psi \rangle \left\{ \left(\frac{d\langle \psi' |}{dt} \right) | \psi \rangle + \langle \psi' | \left(\frac{d|\psi\rangle}{dt} \right) \right\} \langle \psi' | \psi \rangle^{-2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle \text{ y } i\hbar \frac{d\langle\psi'|}{dt} = -\langle\psi'|\hat{H}', \quad (5.30)$$

y sustituyendo:

$$i\hbar \frac{d\hat{A}_w}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]_w + i\hbar \left(\frac{d\hat{A}}{dt}\right)_w + \hat{A}_w(\hat{H}' - \hat{H})_w, \quad (5.31)$$

donde,
$$[\hat{A}, \hat{H}]_w = (\hat{A}\hat{H} - \hat{H}'\hat{A})_w. \quad (5.32)$$

La dependencia temporal de \hat{A}_w surge de considerar de mediciones débiles echas en varios tiempos t para sistemas donde las mediciones de preselección y post-selección en t_1 y t_2 también varían de tal forma que los intervalos $t - t_1$ y $t - t_2$ permanecen positivos. De hecho, podemos comparar esta ecuación con la expresión de la evolución temporal del valor esperado de un observable dinámico de Heisenberg y es evidente que resulta exactamente la misma expresión salvo un término, correspondiente a la energía débil de la interacción. Además, si suponemos que el término $\frac{d\hat{A}_w}{dt}$ desaparece, entonces \hat{A} es una constante débil de movimiento y esto ocurre cuando $\hat{H} = \hat{H}'$. El valor débil del observable \hat{A}_w también es constante, cuando las mediciones de los estados de preselección y post-selección son fijos y el operador \hat{A} no depende explícitamente del tiempo. Finalmente, el peculiar factor $(\hat{H}' - \hat{H})_w$ es la energía débil de la interacción. Se origina de la dependencia temporal de la medición de estados de preselección y post-selección y no desaparece solo cuando esta dependencia temporal exista y $\hat{H}' \neq \hat{H}$. Además, sí el valor débil \hat{A}_w es un número real, entonces la energía débil es un número imaginario puro [40]. Tratando el estado final de un medio absorbivo como la post selección, el aumento de energía del medio absorbivo es el valor débil del Hamiltoniano de traslación y la distribución de energía del fotón cambia por una cantidad opuesta. La medición débil de sistemas cuánticos es una configuración especial en donde un sistema se mide de tal forma que se obtiene muy poca información mediante el dispositivo de medición, mientras que el estado del sistema apenas es perturbado, no colapsa, es un área sutil en Metrología Cuántica. Una medición débil, seguida de una medición proyectiva del sistema, induce cierta interferencia en el dispositivo de medición, lo que hace que la lectura promedio este dada por el valor débil del observable del sistema. La debilidad de la interacción se logra preparando el estado inicial del dispositivo de medición de tal manera que el momento conjugado de la variable del puntero del dispositivo de medición, P , sea pequeño y, por tanto, la interacción del Hamiltoniano también sea pequeña. Mediciones débiles en conjuntos de sistemas preseleccionados y post-seleccionados arrojan, en lugar de eigenvalores, un valor

que podría estar muy por afuera del rango de eigenvalores permitidos como resultado de la medición. Aunque hemos mostrado este resultado para un modelo específico de mediciones de von Neumann el resultado es completamente general, cualquier acoplamiento de un sistema pre y post seleccionado de una variable A , siempre que el acoplamiento sea lo suficientemente débil, da como resultado un acoplamiento efectivo al valor débil A_w . Este acoplamiento débil entre un solo sistema y el dispositivo de medición, en la mayoría de los casos, no conducirá a un cambio distinguible de la variable de puntero, pero recopilar los resultados de las mediciones en un conjunto de sistemas preseleccionados y post-seleccionados producirá los valores débiles de la variable medida con la precisión deseada. Cuando la fuerza del acoplamiento al dispositivo de medición llega a cero, los resultados de la medición arrojan invariablemente el valor débil de la medición. Para ser más preciso, una medición arroja la parte real del valor débil. De hecho, los valores débiles son en general números complejos y su parte imaginaria solo contribuirá en una fase (dependiente de la posición) a la función de onda del dispositivo de medición en la representación de la posición del puntero. Por lo tanto, la parte imaginaria no afectará la distribución de probabilidad de la posición del puntero que es lo que vemos en una medición habitual. Sin embargo, la parte imaginaria del valor débil tiene también significado físico. Es igual al cambio de la función de onda Gaussiana del dispositivo de medición en la representación de momento. Entonces medir el cambio del momento del puntero nos dejara la parte imaginaria del valor débil.

Capítulo 6.

Medición de polarización de fotones.

6.1 Modelo de Medición indirecta

Si consideramos mediciones cuánticas finitas en las cuales el sistema a ser medido S se describe por un espacio de Hilbert de dimensión finita y el aparato de medición $A(x)$ tiene solamente un número finito de resultados. Y, además, asumiendo que cada medición del aparato con variable de salida x , determina la distribución de probabilidad $\Pr\{x = m|\rho\}$ de la salida x en cada estado de entrada ρ y determina el estado de salida $\rho_{\{x=m\}}$ para cada estado de entrada ρ condicionado a cada salida posible $x = m$. Para definir un modelo de medición indirecta de un aparato $A(x)$ midiendo un sistema S descrito por un estado $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} se especifica la cuádrupla $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ que consiste de un espacio de Hilbert \mathcal{K} describiendo una sonda P , un vector de estado $|\xi\rangle$ en \mathcal{K} que describe el estado inicial de P , un operador unitario U en el espacio $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, describiendo la evolución temporal del sistema compuesto $S + P$ durante la interacción de la medición y un observable M , llamado medidor observable de P que describe la medición del aparato de medición, [19] [50] o precisamente la cantidad P a ser medida después de la interacción de medición por un observador externo que no interactúa con el estado del sistema S . La clase de modelos de medición indirecta es una clase universal de modelos de medición cuántica [50], [51] en el sentido de que para cualquier aparato $A(x)$ con la variable de salida x hay un modelo de medición $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ que determina las propiedades estadísticas de $A(x)$ por:

$$\Pr\{x = m|\rho\}\rho_{\{x=m\}} = Tr_K[U^\dagger(I \otimes E^M(m))U(\rho \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)], \quad (6.1)$$

donde Tr_K representa la traza parcial sobre K y $E^M(m)$ es la proyección espectral de M correspondiente al número real m . De la ecuación anterior tenemos: $\Pr\{x = m|\rho\} = Tr[U^\dagger(I \otimes E^M(m))U(\rho \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)],$ (6.2)

$$\rho_{\{x=m\}} = \frac{Tr_K[U^\dagger(I \otimes E^M(m))U(\rho \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)]}{Tr[U^\dagger(I \otimes E^M(m))U(\rho \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)]}. \quad (6.3)$$

6.2 Modelo de Medición Generalizada

$$\text{Después de la interacción el estado inicial } |\psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\xi\rangle, \quad (6.4)$$

$$\text{evoluciona como: } |\psi\rangle \xrightarrow{\hat{U}} |\psi'\rangle = \hat{U} (|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle). \quad (6.5)$$

Multiplicando por el operador identidad \hat{I} en la base de $|m\rangle$ dado por:

$$\hat{I} = \sum_m |m\rangle\langle m|. \quad (6.6)$$

El estado $|\psi'\rangle$ después de la interacción, (figura 13) puede ser descompuesto en términos de $|m\rangle$:

$$|\psi'\rangle = \sum_m \langle m| \hat{U} (|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle) |m\rangle = \sum_m (\hat{M}_m |\psi\rangle) \otimes |m\rangle, \quad (6.7)$$

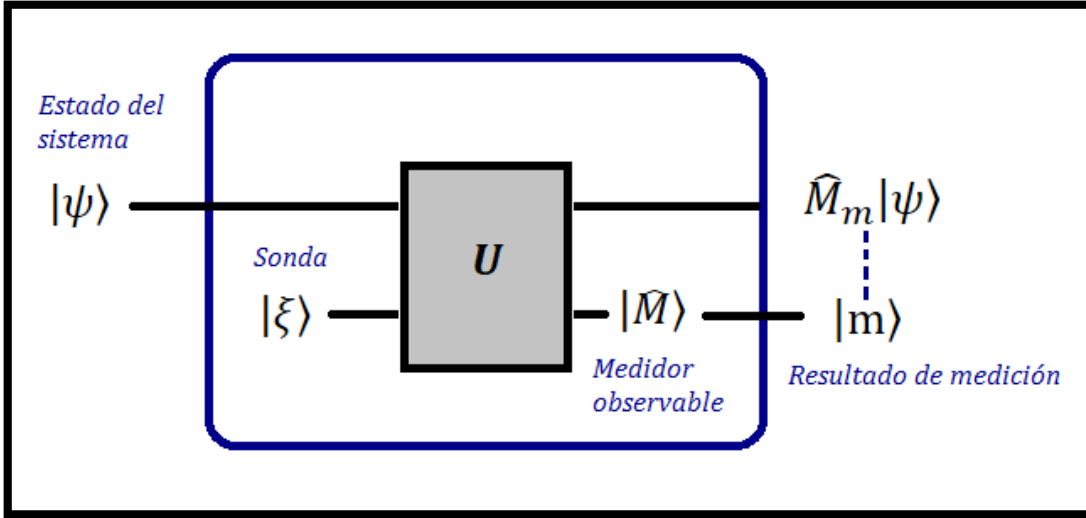


Figura 13. Modelo de medición cuántica indirecta. El estado del sistema $|\psi\rangle$ y el estado de la sonda $|\xi\rangle$ interactúan entre sí a través de un operador unitario \hat{U} , el observable \hat{A} en la señal se puede correlacionar con el observable M en la sonda, para luego medir M en la sonda. Este procedimiento mide indirectamente \hat{A} en la señal.

donde \hat{M}_m es el operador de medición actuando en el estado del sistema $|\psi\rangle$:

$$\hat{M}_m = \langle m | \hat{U} | \xi \rangle, \quad (6.8)$$

la probabilidad de encontrar la sonda en el estado $|m\rangle$ esta dada por:

$$p(m) = \langle \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \rangle = \langle \hat{E}_m \rangle, \quad (6.9)$$

dónde,
$$\hat{E}_m = \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m. \quad (6.10)$$

Y obedece la relación de completitud:
$$\sum_m \hat{E}_m = I. \quad (6.11)$$

6.3 Proceso de medición de polarización de fotones.

Las matrices de Pauli son los observables del qubit de polarización de un fotón individual, con resultados de medición ± 1 , cada uno corresponde a uno de los dos estados ortogonales de polarización donde se encuentra el fotón. Por ejemplo σ_z mide el estado de polarización en $|H\rangle$ o $|V\rangle$ y σ_x mide el estado de polarización en $|D\rangle$ o $|A\rangle$. En Óptica Cuántica el divisor de haz polarizante (PBS) es comúnmente usado para medir la polarización [13]. El divisor de haz transmite la componente paralela al plano de incidencia (componente-P) y refleja la otra componente del campo perpendicular al plano de incidencia (componente-S). A partir de ahora fijaremos nuestro origen de coordenadas de forma que la componente-P sea horizontal y la componente-S sea vertical, es decir que los campos están linealmente polarizados, entonces el divisor de haz

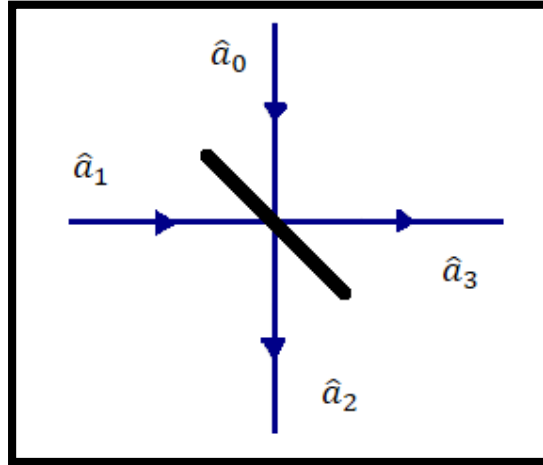


Figura 14. Modos de campo electromagnético de entrada y salida en el divisor de haz.

trata los grados de libertad de polarización (H o V) y los grados de libertad de camino 1 o 2. Los operadores de creación y aniquilación correspondientes a las amplitudes de cada modo satisfacen las relaciones de conmutación canónica:

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^+] = \delta_{j, k} \quad (6.12)$$

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^+] = [\hat{a}_2, \hat{a}_2^+] = [\hat{a}_3, \hat{a}_3^+] = [\hat{a}_4, \hat{a}_4^+] = 1, \quad (6.13)$$

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2^+] = [\hat{a}_3, \hat{a}_4^+] = 0. \quad (6.14)$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión del campo para el modo 1 son r_1 y t_1 mientras que para el modo 2 son r_2 y t_2 .

Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{a}_3 &= r_1 \hat{a}_1 + t_2 \hat{a}_2, \\ \hat{a}_4 &= t_1 \hat{a}_1 + r_2 \hat{a}_2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

La relación entre los operadores de campo en la entrada y a la salida es:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_{H_1} \\ \hat{a}'_{H_2} \\ \hat{a}'_{V_1} \\ \hat{a}'_{V_2} \end{pmatrix} = \hat{U}_{PBS} \begin{pmatrix} \hat{a}_{H_1} \\ \hat{a}_{H_2} \\ \hat{a}_{V_1} \\ \hat{a}_{V_2} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Relacionados por la interacción con el divisor de haz de polarización (PBS)

$$\hat{U}_{PBS} = \begin{bmatrix} \hat{U}_H & 0 \\ 0 & \hat{U}_V \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

con

$$\hat{U}_H = e^{i\varphi} \sigma_0 \quad \text{y} \quad \hat{U}_V = \sigma_x, \quad (6.18)$$

dónde, φ es la diferencia de fase entre las componentes reflejada y transmitida. Podemos asumir que $\varphi = 0$. No hay que olvidar que estamos considerando un sistema de dos qubits, uno correspondiente al estado de polarización y el segundo correspondiente al camino que sigue el fotón. Esto se debe a que hay dos grados de libertad intrínsecos, la polarización y el camino. Una expresión general para el qubit de dos estados es:

$$|\psi\rangle = C_{H1}(|H\rangle \otimes | +1\rangle) + C_{H2}(|H\rangle \otimes | -1\rangle) + C_{V1}(|V\rangle \otimes | +1\rangle) + C_{V2}(|V\rangle \otimes | -1\rangle). \quad (6.19)$$

También podemos observar que el operador \hat{U}_{PBS} actúa como una operación CNOT entre los dos qubits con la polarización como control y el camino como target:

$$\hat{U}_{PBS} = |H\rangle\langle H| \otimes \sigma_0 + |V\rangle\langle V| \otimes \sigma_x, \quad (6.20)$$

$$\hat{U}_{PBS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Podemos utilizar un PBS como dispositivo de medición de polarización utilizando el qubit de camino como sonda. Asumimos que un fotón que tiene un estado de polarización $|\psi\rangle$ inicialmente proviene del camino 1, esto es, el camino inicial del qubit es $| +1\rangle$ y la medición se realiza detectando al fotón en uno de los dos caminos resultantes después del PBS.

6.4 Resultados modelo experimental

El experimento considera usar fotones individuales producidos por el método SPDC o considerando una fuente de radiación atómica ya que los valores débiles emergen del acoplamiento entre los dos grados de libertad del fotón, el qubit de camino (espacial) y el qubit de polarización. El observable que medimos es el de la polarización en la base $(H - V)$ es decir que operador cuántico correspondiente al parámetro de Stokes S_1 dado por la ecuación (2.27) $\hat{S}_1 = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$, con valor esperado $\langle \hat{S}_1 \rangle = \langle \mu | \hat{S}_1 | \mu \rangle$ para algún estado $|\mu\rangle$. Subsecuentemente la medición débil se efectúa usando un dispositivo

no-determinista de medición generalizada de polarización de fotones [53]. Tomando a X, Y y Z como las matrices de Pauli y denotamos por $|0\rangle$ y $|1\rangle$ como los eigenestados de Z con eigenvalores $+1$ y -1 respectivamente. El modelo de medición indirecta descrito por K. Edamatsu [7] [19]. Sea $C[X]$ la compuerta controlada C-NOT en la señal del qubit:

$$C[X] = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X}, \quad (6.24)$$

sí tomamos el estado inicial de la sonda como $|0'\rangle$ y el medidor observable en la sonda como $M = Z'$. El operador unitario \hat{U} esta dado por:

$$\hat{U} = C[X] \left(\hat{I} \otimes \hat{W}(\theta) \right) = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{W}(\theta) + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X}\hat{W}(\theta). \quad (6.25)$$

El estado inicial del fotón por (6.5) es:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes | +1 \rangle, \quad (6.26)$$

y se transforma después de pasar a través del PBS como:

$$|\Psi'\rangle = \hat{U}_{PBS} (|\psi\rangle \otimes | +1 \rangle), \quad (6.27)$$

Además, utilizando la ecuación (6.7) podemos escribir:

$$|\Psi'\rangle = \hat{M}_+ |\psi\rangle \otimes | +1 \rangle + \hat{M}_- |\psi\rangle \otimes | -1 \rangle, \quad (6.28)$$

Luego, a partir de la ecuación (6.8) y a partir de los operadores de proyección

$\hat{M}_0 = \hat{M}_+$ y $\hat{M}_1 = \hat{M}_-$, obtenemos los operadores de medición generalizada:

$$\hat{M}_+ = \langle +1 | \hat{U}_{PBS} | +1 \rangle \equiv |H\rangle\langle H| \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_+ = \langle +1 | \hat{U}_{PBS} | +1 \rangle = & |H\rangle\langle +1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle \langle H| \\ & + |V\rangle\langle -1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle \langle V|, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\hat{M}_+ = \langle +1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle |H\rangle\langle H| + \langle -1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle |V\rangle\langle V|. \quad (6.31)$$

Considerando que $| +1 \rangle \equiv | 0 \rangle$ y que $| -1 \rangle \equiv | 1 \rangle$, los operadores de medición generalizada son:

$$\begin{aligned} \hat{M}_+ = & (1,0) \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} |H\rangle\langle H| \\ & + (0,1) \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} |V\rangle\langle V|, \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\hat{M}_+ = \cos(\theta) |H\rangle\langle H| + \sin(\theta) |V\rangle\langle V|. \quad (6.33)$$

Y análogamente:

$$\hat{M}_- = \langle -1 | \hat{U}_{PBS} | +1 \rangle \equiv |V\rangle\langle V|, \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_- = \langle -1 | \hat{U}_{PBS} | +1 \rangle = & |H\rangle\langle -1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle \langle H| \\ & + |V\rangle\langle +1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle \langle V|, \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\hat{M}_- = \langle -1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle |H\rangle\langle H| + \langle +1 | \hat{W}(\theta) | +1 \rangle |V\rangle\langle V|, \quad (6.36)$$

$$\hat{M}_- = \sin(\theta) |H\rangle\langle H| + \cos(\theta) |V\rangle\langle V|. \quad (6.37)$$

También se pueden ver como los proyectores de $|H\rangle$ y $|V\rangle$ respectivamente. Esto es una medición generalizada de la polarización del fotón, otra forma de ver los operadores de medición \hat{M}_m con $m = 0, 1$ es:

$$M_0 = \langle 0' | \hat{U} | 0' \rangle = |0\rangle\langle 0' | \hat{W}(\theta) | 0' \rangle \langle 0| + |1\rangle\langle 1' | \hat{W}(\theta) | 0' \rangle \langle 1|, \quad (6.38)$$

$$M_0 = \cos\theta |0\rangle\langle 0| + \sin\theta |1\rangle\langle 1|, \quad (6.39)$$

$$M_1 = \langle 1' | \hat{U} | 0' \rangle = |0\rangle\langle 1' | \hat{W}(\theta) | 0' \rangle \langle 0| + |1\rangle\langle 0' | \hat{W}(\theta) | 0' \rangle \langle 1|, \quad (6.40)$$

$$M_1 = \sin\theta |0\rangle\langle 0| + \cos\theta |1\rangle\langle 1|. \quad (6.41)$$

Se puede demostrar fácilmente que se pueden reescribir los operadores de medición tomando $\alpha = \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$ y $\beta = \sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$.

$$\hat{M}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha \hat{I} + \beta \sigma_z), \quad \hat{M}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha \hat{I} - \beta \sigma_z). \quad (6.42)$$

Los elementos POVM correspondientes a los resultados de la lectura del medidor observable son de la forma:

$$\hat{E}_+ = \hat{M}_+^\dagger \hat{M}_+ = \cos(\theta)^2 |H\rangle\langle H| + \sin(\theta)^2 |V\rangle\langle V|, \quad (6.43)$$

$$\hat{E}_- = \hat{M}_-^\dagger \hat{M}_- = \sin(\theta)^2 |H\rangle\langle H| + \cos(\theta)^2 |V\rangle\langle V|. \quad (6.44)$$

Sea $t = \cos(\theta)$ y $r = \sin(\theta)$. Por lo tanto, la fuerza de medición está definida como $s = t^2 - r^2 = \cos(2\theta)$. Podemos reescribir los operadores POVM en términos de la fuerza de medición como:

$$\hat{E}_+ = \frac{1}{2}(\hat{I} + \cos 2\theta \sigma_z) = \frac{1}{2}(\hat{I} + s\sigma_z), \quad (6.45)$$

$$\hat{E}_- = \frac{1}{2}(\hat{I} - \cos 2\theta \sigma_z) = \frac{1}{2}(\hat{I} - s\sigma_z). \quad (6.46)$$

La medición se vuelve una medida proyectiva cuando $\theta = 0$, ya que en este caso los operadores \hat{M}_+ y \hat{M}_- son los proyectores de $|H\rangle$ y $|V\rangle$ respectivamente. Por otro lado la medición es nula para el ángulo $\theta = \pi/4$. La fuerza de medición caracterizada por $s = \cos 2\theta$ y se define en $0 < s < 1$. Y dado el formalismo de mediciones débiles, cuando ésta fuerza de medición es suficientemente pequeña arroja el valor débil de la medición, lo que nos permite delimitar la medición débil para los ángulos definidos entre: $-\pi/4 < \theta < \pi/4$. Además, en (6.45) y (6.46) note que los operadores de medición POVM se pueden escribir en términos de la fuerza de medición. Basándonos en el experimento óptico propuesto por K. Edamatsu, (2016) [7], para mostrar cómo se puede medir un valor débil complejo asociado con un observable de polarización de fotones. Consideramos el esquema de la Figura 16, donde inciden fotones individuales en un estado inicial $|\psi_i\rangle|i\rangle$, donde el estado $|\psi_i\rangle$ es el estado inicial de polarización y el estado $|i\rangle$ corresponde al qubit de camino del fotón. La polarización se prepara mediante el uso de una placa de un cuarto de onda o por sus siglas en inglés quarter-wave-plate (QWP) y dos placas de media onda (HWP). Los fotones pasan a través de un divisor de haz de polarización (PBS) alineado con un estado de polarización final $|f\rangle$ antes de impactar a uno de los detectores acoplados o en una cámara CCD donde cada píxel mide un fotón con una probabilidad de detección dada por:

$$P = |\langle f|i\rangle|^2 |\langle \psi_f|\psi_i\rangle|^2, \quad (6.47)$$

donde $|\psi_f\rangle$ es el estado final transversal post-seleccionado por cada fotón. La implementación experimental de las mediciones generalizadas en conjunto se realizan mediante la interacción de fotones con dispositivos ópticos como el divisor de haz de polarización variable o por su acrónimo en inglés Variable Polarization Beam Splitter (VPBS) [7] [18].

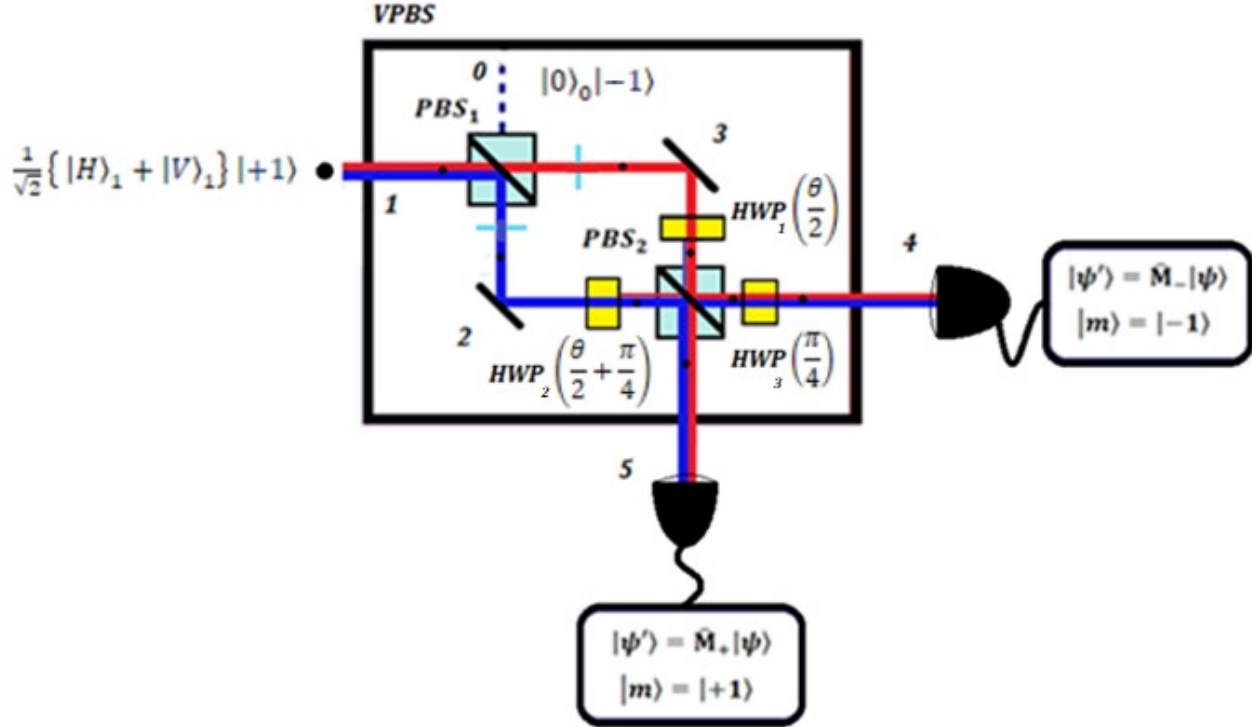


Figura 15. Medición generalizada de polarización usando un divisor de haz de polarización variable (VPBS). La señal es el qubit de polarización de un fotón $|\psi\rangle$ y la sonda es el camino donde se inyecta el fotón $|\xi\rangle = | + 1\rangle$, y sale por cualquier resultado de camino $|m\rangle = |+1\rangle$ o $|-1\rangle$, dependiendo del resultado de la medición del qubit de polarización [7].

6.4.1 Preparación del estado de post selección.

Considerando el estado de polarización como la superposición de las componentes horizontal y vertical como el estado $|\psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{ |H\rangle_1 + |V\rangle_1\}$ y el modo de vacío $|0\rangle_0$ en la entrada del modo 0, se describe detalladamente el proceso en el que fotones individuales interactúan con los dispositivos ópticos del experimento (figura 15). Entonces el estado en la entrada es:

$$|\psi\rangle_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{ |0\rangle_0|H\rangle_1|+1\rangle + |0\rangle_0|V\rangle_1|+1\rangle\}, \quad (6.48)$$

luego, el estado $|\psi'\rangle$ describe completamente el sistema justo después de atravesar el primer divisor de haz de polarización, agregando una fase (i) a la componente de polarización que se refleja. Una característica importante es que el divisor de haz de polarización PBS actúa sobre el qubit de camino del fotón, produciendo una superposición:

$$|\psi^I\rangle = \hat{U}_{PBS_1} |\psi\rangle_{in}, \quad (6.49)$$

$$|\psi^I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0\rangle_2 |H\rangle_3 | +1\rangle + i |V\rangle_2 |0\rangle_1 | -1\rangle \}, \quad (6.50)$$

luego, atravesando las placas de media onda (HWP's) con ángulos entre los ejes principales definidos como $(\theta/2)$ en el camino $| -1\rangle$ y $(\theta/2 + \pi/4)$ en el camino $| +1\rangle$ que actúan sobre el qubit de polarización en sus componentes a través de la matriz (A15) $\hat{U}_{HWP}(\theta)$, se produce una superposición de las componentes de polarización. Y, adicionalmente, introduciendo dos retardadores simples con amplitud de fase $e^{i\theta/2}$ y $e^{i\theta/2+\pi/4}$ que actúan en el qubit de camino $| -1\rangle$ y $| +1\rangle$ respectivamente. Tenemos:

$$|\psi^{II}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{i(\theta/2)} | +1\rangle |0\rangle_2 \hat{U}_{HWP}(\theta/2) |H\rangle_3 + i e^{i(\theta/2+\pi/4)} | -1\rangle |0\rangle_1 \hat{U}_{HWP}(\theta/2 + \pi/4) |V\rangle_2 \}, \quad (6.51)$$

dónde a partir de la ecuación A15:

$$\hat{U}_{HWP}(\theta/2) |H\rangle_3 = \{ \cos \theta |H\rangle_3 + \text{sen } \theta |V\rangle_3 \}, \quad (6.52)$$

$$\hat{U}_{HWP}(\theta/2 + \pi/4) |V\rangle_2 = \left\{ \text{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) |H\rangle_2 - \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) |V\rangle_2 \right\}, \quad (6.53)$$

Note que la rotación en el qubit de polarización produce una superposición de las componentes de polarización lineal en términos del ángulo θ . Entonces, tenemos:

$$|\psi^{III}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{i(\theta/2)} | +1\rangle |0\rangle_2 \{ \cos \theta |H\rangle_3 + \text{sen } \theta |V\rangle_3 \} + i e^{i(\theta/2+\pi/4)} | -1\rangle |0\rangle_1 \{ \cos \theta |H\rangle_2 + \text{sen } \theta |V\rangle_2 \} \right\} \quad (6.54)$$

Luego, el estado $|\psi^{IV}\rangle$ justo después de salir del segundo divisor de haz de polarización:

$$|\psi^{IV}\rangle = \hat{U}_{PBS_2} |\psi^{III}\rangle, \quad (6.55)$$

$$|\psi^{IV}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{i\theta/2} \cos \theta | +1\rangle |0\rangle_4 |H\rangle_5 + i e^{i\theta/2} \text{sen } \theta | -1\rangle |0\rangle_5 |V\rangle_4 + i e^{i(\theta/2+\pi/4)} \cos \theta | -1\rangle |0\rangle_5 |H\rangle_4 - e^{i(\theta/2+\pi/4)} \text{sen } \theta | +1\rangle |0\rangle_4 |V\rangle_5 \}. \quad (6.56)$$

Después de la interacción con la placa de media onda y ajustando un ángulo $\theta = \pi/4$ en el modo 4 como se describe en la ecuación A17, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{out} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{i\theta/2} \cos \theta |0\rangle_4 | +1\rangle |H\rangle_5 \\
& + i e^{i\theta/2} \text{sen } \theta |0\rangle_5 | -1\rangle \hat{U}_{HWP}(\pi/4) |V\rangle_4 \\
& + i e^{i(\theta/2+\pi/4)} \cos \theta | -1\rangle |0\rangle_5 \hat{U}_{HWP}(\pi/4) |H\rangle_4 \\
& - e^{i(\theta/2+\pi/4)} \text{sen } \theta | +1\rangle |0\rangle_4 |V\rangle_5 \}, \quad (6.57)
\end{aligned}$$

además, considerando la ec. A17, una placa de media onda (HWP) con ángulo $\pi/4$ es equivalente a una compuerta X-gate que invierte la polarización de cada componente en el modo 4 cómo:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{HWP}(\pi/4) |H\rangle_4 &= |V\rangle_4, \\
\hat{U}_{HWP}(\pi/4) |V\rangle_4 &= |H\rangle_4.
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \hat{U}_{HWP}(\pi/4) |H\rangle_4 &= |V\rangle_4, \\ \hat{U}_{HWP}(\pi/4) |V\rangle_4 &= |H\rangle_4. \end{aligned}} \right\} (6.58)$$

Entonces el estado final:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{out} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{i\theta/2} \cos \theta |0\rangle_4 | +1\rangle |H\rangle_5 + e^{i(\theta/2+\pi/2)} \text{sen } \theta |0\rangle_5 | -1\rangle |H\rangle_4 \\
& + e^{i(\theta/2+3\pi/4)} \cos \theta |0\rangle_5 | -1\rangle |V\rangle_4 - e^{i(\theta/2+\pi/4)} \text{sen } \theta |0\rangle_4 | +1\rangle |V\rangle_5, \\
\end{aligned} \quad (6.59)$$

y reescribiendo la ecuación en términos de funciones trigonométricas y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{out} = & \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_4 | +1\rangle \left\{ \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + i \text{sen } \frac{\theta}{2} \cos \theta \right) |H\rangle_5 \right. \\
& \left. + \left(-\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{sen } \theta - i \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{sen } \theta \right) |V\rangle_5 \right\} \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_5 | -1\rangle \left\{ \left(-\text{sen } \frac{\theta}{2} \text{sen } \theta + i \text{sen } \theta \cos \frac{\theta}{2} \right) |H\rangle_4 \right. \\
& \left. + \left(-\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \theta + i \cos \theta \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) |V\rangle_4 \right\}. \\
\end{aligned} \quad (6.60)$$

Finalmente, tomando el módulo cuadrado de cada amplitud obtenemos las probabilidades para cada estado correspondiente:

$$\begin{aligned}
& |0\rangle_4 | +1\rangle \left\{ \left(\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \theta \right) |H\rangle_5 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 \theta \right) |V\rangle_5 \right\} \\
& + |0\rangle_5 | -1\rangle \left\{ \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) |H\rangle_4 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) |V\rangle_4 \right\},
\end{aligned} \tag{6.61}$$

reduciendo términos obtenemos:

$$\begin{aligned}
& |0\rangle_4 | +1\rangle \left\{ \frac{1}{2} \cos^2(\theta) |H\rangle_5 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta) |V\rangle_5 \right\} \\
& \quad + |0\rangle_5 | -1\rangle \left\{ \frac{1}{2} \sin^2(\theta) |H\rangle_4 + \frac{1}{2} \cos^2(\theta) |V\rangle_4 \right\},
\end{aligned} \tag{6.62}$$

que podemos separar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cos^2(\theta) |0\rangle_4 |H\rangle_5 | +1\rangle + \frac{1}{2} \sin^2(\theta) |0\rangle_4 |V\rangle_5 | +1\rangle \\
& + \frac{1}{2} \sin^2(\theta) |0\rangle_5 |H\rangle_4 | -1\rangle + \frac{1}{2} \cos^2(\theta) |0\rangle_5 |V\rangle_4 | -1\rangle.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

	$\theta = 0$	$\theta = \pi/8$	$\theta = \pi/4$	$\theta = \pi/2$
$P_{+1,H}$	1/2	0.4267	1/4	0
$P_{+1,V}$	0	0.0732	1/4	1/2
$P_{-1,H}$	0	0.0732	1/4	1/2
$P_{-1,V}$	1/2	0.4267	1/4	0

Tabla I. Resultados de todas las probabilidades de cada estado posible en términos del ángulo θ . Note que la suma de probabilidades es 1, obedeciendo la relación de completéz en la medición.

6.4.2 Valor débil de polarización

Tomando las amplitudes:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + i \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \right), \\
 B &= \left(-\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \theta - i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \theta \right), \\
 C &= \left(-\sin \frac{\theta}{2} \sin \theta + i \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right), \\
 D &= \left(-\sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \theta + i \cos \theta \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{6.64}$$

Y escribiendo el dual de la ecuación (6.60):

$${}_{out}\langle \psi | = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ A^* {}_4\langle 0 | {}_5\langle H | + B^* {}_4\langle 0 | {}_5\langle V | + C^* {}_5\langle 0 | {}_4\langle H | + D^* {}_5\langle 0 | {}_4\langle V | \}. \tag{6.65}$$

El valor débil del observable de polarización en la base H–V definido como:

$$\langle \hat{P}_{HV} \rangle_w = \frac{{}_{out}\langle \psi | \hat{P}_{HV} | \psi \rangle_{in}}{{}_{out}\langle \psi | \psi \rangle_{in}}. \tag{6.66}$$

Tomando el operador de polarización de la ecuación 2.27:

$$\hat{P}_{HV} = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|, \tag{6.67}$$

$$\hat{P}_{HV} | \psi \rangle_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |H\rangle\langle H | H \rangle_1 | 0 \rangle_0 - |V\rangle\langle V | V \rangle_1 | 0 \rangle_2 \}. \tag{6.68}$$

Y tomando la ecuación 6.65, podemos calcular el valor débil de polarización como:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{P}_{HV} \rangle_w &= \frac{\left(\cos \theta \left[\cos \frac{\theta}{2} + \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \cos \theta \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \frac{\theta}{2} \right] \right)}{F} \\
 &+ \frac{i \left(\cos(\theta) \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin(\theta) \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right)}{F}, \tag{6.69}
 \end{aligned}$$

con, $F = A^* + B^* + C^* + D^*$,

$$\begin{aligned}
 F &= \left(\cos \theta \left[\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \sin(\theta) \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right) \\
 &+ i \left(\sin(\theta) \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \cos(\theta) \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right). \tag{6.70}
 \end{aligned}$$

Implementando una fuerza de medición $s = \cos(2\theta_w) = 0.6291$, el valor débil de la polarización ec. (6.69) es igual a $\sqrt{2}$, el cual es un valor prohibido en la teoría cuántica estándar, que ocurre cuando el ángulo entre los ejes principales de las placas de ondas es $\theta_w = 0.4452$ rad, es decir que en el experimento hay que ajustar las placas de ondas un desfase de $\theta_0 = \theta_w/2 = 0.2226$ y $\theta_1 = \theta_w/2 + \pi/4 = 1.00799$ (radianes) es decir $\theta_0 = 12.94^\circ$ y $\theta_1 = 57.75^\circ$. Este es un resultado que llama la atención porque el valor $\sqrt{2}$ no es un eigenvalor del observable de polarización. Es decir que para ciertas mediciones generalizadas el resultado de la medición de polarización esta fuera el conjunto de eigenvalores propios del observable.

$$\langle \hat{P}_{HV} \rangle_w = \sqrt{2} - i \quad (6.71)$$

Como vimos en la sección 5.5, la medición arroja la parte real del valor débil, mientras que su parte imaginaria también significado físico, es igual al cambio de la función de onda Gaussiana del dispositivo de medición en la representación de momento. Entonces medir el cambio del momento del puntero nos dejara la parte imaginaria del valor débil, que solo contribuirá en una fase dependiente de la posición a la función de onda del dispositivo de medición, por lo tanto, la parte imaginaria no afectara a la distribución de probabilidad de la posición del puntero del aparato de medición.

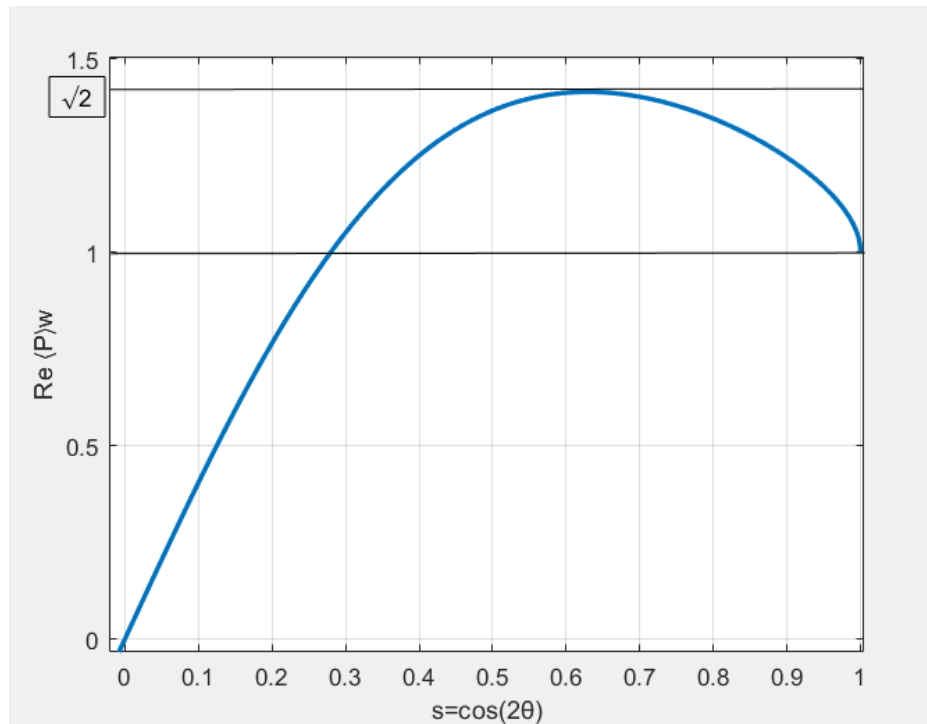


Figura 17. Representación de la parte real del valor débil del operador de polarización en la base $H - V$ en función de la fuerza de medición S . Podemos comprobar que cuando la fuerza de medición es 1 , tenemos entonces una medición proyectiva (fuerte).

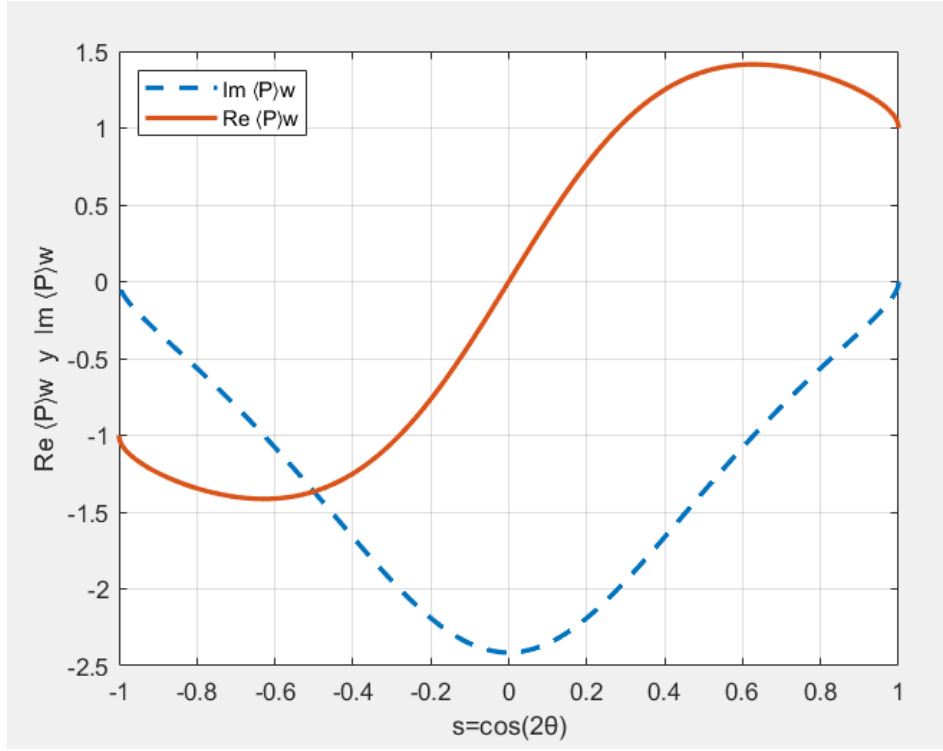


Figura 18. Representación de las partes real e imaginaria del valor débil del operador de polarización en la base $(H - V)$.

6.4.3 El método de los tres estados para cuantificación de error y perturbación.

Como estudiamos en el Capítulo 4, el error $\varepsilon(A)$ y la perturbación $\eta(B)$ se definen a través del operador de ruido $N(A) = U^\dagger(I \otimes M)U - A \otimes I$ y el operador de perturbación $D(B) = U^\dagger(B \otimes I)U - B \otimes I$ respectivamente por las ecuaciones 4.22–4.23. Sin embargo dado un dispositivo de medición $A(x)$, en la práctica estos operadores son usualmente desconocidos.

$$\varepsilon(\hat{A}) = \langle (\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U} - \hat{A} \otimes \hat{I})^2 \rangle_{|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle}^{1/2}, \quad (6.72)$$

$$\eta(\hat{B}) = \langle (\hat{U}^\dagger(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U} - \hat{B} \otimes \hat{I})^2 \rangle_{|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle}^{1/2}. \quad (6.73)$$

Donde el promedio se toma sobre el sistema compuesto de la señal y el medidor observable $(|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle)$, \hat{U} es el operador de evolución unitaria que describe completamente la interacción entre el estado del sistema (la señal) y el medidor, que lleva la información acerca de la señal del observable A en el medidor

observable M , donde B es la señal del observable que puede (o no) ser perturbado como resultado de la medición de A .

El error $\varepsilon(A)$ es el valor cuadrado medio de la diferencia entre el medidor observable M después de la interacción y el observable A antes de la interacción. Y la perturbación $\eta(B)$ es la raíz cuadrática media del cambio en el observable B durante la interacción de medición, entonces cómo probamos matemáticamente qué:

$$\varepsilon(A)\eta(B) + \varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|, \quad (6.74)$$

se cumple para cualquier estado $|\psi\rangle$ de S y cualquier modelo de medición indirecta $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$. Definiendo el k -ésimo operador de momento de salida por:

$$\hat{O}_A^{(K)} = \sum_m m^k \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m, \quad (6.75)$$

entonces el k -ésimo momento de la variable de salida de $A(x)$ con la entrada $|\psi\rangle$ esta dada por:

$$\langle \psi | O_A^{(k)} | \psi \rangle = \text{Ex}\{x^k \parallel |\psi\rangle\}, \quad (6.76)$$

tenemos:

$$\varepsilon(A)^2 = \langle \psi | O_A^{(2)} - O_A^{(1)} A - A O_A^{(1)} + A^2 | \psi \rangle. \quad (6.77)$$

Definimos la *post medición* del k -ésimo operador de momento del observable B por:

$$\hat{O}_B^{(K)} = \sum_m \hat{M}_m^\dagger B^k \hat{M}_m, \quad (6.78)$$

entonces, el K -ésimo momento del observable B en el estado de la salida del aparato $A(x)$ en la entrada $|\psi\rangle$ esta dado por:

$$\langle \psi | O_B^{(k)} | \psi \rangle = \text{Ex}\{B^k \parallel T(|\psi\rangle\langle\psi|)\}, \quad (6.79)$$

dónde T es la operación no selectiva de $A(x)$. Entonces, tenemos:

$$\eta(B)^2 = \langle \psi | O_B^{(2)} - O_B^{(1)} B - B O_B^{(1)} + B^2 | \psi \rangle. \quad (6.80)$$

Por lo tanto, el error $\varepsilon(A)$ y la perturbación $\eta(B)$ se determinan por la medición de los operadores del aparato de medición $A(x)$.

El método de los tres estados para cuantificar el error y la perturbación es un método para medir $\varepsilon(A)$ y $\eta(B)$ usando los resultados del aparato $A(x)$, pero sin conocer el operador de ruido $N(A)$ o el operador de perturbación $D(B)$. Podemos reescribir el error de la ecuación 6.77 como:

$$\begin{aligned} \varepsilon(A)^2 = & \langle \psi | A^2 | \psi \rangle + \langle \psi | O_A^{(2)} | \psi \rangle + \langle \psi | O_A^{(1)} | \psi \rangle \\ & + \langle A\psi | O_A^{(1)} | A\psi \rangle - \langle (A + I)\psi | O_A^{(1)} | (A + I)\psi \rangle. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Entonces, $\varepsilon(A)$ puede ser estimado estadísticamente de los resultados de medición del aparato $A(x)$ en los tres estados $|\psi\rangle$, $A|\psi\rangle / \|A|\psi\rangle\|$ y $(A + I)|\psi\rangle / \|(A + I)|\psi\rangle\|$, a la entrada. Similarmente de la ecuación 6.80 la perturbación $\eta(B)$ puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \eta(B)^2 = & \langle \psi | B^2 | \psi \rangle + \langle \psi | O_B^{(2)} | \psi \rangle + \langle \psi | O_B^{(1)} | \psi \rangle \\ & + \langle B\psi | O_B^{(1)} | B\psi \rangle - \langle (B + I)\psi | O_B^{(1)} | (B + I)\psi \rangle. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Entonces, $\eta(B)$ puede ser estimada estadísticamente de los resultados de medición de B en el estado justo despues de pasar a través del aparato de medición $A(x)$ en los tres estados $|\psi\rangle$, $B|\psi\rangle / \|B|\psi\rangle\|$ y $(B + I)|\psi\rangle / \|(B + I)|\psi\rangle\|$ en la entrada de $A(x)$. De acuerdo a la teoría, para un observable X , el estado $X|\psi\rangle$ puede ser preparado del estado $|\psi\rangle$ con determinada probabilidad de éxito incluso sin conocer el estado $|\psi\rangle$. De hecho, un aparato de medición $A(x)$ con operadores de medición $\{\widehat{M}_0, \widehat{M}_1\}$ con $\widehat{M}_0 = X/\|X\|$ y $\widehat{M}_1 = \sqrt{1 - |\widehat{M}_0|^2}$ producen el estado $X|\psi\rangle / \|X|\psi\rangle\|$ en el estado de entrada $|\psi\rangle$ con probabilidad $\Pr\{x = 0 \mid |\psi\rangle\} = \|X|\psi\rangle\|^2 / \|X\|^2$.

6.4.4 Error y perturbación del modelo experimental

Tomamos el observable a medir $A = Z$ y consideramos la perturbación en el observable $B = X$, de las ecuaciones 6.75 y 6.78, tenemos:

$$\widehat{O}_Z^{(1)} = \widehat{E}_+ - \widehat{E}_- = sZ, \quad (6.83)$$

Con \widehat{E}_+ y \widehat{E}_- dados por las ecuaciones 6.45 y 6.46. Por otro lado,

$$\widehat{O}_X^{(1)} = \widehat{M}_0^\dagger X \widehat{M}_0 + \widehat{M}_1^\dagger X \widehat{M}_1, \quad (6.84)$$

Considerando el hecho de que $XX = I$, y que los operadores de medición son hermíticos tenemos:

$$\widehat{O}_X^{(1)} = \widehat{M}_0 (X \widehat{M}_0 X) + \widehat{M}_1 (X \widehat{M}_1 X), \quad (6.85)$$

$$\widehat{O}_X^{(1)} = (\widehat{M}_0 \widehat{M}_1 + \widehat{M}_1 \widehat{M}_0) X = 2 \text{Tr}(X), \quad (6.86)$$

Entonces resumiendo tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_Z^{(1)} &= sZ, \\ \hat{O}_X^{(1)} &= 2 \operatorname{Tr}(X). \end{aligned} \right\} (6.87)$$

Entonces los términos de la ecuación 6.77 y 6.80 respectivamente son:

$$\hat{O}_Z^{(1)}Z + Z\hat{O}_Z^{(1)} = 2sZ^2 = 2s\hat{I}, \quad (6.88)$$

$$\hat{O}_X^{(1)}X + X\hat{O}_X^{(1)} = 4 \operatorname{Tr} \hat{I}. \quad (6.89)$$

Luego considerando $\hat{O}_Z^{(2)} = \hat{O}_X^{(2)} = \hat{I}$, y reescribiendo 6.87 en términos de la fuerza de medición:

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_Z^{(1)} &= \cos 2\theta Z, \\ \hat{O}_X^{(1)} &= \operatorname{sen} 2\theta X, \end{aligned} \right\} (6.90)$$

Para poder escribir 6.88 y 6.89 como:

$$\hat{O}_Z^{(1)}Z + Z\hat{O}_Z^{(1)} = 2 \cos 2\theta \hat{I} = 2\hat{I} - 4\operatorname{sen}^2\theta \hat{I}, \quad (6.91)$$

$$\hat{O}_X^{(1)}X + X\hat{O}_X^{(1)} = 2 \operatorname{sen} 2\theta \hat{I} = 2\hat{I} - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \hat{I}. \quad (6.92)$$

Ahora la medición de error y perturbación de 6.77 y 6.80 resultan en:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(Z)^2 &= 4\operatorname{sen}^2\theta, \\ \eta(X)^2 &= 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right). \end{aligned} \right\} (6.93)$$

Y finalmente:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(Z) &= 2\operatorname{sen}\theta, \\ \eta(X) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right). \end{aligned} \right\} (6.94)$$

El producto error-perturbación de Heisenberg es:

$$H(\theta) = \varepsilon(Z)\eta(X) = 4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \quad (6.95)$$

note que $H(0) = 0$ y $H\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq H(\theta) \leq H\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 - \sqrt{2} \leq 1$, con $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

Luego con $\sigma(X) = \sigma(Z) = 1$. La relación de incertidumbre de Ozawa (4.52) es:

$$O(\theta) = \varepsilon(Z)\eta(X) + \varepsilon(Z)\sigma(X) + \sigma(Z)\eta(X), \quad (6.96)$$

$$O(\theta) = 2\text{sen}\theta * 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + 2\text{sen}\theta + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right), \quad (6.97)$$

Finalmente la relación de error-perturbación de Ozawa resulta en:

$$O(\theta) = (2\text{sen}\theta + 1) \left(2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + 1 \right) - 1, \quad (6.98)$$

Además, podemos observar que:

$$\begin{aligned} O(0) &= O\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \\ O\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} O(0) \\ O\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}} \right\} (6.99)$$

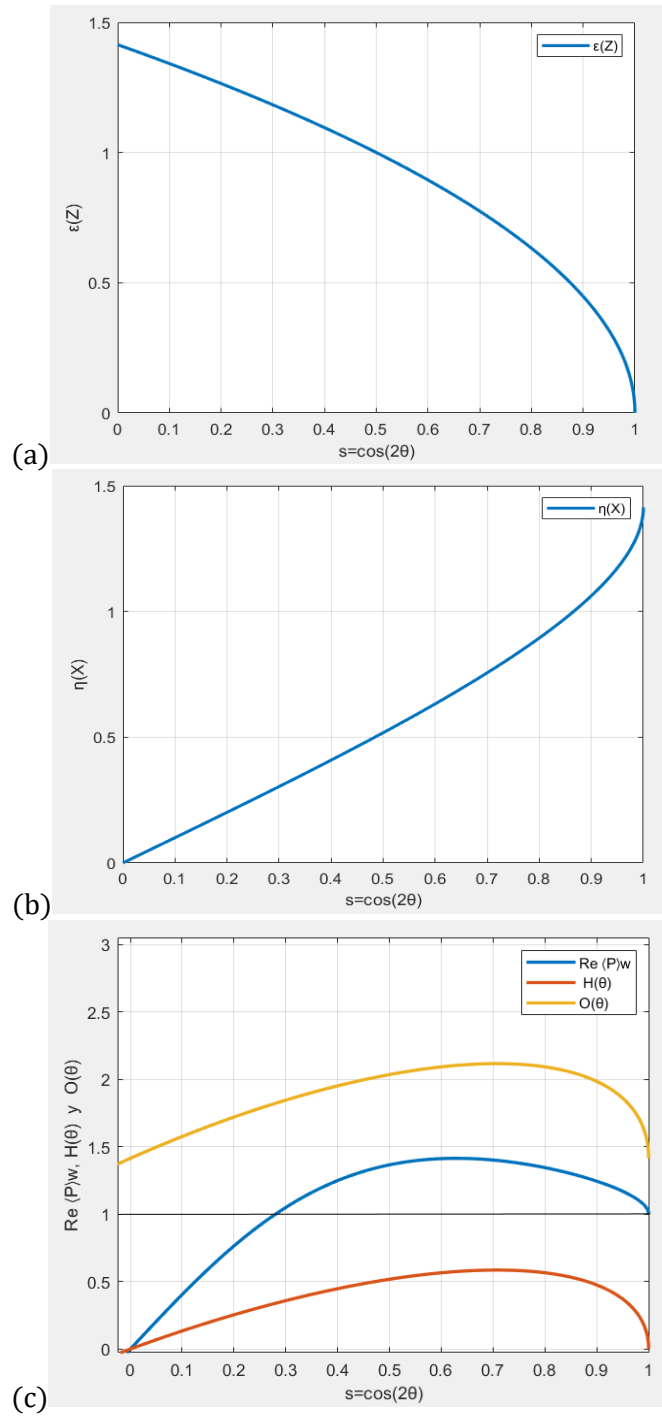


Figura 19. Resultados de error de medición $\varepsilon(Z)$ en (a) y la perturbación $\eta(X)$ en (b), ambas en función de la fuerza de medición $s = \cos 2\theta$. A medida que aumenta la fuerza, incrementa la perturbación $\eta(X)$ y disminuye el error $\varepsilon(Z)$. En (c) se compara el producto error–perturbación de Heisenberg $H(\theta)$ con el producto error–perturbación de Ozawa $O(\theta)$ y la parte real del valor débil de polarización. Note que cuando la fuerza de medición es $s = 1$, el resultado del valor débil es 1, que es eigenvalor del observable, lo que concuerda con las mediciones proyectivas de la teoría estándar.

6.4.5 Evaluación del error y la perturbación

De la definición de error y perturbación tenemos:

$$\varepsilon(A)^2 = \langle (\widehat{M}_A - \widehat{A})^2 \rangle, \quad (6.100)$$

$$\varepsilon(A)^2 = \langle \widehat{M}_A^2 \rangle + \langle \widehat{A}^2 \rangle - \langle \widehat{M}_A \widehat{A} + \widehat{A} \widehat{M}_A \rangle. \quad (6.101)$$

Y similarmente para la perturbación:

$$\eta(B)^2 = \langle \widehat{M}_B^2 \rangle + \langle \widehat{B}^2 \rangle - \langle \widehat{M}_B \widehat{B} + \widehat{B} \widehat{M}_B \rangle. \quad (6.102)$$

Los dos primeros términos de (6.101) se pueden evaluar experimental o teóricamente usando mediciones proyectivas: $\widehat{A} = \sum_j \lambda_j |J\rangle\langle J| = \sum_j \lambda_j \widehat{\Pi}_j$ y

la probabilidad de obtener un resultado de medición m , dada por $p(m) = \langle \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m \rangle = \langle \widehat{E}_m \rangle$ y de la descomposición espectral del observable $\widehat{M} = \sum_j \mu_m |m\rangle\langle m|$.

$$\langle \widehat{A}^2 \rangle = \sum_j \lambda_j^2 \langle \widehat{\Pi}_j \rangle, \quad (6.103)$$

$$\langle \widehat{M}_A^2 \rangle = \sum_m \mu_m^2 \langle \widehat{E}_m \rangle, \quad (6.104)$$

En el caso de la medición de un qubit, donde $\mu_m = \lambda_j = \pm 1$, estos términos resultan ser la unidad. Sin embargo, la evaluación experimental del tercer término presenta una correlación entre \widehat{M}_A y \widehat{A} . Luego, una forma es transformar el tercer término de (6.101) como:

$$\langle \widehat{M}_A \widehat{A} + \widehat{A} \widehat{M}_A \rangle = \langle (\widehat{I} + \widehat{A}) \widehat{M}_A (\widehat{I} + \widehat{A}) \rangle - \langle \widehat{A} \widehat{M}_A \widehat{A} \rangle - \langle \widehat{M}_A \rangle, \quad (6.105)$$

en esta forma, el primer término del lado derecho es el valor esperado de \widehat{M}_A para el estado señal $(\widehat{I} + \widehat{A}) |\psi\rangle$. También, el segundo y tercer término son los de los estados $\widehat{A} |\psi\rangle$ y $|\psi\rangle$ respectivamente. Entonces, si estos estados son preparados, uno puede evaluar el error experimentalmente por las ecuaciones (6.101) y (6.105).

Similarmente podemos demostrar que:

$$2\langle \widehat{M}_A \hat{A} + \hat{A} \widehat{M}_A \rangle = \langle (\hat{I} + \hat{A}) \widehat{M}_A (\hat{I} + \hat{A}) \rangle - \langle (\hat{I} - \hat{A}) \widehat{M}_A (\hat{I} - \hat{A}) \rangle, \quad (6.106)$$

Preparando $(\hat{I} + \hat{A}) |\psi\rangle$ y $(\hat{I} - \hat{A}) |\psi\rangle$ como los estados de la señal (método de los dos estados). En el caso de medición del qubit, $\hat{A} = \sigma_z$, por ejemplo, σ_z presenta una rotación en la esfera de Bloch, $(\hat{I} \pm \sigma_z)/2$ son proyectores para los dos eigenestados de σ_z . El otro método es utilizar valores débiles con los operadores POVM \hat{E}_m de la medición de \widehat{M}_A , obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{M}_A \hat{A} + \hat{A} \widehat{M}_A \rangle &= 2 \operatorname{Re} \langle \widehat{M}_A \hat{A} \rangle \\ &= 2 \sum_m \mu_m \operatorname{Re} \langle \hat{E}_m \hat{A} \rangle \\ &= 2 \sum_{j,m} \lambda_j \mu_m \operatorname{Re} \langle \hat{E}_m \hat{\Pi}_j \rangle, \end{aligned} \quad (6.107)$$

dónde, $\operatorname{Re} \langle \hat{E}_m \hat{\Pi}_j \rangle = P_w(j, m)$ es llamado el valor débil de la probabilidad conjunta de la polarización:

$$\operatorname{Re} \langle \hat{A} \rangle_\omega = \frac{\operatorname{Re} \langle \hat{E}_m \hat{A} \rangle}{\langle \hat{E}_m \rangle} = \sum_j \lambda_j \frac{P_w(j, m)}{\langle \hat{E}_m \rangle}, \quad (6.108)$$

usando las relaciones de valor esperado de los operadores de medición:

$$\langle \hat{E}_m \rangle = \sum_j P_w(j, m), \quad (6.109)$$

$$\langle \hat{\Pi}_j \rangle = \sum_m P_w(j, m), \quad (6.110)$$

encontramos la relación para el error:

$$\varepsilon(A)^2 = \sum_{j,m} (\mu_m - \lambda_j) P_w(j, m). \quad (6.111)$$

Entonces podemos evaluar el error de la medición si conocemos todos los valores débiles de la distribución de probabilidad conjunta $P_w(j, m)$ [7], [20] de las mediciones sucesivas de los pares conjugados de observables incompatibles, introducida por Lund y Wiseman en 2010 [24] y que luego Edamatsu tomó como posibles medidas de error y perturbación.

Conclusiones

En esta tesis se analizó el fenómeno de polarización de ondas electromagnéticas desde la descripción semi-clásica con las ecuaciones del Electromagnetismo, hasta el enfoque de la Mecánica Cuántica utilizando los operadores de Stokes y su representación en la esfera de Bloch, con el objetivo de estudiar los fundamentos teóricos más importantes y comprender la descripción matemática de la polarización de fotones. Debido a la naturaleza de la luz, es posible codificar información cuántica en los estados de polarización de fotones representados como qubits de información, útiles en circuitos de Computación Cuántica, en aplicaciones de Comunicaciones Ópticas, en Metrología Cuántica y en el procesamiento de Información Cuántica, pero para extraer información de un sistema cuántico inevitablemente se requiere realizar una medición, de hecho, es a través de la medición de observables físicos que podemos entender las leyes de la naturaleza. Es por esta razón que se estudiaron las mediciones cuánticas generalizadas y los procesos de medición cuántica para analizar y comprender el intrincado campo de mediciones y valores débiles, introducidos por Aharonov, Albert y Vaidman en 1988, y que hasta el día de hoy constituyen un elemento interesante y controvertido en el debate sobre las bases de la Mecánica Cuántica y los elementos más fundamentales de la realidad. En este trabajo introducimos las nociones teóricas del valor débil, que nos ayudaron a demostrar como surgen los valores débiles naturalmente, así como su definición operativa, además, exploramos este concepto junto con sus aplicaciones e interpretaciones más importantes. Desde la teoría de mediciones cuánticas, el formalismo de valores débiles implica la posibilidad de obtener más información sobre el sistema físico que la permitida por la teoría estándar de la Mecánica Cuántica. La controversia sobre el significado de valores débiles es sin duda uno de los temas más destacados del campo, sin embargo, el formalismo de valores débiles también puede ser muy útil en implementaciones prácticas de ingeniería con aplicaciones en Dispositivos Cuánticos. Como se ha presentado en esta tesis, existen distintos modelos experimentales cuyo principio básico se basa en la implementación adecuada de mediciones débiles, como el proceso de tomografía directa de estados cuánticos, proceso que es indispensable para los desarrollos y experimentos de Información Cuántica de variable continua y qubits de información midiendo la función de onda del sistema cuántico. Sin embargo, estos procedimientos muestran su potencial solo en condiciones experimentales muy específicas, que limitan el alcance de su aplicabilidad, por ello es importante conocer estas condiciones para adaptar situaciones en el laboratorio que nos permitan medir estas cantidades.

Mostramos que se puede usar un valor débil grande para amplificar la señal de una detección y puede ser utilizada para estimar sensiblemente la evolución en el tiempo de parámetros desconocidos en la interacción de la medición, como la desviación de un haz de fotones, cambios en la frecuencia, cambios de fase, cambios temporales e incluso cambios de temperatura. La presente teoría puede

ser verificada experimentalmente para diversos sistemas físicos, como la polarización de fotones representada a través de un sistema cuántico de dos niveles. Estudiamos la implementación experimental de mediciones generalizadas de polarización de fotones, se determinó el estado final de fotones individuales que interactúan con un esquema de un divisor de haz de polarización variable (VPBS) en un interferómetro de polarización de Mach–Zehnder, se determinó el valor débil de la polarización en la base ($H - V$), se evaluó el error y la perturbación de la medición haciendo uso de la medición débil. Estudiamos la violación a la relación de error–perturbación de Heisenberg y la validez de las relaciones de error–perturbación de Ozawa y otras relaciones propuestas recientemente.

Además, de estudiar los valores débiles, analizamos la dinámica del valor débil de un observable arbitrario como parámetro de evolución y encontramos un término extra que no aparece en la descripción de la teoría estándar, que corresponde a la energía débil de la interacción. Hemos enfatizado la generalidad de los valores débiles cuánticos como una herramienta para describir diversos experimentos de mediciones cuánticas. Los valores débiles son de considerable interés intrínseco teórico y hasta filosófico. Además, el hecho de que obedezcan ciertas reglas bien definidas implica que son herramientas heurísticas para predecir resultados experimentales con determinada probabilidad. La teoría desarrollada en esta investigación proporciona una guía útil para reflexionar y ayudar a identificar otros casos en los que la teoría de los valores débiles se puede utilizar en Óptica Cuántica y áreas relacionadas. Incluso pueden surgir nuevos experimentos y aplicaciones para esta área de la física cuántica que invita a la reflexión.

El error de medición, la perturbación y las relaciones de incertidumbre son fundamentales para nuestra observación del mundo cuántico. Recientes investigaciones en la teoría de mediciones cuánticas han revelado nuevos aspectos de estos temas, proporcionando mayor precisión y un entendimiento fundamental de lo que podemos obtener de la naturaleza a través de mediciones. Aunque los experimentos que se han llevado a cabo hasta ahora se limitan a sistemas de un solo qubit tales como el espín de electrones o la polarización de fotones, será esencial realizar investigaciones experimentales extendiéndonos a otros sistemas, no solo para comprender los fundamentos de mediciones físicas, sino también para nuevos desarrollos de Información Cuántica y protocolos de comunicación.

La luz ha demostrado ser un excelente laboratorio para la investigación en la teoría cuántica y también es el caso de la polarización de la luz.

Apéndice A

A.1 Descripción cuántica de componentes ópticos simples.

A.1.1 Divisor de haz de amplitud

Un divisor de haz es un espejo semi reflectivo que divide un haz de fotones en dos partes: una parte transmitida y una parte reflejada. Considerando \hat{a}_0 y \hat{a}_1 como los modos a la entrada del divisor de haz, el estado de los modos de salida \hat{a}_2 y \hat{a}_3 pueden ser calculados usando las siguientes relaciones:

$$\hat{a}_2^\dagger = \cos \theta \cdot \hat{a}_0^\dagger + ie^{-i\phi} \sin \theta \cdot \hat{a}_1^\dagger \quad (\text{A1})$$

$$\hat{a}_3^\dagger = ie^{i\phi} \sin \theta \cdot \hat{a}_0^\dagger + \cos \theta \cdot \hat{a}_1^\dagger \quad (\text{A2})$$

Donde \hat{a}_2^\dagger y \hat{a}_3^\dagger son los operadores de creación, representando un fotón en los modos 2 y 3 respectivamente, el ángulo θ determina la transmitancia del divisor de haz. Esto puede ser expresado por el coeficiente de transmisión $T = \cos^2 \theta$ y por el coeficiente de reflexión $R = \sin^2 \theta$, los cuales obedecen la relación $T + R = 1$. El cambio de fase ϕ entre los modos reflejado y transmitido asegura que el divisor de haz es un elemento óptico unitario. Un divisor de haz simétrico que divide la luz por igual en los modos de salida con $\theta = \pi/4$, y que actúa simétricamente en los dos puertos de entrada ($\phi = 0$), se define por:

$$\hat{a}_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_0^\dagger + i\hat{a}_1^\dagger) \quad , \quad \hat{a}_3^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger - i\hat{a}_0^\dagger) \quad (\text{A3})$$

Si consideramos un fotón incidente en el modo 1 y el correspondiente estado de vacío por el modo 0, tenemos: $|0\rangle_0 |1\rangle_1 = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1$, luego combinando \hat{a}_2^\dagger y \hat{a}_3^\dagger de la ec. (A3) podemos obtener que: $\hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_3^\dagger + i\hat{a}_2^\dagger)$, además, considerando el hecho de que $|0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} |0\rangle_2 |0\rangle_3$, tenemos:

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_3^\dagger + i\hat{a}_2^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3) \quad (\text{A4})$$

El fotón incide en uno de los puertos del divisor de haz mientras que el otro puerto contiene el estado de vacío que será transmitido y reflejado con la misma probabilidad.

A.1.2 Divisor de haz polarizante

Las mediciones proyectivas de polarización en la base $(H - V)$, se pueden realizar fácilmente usando un divisor de haz de polarización (PBS). Tanto como el divisor de haz de amplitud como el PBS son dispositivos pasivos que no crean ni destruyen fotones.

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_2 |0\rangle_3 + i|0\rangle_2 |V\rangle_3) \quad (\text{A5})$$

El comportamiento de fotones en un divisor de haz aclara algunos de los fenómenos cuánticos más fundamentales como la superposición cuántica y enredamiento. Hasta ahora hemos discutido solamente considerando la parte espacial de la función de onda de fotones individuales, ahora adicionalmente hay que incluir al grado de libertad externo (espacial) el espacio de dos estados de polarización o bien, el grado de libertad interno del fotón. Entonces esto nos conduce a un análisis con dos qubits correspondientes a los dos grados de libertad del fotón. La expresión que describe la evolución unitaria a través del divisor de haz es:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_{H_0} \\ \hat{a}'_{H_1} \\ \hat{a}'_{V_0} \\ \hat{a}'_{V_1} \end{pmatrix} = \hat{U}_{PBS} \begin{pmatrix} \hat{a}_{H_0} \\ \hat{a}_{H_1} \\ \hat{a}_{V_0} \\ \hat{a}_{V_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A6})$$

relacionados por la interacción con el divisor de haz de polarización (PBS)

$$\hat{U}_{PBS} = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix}, \quad (\text{A7})$$

Similarmente podemos describir matemáticamente la acción del divisor de haz polarizante como:

$$\hat{U}_{PBS} = |H\rangle\langle H| \otimes \sigma_0 + |V\rangle\langle V| \otimes \sigma_x, \quad (\text{A8})$$

$$\hat{U}_{PBS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A9})$$

Es interesante que esta matriz es exactamente igual a la matriz de la compuerta CNOT-gate la cual es una compuerta universal en Computación Cuántica.

$$\hat{U}_{CNOT|\psi\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A10})$$

Es por esta razón que la gran mayoría de los algoritmos de computación cuántica se pueden realizar usando fotones y elementos ópticos lineales. El problema aquí es que esta compuerta CNOT-gate no puede operar en dos partículas, sino en los dos grados de libertad de fotones individuales. Por ello que con esta sencilla técnica se pueden producir estados entrelazados separados espacialmente.

El grado de libertad de polarización abre nuevas e interesantes probabilidades para experimentos fotónicos usando divisores de haz. Como los fotones son bosones, sabemos que su estado cuántico total siempre debe ser simétrico bajo permutación de partículas. Ahora, como tenemos las componentes espaciales y del estado de polarización. Hay dos formas de lograr la simetría requerida. O ambas partes son simétricas bajo permutación o ambas partes son antisimétricas. Si vemos solo la parte espacial, los fotones se comportan como si tuvieran una función de onda antisimétrica.

A1.3 Transformaciones de cambio de fase.

El elemento óptico más simple, es un retardador de fase P, actúa como la evolución temporal usual, pero a una tasa diferente, y solo afecta a los modos que lo atraviesan. Si el estado de un fotón individual interactúa con un simple retardador de fase, obtenemos $P|1\rangle = e^{i\varphi}|1\rangle$, donde φ es la diferencia entre los tiempos de propagación de la luz en el vacío y en el medio, dada por la ecuación A11.

Una lámina de ondas o retardador es un dispositivo óptico que altera el estado de polarización de una onda de luz que viajan a través de él. Funciona produciendo un desfase entre las dos componentes perpendiculares de polarización. Experimentalmente, la polarización de la luz se puede manipular con retardadores de fase o placas de ondas. Estos cristales birrefringentes introducen un cambio de fase dependiente de la polarización. Combinando múltiples placas de ondas, se facilita la realización de todas las posibles compuertas de un solo qubit (matrices de Pauli). Cuando la luz viaja a través de una placa de ondas, experimenta diferentes índices de refracción para sus componentes ordinaria (o) y extraordinaria (e). La componente de polarización extraordinaria es paralela al plano de incidencia y el vector de onda K , mientras que la polarización ordinaria

es perpendicular al plano. Por lo tanto, cada componente viaja con una velocidad diferente [61].

Después de pasar a través de la placa, las dos polarizaciones perpendiculares adquieren una diferencia de fase dada por:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d |n_e - n_o|, \quad (\text{A11})$$

donde λ es la longitud de onda, d el grosor del cristal y n_e y n_o son los índices de refracción para las componentes de polarización extraordinaria y ordinaria respectivamente [13], [60].

Las placas de ondas se producen a partir de materiales birrefringentes como cuarzo o calcita, comúnmente. Si el eje rápido de una placa de ondas está orientado horizontalmente, el cambio de fase se puede escribir como:

$$T(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}, \quad (\text{A12})$$

Donde la componente vertical adquiere un cambio de fase $-\phi$. Si el eje rápido de una placa de ondas está orientado un ángulo arbitrario θ con respecto al eje horizontal, la matriz de transformación puede ser determinada aplicando matrices de rotación $R(\theta)$:

$$T'(\phi) = R(\theta)T(\phi)R(-\theta), \quad (\text{A13})$$

$$T'(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + e^{-i\phi} \sin^2 \theta & (1 - e^{-i\phi}) \cos \theta \sin \theta \\ (1 - e^{-i\phi}) \cos \theta \sin \theta & e^{-i\phi} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A14})$$

con $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Note que el ángulo θ con respecto al eje rápido, es una rotación física de la placa de ondas, en el laboratorio.

Las placas de media onda (HWP) y placas de cuarto de onda (QWP) son casos especiales de retardadores de fase los cuales son particularmente útiles para implementar compuertas de qubits individuales. Una placa de media onda (HWP) tiene un grosor d tal que introduce una diferencia de fase relativa de $\phi = \pi$ entre las componentes extraordinaria y ordinaria y puede ser descrita por la matriz:

$$\hat{U}_{HWP}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A15})$$

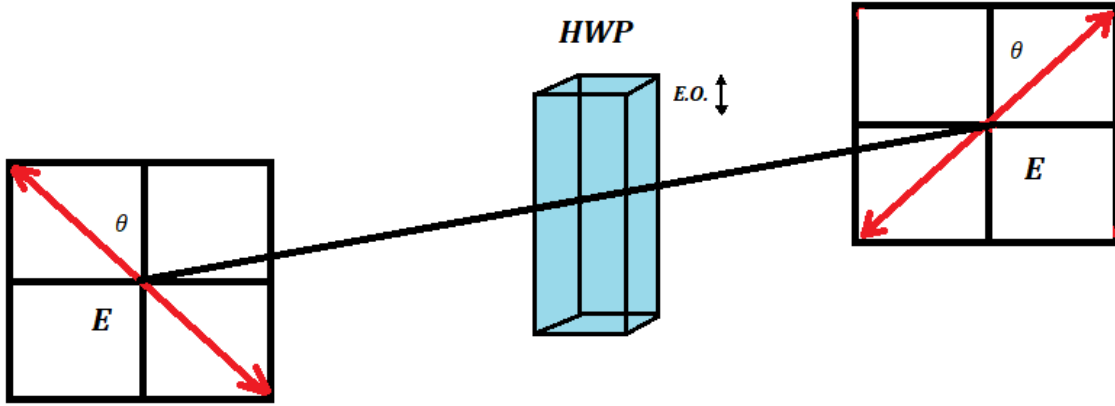


Figura A1. Principio de funcionamiento de una placa de media onda (HWP), con su eje óptico a lo largo de la dirección vertical. Cuando un haz de fotones viaja a través de la placa de media onda, las componentes de polarización extraordinaria y ordinaria experimentan diferentes índices de refracción, n_e y n_o , debido a la birrefringencia del material. Por tanto, las dos componentes de polarización tienen diferentes velocidades de fase. Después de pasar, las dos componentes de polarización adquieren un cambio de fase de π , lo que conduce a una rotación de 90° .

Cuando un fotón emerge de una placa de media onda habrá un cambio de fase de $\lambda/2$ (esto es π radianes), provocando una rotación de las componentes de polarización dada por 2θ . De hecho, por esta razón los retardadores de media onda son a veces llamados rotadores de polarización.

Cuando la orientación de la placa de media onda (HWP) es $\theta = 0$, la ecuación A15 implementa una compuerta $-Z$.

$$\hat{U}_{HWP}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A16})$$

para $\theta = \pi/4$ actúa como una compuerta $-X$.

$$\hat{U}_{HWP}(\pi/4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A17})$$

Por otro lado cuando $\theta = \pi/8$, representa una compuerta Hadamard.

$$\hat{U}_{HWP}(\pi/8) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A18})$$

Cuando el ángulo de la placa de media onda con respecto al eje óptico es $\theta/2$, tenemos:

$$\hat{U}_{HWP}(\theta/2) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A19})$$

Entonces, cuando un fotón con polarización horizontal $|H\rangle$ incide sobre la placa de media onda por el modo 3 en el experimento (figura 15) con ángulo $\theta/2$, tenemos:

$$\hat{U}_{HWP}(\theta/2)|H\rangle = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{bmatrix} = \cos \theta |H\rangle + \text{sen } \theta |V\rangle. \quad (\text{A20})$$

Por otro lado cuando el ángulo es $\theta/2 + \pi/4$, tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{HWP}(\theta/2 + \pi/4) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \pi/2) & \text{sen } (\theta + \pi/2) \\ \text{sen } (\theta + \pi/2) & -\cos(\theta + \pi/2) \end{bmatrix}, \\ \hat{U}_{HWP}(\theta/2 + \pi/4) &= \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

Y, cuando un fotón con polarización $|V\rangle$ incide sobre la placa de media onda (HWP) en el modo 2 (figura 15), con un ángulo $\theta/2 + \pi/4$, tenemos:

$$\hat{U}_{HWP}(\theta/2 + \pi/4)|V\rangle = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \cos \theta |H\rangle + \text{sen } \theta |V\rangle. \quad (\text{A22})$$

Finalmente, cuando una superposición de polarización lineal $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, incide en la placa de media onda (HWP) con un ángulo de $\pi/4$, como en el modo 4 (figura 15), tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A23})$$

Operación equivalente a aplicar una compuerta X-gate invirtiendo las amplitudes de las componentes de polarización.

Otro caso especial de la ecuación A14 son las placas de cuarto de onda (QWP), que a diferencia de la placa de media onda, estas inducen un cambio de fase de $\phi = \pi/2$ y se determina matemáticamente como:

$$\hat{U}_{QWP}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 + i \cos(2\theta) & i \text{sen } (2\theta) \\ i \text{sen } (2\theta) & 1 - i \cos(2\theta) \end{bmatrix}, \quad (\text{A24})$$

para θ igual a cero una QWP agrega una fase de $(-i)$ a la componente vertical, pero cuando $\theta = \pi/2$, el cambio de fase es igual a $(+i)$. Una placa de cuarto de onda QWP crea luz con polarización circular a partir de polarización lineal.

Bibliografía

- [1] Roychoudhuri, C., & Roy, R. (2003). *The nature of light: what is a photon?* Optics and photonics news, **14** (10).
- [2] Born M. and Wolf E. (1999). *Principles of Optics*, 7th ed. Cambridge University Press Sec 1.4
- [3] Dennis H. Goldstein (2003) *Polarized Light*, Third edition Cap. 4, 5 y 11 pp. 49, 59, 233.
- [4] Hecht, E. (1970). *Note on an Operational Definition of the Stokes Parameters. American Journal of Physics*, *38*(9), 1156–1158.
- [5] Hans-A. Bachor & Timothy C. Ralph (2003). *A guide to Experiments in Quantum Optics*.
- [6] Rua Vargas J. P. & Branch Bedoya J. W. (2009). *Estado del arte de la computación cuántica*, Revista Avances en Sistemas e Informática, vol. 6, pp. 235-248
- [7] Edamatsu, K. (2016). *Quantum measurement and uncertainty relations in photon polarization. Physica Scripta*, *91*(7), 073001.
- [8] Jurden Audretsch (2007). *Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics*, Sec. 2.1
- [9] Pryde, G. J., O'Brien, J. L., White, A. G., Ralph, T. C., & Wiseman, H. M. (2005). *Measurement of quantum weak values of photon polarization. Physical review letters*, **94**(22)
- [10] Aharonov, Y. and Vaidman, L. (2008). *The Two-State Vector Formalism: An Updated Review*, Lecture Notes in Physics, 399–447.
- [11] Nourrdine Zettili (1988). *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*, Sec. 3.5 pp.164
- [12] Nielsen M. A. & Chuang I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information* Sec. 2.2.3 pp. 84-96
- [13] Marck Beck. (2012). *Quantum Mechanics: Theory and Experiment Oxford*
- [14] Luis, A. (2016). *Polarization in Quantum Optics. Progress in Optics*, pp. 283–331.

- [15] Aharonov, Y. Popescu, S., Reznik B. & J. Tollaksen (2002). *Revisiting Hardy's Paradox: Counterfactual Statements, Real Measurements, Entangled and Weak Values*, Phys. Lett. A **301**, 130.
- [16] Aharonov, Y., Albert, D. Z., & Vaidman, L. (1988). *How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100*. Physical Review Letters, **60**(14), 1351–1354.
- [17] Damask J. N. (2005). *Polarization Optics in Telecommunications*. Springer Series in Optical Sciences.
- [18] Baek, S.-Y., Kaneda, F., Ozawa, M., & Edamatsu, K. (2013). *Experimental violation and reformulation of the Heisenberg's error-disturbance uncertainty relation*. Scientific Reports, 3(1). doi:10.1038/srep02221
- [19] Edamatsu, K. (2016). *Supplementary Information to "Experimental violation and reformulation of the Heisenberg uncertainty principle"*
- [20] Lund, A. P., & Wiseman, H. M. (2010). *Measuring measurement–disturbance relationships with weak values*. New Journal of Physics, 12(9), 093011. doi:10.1088/1367-2630/12/9/093011
- [21] Peres A. (2002). *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Fundamental Theories of Physics, Kluwer Academic Publishers.
- [22] Götze, J. B., & Dennis, M. R. (2012). Generalized shifts and weak values for polarization components of reflected light beams. New Journal of Physics, 14(7), 073016.
- [23] Kocsis, S., Braverman, B., Ravets, S., Stevens, M. J., Mirin, R. P., Shalm, L. K., & Steinberg, A. M. (2011). *Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interferometer*. Science, 332(6034), 1170–1173.
- [24] John von Neumann (1983) *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Princeton University Press, Princeton.
- [25] Pati, A. K., Singh, U., & Sinha, U. (2015). *Measuring non-Hermitian operators via weak values*. Physical Review A, 92(5). doi:10.1103/physreva.92.052120
- [26] Aharonov, Y., Botero, A., Popescu, S., Reznik, B., & Tollaksen, J. (2002). *Revisiting Hardy's paradox: counterfactual statements, real measurements, entanglement and weak values*. Physics Letters A, 301(3-4), 130–138. doi:10.1016/s0375-9601(02)00986-6

- [27] Lundeen, J. S., & Steinberg, A. M. (2009). *Experimental Joint Weak Measurement on a Photon Pair as a Probe of Hardy's Paradox*. *Physical Review Letters*, 102(2). doi:10.1103/physrevlett.102.020404
- [28] Yokota, K., Yamamoto, T., Koashi, M., & Imoto, N. (2009). *Direct observation of Hardy's paradox by joint weak measurement with an entangled photon pair*. *New Journal of Physics*, 11(3), 033011. doi:10.1088/1367-2630/11/3/033011
- [29] Hosten, O., & Kwiat, P. (2008). *Observation of the Spin Hall Effect of Light via Weak Measurements*. *Science*, 319(5864), 787–790. doi:10.1126/science.1152697
- [30] Dixon, P. B., Starling, D. J., Jordan, A. N., & Howell, J. C. (2009). *Ultrasensitive Beam Deflection Measurement via Interferometric Weak Value Amplification*. *Physical Review Letters*, 102(17). doi:10.1103/physrevlett.102.173601
- [31] Pfeifer, M., & Fischer, P. (2011). *Weak value amplified optical activity measurements*. *Optics Express*, 19(17), 16508. doi:10.1364/oe.19.016508
- [32] Lundeen, J. S., Sutherland, B., Patel, A., Stewart, C., & Bamber, C. (2011). *Direct measurement of the quantum wavefunction*. *Nature*, 474(7350), 188–191. doi:10.1038/nature10120
- [33] Lundeen, J. S., & Bamber, C. (2012). *Procedure for Direct Measurement of General Quantum States Using Weak Measurement*. *Physical Review Letters*, 108(7). doi:10.1103/physrevlett.108.070402
- [34] Sjöqvist, E. (2006). *Geometric phase in weak measurements*. *Physics Letters A*, 359(3), 187–189. doi:10.1016/j.physleta.2006.06.028
- [35] Kobayashi, H., Tamate, S., Nakanishi, T., Sugiyama, K., & Kitano, M. (2010). *Direct observation of geometric phases using a three-pinhole interferometer*. *Physical Review A*, 81(1). doi:10.1103/physreva.81.012104
- [36] Dressel, J., Broadbent, C. J., Howell, J. C., & Jordan, A. N. (2011). *Experimental Violation of Two-Party Leggett-Garg Inequalities with Semiweak Measurements*. *Physical Review Letters*, 106(4). doi:10.1103/physrevlett.106.040402
- [37] Brunner, N., Scarani, V., Wegmüller, M., Legré, M., & Gisin, N. (2004). *Direct Measurement of Superluminal Group Velocity and Signal Velocity in an Optical Fiber*. *Physical Review Letters*, 93(20). doi:10.1103/physrevlett.93.203902
- [38] Ritchie, N. W. M., Story, J. G., & Hulet, R. G. (1991). *Realization of a measurement of a "weak value."* *Physical Review Letters*, 66(9), 1107–1110. doi:10.1103/physrevlett.66.1107

- [39] Solli, D. R., McCormick, C. F., Chiao, R. Y., Popescu, S., & Hickmann, J. M. (2004). *Fast Light, Slow Light, and Phase Singularities: A Connection to Generalized Weak Values*. *Physical Review Letters*, *92*(4). doi:10.1103/physrevlett.92.043601
- [40] Parks, A. D., Cullin, D. W., & Stoudt, D. C. (1998). *Observation and measurement of an optical Aharonov-Albert-Vaidman effect*. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *454*(1979), 2997–3008. doi:10.1098/rspa.1998.0288
- [41] Duck, I. M., Stevenson, P. M., & Sudarshan, E. C. G. (1989). *The sense in which a “weak measurement” of a spin- $\frac{1}{2}$ particle’s spin component yields a value 100*. *Physical Review D*, *40*(6), 2112–2117. doi:10.1103/physrevd.40.2112
- [42] Boaz, T. & Cohen, E. (2013). *Introduction to Weak Measurements and Weak Values*. *Quanta*, *2*(1), 7-17. doi:https://doi.org/10.12743/quanta.v2i1.14
- [43] Aharonov, Y., & Rohrlich, D. (2005) *Quantum Paradoxes. Quantum Theory for the Perplexed*. (WILEY-VCH) Cap. 16. doi:10.1002/9783527619115
- [44] Aharonov, Y., Colombo, F., Sabadini, I., Struppa, D. C., & Tollaksen, J. (2011). *Some mathematical properties of superoscillations*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *44*(36), 365304. doi:10.1088/1751-8113/44/36/365304
- [45] Ferreira, P. J. S. G., & Kempf, A. (2006). *Superoscillations: Faster Than the Nyquist Rate*. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *54*(10), 3732–3740. doi:10.1109/tsp.2006.877642
- [46] Berry, M. V., & Popescu, S. (2006). *Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves*. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *39*(22), 6965–6977. doi:10.1088/0305-4470/39/22/011
- [47] Berry, M. V. (2016). *Suppression of superoscillations by noise*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *50*(2), 025003. doi:10.1088/1751-8113/50/2/025003
- [48] Zheludev, N. I. (2008). *What diffraction limit?* *Nature Materials*, *7*(6), 420–422. doi:10.1038/nmat2163
- [49] Aharonov, Y., Bergmann, P. G., & Lebowitz, J. L. (1964). *Time Symmetry in the Quantum Process of Measurement*. *Physical Review*, *134*(6B), B1410–B1416. doi:10.1103/physrev.134.b1410

- [50] Ozawa, M. (2004). *Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements*. *Annals of Physics*, 311(2), 350–416. doi:10.1016/j.aop.2003.12.012
- [51] Ozawa, M. (1984). *Quantum measuring processes of continuous observables*. *Journal of Mathematical Physics*, 25(1), 79–87. doi:10.1063/1.526000
- [52] Ozawa, M. (2003). *Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation*. *Physics Letters A*, 318(1-2), 21–29. doi:10.1016/j.physleta.2003.07.025
- [53] Pryde, G. J., O'Brien, J. L., White, A. G., Bartlett, S. D., & Ralph, T. C. (2004). *Measuring a Photonic Qubit without Destroying It*. *Physical Review Letters*, 92(19). doi:10.1103/physrevlett.92.190402
- [54] Ozawa, M. (2014). *Heisenberg's uncertainty relation: Violation and reformulation*. *Journal of Physics: Conference Series*, 504, 012024. doi:10.1088/1742-6596/504/1/012024
- [55] Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* *Physical Review*, 47(10), 777–780. doi:10.1103/physrev.47.777
- [56] Branciard, C. (2013). *Error-tradeoff and error-disturbance relations for incompatible quantum measurements*. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(17), 6742–6747. doi:10.1073/pnas.1219331110
- [57] Wu, S. (2013). *State tomography via weak measurements*. *Scientific Reports*, 3(1). doi:10.1038/srep01193
- [58] Busch, P., Lahti, P., & Werner, R. F. (2014). *Heisenberg uncertainty for qubit measurements*. *Physical Review A*, 89(1). doi:10.1103/physreva.89.012129
- [59] Vaidman, L. (1996). *Weak-measurement elements of reality*. *Foundations of Physics*, 26(7), 895–906. doi:10.1007/bf02148832
- [60] Barz, S. (2015). *Quantum computing with photons: introduction to the circuit model, the one-way quantum computer, and the fundamental principles of photonic experiments*. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 48(8), 083001. doi:10.1088/0953-4075/48/8/083001
- [61] Hecht E. (2002). *Optics*, Adelphi University. 4th Ed. Sección 8.7 pp 352-362